UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A SALA DE AULA INVERTIDA

VICTOR JOSÉ DIAS RAMOS

Orientador: Dr. Etereldes Gonçalves Junior

Vitória - Espírito Santo

Junho de 2024

VICTOR JOSÉ DIAS RAMOS

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A SALA DE AULA INVERTIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Etereldes Gonçalves Junior

Vitória - Espírito Santo

Junho de 2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Ramos, Victor José Dias, 1991-

R175p Uma proposta para o ensino de progressões aritméticas e geométricas na segunda série do ensino médio utilizando a sala de aula invertida / Victor José Dias Ramos. - 2024.

109 f. : il.

Orientador: Etereldes Gonçalves Júnior.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Aprendizagem invertida. 2. Ensino híbrido. 3. Séries aritméticas. 4. Séries geométricas. 5. Ensino Médio. I. Gonçalves Júnior, Etereldes. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A SALA DE AULA INVERTIDA"

Victor José Dias Ramos

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28/06/2024 por:

____

Prof.(a) Dr.(a) Etereldes Gonçalves Júnior
Orientador(a) – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Milton Edwin Cobo Cortez
Membro interno – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Ramon Teodoro do Prado
Membro Externo – IFES

Folha de Assinaturas Victor José Dias Ramos

Data e Hora de Criação: 24/06/2024 às 13:19:48

Documentos que originaram esse envelope:
- Folha de Assinaturas Victor José Dias Ramos.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 2217dcb3c9ec494612ec595b96709fedf8fd931688837e1eafba6ab0761b9887
[SHA512]: b26d2a8ad113ca79046ae12473a7d2441bd6c3dba4fd8437aa8a0f00dd8e04cd76a05757cf460c9f83687e324ac9b702aa106ebd48f7413209ca0ba497697f9f

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Etereldes Gonçalves Júnior (etereldes.goncalves@ufes.br)
Data/Hora: 28/06/2024 - 13:20:49, IP: 200.137.65.106
[SHA256]: 3a9c15ee2a0eb24d3dfee64c7f08651548135bba473d06dd13c8ff921aeba8a2

ASSINADO - Milton Edwin Cobo Cortez (milton.cortez@ufes.br)
Data/Hora: 29/06/2024 - 16:14:01, IP: 104.28.47.100, Geolocalização: [-20.283979, -40.293522]
[SHA256]: 60955e5a1f0dc9d7e0877885c5fae16ebb609ef7379861ff9e1652ef72be30fc

ASSINADO - Ramon Teodoro do Prado (ramon.prado@ifes.edu.br)
Data/Hora: 28/06/2024 - 17:16:21, IP: 45.183.153.13, Geolocalização: [-20.199076, -40.222989]
[SHA256]: a6625e876582581fae2157c28bafdc0562d4d7a0fc4166e699b20ce81b994ef7

Histórico de eventos registrados neste envelope

29/06/2024 16:14:01 - Envelope finalizado por milton.cortez@ufes.br, IP 104.28.47.100
29/06/2024 16:14:01 - Assinatura realizada por milton.cortez@ufes.br, IP 104.28.47.100
28/06/2024 17:16:21 - Assinatura realizada por ramon.prado@ifes.edu.br, IP 45.183.153.13
28/06/2024 17:15:47 - Envelope visualizado por ramon.prado@ifes.edu.br, IP 45.183.153.13
28/06/2024 13:20:49 - Assinatura realizada por etereldes.goncalves@ufes.br, IP 200.137.65.106
28/06/2024 13:20:43 - Envelope visualizado por etereldes.goncalves@ufes.br, IP 200.137.65.106
28/06/2024 08:12:16 - Envelope visualizado por milton.cortez@ufes.br, IP 104.28.63.104
28/06/2024 06:00:08 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
28/06/2024 06:00:08 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
24/06/2024 13:19:48 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.108

Ora, Àquele que é poderoso para fazer tudo muito mais abundantemente além daquilo que pedimos ou pensamos, segundo o poder que em nós opera, a Ele seja a glória na igreja, por Jesus Cristo, em todas as gerações, para todo o sempre. Amém. (Efésios 3.20-21)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, fonte de toda a verdadeira sabedoria e conhecimento, que me dá o fôlego e a consciência da vida, pois sem Ele nada seria possível.

Nesses anos de mestrado, de muito esforço, estudo e empenho, sou grato a algumas pessoas que foram essenciais para a realização desse sonho, entre elas Eunice e José Carlos, meus pais. Com certeza o incentivo e apoio dado por vocês, principalmente nos momentos em que pensei em desistir, e a vontade de querer deixá-los orgulhosos foram meu combustível nesse processo. Também gostaria de agradecer ao meu professor orientador, Dr. Etereldes Gonçalves Júnior, pela dedicação, pelo profissional que é e, principalmente, por sempre ter acreditado e depositado sua confiança em mim ao longo do trabalho. Dessa forma, agradeço também a todos os professores do PROFMAT.

A vida sem um amigo seria tão difícil, nem dá para imaginar! Alguns amigos foram fundamentais nessa jornada. Bruna e Edina Marina, por jamais desistirem de mim, me incentivarem sempre e por todas as orações; Barbara, Diógenes, Danilo, Eliete, Emanuel, Érika, Gilmar, Rackel, Samara e Raul, companheiros ainda da turma de Campos dos Goytacazes; Jegiane e Patrick, da turma de Vitória (ES). A troca de experiência com vocês foi incrível! Uma cumplicidade e apoio mútuo. Noites mal dormidas, trabalhos para serem entregues e lá estavam vocês. Isadora, Maycon e Matheus, vocês também fazem parte disso.

Aos alunos que “compraram” a ideia, agradeço a dedicação, a disposição e o tempo despendido, contribuindo para o resultado deste trabalho. À sociedade Brasileira de Matemática e à UFES, pelo oferecimento deste curso. Enfim, a todos que de alguma forma participaram dessa conquista.

RESUMO

Progressões Aritméticas e Geométricas são, de forma generalizada, sequências finitas ou infinitas de números estabelecidos através de uma razão. Esses conteúdos, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), são abordados em todas as séries do Ensino Médio, com ênfase no 2º ano do Ensino Médio. A metodologia de pesquisa escolhida foi qualitativa descritiva aplicada, e os métodos para coleta de dados foram pesquisa documental e levantamento de dados. Esta dissertação visa pesquisar sobre ensino híbrido e metodologias ativas, enfatizando e aprofundando na subcategoria Sala de Aula Invertida, investigando como essa modalidade de ensino pode auxiliar no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos de progressões aritméticas e geométricas. Além disso, propõe-se o questionamento do aluno sobre sua atuação passiva (muito comum na maioria das escolas atuais) a fim de torná-lo construtor de seu processo de aprendizagem, permitindo um maior interesse na turma como um todo, fazendo com que os estudantes se tornem mais participativos. Já em se tratando do professor, a proposta é que ele tenha um conceito mais inovador, podendo explorar as habilidades dos alunos e assuma uma função de facilitador e orientador. Os resultados mostraram que a utilização desses recursos teve um caráter motivador nos discentes, proporcionando aulas mais atrativas e dinâmicas.

Palavras-chave: Sala de Aula Invertida; Ensino Híbrido; Progressões Aritméticas e Geométricas.

ABSTRACT

Arithmetic and Geometric Progressions are, in general, finite or infinite numerical sequences established by a ratio. This content, according to the BNCC (Brasil, 2018), is approached in all High School, with emphasis on the second year of High School. The methodology research used was applied descriptive qualitative, and the methods for data collection were documentary research and data survey. This thesis aims to investigate hybrid teaching and active methodologies, emphasizing and enhancing flipped classrooms. It also inquires how this teaching modality can support the teaching-learning process of the concepts of arithmetic and geometric progressions. Furthermore, it is proposed that the students reflect on their passive performance (very common in most current schools), engaging them in their learning process, allowing a greater interest in the class as a whole, and fostering students to become more active. When the focus is on the teacher's role, the proposal is that he/she should have a more innovative concept being able to explore the skills of the students and assumed a role as a facilitator and guide. The results revealed that the use of these resources had a motivating effect on the students, providing more attractive and dynamic classes.

Keywords: Flipped Classroom; Hybrid Teaching; Arithmetic and Geometric Progressions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

CAPÍTULO 1: APORTE TEÓRICO 13

1.1 METODOLOGIA ATIVAS 13

1.2 ENSINO HÍBRIDO... 15

1.3 SALA DE AULA INVERTIDA 20

1.4 TRABALHOS CORRELATOS 26

CAPÍTULO 2: PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS.................... 31

2.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA 31

2.1.1 Termo Geral de uma PA 31

2.1.2 Propriedades de uma PA 33

2.1.3 Soma dos primeiros $\boldsymbol{n}$ termos de uma PA 34

2.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA... 35

2.2.1 Termo Geral de uma P.G. 36

2.2.2 Propriedades de uma P.G. 37

2.2.3 Produto de $\boldsymbol{n}$ termos de uma P.G. 38

2.2.4 Soma dos n primeiros termos de uma P.G. 38

CAPÍTULO 3: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E RESULTADOS 40

3.1 SEMANA I.. 42

3.2 SEMANA II 49

3.3 SEMANA III... 57

3.4 SEMANA IV 62

3.5 SEMANA V 67

3.6 QUESTIONÁRIO 70

CONSIDERAÇÕES FINAIS 77

REFERÊNCIAS 79

APÊNDICE A – FORMULÁRIOS.. 82

APÊNDICE B – ATIVIDADES EM GRUPO 95

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO.. 102

APÊNDICE D – ATIVIDADES EXTRAS.. 104

INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda a estratégia das metodologias ativas, por meio de um ensino híbrido, tendo como foco o modelo de Sala de Aula Invertida no contexto do ensino da matemática em um cenário da pandemia covid-19. Dentro desse contexto, buscou-se aprofundar em novos métodos pedagógicos, de modo que o ensino da matemática pudesse se tornar algo interessante para os alunos bem como um instrumento de construção de um sujeito autônomo no processo de ensino e aprendizagem, ao ponto de possuir uma visão de mundo mais ampla, crítica e reflexiva.

Para tal, buscou-se apresentar, no primeiro capítulo, a importância das metodologias ativas no ensino da matemática, como uma mudança paradigmática no âmbito pedagógico, ao promover maior interação do aluno no próprio processo de aprendizagem, conforme ressaltou Neves *et al*. (2019, p. 12): "as metodologias ativas surgem para beneficiar este fato, uma vez que elas acabam por diversificar as características individuais da aprendizagem". Ao diversificar o processo de aprendizagem, são proporcionadas múltiplas formas de ensino, o que em um período de pandemia se caracteriza como alternativa ao modelo tradicional.

No processo de diversificação de metodologias, encontra-se o ensino híbrido, que se trata de dois ou mais elementos mesclados entre si. No caso do ensino híbrido, refere-se à modalidade em que uma parte do processo de ensino e aprendizado é realizada na sala de aula física e a outra parte on-line, de maneira que, conforme afirmou Bacich (2016, p. 679), "no modelo híbrido, a ideia é que educadores e estudantes ensinem e aprendam em tempos e locais variados". Dessa forma, o ensino da matemática vai ganhando novos modelos de aplicação, repensando o processo ensino-aprendizagem, como o método de Sala de Aula Invertida.

A Sala de Aula Invertida encontra-se dentro da modalidade de ensino híbrido, que se vale da metodologia ativa para o processo de aprendizagem, fazendo com que o aluno tenha contato prévio com o conteúdo, procure entendê-lo, resolva as questões e deixe para o ambiente da sala de aula as discussões e as dúvidas para serem compartilhadas com o professor e os demais colegas. Desse modo, pode-se resumir em "o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula" (Bergmann; Sams, 2016, p. 11). Assim, após apresentar algumas discussões conceituais necessárias para a compreensão e futura aplicação metodológica no ensino da matemática, realizou-se uma busca no Banco de Dissertação do PROFMAT, utilizando a palavra-chave Sala de Aula Invertida para análise comparativa dos trabalhos correlatos, descobrindo-se que essa temática ainda não havia sido explorada na UFES.

O segundo capítulo aborda as progressões aritméticas e geométricas, realizando, para tal, um pequeno apanhado histórico e sua conceitualização, por meio de alguns cálculos e exemplos. Tal conteúdo foi escolhido pois assim como não havia temática sobre a Sala de Aula Invertida no PROFMAT – UFES, não há dissertações com progressões aritméticas e geométricas valendo-se da Sala de Aula Invertida dentro do programa como um todo. Além disso, tal conteúdo é abordado com mais ênfase no ano de escolaridade em questão e no bimestre que se daria a aplicação. Ressalta-se também a sua aplicabilidade no dia a dia como ponto fundamental no processo de escolha.

No terceiro capítulo são apresentados os procedimentos metodológicos e resultados alcançados a partir de um estudo de caso na turma de 2º ano do Ensino Médio, obtidos dos encontros realizados, inicialmente, com um grupo de 15 alunos do Colégio Estadual João Guimarães, em Italva, noroeste do estado do Rio de Janeiro, durante o turno da manhã, às quintas-feiras, das 7h às 8h40, e às sextas-feiras, das 8h40 às 10h20, por meio da aplicação do método da Sala de Aula Invertida pela ferramenta Google Sala de Aula e de aulas interativas através do Google Meet, por ocasião do ensino remoto durante o período da pandemia de covid-19. O estudo foi planejado para ser desenvolvido em três etapas. Na inicial, o objetivo foi apresentar aos estudantes a proposta da experimentação da metodologia colaborativa Sala de Aula Invertida (SAI) no ensino de Progressões Aritméticas e Geométricas, com o uso da ferramenta Google Sala de Aula. Em seguida, foi feita a realização da sequência didática, desenvolvida em cinco semanas. Por fim, fez-se a análise dos resultados da experimentação da metodologia colaborativa SAI utilizando a ferramenta Google Sala de Aula no ensino de Progressões Aritméticas e Geométricas por meio de questionário.

Desse modo, buscou-se tornar o aluno mais responsável e protagonista do próprio conhecimento, mesmo diante do cenário da pandemia de covid-19, que obrigou a todos a se reinventarem e, no campo do ensino, a buscar novos métodos de ensino-aprendizagem. Dentro desse contexto histórico desafiador, as metodologias ativas se mostraram uma opção eficiente para o ensino, aproximando-o da realidade do aluno.

Espera-se, dessa forma, que a presente pesquisa possa contribuir para a formação de professores de matemática que buscam novas metodologias para transmitir um dos saberes mais antigos da humanidade e que está presente no cotidiano de todos. Quando o professor busca construir conhecimentos junto ao aluno, fazendo-o participante ativo do processo de aprendizagem, um ensino autônomo do sujeito começa a ser construída. Desse modo, a matemática, com suas progressões aritméticas e geométricas, começa a fazer sentido para ele.

CAPÍTULO 1: APORTE TEÓRICO

Neste capítulo é apresentado o aporte teórico em que esta pesquisa foi fundamentada. Ele está subdividido em três seções: Metodologias Ativas, Ensino Híbrido e, por fim, Sala de Aula Invertida – modelo no qual foi aplicada a experimentação.

1.1 METODOLOGIA ATIVAS

O principal desafio do professor, atualmente, é fazer com que os alunos estejam motivados e interessados durante a apresentação e a explicação do conteúdo, bem como na resolução dos exercícios. Buscar esse interesse do discente durante o processo de ensino-aprendizagem se faz necessário, uma vez que, no ato de aprender, segundo Moran (2018, p. 2), “aprendemos o que nos interessa, o que encontra ressonância íntima, o que está próximo do estágio de desenvolvimento em que nos encontramos”.

É importante criar um ambiente que seja favorável ao aprendizado e contemple múltiplas formas de ensino, de maneira que a escola seja um espaço dinâmico, criativo, aberto e interativo, que busca novos meios de ensinar e aprender, pois, como afirma Christensen, Horn e Johnson (2012, p. 4), “a maioria de nós sabe, intuitivamente, que todos aprendemos de forma diferente – por métodos diferentes, em diferentes estilos e com ritmos diferentes”.

Diante desses desafios pelos quais passa e educação formal em tempos de constantes transformações sociais, econômicas e políticas, nos quais metodologias, grade curricular, tempos e espaços de ensino precisam ser revistos constantemente é fundamental buscar alternativas que se tornem relevantes na aprendizagem e construção dos projetos de vida do aluno. Essa evolução se faz necessário, pois, na ótica do autor:

> A escola padronizada, que ensina e avalia a todos de forma igual e exige resultados previsíveis, ignora que a sociedade do conhecimento é baseada em competências cognitivas, pessoais e sociais, que não se adquirem da forma convencional e que exigem proatividade, colaboração, personalização e visão empreendedora (Moran, 2015b, p. 16).

Nesse contexto, as Metodologias Ativas constituem uma opção atraente no contexto de pandemia covid-19, já que seu pressuposto teórico fundamental é tornar o aluno um protagonista desse processo, com autonomia e criticidade, ao passo que o professor se torna um mediador que orienta o aluno a alcançar tal fim.

> As metodologias ativas surgem para beneficiar este fato, uma vez que elas acabam por diversificar as características individuais da aprendizagem. Sendo assim, elas aprofundam os conhecimentos, estimulam a comunicação, ampliam a capacidade de ouvir o outro, estimulam os trabalhos em equipe e desenvolvem a motivação individual e coletiva (Neves *et al.*, 2019, p. 12).

Desse modo, ao promover maior participação do aluno no processo de ensino, as Metodologias Ativas fazem com que ele se torne mais autônomo durante o processo, mostrando-se, habilitado a atender às demandas atuais do sistema educacional. Nesse contexto, emerge o uso das metodologias ativas por meio de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs) que podem possibilitar ao aluno ser protagonista do seu próprio aprendizado de maneira autônoma, crítica, participativa e interativa, pois aprenderá realizando as tarefas, interagindo e construindo o saber juntamente com os demais colegas.

Por isso, "as metodologias ativas são pontos de partida para avançar para processos mais avançados de reflexão, de integração cognitiva, de generalização, de reelaboração de novas práticas" (Moran, 2015b, p. 18). Para tal, faz-se necessário elaborar novas estratégias para que o discente consiga reter o conteúdo estudado ao mesmo tempo que reflete a respeito do que está a realizar, ler e escrever, desenvolvendo uma capacidade crítica de questionamento, argumentação e análise, tanto dentro da sala de aula quanto fora dela (Bonwell; Eison, 1991).

Partindo dessa mesma ideia, Bacich e Moran (2018) sinalizam que é papel do professor, enquanto mediador do aprendizado, propiciar situações para aguçar a curiosidade do discente, de modo que o aluno comece a pensar e a refletir com base na realidade concreta em que está inserido, buscando questioná-la e construir o edifício do saber com o intuito de transformá-la. Assim, pontuam os autores, "[...] as metodologias ativas demandam a autonomia do professor para criar atividades com potencial de promover experiências e aprendizagens aos estudantes esforçando-se na criação e reconstrução das atividades" (Bacich; Moran, 2018, p. 12).

Nesse contexto, o papel exercido como curador, por parte do docente, filtrando as informações e proporcionando o que for relevante ao estudante, é o que aguça, direciona e incentiva os estudantes a desenvolverem os exercícios sejam de forma individual ou em grupo. Portanto, o professor se torna um mediador do desenvolvimento do aluno. Isso se faz importante pois o mundo está em constante transformação, tudo é muito rápido, conforme salientou Kalinke (2004, p. 13), "[...] as descobertas são extremamente rápidas e estão à disposição com uma velocidade nunca imaginada".

Por isso, a inserção de tecnologias digitais de informação e comunicação na sala de aula é de fundamental importância na construção de um saber que leva em consideração as exigências do mundo contemporâneo, já que grande parte dos alunos tem acesso aos mais diferentes ambientes midiáticos no cotidiano. Assim, urge o uso mediado pelos professores dessas tecnologias, de modo a preparar o aluno para um uso consciente e reflexivo dessas ferramentas.

Desse modo, um aluno sem acesso à internet e sem habilidades digitais perde oportunidades importantes para se informar, acessar materiais valiosos, se comunicar, se destacar e aumentar suas chances de empregabilidade no futuro. Visando um aprendizado integral que torna o aluno protagonista do seu saber e, ao mesmo tempo, do seu futuro, o autor destaca a importância da interação e da troca de informações nesses espaços, que acabam por gerar conhecimento quando mediados racionalmente pelo professor, pois se tornam um facilitador da aprendizagem.

> As tecnologias digitais de informação e comunicação facilitam a aprendizagem colaborativa, entre colegas próximos e distantes. É cada vez mais importante a comunicação entre pares, entre iguais, dos alunos entre si, trocando informações, participando de atividades em conjunto, resolvendo desafios, realizando projetos, avaliando-se mutuamente. Fora da escola acontece o mesmo, na comunicação entre grupos, nas redes sociais, que compartilham interesses, vivências, pesquisas, aprendizagens. A educação se horizontaliza e se expressa em múltiplas interações grupais e personalizadas (Moran, 2018, p. 11).

Essa horizontalidade da aprendizagem ocorre porque há uma mescla de mundos, no qual “o processo de ensinar e aprender acontece numa interligação simbiótica, profunda, constante entre o que chamamos mundo físico e mundo digital. Não são dois mundos ou espaços, mas um espaço estendido, uma sala de aula ampliada – que se mescla, hibridiza constantemente” (Moran, 2015a, p. 16). Desse modo, cabe ao professor adentrar nesse universo, comunicando-se tanto presencialmente quanto digitalmente. Nesse contexto, insere-se o ensino híbrido, ou *blended*, na modalidade Sala de Aula Invertida como uma das metodologias ativas de aprendizado que busca tornar o aluno construtor autônomo do seu próprio saber.

1.2 ENSINO HÍBRIDO

A palavra “híbrido” remete imediatamente a dois ou mais elementos mesclados entre si, como, por exemplo, na biologia, em que híbrido significa que houve o cruzamento de duas espécies diferentes para gerar uma terceira espécie. Pode-se notar também o uso do termo atualmente empregado na tecnologia automobilística para se referir aos carros considerados híbridos, ou seja, que possuem um motor elétrico e outro a combustível derivado do petróleo.

Da mesma forma, quando se refere ao ensino híbrido, estamos falando de uma modalidade de ensino que combina elementos presenciais e online na educação. Horn e Staker (2015, p. 25), em seus estudos, definem o ensino híbrido como "qualquer programa educacional formal no qual um estudante aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino on-line, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, o lugar, o caminho e/ou o ritmo". Contudo, há de se ressaltar, segundo os autores, que não se trata de inserir tecnologias digitais de informação e comunicação no processo de aprendizagem e promover um ensino *online*, pois essa modalidade de ensino é caracterizada como uma grande mudança instrucional do ensino basicamente presencial para aquele que utiliza instrução e conteúdo baseados na web.

Desse modo, é de fundamental importância que o educador saiba dominar tais recursos, e, por sua vez, os alunos aprendam a ter disciplina de estudo, de modo a estudarem tudo que é necessário para sua formação, não somente aquilo que o professor propõe como atividade. Quando o aluno atinge um nível de curiosidade em assimilar o conteúdo, buscando esse conhecimento, o êxito do ensino híbrido fica mais fácil de ser alcançado.

Para tal, é necessário, por se tratar de uma modalidade híbrida, que o aluno cumpra uma parte da carga horária em uma sala de aula física, dentro do ambiente escolar, sendo supervisionado pelo professor e recebendo as orientações adequadas. Isso possibilita uma troca de experiências, e, desse modo, constrói-se o saber por meio de uma prática pedagógica que envolve o uso de TDICs para resoluções de situações problemas, em espaços e tempos diferenciados do modelo tradicional, incentivando a participação autônoma e criativa do aluno como sujeito de seu próprio processo de aprendizagem.

Dessa forma, evidencia-se que há múltiplas formas de se aprender e que, ao pensar nas individualidades de cada aluno, uma vez que cada um possui modos diferentes de assimilação e aprendizado de conteúdo, o ensino híbrido se torna uma prática educacional eficiente, conforme ressaltam Bacich, Tanzi Neto e Trevisani, (2015, p. 27) ao conceituar o termo híbrido:

> Híbrido significa misturado, mesclado, *blended*. A educação sempre foi misturada, híbrida, sempre combinou vários espaços, tempos, atividades, metodologias, públicos. Esse processo, agora, com a mobilidade e a conectividade, é muito mais perceptível, amplo e profundo, é um ecossistema mais aberto e criativo. Podemos ensinar e aprender de inúmeras formas, em todos os momentos, em múltiplos espaços.

De modo algum trata-se de excluir o ensino presencial, até porque considera-se a escola e a sala de aula como um *locus* privilegiado de aprendizado e interação social que vai muito além do ato de ler, escrever e interpretar. Contudo, diante do avanço das TDICs e das vicissitudes impostas pelo tempo presente, como o caso da pandemia de covid-19, repensar o modo de ensino-aprendizado tradicional e buscar alternativas que tornem o processo mais dinâmico para o aprendizado é uma tarefa de todo educador.

Assim, não se trata de extinguir o ensino presencial, mas transformá-lo com o objetivo de sanar as necessidades de cada aluno, visto que cada um aprende de modo diferente. Bacich (2016, p. 679) afirma que "no modelo híbrido, a ideia é que educadores e estudantes ensinem e aprendam em tempos e locais variados". Assim, essa flexibilidade de local e tempo variado é o que caracteriza o ensino híbrido. Para tal, o professor se valerá da própria experiência docente para identificar as dificuldades dos alunos na disciplina lecionada e adotará o melhor modelo, seja individual ou em grupo, por dificuldades comuns, afinal "não existe uma forma única de aprender e a aprendizagem é um processo contínuo" (Bacich, 2016, p. 679).

Percebe-se, portanto, uma personalização do ensino, de modo a sanar as dúvidas que cada um traz consigo, evitando, assim, aquela massificação educacional que coloca todos os alunos em um mesmo estágio de aprendizado, ignorando suas necessidades específicas, conforme ressaltam os estudiosos desse modelo de ensino:

> Um projeto de personalização que realmente atenda aos estudantes requer que eles, junto com o professor, possam delinear seu processo de aprendizagem, selecionando recursos que mais se aproximam de sua melhor maneira de aprender. Aspectos como o ritmo, o tempo, o lugar e o modo como aprendem são relevantes quando se reflete sobre a personalização do ensino (Bacich; Tanzi Neto; Trevisani, 2015, p. 51).

Ao adotar o modelo de ensino híbrido não se faz necessário abandonar os modelos vigentes. Busca-se, na verdade, aliar aulas presenciais com aulas online, ou seja, a "[...] aprendizagem não está restrita às aulas do dia ou da semana, não está restrita às paredes da sala de aula, não está restrita à metodologia do professor, não está restrita ao ritmo da sala de aula" (Horn; Staker, 2015 *apud* Bacich, 2016, p. 48).

Daí a importância de uma personalização do processo educacional, no qual vários recursos didáticos serão utilizados no intuito de colaborar de maneira eficaz com o processo de aprendizagem do aluno. Personalizar é exatamente utilizar diferentes recursos didáticos na prática educacional.

> Personalizar não implica necessariamente utilizar a tecnologia. Professores de ensino básico têm feito isso por décadas com ferramentas bastante simples, como o livro. Quando um aluno não aprende um conteúdo lendo, o professor indica um problema ou uma leitura extra, e isso é uma forma de personalizar. (Bacich; Tanzi Neto; Trevisani, 2015, p. 95).

Fica evidente no fragmento acima o sentido de personalizar o processo de ensino-aprendizagem, que de modo algum se baseia no uso exclusivo de TDICs, mas de se valer de todos os recursos e ferramentas disponíveis para a aprendizagem do discente. Dessa forma, a intenção é olhar o aluno como indivíduo, acompanhar seu processo sem massificá-lo com a turma, analisar o que está conseguindo assimilar e aprender, percebendo suas dificuldades e lacunas e acompanhando seu processo evolutivo de aprendizagem. Desse modo, é essencial buscar meios visando alcançar a aprendizagem de todo o conteúdo, nem que para isso seja necessário propor uma atividade extra, dar novos exemplos, passar um vídeo ou explicar novamente o conteúdo. Nesse objetivo, o uso de recursos digitais e tecnológicos acabam por colaborar de modo eficaz quando bem usados pelo professor, pois essas opções têm um alcance maior para a atual geração de alunos.

