UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO EM MATEMÁTICA- PROFMAT

Rafael Lourenço Queiroz

REPOSITÓRIO DE MATERIAIS PARA ESTUDO DE FUNÇÕES: AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

MOSSORÓ
ANO 2024

Rafael Lourenço Queiroz

REPOSITÓRIO DE MATERIAIS PARA ESTUDO DE FUNÇÕES: AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática do Programa de PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Orientador: Fabricio de Figueredo Oliveira, Prof. Dr.

MOSSORÓ
ANO 2024

Q3r Queiroz, Rafael Lourenço.
REPOSITÓRIO DE MATERIAIS PARA ESTUDO DE FUNÇÕES: AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA / Rafael Lourenço Queiroz. - 2024.
96 f. : il.

Orientador: Fabrício de Figueredo Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2024.

1. Funções. 2. Aplicações. 3. Materiais e Práticas. 4. Repositório Digital. I. Oliveira, Fabrício de Figueredo, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automáto em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Rafael Lourenço Queiroz

REPOSITÓRIO DE MATERIAIS PARA ESTUDO DE FUNÇÕES: AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática do Programa de Pós-Graduação do PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Defendida em: 19 / 07 / 2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA
Data: 24/07/2024 18:51:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Fabricio de Figueredo Oliveira, Prof. Dr. (UFERSA)

Presidente

Documento assinado digitalmente
SUENE CAMPOS DUARTE
Data: 24/07/2024 13:46:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Suene Campos Duarte, Prof[a]. Dra. (UFERSA)

Membro Examinador

Documento assinado digitalmente
PAULO CESAR LINHARES DA SILVA
Data: 22/07/2024 11:03:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Paulo César Linhares da Silva, Prof. Dr. (UFERSA)

Membro Examinador

Documento assinado digitalmente
FRANCISCO CARPEGIANI MEDEIROS BORGES
Data: 19/07/2024 21:31:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Francisco Carpegiani Medeiros Borges, Prof. Dr. (UFDPar)

Membro Examinador

Raimunda Lourenço da Silva e José Francisco de Queiroz. (In Memorian).

José Francisco da Silva Filho, Antônio Lourenço de Queiroz, Raimundo Lourenço Ferreira Neto e Maria Jarlene de Sousa (presentes)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo cuidado sempre presente em todos os dias da minha e por me dar a oportunidade de chegar a este momento tão importante na minha trajetória acadêmica.

Aos meus pais, José Francisco e Raimunda Lourenço, por fazerem parte desta caminhada, me apoiando e me ajudando com todos os recursos possíveis que lhes eram disponíveis.

Aos meus irmãos, Antônio, José e Raimundo, por me ajudarem na caminhada estudantil, incentivando e ajudando sempre que possível.

A minha namorada, Jarlene Sousa, por estar comigo nos dias bons e ruins, por me ajudar a continuar, por cuidar de mim e contribuir para a produção deste trabalho.

Ao meu Orientador, professor Fabrício, por todas as orientações, ajuda e paciência disponibilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a Banca Examinadora pela disponibilidade em avaliar o presente trabalho e por todas as contribuições e sugestões que possam vir a ser apresentadas.

A todos os meus professores, profissionais de grande importância na minha trajetória acadêmica, em especial aos professores Ênio Lima pela sua grande ajuda no período da Graduação, Joabe Gileade, Rogério Cesar e Tassara Sarmento, docentes do ensino médio que acreditaram muito em mim.

A todos os meus amigos que participaram de forma direta e indireta na realização do meu percurso formativo e no desenvolvimento deste projeto.

"O senhor é meu Pastor e nada me faltará".

Bíblia Sagrada.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma variedade de materiais para os docentes de Matemática, com objetivo de agilizar e facilitar a prática pedagógica em sala de aula. O trabalho foi estruturado em cinco partes: análise de documentos, conceitos teóricos, aplicações, sugestões de práticas e repositório digital. Inicialmente realizamos uma análise da BNCC e do SISEDU, documentos norteadores para o processo de ensino aprendizagem, onde identificamos um déficit de aprendizagem relacionado ao tema Funções em duas escolas no município de Acopiara-Ce. Construímos, através de uma análise bibliográfica, material teórico das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Para cada função apresentada, também destacamos aplicações que podem ser utilizadas durante as aulas de Matemática, tanto como meio de contextualização, como também de motivação para os estudantes. Além disso, propomos algumas sugestões de práticas utilizando três plataformas digitais, PhetColorado, GeoGebra e Wordwall, ampliando assim a quantidade de possibilidades para os docentes. Todo o material gerado na elaboração deste trabalho está disponível em uma plataforma intitulada Repositório para Materiais de Funções Matemáticas, criada com ferramentas de desenvolvimento Web, especificamente HTML e CSS.

Palavras-chave: Funções; Aplicações; Materiais e Práticas; Repositório Digital.

ABSTRACT

This work presents a variety of materials for Mathematics teachers, aiming to streamline and facilitate pedagogical practice in the classroom. The work is structured into five parts: document analysis, theoretical concepts, applications, practice suggestions, and a digital repository. Initially, we conducted an analysis of the BNCC and SISEDU, guiding documents for the teaching and learning process, where we identified a learning deficit related to the topic of Functions in two schools in the municipality of Acopiara-Ce. Through a bibliographic analysis, we constructed theoretical material on linear, quadratic, exponential, and logarithmic functions. For each function presented, we also highlighted applications that can be used during Mathematics classes, both as a means of contextualization and as motivation for students. Additionally, we propose some practice suggestions using three digital platforms: PhetColorado, GeoGebra, and Wordwall, thus expanding the range of possibilities for teachers. All the material generated in the preparation of this work is available on a platform called Repository for Mathematical Functions Materials, created with web development tools, specifically HTML and CSS.
Keywords: Functions; Applications; Materials and Practices; Digital Repository.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

SISEDU Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional

SPAECE Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará

CODED/CED Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância

HTML HyperText Markup Language

CSS Cascading Style Sheets

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\exists$	Existe
Δ	Delta
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
α	Alfa
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\geq$	Maior que ou igual
$\leq$	Menor que ou igual
∞	Infinito
$\Rightarrow$	Implica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino tradicional ainda é um método predominante na maioria das salas no nosso sistema educacional; aulas dialogadas utilizando livros didáticos, lousa, pincéis e apagadores tem sido o modelo universal para a formação de estudantes. Percebemos dificuldades por parte dos alunos em temas considerados básicos no ensino de Matemática. O Pisa de 2022, mostra que menos de 50% dos alunos obtiveram nível mínimo de aprendizado em Matemática e Ciências. Dentre estes temas podemos destacar as Funções, assunto fundamental para o ensino de Matemática tanto no ensino básico, como no ensino superior.

A disciplina de Matemática por muitos é vista como um ‘‘monstro”, sem aplicações cotidianas e chata em alguns casos. Qual professor nunca ouviu aquela frase durante uma explicação: “E onde é que vou usar isso na minha vida? ”. Essas perguntas, em certo ponto desmotivadoras, nos mostram muito sobre como os alunos veem a Matemática, atribuindo um aspecto negativo, assim o processo de ensino aprendizagem pode ser comprometido, tornando-se até desmotivador. Um fator aliado que não contribui tanto para a inovação em sala de aula são os materiais didáticos e a dinâmica de atividades propostas, sempre repetitivas e sem muitas alterações, claro que o livro é apenas um instrumento, mas é um dos principais recursos que norteiam a aprendizagem. Nesse ponto apresentamos aqui algumas ferramentas que podem auxiliar os professores na produção de aulas mais efetivas de acordo com temas específicos relacionados ao ensino de funções.

A tecnologia vem contribuindo muito neste aspecto, pois ampliou os meios de divulgação e acesso à informação, assim, desde que tenhamos internet, podemos acessar periódicos de divulgação científica onde quer que estejamos e assim buscar informações para aperfeiçoamento da prática escolar. Podemos indagar: diante de tantos recursos existentes, por quê continuamos repetindo os mesmos métodos? Existem algumas respostas possíveis. Primeiro que a quantidade de materiais na rede e os locais em que estão alocados são muito vastos e que para encontrar um material adequado para uma determinada aula pode levar um tempo significativo do planejamento. Aliado a essa resposta, o tempo do planejamento é limitado e nem sempre é possível preparar novos materiais. Existem materiais que requerem uma habilidade técnica para seu manuseio, o que torna o processo ainda mais difícil, sem falar de questões estruturais que por muitas vezes tornam determinadas práticas inacessíveis ao ambiente. Tendo em vista tais situações buscamos como objetivos principais deste trabalho apresentar definições formais de algumas funções, descrever suas aplicações, exibir sugestões de plataformas digitais com práticas para o ensino de funções e, por fim, a produção de um repositório digital de Matemática para o tema de Funções, propondo a criação de um local acessível com materiais e práticas confiáveis aos professores do Ensino Médio, facilitando a preparação de suas aulas no assunto abordado.

O trabalho foi estruturado em cinco partes: análise de documentos, conceitos teóricos, aplicações, sugestões de práticas e repositório digital. Inicialmente realizamos uma análise de documentos norteadores para o processo de ensino aprendizagem, a BNCC e dados do SISEDU, onde identificamos um déficit de aprendizagem relacionado ao tema abordado em duas escolas no município de Acopiara-Ce. Em seguida, construímos através de uma análise bibliográfica, material teórico das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Para cada função apresentada, destacamos aplicações que poderão ser utilizadas durante as aulas de Matemática, tanto como meio de contextualização, como também de motivação para os estudantes. Propomos algumas sugestões de práticas utilizando três plataformas digitais, PhetColorado, GeoGebra e Wordwall, ampliando assim a quantidade de possibilidades para os docentes. Todo o material gerado na elaboração deste trabalho está disponível em uma plataforma intitulada Repositório para Materiais de Funções Matemáticas, criada com ferramentas de desenvolvimento Web, a linguagem de marcação HTML e a linguagem de estilização CSS. Deste modo, durante a leitura deste trabalho serão apresentados os seguintes capítulos, respectivamente: Aspectos documentais sobre o Ensino de Funções, Conceitos Teóricos de Funções, Aplicações, Materiais e Práticas e Repositório Digital.

Espera-se que este material possa servir como subsídio nas aulas de matemática e no planejamento de professores do ensino médio, tornando o trabalho mais eficiente para otimização do tempo na preparação de aulas, além de contribuir para demais pesquisas acadêmicas.

2 ASPECTOS DOCUMENTAIS SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES

Entender os processos do mundo à nossa volta, assim como características e propriedades de determinados eventos, são habilidades essenciais para nossa interação social. Diariamente, somos bombardeados com uma imensidão de dados, seja na TV, jornal, internet ou até mesmo nas conversas corriqueiras do dia a dia. Interpretar tais dados e transformá-los em informações úteis é uma das principais tarefas que precisamos executar, assim, é comum encontrarmos informações apresentadas em gráficos ou tabelas, tais informações, quando organizadas adequadamente, possibilitam uma melhor análise para solução de problemas.

Nesse ponto, a Matemática oferece uma importante ferramenta para nos auxiliar nas atividades diárias, as funções. Este tema é de grande importância, tanto para o ensino básico como para o superior. No primeiro, o foco principal são as funções consideradas elementares: função afim, função quadrática, função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas. Tal estudo torna-se relevante para o ensino devido a sua capacidade de representar diversos fenômenos e situações reais. Veremos a seguir de que forma esse assunto é tratado pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular) do Ensino Médio.

2.1 BNCC

A BNCC, como o próprio nome sugere, é um documento que normatiza um currículo a ser trabalhado durante a vida estudantil dos alunos, tanto do Ensino Fundamental, como do Ensino Médio, determinando quais aprendizagens devem ser desenvolvidos em cada período. Focaremos nessa sessão o ensino de Matemática voltado para o nível médio.

Para a área de Matemática, a BNCC propõe uma ampliação das aprendizagens adquiridas durante o Ensino Fundamental, sendo este dividido em unidades do conhecimento: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Para o Ensino Médio, tais aprendizagens são trabalhadas com foco na construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada a realidade. Essas divisões são abordadas de uma forma diferente, onde é elencado um conjunto de pares e ideias fundamentais que formam ligações entre as diferentes áreas: variação e constância, certeza e incerteza, movimento e posição, relações e inter-relações.

O modelo criado foi pautado em um aprendizado baseado em competências. Segundo o Ministério da Educação (Brasil), 2017

> "Competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. "

As competências são divididas em gerais e específicas, sendo as gerais comuns a todas as áreas do conhecimento, divididas em dez. Para a área de Matemática existem cinco competências específicas a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Médio, são elas:

Competências específicas de Matemática	
Competência 1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
Competência 2	Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
Competência 3	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Competência 4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
Competência 5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Assim, percebe-se uma organização curricular estruturada, pautada no desenvolvimento de competências e habilidades. Cada uma das cinco competências citadas possuem um conjunto de habilidades a serem assimiladas, das quais iremos destacar as relacionadas ao Estudo de Funções.

Código das habilidades	Descrição das habilidades referentes a Competência 1
(EM13MAT101)	Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Código das habilidades	Descrição das habilidades referentes a Competência 3
(EM13MAT302)	Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
(EM13MAT304)	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
(EM13MAT305)	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306)	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
Código das habilidades	Descrição das habilidades referentes a Competência 4
(EM13MAT401)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos

(EM13MAT402)	nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT403)	Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.
(EM13MAT404)	Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405)	Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento.
Código das habilidades	Descrição das habilidades referentes a Competência 5
(EM13MAT501)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503)	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.
(EM13MAT506)	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507)	Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
	Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais

(EM13MAT508)	de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Verificamos deste modo que o tema de funções é essencial para a formação do aluno, estando presente na maioria das competências a serem desenvolvidas em Matemática no seu percurso formativo.

2.2 SISEDU

Nesta seção vamos apresentar uma coleta de dados realizada em duas escolas do município de Acopiara-Ce. Esta pesquisa teve como objetivo identificar aspectos relacionados ao aprendizado de Funções. Para isso, utilizamos os dados obtidos do Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional (SISEDU), uma plataforma utilizada para realizar avaliações diagnóstica de forma periódica no Estado do Ceará.

De acordo com SEDUC:

> “O Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional (SISEDU) é uma plataforma da Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância (CODED/CED) que tem por objetivo identificar, por meio da realização de uma avaliação diagnóstica, possíveis operações mentais utilizadas pelos alunos durante as avaliações. ”

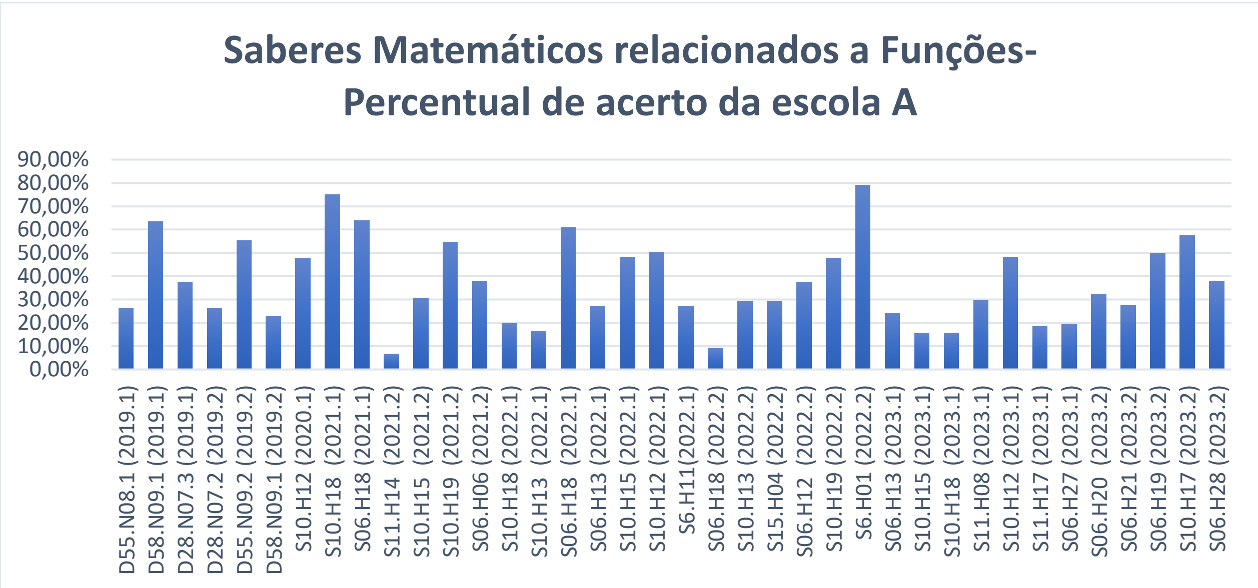
Essas avaliações diagnósticas são executadas em todas as turmas do 1º ao 3º ano do Ensino Médio, possuindo duas aplicações por ano. Por termos viabilidade na coleta de dados e por sua importância na fase de ensino, selecionamos turmas de 3º ano. A escolha da plataforma foi realizada pela facilidade apresentada em seu manuseio, sendo possível através do SISEDU identificar déficits de aprendizagem para determinados temas de descritores, saberes ou habilidades. Essas avaliações são baseadas na Matriz de Referência do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), sendo o assunto de Funções um tema do documento citado.

Para preservar os nomes das escolas na pesquisa, iremos nos referir a cada instituição por A e B. Cada escola tem um perfil diferente e ambas estão localizadas no centro da cidade, motivo que foi determinante para suas escolhas, visto que a possibilidade de acesso era maior. A primeira é uma escola profissionalizante de tempo integral e a segunda uma escola regular. Ressaltamos que a intenção da pesquisa é identificar como tem se dado o aprendizado de

Funções nas escolas apresentadas, sendo irrelevante comparações além dessas nesse momento.

A seguir apresentamos uma série histórica relacionada ao tema de Funções nas avaliações diagnósticas de 2019 a 2023 para as duas escolas. O período especificado na pesquisa é referente ao ano que a plataforma SISEDU foi implantada no Ceará até o período do início da pesquisa. Nos gráficos a seguir, o eixo horizontal representa os saberes, habilidades ou descritores relacionados a funções e o eixo vertical, indica o percentual de acerto dessas habilidades pelos estudantes.

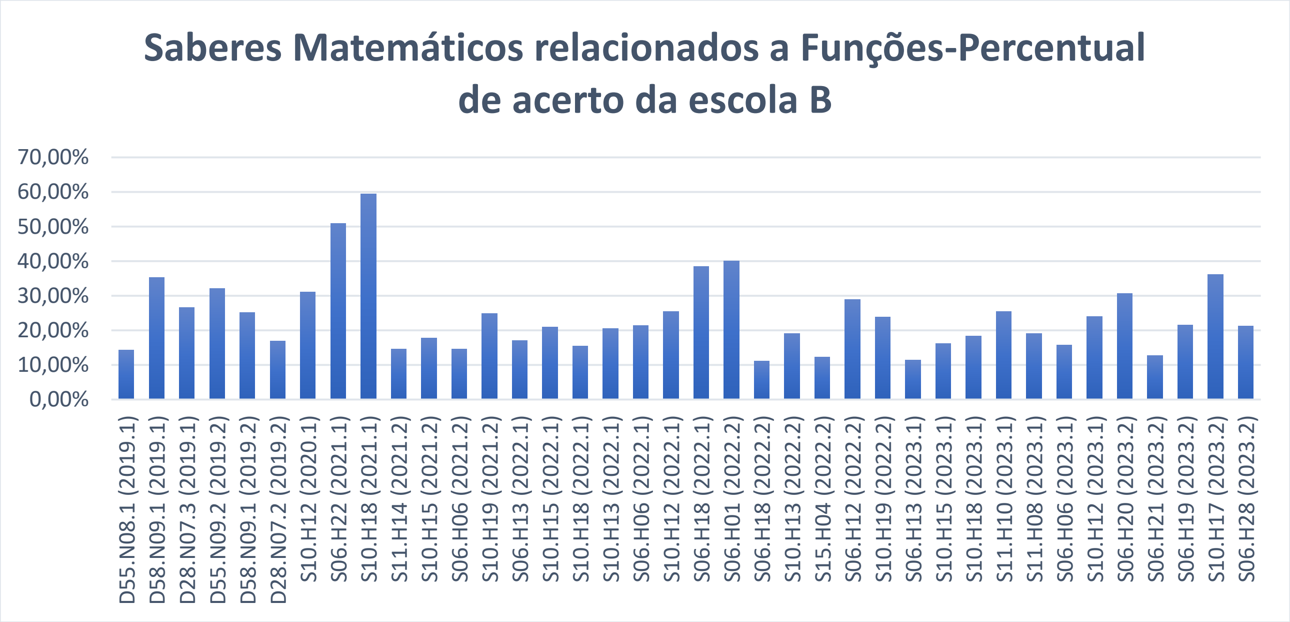
Gráfico 1-Saberes Matemáticos da Escola A



Fonte: Compilação do autor

Na escola A, percebe-se que dentre os descritores, saberes e habilidades abordadas nas avaliações diagnósticas no período especificado, a maioria possui percentual de acerto abaixo de 50%, salvo alguns casos.

