Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Castanhal
PPG em Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

Equação de Recorrência no Ensino Médio

Natalia de Paula Oliveira de Andrade

Castanhal - PA
2024

Equação de Recorrência no Ensino Médio

Mestrado
03/2022 – 07/2024

Defesa 30/07/2024
Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Castanhal
Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Natalia de Paula Oliveira de Andrade
natalia.andrade@castanhal.ufpa.br
Mestranda do Profmat
UFPA-Castanhal

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida
Orientador

Profa. Dra. Willa Nayana Corrêa de Almeida
Membro Externo/SEDUC - PA

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal
Membro do PROFMAT UFPA/Campus Castanhal

Profa. Dra. Gerlandia De Castro Silva Thijm
Membro do PROFMAT UFPA/Campus Castanhal

Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes
Membro do PROFMAT UFPA/Campus Castanhal

Agradecimentos

À minha família, cuja paciência e incentivo constante foram fundamentais ao longo de toda a minha jornada acadêmica. Seu apoio emocional e prático me permitiu focar nos estudos e superar os desafios encontrados.

À Universidade Federal do Pará (UFPA) e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), minha profunda gratidão pela oportunidade de participar deste curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). O suporte institucional e as condições oferecidas foram essenciais para a realização deste trabalho.

Ao professor Arthur da Costa Almeida, meu orientador, pela orientação inestimável, paciência e dedicação. Suas sugestões e críticas construtivas foram vitais para o aprimoramento deste trabalho, e seu comprometimento com meu desenvolvimento acadêmico e profissional fez toda a diferença.

Aos professores do curso PROFMAT, cujo conhecimento e entusiasmo por ensinar inspiraram e enriqueceram minha experiência acadêmica. A diversidade de abordagens e a profundidade do conteúdo ministrado foram cruciais para minha formação.

Aos meus colegas de turma, com quem compartilhei momentos inesquecíveis de aprendizado, discussões enriquecedoras e companheirismo. A troca de experiências e o apoio mútuo ao longo do curso tornaram essa jornada mais leve e gratificante.

Por fim, a todos os familiares, amigos e demais pessoas que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho, meu muito obrigado. Suas palavras de incentivo e suporte, mesmo nas pequenas coisas, foram essenciais para que eu pudesse chegar até aqui.

A todos, minha eterna gratidão.

Se por acaso omiti algo mais ou menos adequado ou necessário,
peço perdão, pois ninguém é isento e circunspecto em todos os assuntos.
(Fibonacci)

Resumo

Este trabalho aborda a importância das Equações de Recorrência e suas aplicações no ensino médio, destacando como elas podem ser usadas para modelar padrões matemáticos discretos. Além disso, discutimos como os modelos contínuos podem ser representados por meio das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), permitindo a análise e a compreensão de fenômenos dinâmicos em diversas áreas. As EDOs são equações que envolvem funções e suas derivadas, desempenhando um papel crucial na modelagem de fenômenos em diversas áreas, como física, biologia e economia. Por outro lado, as Equações de Recorrência são fórmulas que definem uma sequência de números em termos dos valores anteriores, sendo amplamente utilizadas em problemas de contagem, análise de algoritmos e séries temporais. Inicialmente, apresentamos uma introdução teórica à modelagem matemática e às EDOs, em seguida, discutimos as Equações de Recorrência, com foco na resolução de recorrências lineares homogêneas de primeira ordem e de segunda ordem. Exemplos práticos, como a Sequência de Fibonacci e o problema da Torre de Hanói, são utilizados para ilustrar esses conceitos. A integração das Equações de Recorrência no currículo da educação básica é sugerida como uma forma de estimular o pensamento algorítmico e a compreensão de padrões matemáticos. Propomos atividades didáticas que envolvem solucionar problemas baseados em recorrências e analisar os resultados dessas atividades. Por fim, argumentamos que a introdução de conceitos de recorrência no ensino médio pode fortalecer as habilidades matemáticas dos alunos, prepará-los melhor para estudos avançados em matemática e ciências aplicadas, e alimentar um interesse maior pela disciplina. O trabalho conclui com recomendações para professores sobre a implementação dessas práticas pedagógicas.

Palavras-chave: Sequência; Equações de Recorrência; Modelagem Matemática; Aplicação no ensino médio.

Abstract

This dissertation addresses the importance of Recurrence Equations and their applications in high school, highlighting how they can be used to model discrete mathematical patterns. Furthermore, we discuss how continuous models can be represented through Ordinary Differential Equations (ODE), allowing the analysis and understanding of dynamic phenomena in different areas. ODE are equations involving functions and their derivatives, playing a crucial role in modeling phenomena in various areas, such as physics, biology and economics. On the other hand, recurrence equations are formulas that define a sequence of numbers in terms of previous values, and are widely used in counting problems, algorithm analysis and time series. Initially, we present a theoretical introduction to mathematical modeling and ODEs, then we discuss Recurrence Equations, focusing on solving homogeneous linear recurrences of first order and second order. Practical examples, such as the Fibonacci Sequence and the Tower of Hanoi problem, are used to illustrate these concepts. The integration of Recurrence Equations into the basic education curriculum is suggested as a way to stimulate algorithmic thinking and the understanding of mathematical patterns. We propose teaching activities that involve solving problems based on recurrences and analyzing the results of these activities. Finally, we argue that introducing concepts of recurrence and in high school can strengthen students' mathematical skills, better prepare them for advanced study in mathematics and applied sciences, and nurture a greater interest in the subject. The work concludes with recommendations for teachers on implementing these pedagogical practices.

Keywords: Sequence; Recurrence Equations; Mathematical Modeling; Application in high school.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

A introdução de conceitos matemáticos avançados no ensino médio é uma abordagem com a intenção de fortalecer a base educacional e preparar os estudantes para desafios acadêmicos e profissionais futuros. Entre esses conceitos, as Equações de Recorrência emergem como uma ferramenta para a formação de modelos matemáticos, resolução de problemas complexos e análise de padrões. Elas conectam teoria e prática, oferecendo uma perspectiva sobre como problemas reais podem ser estruturados e solucionados através de modelos matemáticos.

Ao participar do Programa OBMEP[1] na escola[2] de 2020 a 2022, através do material de apoio disponibilizado para as aulas com os grupos de estudos formados pelos alunos, pude perceber que as questões que mais interessavam aos alunos eram as que envolviam algum padrão. Eles discutiam entre si a resolução das questões, conseguindo encontrar o resultado por meio de uma sequência. Assim, ao ingressar como discente no PROFMAT e estudar Matemática Discreta, pude relacionar essas questões que apareciam na prova da OBMEP com o conceito de recorrência.

As Equações de Recorrência podem ser aplicadas para resolver problemas do mundo real e seu estudo pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático dos alunos, pois é comum a percepção de alguns padrões que acontecem no dia a dia. Um exemplo disso são os horários de uma linha de ônibus qualquer, que pode ser de meia em meia hora ou de uma em uma hora, dependendo de cada linha. É possível notar como esses eventos se relacionam ao longo do tempo analisando o aumento ou diminuição das variáveis.

Essas variáveis podem mostrar um crescimento linear, como em processos de fabricação e produção nas indústrias, ou exponencial, como no cálculo de juros compostos. Através das Equações de Recorrência é possível entender como esses eventos ou valores estão conectados de forma sequencial, permitindo compreender como as mudanças acontecem ao longo do tempo. Trabalhar com Equações de Recorrência exige que os alunos pensem de forma

[1] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

[2] O programa OBMEP na escola é voltado para formação de professores a fim de adotar novas práticas na sala de aula e selecionar e criar grupo de estudos com os alunos com a finalidade de prepará-los para as provas da OBMEP; É promovido com recursos do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações (MCTI) e do MEC, com apoio do IMPA e da SBM e Patrocínio da fundação Itaú social por meio de bolsas oferecidas aos professores participantes.

abstrata e depois aplique o pensamento recursivo. Assim, eles desenvolvem habilidades para resolver problemas, pois aprendem a identificar a raiz do problema e depois a solucioná-lo.

Neste trabalho, abordaremos o ensino das Equações de Recorrência no ensino médio, explorando sua interseção com a modelagem matemática e as equações diferenciais ordinárias (EDOs), além de sua aplicação prática em atividades aplicadas na escola com o o objetivo de propor o estudo de Equação de Recorrência no ensino médio composta por uma atividade envolvendo modelagem de situações reais, mostrar que as Equações de Recorrência são estudadas no ensino médio, expressar o padrão de uma sequência por meio de Equação de Recorrência e resolver questões da OBMEP utilizando Equação de Recorrência.

Esta dissertação será dividida em três capítulos, cada um focado em um aspecto específico do tema, proporcionando uma visão abrangente sobre como as Equações de Recorrência podem ser integradas ao currículo de forma eficaz.

O capítulo 1 contextualiza a importância das Equações de Recorrência no âmbito da modelagem matemática e das equações diferenciais ordinárias (EDOs). A modelagem matemática, segundo Bassanezi (2002), é um mecanismo essencial para traduzir problemas do mundo real em estruturas matemáticas que podem ser analisadas e resolvidas. As EDOs, por sua vez, são fundamentais para modelar mudanças contínuas ao longo do tempo, estabelecendo a base para a compreensão de sistemas dinâmicos. Ao introduzir esses conceitos no ensino médio, os alunos podem perceber como as equações podem representar fenômenos naturais e processos complexos de maneira precisa e previsível. A relação entre EDOs e Equações de Recorrência será explorada, demonstrando como ambas podem ser usadas para resolver problemas similares em diferentes contextos.

Também no capítulo 1, focaremos na análise de sequências e nas progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG), que são introduzidas como casos especiais de Equações de Recorrência. Essas progressões servem como ponto de partida para o entendimento das Equações de Recorrência de primeira e segunda ordens, que são formuladas e resolvidas com base em suas propriedades. Este capítulo abordará a identificação de padrões em sequências, a formulação de Equações de Recorrência associadas e suas soluções. Compreender como construir e resolver essas equações prepara os alunos para aplicar métodos matemáticos em problemas iterativos e cumulativos.

O capítulo 2 demonstra a aplicação das Equações de Recorrência através de exemplos práticos que ilustram sua utilização em diferentes contextos. Serão apresentados exemplos clássicos como a Torre de Hanói, números poligonais, questões da OBMEP e a previsão de comportamentos econômicos. Cada exemplo será detalhado, destacando a formulação da Equação de Recorrência, a solução obtida e a interpretação dos resultados. Esses exemplos visam mostrar aos alunos como conceitos matemáticos abstratos podem ser aplicados para resolver problemas reais, reforçando a relevância das Equações de Recorrência na análise de sistemas que evoluem ao longo do tempo.

Por fim, o capítulo 3, relata a implementação de uma atividade prática baseada em Equações de Recorrência realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Professor Benicio Lopes em Castanhal, Pará. Esta atividade envolverá a revisão e a aplicação de conceitos matemáticos aprendidos para resolver problemas propostos, documentando suas descobertas e conclusões. A metodologia usada para desenvolver essa atividade foi, primeiramente, regatar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito de Equações de Recorrência, destacando sua importância e aplicação em diversas áreas da matemática e das ciências, utilizando exemplos simples para ilustrar como elas podem ser usadas para resolver problemas sequenciais. Durante essa etapa, o professor forneceu suporte e orientação, ajudando os alunos a identificar a estrutura recorrente nas questões e a formular as equações correspondentes. Posteriormente, os alunos receberam uma atividade com questões selecionadas, em sua maioria da OBMEP, que envolvem a aplicação de Equações de Recorrência. Os alunos foram orientados a resolver as questões de forma individual ou colaborativa. Após a resolução das questões, cada aluno respondeu um questionário de autoavaliação. O questionário incluia perguntas objetivas e subjetivas sobre a compreensão dos conceitos abordados, a eficácia dos métodos de resolução e a confiança na resolução das questões e desafios futuros. Essa experiência tem o objetivo de mostrar como atividades práticas podem fortalecer o entendimento conceitual e o engajamento dos alunos com a matemática.

Os gráficos mostrados nas aplicações e nos resultados foram feitos com um programa desenvolvido na linguagem R, disponível em Team (2013).

A abordagem das Equações de Recorrência no ensino médio oferece uma oportunidade única para enriquecer a educação matemática, proporcionando aos alunos métodos para análise e resolução de problemas. Esta dissertação busca demonstrar como trabalhar as Equações de Recorrência na educação básica pode melhorar a compreensão dos alunos sobre modelagem matemática, progressões e aplicações práticas.

1

Recorrência

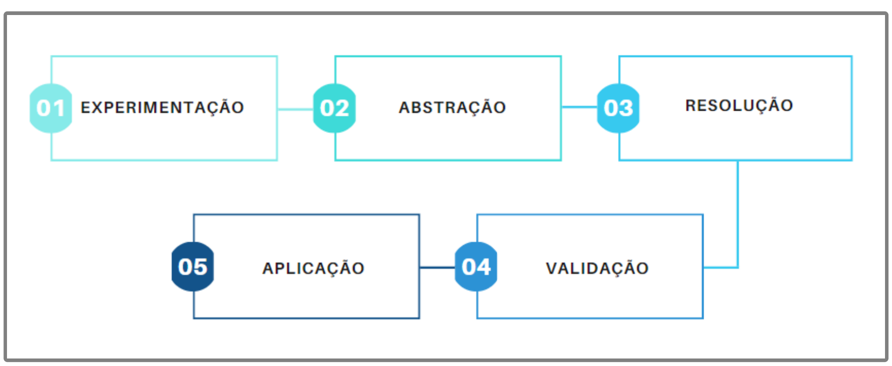
1.1 Modelagem Matemática

Através de modelos matemáticos podemos representar situações do mundo real. Esta abordagem envolve o uso de equações e outras estruturas matemáticas para traduzir esses problemas. Ao criar esses modelos, o pesquisador em questão podem explorar cenários hipotéticos, testar hipóteses e obter informações valiosas sobre os sistemas em estudo.

É necessário recolher toda a informação relevante, identificar as principais variáveis que afetam o fenômeno e estabelecer as conjecturas que servem de base ao modelo. Esta etapa requer uma análise cuidadosa do contexto e dos requisitos do problema, bem como a compreensão de como as variáveis se relacionam ou dependem uma da outra.

A modelagem matemática de uma situação ou problema real geralmente segue uma sequência de etapas bem definidas, como na Figura 1.1:

Figura 1.1: Etapas da Modelagem Matemática



FONTE: Adaptado de (BASSANEZI, 2002).

- Experimentação: Identificação do Problema, ou seja, compreender e descrever claramente o problema ou a situação real que precisa ser modelada especificando os objetivos da modelagem, o que se deseja alcançar ou prever com o modelo.

- Abstração: Formulação do Modelo, isto é, identificar as variáveis importantes que influenciam o problema, fazer suposições simplificadoras que tornem o problema tratável matematicamente e traduzir a situação real em termos matemáticos, desenvolvendo equações ou relações que descrevam o comportamento das variáveis.