Neste contexto, faz-se necessário repensar a condução das salas de aulas. Entre as alternativas para a personalização da aprendizagem está o modelo de rotações proposto pelo Instituto Clayton Christensen (Christensen, 2012). Nesse modelo, as turmas são divididas em grupos e revezam as atividades em horários outros estabelecidos e supervisionados pelo professor, com o intuito de tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico. Entre os modelos de rotação propostos para organização das salas de aula, destacam-se quatro, apresentados a seguir:

- Rotação por estações: os estudantes são organizados em grupos, e cada um desses grupos realiza uma tarefa de acordo com os objetivos do professor para a aula. Um dos grupos estará envolvido com propostas on-line que, de certa forma, independem do acompanhamento direto do professor. É importante notar a valorização de momentos em que os alunos possam trabalhar colaborativamente e momentos em que trabalhem individualmente. Após determinado tempo, previamente combinado com os estudantes, eles trocam de estações, e esse revezamento continua até que todos tenham passado por todas as atividades. As atividades planejadas não seguem uma ordem de realização, sendo de certo modo independentes, embora funcionem de maneira integrada para que, ao final da aula, todos tenham tido a oportunidade de ter acesso aos mesmos conteúdos.

- Laboratório rotacional: os estudantes usam o espaço da sala de aula e o laboratório de informática ou outro espaço com tablets ou computadores, pois o trabalho acontecerá de forma on-line. Assim, os alunos que forem direcionados ao laboratório trabalharão nos computadores individualmente, de maneira autônoma, para cumprir os objetivos fixados pelo professor, que estará, com outra parte da turma, realizando sua aula da maneira que considerar mais adequada. A proposta é semelhante ao modelo de rotação por estações, em que os alunos fazem essa rotação em sala de aula; porém, no laboratório rotacional, eles devem dirigir-se aos laboratórios, onde trabalharão individualmente nos computadores, sendo acompanhados por um professor tutor, uma espécie de professor auxiliar. Esse modelo é sugerido para potencializar o uso dos computadores em escolas que contam com laboratórios de informática.

- Sala de aula invertida: a teoria é estudada em casa, no formato on-line, por meio de leituras e vídeos, enquanto o espaço da sala de aula é utilizado para discussões, resolução de atividades, entre outras propostas. No entanto, podemos considerar algumas maneiras de aprimorar esse modelo, envolvendo a descoberta, a experimentação, como proposta inicial para os estudantes, ou seja, oferecer possibilidades de interação com o fenômeno antes do estudo da teoria. Segundo Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), diversos estudos têm demonstrado que os estudantes constroem sua visão sobre o mundo integrando as novas informações com as estruturas cognitivas já existentes para que possam, então, pensar criticamente sobre os conteúdos ensinados. Essas pesquisas também indicam que os alunos desenvolvem habilidades de pensamento crítico e têm uma melhor compreensão conceitual sobre uma ideia quando exploram um domínio primeiro e, a partir disso, têm contato com uma forma clássica de instrução, como uma palestra, um vídeo ou a leitura de um texto.

- Rotação individual: cada aluno tem uma lista das propostas que deve completar durante uma aula. Aspectos como avaliar para personalizar devem estar muito presentes nessa proposta, visto que a elaboração de um plano de rotação individual só faz sentido se tiver como foco o caminho a ser percorrido pelo estudante de acordo com suas dificuldades ou facilidades, identificadas em alguma avaliação inicial ou prévia. A diferença desse modelo para outros modelos de rotação é que os estudantes não rotacionam, necessariamente, por todas as modalidades ou estações propostas. Sua agenda diária é individual, customizada conforme as suas necessidades. Em algumas situações, o tempo de rotação é livre, variando de acordo com as necessidades dos estudantes. Em outras situações, pode não ocorrer rotação e, ainda, pode ser necessária a determinação de um tempo para o uso dos computadores disponíveis. O modo de condução dependerá das características do aluno e das opções feitas pelo professor para encaminhar a atividade (Bacich; Moran, 2015, p. 45-46).

Evidencia-se que existem diversos modos de aplicação do ensino híbrido nas escolas. Porém, todos necessitam de uma autonomia do aluno, conforme pensava Paulo Freire, de modo que os próprios sejam capazes de perceber suas habilidades e dificuldades, bem como desenvolvem uma disciplina na organização do tempo e do espaço para esse novo ambiente de aprendizagem, capaz de romper com as paredes da sala de aula com seu quadro de horário fixo. Ademais, exige-se por parte do professor um domínio das tecnologias digitais de comunicação e informação para fazer essa mediação com o conteúdo.

Desse modo, nas aulas presenciais, os estudantes receberiam o arcabouço teórico, trocariam experiências, apresentariam suas dificuldades e interagiriam com o professor e os colegas. Nos momentos online seria desenvolvida a autonomia no estudo pessoal, de maneira a ser sujeito da construção do conhecimento. Nessa perspectiva, a Sala de Aula Invertida é uma ferramenta interessante dentro do ensino híbrido, pois permite uma experiência de autonomia e protagonismo entre os alunos.

Moran (2013, p. 23) defende que "um dos modelos mais interessantes de ensinar hoje é o de concentrar no ambiente virtual o que é informação básica e deixar para a sala de aula as atividades mais criativas e supervisionadas". É o que se chama de Sala de Aula Invertida. Por meio dessa estratégia didática, o aluno desenvolve, além do protagonismo e da autonomia, conforme Bacich e Moran (2018), uma confiança, pois passa a enxergar o ensino da matemática como algo mais tranquilo, tornando-se apto a desenvolver questões-problemas e, consequentemente, mais preparado para o mercado de trabalho e para a vida, daí, portanto, a importância de se utilizar a Sala de Aula Invertida.

1.3 SALA DE AULA INVERTIDA

A Sala de Aula Invertida é uma modalidade de ensino híbrido que se vale da metodologia ativa para o processo de ensino-aprendizagem, proporcionando uma centralidade do aluno nesse processo e buscando fazer com que o aluno seja o protagonista do seu próprio conhecimento. Trata-se de uma metodologia pedagógica que instiga o aluno à autonomia.

Nessa metodologia, é possível ao professor disponibilizar conteúdos compartilhando-os em diversas mídias e recursos digitais, tais como aplicativos, blogs, grupos de WhatsApp, plataformas, entre outros, de modo que os alunos já tenham acesso ao que será trabalhado na sala de aula, a fim de construir uma maior interação e discussão dos conceitos a serem apresentados. Dessa forma, tais tecnologias se tornam um poderoso aliado no processo de ensino, conforme ressaltado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

> O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as (Brasil, 1997, p. 35).

Desse modo, a Sala de Aula Invertida, do termo em inglês *flipped classroom*, proporciona ao aluno a construção do conhecimento com seus erros e acertos a partir do uso de ferramentas digitais, cujas experiências são apresentadas nos encontros presenciais. Trata-se de uma metodologia que foi se desenvolvendo com o advento das TDICs e da inserção destas na sala de aula ao longo das transformações ocorridas nas últimas décadas.

Diante dessas transformações, faz-se necessário repensar o processo pedagógico de ensino-aprendizagem como um todo, mas principalmente o da matemática, que é tida como um dos componentes curriculares com maior índice de reprovação. Desse modo, todo o espaço da sala de aula e da escola, junto da ação do professor, precisam ser repensados à luz dessas transformações, pois nesses últimos anos "o mundo passou por profundas transformações, assim como as formas de produção e as relações humanas; contudo, o espaço escolar continua formatado para atender às demandas de uma sociedade que não existe mais. (Bacich; Tanzi Neto; Trevisani, 2015, p. 104).

Desse modo, buscando resolver essa defasagem das metodologias de ensino em relação às transformações ocorridas nas últimas décadas, foi feito um movimento pelo desenvolvimento das Metodologias Ativas no início da década de 1980, com objetivo de tornar o aluno ativo e autônomo na construção do seu conhecimento desde o início do processo de ensino-aprendizagem, para que pudesse estar preparado para corresponder às exigências desse novo tempo, marcado pelo desenvolvimento da tecnologia.

Sobre isso, destacam Mota e Rosa (2018, p. 262): "A aprendizagem significativa só é possível quando o aluno constrói o seu próprio conhecimento e para tal precisa estar mentalmente ativo. Quando os alunos estudam apenas para os momentos de avaliação, a aprendizagem corre o risco de ficar reduzida à memorização".

Dessa forma, para evitar essa aprendizagem de memorização que geralmente é fruto do método tradicional de aulas expositivas, no qual o professor é o transmissor do conhecimento e os alunos mero receptáculos, faz-se necessário reverter essa situação com as metodologias ativas. Uma aula em que há uma exposição metódica e maciça de conceitos abstratos faz com que o aluno perca o interesse e a rotule de chata, tendo, assim, pouca ou nenhuma eficácia na aprendizagem, principalmente porque diante de conceitos tão abstratos, os estudantes acabam por pensar que os conteúdos aprendidos não têm utilidade na vida prática do cotidiano de sua realidade concreta.

Há de se ter em conta que esses alunos são oriundos da era digital e que, para construir o conhecimento, precisam significar a aprendizagem, estabelecendo relações entre o conteúdo estudado e a realidade vivenciada. Nas metodologias ativas, como o ensino híbrido com a Sala de Aula Invertida, isso se torna possível, dado que, além do contato com o conteúdo, serão feitas interações digitais e com os colegas. De modo complementar, terão as questões problemas solucionadas junto ao professor em sala de aula, de modo a compreender e fixar os conceitos estudados previamente e mostrá-los aplicados na prática.

A presente pesquisa se baseia nas experiências relatadas por Jonathan Bergmann e Aaron Sams, professores de Química do estado do Colorado (EUA) na obra "Sala de Aula Invertida: Uma Metodologia Ativa de Aprendizagem (2016), um dos pioneiros a aplicarem as metodologias ativas do ensino híbrido na Sala de Aula Invertida para o ensino de química por volta dos anos de 2007-2008. Assim relatam o surgimento de tal prática pedagógica:

> No total conjunto de 37 anos de magistério, sempre nos sentimos frustrados com a incapacidade dos alunos de traduzir o conteúdo de nossas aulas em conhecimentos úteis, que lhes permitissem fazer o dever de casa. No entanto, um dia, Aaron teve uma ideia que mudaria nosso mundo. Uma observação simples: "O momento em que os alunos realmente precisam da minha presença física é quando empacam e carecem de ajuda individual. Não necessitam de mim pessoalmente ao lado deles, tagarelando um monte de coisas e informações; eles podem receber o conteúdo sozinhos." Foi quando ele fez a si mesmo a seguinte pergunta: "E se gravássemos todas as aulas, e se os alunos assistissem ao vídeo como 'dever de casa' e usássemos, então, todo o tempo em sala de aula para ajudá-los com os conceitos que não compreenderam?" Assim nasceu a sala de aula invertida (Bergmann; Sams, 2016, p. 4)

Desse modo, nasce uma nova concepção de ensino, que pode ser resumida da seguinte forma:

> Basicamente, o conceito de sala de aula invertida é o seguinte: o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula (Bergmann; Sams, 2016, p. 11).

Os autores comparam o modelo tradicional no qual os alunos escutam a explicação do professor na sala de aula e fazem a atividade proposta em casa, chegando na próxima aula com dúvidas e dificuldades. No modelo proposto por Bergmann e Sams (2016) de Sala de Aula Invertida, os alunos recebem o material, tiram as dúvidas e, depois, fazem as atividades orientadas e supervisionadas pelo professor em sala de aula. O ensino fica mais dinâmico e as relações são mais amistosas e interativas, pois a ideia é que o aluno se torne o centro do processo e se interesse com mais facilidade pela própria construção do conhecimento. Essa diferenciação fica em evidência quando se compara as duas estruturas de sala de aula, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Comparativo entre sala de aula tradicional e Sala de Aula Invertida

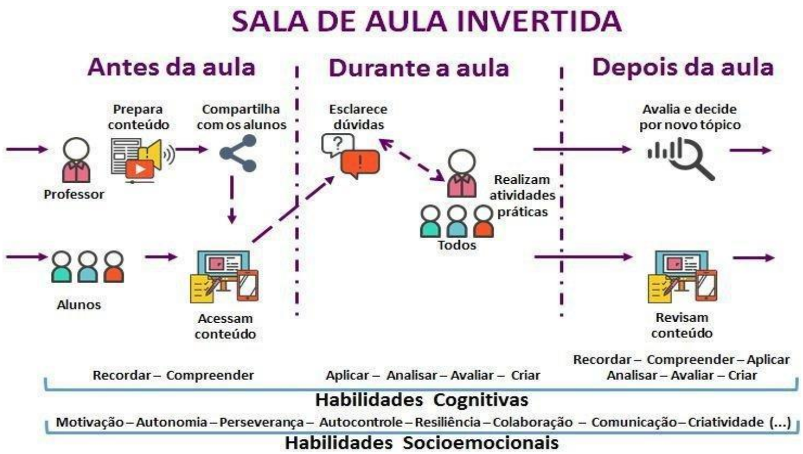
	(Sala de aula)	(Outros espaços)
(Modelo Tradicional)	- Transmissão de informação e conhecimento - Professor palestrante - Estudante passivo	- Exercícios - Projetos - Trabalhos - Solução de problemas
(Sala de Aula Invertida)	- Debates - Projetos - Simulação - Trabalhos em grupos - Solução de problemas - Estudante ativo	- Leituras - Vídeos - Pesquisas - Busca de materiais alternativos

Fonte: Internet[1].

Observa-se na figura acima que o processo de ensino-aprendizado da Sala de Aula Invertida é justamente o contrário, daí o nome “invertida”, pois o aluno já terá acesso prévio ao material da aula e o contato em sala com os demais alunos e o professor será para interação e resolução das tarefas mais complexas, bem como para verificação do aprendizado.

Neste contexto, o desenvolvimento das habilidades cognitivas é realocado para recordar e compreender os assuntos antes da aula; aplicar, analisar, avaliar e criar durante a aula, com a mediação do professor e a interação com os outros alunos; e, por fim, desenvolver criticidade, autonomia, criatividade, entre outras habilidades emocionais, conforme Figura 2.

Figura 2 – Esquema de Sala de Aula Invertida



Fonte: Schmitz (2016, p. 67).

[1] Disponível em: [-Comparativo entre os modelos tradicionais de ensino e a sala de aula... | Download Scientific Diagram (researchgate.net)]

Como demonstrado por Bacich e Moran (2015), percebe-se que, quando o aluno tem acesso ao conteúdo antes da aula, a aprendizagem ocorre de modo mais eficaz, pois a apresentação do material será feita de modo virtual, deixando o ambiente da sala de aula para a resolução de problemas e a retirada de dúvidas. Dessa forma, acontece uma troca da função da sala de aula, que se torna um espaço para a explicação de conceitos, deixando a resolução dos exercícios e demais problemas para casa. Assim, destaca Bacich e Moran (2015, p. 2):

> Diversos estudos têm demonstrado que os estudantes constroem sua visão sobre o mundo ativando conhecimentos prévios e integrando as novas informações com as estruturas cognitivas já existentes para que possam, então, pensar criticamente sobre os conteúdos ensinados. Essas pesquisas também indicam que os alunos desenvolvem habilidades de pensamento crítico e têm uma melhor compreensão conceitual sobre uma ideia quando exploram um domínio primeiro e, a partir disso, têm contato com uma forma clássica de instrução, como uma palestra, um vídeo ou a leitura de um texto.

A inversão da ordem também é salientada por Valente (2018, p. 29), que pontua: “na Sala de Aula Invertida, o aluno estuda previamente, e a aula torna-se o lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas. O professor trabalha as dificuldades dos alunos”. Conforme ressalta Teixeira (2013), ainda que o projeto existisse faz décadas, somente nos últimos anos é que as TDICs se tornaram mais acessíveis e praticáveis, podendo, portanto, ser empregadas na sala de aula, inclusive nas escolas públicas. Contudo, para que isso possa acontecer, é necessário repensar o papel do professor e do aluno no processo de ensino-aprendizagem, pois Moran (2015a) afirma categoricamente:

> Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias nas quais eles se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que se tenham de tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (Moran, 2015a, p. 17).

Desse modo, faz-se necessário da parte do educador um domínio do uso das tecnologias digitais da informação e comunicação, daí decorre a necessidade de estar sempre se atualizando e reciclando conhecimentos, afinal o processo de aprendizagem é para todos. De nada adianta ter recursos tecnológicos nas escolas se o método utilizado não atender mais às necessidades e aspirações das novas gerações.

Essa descentralização do processo de ensino-aprendizado do professor para o aluno de modo algum desmerece ou desprestigia o profissional da educação, mas confere a ele o papel de mediador na construção do conhecimento do aluno, conforme ressaltou Thadei ao enfatizar que:

> [...] é função do professor mediador orientar o aluno em suas escolhas, ajudando-o a aproximar-se de seus objetivos e interesses, a reconhecer suas capacidades existentes e as que deverão ser desenvolvidas, a identificar os recursos materiais e humanos necessários à concretização dos seus objetivos e a alinhar seus interesses e objetivos a outros semelhantes no grupo, suscitando o trabalho colaborativo. Também é função do professor mediador ajudar o aluno a gerir o tempo e o espaço de trabalho, conforme seus objetivos e condições para atingi-los (Thadei, 2018, p. 100-101).

Dessa forma, o professor contribui para que o aprendizado seja autêntico e não uma mera memorização em vista de alguma avaliação. Tomando-se por base o uso de metodologias ativas nesse processo, o professor passa do detentor do conhecimento e transmissor para mediador, ou seja, torna-se responsável por articular e organizar as atividades didáticas em vista do desenvolvimento das habilidades cognitivas e emocionais do educando. Conforme descrito nos PCNs:

> Numa perspectiva de trabalho em que se considere a criança como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher o(s) problema(s) que possibilita(m) a construção de conceitos/procedimentos e alimentar o processo de resolução, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir (Brasil, 1997, p. 30-31).

Segundo Schneider (2015, p. 71), é de suma importância "aceitar e reconhecer que, em sala de aula, temos alunos com facilidade em determinados conteúdos e dificuldades em outros; assim, cada um tem seu ritmo, por isso a importância de personalizar". Contudo, personalizar não é traçar um plano individual para cada aluno.

Conforme Lima e Moura (2015, p. 98), "utilizar todas as ferramentas disponíveis para garantir que os estudantes tenham aprendido. Se um aluno aprende com um vídeo, outro pode aprender mais com uma leitura", ou seja, significa que o que o aluno está aprendendo deve ser considerado, junto às suas necessidades e dificuldades bem como evoluções, isto é, o estudante ser o centro do ensino. E essa é exatamente uma das características do uso da Sala de Aula Invertida: não existe apenas um modelo a ser adotado. Diante desse método, abre-se um leque de recursos que podem ser selecionados e explorados pelo professor, optando pelos que melhor se adequam à sua realidade de ensino.

Portanto, segundo o relatório *Flipped Classroom Field Guide* (2014) conforme apresenta Valente (2018, p. 30), as normas basilares para uma sala de aula invertida são:

> 1. As atividades em sala de aula devem envolver uma quantidade significativa de questionamento, resolução de problemas e de outras atividades de aprendizagem ativa, obrigando o aluno a recuperar, aplicar e ampliar o material aprendido on-line.
> 2. Os alunos devem receber feedback imediatamente após a realização das atividades presenciais.
> 3. Os alunos devem ser incentivados a participar das atividades on-line e das presenciais, sendo que elas são computadas na avaliação formal do aluno, ou seja, valem nota.
> 4. Tanto o material a ser utilizado on-line quanto os ambientes de aprendizagem em sala de aula devem ser altamente estruturados e bem planejados.

Ao se orientar por esses passos, há de se ter uma Sala de Aula Invertida, pois, como ressaltam Bergmann e Sams (2016), não há um modelo único de Sala de Aula Invertida, de modo que o professor pode mediar diversas atividades e experimentos práticos, bem como trabalhar distintas tarefas ao mesmo tempo, tanto individual quanto em grupos, a depender da intencionalidade ao passar aquele conteúdo e da realidade de cada turma. Independentemente da forma, inverter a sala de aula está intimamente relacionada ao que se faz com o estudo prévio passado através das metodologias ativas.

1.4 TRABALHOS CORRELATOS

Com o objetivo de aprimorar o trabalho, foi realizada uma busca no Banco de Dissertação do PROFMAT, utilizando a palavra-chave: Sala de Aula Invertida. Foram encontrados 21 registros. Posteriormente, na fase final de revisão dessa dissertação foram encontrados 24 registros. Dentre eles, verificou-se que 12 tratavam especificamente de algum conteúdo matemático aplicável ao Ensino Fundamental ou Ensino Médio, como segue no Quadro 1.

Quadro 1 – Trabalhos sobre Sala de Aula Invertida

TÍTULO	INSTITUIÇÃO	ANO	TIPO	AUTOR
UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DE MOIVRE PARA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS POR MEIO DA SALA INVERTIDA	UFAM	2018	DISSERTAÇÃO	HERMÍNIO EDSON MAIA SANTANA
SALA DE AULA INVERTIDA: UMA PROPOSTA PARA O	UENF	2019	DISSERTAÇÃO	JOSIE PACHECO DE VASCONCELLOS SOUZA

ENSINO DE PROBABILIDADE				
TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA COM O SOFTWARE GEOGEBRA SOB O MODELO DE SALA DE AULA INVERTIDA	UESB	2019	DISSERTAÇÃO	JÚLIO MAX XAVIER DA ROCHA
O ENSINO DO CILINDRO E DA PIRÂMIDE ATRAVÉS DA SALA DE AULA INVERTIDA	UFAM	2019	DISSERTAÇÃO	ANSELMO LUÍS CORRÊA DA SILVA
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATRIZES UTILIZANDO A METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA	UFFS	2020	DISSERTAÇÃO	LUCIANA SACHINI
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM BASE NA SALA DE AULA INVERTIDA	UFSM	2020	DISSERTAÇÃO	LUCIANA ZANCHETTIN
A SALA DE AULA INVERTIDA COMO POSSIBILIDADE DE APROPRIAÇÃO CONCEITUAL DA FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU NO 9º ANO: UMA PROPOSTA PARA AS ESCOLAS MUNICIPAIS DE TERESINA	UESPI	2020	DISSERTAÇÃO	GUSTAVO GUIMARÃES BEZERRA
SALA DE AULA INVERTIDA USANDO O GOOGLE SALA DE AULA: UMA APLICAÇÃO NO ENSINO DE DIVISIBILIDADE DOS NÚMEROS NATURAIS.	UFRB	2020	DISSERTAÇÃO	LUCIANA SEDRAZ SILVA

SALA DE AULA INVERTIDA EM TEMPOS DE PANDEMIA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DOS PRINCÍPIOS MULTIPLICATIVO E ADITIVO	UENF	2020	DISSERTAÇÃO	DANIELA ALONSO BOTELHO
SALA DE AULA INVERTIDA ADAPTADA AO ENSINO REMOTO: UMA PROPOSTA DE ENSINO HÍBRIDO APLICADO À ANÁLISE COMBINATÓRIA	UENF	2020	DISSERTAÇÃO	BRUNNA SEADI LIMA MARQUES
METODOLOGIAS ATIVAS: A SALA DE AULA INVERTIDA APLICADA AO ENSINO DE TRIGONOMETRIA	UFRN	2021	DISSERTAÇÃO	ROSANGELA ALVES DE AQUINO BARROS
SALA DE AULA INVERTIDA INTEGRADA À APRENDIZAGEM POR PARES: UMA PROPOSTA ATIVA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA	UFCG	2021	DISSERTAÇÃO	SUENIA DA SILVA RODRIGUES

Fonte: Dados da BDTD/PROFMAT.

Em suma, os trabalhos tratam da aplicabilidade da Sala de Aula Invertida, e todos sinalizam que a modalidade proposta é capaz de contribuir de forma significativa para o processo de ensino aprendizagem dos sujeitos envolvidos. Após uma análise nas pesquisas mencionadas, conclui-se que algumas ideias estão de acordo com as produzidas neste trabalho, entretanto diferem-se pela abordagem da modalidade de sala de invertida, pelo ambiente de aprendizagem, pela proposta didática, pelo tema e/ou pelo público-alvo. Segue abaixo as principais.

Os trabalhos de Hermínio Edson Maia Santana, Josie Pacheco de Vasconcellos Souza, Júlio Max Xavier da Rocha, Anselmo Luís Corrêa da Silva e Luciana Schini não mencionam o ensino remoto ou a pandemia covid-19, tendo em vista as datas de publicação e os acontecimentos dos fatos.

Josie Pacheco de Vasconcellos Souza teve como objetivo a implementação da metodologia Sala de Aula Invertida em uma turma da 3ª série do Ensino Médio no ensino de Probabilidade. A relação com este trabalho consiste no planejamento de atividades que foram executadas em duas etapas: uma individual e a outra em grupo e também no fato da professora ter se valido de videoaula de terceiros.

Júlio Max Xavier da Rocha e Anselmo Luís Corrêa da Silva utilizaram o software Geogebra e obtiveram êxito em suas buscas, embora Anselmo relate que uma de suas dificuldades foi o curto espaço de tempo devido ao fato de não ser o professor da turma. Ele ainda aplicou duas avaliações para diagnosticar o nível da turma, divididas entre o início da metodologia e outra ao final.

Luciana Sachini, embora traga o tema de matrizes que assim como progressões aritméticas e geométricas é retratado na segunda série do Ensino Médio, difere-se do que é proposto nesta dissertação principalmente por dois fatores: a utilização de um blog para postagem das atividades e a produção de suas próprias videoaulas (o que foi inviável em nosso caso, tendo em vista o contexto de pandemia covid-19 e a ação a curto prazo de recuperar os alunos para participarem mais ativamente das aulas).

Já os trabalhos de Luciana Zanchettin, Gustavo Guimarães Bezerra, Luciana Sedraz Silva, Daniela Alonso Botelho, Brunna Seadi Lima Marques, Rosangela Alves de Aquino Barros e Suênia da Silva Rodrigues assemelham-se inicialmente pela presença do ensino remoto.

A experimentação de Luciana Sedraz Silva assim como Luciana Zanchetin trouxe o tema de matrizes. No entanto, durante seu trabalho as aulas foram suspensas devido a pandemia covid-19, o que impossibilitou a mesma de aplicar a totalidade de suas propostas, finalizando sua pesquisa com um jogo criado pelos discentes.

Gustavo Guimarães Bezerra trouxe a proposta para o Ensino Fundamental, o que incentiva o protagonismo dos alunos nessa faixa etária também, além de oferecer ao professor de Ensino Médio uma continuidade da modalidade.

Daniela Alonso Botelho teve a participação de 7 alunos na sua experimentação, o que corrobora a aplicabilidade em turmas com menor quantidade de alunos, tendo em vista o resultado encontrado por ela de que a metodologia implantada pode contribuir, de forma significativa, para o processo de ensino-aprendizagem de seus alunos.

Por fim, Suênia da Silva Rodrigues realizou a sua proposta em dois grupos: um através da SAI e outro no ensino tradicional. Ao final, concluiu através de seus questionários de

Avaliação da Metodologia Aplicada e Comparativos dos Resultados Encontrados, que a SAI possibilitou uma aprendizagem muito mais envolvente, prática e significativa.

Observa-se no quadro ainda que, dentro do Programa PROFMAT (único a ser analisado), não foram publicadas dissertações sobre essa proposta pela Universidade Federal do Espírito Santo, bem como especificamente sobre SAI no conteúdo Progressões Aritméticas e Geométricas a nível nacional, o que corrobora a relevância deste estudo no processo de aprendizado do discente, além de estimular os colegas docentes a conhecerem a modalidade e utilizarem-na em suas práticas. Dentro dessa perspectiva, após as análises e considerando os conteúdos abordados no ano de escolaridade escolhido para aplicação dos procedimentos, buscou-se aplicar a inversão no conteúdo matemático Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas.

CAPÍTULO 2: PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

As Progressões Aritméticas e Geométricas são conceitos fundamentais na matemática que servem como ferramentas essenciais para modelar e resolver problemas do mundo real, fornecendo insights valiosos para a tomada de decisões e a compreensão de padrões numéricos.

Foram estudadas desde povos muito antigos, como os babilônicos e egípcios que observaram um padrão nos períodos em que ocorriam a enchente do rio para saber quando poderiam plantar na época certa e garantir seus alimentos, há mais de 5 mil anos; até seu auxílio na construção das tabelas de logaritmos, já em 1614, e a descoberta da fórmula da soma dos termos da P.A. por Carl Friedrich Gauss, em 1787 (Scomparim *et al,* 2021).

Atualmente, com o apoio de técnicas, atividades e meios tecnológicos, podemos aplicar esses conceitos em várias áreas da vida cotidiana, como sequências numéricas, cálculos financeiros, ciências naturais, física, engenharia, ciência da computação e muito mais.