Gráfico 2-Saberes Matemáticos da Escola B



Fonte: Compilação do autor

De modo análogo, o mesmo fato se repete para a escola B, assim, a análise dos dados mostra uma grande variação no percentual de acerto dos Saberes relacionados a funções. Porém um fato se destaca em relação aos demais. Grande parte do percentual de acerto não chega nem a 50%, o que indica que a maioria dos alunos estão tendo dificuldades em temas relacionados a funções. Isso mostra que o tema é um ponto que merece atenção, sendo um dos principais assuntos para o estudo de Matemática.

Visto a importância do tema para o estudo de Matemática e as dificuldades apresentadas, buscamos elaborar um material que possa auxiliar os professores em suas aulas com conteúdos teóricos, aplicações, sugestões de materiais, práticas e dicas de ferramentas. Todo esse material criado será disponibilizado de maneira online para que os docentes possam ter acesso, ampliando assim suas possibilidades no processo de ensino aprendizagem.

3 CONCEITOS TEÓRICOS DE FUNÇÕES

Neste capítulo vamos abordar os conceitos teóricos relacionados ao tema de Funções. Daremos destaque a definição matemática, características (imagem, domínio e contradomínio), classificações de funções (injetora, sobrejetora, bijetora, função par e função ímpar), gráficos e seções destinadas especificamente para trabalhar as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

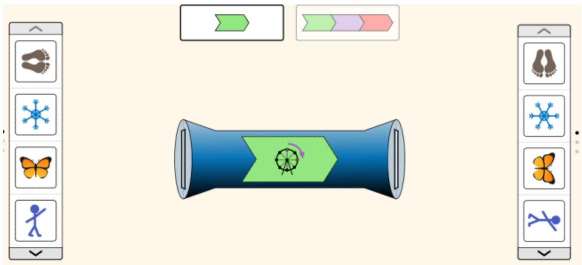
3.1 NOÇÕES BÁSICAS DE FUNÇÕES

A teoria desenvolvida nesta seção é baseada nos livros dos autores Lima, 2013 e Iezzi & Murakami, 2013.

3.1.1 NOÇÃO INTUITIVA

Um bom e informal exemplo para iniciar o estudo de função na Matemática é a ideia da 'máquina de transformar'. Funções podem ser comparadas com máquinas que realizam trabalhos diferentes de acordo com regras pré-estabelecidas. Veja a seguinte ilustração realizada na plataforma Phet Colorado.

Figura 1-Máquina de Transformar



Fonte: Phet Colorado (2023)

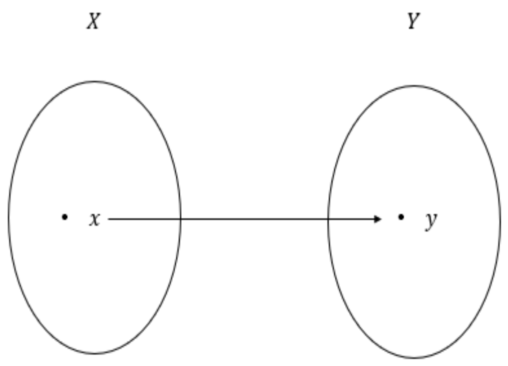
Na coluna da esquerda temos algumas figuras que foram inseridas na máquina de transformar, a peça central simula um tubo. Note que na coluna direita temos as mesmas figuras, porém, com uma alteração em relação a posição inicial. Isso acontece porque tal ferramenta possui uma regra, neste caso específico, é girar a figura inserida 90º no sentido horário. É importante ressaltar que o estudo de funções não se restringe a apenas casos com funções numéricas, sendo a ideia mais abrangente do que pensamos, como visto acima. A seguir iremos apresentar alguns conceitos formais para este estudo.

3.1.2 DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES

Definição 1: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma função $f: X \to Y$ é uma relação entre esses conjuntos que permite associar cada elemento $x \in X$ a um único elemento $y \in Y$, tal que $y = f(x)$. O conjunto X é chamado de domínio da função ($D(f)$) e o conjunto Y de contradomínio ($CD(f)$). O elemento $f(x) \in Y$ é chamado de imagem de x e o conjunto desses elementos é nomeado por imagem da função ($Im(f)$). Além disso, x é chamado de variável independente e $f(x)$ de variável dependente, podendo $f(x)$ também ser denotado por y.

Veja a representação na Figura 2.

Figura 2-Diagrama de Função



Fonte: Compilação do autor

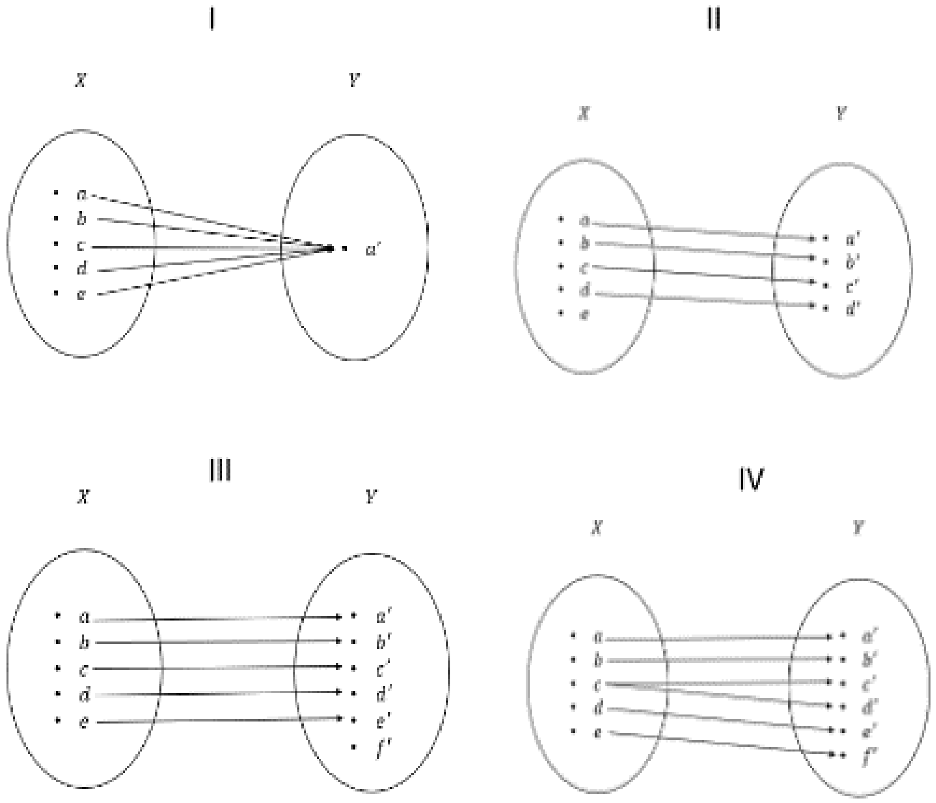
3.1.3 DIAGRAMAS QUE REPRESENTAM FUNÇÕES

De acordo com a Definição 1, para ser função é necessário que duas condições ocorram:

- Todos os elementos do conjunto X devem estar associados a elementos do conjunto Y;
- Cada elemento do conjunto X deve estar associado a um único elemento do conjunto Y.

Assim, percebemos na Figura 3 que o diagrama II e o diagrama IV não representam funções.

Figura 3-Diagramas que representam e que não representam funções



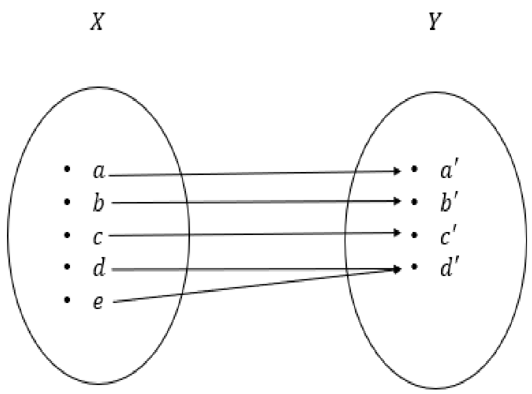
Fonte: Compilação do autor

O diagrama II não representa função, pois existe um elemento do conjunto X, no caso e, que não possui associação com o conjunto Y, já o quarto não representa função porque existe um elemento do conjunto X, no caso c, que está associado a dois elementos do conjunto Y, c' e d'. O diagrama I representa função, pois mesmo que todos os elementos de X estejam associados a um único elemento, ela ainda está nas condições apresentadas, de modo análogo segue para o diagrama III.

3.1.4 FUNÇÕES SOBREJETIVAS, INJETIVA E BIJETIVAS

Definição 2: Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é sobrejetora quando dado qualquer $y \in Y$, $\exists\ x \in X$ tal que $f(x) = y$. Veja a Figura 4.

Figura 4-Função Sobrejetora

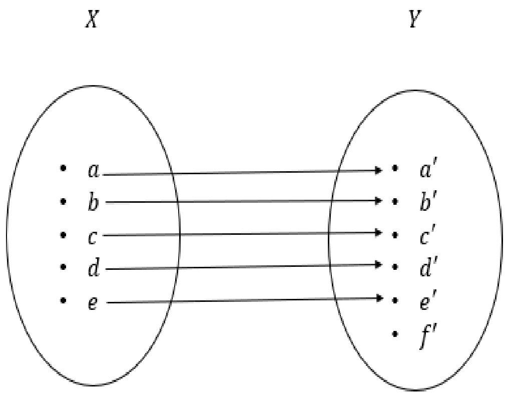


Fonte: Compilação do autor

Definição 3: Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é injetora quando dados quaisquer

$x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Veja a Figura 5.

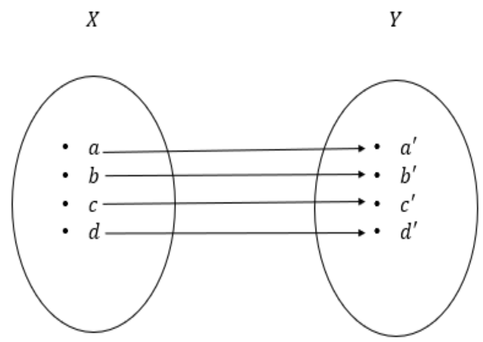
Figura 5-Função Injetora



Fonte: Compilação do autor

Definição 4: Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é bijetora quando ela é sobrejetora e injetora. Veja a Figura 6.

Figura 6-Função Bijetora



Fonte: Compilação do autor

3.1.5 FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Definição 5: Uma função $f: X \to Y$ é dita uma função par quando dado $x \in X$, temos que

$$f(x) = f(-x).$$

Definição 6: Uma função $f: X \to Y$ é dita uma função ímpar quando dado $x \in X$, temos que

$$f(x) = -f(-x).$$

3.1.6 GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Definição 7: O gráfico de uma função $f\colon X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ formado por todos os pares ordenadas (x, y) tal que $x \in X$ e $y \in Y$, com $f(x) = y$.

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

Definição 8: Definimos como zero ou raiz de uma função todo número x tal que $f(x) = 0$.

Definição 9: Dizemos que uma função é:

Crescente quando dados $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$;

decrescente quando dados $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

3.1.7 FUNÇÃO INVERSA

Definição 10: Considere uma função $f: X \to Y$ bijetora. A função inversa de f é dada por

$f^{-1} : Y \to X$ tal que $f^{-1}(y) = x$.

3.2 FUNÇÃO AFIM

A teoria desenvolvida nesta seção é baseada nos livros dos autores Lima, 2013 e Iezzi & Murakami, 2013. Apresentaremos alguns resultados para o estudo da função destacada.

Definição 11:

Uma função afim/polinomial do 1º grau é uma função

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = ax + b,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

As constantes a e b recebem o nome de coeficientes, angular e linear, respectivamente. Ambos exercem papéis importantes na função afim.

3.2.1 ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO AFIM

Teorema 1:

Considere a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, então o zero dessa função é determinado por $x = -\frac{b}{a}$.

Demonstração:

De fato, seja x a raiz da função $f(x) = ax + b$, temos,

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}. \blacksquare$$

3.2.2 GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

Teorema 2: Toda função afim tem como representação gráfica uma reta no plano cartesiano, sendo o ponto de interseção com o eixo Y, o coeficiente linear e o ponto de interseção com o eixo X o zero da função.

Demonstração:

Para mostrar que o gráfico é sempre uma reta, precisamos mostrar que, dados três pontos satisfazendo a função, estes três pontos são colineares. Considere os pontos $P_1(x_1, f(x_1))$, $P_2(x_2, f(x_2))$ e $P_3(x_3, f(x_3))$ com $x_1 < x_2 < x_3$. Para mostrar que os pontos são colineares basta mostrar que $d_{P_1,P_3} = d_{P_1,P_2} + d_{P_2,P_3}$. Utilizando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d_{P_1,P_3} = \sqrt{(f(x_3) - f(x_1))^2 + (x_3 - x_1)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P_1,P_3} = \sqrt{(a\,x_3 + b - (a\,x_1 + b))^2 + (x_3 - x_1)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P_1,P_3} = \sqrt{(a\,(x_3 - x_1))^2 + (x_3 - x_1)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P_1,P_3} = \sqrt{(a^2 + 1)\,(x_3 - x_1)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P_1,P_3} = (x_3 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)}.$$

De modo análogo, $d_{P_1,P_2} = (x_2 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)}$ e $d_{P_2,P_3} = (x_3 - x_2)\sqrt{(a^2 + 1)}$. Note que,

$$d_{P_1,P_2} + d_{P_2,P_3} = (x_2 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)} + (x_3 - x_2)\sqrt{(a^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$d_{P_1,P_2} + d_{P_2,P_3} = (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{(a^2 + 1)} \Rightarrow$$

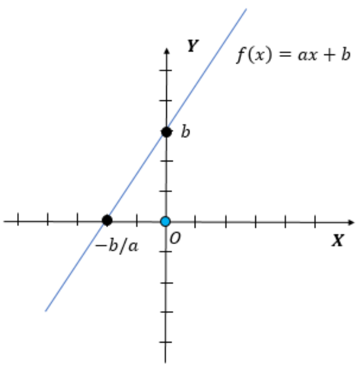
$$d_{P_1,P_2} + d_{P_2,P_3} = (x_3 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$d_{P_1,P_2} + d_{P_2,P_3} = d_{P_1,P_3}.$$

Assim, concluímos que o gráfico de uma Função Afim é sempre uma reta. Agora para encontrar o ponto de interseção com os eixos cartesianos, basta tomar $y = 0$ para a interseção com eixo X, que significa o mesmo que determinar o zero da função e tomar $x = 0$ para a interseção com o eixo Y, assim,

$$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b. \blacksquare$$

Figura 7-Gráfico da função afim



Fonte: Compilação do autor

3.2.3 IMAGEM DA FUNÇÃO AFIM

Teorema 3:

A função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, tem

$Im(f) = \mathbb{R}$.

Demonstração:

De fato, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y-b}{a}$ tal que $f(x) = y$. Aplicando x na função, temos

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = a \cdot \left(\frac{y-b}{a}\right) + b \Rightarrow$$

$$f(x) = y - b + b \Rightarrow f(x) = y.$$

Logo, $Im(f) = \mathbb{R}$. ■

Teorema 4: A função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

é sobrejetora, injetora e bijetora.

Demonstração:

Para mostrar que a função afim é sobrejetora, basta mostrarmos que $Im(f) = CD(f)$. Como $CD(f) = \mathbb{R}$, então devemos ter que $Im(f) = \mathbb{R}$. De fato, de acordo com o teorema anterior $Im(f) = \mathbb{R}$.

Já para a injetividade, vamos utilizar a contra positiva de $x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a\, x_1 + b = a\, x_2 + b \Rightarrow$$

$$a\, x_1 = a\, x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

logo, a função afim é injetora. Como ela é injetora e sobrejetora, consequentemente é bijetora. ■

3.2.4 COEFICIENTE ANGULAR

Teorema 5: Considere a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O coeficiente angular também pode ser conhecido como taxa de variação, já que o mesmo é determinado através da variação entre as ordenadas e abscissas. Assim,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, com $x_1 \neq x_2$. Além disso, se $a > 0$, dizemos que a função é crescente, caso contrário, será decrescente.

Demonstração:

Seja x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos que $f(x_1) = a\,x_1 + b$ e $f(x_2) = a\,x_2 + b$. Podemos isolar o b em ambas as equações e depois igualar os resultados, obtendo assim,

$$f(x_1) - ax_1 = f(x_2) - ax_2 \Rightarrow$$

$$ax_2 - ax_1 = f(x_2) - f(x_1) \Rightarrow$$

$$a(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \Rightarrow$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Para demonstrar a segunda parte temos que utilizar a definição de função crescente e decrescente.

Demonstração:

Considere $a > 0$, devemos mostrar que $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$. Como a é positivo, podemos multiplicar a desigualdade $x_1 < x_2$ por a e somar b em ambos os lados, assim,

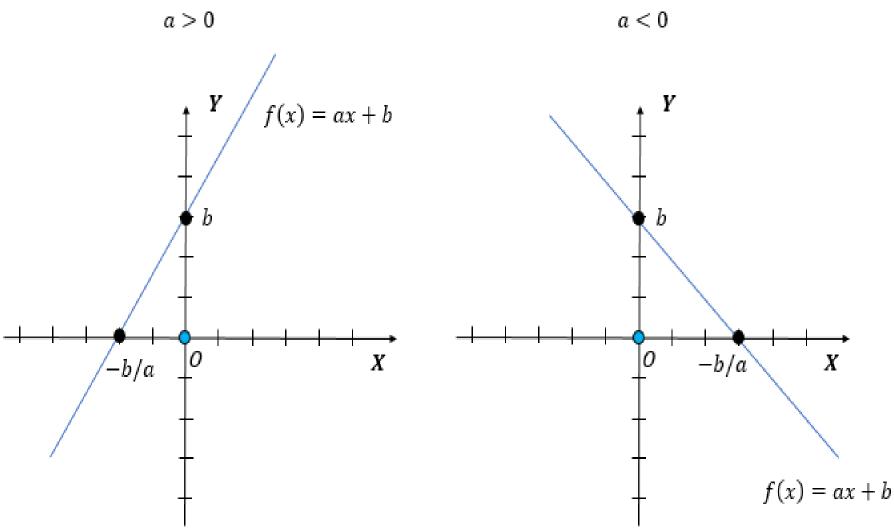
$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

De modo análogo, considere $a < 0$, devemos mostrar que $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$. Como a é negativo, podemos multiplicar a desigualdade $x_1 < x_2$ por a, alterando assim o sinal da desigualdade, e somar b em ambos os lados, assim,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \blacksquare$$

Veja representação no plano cartesiano na figura 8.

Figura 8-Função afim crescente e função afim decrescente



Fonte: Compilação do autor

3.3 FUNÇÃO QUADRÁTICA

A teoria desenvolvida nesta seção é baseada nos livros dos autores Lima, 2013, Iezzi & Murakami, 2013 e Caminha, 2022. Apresentaremos alguns resultados para o estudo da função destacada.

Definição 12:

Uma função quadrática/polinomial do 2º grau é uma função

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por,

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. As constantes a, b e c recebem o nome de coeficientes e exercem papéis importantes na função quadrática.

3.3.1 ZERO OU RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Teorema 6:

Considere a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ e x o zero da função, então $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Demonstração:

Para determinar o zero de função, basta pegar a função e igualar a zero, assim, como f é uma função quadrática, temos que $ax^2 + bx + c = 0$. Para a demonstração, vamos utilizar o método de completar quadrados.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{4ac}{a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. ■

Observação: Algumas considerações devem ser realizadas nesse caso em relação ao Δ:

$\Delta > 0 \Rightarrow$ duas raízes reais e distintas;

$\Delta = 0 \Rightarrow$ duas raízes reais iguais;

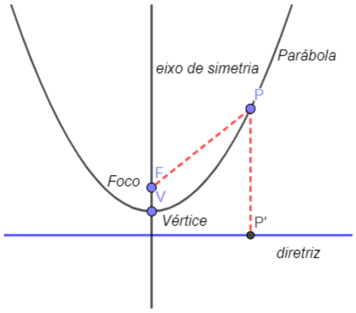
$\Delta < 0 \Rightarrow$ não possui raízes reais.

3.3.2 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Antes de apresentarmos o teorema que afirma qual é a representação gráfica de uma função quadrática, vamos definir o que é uma parábola.

Definição 12: Dado um ponto F chamado de foco e d uma reta chamada de diretriz, definimos parábola como o conjunto de todos os pontos P do plano cuja distância de P ao foco é a mesma distância até a diretriz. Além disso, existem outros elementos que a compõem, são eles: o vértice e o eixo de simetria.

Figura 9-Representação geométrica de uma parábola e seus elementos



Fonte: Compilação do autor

Pela definição apresentada, concluímos que $d_{F,V} = d_{V,q} = p$, sendo p chamado de parâmetro e cujo módulo representa a distância do foco até a diretriz.

Considerando a figura no plano cartesiano, o eixo de simetria tem três posições possíveis, ser paralelo ao eixo Y, ser perpendicular ao eixo X ou não ser nenhuma das opções anteriores. Estudaremos nesta seção apenas o primeiro caso, visto que ele irá nos fornecer a equação que irá representar uma função quadrática.