- Resolução do Modelo: De modo a selecionar métodos matemáticos ou numéricos apropriados para resolver as equações do modelo, realizando os cálculos ou simulações necessárias para obter soluções.

- Validação: Interpretar os resultados obtidos na linguagem do problema original, verificando se fazem sentido no contexto real e comparar as previsões do modelo com dados reais ou experimentais para verificar sua precisão e validade.

- Aplicação: Aplicar o modelo para fazer previsões, tomar decisões ou resolver problemas específicos e apresentar os resultados e as conclusões de forma clara e compreensível para todas as partes interessadas.

No ensino básico, a modelagem matemática pode ser inserida em vários contextos que vão além do simples aprendizado de conceitos matemáticos. O objetivo é ajudar os alunos a desenvolverem habilidades de pensamento crítico e analítico, uma vez que eles precisam interpretar situações reais, identificar variáveis relevantes e formular hipóteses. Esse processo exige que eles pensem de forma lógica e criteriosa, habilidades essenciais em muitas áreas do conhecimento e da vida cotidiana.

Através da modelagem, os alunos veem como a matemática pode ser aplicada a situações do mundo real. Isso torna o aprendizado mais relevante e interessante, ajudando os alunos a perceberem a utilidade da matemática fora da sala de aula aprendendo a resolver problemas práticos, como calcular custos, analisar dados, ou entender fenômenos naturais. O que envolve a resolução de problemas complexos que não têm uma única solução correta. Isso incentiva os alunos a explorarem diferentes abordagens e estratégias, desenvolvendo a capacidade de resolver problemas de forma criativa e inovadora. Além disso, incentiva os alunos a fazerem conexões entre diferentes áreas do saber, como por exemplo, em ciências, com cultura de bactérias, em geografia com o crescimento populacional, entre outras.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em uma das competência específicas de matemática para o ensino médio, devemos

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em

> diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018)

Ao trabalhar com problemas e projetos que são relevantes e significativos para eles, os alunos tendem a se sentir mais engajados e motivados para aprender. A modelagem matemática pode tornar o aprendizado mais dinâmico e interessante, aumentando a participação ativa dos alunos. E muitas desses problemas, envolvem o uso de tecnologia, como software de simulação e análise de dados. Isso ajuda os alunos a desenvolverem competências tecnológicas que são cada vez mais importantes no mundo moderno.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que

> A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. (BRASIL, 2000)

Dessa forma, a modelagem matemática no ensino básico não só ajuda a compreender os conceitos matemáticos, como também enriquece a formação dos alunos em diversos campos que possam vir a seguir, preparando-os para os desafios do mundo real e incentivando uma aprendizagem mais profunda e integrada.

Segundo (BASSANEZI, 2002), modelos matemáticos que relacionam variáveis por meio de suas variações contínuas são formulados usando equações diferenciais, enquanto os modelos discretos utilizam equações de diferenças.

Vamos estudar na próxima seção uma breve abordagem sobre Equações Diferenciais e seus métodos para modelar fenômenos do mundo real.

1.2 Equações Diferenciais

Uma equação diferencial é uma relação matemática que envolve uma função desconhecida e suas derivadas. Essas equações expressam a maneira como uma função muda ao longo de uma variável independente e são fundamentais em muitas áreas como, por exemplo, na economia, pois modelam fenômenos que envolvem taxas de variação.

Uma equação diferencial pode ser expressa na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.1}$$

ou

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^n) = 0 \tag{1.2}$$

onde:

- x é a variável independente,
- $y = y(x)$ é a função desconhecida de x,
- $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$ são as derivadas de y em relação a x,
- F é uma função conhecida que relaciona x, y e suas derivadas.

Há dois tipos principais de equações diferenciais:

Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que envolvem derivadas em relação a uma única variável independente. Por exemplo, a equação $\frac{dy}{dx} = y$ é uma EDO onde y é uma função de x.

Equações Diferenciais Parciais (EDPs) que envolvem múltiplas variáveis independentes e suas derivadas parciais em relação a essas variáveis. Por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

A ordem de uma equação diferencial é determinada pela maior derivada presente na equação. Por exemplo, se a maior derivada é a segunda derivada y", a equação é de segunda ordem. E é dita linear se a função F for expressa como uma combinação linear da função desconhecida y e suas derivadas, ou seja, se ela pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{1.3}$$

onde $a_i(x)$ e $g(x)$ são funções conhecidas de x. Caso contrário, a equação é não linear.

Uma equação diferencial linear de ordem n é homogênea se expressa na forma 1.3, onde $a_i(x)$ são funções de x e não há termo independente (não relacionado a y ou suas derivadas) e é dita autônoma se ela pode ser expressa na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

onde f depende apenas das derivadas da função e não da variável independente x.

1.2.1 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária

Segundo Zill & Cullen (2001) a solução de uma EDO é uma função que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação diferencial 1.1 para todos os valores de x num dado intervalo I. A equação pode conter solução geral que abrange todas as soluções possíveis e geralmente inclui constantes arbitrárias ou solução particular que é uma solução específica obtida ao definir as constantes com base em condições iniciais.

Exemplo 1. *(PIVA, 2016) Equação diferencial:* $2y' + y = 0$*, Uma solução:* $y = e^{-\frac{x}{2}}$.

Para verificar que de fato y é solução, deriva-se a função em relação à x:
$y' = e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Assim:
$2y' + y = 2[e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)] + e^{-\frac{x}{2}} = -e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = 0.$

1.2.1.1 Problema de valor Inicial

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) resolvida por meio de um Problema de Valor Inicial (PVI) envolve encontrar uma função que além de satisfazer a EDO, também cumpre uma condição inicial específica.

Exemplo 2. *Resolva por meio de um Problema de Valor Inicial a Equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = -2xy$*, com* $y(0) = 1$
solução:

Reescrevendo a equação separando as variáveis, temos:

$$\frac{dy}{y} = -2xdx.$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -2xdx$$
$$ln|y| = -x^2 + C$$
$$y = e^{-x^2+C} = e^C e^{-x^2}$$
$$y = C_1 e^{-x^2}$$

onde $C_1 = e^C$ é uma constante arbitrária. Como a condição inicial é $y(0) = 1$, temos

$$y(0) = C_1 e^0 = C_1 = 1.$$

Portanto, a solução do PVI é $y = e^{-x^2}$.

1.2.2 Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem

Uma EDO de primeira ordem é dita homogênea se pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

onde as funções $P(x)$ e $Q(x)$ são independentes de x.

Mostraremos adiante um método de resolução de EDOs Lineares de Primeira Ordem, o chamado Método das Variáveis Separadas.

1.2.2.1 Método das Variáveis Separadas

Consideremos a equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Primeiro, escrevemos a equação de modo que todos os termos em y estejam em um lado e todos os termos em x no outro lado.

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx.$$

Agora, integramos ambos os lados da equação com respeito às suas variáveis.

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx,$$

obtendo $G(y) = H(x) + C$, onde C é a constante de integração.

Exemplo 3. *(GUIDORIZZI, 2011)Numa certa cultura de bactérias, a taxa de aumento é proporcional ao número presente. Verificando-se que o número dobra em 2 horas, quantas pode-se esperar ao final de 6 horas?*

Solução: A equação diferencial que descreve a taxa de crescimento da população $P(t)$ de bactérias é:

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

onde $P(t)$ é o número de bactérias no tempo t, e k é a constante de proporcionalidade. Para resolver essa equação diferencial, separamos as variáveis e integramos ambos os lados, ficando:

$$\frac{dP}{P} = kdt$$
$$\int \frac{1}{P} dP = \int kdt$$

resultando em

$$ln|P| = kt + C$$

onde C é a constante de integração. Simplificando, temos:

$$P = e^{kt+C} = e^{C} \cdot e^{kt}.$$

Chamando e^C de P_0, chegamos na solução geral:

$$P(t) = P_0 e^{kt},$$

onde P_0 é o número inicial de bactérias no tempo $t = 0$. Agora, sabemos que o número de bactérias dobra em 2 horas. Isso nos dá a condição inicial $P(2) = 2P_0$. Substituindo na solução geral, temos

$$2P(0) = P_0 e^{2k}.$$

Dividindo ambos os lados por P_0 e fazendo os cálculos necessários, temos

$$2 = e^{2k}$$
$$ln\, 2 = 2k$$
$$k = \frac{ln\, 2}{2}.$$

Queremos encontrar o número de bactérias $P(6)$ ao final de $t = 6$ horas. Substituindo na solução geral, fica

$$
\begin{aligned}
P(t) &= P_0 e^{kt} \\
P(6) &= P_0 e^{k \cdot 6} \\
P(6) &= P_0 e^{6 \cdot \frac{ln\,2}{2}} \\
P(6) &= P_0 e^{3\,ln\,2} \\
P(6) &= P_0 (e^{ln\,2})^3 \\
P(6) &= P_0 \cdot 2^3 \\
P(6) &= 8P_0.
\end{aligned}
$$

Portanto, se o número de bactérias dobra em 2 horas, ao final de 6 horas, podemos esperar que o número de bactérias seja 8 vezes a quantidade inicial.

1.2.3 Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda Ordem

Vamos nos atentar apenas, nesta seção, sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, que são as mais importantes utilizadas na elaboração de modelos.

Uma EDO de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes tem a forma:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0,$$

onde a, b e c são constantes.

Para resolver essa equação, usamos uma equação característica associada dada por $ar^2 + br + c = 0$ onde r é uma constante a ser determinada.

A solução da EDO depende das raízes r_1 e r_2 da equação característica. Existem três casos possíveis, dependendo da natureza das raízes:

1. Raízes Reais e Distintas: Se a equação característica tem duas raízes reais distintas r_1 e r_2, a solução geral é $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

2. Raízes Reais e Iguais: Se a equação característica tem uma raiz real dupla $r_1 = r_2$, a solução geral é $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$.

3. Raízes Complexas Conjugadas: Se a equação característica tem raízes complexas conjugadas $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, a solução geral é $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x))$, onde α e β são as partes real e imaginária das raízes, respectivamente

As constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições iniciais.

Exemplo 4. *Resolva a Equação Diferencial* $\dfrac{d^2y}{dx^2} + -5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$*, com* $y(0) = 1000$ *e* $\dfrac{dy}{dx}(0) = 100$.

Solução: A equação característica é dada por $r^2 - 5r + 6 = 0$. Resolvendo essa equação característica usando a forma quadrática obtemos as raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = 2$.

Logo, a solução geral é $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$.

Substituindo $y(0) = 1000$ na equação anterior, fica

$$y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 1000.$$

Portanto:

$$C_1 + C_2 = 1000. \tag{1.4}$$

Agora, usando $\dfrac{dy}{dx}(0) = 100$, e calculando $\dfrac{dy}{dx}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x}.$$

Substituindo, na equação anterior, $x = 0$, temos

$$\frac{dy}{dx}(0) = 3C_1e^0 + 2C_2e^0 = 3C_1 + 2C_2 = 100.$$

Resultando em

$$3C_1 + 2C_2 = 100. \tag{1.5}$$

Juntando 1.4 e 1.5, temos o sistema $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1000 \\ 3C_1 + 2C_2 = 100. \end{cases}$

Chegando em $C_1 = -1900$ e $C_2 = 2900$. Assim, chegamos na solução particular $y(x) = -1900e^{3x} + 2900e^{2x}$.

A EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes foi resolvida encontrando a equação característica, resolvendo-a para encontrar os valores de r, determinando a solução geral, e aplicando as condições iniciais para encontrar a solução particular.

De acordo com os estudos de Melo & Andrade (2021), a resolução de Equações de Recorrência e EDOs são análogas. A recorrência linear é usada para formular e resolver problemas de Matemática Discreta, ao passo que diversos problemas que envolvem Equações

Diferenciais podem ser modelados por EDO lineares.

1.3 Sequência

Uma sequência numérica é uma lista ordenada de números, onde cada número nessa lista segue um padrão específico ou uma regra predefinida. Essa regra pode ser simples, como a sequência de números naturais (1, 2, 3, 4, ...), ou pode ser mais complexa, envolvendo operações matemáticas, padrões geométricos ou lógicos.

Existem problemas cujas soluções dependem de uma sequência numérica na qual a lei de formação (ou termo geral) não é explicitamente conhecida, dificultando a expressão direta de qualquer termo da sequência. No entanto, de acordo com a natureza dessa sequência podemos relacionar um termo qualquer com alguns de seus termos anteriores através de uma Equação de Recorrência.

Uma sequência é uma função definida no conjunto dos números naturais em que cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $x_n \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5. *Considere a sequência (2, 4, 6, 8, 10,...). Podemos observar que, cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo imediatamente anterior somado com 2. Assim, essa sequência é dada por* $x_{n+1} = x_n + 2$*, com* $x_1 = 2$.

Exemplo 6. *Agora, considere a sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Neste exemplo, um determinado termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Logo, os termos dessa sequência estão relacionados pela equação* $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$*, com* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 1$.

Essas equações que relacionam os termos da sequência podem ser encontradas através do método recursivo, isto é, por Equação de Recorrência. Na educação básica, os tipos de sequências mais conhecidas são a Progressão Aritmética e a Progressão Geométrica.

1.3.1 Progressão Aritmética (PA)

Uma progressão aritmética é definida como uma sequência numérica $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, com $n \geq 1$, em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um número real constante, chamado razão da progressão.

É fundamental que, para determinar completamente uma PA, além de conhecermos a razão r da sequência, também é necessário ter o conhecimento do seu primeiro termo a_1.

Uma PA é do tipo $a_n = a_{n-1} + r$, para todo $n \geq 1$. Ou seja, dado o primeito termo igual a a_1, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ a_5 &= a_4 + r \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando membro a membro cada termo anterior , temos que:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n}_{\text{n termos}} = a_1 + \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1}}_{\text{(n-1) termos}} + \underbrace{r + r + r + r + \ldots + r}_{\text{(n - 1) vezes}}$$

Efetuando os possíveis cancelamentos chegamos em $a_n = a_1 + (n-1)r$ que é chamado de **Termo Geral da PA**.

Agora, vamos provar por indução a validade do termo geral da PA para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n = 1$, temos

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = a_1 + (1-1) \cdot r = a_1.$$

o que é verdadeiro.

Supondo agora que é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, queremos provar que é verdadeira para $n + 1$, ou seja, que $a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$. Somando r em ambos os membros de $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, temos

$$\begin{aligned} a_n + r &= a_1 + (n-1) \cdot r + r \\ a_n + r &= a_1 + n \cdot r. \end{aligned}$$

Como $a_{n+1} = a_n + r$, temos

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot r.$$

Logo, a equação é verdadeira para $n + 1$. Portanto, a fórmula é válida para todo número natural n.