2.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Definição 1

Sejam a e r dois números reais. Chama-se Progressão Aritmética (PA) a sequência (a_n) tal que:

$a_1 = a$

$a_{n+1} = a_n + r, \ \forall n \in N^*$, $\mathbb{N}^*$ = **{números naturais incluindo o zero}.**

Ou seja, $(a_n) = (a, a+r, a+2r, a+3r, \cdots)$.

O número real r chama-se razão da PA. Segue da definição que: $r = a_{n+1} - a_n, \forall n \in N^*$.

Assim, $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$

Classificação

Se (a_n) é uma PA, então:

- (a_n) é estritamente crescente se $r > 0$
- (a_n) é estritamente decrescente se $r < 0$
- (a_n) é constante se $r = 0$

2.1.1 Termo Geral de uma PA

Seja uma PA $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$. Pela definição de PA, termos que:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

Essa última expressão traduz o enésimo termo da PA em função do primeiro termo e da razão. A fórmula é chamada de **expressão do termo geral** e pode também ser generalizada da seguinte forma:

Sendo a_j o termo de ordem j, (j-ésimo termo) da PA, e a_k o termo de ordem k (k-ésimo termo) da PA, pode-se escrever a seguinte fórmula genérica: $a_j = a_k + (j - k)r$.

Exemplo 1

Determinar o termo geral da sequência (8, 15, 22, 29, 36, ...)

Solução:

Nessa sequência, cada um dos termos, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com 7. Nesse caso, essa sequência é uma PA de razão r = 7 e o primeiro termo $a_1 = 8$. Como o termo geral de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos:

$a_n = 8 + (n-1).7$

$a_n = 8 + 7n - 7$

$a_n = 1 + 7n$

Portanto, o termo geral dessa sequência é $a_n = 1 + 7n$, $\forall n \in N^*$.

Exemplo 2

Camila estabeleceu que sempre nadaria 400 metros a mais que no treino da semana anterior. Sabe-se que, na segunda semana, ela nadou 1100 m. Quantos metros nadará na décima semana?

Solução:

Como a cada semana ela treina 400 m a mais que no dia anterior, temos:

$a_1 = a_2 - 400 = 1100 - 400 = 700$.

A sequência dos percursos de Camila é uma PA de razão r = 400 e $a_2 = 1100$.

Queremos obter o a_{10}. Utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{10} = 700 + (10-1).400$

$a_{10} = 700 + 9 . 400$

$a_{10} = 700 + 3600$

$a_{10} = 4300$

Portanto, Camila nadará 4300 m na décima semana.

2.1.2 Propriedades de uma PA

Termos Equidistantes dos Extremos

Definição 2

Considere os n primeiros termos de uma PA. Dois termos são chamados equidistantes dos extremos se o número de termos que precede um deles é igual ao número que sucede o outro.

$$\underbrace{a_1 \dots}_{p-1} a_p , \dots , a_k \underbrace{\dots}_{n-k} a_n .$$

Nota: Se a_p e a_k são termos equidistantes em uma PA, então: $p-1 = n-k \Longrightarrow p+k = 1+n$.

Propriedade 1

A soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, isto é.

$$a_p + a_k = a_1 + a_n .$$

De fato,

$$a_p = a_1 + (p-1)r$$

$$a_k = a_1 + (k-1)r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

daí,

$$a_p + a_k = 2a_1 + (p+k-2)r$$

$$a_p + a_k = 2a_1 + (n+1-2)r$$

$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n-1)r$$

$$a_p + a_k = a_1 + a_n .$$

Propriedade 2

Cada termo de uma PA é a média aritmética entre o termo anterior e posterior.

Demonstração:

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, \cdots)$.

Então:

$$a_{p-1} = a_1 + (p-1-1)r = a_1 + (p-2)r$$

$$a_{p+1} = a_1 + (p+1-1)r = a_1 + p \cdot r$$

$$a_{p-1} + a_{p+1} = 2_{a1} + (2p-2)r = 2a_1 + 2(p-1)r$$

$$\frac{a_{p-1} + a_{p+1}}{2} = a_1 + (p-1)r = a_p\ .$$

Isto é,

$$a_p = \frac{a_{p-1} + a_{p+1}}{2}$$

2.1.3 Soma dos primeiros *n* termos de uma PA

Tendo em vista que, somando termos equidistantes, o resultado será o mesmo, podemos tomar uma PA de n termos e somar cada termo com sua extremidade. Assim, dada a PA (a_1, a_2, $\cdots$, a_{p-1}, a_p). a soma de seus termos é $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} + a_p$

Agora, a partir da mesma soma, mas com os termos invertidos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} + a_p$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Observe que os ospostos já estão um abaixo do outro, mas nós duplicaremos o número de termos ao somarmos essas duas expressões. Portanto, obetermos o dobro de uma soma:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como todas as somas acima são iguais à soma dos extremos (Propriedade 1), faremos essa substituição e reescreveremos a soma como uma multiplicação:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = n\ .\ (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2},$$

que é a fórmula da soma dos termos de uma PA.

Exemplo 3

Vamos considerar o seguinte problema: Achar a soma dos 100 primeiros termos da sequência (1, 2, 3, ...).

Solução:

Já sabemos que o 100º termo da PA é100. Usando a fórmula para calcular a soma dos termos de uma PA, teremos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

$$S_n = \frac{(1+100)\ .\ 100}{2} = \frac{101\ .\ 100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

2.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Definição 1

Sejam a e q dois números reais não nulos. Chama-se Progressão Geométrica (P.G.) a sequência (a_n) tal que

$a_1 = a;$

$a_{n+1} = a_n\ .\ q\ ,\ \forall n \in N^*$, $\mathbf{N^*}$ **= {números naturais incluindo o zero}.**

Portanto, $(a_n) = (a\ ,\ aq\ ,\ aq^2,\ aq^3, \cdots)$.

O número real q é chamado de *razão* da PG.

Nota: a progressão geométrica definida acima é infinita. Com pequena modificação estão definidas PG finitas com n termos: $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$.

Segue da Definição 1 que se $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, então

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \forall n \in N^*.$$

Assim,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$

Classificação das P.G´s

Se (a_n) é uma P.G., então:

- (a_n) é crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in N^*$. As condições para a P.G. ser crescente são:

$$\text{(i) } a_1 > 0 \text{ e } q > 1$$

ou

$$\text{(ii) } a_1 < 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1$$

Exemplo 1

a) $(a_n) = (2, 10, 50, \cdots)$ temos que $a_1 = 2$; $q = 5$

b) $(a_n) = (-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \cdots)$ temos que $a_1 = -3$; $q = \frac{1}{2}$

- (a_n) é decrescente se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in N^*$. As condições para um P.G. ser decrescente são:

$$\text{(i) } a_1 > 0 \quad e \quad 0 < q < 1$$
$$\text{ou}$$
$$\text{(ii) } a_1 < 0 \quad e \quad q > 1$$

Exemplo 2

a) $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots)$ temos que $a_1 = 1$; $q = \frac{1}{2}$

b) $(a_n) = (-2, -4, -8, \cdots)$ temos que $a_1 = -2$; $q = 2$

- (a_n) é constante se $a_1 \neq 0 \;\; e \;\; q = 1$.

Exemplo 3

a) $(a_n) = (2, 2, 2, \cdots)$

- (a_n) é singular se $a_1 = 0$ ou $q = 0$.

Exemplo 4

a) $(a_n) = (0, 0, 0, \cdots)$ temos que $a_1 = 0$; q = qualquer

b) $(a_n) = (3, 0, 0, \cdots)$ temos que $a_1 = 3$; $q = 0$

- (a_n) é alternante se $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Exemplo 5

a) $(a_n) = (2, -4, 8, -16, \cdots)$, $a_1 = 2$ e $q = -2$.

2.2.1 Termo Geral de uma P.G.

Sabemos que, pela definição, $(a_n) = (a, aq, aq^2, \cdots)$. Daí, $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$.

A expressão acima é denominada *termo geral de uma P.G.*

Exemplo 6

Determinar o oitavo termo da PG (- 3, 18, - 108, ...).

Solução:

Primeiro devemos encontrar a razão da PG:

$q = -\dfrac{108}{18} = -6.$

Depois, basta aplicar a fórmula $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$ para n= 8, $a_1 = -3$ e $q = -6$.

$a_8 = -3 \,.\, (-6)^{8-1}$

$a_8 = -3 \,.\, (-6)^7$

$a_8 = -3. (-279936) = 839808$

Logo, o oitavo termo dessa PG é 839808.

Exemplo 7

Uma população de bactérias dobra seu número a cada 30 minutos. Considerando que o processo se inicia com uma única bactéria, quantas existirão após 4 horas e 30 minutos?

Solução:

Sabemos que a razão q dessa PG é 2, pois a quantidade de bactérias dobra a cada período de 30 minutos e que a_1=1, pois no tempo inicial (t_0) temos apenas 1 bactéria.. Após 4 horas e 30 minutos, considerando $t_0 = 0$ minutos, o número de bactérias a ser encontrado é o décimo termo dessa PG. Assim:

$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$

$a_{10} = 1.2^{10-1}$

$a_{10} = 1.2^9 = 2^9 = 512$

Portanto, existirão 512 bactérias após 4 horas e 30 minutos.

2.2.2 Propriedades de uma P.G.

Propriedade 1 (Termos Equidistantes)

O produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos, ou seja, se $p + k = n + 1$ temos $a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_n$

De fato, suponhamos $p + k = n + 1$. Então, sejam

$$a_p = a_1 \cdot q^{p-1}$$

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Fazendo $a_p \cdot a_k$ temos:

$$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{p+k-2} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n+1-2} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot a_n$$

Propriedade 2 (Média Geométrica)

Cada termo de uma P.G., a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo anterior e o posterior.

Seja $(a_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, \cdots)$. Vamos provar que $a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$.

De fato, sejam:

$$a_{p-1} = a_1 \cdot q^{p-1-1}$$

$$a_{p+1} = a_1 \cdot q^{p+1-1}$$

$$a_p = a_1 \cdot q^{p-1}$$

Fazendo $a_{p-1} \cdot a_{p+1}$ temos:

$$a_{p-1} \cdot a_{p+1} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{2p-2} = a_1 \cdot q^{p-1} \cdot a_1 \cdot q^{p-1} = a_p^2 .$$

Logo,

$$a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1} .$$

2.2.3 Produto de *n* termos de uma P.G.

Teorema 1

Se (a_n) é uma P.G. e P_n é produto dos n primeiros termos, então $|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.

Demonstração:

De fato, sejam

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)(a_2 \cdot a_{n-1}) \cdots (a_n \cdot a_1) = (a_1 \cdot a_n)^n \text{ (propriedade 1).}$$

Daí,

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} .$$

2.2.4 Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Teorema 2

Se (a_n) é uma P.G. de razão q e S_n a soma dos n primeiros termos de (a_n), então:

$S_n = n \cdot a_1$, se $q = 1$

$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, se $q \neq 1$

Demonstração

De fato, se $q = 1$ então $S_n = n \cdot a_1$.

Vamos considerar o caso $q \neq 1$.

(i) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

(ii) $S_n q = a_1 q + a_2 q + \cdots + a_{n-1} q + a_n q$

Subtraindo (i) de (ii), temos:

$S_n q - S_n = a_n \cdot q - a_1$

$S_n(q-1) = a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1 = a_1 q^n - a_1$

$S_n = \dfrac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$.

Limite da Soma

O Limite da Soma dos Infinitos Termos de uma P.G.

Teorema 3

Seja (a_n) uma P.G. de razão q tal que $-1 < q < 1$. A soma S dos infinitos termos dessa P.G. existe, é finita e igual a $\lim_{n\to\infty} S = \frac{a_1}{1-q}$

Demonstração:

De fato, como $-1 < q < 1$ então:

$$\lim_{n\to\infty} (q^n) = 0$$

Logo,

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-0)}{1-q}.$$

Portanto:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

CAPÍTULO 3: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E RESULTADOS

Neste capítulo é relatada a maneira como foi realizada a pesquisa qualitativa – que se deu de forma exploratória, com o objetivo de aprimorar ideias, utilizando uma abordagem por meio de intervenção pedagógica –, considerando o cenário, os sujeitos envolvidos na investigação e os instrumentos avaliativos e de coleta de dados.

Intervenções pedagógicas, na definição de Damiani *et al.* (2013), são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências que se destinam a alcançar avanços nos processos de aprendizagem dos sujeitos envolvidos, bem como avaliar os efeitos dessas interferências. Os autores complementam ainda que intervenções pedagógicas podem ser consideradas como pesquisas, devido ao caráter aplicado, pois objetivam contribuir para a solução de problemas práticos.

A aplicação ocorreu em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, inicialmente com um grupo 15 alunos (1 aluno foi transferido da unidade escolar antes da conclusão da experimentação), do Colégio Estadual João Guimarães (figura 3), em Italva, noroeste do estado do Rio de Janeiro. As aulas são no turno matutino: quinta-feira, 7h às 8h40; e sexta-feira, 8h40 às 10h20. A ideia principal consistiu na aplicação da metodologia Sala de Aula Invertida durante o período intenso da pandemia de covid-19, por meio da plataforma Google Classroom e de aulas interativas através do Google Meet, num primeiro instante para resgatar o estudante que não estava interessado em participar das aulas naquele momento, tendo em vista a grande dificuldade de "frequência" que a escola enfrentava à época; e, posteriormente para possibilitar uma metodologia que pudesse oferecer ao aluno mais protagonismo na construção de seu conhecimento.

Figura 3 – Fachada do Colégio Estadual João Guimarães

Fonte: Folha de Italva - RJ

A experimentação ocorreria no segundo bimestre do ano letivo, e as atividades propostas deveriam contemplar o currículo da Secretaria do Estado de Educação do Rio de Janeiro. Isso, somado à relevância do conteúdo e ao que já foi discutido nos trabalhos relacionados, fez com que fosse definido o tema Progressões Aritméticas e Geométricas.

Optou-se, nesta dissertação, por utilizar videoaulas de terceiros. De acordo com Bergman e Sams (2019), fazer uso de vídeos produzidos por outros professores pode ser uma escolha melhor do que produzir os próprios vídeos.

Foram estabelecidos alguns critérios de escolha das videoaulas, tais como: o conteúdo não possuir nenhum erro conceitual e ter foco definido e uma apresentação clara e organizada, que fosse apresentada com uma metodologia de fácil compreensão e que tivessem um curto período de duração, de forma que não se tornassem cansativas.

Após uma longa procura e análise, chegou-se à conclusão de que os vídeos do Professor Daniel Ferretto, conhecido por "Professor Ferretto", disponibilizados na página https://www.youtube.com/user/professorferretto, possuem uma boa didática, com demonstrações e aplicações do conteúdo no dia a dia, o que tornaria mais compreensível, por parte do discente, a assimilação do conteúdo.

Os exercícios contemplados pelos alunos foram elaborados para serem feitos em duas etapas: individual, chamada nesta pesquisa de Formulários; e Atividades em Grupo, levando em conta que "a comunicação dos alunos entre si torna-se cada vez mais importante e eficaz, seja trocando informações, participando de atividades em grupo, resolvendo desafios ou avaliando-se mutuamente" (Moran, 2015). Para os Formulários, privilegiou-se questões de fixação do conteúdo abordado na videoaula, deixando as atividades mais complexas para serem realizadas em grupo.

O estudo foi dividido em três partes:

i) aula inicial, com o objetivo de apresentar aos estudantes a proposta da experimentação da metodologia colaborativa Sala de Aula Invertida (SAI) no ensino de Progressões Aritméticas e Geométricas por meio da ferramenta Google Sala de Aula;

ii) realização da sequência didática, desenvolvida em cinco semanas, tanto nas aulas online no Google Sala de Aula de forma síncrona (atividades em grupo, explicações, vídeos...) como nas atividades realizadas de forma assíncrona (visualização de videoaulas, anotações e resolução dos formulários);

iii) análise dos resultados da experimentação da metodologia colaborativa SAI utilizando a ferramenta Google Sala de Aula para o ensino de Progressões Aritméticas e Geométricas através de questionário.

A seguir, está descrita a programação detalhada das atividades realizadas em cada semana e a análise do questionário aplicado.

3.1 SEMANA I

Em um primeiro momento, assim que encerrada a explicação e as orientações de introdução ao método a ser utilizado (aula inicial), os alunos puderam acessar na plataforma Google Classroom duas videoaulas sobre o conteúdo da semana: Progressão Aritmética (PA): Introdução (aula 1 de 6), de aproximadamente 11 minutos, e Termo Geral (aula 2 de 6), de aproximadamente 19 minutos.

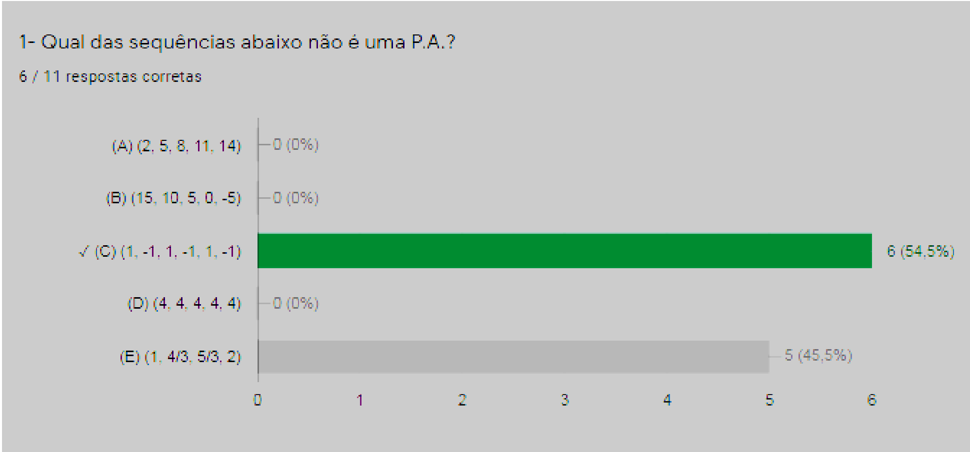
A orientação dada pelo professor foi que, ao assistir os vídeos, os estudantes anotassem todas as informações que considerassem relevantes bem como possíveis questionamentos que surgissem. Eles teriam 5 dias para isso. Faltando 2 dias para a realização do formulário I, foi postado uma mensagem no grupo reiterando a importância de assistirem aos vídeos antes de responderem às atividades.

Acabado o prazo, foi liberado, também na plataforma Google Classroom, o Formulário I, contendo 5 questões de múltipla escolha. Os alunos deveriam responder sem a interferência do professor e tiveram 1 dia para preenchê-lo, mas só foi permitido um envio, sem o recurso de editar as respostas. Antes, no entanto, após as devidas identificações, os alunos deveriam responder à pergunta: “Você assistiu aos vídeos recomendados? Em caso negativo, não avance no preenchimento do formulário! Assista às aulas e, em seguida, retorne para suas tarefas.” O professor decidiu colocar isso em todos os formulários para demonstrar ao aluno a seriedade e o comprometimento em assistir as aulas recomendadas. Três alunos, posteriormente, informaram que ainda não tinham assistido, mas que quando viram o lembrete seguiram a orientação.

No dia seguinte se deu a realização da aula I, através da ferramenta Google Meet, com duração de 1 hora e 40 minutos. A aula contou com 11 alunos presentes e iniciou-se fazendo o questionamento se havia alguma dúvida ou dificuldade no acesso/visualização das aulas disponibilizadas. Todos afirmaram que não houve dificuldade no acesso, e alguns alunos ainda fizeram menção dizendo: “o vídeo escolhido foi muito bom, o professor explica muito bem.”

Em seguida, o professor compartilhou na tela com os alunos os resultados do formulário I, analisando questão por questão e os respectivos acertos e erros da turma em geral.

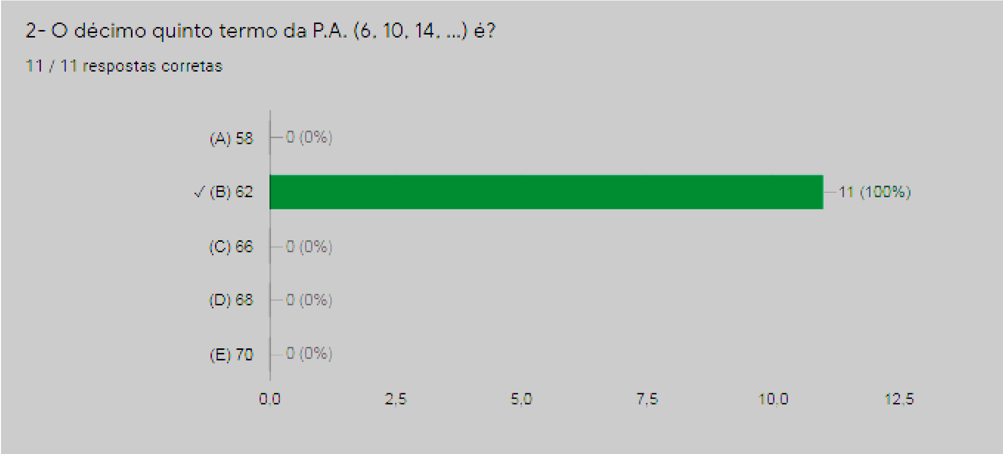
Figura 3 – Análise da Questão 1 do Formulário I



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A questão 1 (Figura 4) tratava de reconhecer quando uma sequência caracterizava uma PA. Foram dadas cinco alternativas, e apenas uma estava errada. Claramente as opções (A), (B) e (D) representavam uma PA, respectivamente com suas razões, 3; -5; 0. Restou a nós, então, as opções (C) e (E), justamente as que os alunos mais optaram. Apesar de a alternativa correta ter sido a maioria, observou-se que quase metade também errou a questão. Ao serem questionados, eles disseram que não enxergavam uma razão no item (E) e logo marcaram essa letra. Notou-se que ao trabalhar com frações os alunos sentem um pouco de dificuldade, principalmente em questões de soma e subtração, caso necessário para descobrir a razão. Eles ainda declararam que ao terminar o questionário e verificarem as chaves de respostas, entenderam o porquê de se tratar de uma PA. Só então perceberam que se confundiram, pois no item (C) os termos se alternavam, ora somando 2, ora somando -2, logo não representava uma PA.

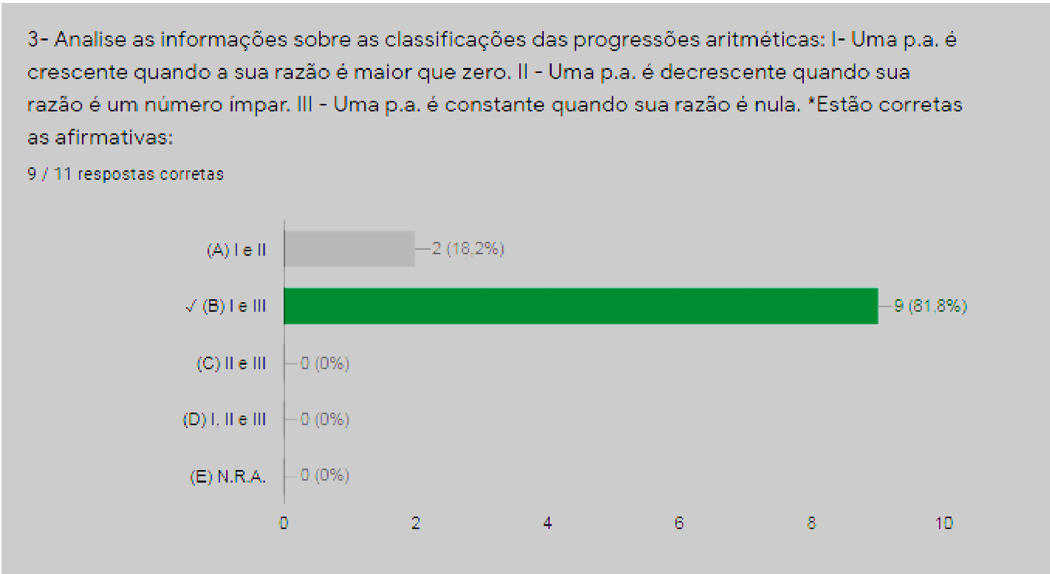
Figura 4 – Análise da Questão 2 do Formulário I



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A questão 2 (Figura 5) foi bem mais tranquila, tanto que todos acertaram. A questão pedia para determinar o décimo quinto termo da PA. Facilmente identifica-se o primeiro termo, 6; e a razão, 4. Verificando o envio das questões, observou-se que uma aluna não utilizou a fórmula do termo geral, mas sim listou os quinze termos da PA para, só depois, determinar o décimo quinto termo. Foi dito aos alunos que como não se especificou a forma da resolução, o jeito também foi válido. Um aluno questionou, entretanto, que quando se pedia números pequenos era até melhor resolver assim, mas quando forem pedidos números "mais altos" seria mais fácil aplicar na fórmula. Todos concordaram.

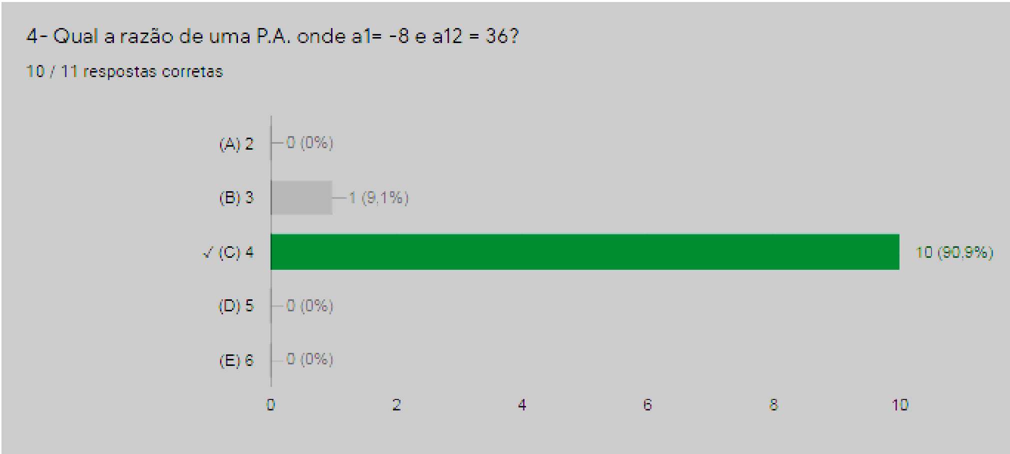
Figura 5 – Análise da Questão 3 do Formulário I



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A questão 3 (Figura 6) era mais relacionada à teoria do assunto e à classificação de uma PA., não gerando maiores questionamentos. Os dois alunos que erraram se manifestaram e disseram que fizeram confusão de ímpar com negativo.

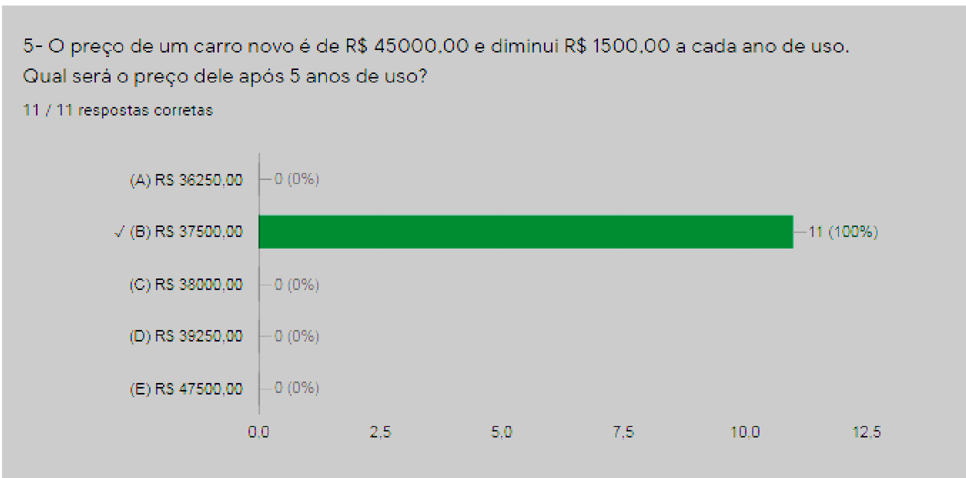
Figura 6 – Análise da Questão 4 do Formulário I



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Ao mostrar a questão 4 (Figura 7), uma aluna logo pronunciou: “tinha uma questão muito parecida na videoaula”. A questão pedia para calcular a quantidade de termos da PA em que já eram conhecidos o primeiro e o décimo segundo termos. Aplicando a fórmula do termo geral, logo se chegava ao resultado. Destaca-se o comentário de um aluno que perguntou se ele poderia utilizar as alternativas como opções e “ir testando” para ver em qual delas o décimo segundo termo seria 36. Novamente o professor explicou que sim, mas que quando se tratasse de números com maiores valores absolutos, dessa forma seria mais trabalhoso.