3.3.3 EIXO DE SIMETRIA PARALELO AO EIXO Y

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente a parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e d sua diretriz. Inicialmente considere uma parábola cujo seu vértice coincida com a origem do plano cartesiano, ou seja, $O(0,0)$, assim $F(0, p)$ de modo $d = y = -p$. Vamos calcular a distância de $d_{P,F}$ e $d_{P,q}$.

$$d_{P,F} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P,F} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

e

$$d_{P,d} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} \Rightarrow$$

$$d_{P,d} = \sqrt{(y+p)^2}.$$

Como $d_{P,F} = d_{P,d}$, temos

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Rightarrow$$

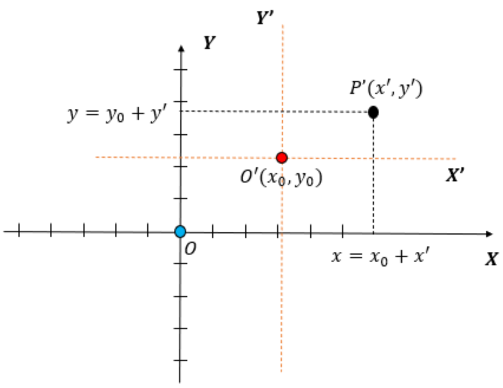
$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 4py.$$

Assim, dado um ponto sobre a parábola, esse ponto tem que satisfazer essa relação. A recíproca também é verdadeira.

Agora considere uma parábola cujo seu vértice seja $V(x_0, y_0)$, vamos criar um novo sistema de coordenadas cartesianas sobre o plano xOy de modo que $V(x_0, y_0)$ seja a origem desse novo sistema, $x'O\,y'$. Assim, dado um ponto $P'(x', y')$ nesse novo sistema cartesiano, a equação da parábola seria $x'^2 = 4py'$. Veja a seguinte representação no plano cartesiano para os dois sistemas ortogonais:

Figura 10-Mudança de eixos cartesianos



Fonte: Compilação do autor

Note que $x = x_0 + x'$ e $y = y_0 + y'$, consequentemente a parábola de equação $x'^2 = 4py'$ no plano $x'O\,y'$ pode ser expressa como $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ no plano xOy.

Teorema 7: Considere a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. A representação gráfica de uma função quadrática é uma parábola.

Demonstração: Basta mostrarmos que uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita no formato $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$. Trocando $f(x)$ por y, temos que $y = ax^2 + bx + c$, segue as implicações

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{ax} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{ax} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = (x + \frac{b}{2a})^2 \Rightarrow$$

$$\frac{4ay}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{4ay + \Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a}(y + \frac{\Delta}{4a}) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$4\frac{1}{4a}\left(y - (-\frac{\Delta}{4a})\right) = \left(x - (-\frac{b}{2a})\right)^2.$$

Note que a expressão apresentada representa a equação de uma parábola em que

$$p = \frac{1}{4a},\ x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ e } x_0 = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Assim concluímos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. ■

3.3.4 VÉRTICE DA PARÁBOLA

O vértice da parábola representa um elemento importante no estudo desta função, pois alguns problemas de aplicações derivam desse ponto, dentre eles, podemos destacar problemas de máximos e mínimos como veremos na parte de aplicações de função quadrática.

Teorema 8: Considere a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. As coordenadas do vértice de uma de uma função quadrática são

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Demonstração: Como vimos anteriormente, toda parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Y possui equação no seguinte formato $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ onde (x_0, y_0) representa as coordenadas do vértice. Sabemos que que a função $y = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita como $4\frac{1}{4a}\left(y - (-\frac{\Delta}{4a})\right) = \left(x - (-\frac{b}{2a})\right)^2$. Assim, concluímos que $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. ■

Teorema 9: Considere a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Se $a > 0$ e

1. $x_1 < x_2 < x_v \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, função decrescente;
2. $x_v < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, função crescente.

Demonstração:

Considere as hipóteses dadas quando $a > 0$, vamos analisar a diferença $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = ax_1^2 + bx_1 + c - (ax_2^2 + bx_2 + c)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1^2 - {x_2}^2) + b(x_1 - x_2)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)[a(x_1 + x_2) + b]$$

No 1º caso, $x_1 < x_2 < x_v$ implica que $x_1 - x_2 < 0$ e $x_1 + x_2 < 2x_v$, consequentemente pela segunda desigualdade, temos $a(x_1 + x_2) + b < 0$, logo $f(x_1) - f(x_2) > 0$, portanto $f(x_1) > f(x_2)$.

No 2º caso, $x_v < x_1 < x_2$ implica que $x_1 - x_2 < 0$ e $2x_v < x_1 + x_2 < 2x_v$, consequentemente pela segunda desigualdade, temos $a(x_1 + x_2) + b > 0$, logo $f(x_1) - f(x_2) < 0$, portanto $f(x_1) < f(x_2)$. ■

Obs. 1: Se $a < 0$ e

1. $x_1 < x_2 < x_v \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, função crescente;
2. $x_v < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, função decrescente.

Análogo ao anterior.

Tal teorema nos mostra uma característica importante da função quadrática dependendo do valor do a. Se o valor do a for positivo, a função é decrescente quando o x varia no intervalo de$]-\infty,\ x_v]$ e é crescente quando o x varia no intervalo de $[x_v, +\infty[$. Se o valor do a for negativo, a função é crescente quando o x varia no intervalo de$]-\infty,\ x_v]$ e é decrescente quando o x varia no intervalo de $[x_v, +\infty[$.

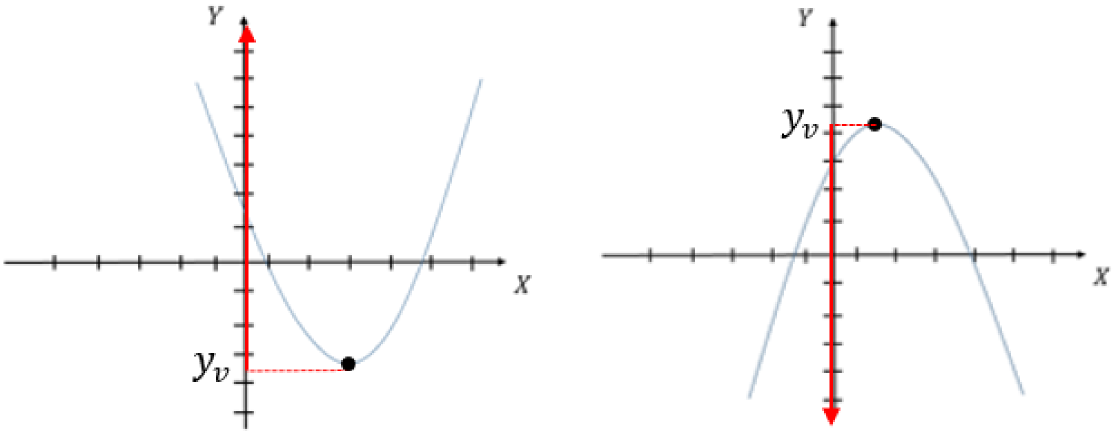
3.3.5 IMAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Considere a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos que

- Se $a > 0$, então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | \ y \geq y_v\}$
- Se $a < 0$, então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | \ y \leq y_v\}$

Veja a representação gráfica na figura 11.

Figura 11- Imagem da Função Quadrática e Concavidade da Parábola



Fonte: Compilação do autor

Dizemos que o primeiro caso tem concavidade voltada para cima e o segundo concavidade voltada para baixo. Observe que no primeiro caso a parábola possui um valor mínimo e no segundo, ela possui um valor máximo.

3.4 FUNÇÃO EXPONENCIAL

A teoria desenvolvida nesta seção é baseada nos livros dos autores Lima, 2013, Iezzi et al., 2013 e Guidorizzi, 2021. Apresentaremos alguns resultados para o estudo da função destacada.

Definição 13: Uma função exponencial é uma função

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = a^x,$$

com $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$.

Teorema 10: Considere uma função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. A função exponencial não apresenta ponto de interseção com o eixo X, logo não tem raízes, e seu ponto de interseção com o eixo Y é ponto (0,1).

Demonstração: Para determinar o ponto de interseção com o eixo Y basta tomarmos $x = 0$. Assim,

$$f(0) = a^0 = 1.$$

Portanto, o ponto de interseção com o eixo Y é (0,1). Para demonstrar que a função não possui interseção com o eixo X, suponha o contrário. Assim, $a^x = 0$, o que é absurdo, pois $a > 0$. Deste modo, a função exponencial não possui ponto de interseção com o eixo X. ■

Teorema 11: Considere uma função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

1º caso: Se $a > 1$, a função exponencial é crescente;

2º caso: Se $0 < a < 1$, a função exponencial é decrescente.

Para a demonstração deste teorema, utilizaremos dois teoremas auxiliares cuja demonstração pode ser encontrada na obra de Iezzi et al., 2013.

1º Teorema auxiliar: Sendo a e $b \in \mathbb{R}$, $a > 1$ temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b > 0.$$

2º Teorema auxiliar: Sendo a e $b \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b < 0.$$

Demonstração:

Para mostrar o 1º caso, seja $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como $x_1 < x_2$, temos que $x_2 - x_1 > 0$ e como $a > 1$ por hipótese, temos que $a^{x_2 - x_1} > 1$ pelo 1º Teorema Auxiliar. Assim,

$$a^{x_2-x_1} > 1 \Rightarrow \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Logo, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, portanto, função crescente.

Para mostrar o 2º caso, seja $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como $x_1 < x_2$, temos que $x_1 - x_2 < 0$ e como $0 < a < 1$ por hipótese, temos que $a^{x_1-x_2} > 1$ pelo 2º Teorema auxiliar. Assim,

$$a^{x_1-x_2} > 1 \Rightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Logo, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, portanto, função decrescente. ■

3.4.1 IMAGEM DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Teorema 12: Dada uma função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada tal que $f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$, então $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração:

Temos que mostrar que a função não assume valores negativos e nulos e que qualquer número positivo é imagem da função. Como $a > 0$, então $a^x > 0$, portanto suas imagens são sempre positivas. Agora basta demonstrar que dado $y \in \mathbb{R}_+^*$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Para isso, basta tomar $x = log_a y$ (veja seção 3.5) . Segue,

$$f(x) = a^{log_a y} \Rightarrow f(x) = y,$$

pois de acordo com o Teorema 13, item iii: $a^{log\,^b_a} = b$. ■

3.4.2 GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

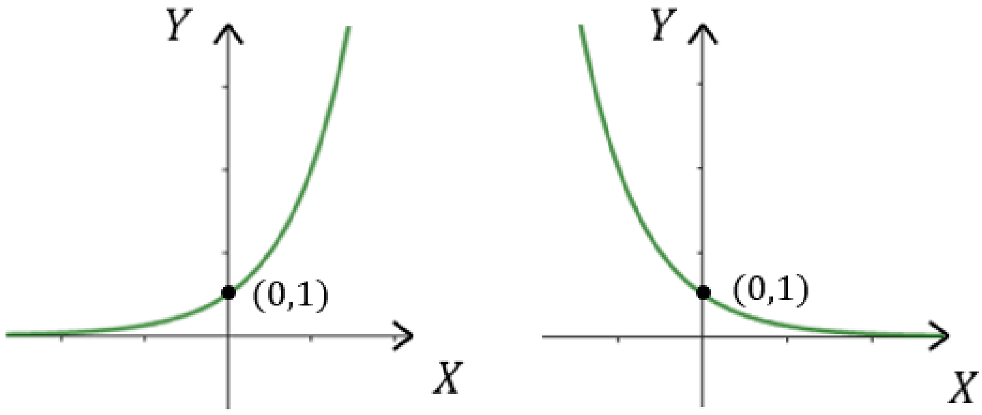
O gráfico da função exponencial é uma curva de pontos acima do eixo X, pois

$f(x) = a^x > 0$ para todo x no domínio.

$$G(f) = \{\big(x, f(x)\big);\ f(x) = a^x \text{e } f(x) > 0).$$

Como vimos acima, seu gráfico toca eixo Y no ponto (0,1), podendo ser crescente ou decrescente.

Figura 12-Função exponencial crescente e função exponencial decrescente



Fonte: Compilação do autor

Obs. 2: O NÚMERO e

Um número irracional muito importante no estudo de exponencial é o Número de Euler, representado pela letra e, cuja aproximação é $2{,}718281828459$. Comumente, é possível encontrá-lo em aplicações Matemáticas como veremos posteriormente.

O número e é definido como o limite da sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

assim, esta sequência é convergente, mas não entraremos em detalhes sobre limites e convergência.

3.5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A teoria desenvolvida nesta seção é baseada nos livros dos autores Lima, 2013 e Iezzi et al., 2013. Apresentaremos alguns resultados para o estudo da função destacada.

3.5.1 LOGARITMOS

Definição 14: Seja a e $b \in \mathbb{R}_+$, com $a \neq 1$. Definimos como logaritmo de b na base a o número c de modo que a elevado a c seja igual b. Ou seja,

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

No $log_a b = c$, a é chamado base, b é o logaritmando e c é o logaritmo.

3.5.2 PROPRIEDADES

Teorema 13: Da definição decorre as seguintes propriedades:

i. $log_a 1 = 0$

ii. $log_a a = 1$

iii. $a^{log_a b} = b$

iv. $log_a b^n = n \cdot log_a b$

v. $log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$

vi. $log_a (b \cdot c) = log_a b + log_a c$

vii. $log_a \left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$

viii. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c b}$

Demonstração:

i. $log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

ii. $log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$

iii. $log_a b = c \langle = \rangle a^c = b \langle = \rangle a^{log_a b} = b$

iv. Seja $log_a b = c$ e $log_a b^n = x$, temos que $a^c = b$ e $a^x = b^n \Rightarrow a^{c \cdot n} = b^n$ e $a^x = b^n \Rightarrow a^x = a^{c \cdot n} \Rightarrow x = c \cdot n \Rightarrow log_a b^n = n \cdot log_a b$

v. Seja $log_a b = x$ e $log_a c = y$, temos que $a^x = b$ e $a^y = c$, assim $a^x = a^y$, pois $x = y$, logo $b = c$.

vi. Seja $log_a b = x$, $log_a c = y$ e $log_a (b \cdot c) = z$, temos que que $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = b \cdot c$, segue que $a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y \Rightarrow log_a (b \cdot c) = log_a b + log_a c$.

vii. Tome $\frac{b}{c} = b \cdot c^{-1}$, temos que

$$log_a \left(\frac{b}{c}\right) = log_a (b \cdot c^{-1}) = log_a b + log_a c^{-1} = log_a b + (-1) log_a c = log_a b - log_a c.$$

viii. Seja $log_a b = x$, $log_c a = y$ e $log_c b = z$, temos que $a^x = b$, $c^y = a$ e $c^z = b$, segue que

$$(c^y)^x = a^x = b = c^z \Rightarrow c^{y \cdot x} = c^z \Rightarrow y \cdot x = z \Rightarrow x = \frac{z}{y} \Rightarrow log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}. \blacksquare$$

3.5.3 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição 15: Uma função logarítmica é uma função

$$f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = log_a x,$$

com $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ e $a \neq 1$.

Teorema 14: A função logarítmica $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_a x$, com $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ e $a \neq 1$, não apresenta ponto de interseção com o eixo Y e seu ponto de interseção com o eixo X é o ponto (1,0).

Demonstração: Para determinar o ponto de interseção com o eixo X basta tomarmos $y = 0$. Assim,

$$log_a x = 0 \Leftrightarrow a^0 = x \Leftrightarrow x = 1.$$

Portanto, o ponto de interseção com o eixo X é (1,0). Por definição a função não possui ponto de interseção com o eixo Y, pois $x = 0$ não faz parte do seu domínio. ■

Teorema 15: Considere a função logarítmica $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_a x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Se $a > 1$, a função logarítmica é crescente.

Se $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente.

Demonstração:

Para mostrar o 1º caso, seja $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como $x_1 < x_2$, temos que $\frac{x_2}{x_1} > 1$ e $a > 1$ por hipótese. Vamos analisar o sinal de $log_a^{x_2} - log_a^{x_1}$. Segue que

$$log_a x_2 - log_a x_1 = log_a \frac{x_2}{x_1} = y \Rightarrow a^y = \frac{x_2}{x_1} > 1 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow log_a x_2 - log_a x_1 > 0 \Rightarrow$$

$$log_a x_2 > log_a x_1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Logo, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, portanto, função crescente.

Para mostrar o 2º caso, seja $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como $x_1 < x_2$, temos que $\frac{x_2}{x_1} > 1$ e $0 < a < 1$ por hipótese. Vamos analisar o sinal de $log_a x_2 - log_a x_1 >$. Segue que

$$log_a x_2 - log_a x_1 = log_a \frac{x_2}{x_1} = y \Rightarrow a^y = \frac{x_2}{x_1} > 1 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow log_a x_2 - log_a x_1 < 0 \Rightarrow$$

$$log_a x_2 < log_a x_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). ■$$

Logo, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, portanto, função decrescente.

3.5.4 IMAGEM DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Teorema 16: Considere a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_a x$, com $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ e $a \neq 1$, sua $Im(f) = \mathbb{R}$.

Demonstração:

Basta demonstrar que dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = y$. Como a função está definida apenas nos $\mathbb{R}_+^*$, basta tomar $x = a^y$. Segue,

$$f(a^y) = log_a a^y = y \cdot log_a a = y \Rightarrow f(x) = y. \blacksquare$$

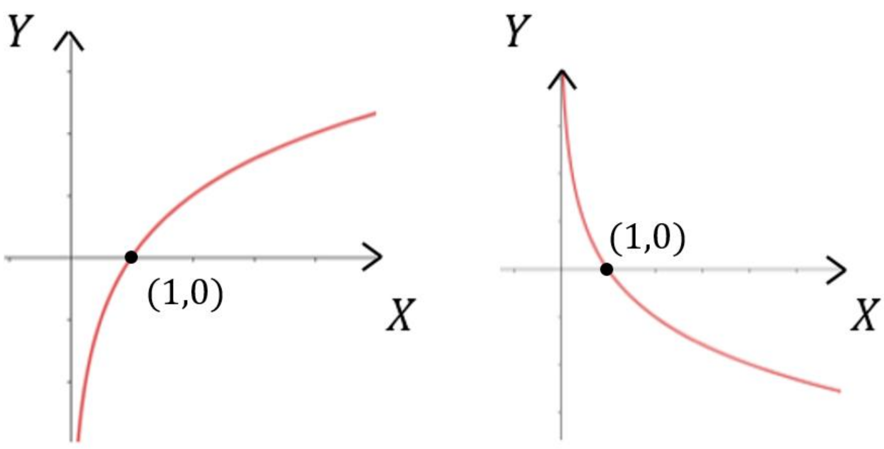
3.5.5 GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

O gráfico da função logarítmica é uma curva de pontos representada no 1º e 4º quadrante, pois $x > 0$.

$$G(f) = \{(x, f(x));\ f(x) = log_a x \text{ e } x > 0).$$

Como vimos acima, ela passa pelo eixo X no ponto (1,0), podendo ser crescente ou decrescente.

Figura 13-Função logarítmica crescente e função logarítmica decrescente



Fonte: Compilação do autor

Obs. 3: O LOGARÍTMO NEPERIANO/NATURAL

Como dito na seção de função exponencial, existe um número irracional muito importante para aplicações matemáticas, o Número de Euler. Quando utilizamos um logaritmo com base e, este é chamado de logaritmo natural ou logaritmo neperiano.

Assim, definimos **logaritmo natural/neperiano** como $log_e x$ com $x > 0$. Outra representação utilizada é $ln\, x$.

4 APLICAÇÕES, MATERIAIS E PRÁTICAS

Uma pergunta que muitos professores devem fazer ao começar um novo tema em suas aulas é a seguinte: Por onde devo começar este assunto? Alguns aspectos precisam ser levados em consideração ao iniciar essa abordagem, como por exemplo a familiaridade com o tema, o nível de aprendizagem dos alunos e o quão interessante o tema pode se tornar, visto que uma das principais perguntas que surgem na Matemática por parte dos estudantes é "Onde é que vou usar isso na minha vida?".

Apesar de uma pergunta simples e até comum, pode pegar-nos de surpresa em vários momentos, sendo que nem todo tópico matemático tem uma aplicação simples ou acessível aos alunos, bem como aos professores. De todo modo, o 'concreto' chama mais atenção e pode despertar um interesse maior durante as aulas. A seguir apresentaremos algumas aplicações que podem ser inseridas e comentadas no ambiente escolar durante as aulas de funções.

O conteúdo exposto neste capítulo é baseado em experiências próprias advindas das aulas ministradas ao longo da carreira docente e de materiais utilizados na pesquisa, dentre eles podemos destacar os trabalhos de Souza, 2013, Lima, 2013, Martins Rodrigues, W., & Rolando Llanos Villarreal, E., 2023 e Pereira, 2015.

4.1 APLICAÇÕES COM FUNÇÕES AFINS

(A) TAXISTA

Ao deslocar-se de uma cidade para outra, José precisa pegar um Táxi/Uber. Utilizando um aplicativo de transporte percebeu que ao colocar seu destino, o valor a pagar já aparecia na tela e isso acontecia para qualquer lugar que escolhesse ir. Ao introduzir essa situação, podemos fazer a seguinte pergunta aos alunos: "Como o aplicativo chegou a esse resultado?" Uma resposta rápida para esse problema é: Podemos imaginar essa situação como uma função, neste caso, trabalharemos com um exemplo bem simples. Para cada quilômetro percorrido pode ser cobrado uma taxa, além disso, pode ser estipulado um valor fixo independente da quilometragem percorrida para o usuário pagar (conhecido como bandeira).

Considere P o valor a ser pago, T a taxa, q a quilometragem e B a bandeira. Podemos expressar P em termos de T, q e B, sendo P a variável dependente e q a variável independente, T e B constantes. Segue:

$$P(q) = Tq + B$$

Tal função determinaria o valor a ser pago em função da quilometragem, tendo em vista que T e B seriam valores fixos determinados pelo sistema de transporte. Sendo a taxa de R$ 5,00 e a bandeira de R$ 10,00, nossa função assumiria o seguinte formato:

$$P(q) = 5q + 10$$

, onde q representaria a quilometragem. O formato encontrado, representa uma função afim ou função polinomial do 1º grau.

Como o aplicativo de GPS do celular já determina a distância de um local ao outro, basta aplicar este valor na função e teríamos uma ideia do quanto seria gasto, por exemplo, se a distância a ser percorrida fosse 40 km, seriam pagos R$210,00.

$$P(40) = 5 \cdot 40 + 10$$

$$P(40) = 200 + 10$$

$$P(40) = 210$$

Tais resultados são estudados na função afim. Sugere-se que problemas nesse formato sejam utilizados sempre que possível como motivadores, colocando em destaque a aplicação da função no cotidiano dos alunos.

Teríamos a seguinte função: $f(x) = 5x + 10$, onde q trocamos por x e $P(q)$ por $f(x)$.

(B)PLANO TELEFÔNICO

Um cliente deseja contratar um serviço de telefonia e analisa duas opções disponíveis em sua cidade. O primeiro serviço cobra mensalmente um valor fixo de R$40,00 para manutenção e R$0,25 por minuto de ligação, enquanto o segundo cobra 60 para manutenção e R$0,20 por minuto de ligação. Uma pergunta possível para esse problema é: a partir de quantos minutos tornara-se mais vantajoso utilizar o segundo plano em relação ao primeiro?

Para responder a este tipo de pergunta, podemos modelar duas funções para ambos os serviços. Para o primeiro podemos escrever $C_1(t) = 0{,}25t + 40$ e para o segundo $C_2(t) =$

$0{,}20t + 60$, onde $C_1(t), C_2(t)$ são os custos mensais e t é o tempo em minutos. Vamos analisar esta situação de duas maneiras, uma utilizando inequações do 1º grau e a outra utilizando o gráfico de funções afins.

Como queremos verificar em que momento o segundo plano é mais vantajoso que o primeiro, temos que $C_2(t) < C_1(t)$, assim

$$C_2(t) < C_1(t) \Rightarrow$$

$$0{,}20t + 60 < 0{,}25t + 40 \Rightarrow\ 60 - 40 < 0{,}25t - 0{,}20t \Rightarrow$$

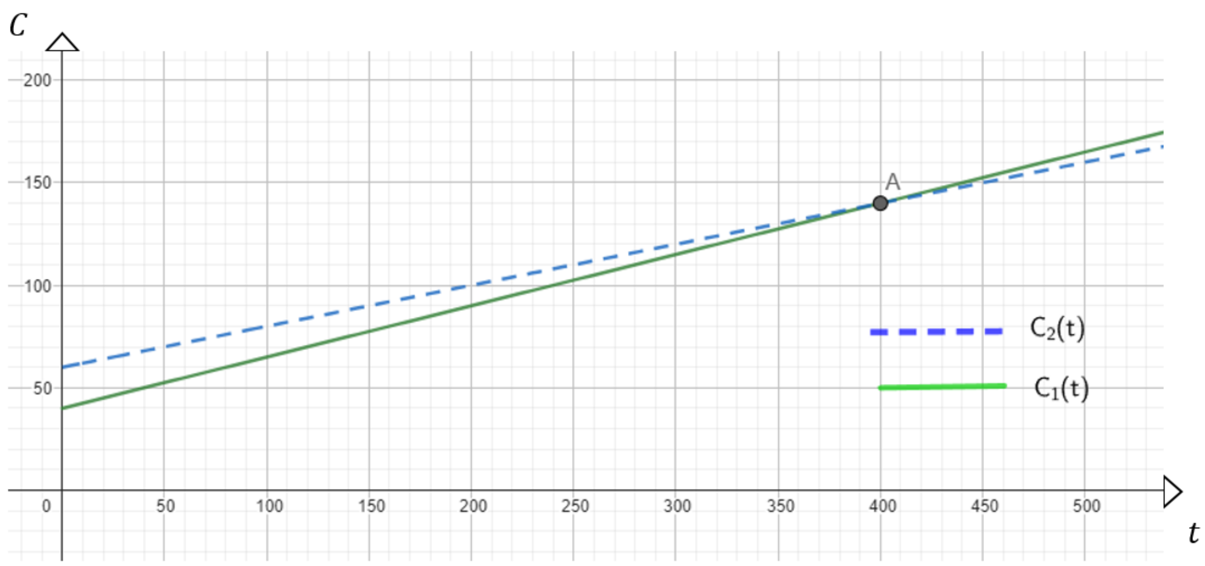
$$20 < 0{,}05t \Rightarrow\ 20 < 0{,}05t \Rightarrow$$

$$\frac{20}{0{,}05} < t \Rightarrow\ \frac{20}{0{,}05} < t \Rightarrow$$

$$400 < t.$$

A análise gráfica mostra o seguinte, sendo a reta verde representando o $C_1(t)$ e a reta azul representando o $C_2(t)$.

Figura 14-Comparativo de funções afins em aplicação de plano telefônico



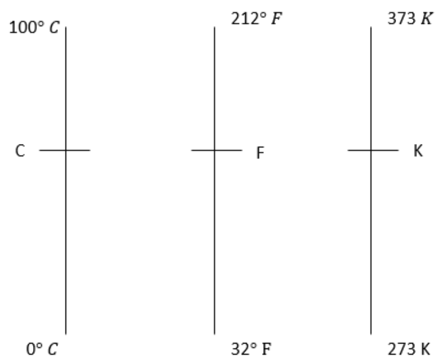
Fonte: Compilação do autor, construído no GeoGebra

Assim, quando t está no intervalo [0,400) é mais vantajoso utilizar o primeiro plano e quando está no intervalo (400, +∞] é mais vantajoso utilizar o segundo plano, logo, a partir de 400 minutos.

(C)ESCALAS TERMOMÉTRICAS

Diversos fenômenos naturais são representados através de modelos Matemáticos, um deles é a medição de temperatura. Como unidade de medida utilizamos os graus Celsius, graus Fahrenheit e Kelvin. Alguns países adotam unidades de medidas de temperatura diferentes, como no caso dos Estados Unidos em que sua temperatura é medida em Fahrenheit. Então como identificar e comparar essas variações de um lugar para outro? Tais mudanças podem ser descritas através de funções matemáticas, no caso, funções afins. Veja a seguir as correspondências entre as escalas de temperatura apresentadas.

Figura 15-Escalas Termométricas



Fonte: Compilação do autor

Os crescimentos devem ser proporcionais em cada escala, assim temos a seguinte proporção:

$$\frac{C-0}{100-0}=\frac{F-32}{212-32}=\frac{K-273}{373-273}\Rightarrow$$

$$\frac{C}{100}=\frac{F-32}{180}=\frac{K-273}{100}\Rightarrow$$

$$\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}=\frac{K-273}{5}.$$

Agora podemos expressar a temperatura Celsius em função de F e K, encontrando duas funções polinomiais do 1º grau. Veja:

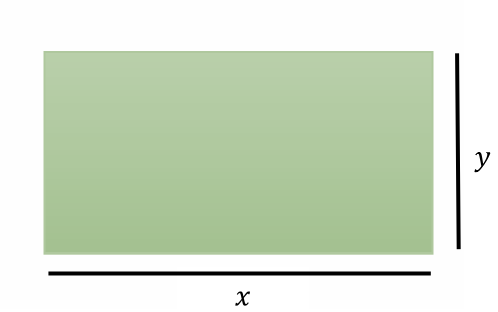
$$C(F)=\frac{5F-160}{9} \quad e \quad C(K)=K-273.$$

4.2 APLICAÇÕES COM FUNÇÕES QUADRÁTICAS

(A) MAXIMIZAÇÃO DE ÁREAS

Um agricultor possui um terreno e comprou uma quantidade de arame para cercar uma parte de sua propriedade que será utilizada para plantação futuramente. A área desejada será cercada em um formato retangular, de modo que ele gostaria de utilizar a maior área possível utilizando o material comprado. Como ele deve proceder para realizar esta tarefa? A Matemática responde este questionamento utilizando a função polinomial do 2º grau. Veja a figura abaixo:

Figura 16-Representação de um terreno retangular



Fonte: Compilação do autor

O conceito de perímetro será utilizado para representar a quantidade de arame utilizado para cercar o terreno, neste caso $P = 2x + 2y$. A área desta região pode ser representada por $A = x \cdot y$. Assim temos duas equações:

$$\begin{cases} P = 2x + 2y \\ A = x \cdot y \end{cases}$$

Isolando y na primeira equação, temos $y = \frac{p}{2} - x$. Substituindo na segunda equação, segue que:

$$A = x \cdot \left(\frac{P}{2} - x\right) \Rightarrow A(x) = -x^2 + \frac{P}{2} \cdot x.$$

Ou seja, a área da região é determinada através de uma função polinomial do 2º grau. Como a função possui coeficiente $a < 0$, então ela possui um valor máximo, podendo ser determinado pelas coordenadas do vértice da parábola. Vamos determinar o valor de x que permite encontrar o valor máximo, no caso, o x_v. Já vimos anteriormente que o $x_v = -\frac{b}{2a}$, assim:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{\frac{P}{2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{P}{4},$$

consequentemente,

$$y = \frac{P}{2} - x \Rightarrow y = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4},$$

assim, $x = y = \frac{P}{4}$. Conclusão, a região a ser cercada deve ser um quadrado, sendo seu lado $\frac{P}{4}$, logo sua área máxima será

$$A = l^2 \Rightarrow A = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}.$$

(B) MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIÁVEL

Na Física estudamos o movimento uniformemente variável, conhecido por sua abreviação, MUV. No estudo desse movimento são descritos dois tipos de funções, uma representada por uma função afim e outra representada por uma função quadrática, sendo descritas como equação horária da velocidade e equação horária das posições. Deste modo, podemos notar uma interdisciplinaridade entre os temas de funções estudados na Matemática e o estudo do movimento visto na Física. A Matemática torna-se assim uma ferramenta que nos permite entender os objetos e seus comportamentos em determinadas situações. Veja algumas observações relacionadas a esta aplicação.

Define-se aceleração média como $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, onde $\Delta v = v - v_0$ e $\Delta t = t - t_0$, sendo v e v_0 a velocidade final e a velocidade inicial e t e t_0, o tempo final e o tempo inicial. No MUV, a aceleração é constante, assim podemos chegar a duas equações fundamentais para seu estudo.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$v - v_0 = a \cdot (t - t_0)$$

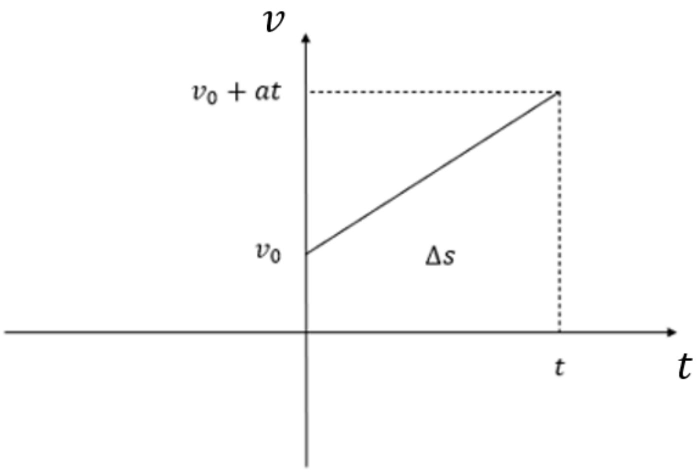
Considerando $t_0 = 0$,

$$v = v_0 + a \cdot t,$$

equação esta, conhecida como equação horária da velocidade.

Deste modo temos uma função afim em relação ao tempo. Temos uma função $v(t)$, podemos analisar seu gráfico para determinar Δs. Podemos definir Δs como a área delimitada pelo gráfico de $v(t)$ no intervalo $[0, t]$, pelo eixo t e pelo eixo v. Analisando a figura 17

Figura 17-Variação das posições em função da área de um trapézio



Fonte: Compilação do autor

$$\Delta s = \frac{(v_0 + at + v_0) \cdot t}{2} \Rightarrow s - s_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

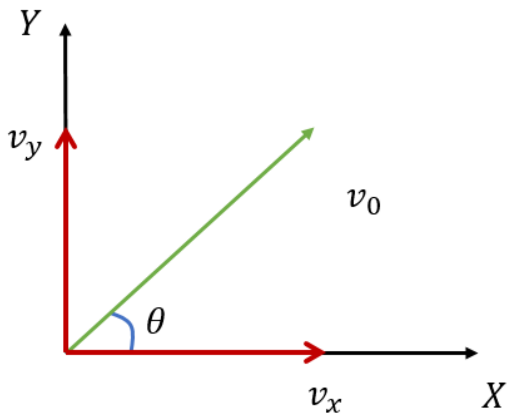
equação esta, conhecida como equação horária das posições.

(C) LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

Sempre que lançamos um objeto na superfície terrestre, este descreve uma trajetória no formato de uma curva, esta curva é uma parábola e essa informação pode nos ajudar a determinar diversas características a respeito do movimento, como por exemplo, qual a altura máxima, quanto tempo o objeto ficará no ar, entre outras. Veremos agora a explicação do porquê esse movimento gera uma parábola.

Considere um objeto lançado com velocidade v_0. Este lançamento gera um movimento vertical e um movimento horizontal, sendo o movimento vertical um MUV, pois possui aceleração, no caso, a gravidade. O movimento horizontal é uniforme (MU), assim sua posição ao longo do tempo é ser descrito pela seguinte equação: $s = s_0 + v \cdot t$. A velocidade v_0 pode ser representada através de suas componentes vertical e horizontal.

Figura 18-Componentes da velocidade



Fonte: Compilação do autor

Pegando as componentes da velocidade em relação ao eixo X e Y temos que

$$v_y = v_0 \cdot sen\,\theta \text{ e } v_x = v_0 \cdot cos\,\theta\,.$$

Como o movimento vertical é MUV e o horizontal MU, temos que

$$y = y_0 + v_0 \cdot sen\,\theta\ \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2} \text{ e } x = x_0 + v_0 \cdot cos\,\theta\ \cdot t,$$

sendo (x_0, y_0) a posição inicial, g a aceleração da gravidade, v_0 a velocidade inicial, θ o ângulo do lançamento e t o tempo.

Considerando $(x_0, y_0) = (0{,}0)$ e isolando o t na segunda equação, temos que

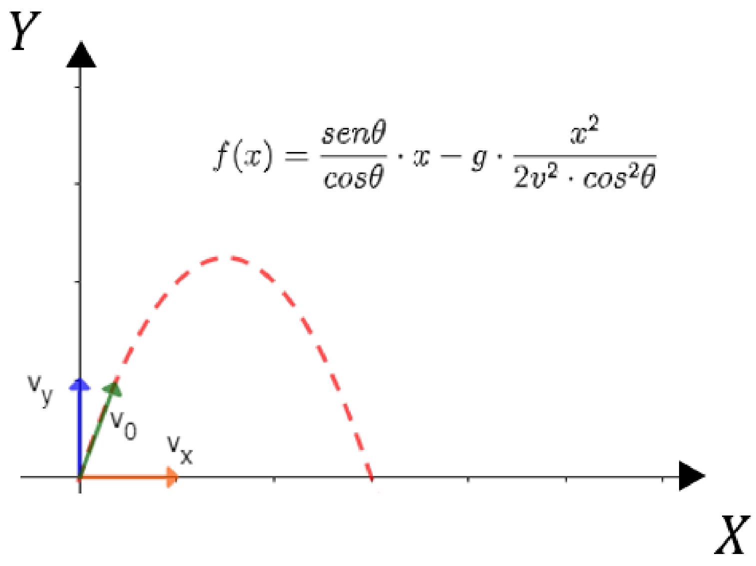
$$y = v_0 \cdot sen\,\theta\ \frac{x}{v_0 \cdot cos\,\theta} - \frac{g\left(\frac{x}{v_0 \cdot cos\,\theta}\right)^2}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}x - g\frac{x^2}{2v_0^2 \cdot cos^2\theta},$$

representando assim, uma parábola da forma $f(x) = ax^2 + bx$, onde $a = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}$ e

$b = \frac{-g}{2v_0^2 \cdot cos^2\theta}$.

Figura 19-Trajetória formada através dos lançamentos de objetos



Fonte: Compilação do autor

4.3 APLICAÇÕES COM FUNÇÕES EXPONENCIAIS

(A) JUROS

Na Matemática Financeira, trabalhamos com a ideia de juros, uma recompensa monetária adquiria pelo empréstimo de um determinado capital a ser quitado em um determinado período de tempo, com uma taxa específica. Classificamos esses juros em dois tipos: Juro Simples e Juro Compostos.

O Juro Composto é o que utilizamos em nossas operações financeiras no dia a dia, seja em uma compra, em um empréstimo ou em uma aplicação, conhecido como juro sobre juros. Nesse ponto, torna-se importante estudar Juro Composto por que é possível realizar previsões e planejamentos a partir de determinadas informações. E onde podemos encontrar a função exponencial nesta aplicação? A resposta para isso se encontra no modelo de crescimento de uma aplicação financeira, sendo este dado de forma exponencial. Veja a seguinte situação:

Uma pessoa aplicou um capital de R$1000,00 em um banco sobre uma taxa de 5% ao mês durante 6 meses. Veja o seu montante ao final de cada mês, considerando uma aproximação de duas casas decimais:

Tabela 1-Montante ao longo de seis meses

Mês	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**
Montante	1050	1102,5	1157,62	1215,50	1276,28	1340,10

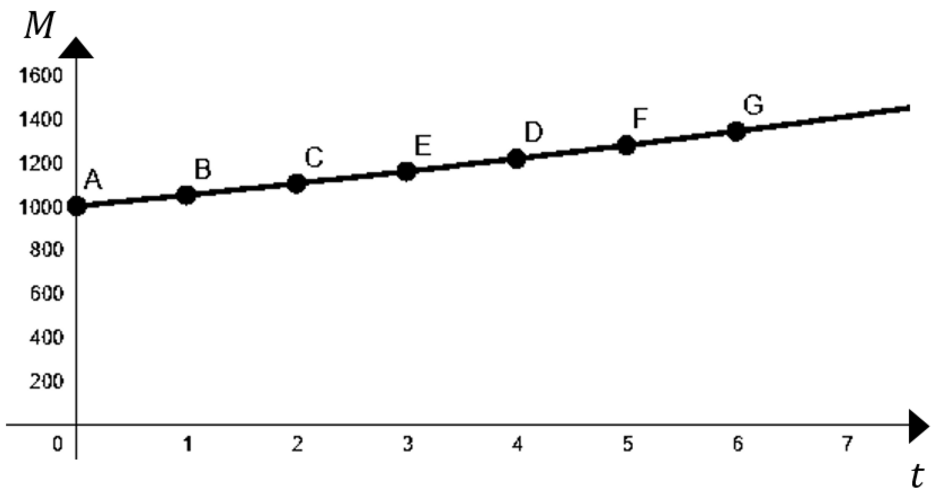
Fonte: Compilação do autor

O seguinte exemplo pode ser modelado através de uma função exponencial com o seguinte formato $M(t) = C(1+i)^t$, onde C é o capital, i é a taxa de juros em um determinado período de tempo, t é o tempo que o capital ficará sobre aplicação e M é o Montante, valor a ser recebido no final da aplicação. Assim,

$$M(t) = 1000 \cdot (1{,}05)^t.$$

Com essa modelagem é possível determinar qual será o valor a ser recebido ao final de um ano, dois anos e assim sucessivamente, bastando apenas aplicar na regra a quantidade de tempo.

Figura 20-Montante de uma aplicação financeira ao longo de seis meses



Fonte: Compilação do autor, construído no GeoGebra

Uma outra abordagem possível, no caso já entra logaritmos, é tentar identificar quanto tempo é necessário para que uma determinada aplicação financeira chegue a um valor desejado. Considerando o mesmo caso anterior, podemos tentar descobrir quanto tempo é preciso para que o valor de R$1000,00 chegue a um valor de R$3000,00, tendo uma taxa fixa de 5% ao mês e sem depósitos e retiradas.

Como queremos que o capital seja R$ 3000,00, temos:

$$M(t) = 1000 \cdot (1{,}05)^t \Rightarrow 3000 = 1000 \cdot (1{,}05)^t \Rightarrow 3 = (1{,}05)^t.$$

Agora podemos aplicar o log na base 3 em ambos os membros da igualdade para determinar o valor de t utilizando as propriedades do logaritmo:

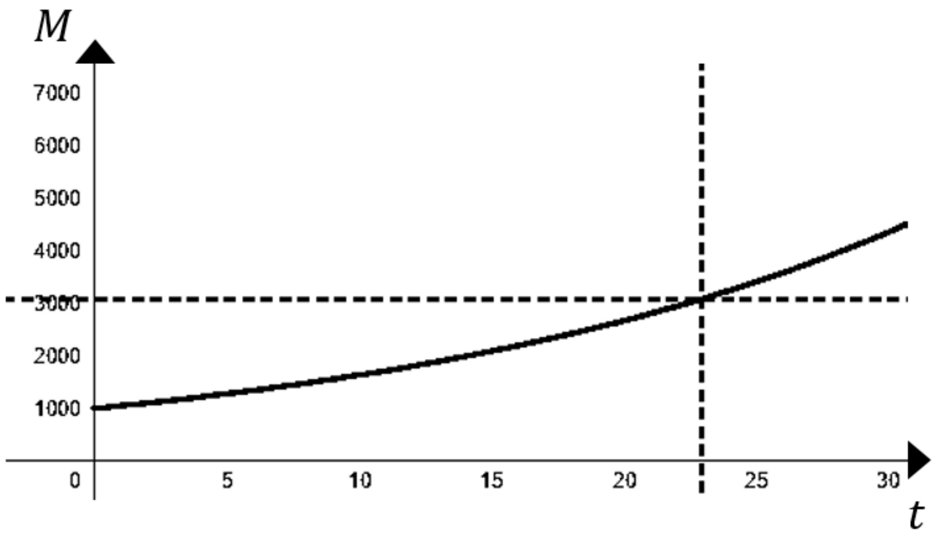
$$3 = (1{,}05)^t \Rightarrow 1 = t \cdot log_3 1{,}05 \Rightarrow t = \frac{1}{log_3 1{,}05}.$$

Adotando $log_3 1{,}05 = 0{,}044$, temos,

$$t = \frac{1}{0{,}044} \approx 23$$

Deste modo, concluímos que são necessários 23 meses para triplicar o seu capital.

Figura 21-Tempo necessário para chegar ao capital de R$3000,00



Fonte: Compilação do autor, construído no GeoGebra

(B) CRESCIMENTO POPULACIONAL

Entender o comportamento de determinados organismos ou espécies é fundamental para o desenvolvimento da humanidade, pois é possível planejar novas rotas, solucionar problemas e compreender melhor o ambiente à nossa volta. Podemos, por exemplo, estimar a quantidade de indivíduos de uma população de bactérias, vírus ou até mesmo seres humanos em um período de tempo específico. Veja o seguinte exemplo.

Um cientista iniciou um experimento com 3 bactérias, cuja uma de suas características era a capacidade de dobrar sua população a cada minuto.

Tabela 2-Crescimento populacional de Bactérias

Tempo	**0 min**	**1 min**	**2 min**	**3 min**	**4 min**	**5 min**
Bactérias	3	6	12	24	48	96

Fonte: Compilação do autor

Dispondo esses dados em um gráfico, podemos perceber para, o intervalo apresentado na tabela, um crescimento exponencial. Além disso, ainda é possível determinar quantas bactérias existirão nesse cultivo quando já tiverem se passado 10 minutos. Para responder a essa pergunta, podemos seguir o padrão de sempre dobrar o próximo número até chegar no tempo estipulado, neste caso, não existe problema em fazer isso, ou podemos encontrar a lei de formação que modela esta situação,

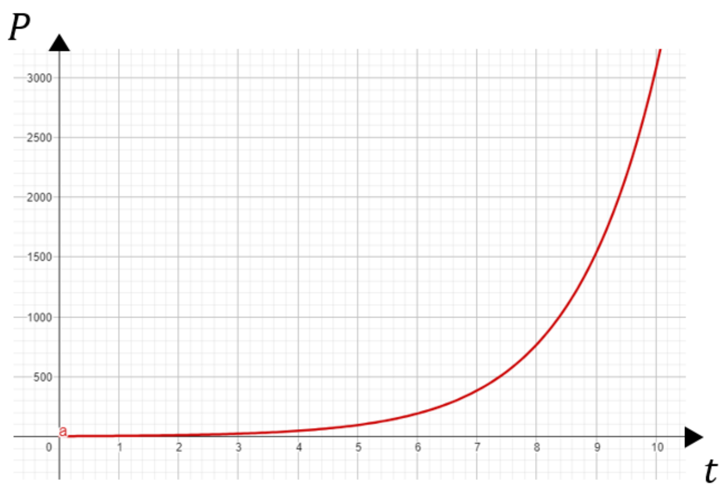
$$P(t) = 3 \cdot 2^t$$

onde $P(t)$ representa a população e t representa o tempo em minutos. Aplicando $t = 10$, temos:

$$P(10) = 3 \cdot 2^{10} \Rightarrow P(10) = 3 \cdot 1024 \Rightarrow P(10) = 3072.$$

Assim, teríamos 3072 bactérias. Segue uma representação gráfica da situação.

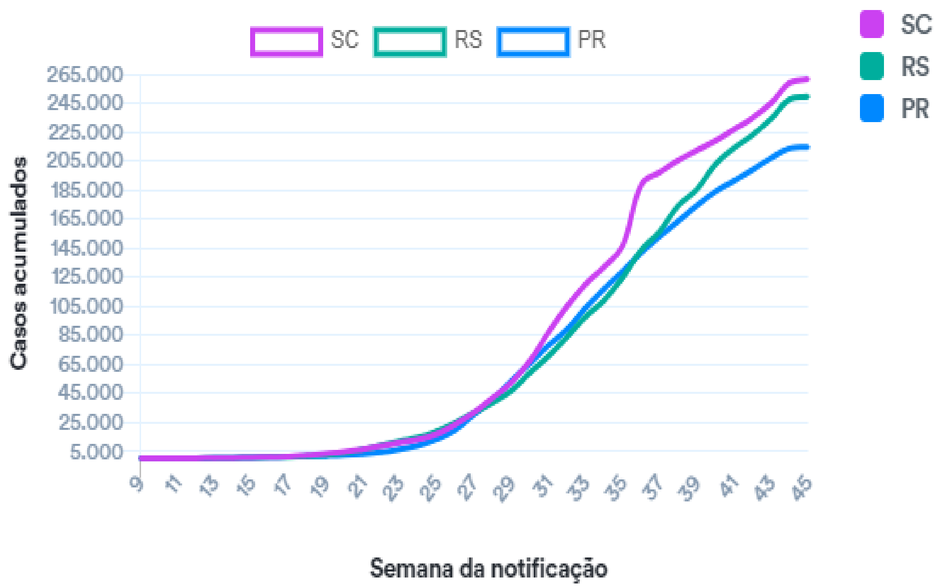
Figura 22-Gráfico da função exponencial $P(t) = 3 \cdot 2^t$



Fonte: Compilação do autor, construído no GeoGebra

Outro fenômeno que podemos citar para o estudo dessas aplicações ocorreu recentemente, durante a pandemia do Coronavírus. O número de pessoas que contraíram o vírus crescia de maneira acelerada em diversos lugares do mundo.

Figura 23-Gráfico dos casos de Covid 19 na região Sul do Brasil



Fonte: https://covid.saude.gov.br/ (2024)

O gráfico acima representa o número de casos acumulados na região Sul do Brasil a partir da semana da notificação. Inicialmente percebemos que as representações são bem similares e à medida que avançamos nas semanas elas crescem de formas distintas. Diversos fatores influenciam nesses resultados, mas o que é bem perceptível é a forma do crescimento, um crescimento exponencial. Dados retirados do site https://covid.saude.gov.br/ .

De modo geral, expressamos crescimentos populacionais através de uma modelagem com funções exponenciais, considerando que sua taxa de variação é diretamente proporcional à população atual. Não entraremos em muitos detalhes sobre a função apresentada, mas adiantamos que este resultado é consequência da resolução de uma equação diferencial. Temos o seguinte resultado,

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$$

onde P_0 representa a população inicial, k uma constante de proporcionalidade, t o tempo e $P(t)$ a população no tempo t. O primeiro caso citado nesta seção também poderia ter sido representado da seguinte forma,

$$P(t) = 3 \cdot e^{(ln\,2) \cdot t}$$

pois $2 = e^{ln\,2}$, com $ln\,2$ sendo a constante de proporcionalidade.

4.4 APLICAÇÕES COM FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

(A) DECAIMENTO RADIOATIVO E DATAÇÃO POR CARBONO 14

Ao encontrar um fóssil em escavações, uma pergunta que os arqueólogos sempre fazem é sobre a idade de seus achados, pois eles representam comportamentos ou características importantes para os grupos da época em que surgiram. Mas como eles conseguem determinar esse tempo sem nem mesmo ter informações sobre datas ou coisa do tipo? Assim como deixamos nossas digitais ao tocar em um objeto, a natureza deixa marcas das quais podemos decodificar. Para essa situação, os cientistas utilizam o conceito de Decaimento Radioativo.

Nesses fósseis existem substâncias radioativas que possuem massa, o Carbono 14 é um exemplo, mantendo-a constante enquanto estavam vivos, porém, ao não estarem mais vivos começam a perde-la ao longo do tempo. Essa perda é chamada de decaimento radioativo e pode ser modelado através de uma função exponencial do tipo

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

em que $M(t)$ representa a massa ao longo do tempo t, M_0 a massa inicial e α a constante de decaimento da substância que está sendo analisada.

Para exemplificar, vamos imaginar a seguinte situação: uma substância X de massa 128 $u.m$, tem sua massa reduzida pela metade a cada 2 anos. Um arqueólogo encontrou um fóssil com a presença dessa substância radioativa, porém com massa de 1 $u.m$. Qual seria a idade desse fóssil em relação ao arqueólogo? Veja a tabela abaixo.

Tabela 3-Decaimento radioativo de um elemento fictício

Tempo	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**
Massa	128	64	32	16	8	4	2	1

Fonte: Compilação do autor

Assim, concluímos que o fóssil encontrado era de 14 anos atrás. Representando através da função que modela o decaimento teríamos

$$M(t) = 128 \cdot 2^{-\frac{t}{2}} \, ou \, M(t) = 128 \cdot e^{\frac{-ln\,2}{2} \cdot t}.$$

Esse tempo que leva para uma substância perder metade da sua massa inicial é chamado meia vida (t_m). Agora, também é possível determinar a constante de decaimento da substância em função da meia vida utilizando logaritmos. Veja,

$$M(t_m) = M_0 \cdot e^{-\alpha t_m} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-\alpha t_m} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha t_m} \Rightarrow ln\,\frac{1}{2} = ln\,e^{-\alpha t_m} \Rightarrow$$

$$ln\,\frac{1}{2} = -\alpha t_m \Rightarrow \frac{1}{2} = \alpha t_m \Rightarrow$$

$$ln\,2 = \alpha t_m \Rightarrow \alpha = \frac{ln\,2}{t_m}.$$

Consequentemente,

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\frac{ln\,2}{t_m} \cdot t} \; ou \; M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_m}}.$$

Para o caso do Carbono 14, seu tempo de meia vida é 5730 anos. Então se quiséssemos utiliza-lo para identificar quanto tempo se passou em uma situação como a citada acima poderíamos realizar o seguinte procedimento os seguintes cálculos,

$$M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{M(t)}{M_0} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow$$

$$log_2 \frac{M(t)}{M_0} = log_2 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow \; log_2 \frac{M(t)}{M_0} = -\frac{t}{5730} \Rightarrow$$

$$-5730 \cdot log_2 \frac{M(t)}{M_0} = t \Rightarrow \; t = 5730 \cdot log_2 \frac{M_0}{M(t)}.$$

Obviamente, já existem ferramentas sofisticadas para realizarem esses cálculos rapidamente, mas a ideia por trás destes está baseada em modelagens matemáticas como a apresentada.

(B) ESCALA RICHTER

Diversos fenômenos naturais estão presentes em nosso dia a dia, chuvas, tempestades, deslizamentos, terremotos e etc. Entender sobre esses eventos é fundamental para tomada de decisões em situações de catástrofes ambientais. Para o caso dos terremotos, os cientistas criaram mecanismo capaz de identificar a sua magnitude, chamado de Escala Richter.

Veja como podemos nomear um terremoto em função da sua magnitude e seus possíveis danos de acordo com Martins Rodrigues & Rolando Llanos Villarreal, 2023.

Tabela 4-Classificação de terremotos segundo sua magnitude

$M < 3$	Pequenos tremores, pouco perceptíveis e apenas registrados por aparelhos.
$3 < M < 5{,}9$	Tremores perceptíveis, com pouco grau de destruição, capazes de derrubar objetos e trincar paredes.
$6 < M < 8{,}9$	Terremoto destrutivo que pode provocar graves danos as construções e provocar rachaduras no solo.
$M \geq 9$	Terremotos muito fortes, provocando grande destruição.

Fonte: Martins Rodrigues & Rolando Llanos Villarreal (2023)

Diversos terremotos já foram registrados em nosso planeta, alguns dos maiores ocorreram no Chile, EUA, Indonésia, Japão e Rússia com $M \geq 9$, causando muitas perdas. No Brasil também temos registros de tremores, porém em proporções menores, não havendo até o momento registros como os citados anteriormente, isso se deve também ao fato do país está localizado no centro de uma placa tectônica, o que garante mais estabilidade na incidência desses tremores.

Ainda sobre a Escala Richter, sua construção é feita em utilizando uma escala logarítmica de base 10. Desse modo, um terremoto de magnitude 3 em relação a um terremoto de magnitude 2 é 10 vezes mais forte e em relação a um de magnitude 1, seria 100 vezes mais. E como realizamos esse cálculo? Veja a seguir a regra que utilizamos nesse processo,

$$M = log_{10} \frac{I}{I_0}$$

sendo I a intensidade do terremoto e I_0 a intensidade de terremoto padrão utilizada como valor de referência.

4.5 SUGESTÕES DE PRÁTICAS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES

Nesta seção iremos abordar sugestões de práticas para trabalhar o tema de Funções, além disso, vamos sugerir algumas ferramentas tecnológicas utilizadas para desenvolvimento dessas atividades, são elas: Phet, Wordwall e o GeoGebra. Reforçamos que existem diversas outros recursos que podem ser utilizados como o Kahoot, Padlet, material concreto, entre outros para o estudo de funções. Buscamos nesta seção apresentar apenas algumas possibilidades para ampliar suas possibilidades de trabalho.

Inicialmente será apresentada uma breve descrição de cada recurso tecnológico utilizado e em seguida serão abordados possíveis materiais desenvolvidos a partir dessas ferramentas. Reforçamos que o objetivo principal desta seção é sugerir materiais e práticas, as mesmas podem ser adaptadas de acordo com a necessidade do professor. Algumas práticas, apresentam tempo estipulado para cada parte da atividade, porém isso pode variar bastante de acordo com o professor e os alunos, podendo até ser omitido no desenvolvimento dos trabalhos.

(A) PHET MATEMÁTICA

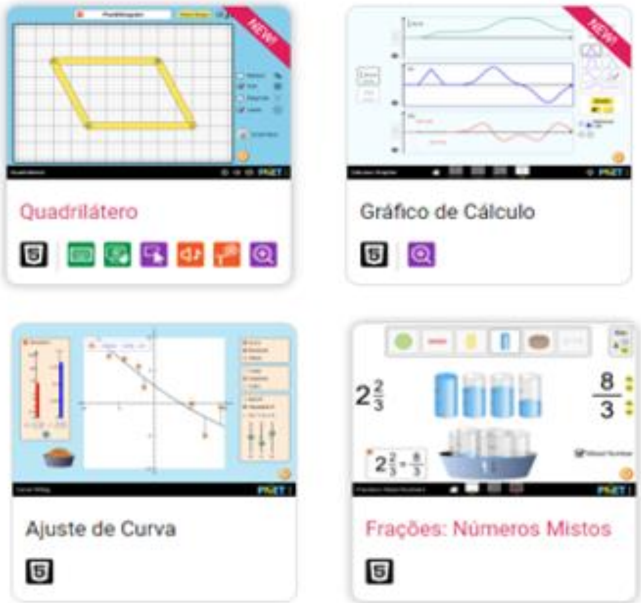
O PhetColorado é um ambiente virtual totalmente gratuito, dedicado a fins educacionais. Nesta plataforma podemos encontrar simulações sobre diversos temas nas áreas de Matemática, Física, Química, Ciências da Terra e Biologia**.** Veja a seguir a Página Inicial do ambiente.

Figura 24-PhetColorado

Fonte: PhetColorado (2024)

Para ter acesso a plataforma é bem simples, basta procurar em seu navegador por PhetColorado, ou inserir o link a seguir: https://phet.colorado.edu/pt_BR/ . Após acessar a página inicial, escolha a sua área de atuação e procure uma simulação do seu interesse e adapte para sua aula da melhor forma possível. Como nosso foco é a Matemática, veja a seguir algumas simulações disponíveis no ambiente ao verificar essa opção.

Figura 25-Algumas Simulações do Phet



Fonte: PhetColorado (2024)

Dentre as simulações para Matemática, conseguimos destacar aquelas que podem ser utilizadas para trabalhar o tema de funções.

Figura 26-Simulações para estudo de Funções

Fonte: PhetColorado (2024)

Apresentaremos agora duas práticas que podem ser desenvolvidas através do Phet Matemática com o tema abordado. Importante ressaltar que são apenas sugestões, a ferramenta pode ser utilizada da maneira que o professor preferir, tais atividades podem ser adaptadas dependendo da necessidade do professor.

Prática 1:

Comportamento da Função Afim de acordo com o coeficiente angular e o coeficiente linear

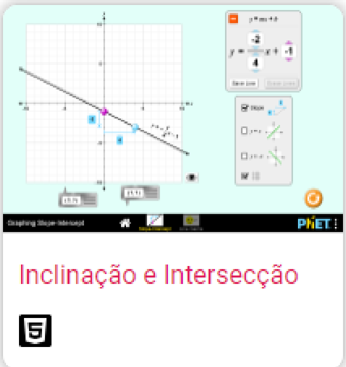
Objetivo: Identificar o comportamento gráfico de funções polinomiais do 1º grau de acordo com as mudanças do coeficiente angular e linear.

Duração: 50 minutos.

Metodologia:

- O requisito inicial para realização desta prática é que os alunos já tenham visto o formato que o gráfico de uma função afim apresenta, no caso, uma reta. A aula será expositiva, dialogada e prática.
- Inicialmente deve-se abrir o simulador Phet e procurar a simulação "**Inclinação e Interseção**".

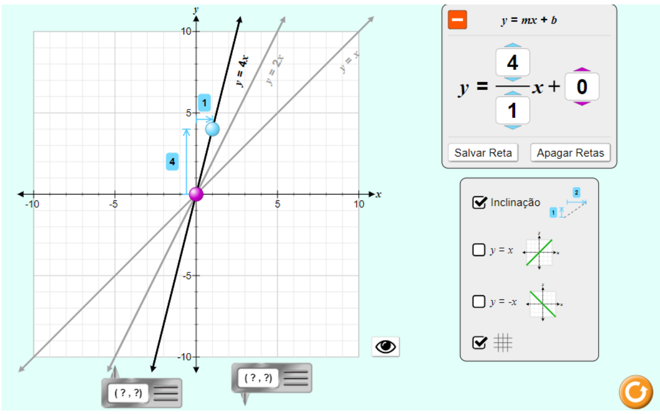
Figura 27-Simulação do Phet para estudo de retas



Fonte: PhetColorado (2024)

- Apresente aos alunos o painel inicial da simulação e faça uma breve explicação dos recursos presentes, ensinando como alterar os valores do coeficiente angular e linear. **(10 minutos)**
- Inicie trabalhando com exemplos simples, apresente as funções:
    - $f(x) = x, f(x) = 2x$ e $f(x) = 4x$.

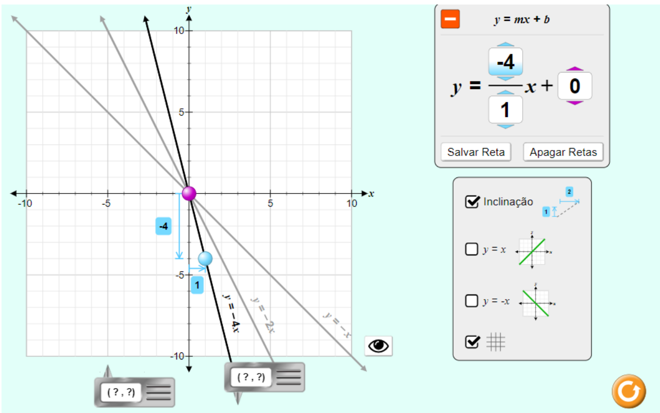
Figura 28-1º Representação de gráficos de retas no Phet



Fonte: PhetColorado (2024)

- Indague os alunos quais observações fizeram à medida que alteramos o valor do coeficiente angular. A intenção é que os alunos identifiquem o comportamento da reta à medida que aumentamos ou diminuímos o coeficiente angular sendo ele positivo. **(5 minutos)**
- Em seguida, coloque mais alguns exemplos, porém tornando o coeficiente angular negativo:
  - $f(x) = -x, f(x) = -2x \; e \; f(x) = -4x.$

Figura 29-2º Representação de gráficos de retas no Phet

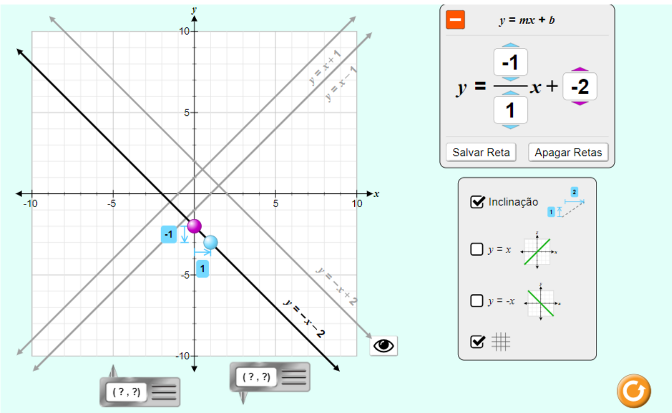


Fonte: PhetColorado (2024)

- Proceda de modo análogo aos exemplos anteriores, levando os alunos a identificarem o comportamento das novas funções. **(5 minutos)**

- Indague os alunos sobre as similaridades das funções apresentadas nos dois casos e suas diferenças.
- Ao verificar as observações, conclua as implicações no gráfico da função, destacando o formato crescente e decrescente e suas inclinações à medida que aumentamos ou diminuímos o coeficiente angular, seja ele positivo ou negativo, conclua também que nos casos apresentados o coeficiente linear dessas funções é 0. **(10 minutos)**
- Assimilado o conceito do coeficiente angular, vamos entender qual a função do coeficiente linear. Apresente algumas funções aos alunos, tais como:
  - $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$
  - $f(x) = -x + 2$ e $f(x) = -x - 2$.

Figura 30-3º Representação de gráficos de retas no Phet



Fonte: PhetColorado (2024)

- Indague os alunos quais foram observações que fizeram à medida que alteramos o valor do coeficiente linear.
- Verificado as observações realizadas, conclua que o coeficiente linear de uma função afim é o ponto que a função se intersecta com o eixo Y. **(10 minutos)**
- Buscando verificar o aprendizado, peça que os alunos construam no simulador duas funções crescentes tocando o eixo Y no ponto 3 e duas funções decrescentes tocando o eixo Y no ponto -3. Conclua a aula fazendo a correção desta atividade. **(10 minutos)**

Recursos: Computador e Projetor.

Formas de Avaliação: O aluno será avaliado mediante o seu desenvolvimento e participação na atividade, avaliação da prática.

Prática 2: Gráfico da Função Quadrática e características.

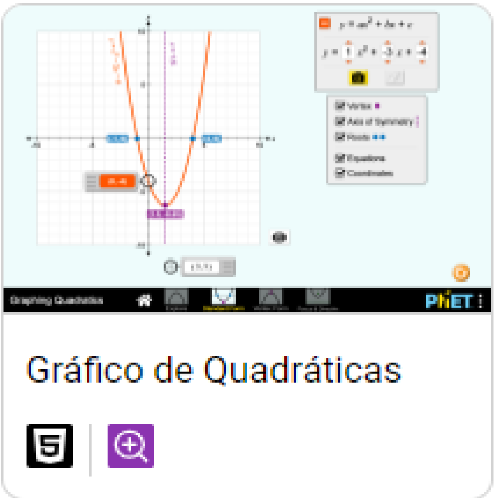
Objetivo: Identificar o comportamento gráfico de funções polinomiais do 2º grau de acordo com as mudanças de seus coeficientes.

Duração: 50 minutos.

Metodologia:

- Para o desenvolvimento dessa prática é importante que os alunos já tenham estudado a definição de Função Quadrática, bem como já identifiquem que o seu gráfico no plano cartesiano gera uma curva que chamamos de parábola.
- Para iniciar, procure a simulação Matemática no Phet chamada **Gráfico de Quadráticas**.

Figura 31-Simulação do Phet para estudo de Parábolas



Fonte: PhetColorado (2024)

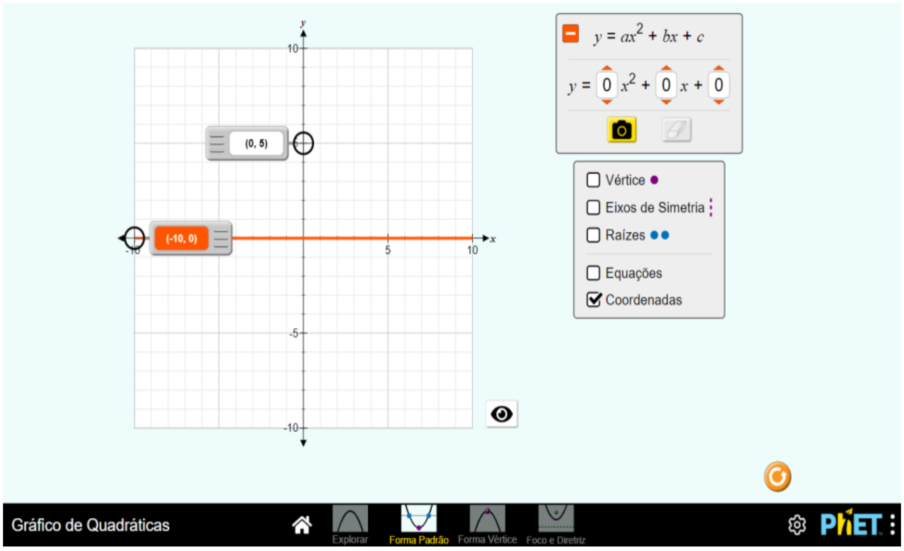
- Ao abrir a simulação, serão apresentadas quatro opções: **explorar, forma padrão, forma vértice** e **foco e diretriz**. Escolha a opção forma padrão.

Figura 32-Figura 31-Configurando Simulação

Fonte: PhetColorado (2024)

A seguir aparecerá a seguinte tela:

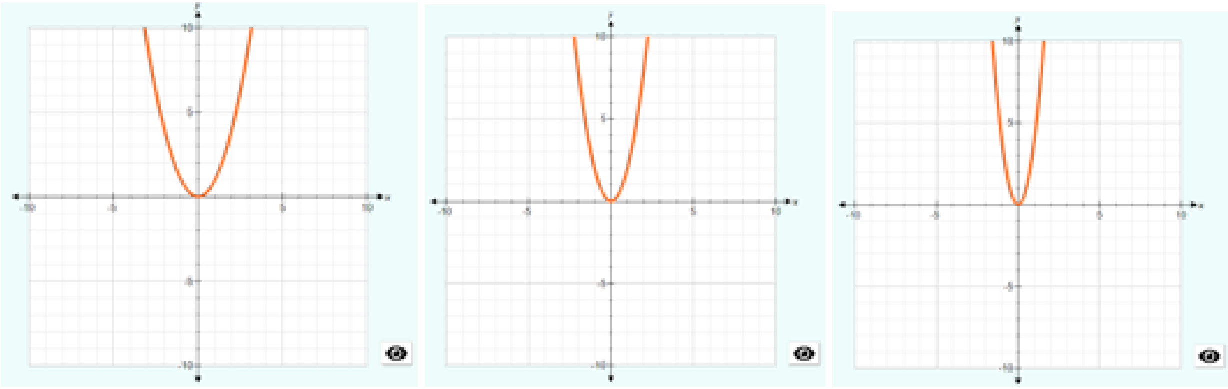
Figura 33-Tela inicial do Simulador



Fonte: PhetColorado (2024)

- Comente um pouco das funcionalidades da simulação antes de iniciar os exemplos. **(10 minutos)**
- No simulador, apresente aos alunos as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ e $h(x) = 4x^2$, nesse primeiro caso, o coeficiente a é positivo. Pergunte o que aconteceu com o gráfico apresentado à medida que o valor do coeficiente a aumentava e o que ocorre quando temos o inverso. Veja na Figura 34 os gráficos de f, g e h respectivamente.

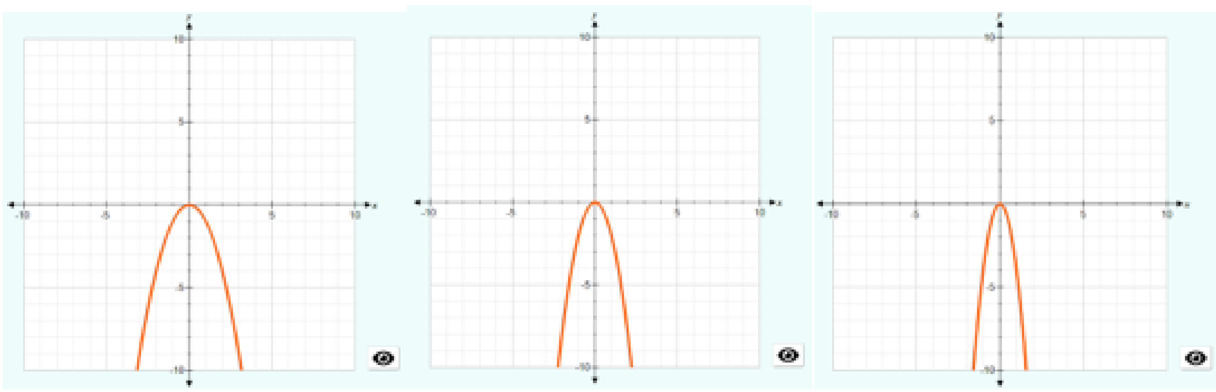
Figura 34-1º apresentação de parábolas



Fonte: PhetColorado (2024)

- Em seguida, apresente outras funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ e $h(x) = -4x^2$, nesse segundo caso, o coeficiente a é negativo. Proceda de modo análogo ao anterior.

Figura 35-2º apresentação de parábolas no simulador



Fonte: PhetColorado (2024)

- Indague os alunos sobre as semelhanças e diferenças percebidas nos casos apresentados. Explique que os primeiros casos representam parábolas com concavidade voltada para cima e os segundos casos representam parábolas com concavidade voltada para baixo. Conclua com os alunos que à medida que o valor do a aumenta em módulo, a abertura da parábola tende a diminuir, o contrário também ocorre, ressalte que nesses casos os coeficientes b e c são 0.

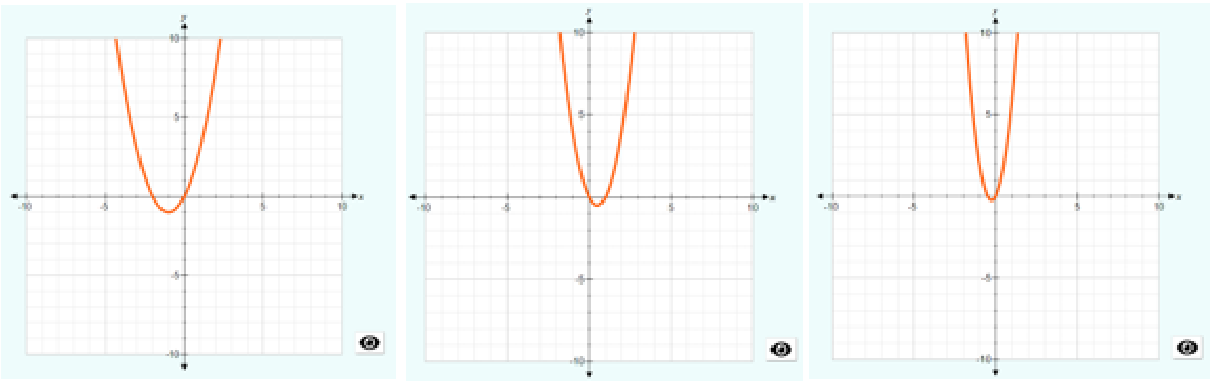
  (10 minutos)

- Peça aos alunos para construírem o gráfico de outras funções, porém agora com o coeficiente b não nulo.

Segue sugestão:

- $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 2x^2 - 2x$ e $h(x) = 4x^2 + 2x$.

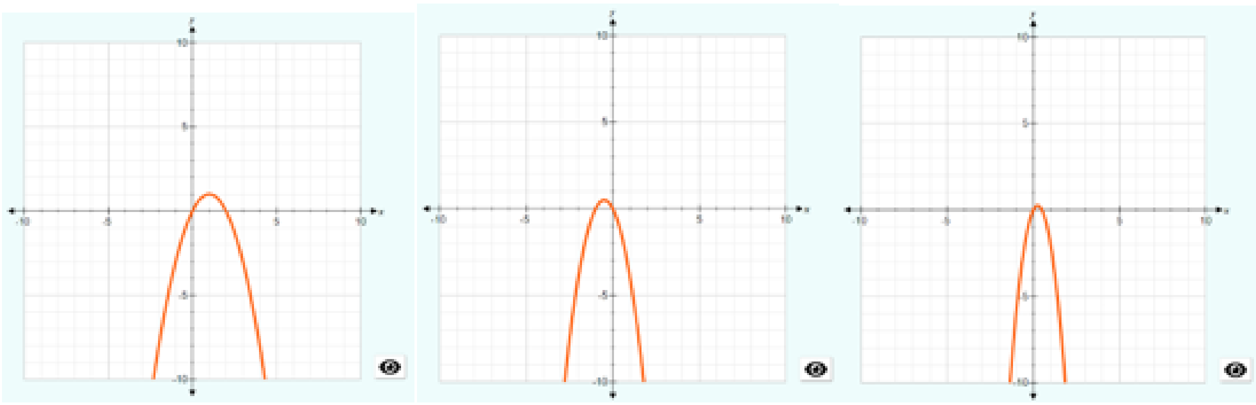
Figura 36-3º apresentação de parábolas no simulador



Fonte: PhetColorado (2024)

- $f(x) = -x^2 + 2x$, $g(x) = -2x^2 - 2x$ e $h(x) = -4x^2 + 2x$.

Figura 37-4º apresentação de parábolas no simulador

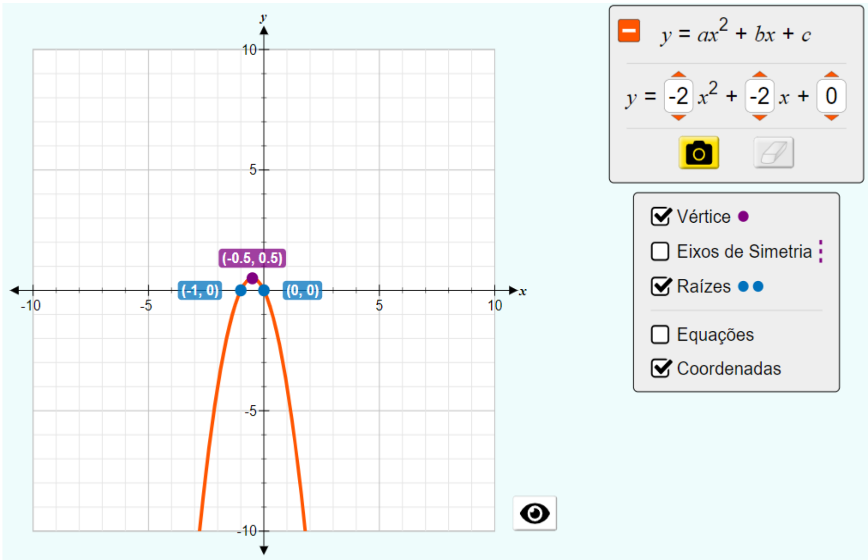


Fonte: PhetColorado (2024)

- Pergunte quais as principais semelhanças e diferenças observadas nessas novas representações gráficas. Mostre que todos os gráficos apresentados até o momento sempre passam pelo o eixo Y em um ponto específico, no centro do plano cartesiano. Indague os estudantes se isso sempre irá acontecer. Além disso, também é possível explorar elementos como vértice e raízes da função quadrática através do gráfico utilizando a simulação nas opções apresentadas.

  (20 minutos)

Figura 38-5º apresentação de parábolas no simulador



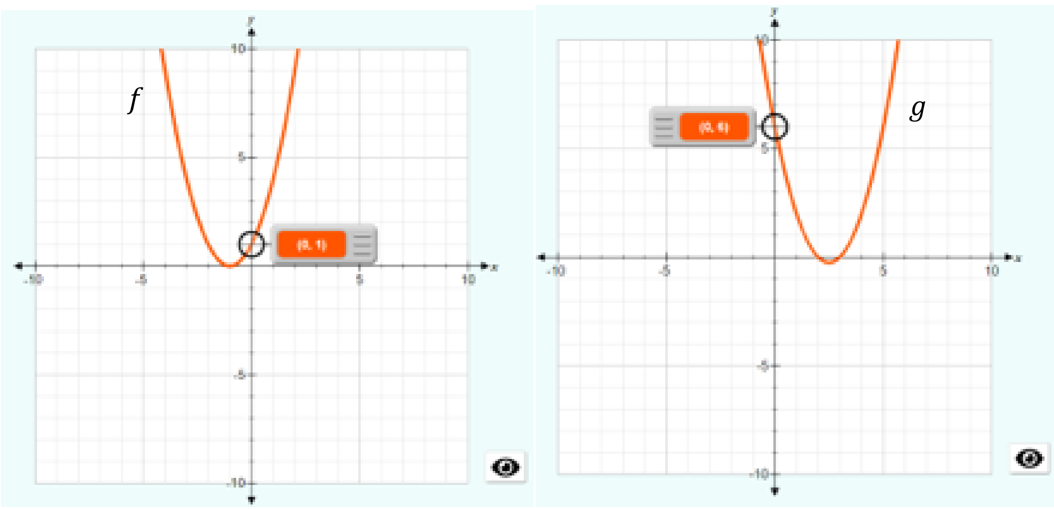
Fonte: PhetColorado (2024)

- Por fim, vamos construir funções em que nenhum dos coeficientes é nulo. Apresente alguns exemplos e peça para que os alunos façam os gráficos dessas funções no aplicativo.

  Segue sugestão:

  - $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

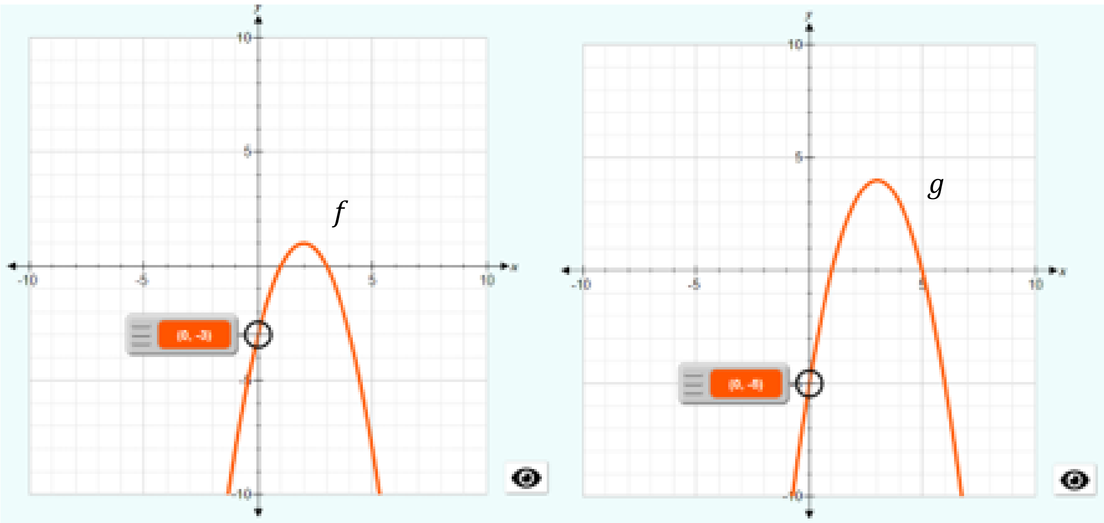
Figura 39-6º apresentação de parábolas no simulador



Fonte: PhetColorado (2024)

- $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Figura 40-7º apresentação de parábolas no simulador



Fonte: PhetColorado (2024)

- Indague os alunos qual foi a principal diferença que notaram nos gráficos apresentados. Conclua que o ponto de intersecção do gráfico com o eixo Y representa exatamente o coeficiente c. Para finalizar a aula, peça que eles construírem duas funções, uma com concavidade voltada para cima tocando o eixo Y na ordenada 8 e uma com concavidade voltada para baixo tocando o eixo Y na ordenada -3.

  (10 minutos)

Recursos: Computador e Projetor.

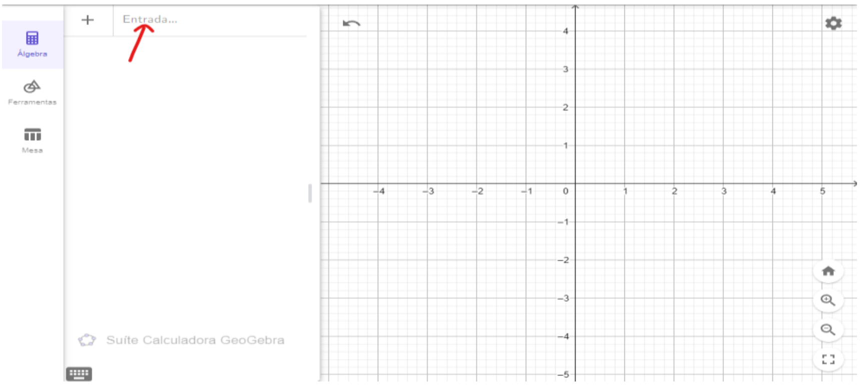
Formas de Avaliação: O aluno será avaliado mediante o seu desenvolvimento e participação na atividade, avaliação da prática.