Agora, chamando de S_n a soma dos termos dessa PA e efetuando essa soma, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \tag{1.6}$$

Ivertendo a ordem de 1.6, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \tag{1.7}$$

Somando 1.6 e 1.7, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_1 + a_n). \tag{1.8}$$

Como todo par de somas de 1.8 são iguais à soma dos extremos $(a_1 + a_n)$, então:

$$2S_n = n(a_1 + a_n).$$

Logo,

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \tag{1.9}$$

que é a **Soma dos Termos** de uma PA.

1.3.2 Progressão Geométrica (PG)

Uma progressão geométrica é uma sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada de razão. Chamado de a_n o n-ésimo termo da sequência e q de razão, uma progressão geométrica tem a Equação de Recorrência

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

com $n \geq 1$.

Fazendo cada termo em função do termo anterior até o n-ésimo termo, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q_2 \cdot q &= a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

onde $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é chamado de **Termo Geral da PG**.

Para demonstrar essa fórmula, podemos utilizar indução matemática. Para $n = 1$, o primeiro termo da progressão geométrica é dado por a_1, que é igual a $a_1 \cdot q^0$, onde $q^0 = 1$. O que é verdadeiro.

Agora, Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \tag{1.10}$$

queremos mostrar que isso implica que a fórmula também é verdadeira para $n = k + 1$. Para $n = k + 1$, temos:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q.$$

Substituindo a_k por 1.10, temos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (a_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q \\ a_{k+1} &= a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q \\ a_{k+1} &= a_1 \cdot q^k. \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então ela também é verdadeira para $n = k + 1$. Assim, pela indução matemática, concluímos que a fórmula do termo geral da progressão geométrica $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é válida para todos os termos da sequência.

Agora, seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Vamos calcular a soma parcial dos termos da PG, multiplicando a soma de todos os termos por uma razão comum q.

$$\begin{aligned} S_n \cdot q &= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \cdot q \\ S_n \cdot q &= (a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_n) \cdot q \\ S_n \cdot q &= (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1}). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Vamos subtrair S_n da soma parcial multiplicada por q, ou seja, subtrair S_n de 1.11. Então,

$$\begin{aligned} S_n \cdot q - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \\ S_n \cdot q - S_n = (a_{n+1} - a_1). \end{aligned} \tag{1.12}$$

A diferença $a_{n+1} - a_1$ na expressão 1.12, é a diferença entre o último termo e o primeiro termo de uma PG. Sabemos que o último termo de uma PG finita é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, então $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$. Portanto, $a_{n+1} - a_1 = a_1 \cdot q^n - a_1 = a_1 \cdot (q^n - 1)$. Substituindo essa expressão em 1.12, temos que

$$\begin{aligned} S_n \cdot q - S_n &= a_1 \cdot (q_n - 1) \\ S_n \cdot (q - 1) &= a_1 - (q_n - 1) \\ S_n &= \frac{a_1 \cdot (q_n - 1)}{q - 1} \end{aligned} \tag{1.13}$$

que é a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

1.4 Equações de Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Segundo Dante & Viana (2020)

> Quando uma sequência tem um padrão, ele pode ser explicitado de diferentes maneiras, inclusive textualmente. Mas, em Matemática, é comum descrevermos os termos de uma sequência numérica usando fórmulas. A fórmula de recorrência, por exemplo, expressa o valor do primeiro termo a_1 da sequência e cada termo a_n, a partir do segundo, em função do termo anterior a_{n-1}, com $n \geq 2$. (DANTE; VIANA, 2020)

Em outras palavras, Equações de Recorrência são equações com tempo discreto, que relacionam o valor presente da variável, com um ou mais valores passados da mesma variável. Um exemplo clássico é a equação de Fibonacci, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Nesta seção, vamos nos deter apenas nas Equações de Recorrência lineares de primeira ordem com coeficientes constantes que são do tipo

$$x_{n+1} = ax_n + b \tag{1.14}$$

Este tipo de equação, embora simples, aparece em uma grande variedade de situações envolvendo modelos interessantes, que podem ser explorados na educação básica. Tais modelos envolvem, por exemplo, sequências numéricas, temas de matemática financeira, como juros compostos, capitalização e amortização, geometria, como por exemplo, no número de diagonais de um polígono, nos números poligonais, dentre outros.

A solução dessa equação é obtida por indução. Vamos, portanto, resolver a equação

$$x_{n+1} = ax_n + b.$$

onde a, b são constantes reais e a variável x_n terá valor inicial x_0. Temos, então, na sequência

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + b \\ x_2 &= ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b \\ x_3 &= ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b \\ x_4 &= ax_3 + b = a(a^3x_0 + a^2b + ab + b) + b = a^4x_0 + a^3b + a^2b + ab + b \end{aligned}$$

Por indução para o caso geral, temos

$$x_n = a^n x_0 + a^{n-1}b + \ldots + a^2b + ab + b = a^n x_0 + b(a^{n-1} + \ldots + a^2 + a + 1).$$

Logo, $x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + \ldots + a^2 + a + 1)$.

Como a expressão no interior do parêntese é a soma de uma PG de n termos com termo inicial igual a 1 e razão $q = a$, temos que

$$S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Donde concluimos que

$$x_n = a^n x_0 + b\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right). \tag{1.15}$$

Essa solução é válida para $a \neq 1$. Quando $a = 1$, temos que $x_n = x_0 + nb$.

Exemplo 7. *Encontre a solução da recorrência* $x_n = 2x_{n-1} + 3$, *com* $x_0 = 1$.

Solução: A recorrência é do tipo 1.14 e sua solução pode ser encontrada a partir de 1.15, logo com $x_0 = 1$, $a = 2$ e $b = 3$, temos

$$\begin{aligned} x_n &= 2^n \cdot 1 + 3\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) \\ x_n &= 2^n + 3(2^n - 1) \\ x_n &= 2^n + 3 \cdot 2^n - 3 \\ x_n &= 4 \cdot 2^n - 3. \end{aligned}$$

1.5 Equações de Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Estudaremos nesta seção recorrências lineares de segunda ordem homogêneas (que não possuem termo independente de x_n) com coeficientes constantes. Uma recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes é uma equação que descreve a relação entre um termo de uma sequência e os dois termos anteriores, expressa por uma equação linear que pode ser representada como:

$$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0 \tag{1.16}$$

com $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a equacão de recorrência seria de primeira ordem.

Associaremos uma equação do segundo grau a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, como 1.16, chamada de *equação característica* que é obtida ao substituir $x_n = r^n$ na equação de recorrência. Assim, se tivermos a seguinte recorrência:

$$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0.$$

Ao substituir $x_n = r^n$, obtemos:

$$r^n + pr^{n-1} + qr^{n-2} = 0.$$

Dividindo ambos os membros por r^{n-2} (assumindo que $r \neq 0$) , obtemos:

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Dependendo dos valores dos coeficientes p e q, essa equação característica pode ter diferentes formas. As raízes desta equação, r_1 e r_2, determinam o comportamento geral das soluções da recorrência.

1. Se as raízes forem distintas, digamos $r_1 \neq r_2$, então a solução geral da recorrência será da forma $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, onde C_1 e C_2 são constantes.

2. Se as raízes forem iguais, digamos $r_1 = r_2 = r$, então a solução geral será da forma $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$, onde C_1 e C_2 são constantes.

Exemplo 8. *(MORGADO; CARVALHO, 2015) A sequência de Fibonacci é definida pela recorrência:*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

com as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

A equação característica é dada por $r^2 = r + 1$ e suas raízes são $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Como a solução geral é da forma $F_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, temos que

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.17}$$

Substituíndo $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ em 1.17, temos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Substitíndo C_1 e C_2 na solução geral, obtemos:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Esta é a fórmula fechada para a sequência de Fibonacci que nos permite calcular o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci diretamente, sem a necessidade de calcular todos os termos anteriores.

Como descrito por (MORGADO; CARVALHO, 2015) , se as raízes da equação característica forem complexas, a solução $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ poderá ser escrita na forma trigonométrica para evitar cálculos complexos, ficando da forma:

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \qquad r_2 = \rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$

onde $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$ e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan \dfrac{b}{a}$. Então, a solução geral é dada por $x_n = \rho^n[C_1 \cos n\theta + C_2 \operatorname{sen} n\theta]$.

Exemplo 9. *Resolva a recorrência* $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$

Solução: A equação característica é dada por $r^2 - 2r + 2 = 0$. Resolvendo pela forma quadrática as raízes são $r = 1 \pm i$, que são complexas de módulo $\rho = 1$ e argumento principal $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$. Logo, a solução é

$$x_n = \rho^n[C_1 \cos n\theta + C_2 \operatorname{sen} n\theta] = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}.$$

2

Aplicações

2.1 Juros Compostos

O conceito de juros pode ser entendido como uma espécie de aluguel pelo uso de um valor em dinheiro, o capital, durante um certo período de tempo. Ele é calculado como uma porcentagem sobre o valor do capital. Quando o cálculo é feito sempre sobre o valor inicial do capital, temos os juros simples, quando ele é calculado sobre o valor atual do capital, temos os juros compostos. Dessa forma, um capital C, rende juros compostos de i por cento durante cada período de tempo. Para calcular o montante após n períodos, precisamos construir um modelo discreto que varie a cada período de tempo. Assim, se chamarmos de x_{n+1} o valor do montante no período seguinte, ele será dado pelo montante atual, x_n, mais os juros do período calculados sobre esse montante atual.

$$x_{n+1} = x_n + ix_n$$

ou

$$x_{n+1} = (1+i)x_n$$

Essa é uma Equação de Recorrência do padrão da Equação 1.14, cuja solução é dada pela Equação 1.15, com $a = 1$ e $b = 0$. Se fizermos $x_0 = C$ para o valor inicial, teremos como solução

$$x_n = C(1+i)^n$$

que é a equação usual de juros compostos. Chamando x_n de montante, M, a equação fica na sua forma mais conhecida

$$M = C(1+i)^n.$$

2.2 Capitalização

Capitalização é processo de se acumular um capital em parcelas periódicas, usando-se para isso uma conta de investimento, que rende juros a cada período. Assim, em cada período, essa conta de capitalização recebe juros calculados sobre o valor presente na conta. Portanto, o saldo seguinte dessa conta x_{n+1} será dado pelo saldo atual, x_n, acrescido dos juros calculados sobre esse saldo e mais uma parcela, P, de valor constante, depositada a cada período. Seu modelo em tempo discreto, passa a ser

$$x_{n+1} = x_n + ix_n + P. \tag{2.1}$$

Arrumando a equação e tomando como valor inicial $x_0 = 0$, fica assim

$$x_{n+1} = (1 + i)x_n + P. \tag{2.2}$$

Portanto, verificamos que ela é também uma equação do padrão 1.14 cuja solução geral é dada por 1.15. Fazendo em 1.15 $a = 1 + i$, $b = P$ e chamando x_n de M, temos

$$M = P \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \tag{2.3}$$

que é a equação da capitalização. O fator

$$\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \tag{2.4}$$

é conhecido como fator de capitalização. Para ilustrar o seu uso, faremos uma aplicação interessante.

Exemplo 10. *Seja um jovem docente de matemática que após o seu primeiro emprego resolve se aposentar daqui a 35 anos, tendo acumulado um capital de 1 milhão de reais. Para isso, investe todos os meses uma quantia fixa, P, de seu salário, em uma conta remunerada que rende 1% de juros ao mês. Qual será o valor da parcela mensal que ele precisará depositar?*

Trata-se de um modelo típico de capitalização, cuja solução é dada pela Equação 2.3. Nesse caso, temos $i = 0,01$, $M = 1000000$, o número de períodos n em meses, é dado por $n = 420$ e a parcela P, é desconhecida. Substituindo-se os valores em 2.3, fica

$$1000000 = P \cdot \frac{(1 + 0,01)^n - 1}{0,01}$$

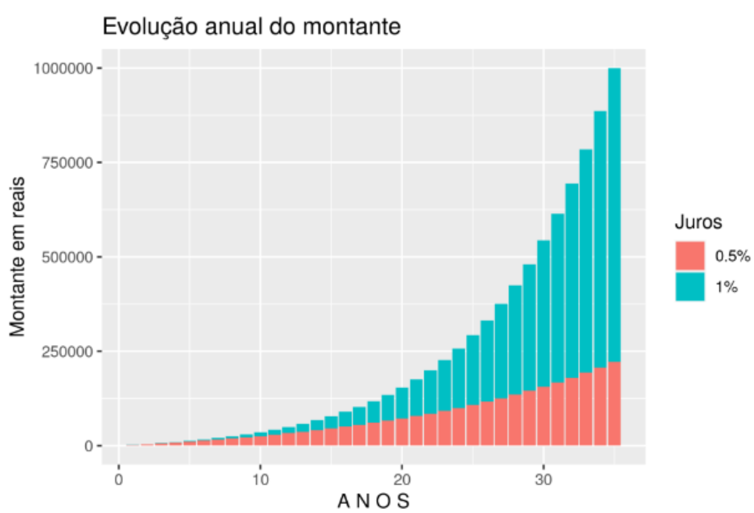
Fazendo os cálculos e resovendo para P, encontramos o valor da parcela como sendo

$P = 155,50$ reais por mês.

Obviamente, esse é um modelo idealizado e fictício. Dificilmente, encontra-se uma aplicação bancária que renda essa taxa de juros de 1% ao mês durante todo esse tempo; o cálculo não leva em conta o efeito da inflação ao longo do período, mas apenas o valor nominal; aqui no Brasil, tivemos períodos de instabilidade econômica, inclusive com várias mudanças de moeda num prazo assim tão longo. Mesmo assim, vale como exemplo e serve para estimular planejamento de aposentadorias em nós e em nossos estudantes.

Como curiosidade adicional, se esse mesmo valor de $R\$ \ 155,50$ for aplicado durante o mesmo período em uma caderneta de poupança que rende $0,5\%$ ao mês, no final terá acumulado um montante de $R\$ \ 221.452,00$. Uma diferença de meio ponto na taxa de juros mensal, ao longo de 35 anos, gera uma enorme diferença no rendimento, por conta do crescimento exponencial do montante, conforme pode ser visualizado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Evolução anual da capitalização



FONTE: Elaborado pela autora.

2.3 Amortização

Amortização é o pagamento de dívidas de forma parcelada. No nosso caso, para simplificar, com valor fixo da prestação mensal. Neste item, tem-se uma dívida, com valor inicial $x_0 = V$ e a cada mês é efetuado um pagamento parcial de valor fixo, P. O novo saldo devedor é obtido da seguinte forma: toma-se o saldo devedor atual, calcula-se os juros devidos sobre o saldo devedor atual e subtrai-se o valor da amortização paga no mês atual. Dessa forma, tem-se

$$x_{n+1} = x_n + ix_n - P$$

ou

$$x_{n+1} = (1+i)x_n - P \tag{2.5}$$

com $x_0 = V$, o valor total da dívida à vista a ser paga.