Figura 7 – Análise da Questão 5 do Formulário I



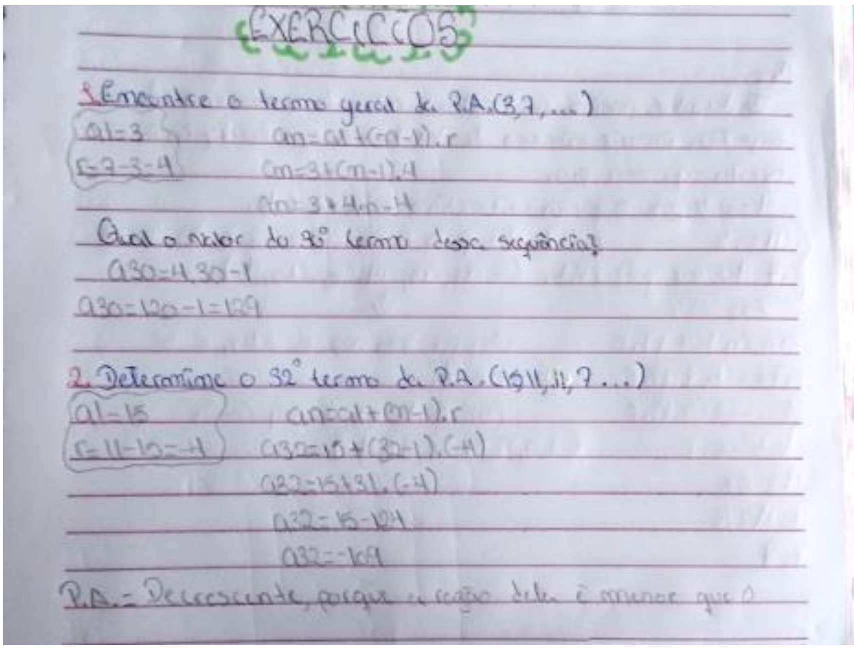
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na questão 5 (Figura 8), por fim, foi proposto um exercício mais contextualizado, um problema de aplicação no cotidiano. O interessante aqui seria reconhecer que a razão da PA formada é um valor negativo, -1500; identificar 45000 como primeiro termo da PA e então calcular o a5 através da fórmula. Parte dos alunos resolveu por meio da fórmula e parte fez os cálculos ano a ano. Todos acertaram e não houve questionamentos nessa questão.

Os alunos gostaram muito do método de exemplificação, mostrando o acerto, e, mais detalhadamente, o erro geral. Luckesi (1995, p. 51) diz o seguinte sobre os erros: “uma vez que ocorram não devemos fazer deles fontes de culpa e de castigo, mas trampolins para o salto em direção a uma vida consciente, sadia e feliz”. Esses “trampolins” certamente foram utilizados aqui, e explorar item por item, debatendo-os, foi muito mais produtivo para o conhecimento do que simplesmente fornecer um gabarito, onde muitas das vezes a culpa pelo erro é o que se destaca.

Após a conclusão das verificações do formulário, iniciamos a terceira etapa da aula, que consiste na resolução de atividades em grupo. Como as aulas estão ocorrendo em um ambiente virtual, para discutirem as atividades entre si os alunos abriram os seus respectivos microfones e debateram as questões, formulando as devidas soluções, que deveriam ser registradas no caderno e depois enviadas. Quando necessário, também foi usado o chat disponível na ferramenta. As questões foram apresentadas uma a uma. Nesse momento, o professor buscou interferir o mínimo possível.

Figura 8 – Questões 1 e 2 da Atividade em Grupo 1

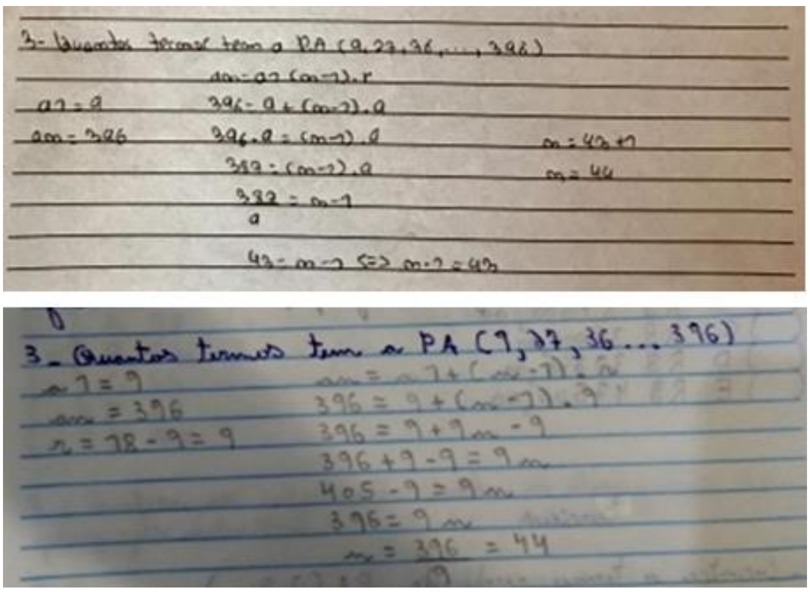


Fonte: Arquivo pessoal do autor (2020).

Na questão 1 (Figura 9), os alunos tiveram um pouco de dúvida em entender o que exatamente estava sendo pedido. O professor explicou que encontrar o termo geral nada mais é que encontrar uma fórmula, em função de uma incógnita, para calcular qualquer termo da progressão aritmética. Eles começaram a pensar dizendo: “então temos que jogar na fórmula?”. A partir daí, eles desenvolveram até o passo que se deveria multiplicar o 4 por *n*e por -1. Uma aluna disse: “e agora?”. Um colega respondeu: “é só fazer chuveirinho”, referindo-se à propriedade distributiva. Após concluírem, o professor deixou outra pergunta: “qual o valor do trigésimo termo então?”. Uma aluna logo respondeu: “é só substituir *n* por 30”. Logo eles fizeram e chegaram à solução correta.

Já na questão 2 (Figura 9), os alunos logo identificaram que poderiam utilizar a fórmula. A proposta era exatamente esta: fazer com que os alunos aplicassem a fórmula do termo geral para as diversas situações e, com isso, se habituassem nos cálculos. Um aluno questionou que não foi fornecido o valor da razão. Sua colega de classe logo respondeu: “mas tem como descobrir: 11 – 15 = – 4”. Não houve maiores dificuldades. O docente aproveitou para questionar qual seria a classificação da PA. Todos concordaram que a progressão aritmética era decrescente, pois a razão era um valor menor do que zero.

Figura 9 – Questão 3 da Atividade em Grupo 1



Fonte: Arquivo pessoal do autor (2020).

A questão 3 (Figura 10) também envolvia aplicação da fórmula, mas agora eles precisariam manipular a equação, pois estava sendo pedido a quantidade de termos. Os alunos rapidamente identificaram os termos dados e aplicaram-nos. Alguns alunos multiplicaram a razão pelos termos entre parênteses, outros optaram por outra resolução, ambas apresentadas na Figura 10. O professor interveio e disse que ambos os meios estavam corretos.

Figura 10 – Questão 4 da Atividade em Grupo 1

4- Interpole 5 meios aritméticos entre – 2 e 40.

Interpolar meios aritméticos entre dois números dados significa inserir números de tal forma que a sequência gerada seja uma p.a.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na questão 4 (Figura 11), o professor viu a necessidade de dar o significado da palavra interpolar, por não ser um termo comum no vocabulário dos estudantes. A partir daí as dúvidas e os questionamentos começaram a aparecer: “como vou descobrir a quantidade de termos”, indagou uma aluna; “o que na verdade é pra fazer aí”, disse outro. Os alunos até tentaram pensar melhor na questão, mas não obtiveram sucesso. Com isso, o pesquisador atuou como facilitador. Começou dizendo que após colocar os termos entre os números, a PA ficaria com 7 termos e que era necessário descobrir a razão dessa PA para prosseguir. O professor ainda mencionou que há um vídeo específico a respeito disso, mas queria adiantar o assunto para que, quando eles chegassem lá, já soubessem como proceder, visto que não foge em nada do material dessa aula. Em seguida, eles conseguiram montar a PA e fazer o desenvolvimento para encontrar a razão e, a partir disso, determinar a progressão aritmética. Foi uma questão um pouco mais complexa, mas no fim o objetivo foi alcançado.

Figura 11 – Questão 5 da Atividade em Grupo 1

5- (ENEM) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

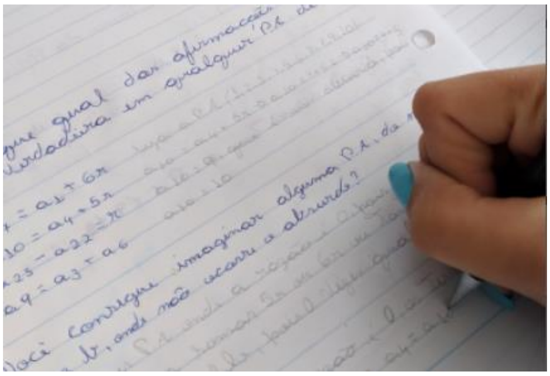
(A) 40 (B) 60 (C) 100 (D) 115 (E) 120

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A questão 5 (Figura 12), última dessa primeira atividade em grupo, foi aplicada no Enem. Geralmente, pela experiência do professor em sala de aula, quando o aluno vê que uma questão foi cobrada em um exame do tipo, logo eles pensam que será uma resolução muito difícil. O docente fez a leitura da questão junto com a turma e deixou que eles pensassem em soluções. A chave dessa questão estava em perceber que os andares que João e Pedro trabalham juntos formam uma PA, e, em seguida, verificar que o número do andar que eles trabalharam juntos seria também o número de andares do prédio. Antes, no entanto, eles teriam que pensar em uma forma de identificar ou classificar esses andares com uma mesma propriedade. Os alunos rapidamente perceberam que eles trabalham juntos nos andares 1 e 7. Uma aluna disse que fez as contas na mente e que nos andares 13 e 19 eles também trabalharam juntos. Ela chegou à conclusão de que esses andares poderiam ser uma PA com razão 6. Outros alunos começaram a falar, mencionando possíveis soluções. Todos contribuíram de alguma forma até chegarem à solução.

No final da atividade, os alunos mencionaram que gostaram muito desse novo "jeito" da aula. Disseram que em tempos de ensino remoto foi uma grande ajuda para entender melhor o conteúdo. Portanto, estudar o conteúdo antes e debater as atividades, bem como resolvê-las em aula, trouxe uma nova perspectiva para eles.

Figura 12 – Aluna realizando atividade



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.2 SEMANA II

Nesta semana, o conteúdo abordado foi disponibilizado aos alunos por meio das videoaulas: Progressão Aritmética PA: Notações Especiais (Aula 4 – aproximadamente 26 minutos) e Interpolação de Meios Aritméticos (Aula 5 – aproximadamente 16 minutos). Esses vídeos foram disponibilizados com cinco dias de antecedência e, assim como na semana anterior, foi pedido aos alunos que fizessem as respectivas anotações e registros de dúvidas para serem sanadas na aula, na ferramenta Google Meet.

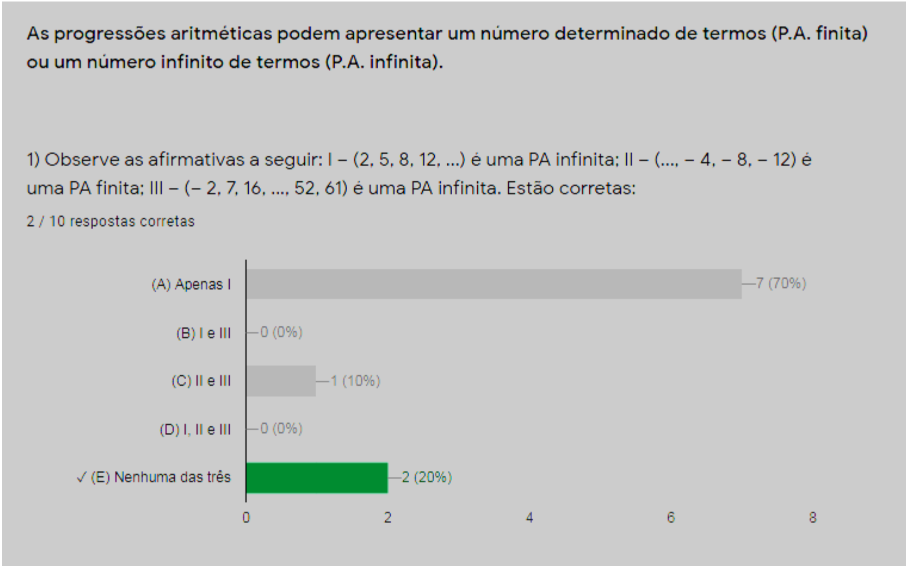
Terminado o prazo para assistirem os vídeos, foi entregue aos alunos o link de acesso ao Formulário II, contendo cinco questões de múltipla escolha, todas com chaves de respostas. Os estudantes tinham um dia para preenchê-lo e não poderiam editar. Como havia dado certo na primeira semana, optou-se por manter a estratégia. Um lembrete foi colocado no início do formulário informando aos alunos que respondessem apenas após terem assistido às aulas indicadas. Dois alunos entraram em contato com o professor, via aplicativo de mensagem, alegando que não estavam conseguindo acessar o link. O docente alertou que, para acessar o formulário, eles deveriam estar conectados ao Gmail e os instruiu em como proceder para tal. Logo o problema foi solucionado e os alunos enviaram as resoluções. A atividade teve a participação de 10 alunos (dois dos alunos que participaram na semana passada não entraram e um aluno que não participou semana passada justificou sua falta ao professor e disse ter assistido a aula síncrona gravada).

No dia seguinte, em aula previamente agendada no Meet, os alunos foram, inicialmente, questionados se havia alguma dúvida no conteúdo da videoaula. Apenas um aluno comentou ter tido dificuldades de acesso por conta da internet, mas que um amigo baixou o vídeo e enviou para ele. O professor então a partir daí se comprometeu a disponibilizar os vídeos, já devidamente baixados, no grupo da turma no WhatsApp e na plataforma Google Classroom. Sobre o conteúdo em si, os alunos informaram que estavam fazendo o registro das anotações no caderno, conforme orientação. Uma aluna destacou que a aula 4 foi mais tranquila, pois o assunto já havia sido iniciado pelo docente na aula anterior.

Logo após, começamos a analisar as questões do Formulário II (Figura 14).

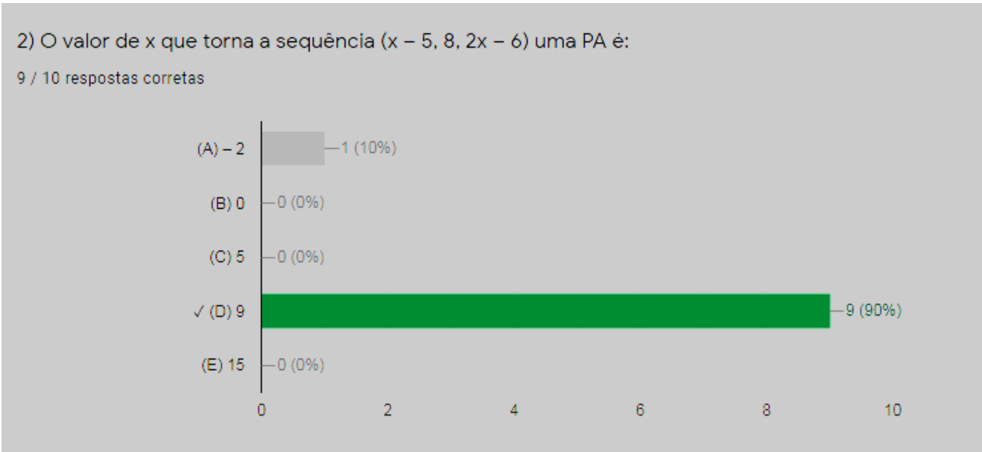
A questão 1 tinha como objetivo fazer o aluno diferenciar PAs finitas e infinitas, mas exigia que eles a realizassem com atenção, pois havia uma "pegadinha": umas das afirmativas não se tratava de uma PA. A maioria dos alunos errou esse problema justamente por conta disso. Eles informaram que logo que souberam a afirmativa correta, visualizaram melhor o enunciado e reconheceram que tiveram falta de atenção. A aluna que marcou o item (C) alegou ainda não entender por que a opção II não estava correta, visto que não há reticências no final, indicando assim a noção de infinito. O pesquisador explicou que não se podia determinar o número de termos da PA devido às reticências no começo da sequência, o que caracteriza uma PA infinita, estando assim a alternativa (C) errada.

Figura 13 – Análise da Questão 1 do Formulário II



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 14 – Análise da Questão 2 do Formulário II

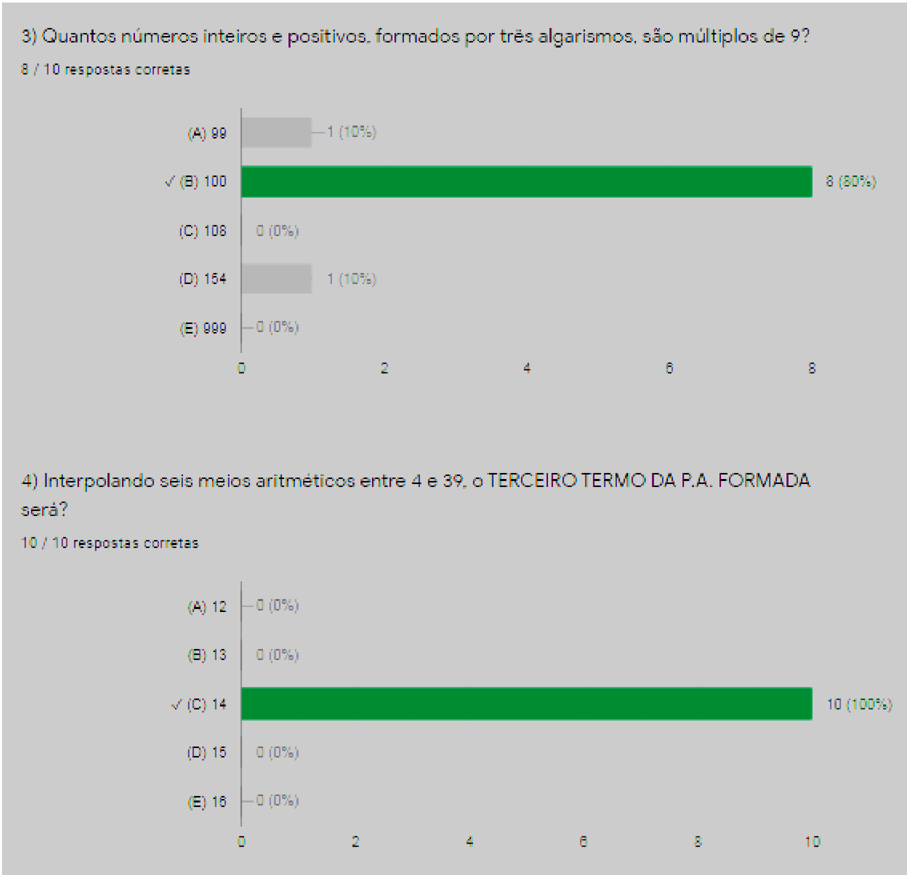


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A ideia proposta na questão 2 (Figura 15) era que os alunos aplicassem o conceito de que em uma PA a diferença entre um termo e seu anterior, a partir do segundo termo, é sempre a mesma. Assim, eles igualariam as diferenças e calculariam o valor de x. Uma aluna interrompeu o professor e disse que essa questão foi bem mais tranquila, pois tinha um exemplo parecido no vídeo. Apenas um aluno errou essa questão, o que mostra que essa parte do conteúdo foi bem entendida pelos estudantes.

Um aluno pediu a palavra e disse ter feito de forma diferente, "professor, eu fiz a média entre os extremos e igualei ao termo central", disse ele. O professor disse que a resposta também estava correta e que em problemas do tipo não há apenas uma forma de resolução. Foi dado um tempo para que rapidamente eles conferissem a resposta por meio dessa outra forma de resolver, não havendo maiores questionamentos sobre a questão.

Figura 15 – Análise das Questões 3 e 4 do Formulário II

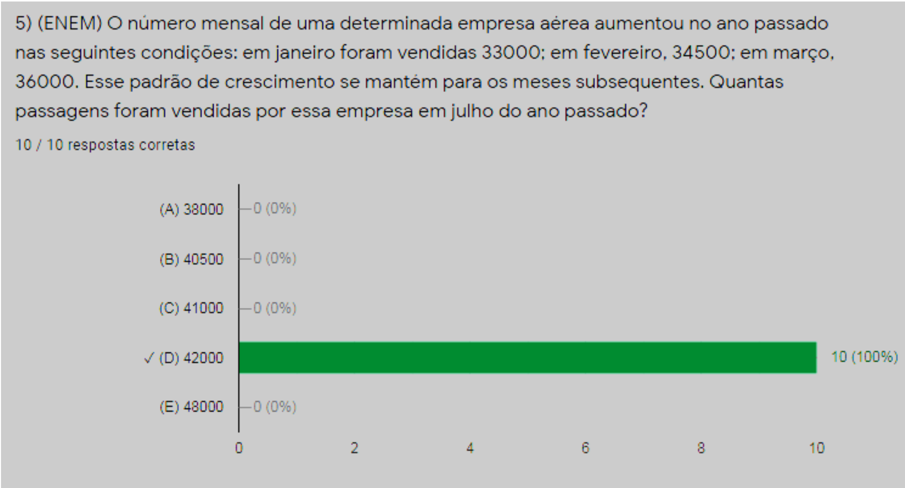


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tanto a questão 3 quanto a questão 4 (Figura 16), tratam de assuntos já vistos anteriormente, mas com uma "roupagem" nova. O principal desafio na questão 3 era, antes de determinar a quantidade de múltiplos de três algarismos, explicitar qual seria o primeiro e o último termo dessa PA de razão igual a nove – outro detalhe que eles deveriam perceber. Assim, tendo esses números conhecidos, era só aplicar a fórmula do termo geral para encontrar a quantidade de termos. Apenas dois alunos erraram, informando que não tiveram atenção na hora dos cálculos, mas que esse objetivo foi alcançado.

Na questão 4, verifica-se que o aproveitamento foi de 100%. O assunto já havia sido tratado, não gerando maiores dúvidas.

Figura 16 – Análise da Questão 5 do Formulário I

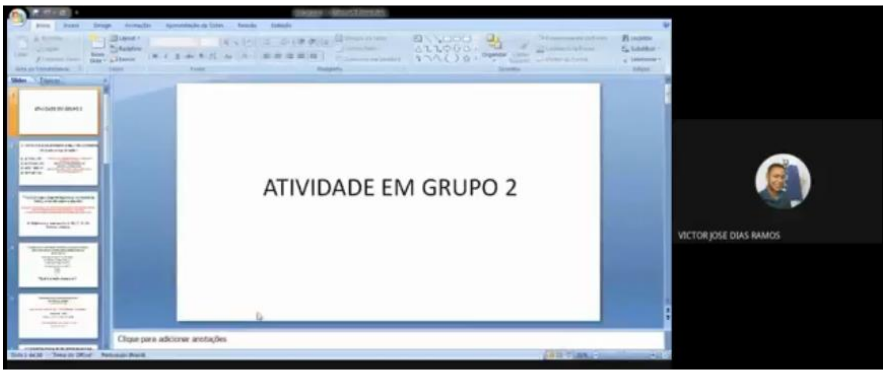


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na questão 5 (Figura 17), os alunos teriam que fazer a relação entre os meses e suas respectivas posições ao formar a PA: janeiro é o primeiro termo; fevereiro, o segundo; e assim segue até julho, que é o sétimo termo dessa sequência. Todos informaram ter encontrado a razão muito facilmente, “era só diminuir para ver de quanto em quanto está aumentando”, disse um deles. A maior parte confessou não ter utilizado a fórmula nessa questão, por se tratar de uma quantidade pequena de termos. Entretanto, reconheceram que em quantidades maiores a resolução pela fórmula é mais indicada e que não teriam problema em utilizá-la. Não houve erros na questão.

De uma forma geral os discentes se mostraram bem contentes com o resultado do formulário. Partimos, então, para a última etapa da aula: a confecção das atividades em grupo no ambiente virtual. O professor iniciou a apresentação da atividade (Figura 18), interferindo apenas quando solicitado.

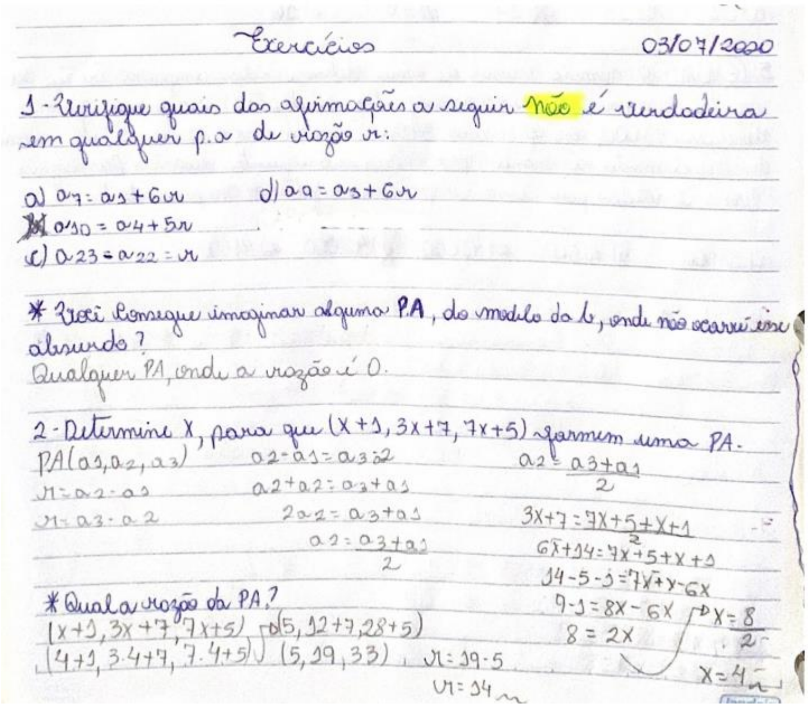
Figura 17 – Apresentação da Atividade em Grupo II



Fonte: Arquivo pessoal do autor (2020).

Na questão 1 (Figura 19), os alunos deveriam aplicar o conceito de razão somado a um termo. Uma aluna chamou a atenção dos colegas que era para identificarem a verdadeira. Um aluno escolheu a alternativa (C), mas outro logo interferiu, dizendo que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a razão. O professor retificou que a razão é a diferença entre um termo e seu anterior, a partir do segundo termo. Assim, eles logo eliminaram essa alternativa, pois estava correta. A alternativa (A) também foi considerada correta por todos. Um aluno observou que o item (B) estava incorreto, pois ao somar cinco vezes a razão com o quarto elemento da sequência deveria ser encontrado o nono termo, e não o décimo, como indicado. Todos compreenderam. Em seguida, foi perguntado se eles imaginariam alguma PA desse modelo que poderia estar certa, pois a pergunta do enunciado se referia no sentido geral, de não poder conjecturar que sempre é válido, mas que em alguma situação talvez valesse. Após um tempo considerável, uma aluna citou o exemplo de uma PA cuja razão é 0 “(3, 3, 3, 3, 3)”. Os alunos verificaram utilizando a fórmula em (B). No fim, o professor explicou que para provar que algo é válido não basta dar um exemplo, como no caso acima.

Figura 18 – Questões 1 e 2 da Atividade em Grupo 1


Exercícios 03/07/2020

1 - Verifique quais das afirmações a seguir não é verdadeira em qualquer p.a de razão r:

a) $a_7 = a_1 + 6r$ d) $a_9 = a_3 + 6r$
~~b)~~ $a_{10} = a_4 + 5r$
c) $a_{23} - a_{22} = r$

* Você consegue imaginar alguma P.A, do modelo da b, onde não ocorreu esse absurdo?
Qualquer PA, onde a razão é 0.