(B) GEOGEBRA

O GeoGebra é uma aplicação utilizada para fins educacionais, sendo um recurso muito útil nas aulas de Matemática. O software é gratuito e pode ser acessado tanto online, como off-line, sendo para a segunda opção necessária a instalação do aplicativo no dispositivo eletrônico o qual será utilizado, tablet, smartphone ou PC, possuindo compatibilidade com diversos sistemas operacionais como iOS, Mac, Windows, Android, entre outros.

Ao abrir a aplicação é possível perceber a variedade de opções disponíveis, principalmente para o estudo geométrico, desde construção de polígonos, cálculo de áreas e perímetros até representação de gráficos de funções, parte de grande interesse no nosso trabalho. Ao iniciar o software, a seguinte tela será apresentada.

Figura 41-Tela do GeoGebra (versão online)

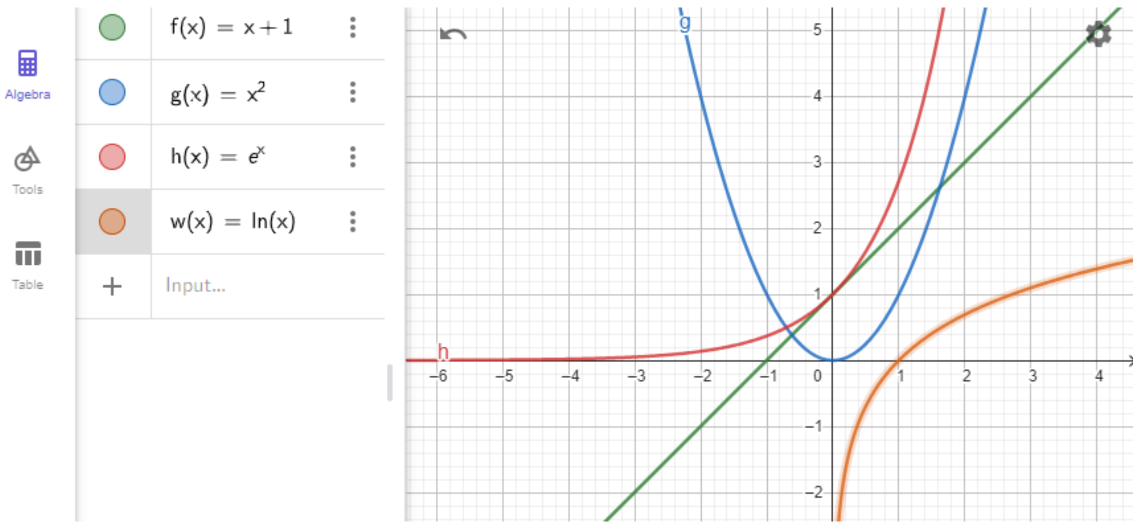


Fonte: GeoGebra

Na opção de entrada é possível inserir equações e funções matemáticas, de modo que suas respectivas representações aparecerão no plano cartesiano ao lado. Assim, aspectos relacionados a funções como domínio, contradomínio, imagem e seus comportamentos podem ser estudados de forma dinâmica, dentre outras possibilidades.

Veja a seguir a representação no GeoGebra de modelos de funções estudadas neste trabalho: afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

Figura 42-Representação de funções no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

De acordo com o assunto estudado, é possível criar diversas práticas com os recursos disponibilizados pela ferramenta. Veja a seguir duas sugestões que poderão lhe auxiliar nas aulas de funções exponenciais e logarítmicas.

Prática 3: Características e comportamento da Função Exponencial

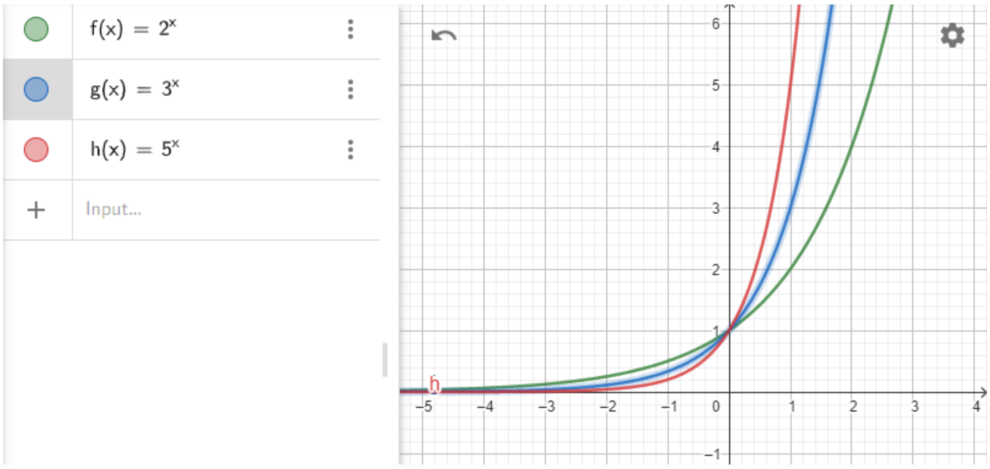
Objetivo: Identificar o formato gráfico, características e comportamentos de funções exponenciais.

Duração: 50 minutos

Metodologia:

- Caso os alunos não tenham familiaridade com o GeoGebra, apresente para eles a ferramenta e algumas de suas funcionalidades, colocando algumas funções para identificarem suas representações.
  (5 minutos)
- Em seguida, apresente as seguintes funções exponenciais no GeoGebra:
  - $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ e $h(x) = 5^x$.

Figura 43-1º representação de funções exponenciais no GeoGebra

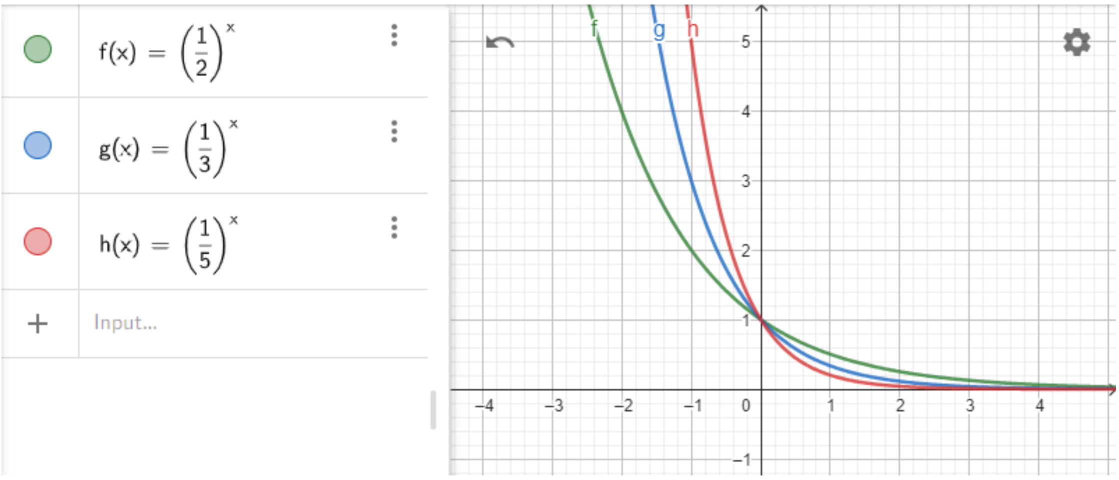


Fonte: GeoGebra

- Indague os alunos sobre quais as principais características observadas nas representações gráficas apresentadas e comente cada uma delas. Espera-se que os alunos percebam aspectos relacionados a crescimento e pontos de interseção com os eixos X e Y.
  (10 minutos)

- Em seguida, apresente as seguintes funções:
  - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Figura 44-2º representação de funções exponenciais no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

- De modo análogo ao anterior, pergunte aos alunos sobre quais as principais características observadas nas representações gráficas apresentadas e comente cada uma delas. Espera-se que os alunos percebam aspectos relacionados a crescimento e pontos de interseção com os eixos X e Y.

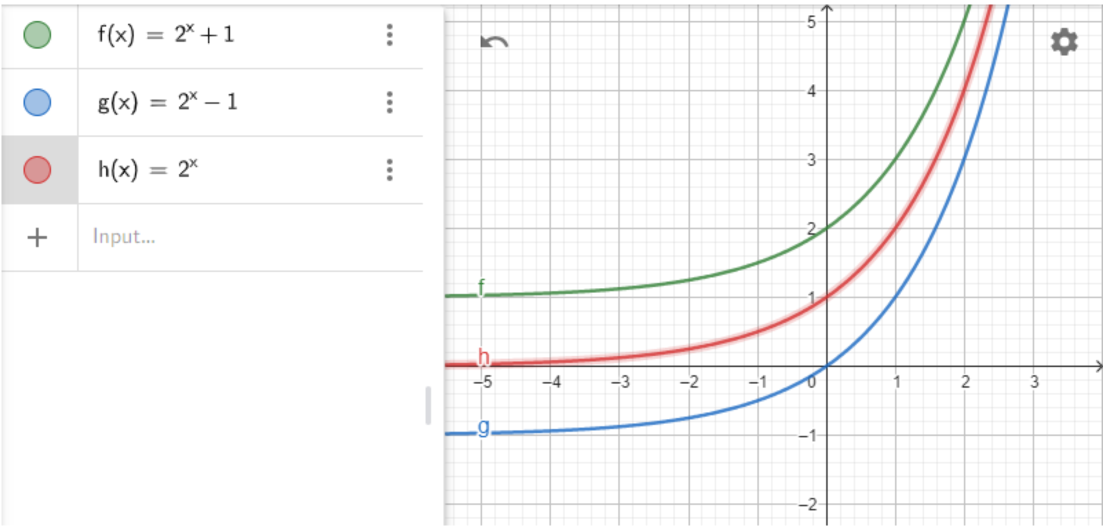
  (10 minutos)

- Compare os exemplos apresentadas buscando identificar possíveis semelhanças nos casos apresentados, em seguida, destaque sobre condições para funções serem crescentes e decrescentes, ponto de interseção com o eixo Y (0,1) e a impossibilidade de as funções exponenciais apresentadas tocarem o eixo X.

  (10 minutos)

- Para finalizar a aula pergunte o que aconteceria com as funções apresentadas quando começamos a modifica-las, adicionando ou retirando unidades. Por exemplo:
  - $f(x) = 2^x$+1 e $g(x) = 2^x - 1$.

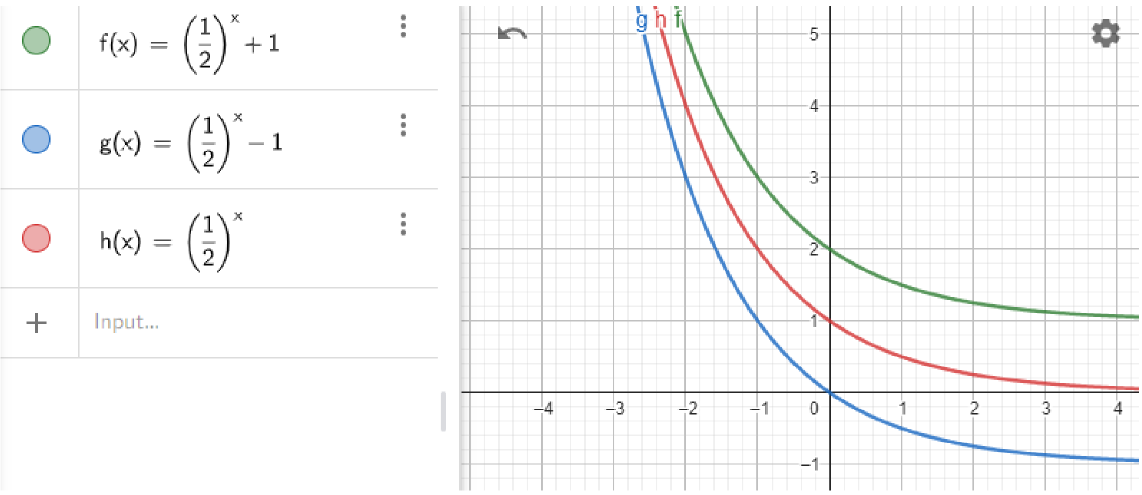
Figura 45-3º representação de funções exponenciais no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

- De modo análogo, pode ser apresentado as funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$+1 e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$-1.

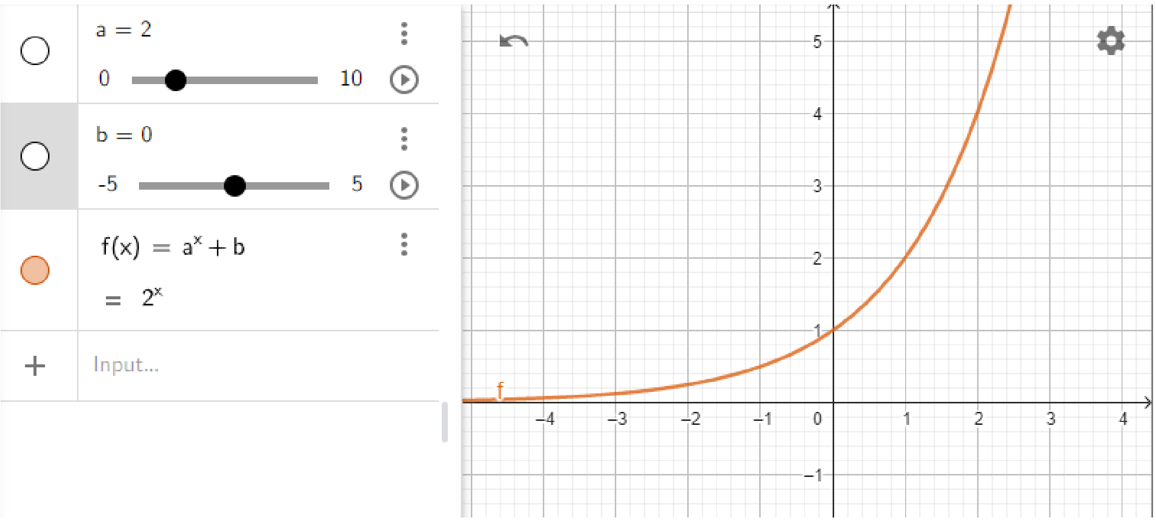
Figura 46-4º representação de funções exponenciais no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

- Espera-se que os estudantes consigam identificar a movimentação do gráfico da função sobre o eixo Y, movimentando-se para cima e para baixo.
- Por fim, é possível concluir a aula utilizando um recurso do GeoGebra chamado controle deslizante. Com ele é possível variar alguns coeficientes e identificar o comportamento dos gráficos a partir de suas alterações. Para esta prática, poderíamos inserir no campo entrada a seguinte função: $f(x) = a^x + b$.

Figura 47-5º representação de funções exponenciais no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

- À medida que alteramos os valores de a e b, a função começa a adquirir formatos diferentes. Também é possível limitar os valores que você deseja utilizar, neste caso específico o a varia entre (0,10] e b entre [-5,5].

  (15 minutos)

Recursos: Computador e Projetor.

Formas de Avaliação: O aluno será avaliado mediante o seu desenvolvimento e participação na atividade, avaliação da prática.

Prática 4: Características e comportamento da Função Logarítmica

Objetivo: Identificar o formato gráfico, características e comportamentos de funções logarítmicas.

Duração: 50 minutos

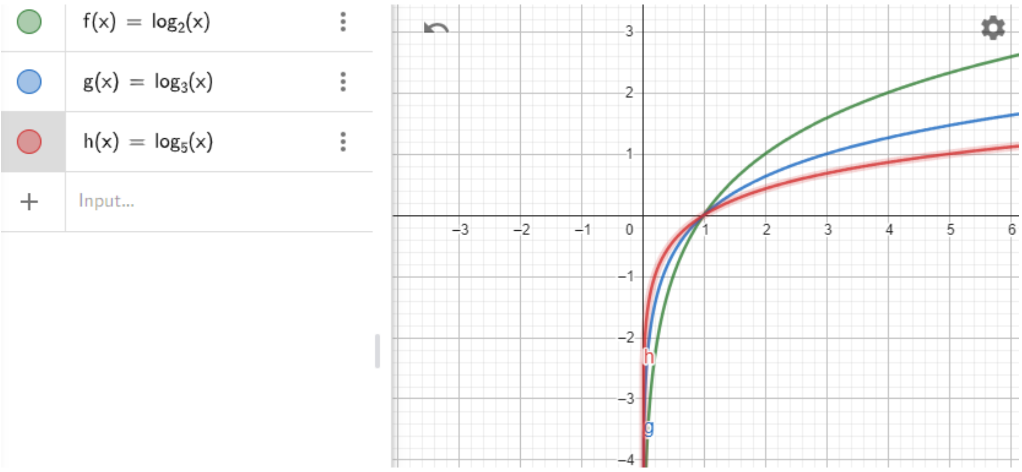
Metodologia:

- Caso os alunos não tenham familiaridade com o GeoGebra, apresente para eles a ferramenta e algumas de suas funcionalidades, colocando algumas funções para identificarem suas representações.

  (5 minutos)
- Em seguida, apresente as seguintes funções exponenciais no GeoGebra:

  - $f(x) = log_2x$, $g(x) = log_3x$ e $h(x) = log_5x$.

Figura 48-1º representação de funções logarítmicas no GeoGebra



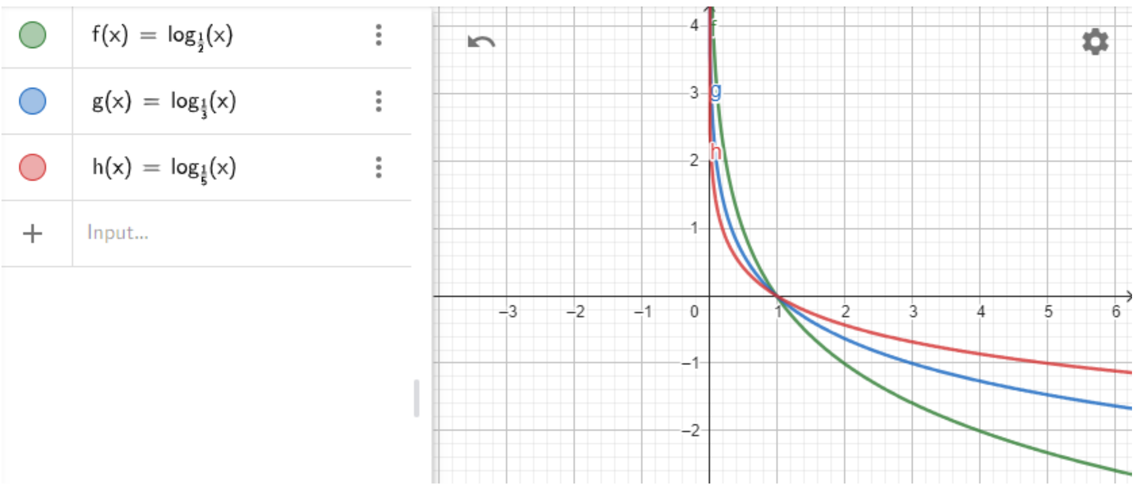
Fonte: GeoGebra

- Indague os alunos sobre quais as principais características observadas nas representações gráficas apresentadas e comente cada uma delas. Espera-se que os alunos percebam aspectos relacionados a crescimento e pontos de interseção com os eixos X e Y.

  (10 minutos)

- Em seguida, apresente as seguintes funções:
  - $f(x) = log_{\frac{1}{2}}x$, $g(x) = log_{\frac{1}{3}}x$ e $h(x) = log_{\frac{1}{5}}x$.

Figura 49-2º representação de funções logarítmicas no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

- De modo análogo ao anterior, pergunte aos alunos sobre quais as principais características observadas nas representações gráficas apresentadas e comente cada uma delas. Espera-se que os alunos percebam aspectos relacionados a crescimento e pontos de interseção com os eixos X e Y.

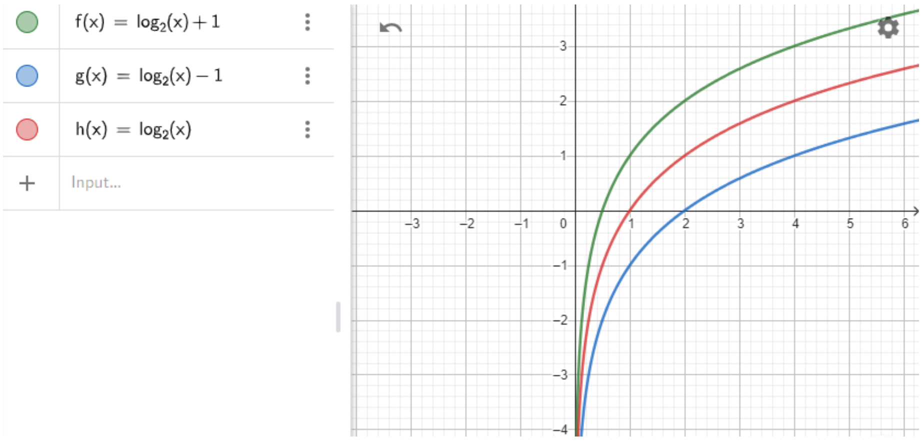
(10 minutos)

- Compare os exemplos apresentadas buscando identificar possíveis semelhanças nos casos apresentados, em seguida, destaque sobre condições para funções serem crescentes e decrescentes, ponto de interseção com o eixo X (1,0) e a impossibilidade de as funções logarítmicas apresentadas tocarem o eixo Y.

(10 minutos)

- Para finalizar a aula pergunte o que aconteceria com as funções apresentadas quando começamos a modifica-las, adicionando ou retirando unidades. Por exemplo:
  - $f(x) = log_2 x$+1 e $g(x) = log_2 x - 1$

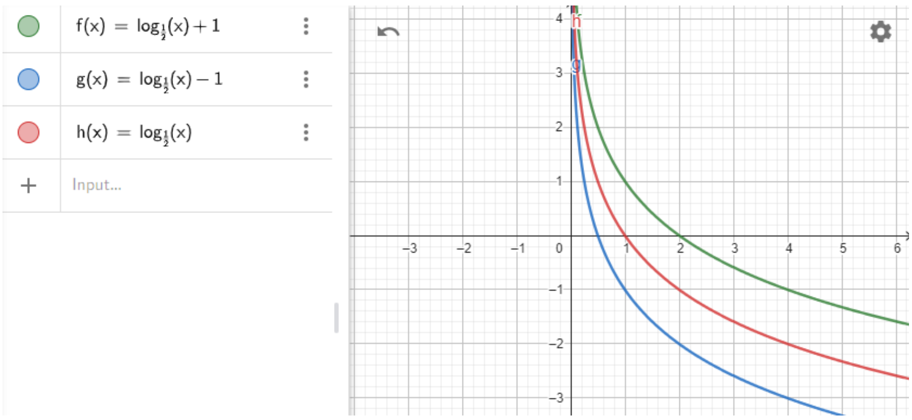
Figura 50-3º representação de funções logarítmicas no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

- De modo análogo, pode ser apresentado as funções $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$+1 e $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$-1.

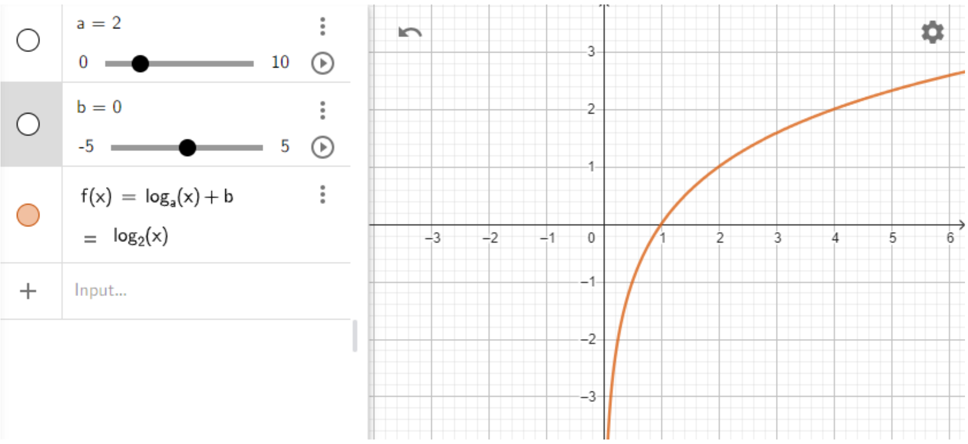
Figura 51-4º representação de funções logarítmicas no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

- Espera-se que os estudantes consigam identificar a movimentação do gráfico da função sobre o eixo Y, movimentando-se para cima e para baixo.
- Por fim, é possível concluir a aula utilizando um recurso do GeoGebra chamado controle deslizante. Com ele é possível variar alguns coeficientes e identificar o comportamento dos gráficos a partir de suas alterações. Para esta prática, poderíamos inserir no campo entrada a seguinte função: $f(x) = log_a x + b$.

Figura 52-5º representação de funções logarítmicas no GeoGebra



Fonte: GeoGebra

- À medida que alteramos os valores de a e b, a função começa a adquirir formatos diferentes. Também é possível limitar os valores que você deseja utilizar, neste caso específico o a varia entre (0,10] e b entre [-5,5].

  (15 minutos)

Recursos: Computador e Projetor.

Formas de Avaliação: O aluno será avaliado mediante o seu desenvolvimento e participação na atividade, avaliação da prática.

(C) WORDWALL

O Wordwall é uma plataforma para criação de atividades gameficadas. Diferentemente do Phet, essa ferramenta não é totalmente gratuita, porém os recursos apresentados de forma livre podem dinamizar bastante as aulas de Matemática, caso seja do interesse do professor, o mesmo poderá assinar um plano que se adeque melhor as suas necessidades. É preciso um cadastro para login e senha, nesse caso específico, utilizaremos o e-mail criado para o repositório de Matemática. Apresentaremos apenas a parte livre e algumas possíveis práticas que podem ser desenvolvidas no ambiente utilizando o tema de Funções.

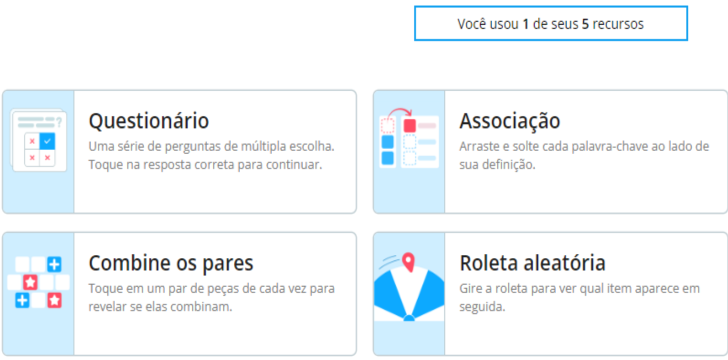
Ao acessar a plataforma, você será direcionado para a seguinte tela:

Figura 53-Tela Inicial do Wordwall

Fonte: Wordwall (2024)

Nessa Página Inicial é possível gerenciar as atividades desenvolvidas para os estudantes. Para criar suas primeiras atividades, basta clicar na opção destacada de azul no canto superior direito: criar atividade. Após, você será direcionado para uma tela com diversas opções disponíveis, escolha as de sua preferência e comece a editar. Na Figura 54, apresentamos ferramentas.

Figura 54-Ferramentas do Wordwall



Fonte: Wordwall (2024)

Existem diversos outros recursos, optamos por mostrar na imagem apenas alguns itens. Uma desvantagem em relação a parte gratuita é a quantidade de atividades disponíveis, limitam-se a cinco, porém é possível editar as atividades já criadas, tornando possível uma reutilização. A seguir apresentaremos algumas práticas possíveis de se desenvolver com esse recurso.

Prática 5: Roleta de Funções

Esta atividade foi desenvolvida durante uma aula de revisão para provas globais do 3º bimestre nas turmas dos 1º anos. A atividade consiste em uma competição entre duas equipes.

Objetivo: Reforçar temas de Funções Afins e Quadráticas através de atividade gameficada.

Duração: 50 minutos.

Metodologia:

- Inicialmente deve ser apresentado a turma o jogo e como ele funciona, em seguida os alunos serão divididos em duas equipes.
- Cada equipe começa com zero pontos e à medida que for respondendo perguntas corretamente, serão adicionados um ponto.
- Um membro de cada equipe deve tirar ‘impa par’ para verificar quem fará o primeiro giro.
- A seguir apresentamos um modelo da roleta de funções.

Figura 55-Roleta de funções

Fonte: Wordwall (2024)

- Para este modelo foram adicionadas dezesseis perguntas, todas relacionadas ao tema de função afim e quadrática. As perguntas podem ser personalizadas pelo professor de acordo com sua preferência, além disso também foram adicionadas duas opções de perde tudo e duas opções de passar a vez.

- Como meio de reforçar a atividade, pode ser destinado um prêmio para a equipe vencedora, nesta atividade, em específico foi atribuída uma pontuação nas notas bimestrais.
- Para que a equipe consiga a pontuação, um membro da mesma deve ir ao quadro e resolvê-la corretamente, caso a equipe não consiga, a vez passa para a outra equipe, tendo a mesma que girar a roleta.
- Ao final da atividade, ganha a equipe que obtiver mais pontos.

Recursos: Computador, projetor/televisão, pincel, lousa e apagador.

Formas de Avaliação: O aluno será avaliado mediante o seu desenvolvimento e participação na atividade, avaliação da prática.

Prática 6: Jogo da Memória para Funções

Objetivo: Trabalhar conceitos de funções afins através de atividade gameficada.

Duração: 50 minutos.

Metodologia:

- Inicialmente deve ser apresentado à turma o jogo e como ele funciona. O jogo será uma competição entre os alunos.
- Primeiro deve-se apresentar as perguntas aos alunos para que se familiarizem com as cartas que serão apresentadas. Segue algumas perguntas abaixo, lembrando que ela pode ser adaptada da forma que o professor preferir.

Figura 56-Pares de cartas do Jogo da Memória

Coeficiente angular da função $f(x) = 2x + 1$	2
Ponto de interseção da reta $y = 5x + 10$ com o eico Y	10
Ponto de interseção da reta $y = 5x + 10$ com o eico X	-2
Gráfico da Função Afim	Reta
Condição para a Função Afim ser crescente	$a > 0$
Condição para a Função Afim ser crescente	$a < 0$
Zero da função $f(x) = x + 1$	-1
Bissetriz dos quadrantes ímpares	$f(x) = x$
Retas concorrentes	Possuem diferentes coeficientes angular
Solução da equação 3x-9=0	3

Fonte: Compilação do autor

(10 minutos)

- Em seguida, cada aluno de posse de um tablet, computador ou celular deve acessar a atividade para realizar e montar os pares. Deve ser dado um tempo máximo de 10 minutos para encontrar os pares. A seguir apresenta-se a tela do jogo.

Figura 57-Tela do jogo em simulação

Fonte: Wordwall, (2024)

(10 minutos)

- Dando continuidade, os quatro mais bem classificados continuarão a disputa, para ajudá-los, eles devem escolher um dos alunos não classificados para a próxima fase. O jogo é rodado novamente, porém agora com cartas diferentes, tendo os mesmos alunos um tempo máximo de 10 minutos. Os dois mais bem colocados nessa etapa, avançarão para a final.

(10 minutos)

- Na fase final, os participantes podem escolher mais um aluno para ajuda-los. O jogo é rodado novamente, com cartas diferentes, tendo os mesmos alunos um tempo máximo de 10 minutos. O aluno que concluir em menos tempo é o vencedor.

(10 minutos)

- Pergunte aos alunos quais cartas eles tiveram mais dificuldade de encontrar seus pares e comente sobre as dúvidas observadas.

(10 minutos)

Recursos: Computador, tablet ou celular, projetor/televisão, pincel, lousa e apagador.

Formas de Avaliação: O aluno será avaliado mediante o seu desenvolvimento e participação na atividade, avaliação da prática.

5 REPOSITÓRIO DIGITAL

De posse de todo o material apresentado nas seções acima, desenvolvemos um ambiente para disponibilização destes materiais, como forma de facilitar o acesso e melhorar a interação com os professores. Para seu desenvolvimento utilizamos ferramentas de desenvolvimento Web: HTML e CSS. Além disso, fez-se necessário a criação de um e-mail personalizado, que através da função Google Drive foi possível alocar o material online. Para acessar o repositório, bastar utilizar o seguinte link: https://repositoriodefuncoesmat.netlify.app/. Partimos da ideia de um ambiente simples e direto, veja as funcionalidades apresentadas.

- Na **Página Principal**, realizamos uma breve apresentação do produto final da dissertação, sendo composta por cinco menus: **Página Principal, Funções, Aplicações, Materiais e Contato**.

Figura 58-Página Inicial do Repositório

Fonte: Compilação do autor

- Ao acessar o menu de **Funções** teremos disponível informações teóricas relacionadas a cada uma das funções apresentadas no decorrer do material, separadas por tema.

Figura 59-Menu de Funções

Fonte: Compilação do autor

- No menu **Aplicações**, destacamos algumas aplicações básicas relacionadas ao estudo apresentado, separadas do mesmo modo, por tema.

Figura 60-Menu de Aplicações

Fonte: Compilação do autor

- De modo análogo, em **Materiais** destacamos alguns exemplos de plataformas e sugestões de materiais que poderão ser utilizados durante as aulas de funções.

Figura 61-Menu de Materiais

Fonte: Compilação do autor

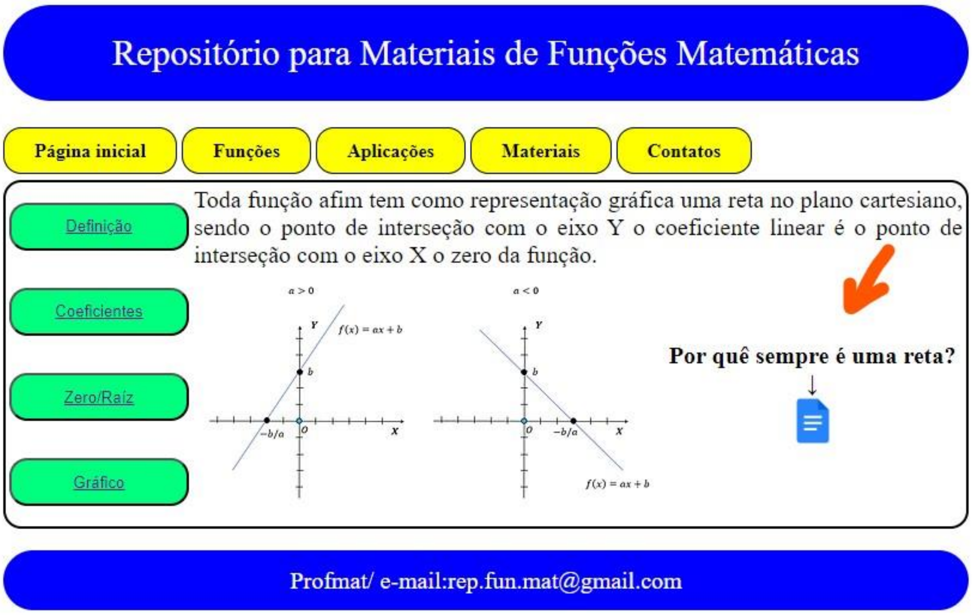
- Por fim, no menu **Contatos** deixaremos o e-mail pessoal da plataforma para esclarecer eventuais dúvidas e também possibilitar o compartilhamento de materiais sobre o tema, obtendo assim uma maior divulgação de materiais.

Figura 62-Menu de Contato

Fonte: Compilação do autor

Na plataforma também é possível encontrar, em algumas páginas, links que possibilitam acesso ao Google Drive com os capítulos criados no trabalho. Em alguns momentos utilizamos esses links como uma ferramenta que possibilita acesso a uma resposta de uma curiosidade. Veja um exemplo.

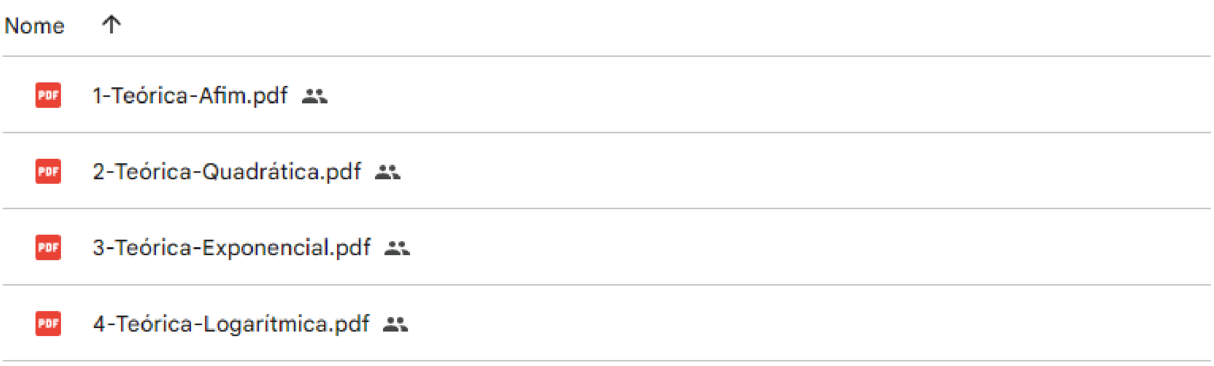
Figura 63-Menu de Função-Curiosidade da Função Afim



Fonte: Compilação do autor

Ao clicar no ícone de documento, o usuário será direcionado ao Drive com o capítulo que responde essa pergunta.

Figura 64-Material no Drive



Fonte: Compilação do autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É perceptível as dificuldades apresentadas no ensino de Matemática, fato este que se comprovou na pesquisa para o tema estudado em questão: Funções. Esse cenário se amplifica nacionalmente e os professores vem enfrentando diversos obstáculos no processo de ensino aprendizagem: base matemática ruim, desmotivação, falta de interesse por parte dos estudantes, estrutura inadequada e sobrecarga de trabalho dos professores, o que implica em menos tempo para planejamento de aulas mais diversificadas.

Com menos tempo para planejar, os professores podem ficar limitados em suas aulas, podendo recorrer na maioria das vezes a um sistema tradicional de ensino, que obviamente tem o seu valor, porém faz-se necessário que se vá além disso, que se busque novas metodologias de ensino. Nesse ponto, vem ganhando muita força no âmbito escolar o uso de tecnologias digitais para dinamizar a prática pedagógica, proporcionando mais praticidade, velocidade de resultados, motivação e interesse dos alunos.

Trazer a Matemática para o dia a dia também tem mostrado efeitos positivos no processo de ensino aprendizagem, pois possibilita aos estudantes perceberem a aplicação real de alguns conceitos da disciplina no seu cotidiano. Claro que nem sempre será possível realizar comparações entre os temas formais matemáticos com o ambiente a nossa volta, visto que a Matemática se desenvolve para além desses aspectos, mas sempre que possível, é importante enaltecer situações que a aproxime dos estudantes. Para isso, é preciso conhecer essas situações.

Pensando nos aspectos citados acima, desenvolvemos um conjunto de materiais para o tema de Funções que apresenta conceitos teóricos, aplicações e sugestões de materiais para serem utilizados nas aulas de Matemática, de forma que possa ser acessado por qualquer professor, desde que tenha acesso a internet, disponibilizado em uma plataforma nomeada como *Repositório para Materiais de Funções Matemáticas*, sendo esta, projetada especificamente para este fim.

Disponibilizamos o e-mail do repositório na plataforma e esperamos que demais professores possam auxiliar na divulgação de materiais e ferramentas para serem adicionados ao repositório e que o conteúdo produzido neste trabalho possa servir nas futuras aulas dos professores de Matemática, bem como fonte de pesquisa para outros trabalhos acadêmicos.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA BRASIL. *Resultados do PISA reforçam gargalo no ensino de matemática no Brasil*. dez. 2023. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2023-12/resultados-do-pisa-reforcam-gargalo-no-ensino-de-matematica-no brasil#:~:text=No%20Brasil%2C%20mesmo%20sendo%20um>. Acessado em 18 jun. de 2024.

Guidorizzi, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 2º ed. Rio de Janeiro: LTC, 2021.

GEOGEBRA. *Ferramentas e recursos do Geogebra*. [s.d.]. Disponível em: Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acesso em 04 de abr. de 2024.

G1. *Os cinco terremotos mais fortes da história*. 2023. Disponível em: <https://g1.globo.com/mundo/noticia/2023/09/09/os-cinco-terremotos-mais-fortes-da historia.ghtml>. Acesso em: 4 de maio de 2024.

Iezzi, G.; Murakami, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções**. 9º ed. São Paulo: Atual, 2013.

Iezzi, G.; Dolce, O.; Murakami, C. **Fundamentos de Matemática Elementar-Logaritmos**. 10º ed. São Paulo: Atual, 2013.

Lima, E. L. (2013). **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Martins Rodrigues, W.; Rolando Llanos Villarreal, E. **História da Matemática e estratégias interdisciplinares no ensino de Logaritmos**. Piracanjuba-GO: Editora Conhecimento Livre, 2023.

Ministério da Educação (Brasil). **Base Nacional Comum Curricular**. 2017

MINISTÉRIO DA SAÚDE. *Coronavírus Brasil*. Disponível em: <https://covid.saude.gov.br/>. Acesso em: 4 de maio de 2024.

Neto, Antonio Caminha Muniz. **Fundamentos de Cálculos**. 2º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

Pereira, Horácio Eufrasio. **Função exponencial Natural e Aplicações**. 2015. 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática pelo PROFMAT) -Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

PHET INTERACTIVE SIMULATIONS. *PhET Simulações Interativas*. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/>. Acesso em 04 de abr. de 2024.

Souza, Walfredo José de. **Função Afim: Teoria e Aplicação**. 2013. 40 f. Dissertação (Mestrado em Matemática pelo PROFMAT) -Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DO CEARÁ. *Sistema de Informações Educacionais*. Disponível em: <https://www.ced.seduc.ce.gov.br/sisedu/>. Acesso em 04 de abr. de 2024.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DO CEARÁ. *Sistema de Informações Educacionai*. Disponível em: <https://sisedu.seduc.ce.gov.br/>. Acesso em: 4 de maio de 2024.

WORDWALL. *Wordwall - Atividades Interativas e Recursos Educacionais*. Disponível em: <https://wordwall.net/pt>. Acesso em 04 de abr. de 2024.