Observa-se que essa é uma equação do mesmo padrão da equação 1.14 cuja solução é dada pela equação 1.15, fazendo - se $a = 1 + i$, $b = -P$ e $x_0 = V$. Portanto, a solução vai ser

$$x_n = (1+i)^n \cdot V - P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Mas, apóss o último pagamento, a divida zera, isto é, tem-se $x_n = 0$, portanto a equação da amortização fica

$$V = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \tag{2.6}$$

onde V é o valor à vista da dívida e P o valor da prestação mensal fixa. O fator

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

é conhecido como fator de amortização.

Um exemplo interessante a seguir, une os dois conceitos de capitalização e amortização para se calcular quanto se deve investir por mês, durante um certo tempo, para, depois ficar recebendo os rendimentos durante um outro período de tempo.

Exemplo 11. *(MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 103) (Questão 5 - 26)Supondo juros de* $0,5\%$ *ao mês, quanto você deve investir durante 30 anos para obter ao fim desse prazo, por 30 anos, uma renda de* $R\$ \ 100,00$*?*

Para resolver este problema, observa-se que ele envolve inicialmente uma capitalização e na segunda parte uma amortização. Considerando os dados disponíveis, devemos começar perguntando qual deve ser o montante inicial necessário para ser consumido (amortizado) em 30 anos, com a mesma taxa mensal de juros, com uma parcela de $R\$ \ 100,00$. E, na segunda parte, já conhecido o montante a ser obtido, qual deve ser a parcela mensal que deve ser investida para obter-se esse montante. Portanto, temos a equação

$$x_n = (1+i)^n \cdot V - P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

com $x_n = 0$, $P = 100$, $i = 0,005$, $n = 360$ e V, o montante, desconhecido, temos

$$(1+0,005)^{360} \cdot V - 100 \cdot \frac{(1+0,005)^{360} - 1}{0,005} = 0.$$

Resolvendo-se para V, o montante, encontra-se $V = R\$ \ 16.679,16$. Esse é o montante que deve ser alcançado na primeira parte, a da capitalização. Agora, vamos usar a equação da capitalizção para encontrar o valor da parcela mensal.

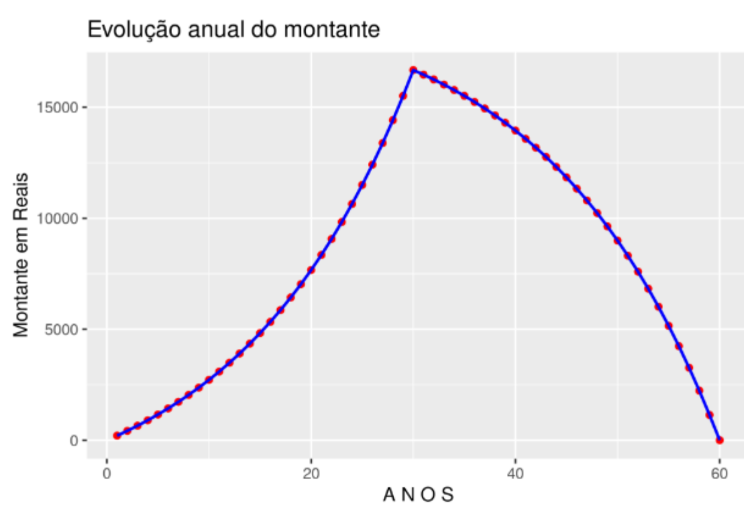
$$M = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

onde $M = 16679,16$, $n = 360$, $i = 0,005$ e P é o valor desconhecido.

$$16679,16 = P \cdot \frac{(1+0,005)^{360} - 1}{0,005}$$

Resolvendo-se para P, encontra-se o valor mensal a ser investido, que é de $R\$ \ 16,60$. A evolução anual do montante é mostrada na Figura 2.2.

Figura 2.2: Capitalização e Amortização



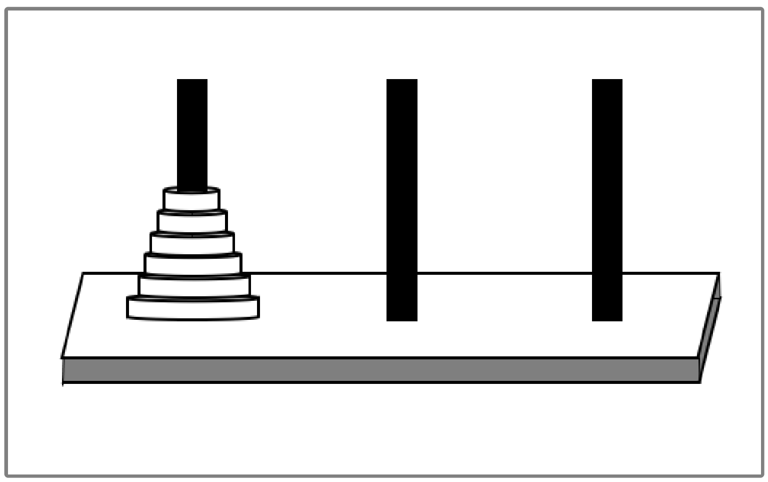
FONTE: Elaborado pela autora.

Adiante, mostraremos outras aplicações que podem ser modeladas por recorrência, e suas fórmulas fechadas serão obtidas somando ou multiplicando as equações que formam cada termo da determinada sequência ou padrão.

2.4 Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um conhecido quebra-cabeça composto por três hastes (ou estacas) verticais, onde uma quantidade de discos de diferentes tamanhos são empilhados em ordem decrescente de diâmetro sobre uma das hastes. O objetivo do jogo é transferir toda a pilha de discos de uma haste para outra, seguindo duas regras simples: apenas um disco pode ser movido por vez e um disco de diâmetro maior nunca poderá sobrepor um disco menor.

Figura 2.3: Torre de Hanói



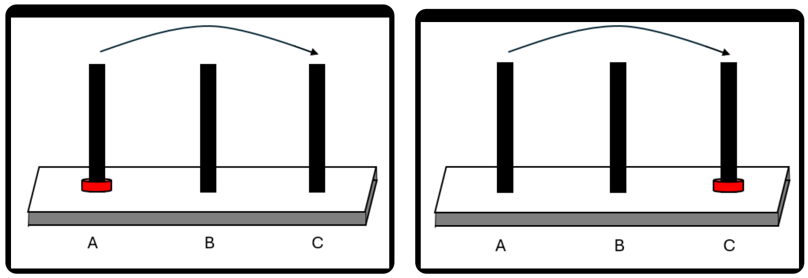
FONTE: Adaptado de (MORGADO; CARVALHO, 2015).

O enigma da Torre de Hanói foi criado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883, elaborando uma lenda que dizia que Deus criou a Torre de Brahma, que continha uma pilha de 64 discos de ouro entre três hastes de diamantes. Seguindo determinadas regras, os sarcedotes de Deus deviam movimentar esse discos com o objetivo de transferir toda a pilha de uma haste para outra. Essa lenda representa a criação do mundo e sua eventual destruição, quando a última torre for montada.

Uma aplicação online da Torre de Hanói pode ser encontrada em (OBMEP, 2024) (Torre de Hanói).

De acordo com o número de discos, a solução do jogo contém um número mínimo de movimentos, como por exemplo, com um disco como mostrado a seguir em que podemos movimentá-lo da haste **A** para as hastes **B** ou **C**.

Figura 2.4: Movimento com um disco

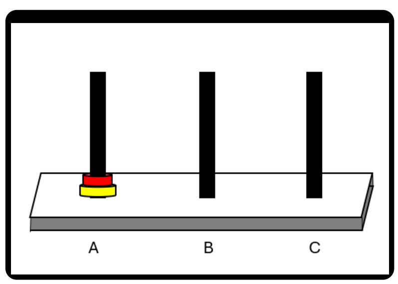


FONTE: Adaptado de (HEFEZ, 2009).

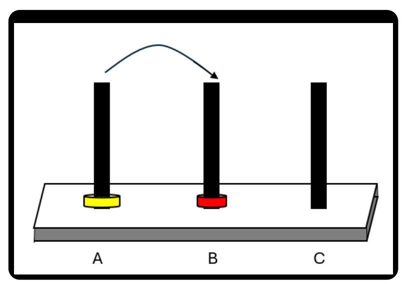
Agora, com dois discos, é possível fazer três movimentos. Vejamos as figuras.

Figura 2.5: Movimento com três disco

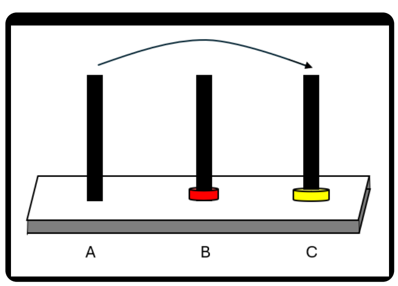
(a) Posição inicial



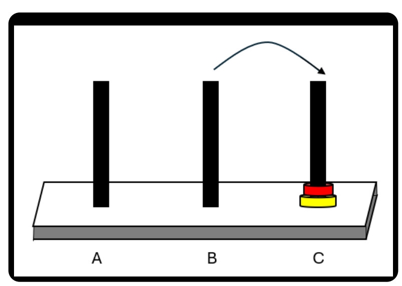
(b) Primeiro movimento



(c) Segundo movimento



(d) Terceiro movimento



FONTE: Adaptado de (HEFEZ, 2009).

Vejamos a tabela a seguir com a quantidade mínima de movimentos com até seis discos.

Tabela 2.1: Quantidade mínima de movimentos pelo número de discos

Números de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

FONTE: Adaptado de (MORGADO; CARVALHO, 2015).

A fórmula fechada da Torre de Hanói referente à quantidade mínima de movimentos de acordo com o número de discos pode ser encontrada através de recursão, pois o movimento mínimo dos discos depende da quantidade de movimentos que foram realizados com o números de discos menos uma unidade.

Assim, chamando de T_n a quantidade de mínima de movimentos e n, a quantidade de discos, temos:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1 \\
T_2 = 2 \times 1 + 1 &= 2T_1 + 1 \\
T_3 = 2 \times 3 + 1 &= 2T_2 + 1 \\
T_4 = 2 \times 7 + 1 &= 2T_3 + 1 \\
&\vdots \\
T_n &= 2T_{n-1} + 1
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros das expressões anteriores por valores adequados a fim de fazer os possíveis cancelamentos, temos:

$$\begin{aligned}
\cancel{2^{n-1}T_1} &= 1 \times 2^{n-1} \\
\cancel{2^{n-2}T_2} &= \cancel{2^{n-1}T_1} + 1 \times 2^{n-2} \\
\cancel{2^{n-3}T_3} &= \cancel{2^{n-2}T_2} + 1 \times 2^{n-3} \\
\cancel{2^{n-4}T_4} &= \cancel{2^{n-3}T_3} + 1 \times 2^{n-4} \\
&\vdots \\
\cancel{2T_{n-1}} &= \cancel{2^2T_{n-2}} + 1 \times 2 \\
T_n &= \cancel{2T_{n-1}} + 1
\end{aligned}$$

É fácil perceber que os segundos termos dos segundos membros da soma anterior é uma PG de razão 2, assim, pela soma finita da PG, temos que $T_n = \dfrac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}$, obtendo $T_n = 2^n - 1$, que é a fórmula fechada da quantidade de movimentos da Torre de Hanói em função do número de discos.

2.5 A Pizza de Steiner

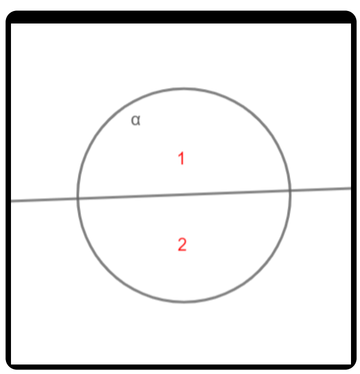
A chamada Pizza de Steiner é um problema matemático criado no século XIX pelo matemático suiço Jakob Steiner. Embora não se refira literalmente a uma pizza, a metáfora é frequentemente usada para explicar um problema geométrico.

Steiner propôs o seguinte: *como dividir um plano em um número máximo de regiões usando o menor número possível de cortes retos?* Steiner percebeu que a solução envolvia cortar o plano de forma estratégica, de modo que cada novo corte não apenas dividisse o plano em duas partes, mas também aumentasse o número total de regiões.

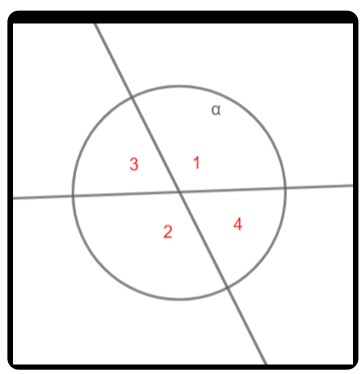
Observe a Figura 2.6 onde mostra a quantidade de divisões do plano α de acordo com o número de cortes.

Figura 2.6: Divisão do Plano em regiões

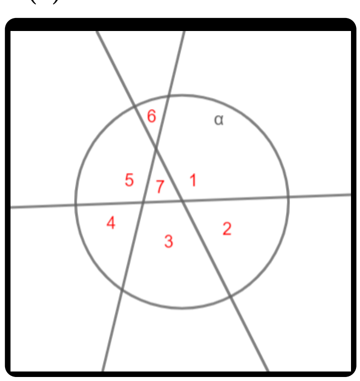
(a) Plano com um corte



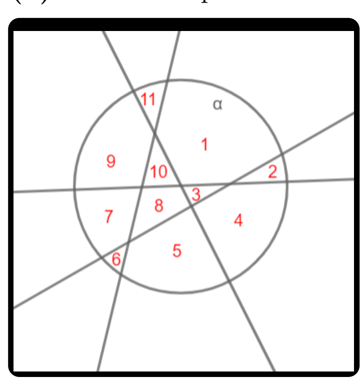
(b) Plano com dois cortes



(c) Plano com três cortes



(d) Plano com quatro cortes



FONTE: Adaptado de (MORGADO; CARVALHO, 2015).

Na tabela a seguir podemos observar o número de regiões pela quantidade de cortes e a respectiva Equação de Recorrência.

Tabela 2.2: Quantidade máxima de regiões por cortes num plano

Números de cortes	Quantidade máxima de regiões
1	2
2	4
3	7
4	11
$\vdots$	$\vdots$
n	T_n
$n+1$	T_n+n+1

FONTE: Adaptado de (MORGADO; CARVALHO, 2015).