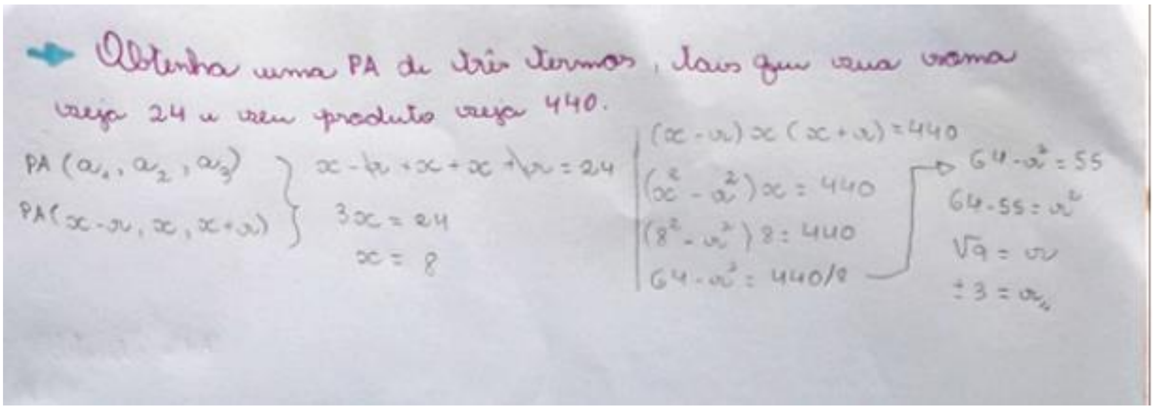
2 - Determine X, para que $(x+1, 3x+7, 7x+5)$ formem uma PA.
$PA(a_1, a_2, a_3)$
$r = a_2 - a_1$
$r = a_3 - a_2$
$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$
$a_2 + a_2 = a_3 + a_1$
$2a_2 = a_3 + a_1$
$a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2}$
$a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2}$
$3x+7 = \frac{7x+5+x+1}{2}$
$6x+14 = 7x+5+x+1$
$14-5-1 = 7x+x-6x$
$9-1 = 8x-6x$
$8 = 2x$
$x = \frac{8}{2}$
$x = 4$

* Qual a razão da PA?
$(x+1, 3x+7, 7x+5)$ $(5, 12+7, 28+5)$
$(4+1, 3\cdot4+7, 7\cdot4+5)$ $(5, 19, 33)$ $r = 19-5$
$r = 14$

Fonte: Arquivo pessoal do autor (2020).

Ao verem a questão 2 (Figura 19), os alunos logo viram que a aplicação era a mesma de uma questão do simulado. O objetivo da questão era descobrir o valor de x. Para isso deveriam ser aplicados conceitos de razão e/ou média com os termos extremos. Atentou-se para o fato de serem resolvidas de ambas as formas. Como a questão 2 do formulário II foi destacada a solução através da igualdade entre as diferenças, aqui destacamos a solução (Figura 19) pela média dos extremos – sugestão também de um aluno quando verificamos o formulário II. Aqui, entretanto, mais uma questão estava para ser respondida: “Qual o valor da razão?”. Os alunos estavam de acordo que, para calcular a razão, deveriam substituir o valor encontrado de x nos termos e então efetuar a operação de subtração – entre o segundo e o primeiro termo, ou o terceiro e o segundo termo – para enfim chegar ao valor pedido. Todos concluíram que a razão era 14, observe os cálculos na parte inferior da Figura 19.

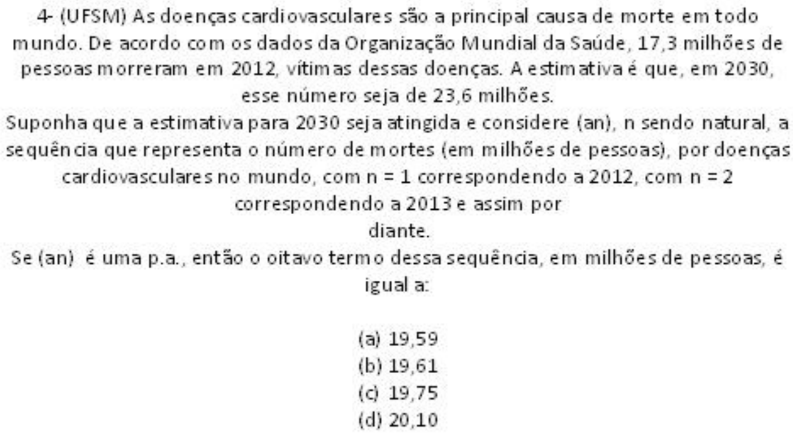
Figura 19 – Questão 3 da Atividade em Grupo



Fonte: Arquivo pessoal do autor (2020).

Na questão 3 (Figura 20), os alunos conseguiram se lembrar de um exemplo parecido na videoaula. O professor então verificou que os alunos estão, de fato, acompanhando os vídeos. Três alunos lideraram o raciocínio, os demais ficaram um pouco confusos no início. O objetivo era formar uma PA com três termos, sabendo o valor da soma e do produto. Aplicaram então os conceitos do enunciado, e, com cálculos de acordo com a Figura 20, chegaram ao valor de x e r, pensando ter concluído a questão. O professor perguntou se essa seria a resposta final deles. Após dizerem que sim, o discente chamou atenção para o fato de o enunciado pedir para eles obterem a PA, assim sendo, deveriam formá-la, listando seus termos. “E agora? Como fazer então?”, questionaram. Alguns alunos ponderaram que poderemos ter, nesse caso, duas soluções, visto que foram encontrados dois valores para a razão. Rapidamente os estudantes determinaram as duas PAs: (5, 8, 11) e (11, 8, 5), completando o raciocínio que estava incompleto.

Figura 20 – Questão 4 da Atividade em Grupo 1

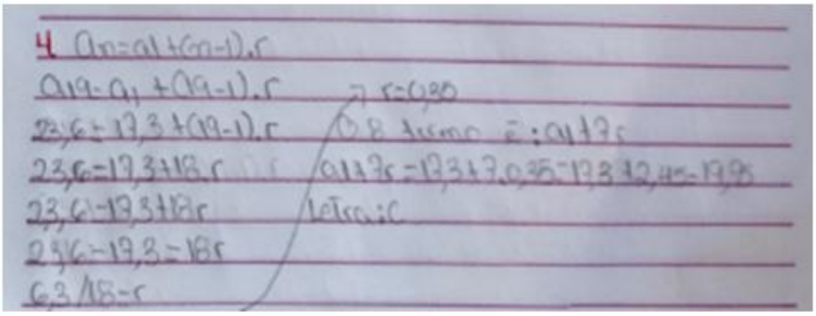


4- (UFSM) As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte em todo mundo. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde, 17,3 milhões de pessoas morreram em 2012, vítimas dessas doenças. A estimativa é que, em 2030, esse número seja de 23,6 milhões.

Suponha que a estimativa para 2030 seja atingida e considere (an), n sendo natural, a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas), por doenças cardiovasculares no mundo, com n = 1 correspondendo a 2012, com n = 2 correspondendo a 2013 e assim por diante.

Se (an) é uma p.a., então o oitavo termo dessa sequência, em milhões de pessoas, é igual a:

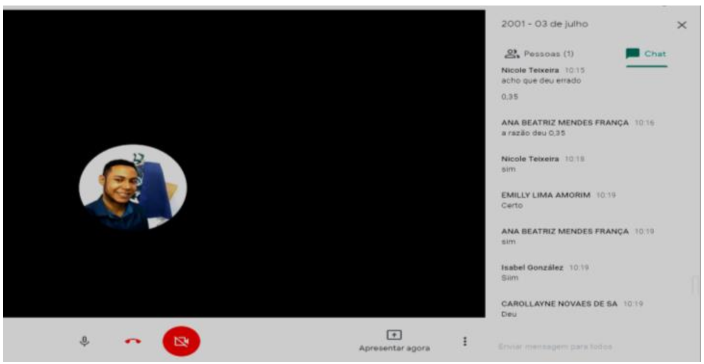
(a) 19,59
(b) 19,61
(c) 19,75
(d) 20,10



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Chegamos à última questão da atividade em grupo, questão 4 (Figura 21). Apesar de chegar à conclusão de sempre propor cinco questões, várias questões externas foram propostas nessa atividade, por isso o docente contou com apenas quatro. Essa era uma questão mais contextualizada, com várias informações. Por isso, o professor deu um tempo maior para que os alunos pudessem resolver o exercício. Apesar de extensa, a questão não era complexa, e os alunos utilizaram bastante o chat disponível na ferramenta durante a resolução dessa questão, conforme a Figura 22.

Figura 21 – Alunos debatendo a questão no ambiente virtual



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

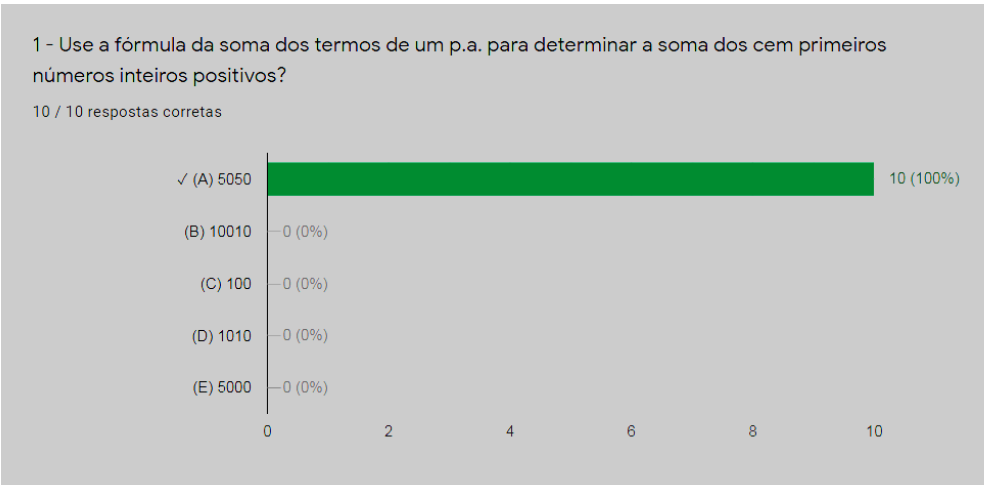
Após encontrarem o valor da razão, todos calcularam o oitavo termo da PA tranquilamente. O pesquisador deixou uma pesquisa para a próxima aula: “Se o enunciado perguntasse o total de mortos em todo esse período, precisaríamos calcular item por item ou existe um meio mais rápido e eficaz?” Todos ficaram curiosos e instigados a participar da próxima aula e foram convidados a procurar mais sobre o assunto.

3.3 SEMANA III

Seguindo o mesmo modelo, a terceira semana se iniciou com a disponibilização dos vídeos: Progressão Aritmética PA: Soma dos Termos (Aula 6 – aproximadamente 24 minutos) e Progressão Geométrica PG: Introdução e Termo Geral (Aulas 1 e 2 – aproximadamente 17 e 15 minutos, respectivamente). Destaca-se que durante a semana os alunos mesmos compartilhavam os vídeos uns com os outros e já iam tirando dúvidas do conteúdo entre si. Após o fechamento do prazo de entrega do Formulário III, um aluno pediu para que prorrogasse mais alguns minutos pois não tinha conseguido finalizar. O professor atendeu excepcionalmente essa solicitação. A atividade teve a participação de 10 alunos, os mesmos que participaram da última aula.

No momento da aula no Meet, os alunos informaram que não houve dúvidas no conteúdo da videoaula, o que pode ser comprovado pela porcentagem de acertos nas questões (disponível nas figuras abaixo).

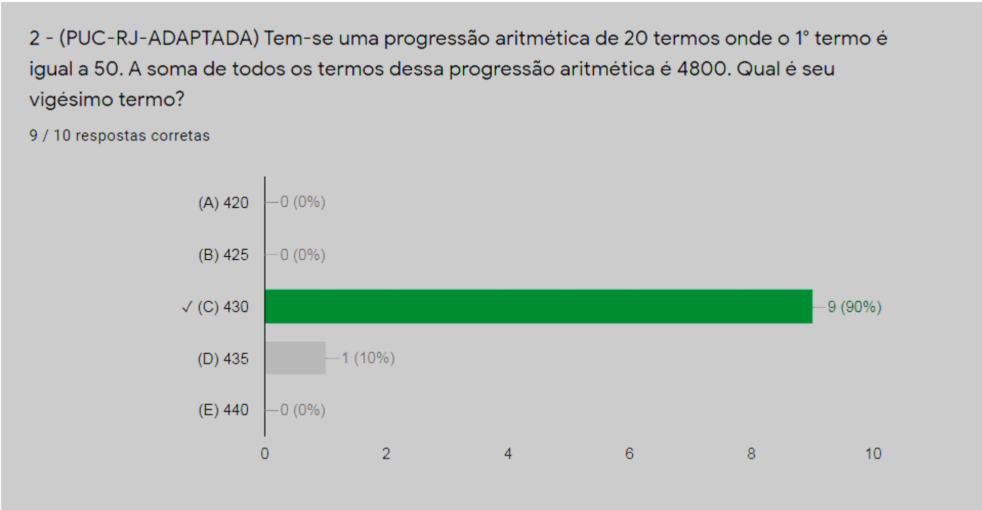
Figura 22 – Análise da Questão 1 do Formulário III



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na questão 1 (Figura 23), os estudantes, além de aplicar a fórmula da soma dos termos de uma PA, precisavam identificar qual é o primeiro número inteiro positivo e calcular o centésimo, utilizando a fórmula do termo geral. Nesse instante, foi questionado por uma aluna o porquê da expressão inteiro positivo – apesar de ela ter conseguido realizar a questão, teve essa dúvida. O professor aproveitou para relembrar a diferença de números inteiros e naturais. Todos acertaram a questão.

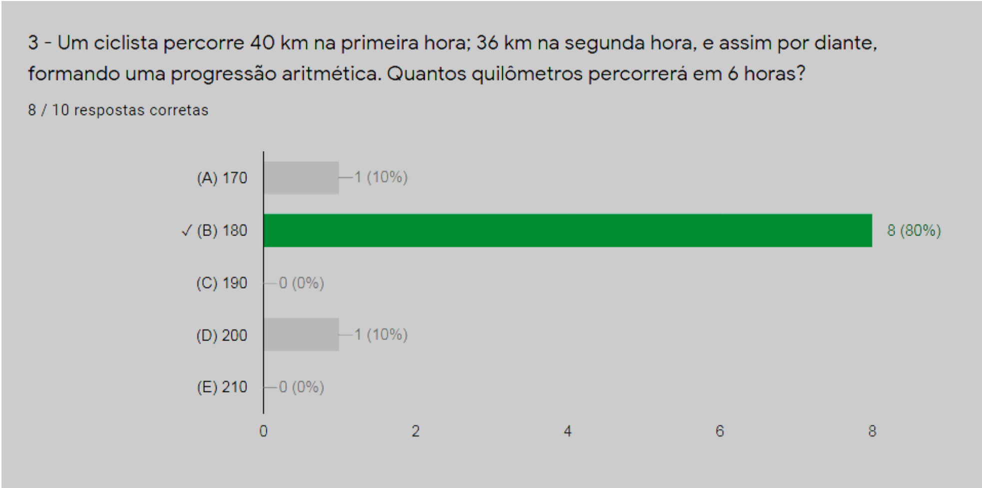
Figura 23 – Análise da Questão 2 do Formulário III



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Como observamos na Figura 24, um aluno não obteve êxito na questão. Ele se manifestou e disse: “não entendi foi nada nessa!”. Os próprios colegas de turma intervieram e o explicaram como deveria ser a resolução: “após aplicação da fórmula, bastava substituir os termos já conhecidos e resolver a equação do primeiro grau em questão”. Tal facilidade se dá pelo fato de, apesar da questão não ser trivial, uma questão similar foi trabalhada na videoaula.

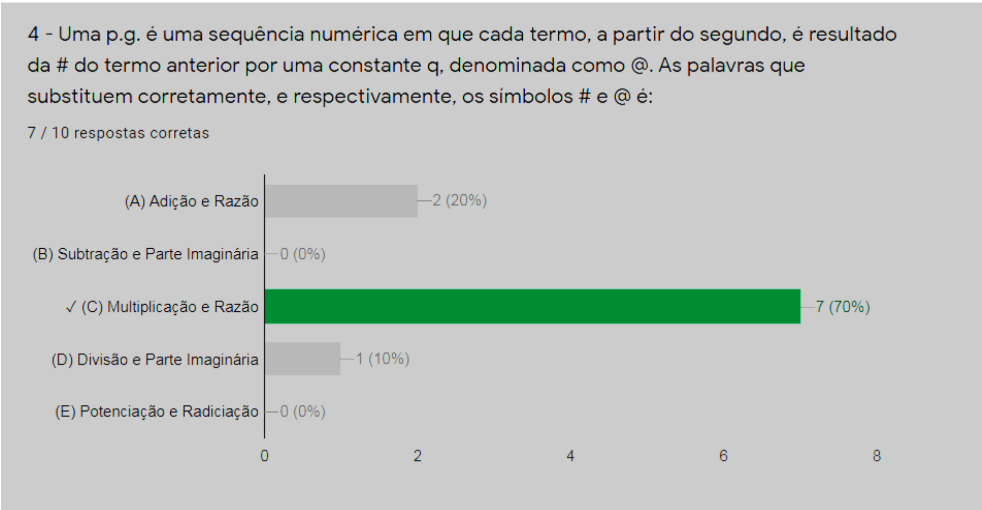
Figura 24 – Análise da Questão 3 do Formulário III



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Por se tratar de uma PA decrescente, houve uma dificuldade maior na aplicação da fórmula (Figura 25). Seis alunos manifestaram que descobriram que ia diminuindo 4 km por hora e foram realizando até a sexta hora e depois somaram os valores. O professor disse que o contexto era o mesmo, apenas deveriam descobrir o valor na sexta hora e fazer uso da fórmula com o primeiro e último valores para descobrir o somatório. O fato de a PA ser decrescente não interferia na aplicabilidade.

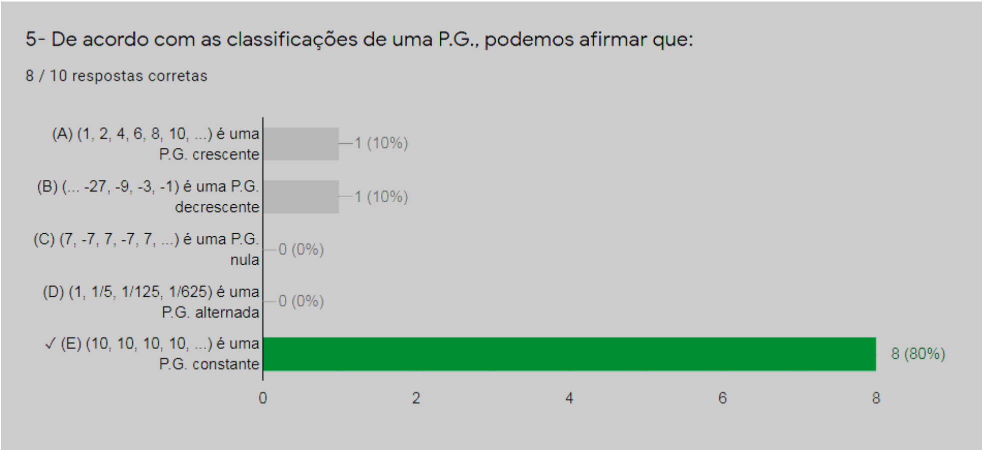
Figura 25 – Análise da Questão 4 do Formulário III



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A atividade da Figura 26 foi idealizada com o intuito de os alunos aprenderem a definição de uma PG. Percebe-se que dois alunos confundiram com PA e utilizaram o conceito de PA e marcaram a opção A, que continha a palavra “adição”. A partir daí, já se notou a distinção entre as progressões, e eles conseguiram visualizar melhor os conceitos.

Figura 26 – Análise da Questão 5 do Formulário III



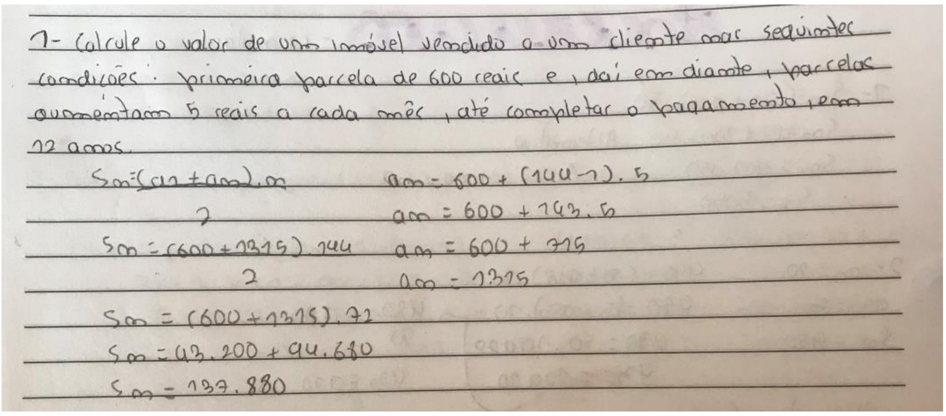
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A questão 5 (Figura 27) gerou um pouco de discussão, por causa de uma falha do professor ao transcrever o formulário. Duas opções estariam corretas. A redação correta no item B é (..., -27, -9, -3, -1), ou seja, é uma PG crescente – vide formulário III em anexo. A maioria dos alunos não percebeu o erro, porém o aluno que identificou a opção B como correta indagou que se tratava de uma PG decrescente com razão 1/3.

Sendo assim, após o compilado, iniciou-se a última parte: resolução das atividades em grupo no ambiente virtual.

Ao visualizarem a primeira questão (Figura 28), foi notada a semelhança com a primeira questão do simulado. O grupo prontamente chegou ao valor de 1315 e fez a aplicação na fórmula.

Figura 27 – Questão 1 da Atividade em Grupo 3



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Foi proposto aos alunos um tempo de 15 minutos para resolverem as questões 2 e 3 (Apêndice B – Atividade em Grupo 3). Quanto à questão 2, não houve maiores questionamentos. Já com relação à questão 3, os alunos ficaram com bastante dúvida. O professor precisou interferir e relembrar alguns conceitos. Também foi dada a ideia de eles anotarem os dados que já possuíam e a partir daí descobrir as informações que faltavam. Quando foi encontrado o valor de a_n em função de n, uma aluna fez a correlação de substituir a expressão na fórmula da soma dos termos. Outro momento de bastante dificuldade foi na resolução da equação do segundo grau.

A maior parte dos alunos não recordava como resolver: apenas três conseguiram chegar na solução sem apoio do professor. Após terem o método de resolução desse tipo de equação exemplificado, os demais conseguiram realizar a tarefa. Todos prontamente descartaram a resposta negativa da equação, tendo em vista que a quantidade de termos de uma PG não pode ser um número negativo.

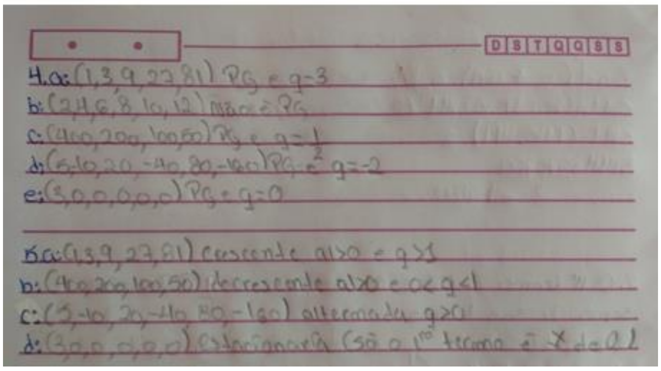
As questões 4 e 5 (Figura 29) foram solucionadas prontamente pelos alunos. Apenas a alternativa (E), ao classificá-la, alguns discentes optaram por chamá-la de nula. Tendo em vista o primeiro termo ser 3, que é diferente de 0, a classificação correta seria progressão quase nula.

Figura 29 – Questões 4 e 5 da Atividade em Grupo 3

4 – Verifique se cada sequência dada é uma PG. Em caso positivo, dê o valor da razão q.

a) (1, 3, 9, 27, 81)
b) (2, 4, 6, 8, 10, 12)
c) (400, 200, 100, 50)
d) (5, -10, 20, -40, 80, -160)
e) (3, 0, 0, 0, 0, 0)

5 – Classifique cada PG identificada na questão anterior.


4.a: (1,3,9,27,81) PG e q=3
b: (2,4,6,8,10,12) não é PG
c: (400,200,100,50) PG e $q=\frac{1}{2}$
d: (5,-10,20,-40,80,-160) PG é q=-2
e: (3,0,0,0,0,0) PG e q=0

5.a: (1,3,9,27,81) crescente a1>0 e q>1
b: (400,200,100,50) decrescente a1>0 e 0<q<1
c: (5,-10,20,-40,80,-160) alternada q>0
d: (3,0,0,0,0,0) estacionária (só o 1º termo é ≠ de 0)

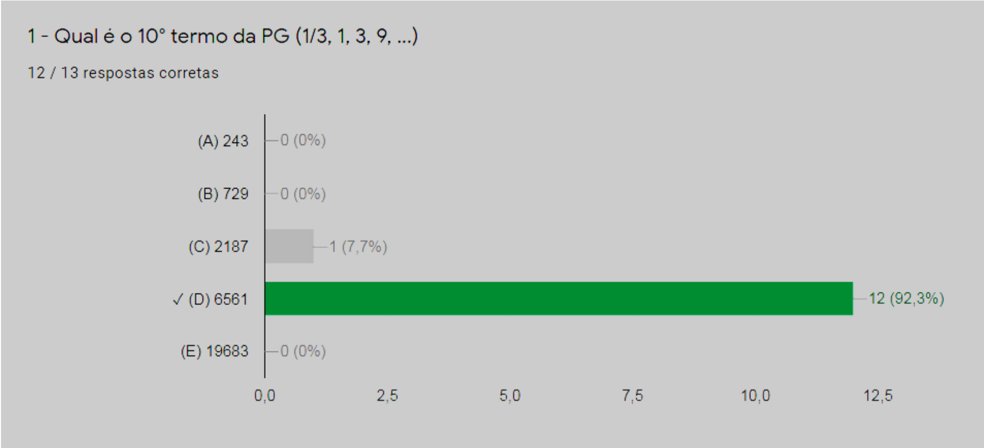
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.4 SEMANA IV

Na quarta semana, o conteúdo abordado foi disponibilizado aos alunos através das videoaulas: Progressão Geométrica PG: Notações Especiais (Aula 4 - aproximadamente 26 minutos) e Interpolação de Meios Geométricos (Aula 5 - aproximadamente 19 minutos). A rotina da semana seguiu da mesma forma das demais, até o dia da aula. A semana contou com a participação de 13 alunos, sendo dois novos alunos que estavam participando apenas das aulas de forma assíncrona e uma falta de um aluno assíduo.

O professor parabenizou a turma, pois todas as questões do formulário foram respondidas de forma correta por mais de 50% da turma, vide as porcentagens expressas nas atividades dos formulários. Assim, começamos a analisar os erros e acertos das questões do Formulário IV.

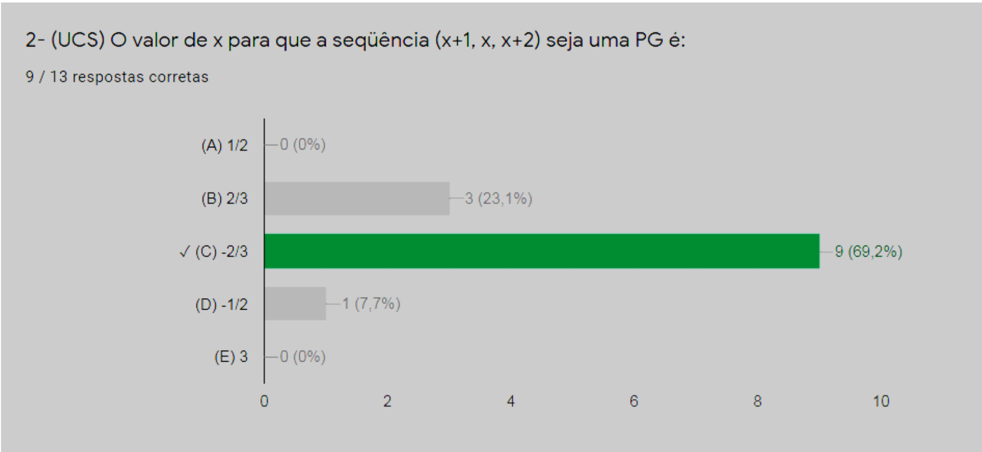
Figura 28 – Análise da Questão 1 do Formulário IV



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na questão 1 (Figura 30) a razão ser três ficou clara para todos. O aluno que marcou o item C disse que foi um erro na hora de editar as respostas e expôs seu raciocínio para a turma, que comprovou o acerto na questão. O professor ratificou a importância de entender um conteúdo e as deduções das fórmulas, para então saber o porquê de estar utilizando tal conceito.

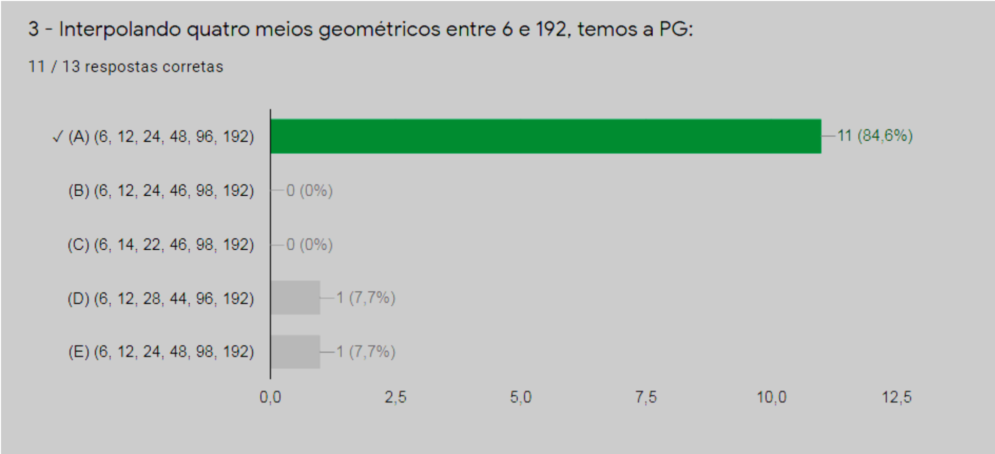
Figura 29– Análise da Questão 2 do Formulário IV



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para que os estudantes resolvessem a questão 2 (Figura 31), era necessário, previamente, o conhecimento das resoluções de equação do 1º grau, tendo em vista que os coeficientes que tornaram a equação como do 2º grau se anulariam ao montar a proporção. Alguns alunos ficaram um pouco confusos nessa questão e outros responderam dizendo que utilizaram as alternativas como meio para resposta, fazendo tentativas. O professor então reviu o conteúdo em questão, assim como sempre que tinham dificuldade em algum conteúdo pré-requisito.

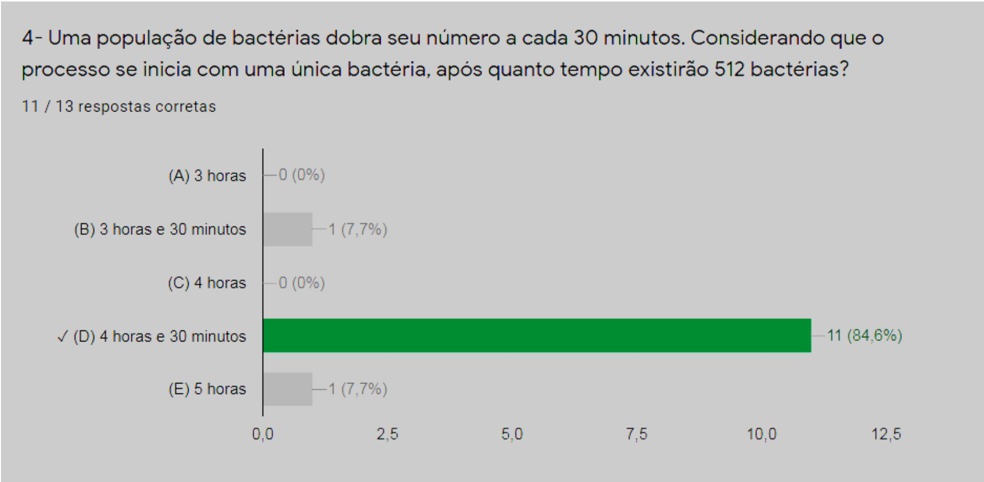
Figura 30 – Análise da Questão 3 do Formulário IV



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Conforme os resultados da questão 3 (Figura 32), interpolação já é um assunto que os alunos dominam, tendo em vista que também foi observado no estudo das progressões aritméticas. Os erros encontrados foram discutidos e os alunos mencionaram que foi erro nas operações básicas. O professor relembrou a atenção que se deve ter ao resolver problemas matemáticos.

Figura 313 – Análise da Questão 4 do Formulário IV

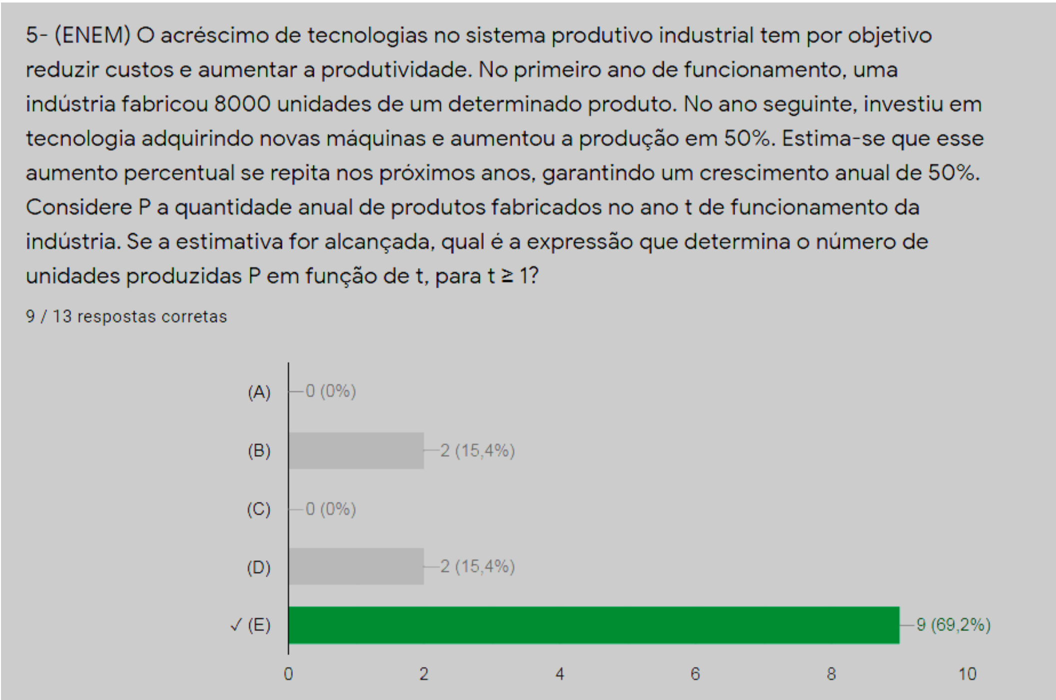


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Atividades como a da questão 4 são interdisciplinares (Figura 33). Tais atividades aguçam não apenas o interesse pela matemática, como também em outras disciplinas, além de estarem interligados no contexto, mostrando ao aluno a aplicabilidade no dia a dia. Identificados os indicadores necessários, bastaria resolver a questão. Os alunos que erraram a questão foram os mesmos que não obtiveram êxito na anterior (a saber, eram os que assistiam às aulas de forma assíncrona mencionados no início da seção). O primeiro termo da PG seria igual a 1, pois o processo se inicia com uma bactéria. Considerando que essa população dobra de número a cada 30 minutos, temos a seguinte PG até chegar em 512: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512), onde 512 é o décimo termo. Assim sendo, a população foi dobrada nove vezes. 30 x 9 = 270 minutos. O professor relembrou as unidades de tempo e suas transformações, e os estudantes, inclusive os que haviam errado a questão, chegaram à conclusão de que o item correto é 4 horas e 30 minutos (D).

Na Figura 34, estão a descrição e os resultados da questão 5.

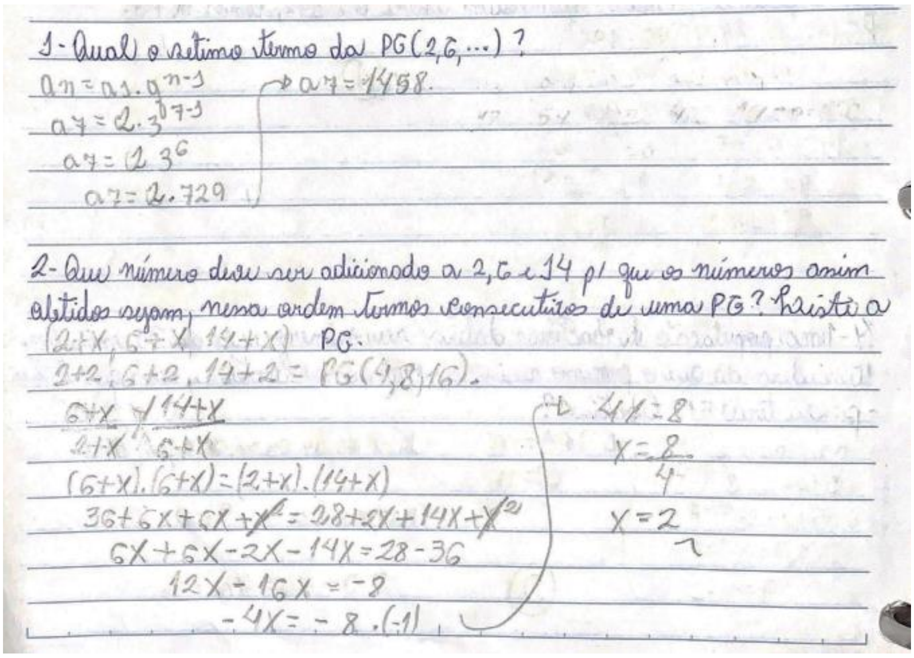
Figura 324 – Análise da Questão 5 do Formulário IV



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Após a conclusão das verificações do formulário, finalizamos a aula com a resolução das atividades em grupo. Segue abaixo algumas soluções apresentadas.

Figura 3533 – Questões 1 e 2 da Atividade em Grupo 4



1- Qual o sétimo termo da PG(2,6,...)?

$a_n = a_1 . q^{n-1}$ → $a_7 = 1458$.

$a_7 = 2 . 3^{7-1}$

$a_7 = 2 . 3^6$

$a_7 = 2 . 729$

2- Que número deve ser adicionado a 2, 6 e 14 p/ que os números assim obtidos sejam, nessa ordem termos consecutivos de uma PG? Existe a

$(2+x, 6+x, 14+x)$ PG.

$2+2, 6+2, 14+2 = PG(4,8,16)$.

$\frac{6+x}{2+x} = \frac{14+x}{6+x}$

$(6+x).(6+x) = (2+x).(14+x)$

$36+6x+6x+\cancel{x^2} = 28+2x+14x+\cancel{x^2}$

$6x+6x-2x-14x = 28-36$

$12x-16x = -8$

$-4x = -8 . (-1)$

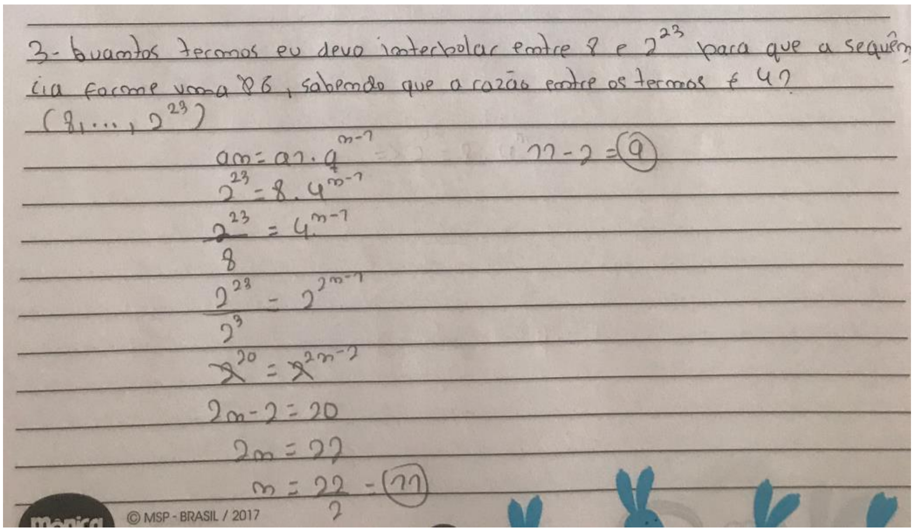
$4x = 8$

$x = \frac{8}{4}$

$x = 2$

Fonte: Arquivo pessoal do autor (2020).

Figura 36 – Questão 3 da Atividade em Grupo 4



3- Quantos termos eu devo interpolar entre 8 e 2^{23} para que a sequência forme uma PG, sabendo que a razão entre os termos é 4?

$(8, ..., 2^{23})$

$a_n = a_1 . q^{n-1}$ $\quad 11 - 2 = 9$

$2^{23} = 8 . 4^{n-1}$

$\frac{2^{23}}{8} = 4^{n-1}$

$\frac{2^{23}}{2^3} = 2^{2n-2}$

$\cancel{2}^{20} = \cancel{2}^{2n-2}$

$2n-2 = 20$

$2n = 22$

$n = \frac{22}{2} = 11$

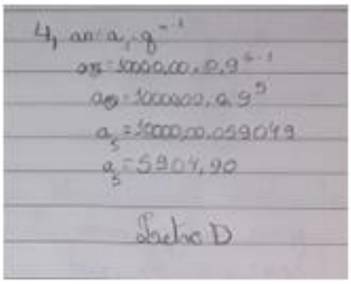
Fonte: Arquivo pessoal do autor (2020).

Figura 34 – Questão 4 da Atividade em Grupo 4

4 – (UFPE) Suponham que o preço de um automóvel se desvalorize 10% ao ano nos seus cinco primeiros anos de uso. Se esse automóvel novo custou R$ 10000,00, qual será o seu valor após os cinco anos de uso?

(A) R$ 5550,00 (B) R$ 5804,00 (C) R$ 6204,30

(D) R$ 5904,90 (E) R$ 5745,20



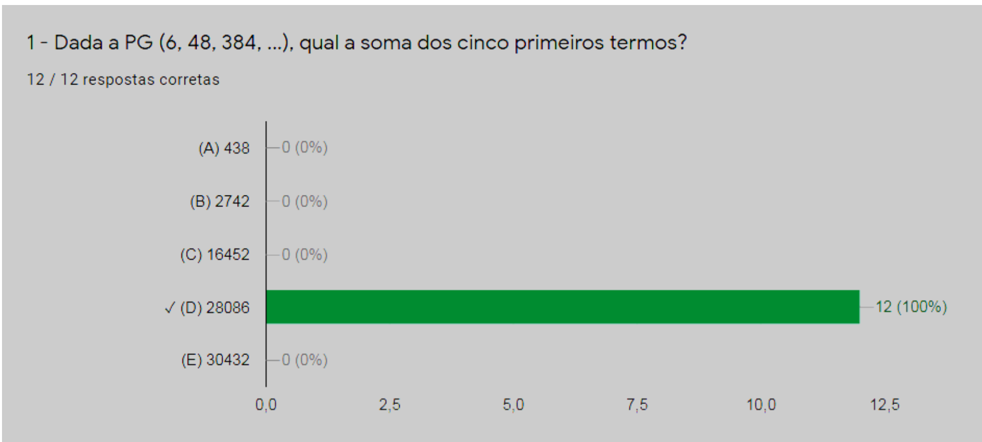
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Por se tratar de uma questão mais complexa, nenhum aluno quis compartilhar a solução da questão 5, visto não terem convicção do que haviam realizado. Assim, o professor fez a correção coletiva, como de costume.

3.5 SEMANA V

Na última semana de experimento, o sentimento era de realização. Os alunos teriam a oportunidade de manifestar via questionário aplicado suas satisfações e/ou insatisfações com o método apresentado, mas já afirmaram, em sua maioria, que estavam aprendendo muito mais assim e perguntaram se poderíamos seguir com esse modelo de ensino. As videoaulas trabalhadas ao longo da semana foram: Progressão Geométrica PG - Soma dos Termos de uma PG Finita (Aula 6 - aproximadamente 30 minutos) e Soma dos Termos de uma PG Infinita (Aula 7 - aproximadamente 28 minutos). Segue abaixo os resultados alcançados pelos 12 alunos (os mesmos estudantes da Semana IV exceto um aluno que não havia faltado, não compareceu a essa aula) nos Formulários que eram apresentados anteriormente às aulas síncronas.

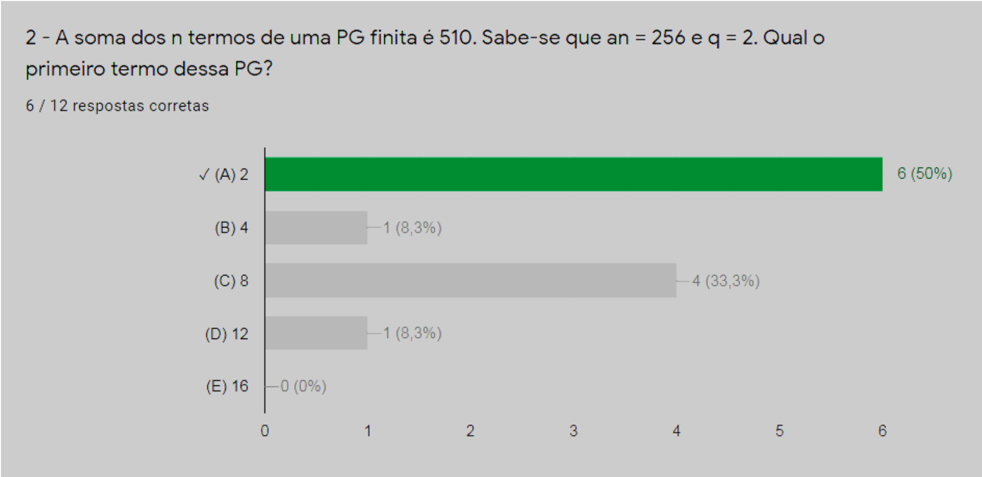
Figura 35 – Análise da Questão 1 do Formulário V



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

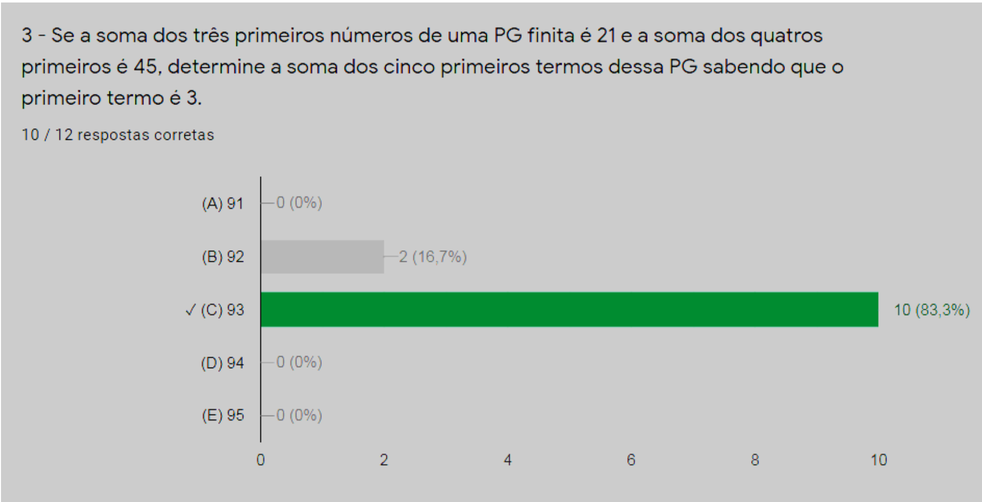
A primeira questão (Figura 38) é bem objetiva. Todos os alunos encontraram a razão e valeram-se da fórmula para chegar à solução. O que já não foi visto na questão 2 (Figura 39) – abaixo. Apenas 50% dos alunos acertou. O professor resolveu com os alunos para esclarecer os pontos de dificuldade.

Figura 39 – Análise da Questão 2 do Formulário V



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

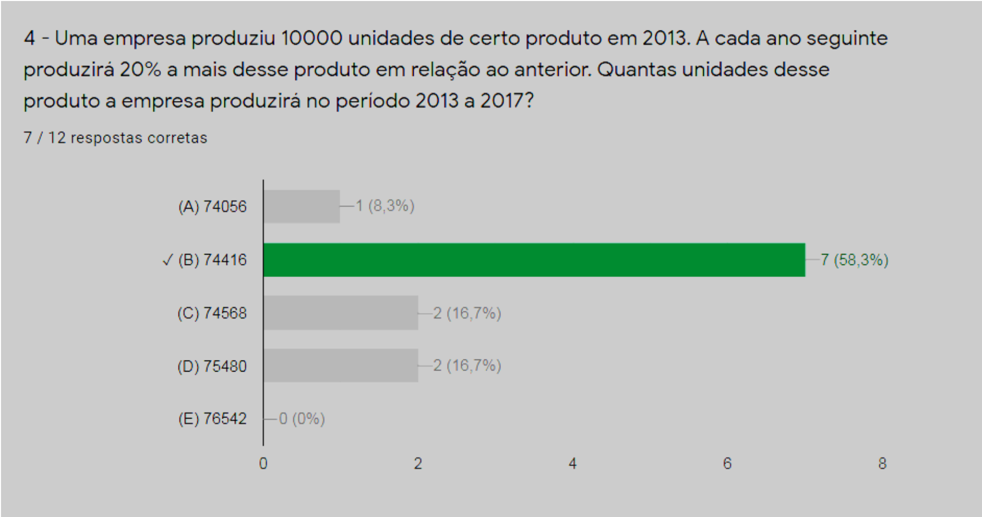
Figura 360 – Análise da Questão 3 do Formulário V



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Nessa questão (Figura 40), os alunos utilizaram o fato da soma dos três primeiros termos para descobrir o quarto, e assim, descobrir a razão. Ressalta-se que as revisões de equações do 2º grau foram válidas quando eles precisaram resolvê-la para encontrar q. Assim, com a razão, a quantidade de termos (cinco) e com o primeiro termo, ficou fácil encontrar a soma pedida. Os alunos que erraram a questão não associaram a parte inicial para chegar no quarto termo, mas entenderam o desenvolvimento.

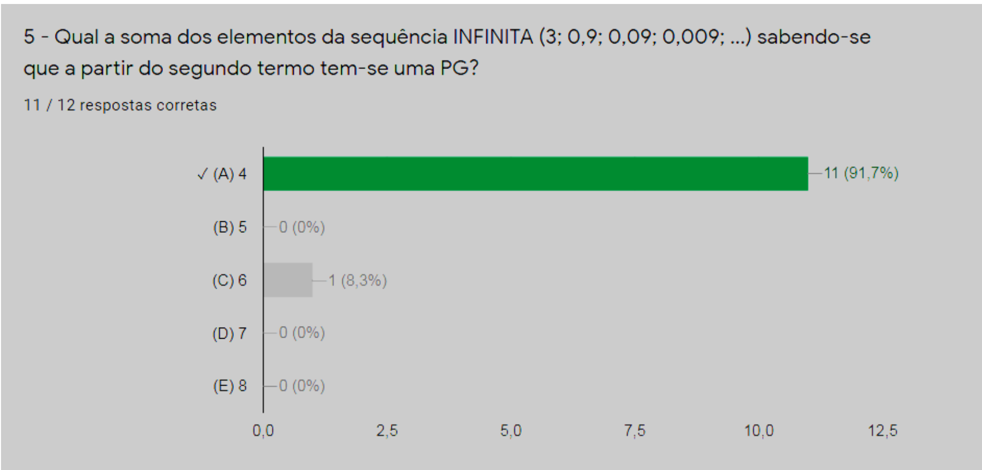
Figura 371 – Análise da Questão 4 do Formulário V



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Ao abordar a questão 4 (Figura 41), o docente trouxe uma aproximação do dia a dia, tendo em vista que há uma fábrica confecção próximo a cidade de Italva onde vários parentes de alunos trabalham. A causa do erro dos alunos foi a porcentagem que, após sanada, puderam compreender. Já a questão 5 (Figura 42) é bem direta na sua pergunta, com os dados bem definidos. A questão de fração também já havia sido trabalhada e a resolução se deu de forma fácil.

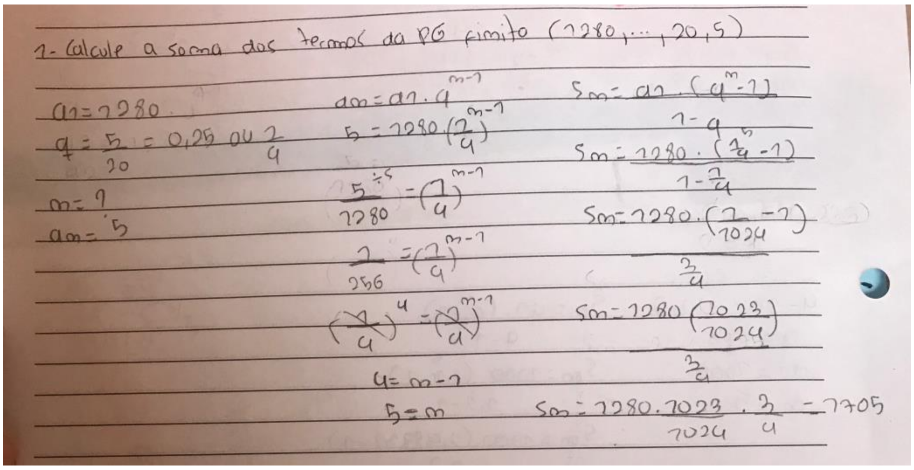
Figura 382 – Análise da Questão 5 do Formulário V



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Como de praxe, após a análise com os alunos, foram propostas atividades em grupo, em que se destacam as respostas abaixo.

Figura 393 – Questão 1 da Atividade em Grupo 5


1- Calcule a soma dos termos da PG finita (1280, ..., 20, 5)

$a_1 = 1280$

$q = \frac{5}{20} = 0,25$ ou $\frac{1}{4}$

$n = ?$

$a_n = 5$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$5 = 1280 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{5}{1280} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$4 = n-1$

$5 = n$

$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{1 - q}$

$S_n = \frac{1280 \cdot \left(\frac{1}{4}^5 - 1\right)}{1 - \frac{1}{4}}$

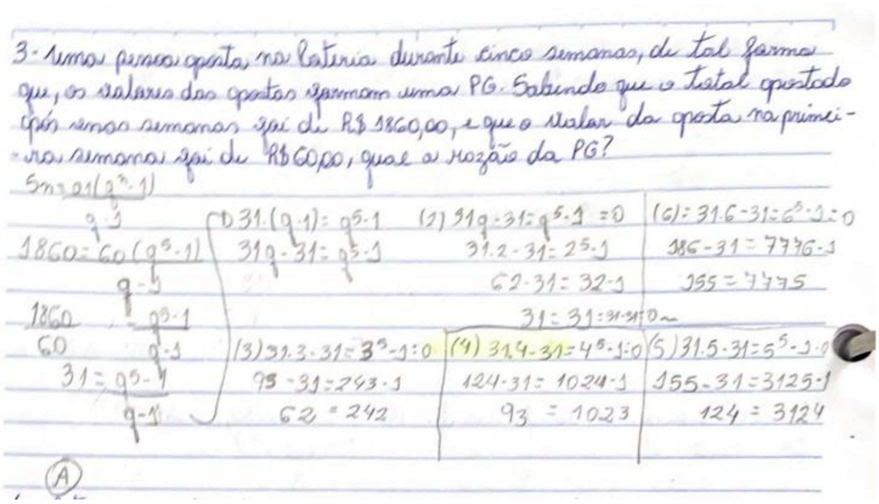
$S_n = \frac{1280 \cdot \left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{\frac{3}{4}}$

$S_n = \frac{1280 \left(\frac{1023}{1024}\right)}{\frac{3}{4}}$

$S_n = 1280 \cdot \frac{1023}{1024} \cdot \frac{3}{4} = 1705$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 404 – Questão 3 da Atividade em Grupo 5


3- Uma pessoa aposta na loteria durante cinco semanas, de tal forma que, os valores das apostas formam uma PG. Sabendo que o total apostado após cinco semanas foi de R$ 1860,00, e que o valor da aposta na primeira semana foi de R$ 60,00, qual a razão da PG?

$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$

$1860 = \frac{60 (q^5 - 1)}{q - 1}$

$\frac{1860}{60} = \frac{q^5 - 1}{q - 1}$

$31 = \frac{q^5 - 1}{q - 1}$

(1) $31 \cdot (q - 1) = q^5 - 1$; $31q - 31 = q^5 - 1$

(2) $31q - 31 - q^5 - 1 = 0$; $31 \cdot 2 - 31 = 2^5 - 1$; $62 - 31 = 32 - 1$; $31 = 31$

(3) $31 \cdot 3 - 31 = 3^5 - 1 = 0$; $93 - 31 = 243 - 1$; $62 = 242$

(4) $31 \cdot 4 - 31 = 4^5 - 1 = 0$; $124 - 31 = 1024 - 1$; $93 = 1023$

(5) $31 \cdot 5 - 31 = 5^5 - 1 = 0$; $155 - 31 = 3125 - 1$; $124 = 3124$

(6) $31 \cdot 6 - 31 = 6^5 - 1 = 0$; $186 - 31 = 7776 - 1$; $155 = 7775$

(A)

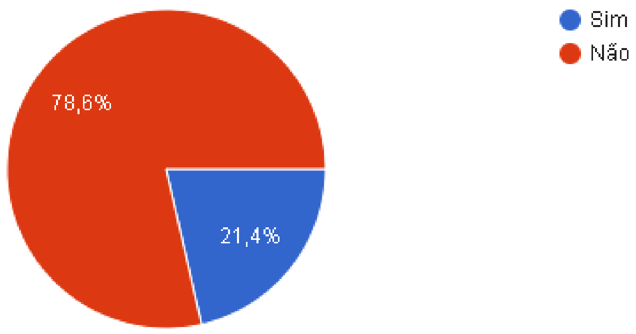
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.6 QUESTIONÁRIO

O processo avaliativo foi realizado ao longo das aulas, de acordo com os questionamentos e a análise da participação e da evolução dos alunos, bem como a entrega dos formulários e das atividades em grupo. Para finalizar a experimentação, foi aplicado um questionário de opinião, com o objetivo de identificar melhorias e obter uma visão mais ampla da forma como os alunos receberam a nova metodologia. Abaixo estão apresentados os resultados.

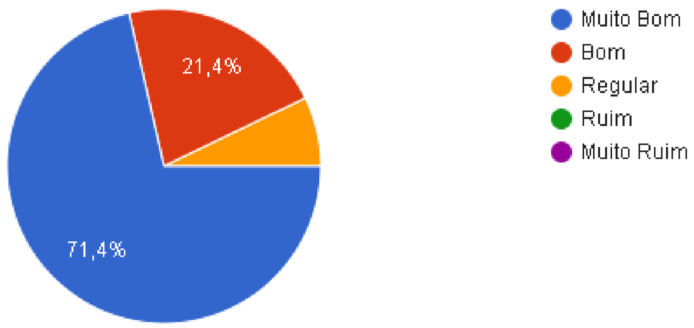
1- Você já havia estudado Progressões Aritméticas e/ou Geométricas anteriormente às aulas?

14 respostas



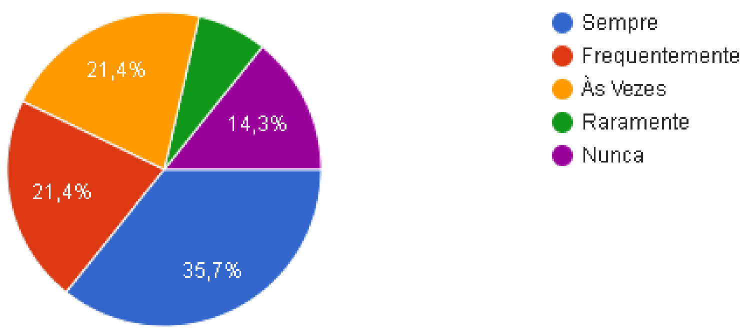
2- Qual o nível de esclarecimento das videoaulas, na sua opinião?

14 respostas



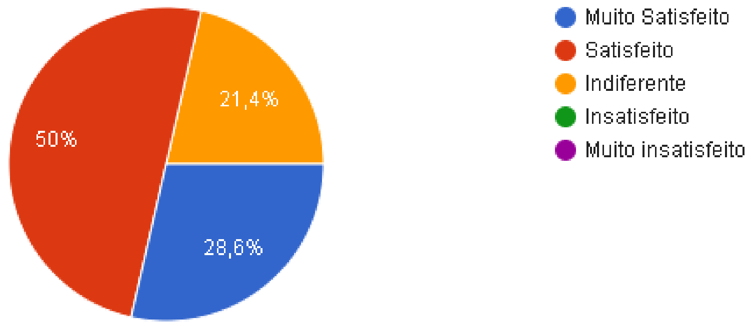
3- Ao assistir os vídeos, você pausava e fazia as devidas anotações com que frequência?

14 respostas



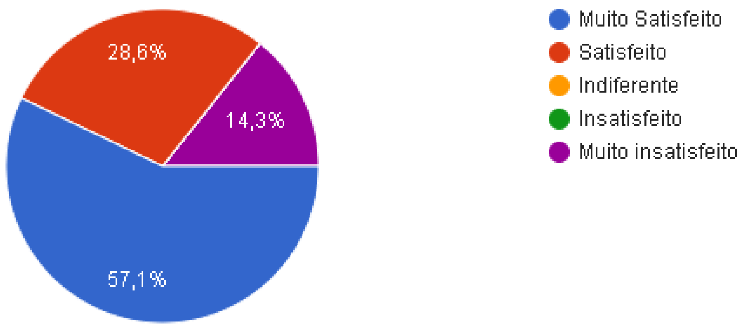
4- Como você avalia o seu aprendizado com os formulários?

14 respostas



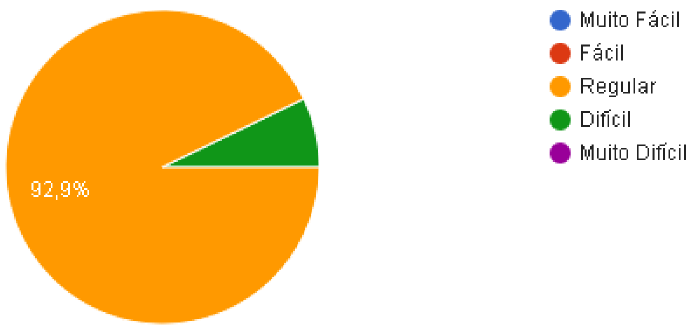
5- Como você avalia seu aprendizado com as Atividades em Grupo no Meet supervisionadas pelo professor?

14 respostas



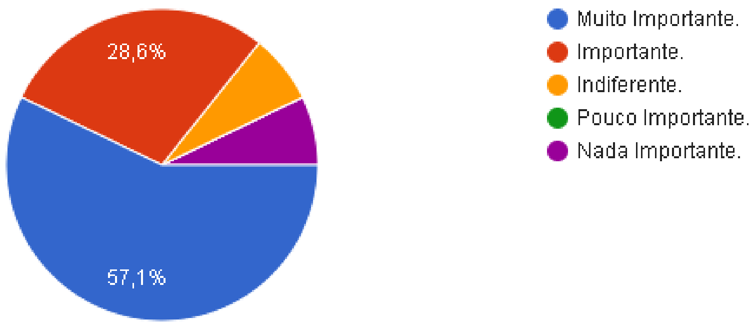
6- Qual o nível de dificuldade nas questões propostas?

14 respostas



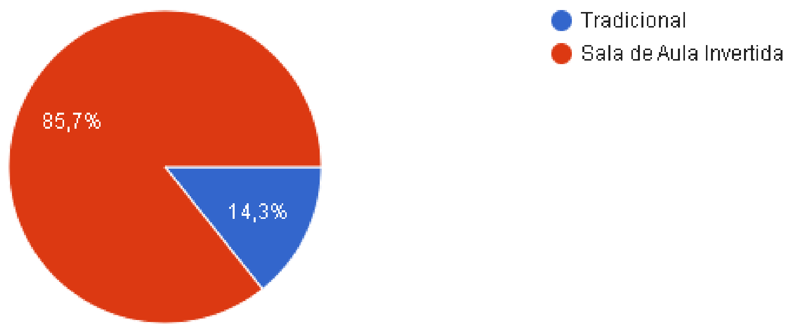
7- Qual a importância do trabalho em grupo, com seus colegas de turma, na sua aprendizagem?

14 respostas



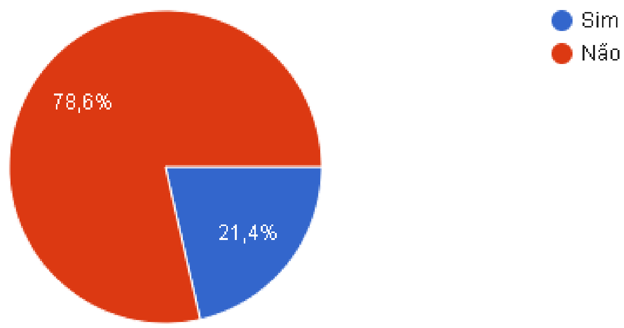
8- Qual metodologia você achou melhor?

14 respostas



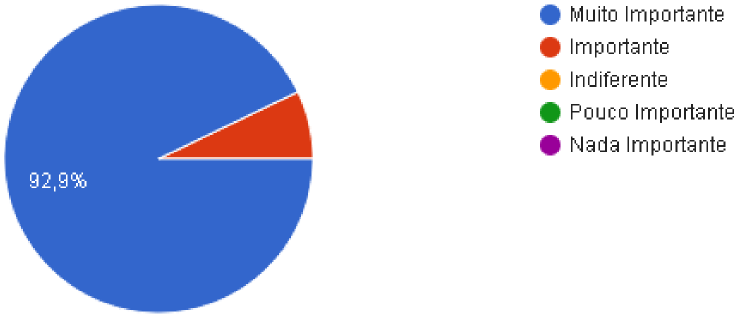
9- Devido as aulas estarem ocorrendo em um ambiente virtual, houve dificuldade na comunicação entre professor e turma?

14 respostas



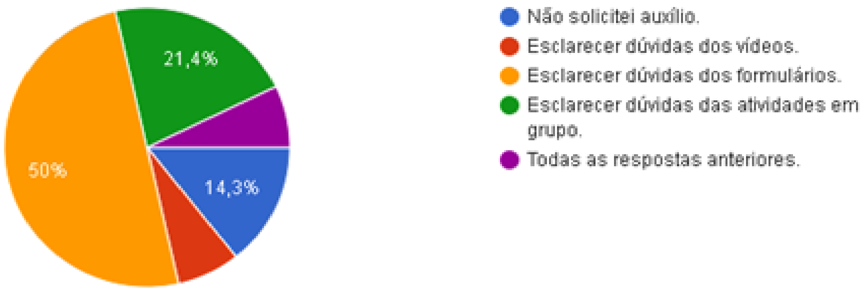
10- Sobre o papel do professor nas aulas, você o considera:

14 respostas



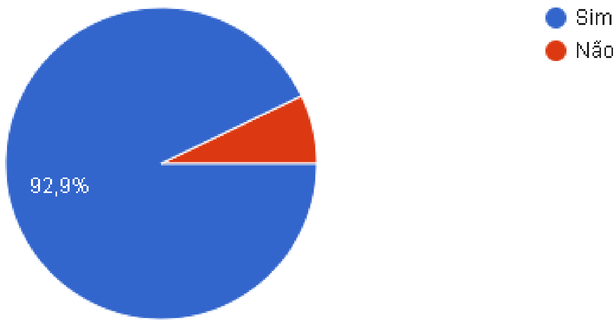
11- Ainda sobre a participação do professor nas aulas, você solicitou auxilio na maioria das vezes com qual finalidade?

14 respostas



12- Você gostaria de continuar com o método de sala de aula invertida nas aulas de Matemática?

14 respostas



13- Deixe aqui seu relato sobre o aprendizado nas aulas, dando sua opinião sore esse modelo de estudo.

14 respostas

O método que estamos usando para mim está sendo ótimo, sinceramente, matemática está sendo uma das matérias que estou tendo menos dificuldade

Foi uma forma de aprendizado diferente, mas que gostei muito e me adaptei!!

Muito Eficiente.

Meu aprendizado está bom, esse modelo de estudo é muito bom.

Foi muito bom, consegui poder adquirir novos conhecimentos, foi bom esse modelo de estudo ajudou bastante para mim junto com a apostilas, não importa o modelo desde que traga conhecimento e aprendizado então foi ótimo...

Eu tenho aprendido bastante, mais as vezes o professor explica eu entendo, mas na hora de fazer eu tenho dificuldades. As aulas são melhores assim pq tem como tirar dúvida com o professor.

Como já mencionado, a turma era composta por 15 alunos e 1 deles foi transferido ao longo do processo (também não chegou a assistir à aula) o que resulta no quantitativo de 14 alunos. As aulas síncronas eram gravadas e disponibilizadas para que os alunos faltosos em alguma semana específica pudessem colocar o conteúdo em dia, habilitando-o assim a responder o questionário.

Quanto ao primeiro item, os alunos que responderam por sim, disseram posteriormente se lembrar do professor do ano de escolaridade anterior mencionando progressão aritmética dentro do conteúdo de funções afins. No item 2, verificamos que a seleção do material a ser escolhido é de fundamental importância. Os alunos gostaram muito da didática do professor Ferretto, responsável por ministrar as videoaulas selecionadas. Diretamente ligada à questão 3, anotar as dúvidas e resumir o conteúdo estudado também é de fundamental importância para a aprendizagem. Mais de 50% realizavam as anotações de forma frequente ou sempre.

A avalição do aprendizado com os exercícios, sejam formulários ou atividades em grupo, também foram satisfatórios, tendo em vista que mais de 75% disseram se sentir muito satisfeito ou satisfeito. A questão seis traz a relevância onde quase a totalidade dos alunos consideram as questões propostas como sendo de nível regular, pois já haviam sido submetidos ao conteúdo e feito seus registros. A importância do trabalho em grupo e a falta de dificuldade na comunicação com o docente, bem como seu papel fundamental na metodologia foram refletidos nos itens 7, 9, 10 e 11.

Em um primeiro momento, os alunos não compreenderam bem o que foi questionado com relação a qual método de ensino eles preferiram: “Tradicional ou Sala de Aula Invertida” (item 8), tendo em vista imaginar que se tratava do Ensino Remoto. Após nova explicação do professor, essa questão foi respondida novamente alcançando 85,7% de aprovação dos estudantes e registrada acima. Pela resposta do item 12, verifica-se também essa aceitação, ao ponto de eles quererem a continuidade desse método para os próximos conteúdos (a saber, o aluno que marcou “não” foi o aluno mais “faltoso” das aulas síncronas). O que da mesma forma pode ser verificado através dos comentários deixados no item 13, em que foram selecionados os mais relevantes quanto a essa informação. Assim, a título de curiosidade, fica aqui explícito que se seguiu com essa metodologia para os demais conteúdos ao longo do ano letivo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo avaliar o método de sala de aula invertida na construção do conhecimento matemático sobre progressões aritméticas e geométricas em âmbito escolar. Assim, observou-se ao longo dessa proposta como o ensino de matemática pode ser desafiador, em especial diante do cenário da pandemia de covid-19, uma vez que todo o arcabouço físico da sala de aula dentro daquele modelo tradicional de ensino foi privado por questões de segurança sanitária. Entretanto, o estudo possibilitou, mesmo que às duras penas, pôr em prática novos modelos pedagógicos que já vinham sendo debatidos a respeito das metodologias do ensino da matemática, entre elas aquelas que possibilitam evoluir constantemente, construindo novos horizontes e tornando o aluno protagonista e sujeito no processo de ensino-aprendizagem bem como da sua própria existência.

Contextualizar as características dos métodos do ensino ativo e descrever as principais variáveis em torno do ensino híbrido e sala de aula invertida eram primordiais ao longo do processo. As metodologias ativas, tais como o ensino híbrido e a Sala de Aula Invertida, objeto de pesquisa deste trabalho, são uma ferramenta poderosa para essa construção autônoma, pois é perceptível que o mundo está em constante transformação, e a tecnologia está presente em todas as áreas. Dessa forma, é primordial que o professor tenha domínio dessas ferramentas e as utilize para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais integrado à realidade do aluno, fazendo do aprendizado da matemática algo mais prazeroso, retirando aquele estigma de disciplina “vilã”, responsável por boa parte das reprovações de alunos nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio.

Durante a pesquisa e a aplicabilidade na Escola Estadual João Guimarães, em Italva/RJ, ainda na fase de restrições da pandemia de covid-19, buscou-se analisar o método da Sala de Aula Invertida no ensino de pa e pg por meio de um estudo empírico. Notou-se, o quanto as novas metodologias podem ser eficazes e contribuir para o aprendizado da matemática, no caso específico para o ensino das progressões aritméticas e geométricas. Percebeu-se que, ao assistirem a videoaulas de terceiros, com explicações, trabalhos em pequenos grupos e discussões e correção das atividades, os alunos fizeram com que as interações entre eles e o professor fossem mais produtivas na construção do aprendizado, trazendo novas perspectivas, conforme relataram.

Destaca-se, no entanto, durante o experimento uma deficiência no trabalho: a falta de exemplos práticos envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Por exemplo, um conteúdo pertinente no qual seja possível observar a prevalência de progressões aritméticas e geométricas é a Matemática Financeira, mais especificamente Juros Simples e Juros Compostos, como demonstra Spinassé (2013). Para suprir tal necessidade, foi criado o Apêndice D, com atividades extras para serem exploradas pelos docentes durante o processo de aprendizagem. Esse material visa enriquecer a aplicação prática do tema abordado.

Por fim, por meio de todo o estudo, fica nítido a importância das TDICs no processo de ensino para as novas gerações e o aprofundamento do conhecimento sobre as diversas metodologias ativas, buscando colocá-las em prática de acordo com a realidade de cada um. Isso faz com que o processo de ensino-aprendizado seja mais interativo e dinâmico, contribuindo para a construção de sujeitos protagonistas do próprio conhecimento, autônomos e capazes de encontrar soluções diante dos problemas.

REFERÊNCIAS

BACICH, Lilian. Ensino Híbrido: proposta de formação de professores para uso integrado das tecnologias digitais nas ações de ensino e aprendizagem. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA DA EDUCAÇÃO (CBIE), 5., 2016, Manaus. **Anais** [...]. Manaus: CBIE, 2016.

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Aprender e ensinar com foco na educação híbrida**. **Revista Pátio**, [*s. l.*], v. 17, n. 25, p. 45-47, 2015.

BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello. **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

BERGMANN, Jonathan. **Aprendizagem invertida para resolver o problema do dever de casa**. Porto Alegre: Penso, 2018.

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida**: uma metodologia ativa de aprendizagem. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BONWELL, Charles; EISON, James. **Active Learning**: Creating excitement in the Classroom. Washington: The George Washington University, 1991.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018

BRASIL. **Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília, DF: MEC/SEF,** 1997.

CHRISTENSEN, Clayton M.; HORN, Michael B.; JOHNSON, Curtis W. **Inovação na sala de aula**: como a inovação disruptiva muda a forma de aprender. Porto Alegre: Bookman, 2012.

CHRISTENSEN, Clayton M.; HORN, Michael B.; STAKER, Heather. **Ensino Híbrido: Uma Inovação Disruptiva?** Uma introdução à teoria dos híbridos. Tradução Fundação Lemann e Instituto Península, maio 2013. Disponível em: https://www.christenseninstitute.org/publications/ensino-hibrido/. Acesso em: 20 de fevereiro de 2021.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DAMIANI, Magda Floriana; ROCHEFORT, Renato Siqueira; CASTRO, Rafael Fonseca de; DARIZ, Marion Rodrigues; PINHEIRO, Silvia Siqueira. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, n. 45, p. 57-67, maio/ago. 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. 4. ed. São Paulo: Ática, 2018.

Dissertações do PROFMAT – PROFMAT. https://profmat-sbm-org.br/dissertações/. Acesso em 16 de julho de 2024.

HORN, Michael B.; STAKER, Heather. **Blended**: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Leonardo, Fábio de. Matemática (Ensino Médio) I. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, Leandro Holanda Fernandes de; MOURA, Flavia Ribeiro de. O professor no ensino híbrido. *In*: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello. (org.). **Ensino Híbrido**: personalização e tecnologia na educação. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania:** aproximações jovens. Ponta Grossa: UEPG/PROEX, 2015b.

MORAN, José. Educação híbrida: um conceito-chave para a educação, hoje. *In*: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello. (org.). **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na Educação. Porto Alegre: Penso, 2015a.

MORAN, José. Novos modelos de sala de aula. **Revista Educatrix**, n.7, Editora Moderna, p. 33-37, 2013. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/modelos_aula.pdf. Acesso em: 10 fev. 2021.

MOTA, Ana Rita; WERNER DA ROSA, Cleci Teresinha. Ensaio sobre metodologias ativas: reflexões e propostas. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 25, n. 2, p. 261-276, maio 2018.

NEVES, Vander José das; MERCANTI, Luiz Bittencourt; LIMA, Maria Tereza; COSTA, Denny José Almeida (org.). **Metodologias Ativas**: inovações educacionais no ensino superior. Campinas: Pontes Editores, 2019.

SCHMITZ, Elieser Xisto da Silva. **Sala de aula invertida: uma abordagem para combinar metodologias ativas e engajar alunos no processo de ensino-aprendizagem**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Tecnologias Educacionais em Rede) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

SCOMPARIM, V. et al. Progressões Aritméticas e Geométricas: história, conceitos e aplicações. [*s. l: s. n.*]. Disponível em: http://www.revistaintellectus.com.br/artigos/2.12.pdf. Acesso em: 10 fev. 2021.

SPINASSÉ, Camila. **Introdução à Matemática Financeira para alunos na Educação de Jovens e Adultos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2013.

THADEI, Jordana. Mediação e educação na atualidade: um diálogo com formadores de professores. *In*: BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

VALENTE, José Armando. A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado: uma experiência com a graduação em midialogia. *In*: BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

VALENTE, José Armando. Prefácio. *In*: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (org.). **Ensino Híbrido**: personalização e tecnologia na educação. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

VALENTE, José Armando. Blended Learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 4, p. 79-97, 2014.

APÊNDICE A – FORMULÁRIOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Nome: ____

Ano: 2° ano E.M. Turma: 2001 Data: ____________

FORMULÁRIO 1 – Progressões Aritméticas: Introdução e Termo Geral

1. Qual das sequências abaixo não é uma PA?

(A) (2, 5, 8, 11, 14)

(B) (15, 10, 5, 0, -5)

(C) (1, -1, 1, -1, 1, -1)

(D) (4, 4, 4, 4, 4)

(E) (1, 4/3, 5/3, 2)

RESPOSTA: Esta sequência não é uma PA, pois as diferenças entre termos sucessivos são alternadamente -2 e 2. Todas as demais são PA, verifique:

(A) É uma PA de razão 3

(B) É uma PA de razão -5

(D) É uma PA de razão 0

(E) É uma PA de razão 1/3

2. O décimo quinto termo da PA (6, 10, 14, ...) é?

(A) 58

(B) 62

(C) 66

(D) 68

(E) 70

RESPOSTA: Na PA (6, 10, 14, ...), observamos que a diferença entre os termos consecutivos, ou seja, a razão da PA, é 4. Assim, podemos ir somando 4 unidades até encontrar o décimo quinto termo da sequência ou então utilizarmos a fórmula do termo geral de uma PA (mais indicado):

$a_n = a_1 + (n-1) \,.\, r$

$a_{15} = 6 + (15-1).4$

$a_{15} = 6 + 14 \,.\, 4$

$a_{15} = 6 + 56 = 62$

3. Analise as informações sobre as classificações das progressões aritméticas:

I - Uma PA é crescente quando a sua razão é maior que zero.

II - Uma PA é decrescente quando sua razão é um número ímpar.

III - Uma PA é constante quando sua razão é nula.

Estão corretas as afirmativas:

(A) I e II

(B) I e III

(C) II e III

(D) I, II e III

(E) N.R.A.

RESPOSTA:

I - Uma PA é crescente quando a sua razão é maior que zero. (VERDADEIRO)

II - Uma PA é decrescente quando sua razão é um número ímpar. (FALSO).

Uma PA é descescente quando sua razão é um número menor que zero.

III - Uma PA é constante quando sua razão é nula. (VERDADEIRO)

4. Qual a razão de uma PA onde $a_1 = -8$ e $a_{12} = 36$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

RESPOSTA: Sabemos que $a_1 = -8$ e $a_{12} = 36$. Substituindo na fórmula do termo geral, temos:

$a_n = a_1 + (n-1) \ . \ r$

$a_{12} = -8 + (12-1) \ . \ r$

$36 = -8 + 11 \ . \ r$

$36 + 8 = 11 \ . \ r$

$44 = 11 \ . \ r$

$r = \frac{44}{11} = 4$

5. O preço de um carro novo é R$ 45000,00 e diminui R$ 1500,00 a cada ano de uso. Qual será o preço dele após 5 anos de uso, em reais?

(A) 36250 (B) 37500 (C) 38000 (D) 39250 (E) 47500

RESPOSTA: Basta diminuir 1500 reais 5 vezes do valor total ou então aplicar a fórmula do termo geral de uma PA: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, onde:

$a_1 = 4500$ (valor inicial)

n = 6 (de a_1 para a_2 , temos um ano; de a_2 para a_3, temos dois anos; de a_3 para a_4, temos três anos; de a_4 para a_5, temos quatro anos; de a_5 para a_6, temos cinco anos; logo a PA tem seis termos)

r = -1500 (negativo, pois diminui esse valor a cada ano)

Assim, o preço do carro após cinco anos de uso é o sexto termo da PA:

$a_6 = 45000 + (6-1) \cdot (-1500)$

$a_6 = 45000 + 5 \cdot (-1500)$

$a_6 = 45000 - 7500$

$a_6 = 37500$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Nome: ____

Ano: 2° ano E.M. Turma: 2001 Data: ____________

FORMULÁRIO 2 – Progressões Aritméticas: Notações Especiais e Interpolação

As progressões aritméticas, de acordo com o número de termos, podem ser consideradas finitas (quando podemos determiná-los) ou infinitas (quando não podemos determiná-los).

1. Observe as afirmativas a seguir:

I – (2, 5, 8, 12, ...) é uma PA infinita;

II – (..., – 4, – 8, – 12) é uma PA finita;

III – (– 2, 7, 16, ..., 52, 61) é uma PA infinita

Estão corretas:

(A) Apenas I

(B) I e III

(C) II e III

(D) I, II e III

(E) Nenhuma das três

RESPOSTA: Analisando as afirmativas, temos que

I – Não é sequer uma PA, POIS 5 – 2 = 3 e 12 – 8 = 4.

II – Não pode ser finita, pois não conhecemos seu início.

III – Não é infinita. Apesar de possuir reticências, sabemos seu início e seu fim. Não sabemos quantos termos há, mas certamente é um número que pode ser determinado.

2. O valor de x que torna a sequência (x – 5, 8, 2x – 6) uma PA é:

(A) – 2 (B) 0 (C) 5 (D) 9 (E) 15

RESPOSTA: Sabemos que a sequência é uma PA, podemos afirmar que $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$.

Assim, temos:

$2x - 6 - 8 = 8 - (x - 5)$

$2x + x = 13 + 14$

$3x = 27$

$x = \frac{27}{3} = 9$

3. Quantos números inteiros e positivos, formados por três algarismos, são múltiplos de 9?

(A) 99 (B) 100 (C) 108 (D) 154 (E) 999

RESPOSTA: O primeiro múltiplo de 9 com três algarismos é 108, e o último é 999. Esses são o primeiro e o último da PA cuja razão é 9, pois se trata da lista dos múltiplos de 9. Sendo assim, basta substituir essas informações na fórmula para encontrar o termo geral de uma PA:

$a_n = a_1 + (n-1) \ . \ r$

$999 = 108 + (n-1) \ . \ 9$

$999 = 108 + 9n - 9$

$999 - 108 + 9 = 9n$

$9n = 900$

$n = \frac{900}{9} = 100$

Como essa PA possui 100 termos, o número de múltiplos de 9 entre 100 e 1000 é 100.

4. Interpolando seis meios aritméticos entre 4 e 39, o TERCEIRO TERMO DA PA FORMADA será?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

RESPOSTA: Interpolando seis meios aritméticos entre 4 e 39, temos a PA (4, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, 39) com oito termos. Agora, basta resolver:

$a_n = a_1 + (n-1) \ . \ r$

$39 = 4 + (8-1) \ . \ r$

$39 - 4 = 7r$

$r = \frac{35}{7} = 5$

Assim, a PA é (4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39), sendo o terceiro termo igual a 14.

5. O número mensal de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33000; em fevereiro, 34500; em março, 36000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

(A) 38000 (B) 40500 (C) 41000 (D) 42000 (E) 48000

RESPOSTA: É fácil observar que a quantidade de passageiros varia de 1500 em 1500, acarretando numa PA (33000, 34500, 36000, ...). O sétimo termo desta PA é referente ao mês de julho.

Calculando então, temos:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_7 = 33000 + (7-1) \cdot 1500$

$a_7 = 33000 + 6 \cdot 1500$

$a_7 = 33000 + 9000$

$a_7 = 42000$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Nome: ____

Ano: 2° ano E.M. Turma: 2001 Data: ____________

FORMULÁRIO 3 – Progressões Aritméticas: Soma dos Termos; Progressões Geométricas: Introdução.

1. Use a fórmula da soma dos termos de um PA para determinar a soma dos cem primeiros números inteiros positivos.

(A) 5050 (B) 10010 (C) 100 (D) 1010 (E) 5000

Resposta: Sobre os 100 primeiros números inteiros positivos, podemos afirmar que o primeiro número é 1 e o centésimo é 100. Assim, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \;.\; n}{2}$$

$$S_{100} = \frac{(1 + 100) \;.\; 100}{2}$$

$$S_{100} = \frac{101 \;.\; 100}{2}$$

$$S_{100} = 5050$$

2. (PUC-RJ-ADAPTADA) Tem-se uma progressão aritmética de 20 termos onde o 1° termo é igual a 5. A soma de todos os termos dessa progressão aritmética é 480. Qual é seu vigésimo termo?

(A) 420 (B) 425 (C) 430 (D) 435 (E) 440

RESPOSTA:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \;.\; n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(5 + a_{20}) \;.\; 20}{2}$$

$$480 \;.\; 2 = 100 + 20 \;.\; a_{20}$$

$$960 - 100 = 20\, a_{20}$$

$$a_{20} = \frac{860}{20} = 430$$

3. Um ciclista percorre 40 km na primeira hora; 36 km na segunda hora, e assim por diante, formando uma progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 6 horas?

(A) 170 (B) 180 (C) 190 (D) 200 (E) 210

RESPOSTA: A quantidade de km percorridos forma a seguinte PA (40, 36, …, a_6), até o a_6 que é quantidade de km percorridos após 6 horas.

Identificamos claramente que a razão r = - 4.

Assim:

$a_n = a_1 + (n-1) \, . \, r$

$a_6 = 40 + (6-1) \, . \, (-4)$

$a_6 = 40 - 20 = 20$

Agora, como queremos saber a quantidade de km que irá percorrer em 6 horas, utilizamos a fórmula da soma dos termos da PA:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \, . \, n}{2}$$

$$S_6 = \frac{(40+20) \, . \, 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{60 \, . \, 6}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

4. Uma PG é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é resultado da # do termo anterior por uma constante q, denominada como **@**. As palavras que substituem corretamente, e respectivamente, os símbolos # e **@** é:

(A) Adição e Razão

(B) Subtração e Parte Imaginária

(C) Multiplicação e Razão

(D) Divisão e Parte Imaginária

(E) Potenciação e Radiciação

RESPOSTA: Teoria.

5. De acordo com as classificações de uma PG, podemos afirmar que:

(A) (1, 2, 4, 6, 8, 10, ...) é uma PG crescente

(B) (... -27, -9, -3, -1) é uma PG crescente

(C) (7, -7, 7, -7, 7, ...) é uma PG nula

(D) (1, 1/5, 1/125, 1/625) é uma PG alternada

(E) (10, 10, 10, 10, ...) é uma PG constante

RESPOSTA: Vamos analisar as alternativas.

(A) Não é sequer uma PG, pois 2/1 não é igual a 10/8, por exemplo.

(B) A razão da PG é 1/3 (está entre 0 e 1) e seu primeiro termo é menor que zero; logo é crescente.

(C) A razão da PG é menor que zero (seu valor é -1); logo é uma PG alternada.

(D) A razão da PG é 1/5 (está entre 0 e 1) e seu primeiro termo é positivo; logo é decrescente.

(E) Uma PG é constante quando q = 1, fato esse que ocorre aqui.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Nome: ____

Ano: 2° ano E.M. Turma: 2001 Data: _____________

FORMULÁRIO 4 – Progressões Geométricas: Termo Geral, Notações Especiais e Interpolação

1. Qual é o 10° termo da PG (1/3, 1, 3, 9, ...)

(A) 243 (B) 729 (C) 2187 (D) 6561 (E) 19683

RESPOSTA: Temos que o primeiro termo é 1/3 e a razão é 3, pois [3:(1/3) = 3:1 = 9:3 = 3]. Aplicando a fórmula do termo geral da PG temos:

$a_n = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{3}.3^{10-1} = \frac{1}{3}.3^9 = 3^8 = 6561$

2. (UCS) O valor de x para que a sequência (x+1, x, x+2) seja uma PG é:

(A) 1/2 (B) 2/3 (C) -2/3 (D) -1/2 (E) 3

RESPOSTA: Por se tratar de uma PG, podemos afirmar que $a_2/a_1 = a_3/a_2$:

$x/(x+1) = (x+2)/x \Rightarrow x^2 = x^2 + 2x + x + 2 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -2/3$

3. Interpolando quatro meios geométricos entre 6 e 192, temos a PG:

(A) (6, 12, 24, 48, 96, 192)

(B) (6, 12, 24, 46, 98, 192)

(C) (6, 14, 22, 46, 98, 192)

(D) (6, 12, 28, 44, 96, 192)

(E) (6, 12, 24, 48, 98, 192)

RESPOSTA: Sabemos que $a_n = 192$ e que o primeiro termo é 6. Ao interpolar quatro meios geométricos entre 6 e 192, a PG fica com seis termos, ou seja, n = 6. Aplicando a fórmula do termo geral da PG encontramos a razão e, em seguida, seus elementos.

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow 192 = 6. q^{6-1} \Rightarrow \frac{192}{6} = q^5 \Rightarrow 32 = q^5 \Rightarrow q = 2$$

Assim, como a razão é 2, escrevemos a PG (6, 12, 24, 48, 96, 192).

4. Uma população de bactérias dobra seu número a cada 30 minutos. Considerando que o processo se inicia com uma única bactéria, após quanto tempo existirão 512 bactérias?

(A) 3 horas

(B) 3 horas e 30 minutos

(C) 4 horas

(D) 4 horas e 30 minutos

(E) 5 horas

RESPOSTA: Considerando que essa população dobra seu número a cada 30 minutos, temos a seguinte PG até chegar em 512:

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512), onde 512 é o décimo termo.

Assim sendo, a população foi dobrada nove vezes. 30 . 9 = 270 minutos = 4 horas e 30 minutos.

Fica como solução alternativa identificar os termos e aplicar na fórmula do termo geral!

5. (ENEM) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?

(A) $P(t) = 0{,}5.t^{-1}+8000$

(B) $P(t) = 50.t^{-1}+8000$

(C) $P(t) = 4000.t^{-1}+8000$

(D) $P(t) = 8000.(0{,}5)^{t-1}$

(E) $P(t) = 8000.(1{,}5)^{t-1}$

RESPOSTA: O número de unidades produzidas forma uma PG em função do tempo decorrido, em que o primeiro termo é 8000 e a razão é 1,5. Assim, a lei de formação desse número de unidades é dada por $P(t)=8000.(1{,}5)^{t-1}$.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Nome: ____

Ano: 2° ano E.M.   Turma: 2001   Data: _____________

FORMULÁRIO 5 – Progressões Geométricas: Soma Finita e Infinita dos Termos

1. Dada a PG (6, 48, 384, ...), qual a soma dos cinco primeiros termos?

(A) 478

(B) 2742

(C) 16452

(D) 28086

(E) 30432

RESPOSTA: A soma dos cinco termos da PG é dada pela fórmula: $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Assim, como q = 8 (pois 48:6 = 8), temos:

$$S_5 = 6 \cdot \frac{1-8^5}{1-8} = 6 \cdot \frac{1-32768}{-7} = 6 \cdot \frac{-32767}{-7} = 28086$$

2. A soma dos n termos de uma PG finita é 510. Sabe-se que an = 256 e q = 2. Qual o primeiro termo dessa PG?

(A) 2

(B) 4

(C) 8

(D) 12

(E) 16

RESPOSTA: Aplicando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita temos:

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow 510 = a_1 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow 510 = a_1 \cdot \frac{1-2^n}{-1} \Rightarrow -510 = a_1 - 2^n a_1$ (i)

Utilizando a fórmula do termo geral da PG, temos ainda que:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 256 = a_1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 256 = a_1 \cdot \frac{2^n}{2} \Rightarrow 512 = 2^n a_1 \text{ (ii)}$$

Substituindo (ii) em (i), temos: $-510 = a_1 - 2^n a_1 \Rightarrow -510 = a_1 - 512 \Rightarrow 512 - 510 = a_1 = 2$

3. Se a soma dos três primeiros números de uma PG finita é 21 e a soma dos quatros primeiros é 45, determine a soma dos cinco primeiros termos dessa PG sabendo que o primeiro termo é 3.

(A) 91 (B) 92 (C) 93 (D) 94 (E) 95

RESPOSTA: Temos que $S_4 = a_4 + a_3 + a_{2.} + a_1$ e $S_3 = a_3 + a_2 + a_1$

Assim, $S_4 - S_3 = a_4 = 45 - 21 = 24$. Utilizando a fórmula do termo geral, encontramos a razão:

$$a_n = a_{1.}.q^{n-1} => a_4 = 3.q^{4-1} => \frac{24}{3} = q^3 => q = \sqrt[3]{8} = 2$$

Enfim, aplicamos na fórmula da soma dos termos de uma PG finita.

$$S_n = a_{1.}.\frac{1-q^n}{1-q} => S_5 = 3.\frac{1-2^5}{1-2} = 3.\frac{1-32}{-1} = 3 . 31 = 93$$

4. Uma empresa produziu 10000 unidades de certo produto em 2013. A cada ano seguinte produzirá 20% a mais desse produto em relação ao anterior. Quantas unidades desse produto a empresa produzirá no período 2013 a 2017?

(A) 74056 (B) 74416 (C) 74568 (D) 75480 (E) 76542

RESPOSTA: O problema caracteriza uma PG de razão 1,2 (pois a cada ano aumenta 20 do valor referente ao ano anterior).

Entre 2013 e 2017, incluindo-os há 5 anos. Logo, n = 5.

Aplicando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita, descobrimos a quantidade de unidades no período dado.

$$S_n = a_{1.}.\frac{1-q^n}{1-q} => S_5 = 10000.\frac{1-1,2^5}{1-1,2} => S_5 = 10000 . 7,4416 = 74416$$

5. Qual a soma dos elementos da sequência INFINITA (3; 0,9; 0,09; 0,009; ...), sabendo-se que a partir do segundo termo tem-se uma PG?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

RESPOSTA: Observamos que a partir do segundo termo, temos uma PG de razão 0,1. Assim, as somas dos termos dessa nova PG, a saber (0,9; 0,09; 0,009; ...), é:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

Somando 3 (primeiro termo da sequência dada) ao valor encontrado acima temos: 3 + 1 = 4.

APÊNDICE B – ATIVIDADES EM GRUPO

ATIVIDADE EM GRUPO 1

1- Encontre o termo geral da P.A. (3, 7, ...)

*Qual o valor do 30° termo dessa sequência?

2- Determine o 32° termo da P.A. (15, 11, 7, ...)

*Essa P.A. é crescente, decrescente ou constante?
Por quê?

3 – Quantos termos tem a P.A. (9, 27, 36, ..., 396)

4- Interpole 5 meios aritméticos entre – 2 e 40.

Interpolar meios aritméticos entre dois números dados significa inserir números de tal forma que a sequência gerada seja uma p.a.

5- (ENEM) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

(A) 40 (B) 60 (C) 100 (D) 115 (E) 120

ATIVIDADE EM GRUPO 2

1- Qual afirmação não é verdadeira numa p.a. de razão r:

a) O sétimo termo é igual ao primeiro somado ao sextuplo da razão.
b) O décimo termo é igual ao quarto somado ao quíntuplo da razão.
c) A subtração entre o vigésimo terceiro termo e o vigésimo segundo é igual a razão.
d) O nono termo é igual ao terceiro termo somado ao sextuplo da razão.

2- Determine x, para que (x + 1, 3x + 7, 7x + 5) formem uma p.a.

*Qual é a razão dessa p.a.?

3 – Obtenha uma p.a. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

4- (UFSM) As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte em todo mundo. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde, 17,3 milhões de pessoas morreram em 2012, vítimas dessas doenças. A estimativa é que, em 2030, esse número seja de 23,6 milhões.
Suponha que a estimativa para 2030 seja atingida e considere (an), n sendo natural, a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas), por doenças cardiovasculares no mundo, com n = 1 correspondendo a 2012, com n = 2 correspondendo a 2013 e assim por diante.
Se (an) é uma p.a., então o oitavo termo dessa sequência, em milhões de pessoas, é igual a:

(a) 19,59
(b) 19,61
(c) 19,75
(d) 20,10

*Se a pergunta fosse:
De acordo com a estimativa, quantas pessoas morreriam nesse período, de 2012 a 2030?

Será que precisaríamos calcular os valores de todos os anos para depois somá-los e encontrar a resposta?

Certamente não!
Mas isso é um assunto para a próxima aula!

ATIVIDADE EM GRUPO 3

1 – Calcule o valor de um imóvel vendido a um cliente nas seguintes condições:
primeira parcela de 600 reais e, daí em diante, parcelas que aumentam 5 reais a cada mês, até completar o pagamento, em 12 anos.

2 – O 11° termo de uma PA é 123 e sua razão vale 7. Determine a soma de seus termos.

3 – Quantos termos da PA (3, 19, 35, ...) devem ser somados para que Sn = 472?

4 – Verifique se cada sequência dada é uma PG. Em caso positivo, dê o valor da razão q.

a) (1, 3, 9, 27, 81)
b) (2, 4, 6, 8, 10, 12)
c) (400, 200, 100, 50)
d) (5, -10, 20, -40, 80, -160)
e) (3, 0, 0, 0, 0, 0)

5 – Classifique cada PG identificada na questão anterior.

ATIVIDADE EM GRUPO 4

1 – Qual é o sétimo termo da PG (2, 6, ...)?

2 – Que número deve ser adicionado a 2, 6 e 14 para que os números assim obtidos sejam, nessa ordem termos consecutivos de uma PG? Liste a PG formada.

3 – Quantos termos eu devo interpolar entre 8 e 2^{23} para que a sequência forme uma PG, sabendo que a razão entre os temos é 4?

4 – (UFPE) Suponham que o preço de um automóvel se desvalorize 10% ao ano nos seus cinco primeiros anos de uso. Se esse automóvel novo custou R$ 10000,00, qual será o seu valor após os cinco anos de uso?

(A) R$ 5550,00 (B) R$ 5804,00 (C) R$ 6204,30 (D) R$ 5904,90 (E) R$ 5745,20

5 – Três números que estão em PG, tem soma 105 e produto 27000. Determine os números.

ATIVIDADE EM GRUPO 5

1 – Calcule a soma dos termos da PG (1280, ..., 20, 5).

2 – Quantos termos devemos considerar na PG (3, 6, ...) para obter uma soma igual a 765?

3 – Uma pessoa aposta na loteria durante cinco semanas, de tal forma que, os valores das apostas formam uma PG. Sabendo que o total apostado após essas semanas foi de R$ 1860,00, e que o valor da aposta na primeira semana foi de R$ 60,00, qual a razão dessa PG? ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

4 – Determine o valor de 1/3 + 2/9 + 4/27 + ...

5 – A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1, e a medida de cada lado de cada um dos outros triângulos é 2/3 da medida do lado do triângulo imediatamente anterior. Qual é a soma dos perímetros desses triângulos nessa sequência infinita?

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – UFES

Universidade Federal do Espírito Santo

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Nome: ____

Ano: 2° ano E.M.   Turma: 2001   Data: _____________

QUESTIONÁRIO

1- Você já havia estudado Progressões Aritméticas e/ou Geométricas anteriormente às aulas?

( ) Sim   ( ) Não

2- Qual o nível de esclarecimento das videoaulas na sua opinião?

( ) Muito bom   ( ) Ruim
( ) Bom   ( ) Muito ruim
( ) Regular

3- Ao assistir os vídeos, você pausava e fazia as devidas anotações com que frequência?

( ) Sempre   ( ) Raramente
( ) Frequentemente   ( ) Nunca
( ) Às vezes

4- Como você avalia o seu aprendizado com os Formulários?

( ) Muito satisfeito   ( ) Insatisfeito
( ) Satisfeito   ( ) Muito insatisfeito
( ) Indiferente

5- Como você avalia seu aprendizado com as Atividades em Grupo no Meet supervisionadas pelo professor?

( ) Muito satisfeito   ( ) Insatisfeito
( ) Satisfeito   ( ) Muito insatisfeito
( ) Indiferente

6- Qual o nível de dificuldade nas questões propostas?

( ) Muito fácil
( ) Fácil
( ) Regular
( ) Difícil
( ) Muito difícil

7- Qual a importância do trabalho em grupo, com seus colegas de turma, na sua aprendizagem?

( ) Muito importante
( ) Importante
( ) Indiferente
( ) Pouco importante
( ) Nada importante

8- Qual metodologia de ensino você achou melhor?

( ) Tradicional
( ) Sala de aula invertida

9- Devido às aulas estarem ocorrendo em um ambiente virtual, houve dificuldade na comunicação entre professor e turma?

( ) Sim
( ) Não

10- Sobre o papel do professor nas aulas, você o considera:

( ) Muito importante
( ) Importante
( ) Indiferente
( ) Pouco importante
( ) Nada importante

11- Ainda sobre a participação do professor nas aulas, você solicitou auxílio na maioria das vezes com qual finalidade?

( ) Não solicitei auxílio
( ) Esclarecer dúvidas dos vídeos

APÊNDICE D – ATIVIDADES EXTRAS

Atividade Resolvida 1: Marina aplicará R$ 1000,00 a juros simples de 2% ao mês. Contando o capital aplicado por ela mais o juro a receber, quanto ela terá ao final de um mês? De dois meses? De três meses? De t meses?

A aplicação juros simples de 2% ao ano, significa que, a cada mês, Marina receberá de juro a quantia de 2% do capital aplicado: 2% de 1000 = 0,02 . 1000 = 20.

Desta forma, contando o capital aplicado mais o juro recebido ela terá (em reais):

- Após um mês:

1000,00 + 20,00 = 1020,00

- Após dois meses:

1000,00 + 2 · 20,00 = 1040,00

- Após três meses:

1000,00 + 3 · 20,00 = 1060,00

- Após t meses:

(1000,00 + t · 20,00)

Observa-se que: (C, C + C.i, C + 2C.i, C + 3C.i) = (capital inicial, montante após 1 período, montante após 2 período, montante após 3 período), onde, "C. i", é o juro recebido em um período de aplicação, isto é, a razão da PA. O juro encontrado somado ao capital aplicado resultam no que chamamos montante da aplicação. Os valores encontrados formam a sequência (1020, 1040, 1060, 1000 + 20t), que formam uma PA. de razão igual a 20.

Para calcular, por exemplo, o valor do montante após 8 meses, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_8 = 1000 + (8 - 1) . 20 = 1140$$

Atividade Resolvida 2: Um capital de R$ 100,00 foi emprestado a juros compostos de 10% a.m. Calcule a evolução da dívida nos quatro primeiros meses.

No regime de juros compostos, diferentemente do sistema de juros simples, a taxa de juros incide não apenas sobre o capital, mas também nos juros gerados nos meses anteriores.
No nosso caso, aumentar 10% é o mesmo que multiplicar por (1 + 10/100) = 1,1.

Dessa forma, temos:

Tempo	*Cálculo*	*Valor (em reais)*
0	-	100,00
1	$100.(1{,}1)^1$	110,00
2	$100.(1{,}1)^2$	121,00
3	$100.(1{,}1)^3$	133,10
4	$100.(1{,}1)^4$	146,41

Sendo assim, os valores encontrados são tais que, o termo posterior será sempre o termo anterior multiplicado por um valor constante, o que ocorre em uma PG.

Atividade Resolvida 3: Uma doceria vendia brigadeiros a R$ 1,50. A loja decidiu fazer uma promoção, na qual o cliente pagará de acordo com a quantidade que comprar, limitada a 10 brigadeiros, segundo a tabela:

Nº de brigadeiros	1	2	3	4
Valor unitário (R$)	1,42	1,34	1,26	1,18

a) Qual é a razão dessa PA?

Veja que o valor da PA decresce a medida que aumenta o número de brigadeiros. Temos que:

$$r = a_2 - a_1 = 1{,}34 - 1{,}42 = -\ 0{,}08$$

A razão é – 0,08.

b) Se alguém comprar 10 brigadeiros, qual será o valor total da compra?

Calculando o preço o valor unitário do brigadeiro para 10 unidades temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{10} = 1{,}42 + (10 - 1).\ (-0{,}08) = 1{,}42 + 9\ .\ (-0{,}08) = 1{,}42 - 0{,}72 = 0{,}70$$

Assim, comprando 10 brigadeiros, o valor total da compra é 0,70 . 10 = R$ 7,00 reais.

c) Comprando com valor não promocional, quanto uma pessoa economizaria se comprasse 8 brigadeiros na promoção?

Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, teríamos:

$$a_n=a_1+(n-1)r$$

$$a_8 = 1{,}42 + (8-1) . (-0{,}08) = 1{,}42 + 7 . (-0{,}08) = 1{,}42 - 0{,}56 = 0{,}86$$

Assim, comprando 8 brigadeiros na promoção, o valor total da compra é 0,86 . 8 = 6,88 reais.

Fora da promoção, cada brigadeiro custa R$ 1,50. Dessa forma, 1,50 . 8 = 12,00 reais.

A diferença entre o valor não promocional e o valor promocional é R$ 5,12.

Atividade Resolvida 4: Um piloto, durante os treinos para as Mil Milhas, decidiu aumentar, a cada dia, em 1400 m o circuito a ser percorrido. Sabendo que no segundo dia ele completou um circuito de 2 km, quantos quilômetros ele terá percorrido no oitavo dia?

Extraindo os dados do problema, temos:

$$r = 1400;\ a_2= 2000;\ a_1= 2000 - 1400 = 600$$

Logo,

$$a_n=a_1+(n-1)r$$

$$a_8 = 600 + (8-1) . 1400 = 600 + 7.1400 = 600 + 9800 = 10400$$

No oitavo dia, o piloto percorreu 10400 m, o que equivale a 10,4 km.

Atividade Resolvida 5: Mostre que se x, y e z são três termos positivos consecutivos de uma PG, nessa ordem, então log x, log y e log z são termos de uma PA, nessa ordem.

Como x e y são diferentes de zero, então: q = y/x e q = z/y.

Assim: y/x = z/y que implica em y^2= xz

Como xz = y^2, temos:

log (xz) = log (y^2)

log x + log z = 2 . log y

(lox + log z) / 2 = log y

Assim, podemos concluir que, de acordo com a propriedade da média aritmética dos termos, a sequência (log x, log y, log z) forma uma PA.

Atividade Resolvida 6: Calcule o valor de um imóvel vendido a um cliente nas seguintes condições: primeira parcela de R$ 600,00 e, daí em diante, parcelas que aumentam R$ 5,00 a cada mês, até completar o pagamento, em 12 anos.

Temos a seguinte PA: (600, 605, 610, ...). Inicialmente, devemos calcular o 144º termo dessa sequência. O valor total é a soma de todas as parcelas.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{144} = 600 + (144-1) \cdot 5 = 600 + 143 \cdot 5 = 600 + 715 = 1315$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{144} = \frac{(600 + 1315) \cdot 144}{2} = \frac{1915 \cdot 144}{2} = 137880$$

Logo, o valor do imóvel era R$ 137880,00.

Atividade Resolvida 7: Um atleta corre, a cada dia, o dobro da distância que correu no dia anterior. Sabendo que esse atleta correu 6600 m no quarto dia de treinamento, qual é a distância que ele correrá no sexto dia?

Nessa situação, temos uma PG e as seguintes informações: $a_4 = 6600$ e $q = 2$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \text{ e } a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = a_4 \cdot q^2$$

$$a_6 = a_4 \cdot q^2 = 6600 \cdot 2^2 = 26400$$

Assim, o atleta irá correr 26400 m no sexto dia de treinamento.

Atividade Resolvida 8: Em janeiro do ano passado, uma empresa produziu 25000 unidades de certo produto. A partir de fevereiro, a cada mês, a produção foi de 15% maior que no mês anterior. Determine a quantidade total de unidades que essa empresa produziu esse ano.

Temos que: $a_1 = 25000$ e $q = 100\% + 15\% = 115\% = 1{,}15$

Assim,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_{12} = 25000 \cdot \frac{1-1{,}15^{12}}{1-1{,}15} \approx 725042$$

Logo, nesse ano a empresa produziu aproximadamente 725042 unidades desse produto.

Atividade Resolvida 9: Uma bola é solta da altura de 100 m, atinge o solo e sobe a uma altura igual à metade da anterior. Esse movimento ocorre sucessivamente até ela parar. Qual é a distância total percorrida pela bola?

Sem contar a primeira queda, as distâncias percorridas pela bola formam a PG (100, 50, 25, ...), em que $a_1 = 100$ e $q = \frac{1}{2}$.

Assim, o limite da soma das distâncias percorridas é igual a: $\frac{100}{1-\frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$

Somando agora a distância da primeira queda: 200 + 100 = 300.

Logo, a distância total percorrida pela bola é 300 m.

Atividade Resolvida 10: As empresas A e B foram inagurudas na mesma data. Nos últimos anos a empresa A manteve-se em crescimento: no 1º ano obteve lucro de R$ 100000,00; após 2 anos, obteve lucro de R$ 110000,00; após 3 anos, R$ 120000,00; e assim por diante. A empresa B também se manteve e, crescimento: no primeiro ano obteve lucro de R$ 200000,00; após 2 anos, obteve lucro de R$ 40000,00; após 3 anos, R$ 80000,00; e assim por diante.

a) Verifcar graficamente o crescimento anual do lucro das duas empresas.

A sequência dos lucros da empresa A forma uma PA: (100000, 110000, 120000, ...), em que a_1=100000 e r =10000. A lei de formação dessa PA é:

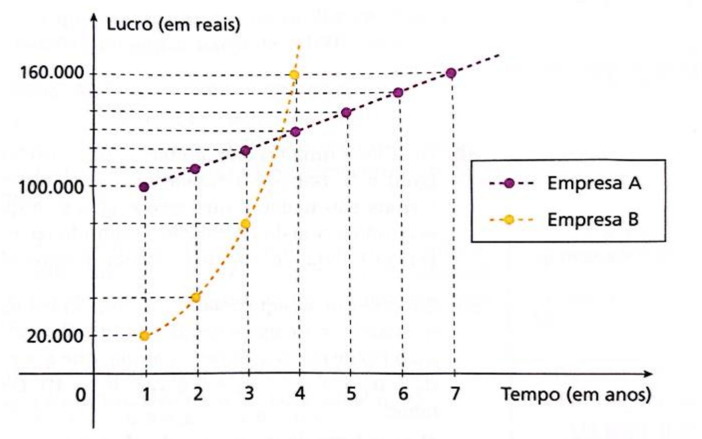
$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 100000 + 10000.\ (n-1), \text{ com } n \in N^*$$

Já a sequência dos lucros da empresa B forma uma PG: (20000, 40000, 80000, ...), em que $a_1 = 20000$ e $q = 2$. A lei de formação dessa PG é:

$$a_n = a_{1.}\ .q^{n-1} \Rightarrow a_n = 20000.2^{n-1}, \text{ com } n \in N^*$$

Temos então o gráfico da PA e da PG, temos:

Figura 45 – Gráfico da PA e PG questão 10 – Atividades Extras



Fonte: Leonardo, Fábio de. Matemática (Ensino Médio) I. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

b) Qual dos lucros cresce mais rápido: o da empresa A ou o da empresa B?

Para identificar a empresa que apresenta crescimento mais rápido, temos de comparar a variação do lucro de cada uma ao longo de intervalos constantes de tempo (intervalos de 1 ano, por exemplo).

Comparando os gráficos, percebemos que o lucro da empresa B cresce mais rápido que o da empresa A.

Após 4 anos de funcionamento, a empresa B atingiu um lucro de R$ 160000,00 (8 vezes o lucro inicial), já a empresa A, após esse mesmo período, atingiu um lucro de R$ 130000,00 (1,3 vezes o lucro inicial).