Sendo assim, chamando de T_n a quantidade de regiões no plano e n a quantidade de cortes, então:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 \\ T_2 = 4 &= T_1 + 2 \\ T_3 = 7 &= T_2 + 3 \\ T_4 = 11 &= T_3 + 4 \\ &\vdots \\ T_n &= T_{n-1} + n \end{aligned}$$

Somando membro a membro e efetuando os possíveis cancelamentos, temos:

$$\begin{aligned} \cancel{T_1} &= 2 \\ \cancel{T_2} &= \cancel{T_1} + 2 \\ \cancel{T_3} &= \cancel{T_2} + 3 \\ \cancel{T_4} &= \cancel{T_3} + 4 \\ &\vdots \\ T_n &= \cancel{T_{n-1}} + n \end{aligned}$$

Resultando em

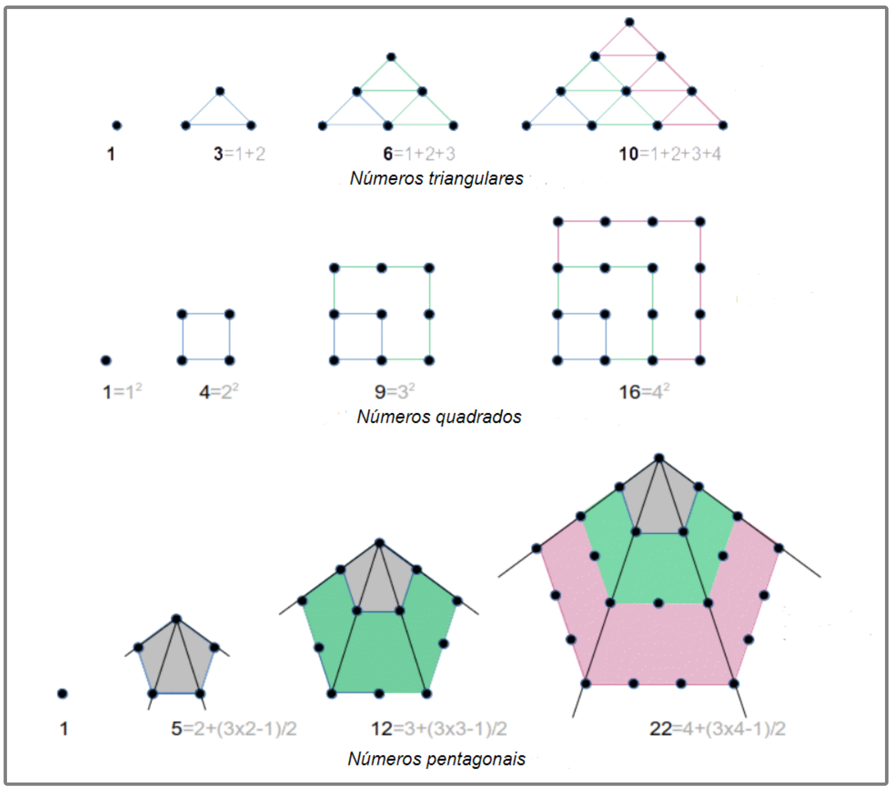
$$T_n = 2 + \frac{(2+n)(n-1)}{2}. \tag{2.7}$$

Simplificando 2.7, chegamos em $T_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$, que é a fórmula fechada do problema da Pizza de Steiner.

2.6 Números Figurados

De acordo com Cangussu (2013), os números figurados são números que podem ser representados por pontos dispostos de forma equidistante formando uma construção geométrica. Quando esses pontos formam um polígono regular, são chamados de números poligonais.

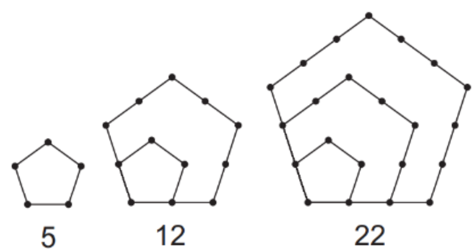
Figura 2.7: Números poligonais



FONTE: (LUCHETTA, 2023).

Nesta seção, serão mostrados alguns exemplos de números poligonais com questões de provas da OBMEP, que pode ser encontradas em <http://www.obmep.org.br/provas.htm> (Provas e Soluções da OBMEP). Na proposta de atividade no Apêndice A podemos visualizar algumas dessas questões.

Exemplo 12. *(OBMEP, 2023)(OBMEP - 2015 - Nível 3) Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?*



FONTE: (OBMEP, 2023).

Solução:

Chamando de P_n a n - ésima figura pentagonal, temos:

$$\begin{aligned} P_1 &= 5 \\ P_2 = 12 &= P_1 + 7 \\ P_3 = 22 &= P_2 + 10 \end{aligned}$$

Como as 4ª e 5ª figuras são fáceis de se obter apenas completando os pontos, descobrimos que elas formam 35 e 51 pontos, respectivamente, logo

$$\begin{aligned} P_1 &= 5 \\ P_2 = 12 &= P_1 + 2 \cdot 5 - 3 \\ P_3 = 22 &= P_2 + 3 \cdot 5 - 5 \\ P_4 = 35 &= P_3 + 4 \cdot 5 - 7 \\ P_5 = 51 &= P_4 + 5 \cdot 5 - 9 \\ &\vdots \\ P_n &= P_{n-1} + n \cdot 5 - (2n - 1) \end{aligned}$$

Somando ambos os lados e efetuando os devidos cancelamentos, temos:

$$\begin{aligned} \cancel{P_1} &= 5 \\ \cancel{P_2} = \cancel{P_1} &+ 2 \cdot 5 - 3 \\ \cancel{P_3} = \cancel{P_2} &+ 3 \cdot 5 - 5 \\ \cancel{P_4} = \cancel{P_3} &+ 4 \cdot 5 - 7 \\ \cancel{P_5} = \cancel{P_4} &+ 5 \cdot 5 - 9 \\ &\vdots \\ P_n = \cancel{P_{n-1}} &+ n \cdot 5 - (2n - 1) \end{aligned}$$

Daí, obtemos duas parcelas em cada equação em que somando todas essas equações obtemos duas PAs. Utilizando 1.9, temos:

$$P_n = \frac{(5 + 5n)n}{2} - \frac{(3 + 2n - 1)(n - 1)}{2}.$$

Simplificando, chegamos em

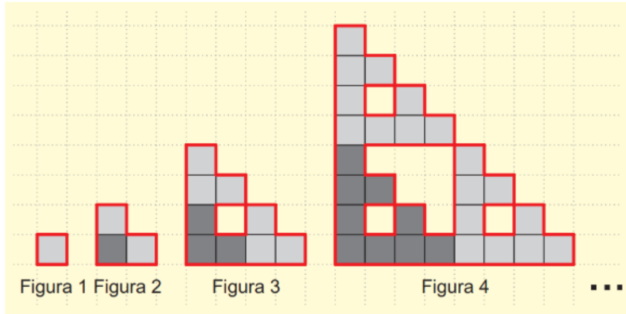
$$P_n = \frac{n(3n + 5) + 2}{2}. \tag{2.8}$$

A expressão anterior é a fórmula fechada para encontrarmos quantos pontos há em qualquer figura pentagonal desta questão. Voltando ao comando da questão, ela pede para calcular quantos pontos há vigésima primeira figura. Substituíndo n por 21 em 2.8, temos:

$$P_{21} = \frac{21(3 \cdot 21 + 5) + 2}{2} = 715.$$

Portanto, na 21ª figura há 715 pontos.

Exemplo 13. *(OBMEP, 2023)(OBMEP - 2014 - Nível 1) Começando com um quadrado de 1 cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos destacados em vermelho das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, 4 cm, 8 cm, 20 cm e 56 cm. Quanto mede o contorno da Figura 6?*



FONTE: (OBMEP, 2023).

Solução:

Chamando de A_n o contorno da n - ésima figura, temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4 \\ A_2 = 8 &= 3 \cdot A_1 - 4 \\ A_3 = 20 &= 3 \cdot A_2 - 4 \\ A_4 = 56 &= 3 \cdot A_3 - 4 \\ &\vdots \\ A_n &= 3 \cdot A_{n-1} - 4 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros das equações anteriores por valores adequados e fazendo os possíveis cancelamentos, temos:

$$\begin{aligned} \cancel{3^{n-1}A_1} &= 4 \cdot 3^{n-1} \\ \cancel{3^{n-2}A_2} &= \cancel{3^{n-1}A_1} - 4 \cdot 3^{n-2} \\ \cancel{3^{n-3}A_3} &= \cancel{3^{n-2}A_2} - 4 \cdot 3^{n-3} \\ \cancel{3^{n-4}A_4} &= \cancel{3^{n-3}A_3} - 4 \cdot 3^{n-4} \\ &\vdots \\ \cancel{3 \cdot A_{n-1}} &= \cancel{3^2 A_{n-2}} - 4 \cdot 3 \\ A_n &= \cancel{3 \cdot A_{n-1}} - 4 \end{aligned}$$

Resultando em

$$A_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot (3^{n-2} + 3^{n-3} + 3^{n-4} + \cdots + 3^2 + 3 + 1). \tag{2.9}$$

Podemos perceber que a segunda parcela de 2.9 forma uma PG, Logo, aplicando 1.13

em 2.9 chegamos em

$$A_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 2, \tag{2.10}$$

que é a fórmula fechada para calcular o contorno da n - ésima figura.

Como a questão pede para calcular o contorno da Figura 6, substuímos 6 no lugar de n em 2.10, resultando em

$$A_n = 2 \cdot 3^{6-1} + 2 = 488.$$

Portanto, o contorno da Figura 6 mede 488 cm.

Existem muitos outros exemplos que podem ser modelados através das Equações de Recorrência. Esses que apresentamos são apenas alguns deles.

3 Aplicação da atividade

A escolha das Equações de Recorrência como tema deste trabalho foi motivada por ter paticipado do programa OBMEP na Escola no período de 2020 a 2022. O programa é uma iniciativa associada à OBMEP, organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com apoio do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI). Os objetivos do programa são apoiar os professores no uso das provas da OBMEP como ferramentas de ensino, incentivar o estudo e o aprimoramento do ensino de matemática nas escolas públicas e promover o envolvimento dos alunos em atividades matemáticas desafiadoras e significativas.

Além de oferecer suporte contínuo aos professores participantes, o OBMEP na Escola disponibiliza materiais didáticos baseados nas provas da OBMEP, incluindo consultoria e orientações sobre a melhor utilização dos materiais e métodos propostos.

Durante a participação no programa, foi fácil perceber que as Equações de Recorrência aparecem bastante nas provas da OBMEP, além de também estarem presente no livro didático utilizado pelos alunos, como em (DANTE; VIANA, 2020). A partir daí, aumentou o interesse de desenvolver atividades no ensino médio envolvendo situações reais com Equações de Recorrência , tornando o aprendizado dos alunos mais rico e ajudando-os a se preparar para desafios matemáticos mais avançados como a própria OBMEP.

Neste capítulo, será explorada uma atividade desenvolvida para 35 alunos[1] da 1ª série, Turma 1, do Ensino Médio na Escola de Ensino Médio Professor Benicio Lopes, em Castanhal, Pará. O foco desta atividade é o reconhecimento de padrões em sequências e a formulação de suas Equações de Recorrência. A atividade foi projetada para estimular o pensamento crítico e a compreensão dos conceitos fundamentais de recorrência, utilizando sequências numéricas e geométricas, onde a maioria fez parte da prova da OBMEP que podem ser acessadas em (OBMEP, 2023).

A atividade tem como objetivos: Identificar padrões em sequências numéricas e geométricas; Desenvolver a habilidade de formular Equações de Recorrência a partir dos padrões

[1] Os alunos serão nomeados de A1, A2, A3, . . . , A34, A35

observados; Promover a compreensão dos conceitos de sequências e suas aplicações em problemas matemáticos e incentivar a capacidade de resolver problemas e aplicar o conhecimento teórico em situações práticas.

A atividade foi dividida em duas partes e conduzida ao longo de duas aulas consecutivas:

- Primeira Aula: Revisão às Sequências e Padrões

A aula começou com uma breve revisão dos conceitos sobre sequências, PA e PG, que já são conteúdos da 1ª série do Ensino Médio, reforçando os tipos de padrões que podem surgir nas sequências. Por exemplo, para a sequência numérica $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \cdots)$, os alunos reconheceram que cada termo é o termo anterior adicionando duas unidades, percebendo que essa sequência é uma PA. Outro exemplo foi a sequência $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \cdots)$, onde os alunos observaram que cada termo é o dobro do anterior e que essa sequência é definida como uma PG.

Depois desse momento, a professora escreveu a Equação de Recorrência de cada sequência citada anteriormente e demontrou uma forma de encontrar a fórmula fechada de cada uma dela. Por exemplo, para a sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \cdots)$, foi demonstrado

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 2 \\ a_4 &= a_3 + 2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

Foi dito para os alunos somarem todas as equações termo a termo e que termos iguais em membros diferentes se anulam, sobrando apenas a soma dos números 2 n vezes, ou seja, $a_n = 2n$, que é a fórmula fechada para a sequência dos números pares com $n \geq 2$.

Para a sequência $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \cdots)$, foi feito de forma análoga:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 = a_1 \cdot 2 = 2 \cdot 2 &= 2^2 \\ a_3 = a_2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 2^3 \\ a_4 = a_3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 2^4 \\ &\vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 &= 2^n \end{aligned}$$

Agora, foi mostrado que não seria viável somar membro a membro os termos das equações que formam os termos da sequência, que a multiplicação seria mais eficiente. E foi demonstrado que a fórmula fechada da sequência dos números naturais da potência de base 2 é $a_n = 2^n$.

- Segunda Aula: Formulação de Equações de Recorrência e Autoavaliação da Atividade

Após a revisão, cada aluno recebeu uma folha de atividade contendo oito questões a serem resolvidas. As 1ª e 2ª questões, que pediam a determinação do termo geral de uma Progressão Aritmética (PA) e de uma Progressão Geométrica (PG), respectivamente, foram resolvidas pela professora como nos exemplos anteriores. Para as demais questões, os alunos foram orientados a identificar o padrão em cada uma, semelhante ao feito nas duas primeiras, e a formular suas próprias Equações de Recorrência. As folhas da atividade realizada podem ser visulizadas no Apêndice A.

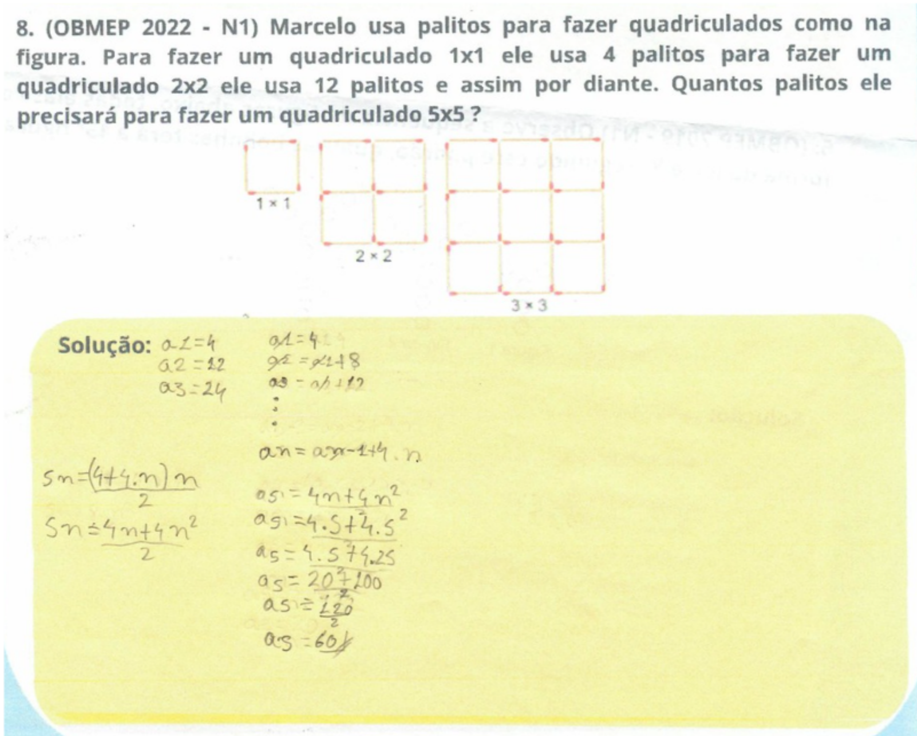
A seguir, temos algumas fotos da aplicação da atividade na sala de aula.

Figura 3.1: Aplicação da Atividade

FONTE: Elaborado pela autora.

A Figura 3.2 mostra a resposta da questão 8 de um dos alunos.

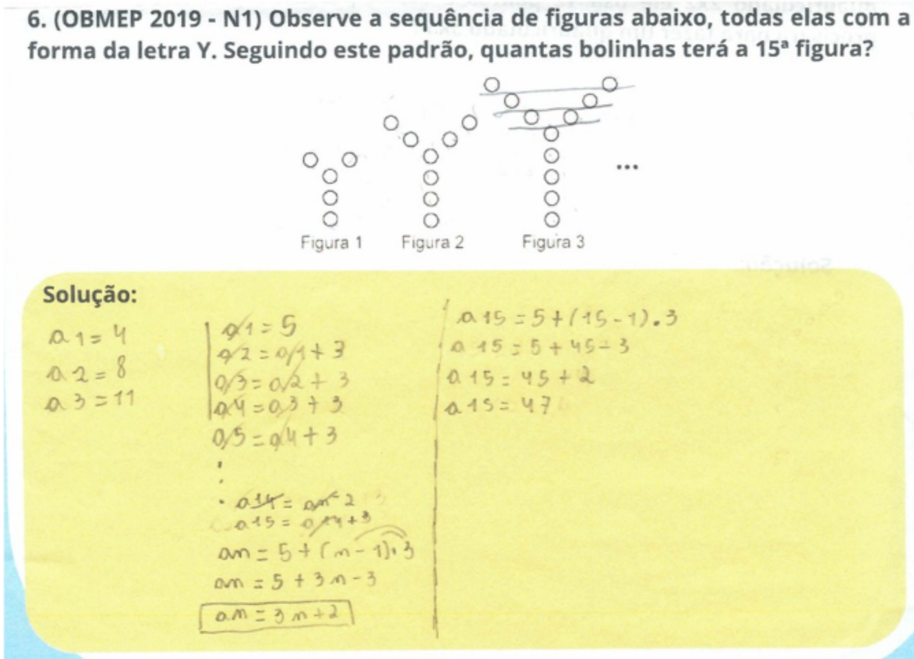
Figura 3.2: Resposta do aluno A19 para palitos formando quadriculados.



FONTE: Amostra de trabalho do estudante A19.

O aluno desenvolveu a atividade corretamente. No entanto, outros alunos, depois de a professora resolver a 1ª questão para encontrar o termo geral da PA, resolveram algumas questões utilizando o termo geral como na Figura 3.3

Figura 3.3: Resposta do aluno A11 para a sequência de figuras com bolinhas.



FONTE: Amostra de trabalho do estudante A11.

Na Figura 3.3, o aluno conseguiu resolver a recorrência da Questão 6, mas para calcular quantas bolinhas haveria na 15ª figura, usou o termo geral da PA.

Na Tabela seguinte, encontram-se os registros do número de acertos da 3ª até a 8ª questão.

Tabela 3.1: Resultado da Atividade Prática (%)

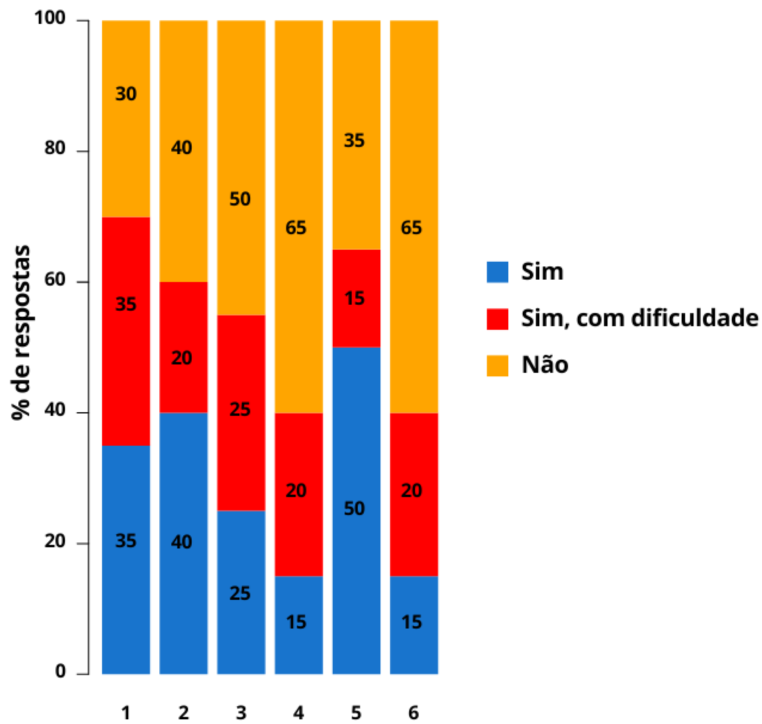
Questão	Soluções corretas	Soluções Corretas Parcialmente
Questão 3	57,1	31,4
Questão 4	17,1	62,8
Questão 5	34,2	57,1
Questão 6	85,7	14,3
Questão 7	28,7	37,1
Questão 8	80	14,2

FONTE: Elaborado pela autora.

Após a aplicação da atividade prática sobre Equações de Recorrência, os alunos responderam a um questionário (Apêndice B) com o objetivo de avaliar os conhecimentos adquiridos e a eficácia da atividade em promover o entendimento dos conceitos trabalhados. A avaliação incluiu questões objetivas e subjetivas, abrangendo aspectos teóricos e práticos relacionados à atividade. Apenas 20 alunos, dos 35 participantes na atividade, responderam ao questionário. Os resultados obtidos são apresentados e analisados no gráfico da Figura

3.4.

Figura 3.4: Resposta dos alunos às perguntas de 1 a 6 do questionário.

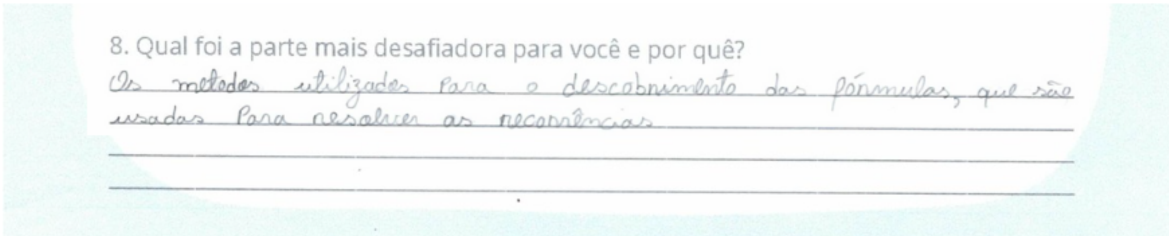


FONTE: Elaborado pela autora.

Mesmo com uma alta porcentagem na resposta *Não*, os alunos se interessaram pela abordagem então desconhecida por eles. Houve um estranhamento por parte dos alunos, pois esse tipo de atividade não é comum em sala de aula na educação básica e apesar das dificuldades, acharam interessante encontrar o padrão das questões, maioria da OBMEP, por recorrência. No entanto, se houvesse outros encontros com situações semelhantes, eles teriam melhorado seus resultados e a avaliação da atividade proposta.

Em relação às duas últimas perguntas do questionário, que eram, subjetivas, observa-se que, resumidamente, os alunos acharam interessante a forma como encontrar a fórmula fechada de um determinado padrão através das Equações de Recorrência. Na Figura 3.5, é possível visualizar a resposta de um dos alunos sobre a parte mais desafiadora na aplicação da atividade.

Figura 3.5: Resposta do aluno A7 para a pergunta 8 do questionário.



8. Qual foi a parte mais desafiadora para você e por quê?

Os metodos utilizados para o descobrimento das fórmulas, que são usadas para resolver as recorrências

FONTE: Amostra de trabalho do estudante A7.

A atividade revelou-se eficaz em alcançar os objetivos propostos. Os alunos demonstraram uma compreensão sólida dos conceitos de padrões e Equações de Recorrência, além de desenvolverem habilidades de resolução de problemas. A discussão coletiva, mesmo que cada um respondesse na sua folha de atividades, e a apresentação dos resultados contribuíram para a consolidação do conhecimento, permitindo que os alunos aprendessem uns com os outros. A atividade de identificação de padrões em sequências e formulação de Equações de Recorrência proporcionou uma experiência rica e dinâmica para os alunos da 1ª série do Ensino Médio. O envolvimento ativo e a abordagem prática ajudaram a tornar os conceitos abstratos de recorrência mais acessíveis e compreensíveis.

4 Considerações Finais

As Equações de Recorrência são a ferramenta adequada para se fazer a modelagem de fenômenos que evoluem no tempo. São consideradas como o equivalente das equações diferenciais em tempo discreto.

Através da Atividade proposta por este trabalho que envolveu exemplos concretos e analogias para facilitar a compreensão de conceitos abstratos, destacamos a importância do desenvolvimento de novas abordagens didáticas no ensino das Equações de Recorrência no ensino médio, demonstrando que a matemática pode ser ensinada de maneira dinâmica e envolvente.

O progresso dos alunos ao longo das atividades mostraram que o ensino de tópicos como Sequências Numéricas e Progressões, frequentemente abordados de maneira tradicional, podem ser enriquecidos por abordagens que incentivem a exploração e o pensamento crítico. A aplicação de conceitos mais abstratos, como as Equações de Recorrência, foi facilitada pelo uso de problemas divertidos e pela formulação de padrões, muitos deles retirados de provas da OBMEP, revelando que com as estratégias adequadas, é possível ampliar a compreensão desses conteúdos no ensino médio.

Durante a fase de avaliação, observamos que, embora os estudantes tivessem compreendido a metodologia proposta, alguns ainda enfrentaram dificuldades com cálculos mais básicos como, anular termos simétricos em uma equação. Isso sugere que, além da introdução de novas abordagens didáticas, é crucial fortalecer a base matemática dos alunos, garantindo uma compreensão sólida dos conceitos fundamentais.

Um ponto importante observado neste estudo é a capacidade dos alunos de compreender e aplicar métodos de demonstração, muitas vezes subestimada. Esta percepção reforça a necessidade de um ensino que não apenas apresente fórmulas e procedimentos, mas que também promova a compreensão profunda dos conceitos matemáticos e estimule o senso crítico dos estudantes. Acreditamos que um ensino que encoraje questionamentos e a verificação da veracidade das fórmulas levará a um aprendizado mais efetivo e duradouro.

Vale destacar que ao desenvolver novas atividades com esse tipo de abordagem, é válido incluir aulas de reforço sobre Progressões Aritméticas e Geométricas, além de um maior número de atividades que envolvam padrões e sequências, para incentivar a introdução do pensamento recursivo entre os alunos.

Espero que este trabalho possa contribuir para a formação de um material didático que possa ser utilizado por outros educadores, enriquecendo o currículo de matemática no ensino médio. A ideia é proporcionar aos alunos uma ferramenta que ajude a aprimorar suas habilidades analíticas e preparando-os para enfrentar problemas mais complexos.

Referências

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002. 10, 12, 14

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias - parte 3. Ministério da Educação, Brasília, 2000. Acesso em: 04 jan. 2024. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. 14

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2023. 14

CANGUSSU, E. S. O ensino de sequências de recorrências na educação básica com o auxílio de linguagem de programação. 2013. 40

DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática em Contexto: Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequências*. 1ª. ed. São Paulo, Brasil: Ática, 2020. 1, 25, 45

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo - Vol. 2*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 17

HEFEZ, A. Indução matemática. *Rio de Janeiro: OBMEP*, 2009. 36

LUCHETTA, V. O. J. *Números Figurados*. 2023. Acesso em: 09 mar. 2024. Disponível em: <https://www.matematica.br/historia/nfigurados.html>. 40

MELO, M.; ANDRADE, A. M. da S. Recorrências lineares e equações diferenciais lineares: uma experiência em uma turma de matemática discreta. *Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)*, v. 6, n. 1, p. 170–179, 2021. 20

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 28, 33, 35, 37, 38, 39

OBMEP. *Provas e Soluções da OBMEP*. 2023. Http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 06 dez. 2023. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 06 dez. 2023. 1, 41, 42, 43, 45

OBMEP. *Sala de Estudo: Recorrências - Sala 2*. 2024. Http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-recorrencias-sala-2/. Acesso em: 04 fev. 2024. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-recorrencias-sala-2/>. Acesso em: 04 fev. 2024. 35

PIVA, R. Modelos matemáticos e equações diferenciais ordinárias. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2016. 16

TEAM, R. C. R: A language and environment for statistical computing. r foundation for statistical computing. Viena, Áustria, 2013. 11

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2001. v. 1. Brochura. ISBN 9788534612913. 16

Apêndice

A

Atividade aplicada na sala de aula

Escola:
Professor(a):
Componente Curricular: Matemática **Data: ___/___/___**
Aluno(a):____ **Série: _________**

Aplicações das Equações de Recorrência

1. Uma Progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais (a_n), tal que o próximo termo é igual ao termo imediatamente anterior mais uma constante *r* chamada razão para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja,

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Obtenha, recursivamente, o termo geral da PA.

Solução:

2. Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante *q* chamada de razão. Ou seja,

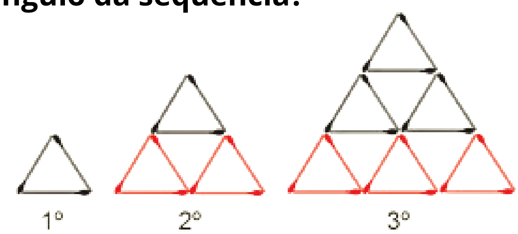
$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

com $n \in \mathbb{N}$ .Obtenha recursivamente, o Termo Geral da PG

Solução:

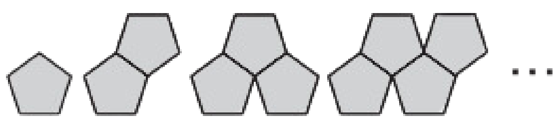
Aplicações das Equações de Recorrência

3. (OBMEP 2012 - N1) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Quantos palitos ela vai usar para construir o quinto triângulo da sequência?



Solução:

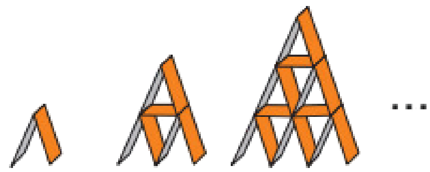
4. (OBMEP 2017 - N2) Com pentágonos regulares com 1 cm de lado, formamos uma sequência de polígonos como na figura. O perímetro do primeiro polígono é 5 cm, o perímetro do segundo é 8 cm, e assim por diante. Quantos pentágonos são necessários para formar um polígono com perímetro igual a 1736 cm?



Solução:

Aplicações das Equações de Recorrência

5. (OBMEP 2018 - N1) Janaína faz torres com cartões, seguindo o padrão da figura. A primeira torre foi feita com 2 cartões, a segunda com 7, a terceira com 15 e assim por diante. Quantos cartões ela deve acrescentar à décima torre para obter a décima primeira?



Torre 1 Torre 2 Torre 3

Solução:

6. (OBMEP 2019 - N1) Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

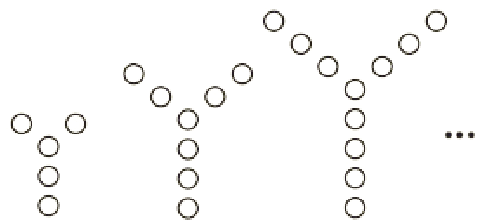


Figura 1 Figura 2 Figura 3

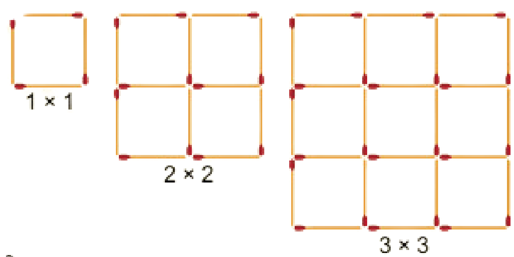
Solução:

Aplicações das Equações de Recorrência

7. Calcular o montante de um capital de R$ 1.000,00, aplicado á taxa de 4% ao mês, durante 5 meses no regime de juros compostos.

Solução:

8. (OBMEP 2022 - N1) Marcelo usa palitos para fazer quadriculados como na figura. Para fazer um quadriculado 1x1 ele usa 4 palitos para fazer um quadriculado 2x2 ele usa 12 palitos e assim por diante. Quantos palitos ele precisará para fazer um quadriculado 5x5 ?



Solução:

Gabarito

Questão 1:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1\\
a_2 &= a_1 + r\\
a_3 &= a_2 + r\\
a_4 &= a_3 + r\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cancel{a_1} &= a_1\\
\cancel{a_2} &= \cancel{a_1} + r\\
\cancel{a_3} &= \cancel{a_2} + r\\
\cancel{a_4} &= a_3 + r\\
&\vdots\\
a_n &= \cancel{a_{n-1}} + r
\end{aligned}
$$

Somando membro a membro cada termo anterior e efetuando os possíveis cancelamentos chegamos em

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

que é chamado de **Termo Geral da PA**.

Questão 2:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cancel{a_1} &= a_1 \\ \cancel{a_2} &= \cancel{a_1} \cdot q \\ \cancel{a_3} &= \cancel{a_2} \cdot q \\ \cancel{a_4} &= \cancel{a_3} \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= \cancel{a_{n-1}} \cdot q \end{aligned}$$

Efetuando os possíveis cancelamentos chegamos em $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é chamado de **Termo Geral da PG**.

Questão 3:

$$\begin{aligned} T_1 &= 3 \\ T_2 = 9 = T_1 + 6 &= T_1 + 3 \times 2 \\ T_3 = 18 = T_2 + 9 &= T_2 + 3 \times 3 \\ T_4 = 30 = T_3 + 12 &= T_3 + 3 \times 4 \\ &\vdots \\ T_n &= T_{n-1} + 3 \times n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cancel{T_1} &= 3 \\ \cancel{T_2} &= \cancel{T_1} + 3 \times 2 \\ \cancel{T_3} &= \cancel{T_2} + 3 \times 3 \\ \cancel{T_4} &= \cancel{T_3} + 3 \times 4 \\ &\vdots \\ T_n &= \cancel{T_{n-1}} + 3 \times n \end{aligned}$$

$$T_n = \frac{(3 + 3n) \cdot n}{2}$$

$$T_5 = \frac{(3 + 3 \cdot 5) \cdot 5}{2}$$

$$T_5 = 45$$

Questão 4:

$$P_1 = 5$$
$$P_2 = 8 = P_1 + 3$$
$$P_3 = 11 = P_2 + 3$$
$$P_4 = 14 = P_3 + 3$$
$$\vdots$$
$$P_n = P_{n-1} + 3$$

$$\cancel{P_1} = 5$$
$$\cancel{P_2} = \cancel{P_1} + 3$$
$$\cancel{P_3} = \cancel{P_2} + 3$$
$$\cancel{P_4} = \cancel{P_3} + 3$$
$$\vdots$$
$$P_n = \cancel{P_{n-1}} + 3$$

$$P_n = 5 + 3 \times (n-1)$$
$$P_n = 5 + 3n - 3$$
$$P_n = 3n + 2$$

$$1736 = 3n + 2$$
$$3n = 1736 - 2$$
$$3n = 1734$$
$$n = 578$$

Questão 5:

$$T_1 = 2$$
$$T_2 = 7 = T_1 + 5$$
$$T_3 = 15 = T_2 + 8$$
$$T_4 = 26 = T_3 + 11$$
$$\vdots$$
$$T_n = T_{n-1} + 3n - 1$$

$$\cancel{T_1} = 2$$
$$\cancel{T_2} = \cancel{T_1} + 5$$
$$\cancel{T_3} = \cancel{T_2} + 8$$
$$\cancel{T_4} = \cancel{T_3} + 11$$
$$\vdots$$
$$T_n = \cancel{T_{n-1}} + 3n - 1$$

$$T_n = \frac{(3n^2 + n)}{2}$$

$$T_{10} = \frac{(3 \times 10^2 + 10}{2} = 155$$
$$T_{11} = \frac{(3 \times 11^2 + 11}{2} = 187$$
$$187 - 155 = 32$$

Questão 6:

$$A_1 = 5$$
$$A_2 = 8 = A_1 + 3$$
$$A_3 = 11 = A_2 + 3$$
$$A_4 = 14 = A_3 + 3$$
$$\vdots$$
$$A_n = A_{n-1} + 3$$

$$\cancel{A_1} = 5$$
$$\cancel{A_2} = \cancel{A_1} + 3$$
$$\cancel{A_3} = \cancel{A_2} + 3$$
$$\cancel{A_4} = \cancel{A_3} + 3$$
$$\vdots$$
$$A_n = \cancel{A_{n-1}} + 3$$

$$A_n = 5 + 3 \times (n-1)$$
$$A_n = 5 + 3n - 3$$
$$A_n = 3n + 2$$

$$A_{15} = 3 \times 15 + 2 = 47$$

Questão 7:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + i \cdot a_1 = (1+i) \cdot a_1$$
$$a_3 = a_2 + i \cdot a_2 = (1+i) \cdot a_2 = (1+i)^2 \cdot a_1$$
$$a_4 = a_3 + i \cdot a_3 = (1+i) \cdot a_3 = (1+i)^3 \cdot a_1$$
$$\vdots$$
$$a_n = (1+i)^n \cdot a_1$$

$$a_n = a_1 \cdot (1+i)^n$$
$$a_n = M$$
$$a_1 = C = 1000$$
$$n = 5$$
$$i = 0,04$$
$$M = 1000 \cdot (1+0,04)^5$$
$$M = 1.216,65$$

Questão 8:

$$Q_1 = 4$$
$$Q_2 = 12 = Q_1 + 8$$
$$Q_3 = 24 = Q_2 + 12$$
$$Q_4 = 40 = Q_3 + 16$$
$$\vdots$$
$$Q_n = Q_{n-1} + 4 \times n$$

$$\cancel{Q_1} = 4$$
$$\cancel{Q_2} = \cancel{Q_1} + 8$$
$$\cancel{Q_3} = \cancel{Q_2} + 12$$
$$\cancel{Q_4} = \cancel{Q_3} + 16$$
$$\vdots$$
$$Q_n = \cancel{Q_{n-1}} + 4 \times n$$

$$Q_n = \frac{4n^2 + 4n}{2}$$
$$Q_5 = \frac{4 \times 5^2 + 4 \times 5}{2}$$
$$Q_5 = 60$$

B

Questionário

Questionário/Autoavaliação

1. Compreendo o que é uma recorrência?
( ) Sim ( ) Não
( ) Sim com dificuldade. Qual? ____
____

2. Sei identificar uma relação de recorrência em um problema?
( ) Sim ( ) Não
( ) Sim com dificuldade. Qual? ____
____

3. Posso dar exemplos de problemas que envolvem recorrências?
( ) Sim ( ) Não
( ) Sim com dificuldade. Qual? ____
____

4. Sei explicar como as recorrências são aplicadas em diferentes áreas além da matemática?
( ) Sim ( ) Não
( ) Sim com dificuldade. Qual? ____
____

5. Consigo resolver recorrências simples usando técnicas básicas?
( ) Sim ( ) Não
( ) Sim com dificuldade. Qual? ____
____

6. Sou capaz de encontrar soluções fechadas para recorrências lineares de primeira ordem.
( ) Sim ( ) Não
( ) Sim com dificuldade. Qual? ____
____

7. O que você achou mais interessante no estudo das recorrências?
____
____
____
____

8. Qual foi a parte mais desafiadora para você e por quê?
____
____
____
____

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.y, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo8xx

Matemática Financeira com equações de recorrência no ensino médio

Natália de Paula Oliveira de Andrade   Arthur da Costa Almeida

Resumo

A matemática financeira é um dos componentes da grade curricular do ensino médio e dos cursos de licenciatura em matemática. Nela, os estudantes tem a oportunidade de aprender alguns conceitos básicos como juros compostos, capitalização e amortização, assuntos que possuem importância prática para quem vive em uma sociedade capitalista como a nossa. Esses assuntos tem em comum a noção matemática de crescimento/decrescimento exponencial e, também, o fato de serem processos que evoluem em tempo discreto, como semanas, meses, anos. Neste trabalho, buscou-se dar ao professor e estudantes dessa disciplina, um enfoque matemático unificado ao estudo desses temas, usando para isso o conceito de equações de recorrência linear de primeira ordem. Dessa forma, os conceitos básicos da matemática financeira são vistos como exemplos de um mesmo tipo de modelo matemático básico a ser estudado.

Palavras-chave: matemática financeira; equações de recorrência.

Abstract

Financial math is one of the components of the high school curriculum and undergraduate courses for future mathematics teachers. In it, students have the opportunity to learn some basic concepts such as compound interest, capitalization and amortization, subjects that have practical importance for those who live in a capitalist society like ours. These subjects have in common the mathematical notion of exponential growth/decrease and also the fact that they are processes that evolve in discrete time, such as weeks, months, years. In this work, we sought to provide teachers and students of this discipline with a unified mathematical approach to the study of these themes, using the concept of first-order linear difference equations. In this way, the basic concepts of financial math are seen as examples of the same type of basic mathematical model to be studied.

Keywords: financial math; difference equations

1. Introdução

A ideia de escrever este trabalho começou depois que os autores ministraram um minicurso sobre modelagem matemática com equações de recorrência para turmas de estudantes de licenciatura em matemática em nossa faculdade. A parte da matemática financeira era apenas um dos exemplos que foram estudados nesse minicurso. Além dela, foram mostrados exemplos como população de peixes com cota de pesca e outros que podem ser estudados com equações de recorrência lineares

de prmeira ordem.
Este trabalho, entretanto, discute apenas conteúdos de Matemática Financeira, considerando-se que ela é uma disciplina importante na grade curricular do ensino médio por tratar de assuntos que dizem respeito ao dia a dia do manejo com dinheiro, compras, empréstimos, financiamentos e outras atividades econômicas. Do ponto de vista da matemática, segundo [6] só há um único problema em matemática financeira, que é o de deslocar quantias no tempo, pois o valor de uma quantia depende da época a que ela está referida.
Várias abordagens estão disponíveis nos livros didáticos dessa disciplina. A maioria, usa os métodos convencionais, [1, 5], outros usam progressões geométricas [9, 8].
É a proposta deste trabalho usar um único modelo de equação matemática para abordar os assuntos principais da matemática financeira, a saber, juros compostos, capitalização e amortização. O modelo de equações de recorrencia (ou diferença) linear de primeira ordem com coeficientes constantes. Essa abordagem também pode ser vista em [3], embora não de maneira sistemática. Dessa forma, será vista uma abordagem unificada do ponto de vista da matemática, o que poderá facilitar o entendimento e compreensão dos assuntos estudados.
Inicialmente, será feita uma breve explanação da equação a ser usada e, em seguida, serão estudados dois casos envolvendo o uso dessa equação, como exemplos de sua aplicação. Os gráficos mostrados nos resultados foram feitos com um programa desenvolvido na linguagem R, [7] usando o pacote gráfico ggplot2 [10].

2. Equações de recorrência

Equações de recorrência são equações com tempo discreto, que relacionam o valor presente da variável, com um ou mais valores passados da mesma variável. Um exemplo clássico é a equaçao de Fibonacci, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Neste trabalho, vamos nos deter apenas nas equações de recorrência lineares de primeira ordem com coeficientes constantes.

$$x_{n+1} = ax_n + b \tag{1}$$

Este tipo de equação, embora simples, aparece em uma grande variedade de situações envolvendo modelos interessantes, que podem ser explorados no ensino médio. Tais modelos envolvem, por exemplo, temas de matemática financeira, como juros compostos, capitalização e amortização e problemas como população de peixes com cota de pesca.

A solução dessa equação é obtida por indução. Vamos, portanto, resolver a equação

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

onde a, b são constantes reais e a variável x_n terá valor inicial x_0.

Temos, então, na sequencia

$x_1 = ax_0 + b$
$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = ax_0 + ab + b$
$x_3 = ax_2 + b = a(ax_0 + ab + b) + b = ax - 0 + ab + ab + b$
$x_3 = ax_2 + b = a(ax_0 + ab + b) + b = ax - 0 + ab + ab + b$
Por indução para o caso geral, temos
$x_n = a^n x_0 + a^{n-1} b + \cdots + ab + ab + b = a^n x_0 + b(a^{n-1} + \cdots + a + a + 1)$

$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + \cdots + a + a + 1)$
Como a expressão no interior do parêntese é a sima de uma PG de n termos com termo inicial igual a 1 e razão $q = a$, temos que

$$S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Donde concluimos que

$$x_n = a^n x_0 + b\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) \tag{2}$$

Essa solução é válida para $a \neq 1$. Quando $a = 1$, temos que $x_n = x_0 + nb$.

3. Matemática financeira com equações de recorrência

Nesta seção vamos abordar uma forma de estudo dos conteúdos de matemática financeira elementar, de forma unificada, usando equações de recorrência.

3.1. Juros compostos

O conceito de juros pode ser entendido como uma espécie de aluguel pelo uso de um valor em dinheiro, o capital, durante um certo período de tempo. Ele é calculado como uma porcentagem sobre o valor do capital. Quando o cálculo é feito sempre sobre o valor inicial do capital, temos os juros simples, quando ele é calculado sobre o valor atual do capital, temos os juros compostos. Dessa forma, um capital C, rende juros compostos de i por cento durante cada período de tempo. Para calcular o montante após n períodos, precisamos construir um modelo discreto que varie a cada período de tempo. Assim, se chamarmos de x_{n+1} o valor do montante no período seguinte, ele será dado pelo montante atual, x_n, mais os juros do período calculados sobre esse montante atual.

$$x_{n+1} = x_n + i x_n$$

ou

$$x_{n+1} = (1 + i) x_n$$

Essa á uma equação de recorrencia do padrão da Equação (1), cuja solução é dada pela Equação (2), com $a = 1 + i$ e $b = 0$. Se fizermos $x_0 = C$ para o valor inicial, teremos como solução

$$x_n = C(1 + i)^n$$

que é a equação usual dos juros compostos. Chamando o x_n de montante, M, a equação fica na sua forma mais conhecida

$$M = C(1 + i)^n$$

3.2. Capitalização

Capitalização é processo de se acumular um capital em parcelas periódicas, usando-se para isso uma conta de investimento, que rende juros a cada período. Assim, em cada período, essa conta de capitalização recebe juros calculados sobre o valor presente na conta. Portanto, o saldo seguinte dessa conta $\mathrm{x_{n+1}}$ será dado pelo saldo atual, $\mathrm{x_n}$, acrescido dos juros calculados sobre esse saldo e mais uma parcela, P, de valor constante, depositada a cada período.
Seu modelo em tempo discreto, passa a ser

$$\mathrm{x_{n+1} = x_n + ix_n + P} \tag{3}$$

Arrumando a equação e tomando como valor inicial $\mathrm{x_0} = 0$, fica assim

$$\mathrm{x_{n+1} = (1+i)x_n + P} \tag{4}$$

Portanto, verificamos que ela é também uma equação do padrão (1) cuja solução geral é dada por (2). Fazendo em (2) $\mathrm{a = 1+i}$, $\mathrm{b = P}$ e chamando $\mathrm{x_n}$ de M temos

$$\mathrm{M = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \tag{5}$$

que é a equação da capitalização. O fator

$$\mathrm{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

é conhecido como fator de capitalização.

Para ilustrar o seu uso, faremos uma aplicação interessante.

Seja um jovem docente de matemática que após o seu primeiro emprego resolve se aposentar daqui a 35 anos, tendo acumulado um capital de 1 milhão de reais. Para isso, investe todos os meses uma quantia fixa, P*, de seu salário, em uma conta remunerada que rende* 1% *de juros ao mês. Qual será o valor da parcela mensal que ele precisará depositar?*

Trata-se de um modelo típico de capitalização, cuja solução é dada pela Equação (6). Nesse caso, temos $\mathrm{i = 0.01}$, $\mathrm{M = 1000000}$, o número de períodos n em meses, é dado por $\mathrm{n = 420}$ e a parcela P, é desconhecida. Fica assim, substituindo-se os valores em (5).

$$\mathrm{1000000 = P \times \frac{(1+0.01)^n - 1}{0.01}}$$

Fazendo-se as contas e resolvendo para P, encontramos o valor da parcela como sendo

$$\mathrm{P = 155,50}$$

reais por mês.

Obviamente, esse é um modelo idealizado e fictício. Dificilmente, encontra-se uma aplicação bancária que renda essa taxa de juros de 1% ao mês durante todo esse tempo; o cálculo não leva em conta o efeito da inflação ao longo do período, mas apenas o valor nominal; aqui no Brasil, tivemos períodos de instabilidade econômica, inclusive com várias mudanças de moeda num prazo assim tão longo. Mesmo assim, vale como exemplo e serve para estimular planejamento de aposentadorias em nós e em nossos estudantes.
Como curiosidade adicional, se esse mesmo valor de R$ 155,50 for aplicado durante o mesmo período em uma caderneta de poupança que rende $0,5\%$ ao mês, no final terá acumulado um montante de R$ 221.452,00 reais. Uma diferença de meio ponto na taxa de juros mensal, ao longo de 35 anos, gera uma enorme diferença no rendimento, por conta do crescimento exponencial do montante, conforme pode ser visualizado na Figura 1.

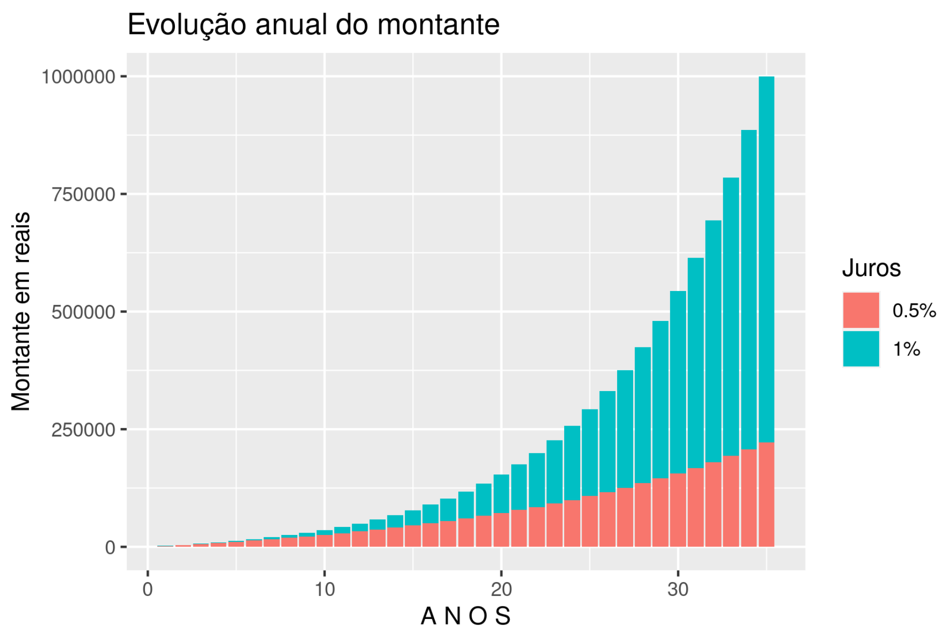


Figura 1: Evolução anual da capitalização.

3.3. Amortização

Amortização tem a ver com pagamento de dívidas de forma parcelada. No nosso caso, para simplificar, com valor fixo da prestação mensal. Neste item, tem-se uma dívida, com valor inicial $x_0 = V$ e a cada mês é efetuado um pagamento parcial de valor fixo, P. O novo saldo devedor é obtido da seguinte forma: toma-se o saldo devedor atual, calcula-se os juros devidos sobre o saldo devedor atual e subtrai-se o valor da amortização paga no mês atual. Dessa forma, tem-se

$$x_{n+1} = x_n + ix_n - P$$

ou

$$x_{n+1} = (1+i)x_n - P \tag{6}$$

com $x_0 = V$, o valor total da dívida à vista a ser paga.

Observa-se que essa é uma equação do mesmo padrão da equação (1) cuja solução é dada pela equação (2), fazendo-se $a=1+i$, $b=-P$ e $x_0=V$. Portanto, a solução vai ser

$$x_n=(1+i)^n\times V-P\times\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Mas, após o último pagamento, a divida zera, isto é, tem-se $x_n=0$, portanto a equação da amortização fica

$$V=P\times\frac{(1+i)^n-1}{i\times(1+i)^n} \tag{7}$$

onde V é o valor à vista da dívida e P o valor da prestação mensal fixa.
O fator

$$\frac{(1+i)^n-1}{i\times(1+i)^n}$$

é conhecido como fator de amortização.
Um exemplo interessante a seguir, une os dois conceitos de capitalização e amortização para se calcular quanto se deve investir por mês, durante um certo tempo, para, depois ficar recebendo os rendimentos durante um outro período de tempo.
O exemplo a seguir foi retirado do texto [6]
,

> *Prob. 5-26. Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto você deve investir durante 30 anos para obter ao fim desse prazo, por 30 anos, uma renda de R$ 100,00?* (Morgado e Carvalho, 2015, p. 103)

Para resolver este problema, observa-se que ele envolve inicialmente uma capitalização e na segunda parte uma amortização. Considerando os dados disponíveis, devemos começar perguntando qual deve ser o montante inicial necessário para ser consumido (amortizado) em 30 anos, com a mesma taxa mensal de juros, com uma parcela de R$ 100,00. E, na segunda parte, já conhecido o montante a ser obtido, qual deve ser a parcela mensal que deve ser investida para obter-se esse montante.
Portanto, temos a equação

$$x_n=(1+i)^n\times V-P\times\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

como $x_n=0$, $P=100$, $i=0.005$, $n=360$ e V, o montante, desconhecido.

$$(1+0,005)^{360}\times V-100\times\frac{(1+0,005)^{360}-1}{0,005}=0$$

Resolvendo-se para V, o montante, encontra-se V=R$ 16679,16. Esse é o montante que deve ser alcançado na primeira parte, a da capitalização. Agora, vamos usar a equação da capitalização para encontrar o valor da parcela mensal.

$$M=P\times\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

onde $M=16679,16$, $n=360$, $i=0,005$ e P é o valor desconhecido.

$$16679,16=P\times\frac{(1+0,005)^{360}-1}{0,005}$$

Resolvendo-se para P, encontra-se o valor mensal a ser investido, que é de R$ 16,60.
A evolução anual do montante é mostrada na Figura 2.

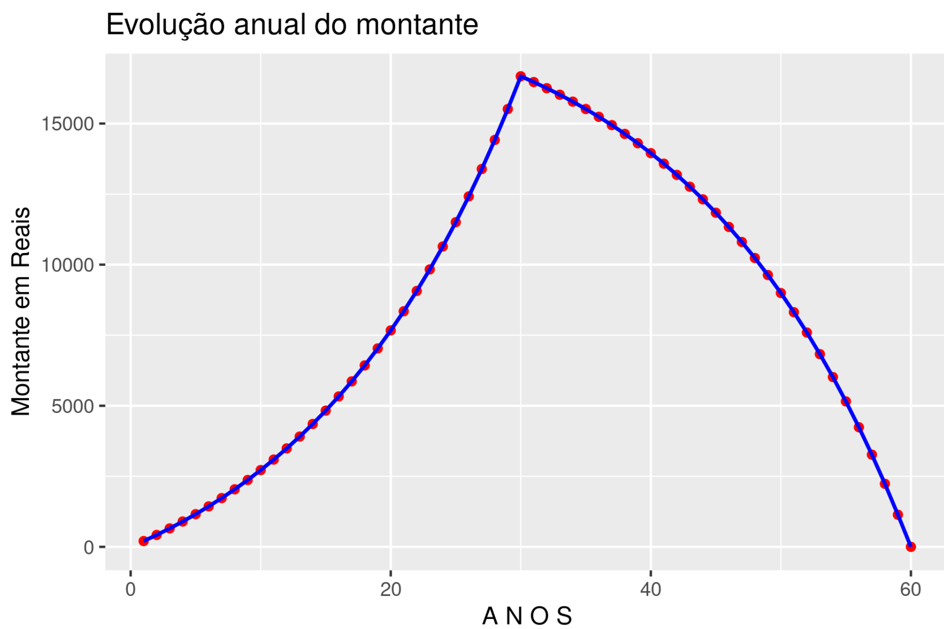


Figura 2: Capitalização e Amortização

4. Considerações Finais

As equações de recorrência são um campo vasto de pesquisa que se expandiu muito nas décadas finais do século XX, graças ao uso intensivo de computadores. Elas são a ferramenta adequada para se fazer a modelagem de fenômenos que evoluem no tempo. São consideradas como o equivalente das equações diferenciais em tempo discreto [4]. Seu estudo se estende para muito além da simples aplicação vista neste trabalho e para quem se interessar, um mundo inteiro de conhecimento e descobertas está disponivel em vários textos elementares, tais como [2]. Assuntos como o comportamento caótico da equação logística enchem, hoje, milhares de publicações em livros e revistas especializadas.

Referências

[1] Assaf Neto, A. *Matemática Financeira - Edição Universitária*. Editora Atlas, SP, 2021.

[2] Devaney, R. L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Ed. CRC Press, London, 2020.

[3] Elaydi, S. *An Introduction to Difference Equations*. Ed. Springer, Texas, USA, 2000.

[4] Holmgren, R. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Editora Springer, Alemanha, 1996.

[5] Iezzi, G., Hazzab, S., Degenszajn, D. *Fundamentos de matemática elementar - Volume 11: Matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva*. Editora Saraiva, 2019.

[6] Morgado, A. C e Carvalho P. C. P. *Matemática Discreta*. Coleção PROFMAT, Editora SBM, RJ, 2015.

[7] R Core Team. *R: A Language and Environment for Satistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, Disponível em <:https://www.R-project.org/>, 2023.

[8] Rodrigues, M., Petry, V. *Progressões geométricas e o estudo da matemática financeira*. Revista PMO, v.3, n.1, 2015, Editora SBM, RJ, Disponível em: <https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/11/art3_vol3_2015_SBM_PMO.pdf>. Acesso em: 3 de agosto de 2023.

[9] Wagner, E., Morgado, A. C e Zani, S. *Progressões e Matemática Financeira*. Editora SBM, Rio de Janeiro, Brasil, 2022.

[10] Wickham, H. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Ed. Springer-Verlag, New York, USA, 2016.

Natália de Paula Oliveira de Andrade
Estudante do PROFMAT
UFPA / Campus Castanhal
<nataliafil413@gmail.com>

Arthur da Costa Almeida
UFPA / Campus Castanhal
<arthur@ufpa.br>

Recebido: 20/04/2020
Publicado: