UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ - UECE
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MAURÍCIO JOSÉ DE OLIVEIRA

TERNOS PITAGÓRICOS: CONTEXTUALIZAÇÃO E APLICABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

FORTALEZA - CEARÁ
2013

MAURÍCIO JOSÉ DE OLIVEIRA

TERNOS PITAGÓRICOS:
CONTEXTUALIZAÇÃO E APLICABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, vinculado à Universidade Estadual do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

FORTALEZA - CEARÁ
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Bibliotecário(a) Responsável – Thelma Marylanda Silva de Melo CRB-3 / 623

O48t Oliveira, Maurício José de
Ternos pitagóricos: contextualização e aplicabilidade na educação básica / Maurício José de Oliveira. — 2013.
CD-ROM. 103f .:il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.
"CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)".
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Matemática
Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Ternos Pitagóricos. 2. Teoremas e propriedades. 3. Educação básica- Aplicabilidade. I. Título.
CDD: 182.2

MAURÍCIO JOSÉ DE OLIVEIRA

TERNOS PITAGÓRICOS: CONTETUALIZAÇÃO E APLICABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, vinculado à Universidade Estadual do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 27/ 08/ 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes – (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. João Marques Pereira
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Dr. José Robério Rogério
Universidade Federal do Ceará - UFC

Dedico este trabalho a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos que acreditam que a educação é o meio mais importante e eficaz para mudarmos a sociedade em que vivemos.

Àqueles que mesmo diante de todas as dificuldades nunca desistem de alcançarem seus objetivos.

AGRADECIMENTOS

A meus colegas de Mestrado, em especial Ari Claudino e Marcos Antonio, por estarem presentes em todas as etapas dessa conquista, estudando e discutindo os assuntos inerentes ao mesmo.

À minha mãe, Socorro Oliveira, por ser essa mulher guerreira e estar do meu lado em todos os momentos da minha vida.

Aos meus irmãos, Élcia, Neide, Cleide, Márcia, Márcio e Marcelo, por compartilharem todos os bons e maus momentos que passemos no decorrer de nossas vidas.

A todos os meus familiares e amigos que buscaram construir comigo essa pessoa que sou.

Ao coordenador do PROFMAT na Universidade Estadual do Ceará, o Prof. Dr. Guilherme Ellery, pela dedicação e esforço para que pudéssemos chegar ao fim dessa extraordinária etapa da nossa vida profissional.

Ao professor, o Dr Othon Lopes, por sua orientação e estímulo para realização desse trabalho.

A todos os demais professores do PROFMAT por nos fazer crescer no decorrer do nosso mestrado.

A todos os meus colegas de trabalho da E.E.F.M. Arsênio Ferreira Maia e do Colégio Diocesano Padre Anchieta, que por vezes precisei me afastar em decorrência dos meus estudos e sempre me auxiliaram e me ajudaram para que eu pudesse crescer profissionalmente e concluir este mestrado profissional.

À coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior – CAPES, pelo apoio financeiro como bolsista.

À Universidade Estadual do Ceará, onde cursei e conclui minha graduação e, agora, estou concluindo o meu mestrado.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a concretização deste trabalho.

RESUMO

Os ternos pitagóricos podem ser utilizados como ferramenta valiosa para a implantação de estratégias de melhoria do ensino da matemática na educação básica. A partir desta premissa, foi desenvolvida a presente dissertação, a qual apresenta, de forma clara, a definição e as propriedades dos ternos pitagóricos, além de algumas curiosidades sobre o tema, acompanhadas das devidas demonstrações matemáticas, bem como a relação desses ternos com outras áreas da matemática. Como principal contribuição do presente estudo, restou demonstrada a aplicabilidade dos ternos pitagóricos na educação básica, em especial, no que concerne ao estudo dos triângulos retângulos e geometria plana em geral e na geometria espacial, sendo destacada a sua interação com o estudo dos prismas, pirâmides e cones. Conclui-se que os ternos pitagóricos podem ser utilizados como ferramenta importante nessa área de ensino, principalmente pelo fato de que as demonstrações de teoremas e propriedades associadas podem ser compreendidas por discentes desse nível de ensino. Conclui-se também que há inúmeras curiosidades acerca do assunto que podem ser trabalhadas em sala de aula e que os ternos pitagóricos podem ser utilizados na resolução de problemas cotidianos, o que serve para aproximar a teoria matemática da prática.

Palavras-chave: Ternos pitagóricos. Ferramentas de Ensino. Resolução de problemas.

ABSTRACT

The Pythagoreans suits can be used as a valuable tool for the implementation of strategies to improve the teaching of mathematics in the basic education. From this premise, this thesis has been developed, which shows clearly the definition and properties of the Pythagoreans suits, besides it some interesting facts about the subject, accompanied by appropriate mathematical demonstrations, as well as their relationship with other suits areas of mathematics. As the main contribution of this study, we have demonstrated the applicability of the Pythagoreans suits in the basic education, especially, in what concern the study of rectangle triangles and plane geometry in general and spatial geometry, given eminence to its interaction with the study of prisms, pyramids and cones. We conclude that the Pythagoreans suits can be used as an important tool in this area of teaching, mainly because the demonstration of theorems and associated properties can be understood by students of this educational level. We also conclude that there are many curiosities about the subject that can be worked in the classroom and that Pythagoreans suits can be used to solve everyday problems, which serves to approximate the mathematical theory of practice.

Keywords: Pythagoreans Suits. Teaching Tools. Problems Resolution.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

Dados recentes de avaliações realizadas com alunos da educação básica brasileira revelam que há uma carência muito grande no que se refere ao ensino de matemática. Constatação que tem motivado muitas ideias e ações, por parte dos governos, das universidades e mesmo da iniciativa privada, no sentido de que sejam vencidas as deficiências e o país possa apresentar um desempenho superior a cada ano.

São variadas as propostas de utilização de estratégias para motivar/incentivar os estudantes para o gosto pela matemática. Dentre elas, destacam-se a utilização de material concreto, desenvolvimento de material didático atrativo, contextualização do conteúdo com a história da matemática, curiosidades matemáticas, uso de ferramentas gráficas auxiliadas por computador, aproveitamento do conhecimento prévio do aluno e a inserção da disciplina no dia a dia dos estudantes, entre outros.

Outros fatores que têm sido bastante mencionados como auxiliares no incremento da aprendizagem matemática são a resolução de problemas e o treinamento para o desenvolvimento de provas e demonstrações matemáticas. Isso, com o intuito de que sejam apresentados aos alunos, desde os anos iniciais, como forma de despertar e incentivar o interesse pelo conhecimento matemático, o que deve gerar, consequentemente, uma melhoria na qualidade do ensino e da aprendizagem nessa área do conhecimento.

Nesse contexto, o estudo dos ternos pitagóricos apresenta-se como um potencial metodológico para auxiliar o ensino da matemática desde as últimas séries do ensino fundamental até a conclusão do ensino médio; podendo ser utilizados como forma de contextualização histórica, curiosidades matemáticas, utilização de ferramentas gráficas, resolução de problemas e, com especial destaque, para a demonstração e prova de teoremas e propriedades simples e compreensíveis aos alunos, quando utilizados da maneira adequada.

O presente trabalho trata dos ternos pitagóricos, apresentando sua conceituação, teoremas e propriedades, algumas curiosidades associadas, problemas que podem ser tratados com a utilização dos conhecimentos acerca de ternos pitagóricos, além de propostas de aplicação dos conhecimentos no conteúdo de matemática da educação básica.

Por uma questão didática o trabalho foi dividido em pequenas seções, num total de cinco.

Na seção 1, os Ternos Pitagóricos são apresentados aos leitores, por meio de sua definição, teoremas, propriedades e algumas curiosidades relacionadas aos mesmos. Na seção 2, é estabelecida uma relação dos ternos pitagóricos com outras áreas da matemática, como a sequência de Fibonacci, círculo inscrito num triângulo pitagórico, a equação pitagórica, as equações diofantinas e o Último Teorema de Fermat.

Na seção 3, mostra-se a aplicabilidade dos ternos pitagóricos na educação básica, por meio da utilização de seus teoremas e propriedades para a resolução de problemas que envolvem, em especial, o Teorema de Pitágoras. Evidencia a possibilidade de utilização desses ternos como ferramenta pedagógica para o desenvolvimento do referido teorema, fazendo com que os alunos possam resolver problemas de maneira racional, sem se preocupar com a mecanização do mesmo, principalmente na geometria plana e na geometria espacial, no que se relaciona à construção de sólidos geométricos, como prisma, pirâmides e cones.

Na seção 4 mostra-se de que maneira os teoremas e propriedades dos ternos pitagóricos podem ser utilizados no trabalho com números racionais na construção de ternos não pitagóricos, ou seja, os elementos do terno (x, y, z) não são valores inteiros, e sim, decimais exatos. Na 5ª e última seção mostramos problemas práticos, do nosso dia a dia, resolvidos com o uso de ternos pitagóricos.

1.2 Justificativa

Este trabalho cumpre uma exigência do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), o qual tem, dentre outros, o objetivo de "*proporcionar formação matemática aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Básico, visando fornecer ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática*" (SBM, 2012).

Para alcançar esse objetivo é necessária a realização de trabalhos que venham a contribuir para a melhoria do ensino de matemática na educação básica, conforme determina o art. 28 do regimento: "*o Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula*" (art. 28 do Regimento Interno) (SBM, 2012).

Nessa perspectiva, evidenciamos a importância do estudo dos ternos pitagóricos e suas diversas aplicações no ensino da matemática na educação básica, partindo do pressuposto de que esse ensino deve proporcionar aos alunos situações diversas, estimulando o raciocínio e a busca pela descoberta e saindo da mecanização de fórmulas, muitas vezes abordadas pelos livros didáticos.

A escolha pela temática justifica-se pelo entendimento de que as discussões suscitadas quanto à apresentação dos ternos pitagóricos possa ser utilizada por professores e alunos da área, estendendo-se à sua aplicabilidade na geometria, seja plana ou espacial. Dessa forma evidencia estratégias a serem utilizadas para concretizar suas aplicações especificamente com o Teorema de Pitágoras.

Concordamos com a afirmação de Schoenfeld (1996, p. 11) de que o ensino da matemática só tem sentido quando proporciona aos alunos situações que lhes possibilitem a capacidade de " *[...] modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar" a partir de atividades "com sentido matemático"*.

Para esse autor, a proposta de temas matematicamente válidos, envolventes e estéticos, por parte da escola, pode servir como um território em que os alunos se envolvem no desafio intelectual de empurrar as fronteiras do seu próprio conhecimento, tendo em vista que

> [...] fazer sentido, deveria ser a principal atividade da escola. Das artes à literatura, à Física o que deveria ser aprendido são múltiplos caminhos de ver o mundo, e os variados instrumentos interdisciplinares e perspectivas que nos ajudam a entendê-lo. (SCHOENFELD, 1996, p. 11)

É bastante notável a importância do teorema de Pitágoras no ensino da matemática, visto que existe uma infinidade de problemas que podemos resolver com maior eficácia utilizando-se de aplicações desse valioso teorema. Dentro da geometria plana, temos o cálculo da altura de um triângulo equilátero, o cálculo do comprimento das diagonais de um losango e de um quadrado. Na trigonometria, o cálculo do seno, do cosseno e da tangente de ângulos notáveis, como também o teorema fundamental da trigonometria. Na geometria analítica utilizamos o referido teorema no cálculo da distância euclidiana entre dois pontos; já na geometria espacial podemos determinar o comprimento da diagonal de um cubo, da altura do cone, entre outras.

De acordo om os estudos de Wagner (2009, p.7) , o teorema de Pitágoras, assim como o estudo das Áreas "*[...] são abordados em geral no 9º ano do Ensino Fundamental, de forma bastante breve e em nível naturalmente adequado aos alunos dessa faixa etária.*" Esse autor afirma ainda que esses temas não são normalmente retomados no Ensino Médio, fato que leva grande parte dos alunos a não terem oportunidades de conhecer a enorme riqueza das aplicações do Teorema de Pitágoras, para o autor, muitas por vezes, surpreendentes.

Para os autores Cavalcanti, Barros e Almeida (1996, p.2) em relação ao estudo do teorema de Pitágoras, "*[...] a concepção de que o teorema atribuído aos pitagóricos extrapola a uma simples relação algébrica sobre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, como na maioria das vezes é abordado*". Isso constata-se no estudo do Teorema de Pitágoras, geralmente trabalhado de forma mecanizada, como uma simples fórmula matemática, sem exigir um raciocínio nos alunos em seu desenvolvimento e aplicação.

No que diz respeito ao ensino do referido Teorema, Silva (2009) destaca que a mecanização do ensino do Teorema de Pitágoras, desprovida do desenvolvimento histórico e da construção significativa, contribui para a deficiência em seu ensino. Atribuímos ai a importância do estudo dos ternos pitagóricos, principalmente quando concordamos com Cavalcanti, Almeida e Barros (2010, p.2) ao afirmarem que

> se promovermos em sala de aula um trabalho que envolve os Ternos Pitagóricos podemos apresentar novos subsídios para o cotidiano do professor em sala de aula [...] levando elementos que poderão ser facilitadores no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

De acordo com os estudos de Silva (SD), "*historicamente, o Teorema de Pitágoras é ligado aos ternos pitagóricos, assunto que foi motivo de estudo de ilustres personalidades, como Pitágoras, Platão, Euclides, Diofanto, Fermat e o pouco conhecido Eugène Bahier*", mas na realidade não encontramos esse elo do teorema de Pitágoras com os ternos pitagóricos na educação básica, ou seja, não encontramos essa ligação em livros didáticos da educação básica. Desse modo, os alunos desse nível de educação não têm acesso nem conhecimento básico sobre esse importante conteúdo da matemática, os ternos pitagóricos.

Esses, são definidos como sendo todos os ternos (x, y, z) com x, y e z, números inteiros e positivos, que satisfazem a igualdade $x^2 + y^2 = z^2$; e mostram uma maneira diferenciada de tratarmos todos os problemas que envolvem o teorema de Pitágoras.

A seguir destacamos alguns dos referenciais por nós utilizados para uma melhor compreensão da temática em pauta.

De acordo com os estudos de Fossa e Erickson (1997), existem duas formas geradoras ternos pitagóricos, assim sendo: a) uma atribuída a Pitágoras, geradora dos ternos pitagóricos para todo inteiro ímpar maior ou igual a três em que a hipotenusa excede o cateto maior em uma unidade; b) a outra, atribuída a Platão, geradora dos ternos pitagóricos para todo inteiro par maior ou igual a quatro e, em todo terno gerado pela fórmula, temos que a hipotenusa excede o outro cateto em duas unidades.

Bez (1997) nos traz todo o suporte para descrevermos os ternos pitagóricos, nos mostrando teoremas, propriedades, corolário e a relação dos ternos pitagóricos com outras áreas da matemática, como, por exemplo, a Sequência de Fibonacci e a demonstração de que todo círculo inscrito num triângulo retângulo tem como raio um número inteiro e positivo. Filho (2010; 2011) por sua vez contribui de maneira bastante significativa no que se refere à aplicabilidade dos ternos pitagóricos na educação básica.

Esta pesquisa diagnosticou a produção escassa sobre a contribuição dos ternos pitagóricos nesse nível de ensino. Esse fato nos faz acreditar na contribuição desse trabalho para as discussões sobre a temática que ora se apresenta

A relevância deste estudo encontra-se, portanto, na possibilidade de contribuir para práticas pedagógicas mais atrativas e de fácil compreensão quanto aos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula, o que coaduna com o objetivo do PROFMAT.

1.3 Objetivos

1.3.1 Geral

Apresentar aos leitores o tema Ternos Pitagóricos e mostrar a sua importância no ensino da matemática na educação básica.

1.3.2 Específicos

a) relacionar e demonstrar os principais teoremas e propriedades que caracterizam os ternos pitagóricos;

b) estabelecer uma relação dos ternos pitagóricos com outras áreas da Matemática;

c) apontar formas de aplicabilidade dos ternos pitagóricos aos conteúdos matemáticos da educação básica.

1.4 Metodologia

A condução dos trabalhos nesta pesquisa compreendeu duas etapas: a primeira foi a leitura e interpretação dos elementos teóricos selecionados, com estudo realizado a partir de autores como Barbosa (1993), Bez (1997), Fossa e Erickson (1997), Filho (2010; 2011), Silva (2009), dentre outros. Com essa pesquisa bibliográfica, tínhamos a pretensão de aperfeiçoar os conhecimentos acerca dos principais teoremas e propriedades associados aos ternos pitagóricos.

A segunda etapa consistiu na construção de problemas nos quais os conhecimentos sobre os ternos pitagóricos são aplicáveis, o que possibilitou uma melhor compreensão de como os aspectos aqui tratados podem ser utilizados por professores da área, com vistas a viabilizar uma melhor aprendizagem dos referidos conteúdos no ensino fundamental e médio.

Assim, partindo do pressuposto de que o ensino de matemática deve desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas, apresentamos os ternos pitagóricos como sugestão para a resolução, de forma facilitadora, de situações-problemas que envolvam o Teorema de Pitágoras.

2 APRESENTANDO OS TERNOS PITAGÓRICOS

Indícios arqueológicos apontam para a possibilidade de conhecimento dos ternos pitagóricos pelos matemáticos na sociedade mesopotâmica ou babilônica, em período datado entre 1900 e 1500 a.C. e também em registros de data aproximada de 300 a.C, conforme mencionado por Feitosa (2000, p.32-33). O autor relata que foram encontradas inscrições em tabletes de barro, as quais continham tabelas com números a, b e c, que mantinham entre si a relação pitagórica, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$, de modo que, conforme mencionado pelo próprio Feitosa (2000, p.33), "*não é possível deixar de crer que os babilônios conheciam, pelo menos em termos, o teorema acima mencionado (Teorema de Pitágoras), mesmo porque seu tablete apresenta números de magnitude muito grande*".

Esse capítulo objetiva mostrar, aos leitores, os ternos pitagóricos, até então tão pouco conhecido. Mostraremos os ternos pitagóricos por meio de sua definição e da construção de suas fórmulas geradoras, como também suas propriedades e teoremas relativos a ele, além de algumas curiosidades sobre o referido tema.

As propriedades e teoremas aqui demonstrados servirão de apoio para o desenvolvimento do nosso trabalho, como também serão utilizados como suporte de aplicação dos ternos pitagóricos no ensino da matemática na educação básica.

No desenvolvimento do capítulo, tomamos como base os estudos de Fossa e Erickson (1997), Bez (1997) e Wagner (2009).

2.1 Definição

Definição: Sendo x, y e z inteiros positivos, com $x < y < z$, dizemos que (x, y, z) é um terno pitagórico se $x^2 + y^2 = z^2$.

Assim, (6, 8, 10) e (5, 12, 13) são exemplos de ternos pitagóricos, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$ e $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Um terno pitagórico (x, y, z) é chamado de terno pitagórico primitivo, quando x , y e z são primos entre si, ou seja, quando mdc (x, y) = mdc (x, z) = mdc (y, z) = mdc (x, y, z) = 1. Assim, (5, 12, 13) é um terno pitagórico primitivo, enquanto que o terno pitagórico (x, y, z) = (ka, kb, kc) é chamado de terno pitagórico derivado, quando x, y e z não são primos entre si, ou seja mdc (x, y) = mdc (x, z) = mdc (y, z) = mdc (x, y, z) = k, sendo k um número inteiro positivo e $k \neq 1$. Assim, (6, 8, 10) é um terno pitagórico derivado.

2.2 Teoremas

Apresentaremos alguns teoremas e propriedades que caracterizarão os ternos pitagóricos, primitivos ou derivados, que utilizaremos, mais adiante, na demonstração de alguns teoremas da geometria plana, como também na sua aplicação tanto na área da geometria plana quanto na geometria espacial.

Teorema 1: Existe uma infinidade de ternos pitagóricos do tipo (x, y, y + 1)

De acordo com o estudo de Fossa e Erickson (1997, p.2), é atribuída a Pitágoras a seguinte formulação:

Se $n \in \mathbb{Z}_+^*$, $\left(2n+1, \frac{1}{2}(2n+1)^2 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2n+1)^2 + \frac{1}{2}\right)$ é um terno pitagórico, a fórmula gera um terno (x, y, z) para todo inteiro ímpar maior ou igual a três e, em todo terno gerado pela fórmula, temos $z - y = 1$, ou seja, $z = y + 1$.

Demonstração:

Sendo x um número ímpar:

$x = 2n + 1 \Rightarrow x^2 = (2n + 1)^2 \Rightarrow x^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow$

$x^2 = 2.(2n^2 + 2n) + 1 \Rightarrow x^2 = 2p + 1$, com $p \in \mathbb{Z}_+^*$, temos que x^2 também será ímpar.

Sendo x^2 é um número ímpar, pode-se dividi-lo em duas partes, y e z, de tal modo que z fosse uma unidade maior do que y, ou seja:

$$x^2 = y + z \qquad \text{com} \qquad z = y + 1$$

Assim, dado um número ímpar, divide-se o seu quadrado em duas partes que diferem de uma unidade.

Vejamos:

Sendo x, ímpar, temos $x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}_+^*$.

$x^2 = y + z$ e, como $z = y + 1$, temos $x^2 = y + y + 1 \Rightarrow$

$x^2 = 2y + 1 \Rightarrow 2y + 1 = x^2 \Rightarrow 2y = x^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{x^2-1}{2}$.

Como $z = y + 1$ e $y = \frac{x^2-1}{2}$, temos: $z = \frac{x^2-1}{2} + 1 \Rightarrow z = \frac{x^2-1+2}{2} \Rightarrow z = \frac{x^2+1}{2}$

Como $x = 2n + 1$, temos que $y = \frac{(2n+1)^2-1}{2}$ e $z = \frac{(2n+1)^2+1}{2}$.

Observe que $(x, y, z) = \left(2n+1, \frac{(2n+1)^2-1}{2}, \frac{(2n+1)^2+1}{2}\right)$ $n \in \mathbb{Z}_+^*$, é um terno pitagórico, pois $x^2 + y^2 = z^2$.

Vejamos:

Se $x = 2n+1$, temos que $x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.

Se $y = \frac{(2n+1)^2-1}{2}$, temos que $y^2 = \left[\frac{(2n+1)^2-1}{2}\right]^2 = \left[\frac{4n^2+4n+1-1}{2}\right]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{4n^2+4n}{2}\right]^2 = [2n^2+2n]^2 = 4n^4 + 8n^3 + 4n^2$.

Se $z = \frac{(2n+1)^2+1}{2}$, temos que $z^2 = \left[\frac{(2n+1)^2+1}{2}\right]^2 = \left[\frac{4n^2+4n+1+1}{2}\right]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{4n^2+4n+2}{2}\right]^2 = [2n^2+2n+1]^2$.

Somando x^2 com y^2 teremos:

$x^2 + y^2 = (4n^2 + 4n + 1) + (4n^4 + 8n^3 + 4n^2) = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1$

$x^2 + y^2 = 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 = (2n^2)^2 + 2.2n^2.(2n+1) + (2n+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = [2n^2 + 2n + 1]^2$, ou seja, temos que $x^2 + y^2 = z^2$.

Demonstraremos, agora, a recíproca:

Suponha que $(x, y, y + 1)$ seja um terno pitagórico, com x ímpar.

Se $(x, y, y + 1)$ um terno pitagórico, aplicando a relação pitagórica, temos:

$x^2 + y^2 = (y+1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow x^2 = 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{x^2-1}{2}$

Como $y = \frac{x^2-1}{2}$, temos $z = y + 1 \Rightarrow z = \frac{x^2-1}{2} + 1 \Rightarrow z = \frac{x^2+1}{2}$, com $x = 2n + 1$.

Desse modo temos que $(x, y, z) = \left(2n+1, \frac{(2n+1)^2-1}{2}, \frac{(2n+1)^2+1}{2}\right)$ $n \in \mathbb{Z}_+^*$, gera todos ternos pitagóricos em que o elemento menor, x, sempre será um número ímpar e o elemento maior, z, é uma unidade a mais do que o elemento intermediário y.

Teorema 2: Existe uma infinidade de ternos pitagóricos do tipo $(x, y, y + 2)$

Ainda de acordo com o estudo de Fossa e Erickson (1997, p.3), é atribuída a Platão a seguinte formulação:

Se $n \in \mathbb{Z}_+^* - \{1\}$, $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ é um terno pitagórico. Em contraste à fórmula de Pitágoras, a fórmula de Platão gera ternos pitagóricos (x, y, z) em que x é par e $z - y = 2$, ou seja, $z = y + 2$.

<u>Demonstração:</u>

Tomando x como sendo um número par maior ou igual a 4, temos $x = 2n$, com $n \in Z^* - \{1\}$.

Fossa e Erickson (1997) apresentam a fórmula atribuída a Platão, de ternos pitagóricos, por meio da qual subsidiamos a demonstração que assim se apresenta, utilizada para fundamentar a nossa pesquisa:

Tomando, ainda, a medida da hipotenusa como sendo duas unidades maior do que a medida do outro cateto, o cateto x é um número par, ou seja, do tipo 2n, e aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$$z - y = 2 \quad \Rightarrow \quad z = y + 2 .$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (y+2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = y^2 + 4y + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4y + 4 \Rightarrow (2n)^2 = 4y + 4 \Rightarrow 4n^2 = 4y + 4 \Rightarrow 4y = 4n^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{4n^2 - 4}{4} \Rightarrow y = n^2 - 1$$

Como $z = y + 2$ e $y = n^2 - 1$, temos que $z = (n^2 - 1) + 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = n^2 + 1 .$$

Analisaremos, agora, dois casos distintos:

<u>1º CASO:</u> Se “n for PAR”.

Se n é um número par, temos que n é do tipo $n = 2p$, então teremos:

$$x = 2n = 2.2p = 4p$$

$$y = n^2 - 1 = (2p)^2 - 1 = 4p^2 - 1$$

$$z = n^2 + 1 = (2p)^2 + 1 = 4p^2 + 1$$

Observe que $x = 4p$, $y = 4p + 1$ e $z = 4p + 2$ são números primos entre si, pois não apresentam fatores em comum, formando assim, um terno pitagórico primitivo.

<u>2º CASO:</u> Se “n” for ÍMPAR.

Sendo n um número ímpar, temos que n é do tipo $n = 2p + 1$, então teremos:

$x = 2n = 2(2p + 1) = 4p + 2 = 2k_1$

$y = n^2 - 1 = (2p + 1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p + 1 - 1 = 4p^2 + 4p = 2(2p^2 + 2p) = 2k_2$

$z = n^2 + 1 = (2p + 1)^2 + 1 = 4p^2 + 4p + 1 + 1 = 4p^2 + 4p + 2 = 2(2p^2 + 2p + 1) = 2k_3$

Observe que $x = 2k_1$ $y = 2k_2$ e $z = 2k_3$ não são números primos entre si, pois apresentam, pelo menos, um fator em comum, o fator 2, e por isso não formam um terno pitagórico primitivo.

Observe que $(x, y, z) = (2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ $n \in \mathbb{Z}_+^*$, é um terno pitagórico, pois $x^2 + y^2 = z^2$.

Vejamos:

Se $x = 2n$, temos que $x^2 = (2n)^2 = 4n^2$.

Se $y = n^2 - 1$, temos que $y^2 = (n^2 - 1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$.

Se $z = n^2 + 1$, temos que $z^2 = (n^2 + 1)^2$.

Somando x^2 com y^2 teremos:

$x^2 + y^2 = 4n^2 = n^4 - 2n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2$, ou seja, temos que $x^2 + y^2 = z^2$.

Demonstraremos, agora, a recíproca. Vejamos:

Suponha que $(x, y, y + 2)$ seja um terno pitagórico, com x par.

Se $(x, y, y + 2)$ um terno pitagórico, temos que:

$x^2 + y^2 = (y + 2)^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = y^2 + 4y + 4 \Longrightarrow x^2 = 4y + 4$.

Se x é par podemos escrever $x = 2n$. Então $x^2 = (2n)^2 = 4n^2$.

Dai, como $x^2 = 4y + 4$, temos $(2n)^2 = 4y + 4 \Longrightarrow 4n^2 = 4y + 4 \Longrightarrow n^2 = y + 1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow y = n^2 - 1$.

Como $z = y + 2$, temos $z = n^2 - 1 + 2 \Longrightarrow z = n^2 + 1$, com $x = 2n$, ou seja, par.

Desse modo temos que $(x, y, z) = \left(2n,\ n^2 - 1,\ n^2 + 1\right)$ $n \in \mathbb{Z}_+^*$, gera todos os ternos pitagóricos em que a medida maior, z, é duas unidades maior do que uma das medidas, e mais ainda, sempre que n é par, teremos um terno pitagórico primitivo e quando n é ímpar, teremos um terno pitagórico derivado.

Os autores Fossa e Erickson (1997), afirmam que as fórmulas de Pitágoras e de Platão se complementam, porém são insuficientes para gerar todos os ternos pitagóricos, pois por meio dessas, geramos um terno para todo inteiro ímpar maior ou igual a três e, em todo terno gerado pela fórmula, temos $z - y = 1$, como também geramos um terno pitagórico para todo inteiro par maior ou igual a 4 e em todo terno gerado, temos $z - y = 2$. E os ternos pitagóricos que não apresentassem essas características?

De acordo com os estudos de Bez (1997, p. 35) temos mais dois teoremas dos ternos pitagóricos. Esses teoremas que geram todos os ternos pitagóricos, sendo o teorema 3, gerador dos ternos pitagóricos primitivos e o teorema 4, gerador de todos os ternos pitagóricos, primitivos ou não.

Os lemas a seguir serão utilizados na demonstração do teorema 3.

Lema 1: "Sejam a, b, c $\in \mathbb{Z}_{+}^{*}$, números tais que m.d.c. (a, b) = 1 e a.b = c^2. Então a e b são quadrados perfeitos."

Demonstração:

Se m.d.c. (a, b) = 1 temos que a e b são números primos entre si, ou seja, não apresentam fatores primos em comum.

Desse modo, todo fator primo tanto de a quanto de b, é também fator primo de c^2.

Porém todos os fatores primos de c^2 apresentam expoentes pares, visto que c^2 é um quadrado perfeito.

Logo, todos os fatores primos de c^2 ou são fatores primos de a ou são fatores primos de b, visto que a e b são primos entre si.

Então, como todos os fatores primos de c^2 apresentam expoentes pares e estes fatores ou são fatores de a ou fatores de b, temos que todos os fatores primos de a e todos os fatores primos de b apresentam expoentes pares.

Portanto, concluímos que a e b são quadrados perfeitos, pois ambos apresentam fatores primos com expoentes pares.

Lema 2: "Sejam z, y $\in \mathbb{Z}_{+}^{*}$, números ímpares, com z > y. Se m.d.c. (z, y) = 1 então m.d.c. $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = 1$".

Demonstração:

Suponhamos que $\frac{z+y}{2}$ e $\frac{z-y}{2}$ não sejam primos entre si, ou seja, existe um fator "a", comum aos dois termos, $\frac{z-y}{2}$ e $\frac{z+y}{2}$.

Dessa forma: $\frac{z+y}{2} = \alpha \,.\, a$ e $\frac{z-y}{2} = \beta \,.\, a$.

Assim, z + y = 2. $\alpha . a$ (I) e z – y = 2. $\beta . a$ (II).

Resolvendo (I) e (II), temos: 2z = $2a.(\alpha + \beta) \Rightarrow z = a.(\alpha + \beta)$.

Substituindo em (I): $a.(\alpha + \beta)$ + y = 2. $\alpha . a \Rightarrow y = 2.\alpha.a - \alpha.a - \beta.a \Rightarrow y = \alpha.a - \beta.a \Rightarrow y = a.(\alpha - \beta)$.

Temos, nessa situação, que $z = a.(\alpha + \beta)$ e $y = a.(\alpha - \beta)$. O que é um absurdo, pois y e z apresentam o fator "a" em comum e, assim, m.d.c. (y, z) ≠ 1.

<u>Lema 3:</u> "Sejam a, b ∈ $\mathbb{Z}_+^*$, números ímpares, com a > b. Se m.d.c. (a, b) = 1, então $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$ são de paridades diferentes.

<u>Demonstração:</u>

Vamos supor que ambos os números, $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$, sejam ímpares.

Assim, podemos escrever: $\frac{a+b}{2} = 2p + 1 \Rightarrow a + b = 2.(2p + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = 4p + 2\ (I)$ e $\frac{a-b}{2} = 2q + 1 \Rightarrow a - b = 2.(2q + 1) \Rightarrow a - b = 4q + 2\ (II)$.

Resolvendo (I) e (II) temos: $2a = 4p + 4q + 4 \Rightarrow a = 2p + 2q + 2 \Rightarrow a = 2(p + q + 1) \Rightarrow a = 2n_1$, com $n_1 = p + q + 1$ e $n_1 \in \mathbb{Z}_+^*$.

Substituindo em (II), temos: $a + b = 4p + 2 \Rightarrow 2p + 2q + 2 + b = 4p + 2 \Rightarrow b = 4p - 2p - 2q + 2 - 2 \Rightarrow b = 2p - 2q \Rightarrow b = 2(p - q) \Rightarrow b = 2n_2$, com $n_2 = p - q$ e $n_2 \in \mathbb{Z}_+^*$.

Temos, assim, que $a = 2n_1$ e $b = 2n_2$ e, então, os números a e b apresentam um fator comum, o fator 2, ou seja, a e b são, ambos, pares. Desse modo, os números a e b não são primos entre si, isto é, m.d.c.(a, b) ≠ 1. O que é um absurdo.

Suponhamos, agora, que ambos os números, $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$, sejam pares.

Assim, podemos escrever: $\frac{a+b}{2} = 2p \Rightarrow a + b = 2.2p \Rightarrow a + b = 4p\ (I)$ e $\frac{a-b}{2} = 2q \Rightarrow a - b = 2.2q \Rightarrow a - b = 4q\ (II)$.

Resolvendo (I) e (II) temos: $2a = 4p + 4q \Rightarrow a = 2p + 2q \Rightarrow a = 2(p + q) \Rightarrow a = 2n_1$, com $n_1 = p + q$ e $n_1 \in \mathbb{Z}_+^*$.

Substituindo em (II), temos: $a + b = 4p \Rightarrow 2p + 2q + b = 4p \Rightarrow b = 4p - 2p - 2q \Rightarrow b = 2p - 2q \Rightarrow b = 2(p - q) \Rightarrow b = 2n_2$, com $n_2 = p - q$ e $n_2 \in \mathbb{Z}_+^*$.

Temos, assim, que $a = 2n_1$ e $b = 2n_2$ e, então, os números a e b apresentam um fator comum, o fator 2, ou seja, a e b são, ambos, pares. Desse modo, os números a e b não são primos entre si, isto é, m.d.c.(a, b) ≠ 1. O que é um absurdo.

Suponhamos, agora, que os números $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$ apresentam paridades diferentes, ou seja, um seja par e o outro seja ímpar.

Assim, podemos escrever: $\frac{a+b}{2} = 2p + 1 \Rightarrow a + b = 2.(2p + 1) \Rightarrow a + b = 4p + 2\ (I)$ e $\frac{a-b}{2} = 2q \Rightarrow a - b = 2.2q \Rightarrow a - b = 4q\ (II)$.

Resolvendo (I) e (II) temos: $2a = 4p + 4q + 2 \Rightarrow a = 2p + 2q + 1 \Rightarrow a = 2(p + q) + 1 \Rightarrow a = 2n_1 + 1$, com $n_1 = p + q$ e $n_1 \in \mathbb{Z}_+^*$.

Substituindo em (II), temos: $a + b = 4p \Longrightarrow 2p + 2q + 1 + b = 4p \Longrightarrow b = 4p - 2p - 2q - 1 \Longrightarrow b = 2p - 2q - 1 \Longrightarrow b = 2(p - q) - 1 \Longrightarrow b = 2n_2 - 1$, com $n_2 = p - q$ e $n_2 \in \mathbb{Z}_+^*$.

Temos, assim, que $a = 2n_1$ e $b = 2n_2 - 1$ e, então, os números a e b não apresentam fator comum, e ainda, a e b apresentam paridades diferentes. Desse modo, os números a e b são primos entre si, isto é, m.d.c.(a, b) = 1.

O teorema descrito abaixo gera todos os ternos pitagóricos primitivos.

<u>Teorema 3:</u> "(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$" .

<u>Demonstração:</u>

Seja (x, y, z) um terno pitagórico primitivo.

Inicialmente, é importante observar que se x = 2uv, então temos que x é um número par. Como (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo, m.d.c. (x, y, z) = 1, em consequência, y e z são ímpares, já que se y for par, $x^2 + y^2$ será par e, daí, z^2 também será par e m.d.c. (x, y, z) $\neq$ 1, o que é um absurdo.

Temos:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$x^2 = z^2 - y^2$$

$$x^2 = (z + y).(z - y)$$

Já que y e z são ímpares, z+ y e z – y são pares, então $(z + y)$ e $(z - y)$ serão pares. Desse modo, (z + y).(z – y) é divisível por 4.

Dividiremos a expressão $x^2 = (z + y).(z - y)$ por 4:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{(z + y).(z - y)}{4}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{(z + y)}{2} . \frac{(z - y)}{2}$$

Observe que $\frac{(z + y)}{2} + \frac{(z - y)}{2} = z$ e $\frac{(z + y)}{2} - \frac{(z - y)}{2} = y$

Como m.d.c. $(z, y) = 1$, temos que m.d.c.$\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = 1$, conforme foi demonstrado no lema 2.

Sendo m.d.c. $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = 1$ e utilizando-se do lema demonstrado anteriormente, temos que tanto $\frac{(z+y)}{2}$ quanto $\frac{(z-y)}{2}$ são números quadrados perfeitos, visto que $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{(z+y)}{2} \cdot \frac{(z-y)}{2}$, ou seja $\frac{(z+y)}{2} \cdot \frac{(z-y)}{2}$ é um quadrado perfeito.

Conforme foi demonstrado no lema 3, temos que sejam a, b $\in \mathbb{Z}_+^*$, números ímpares, com a > b. Se m.d.c. (a, b) = 1, então $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$ são de paridades diferentes

Desse modo, fazendo $\frac{z+y}{2} = u^2$ e $\frac{z-y}{2} = v^2$, teremos:

$$\frac{z+y}{2} = u^2 \quad \Rightarrow \quad z + y = 2u^2 \text{ (I)}$$

$$\frac{z-y}{2} = v^2 \quad \Rightarrow \quad z - y = 2v^2 \text{ (II)}$$

Resolvendo I e II, teremos:

$$\begin{array}{c} z + y = 2u^2 \\ \underline{z - y = 2v^2} \\ 2z = 2u^2 + 2v^2 \\ ou \\ z = u^2 + v^2 \end{array}$$

Como,

$$\begin{array}{c} z + y = 2u^2 \\ (u^2 + v^2) + y = 2u^2 \\ y = 2u^2 - u^2 - v^2 \\ y = u^2 - v^2 \end{array}$$

Mas,

$$x^2 = z^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = (u^2 + v^2)^2 - (u^2 - v^2)^2$$

$$x^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 - (u^4 - 2u^2v^2 + v^4)$$

$$x^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 - u^4 + 2u^2v^2 - v^4$$

$$x^2 = 4u^2v^2 \Rightarrow x = \sqrt{4u^2v^2} \quad \Rightarrow \quad x = 2uv$$

Desse modo temos que (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si e não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$.

Demonstraremos a recíproca:

Observando $x = 2uv$, temos $x^2 = (2uv)^2 = 4u^2v^2$, $y = u^2 - v^2$, temos que $y^2 = (u^2 - v^2)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4$, então $x^2 + y^2 = 4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4$, o que teremos que $x^2 + y^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$.

Como $z = u^2 + v^2$, temos que $z^2 = (u^2 + v^2)^2$, que equivale a $x^2 + y^2$.

E, assim, temos que $(2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$ é um terno pitagórico.

Suponhamos, agora, que o terno $(2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$ não é primitivo.

Como u e v são primos entre si, e não ambos ímpares, temos que u^2 e v^2 apresentam paridades diferente. E, nesse caso $u^2 - v^2$ e $u^2 + v^2$ também apresentam paridades diferentes, não sendo, portanto, divisíveis por 2.

Nessa situação, temos que 2uv, $u^2 - v^2$ e $u^2 + v^2$ não são ambos divisíveis por 2, ou seja, ambos não apresentam o fator 2 em comum.

Se o terno pitagórico não é primitivo, então, existe, um número inteiro e positivo, p, maior do que 2, $p > 2$ como fator comum aos termos.

Assim, com p divide 2uv e $p > 2$, então temos que p divide u ou p divide v.

Estamos supondo, também, que p divide $u^2 + v^2$, então temos que p divide u e p divide v, o que não é possível, pois conforme vimos no parágrafo anterior, p divide u ou p divide v, e não p divide u e p divide v.

Logo $(2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$ é um terno pitagórico primitivo, visto que não existe um fator em comum entre os termos do terno pitagórico $(2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$.

Logo $(2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$é um terno pitagórico primitivo.

Bez (1997, p. 38) apresenta um teorema que mostra o terno gerador de todos os ternos pitagóricos, não apenas os ternos pitagóricos primitivos.

Teorema 4 – " (x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e $(x, y, z) = \left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$" .

Demonstração:

Seja (x, y, z) um terno pitagórico primitivo. Temos:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$x^2 = z^2 - y^2$$

$$x^2 = (z + y).(z - y)$$

Fazendo $u = z + y$ e $v = z - y$, teremos: $x^2 = (z + y).(z - y) \Rightarrow x^2 = u.v$

Vamos admitir que x seja par.

Sendo o elemento x par, temos que os elementos y e z são ímpares.

Nessas condições, temos que u e v apresentam a mesma paridade, pois y e z são ímpares e tanto $z + y$ será par, quanto $z - y$ também será par e, portanto u e v apresentam paridades iguais, já que $u = z + y$ e $v = z - y$.

Sendo o elemento x ímpar, temos que o elemento y é par e o elemento z é ímpar.

Nessas condições, temos que u e v apresentam a mesma paridade, pois y é par e z é ímpar, e tanto z + y será ímpar, quanto z – y também será ímpar e, portanto u e v apresentam paridades iguais, já que u = z + y e v = z - y

Como $x^2 = u.v$, temos que u.v é um quadrado perfeito e assim $x = \sqrt{u.v}$.

Sendo z e y números inteiros positivos, com z > y, pois z é o maior valor do terno pitagórico, temos que z + y > z – y, , o que implica dizer que u > v.

Observe que u = z + y (I) e v = z – y (II)

Comparando I e II, teremos:

$$z + y = u \longrightarrow \frac{u+v}{2} + y = u$$

$$z - y = v \qquad y = u - \frac{u+v}{2}$$

$$2z = u + v \qquad y = \frac{2u-u-v}{2}$$

$$z = \frac{u+v}{2} \qquad y = \frac{u-v}{2}$$

Logo o terno (x, y, z) é pitagórico se $(x, y, z) = \left(\sqrt{u.v}\,,\ \frac{u-v}{2}\,,\ \frac{u+v}{2}\right)$ onde são inteiros positivos de mesma paridade e u.v é um quadrado perfeito.

Demonstraremos a recíproca:

Temos que u e v são números inteiros e positivos, de mesma paridade, com u > v e u.v quadrado perfeito.

Fazendo $x = \sqrt{u.v}$ $\quad y = \frac{u-v}{2}$ $\quad z = \frac{u+v}{2}$, teremos:

I. x é um número inteiro e positivo, pois u.v é um quadrado perfeito.

II. y e z são números inteiros e positivos, pois u – v e u + v são ambos pares, já que u e v têm a mesma paridade.

Assim, fazendo, teremos:

$$*\ x = \sqrt{u.v} \qquad *\ y = \frac{u-v}{2} \qquad *\ z = \frac{u+v}{2}$$

$$x^2 = u.v \qquad y^2 = \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \qquad z^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$$

$$y^2 = \frac{u^2-2uv+v^2}{4} \qquad z^2 = \frac{u^2+2uv+v^2}{4}$$

Somando $x^2 + y^2 = u.v + \frac{u^2-2uv+v^2}{4}$

$$x^2 + y^2 = \frac{4uv + u^2 - 2uv + v^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{u^2+2uv+v^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{(u+v)^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = z^2$$

Desse modo temos que $x^2 + y^2 = z^2$ e, logo (x, y, z) é um terno pitagórico.

Assim, (x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$.

Temos o seguinte corolário:

Corolário: "Em qualquer terno pitagórico primitivo (x, y, z), os fatores 3, 4 e 5 estão presentes na composição dos elementos x, y e z".

Demonstração:

De acordo com o Teorema 3, demonstrado anteriormente, temos que, "(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$"

Seja o terno ($2uv$, $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$), com u e v inteiros positivos, u > v e u e v com paridades diferentes.

Analisaremos a presença dos fatores 3, 4 e 5 nos termos 2uv, $u^2 - v^2$ e $u^2 + v^2$ do terno pitagórico.

Presença do fator 3:

Se o fator 3 não aparecer no elemento 2uv do terno pitagórico, então ele aparecerá no elemento $u^2 - v^2$.

Vejamos: Se o fator 3 não aparece como fator do elemento 2uv, implica dizer que 3 nem divide u, nem divide v, então ao dividirmos u e v pelo fator 3, obteremos como resto 1 ou 2.

Assim, temos que u e v são da forma $3k + 1$ ou $3k + 2$.

Temos:

$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3.(3k^2 + 2k) + 1 = 3r_1 + 1,\ r_1 \in Z_+^*$

$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3.(3k^2 + 2k + 1) + 1 = 3r_2 + 1,\ r_2 \in Z_+^*$

Observe que tanto $(3k + 1)^2$ quanto $(3k + 2)^2$ são da forma $3p + 1$ e, portanto temos que $u^2 - v^2 = (3p_1 + 1) - (3p_2 + 1) = 3.(p_1 - p_2) = 3s$.

E, desse modo temos que 3 divide o elemento do terno pitagórico $u^2 - v^2$, ou seja o fator 3 está presente no elemento $u^2 - v^2$.

<u>Presença do fator 4:</u>

O fator 4 está presente no elemento 2uv, pois u e v apresentam paridades diferentes , então o u ou o v apresenta o fator 2, pois será um número par, tornando o fator 2uv divisível por 4.

<u>Presença do fator 5:</u>

Se o fator 5 não aparecer no elemento 2uv, então ele aparecerá no elemento $u^2 - v^2$ ou no elemento $u^2 + v^2$.

Vejamos: Se o fator 5 não aparece como fator do elemento 2uv, implica dizer que 5 não divide u e nem divide v, então ao dividirmos u e v pelo número 5, obteremos como resto $1, 2, 3$ ou 4.

Assim, temos que u e v são da forma $5k + 1, 5k + 2, 5k + 3$ ou $5k + 4$.

Temos:

$(5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5.(5k^2 + 2k) + 1 = 5r_1 + 1, r_1 \in \mathbb{Z}_+^*$

$(5k + 2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5.(5k^2 + 4k) + 4 = 5r_2 + 4, r_2 \in \mathbb{Z}_+^*$

$(5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5.(5k^2 + 6k + 1) + 4 = 5r_3 + 4, r_3 \in \mathbb{Z}_+^*$

$(5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5.(5k^2 + 2k + 3) + 1 = 5r_4 + 1, r_4 \in \mathbb{Z}_+^*$

Observe que tanto o u^2 quanto o v^2 podem ser da forma $5p + 1$ ou $5q + 4$, com $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$.

Temos, então duas situações distintas a serem analisadas.

<u>1ª Situação:</u> u^2 e v^2 serem da mesma forma, ou seja, ambos serem $5p + 1$ ou ambos serem $5q + 4$, com $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$.

*Se ambos forem do tipo $5p + 1$, com $t \in \mathbb{Z}_+^*$, teremos:

$$u^2 - v^2 = (5p_1 + 1) - (5p_2 + 1)$$

$$u^2 - v^2 = 5p_1 + 1 - 5p_2 - 1$$

$$u^2 - v^2 = 5p_1 - 5p_2$$

$$u^2 - v^2 = 5(p_1 - p_2) = 5t, \text{ com } \quad t \in \mathbb{Z}_+^*$$

E, nessa situação 5 divide o elemento $u^2 - v^2$, ou seja o número 5 é um fator de $u^2 - v^2$.

*Se ambos forem do tipo $5q + 4$, com $q \in \mathbb{Z}_+^*$, teremos:

$$u^2 - v^2 = (5q_1 + 4) - (5q_2 + 4)$$

$$u^2 - v^2 = 5q_1 + 4 - 5q_2 - 4$$

$$u^2 - v^2 = 5q_1 - 5q_2$$

$$u^2 - v^2 = 5(q_1 - q_2) = 5t_2, \text{com } t_2 \in \mathbb{Z}_+^*$$

E, nessa situação, 5 divide o elemento $u^2 - v^2$, ou seja, o número 5 é um fator de $u^2 - v^2$.

<u>2ª Situação:</u> u^2 e v^2 serem de formas diferentes, ou seja, um ser do tipo $5p + 1$ e o outro ser do tipo $5q + 4$, com $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$.

*Se u^2 for do tipo $5p + 1$ e v^2 for do tipo $5q + 4$, com $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$. , teremos:

$$u^2 + v^2 = (5p + 1) + (5q + 4)$$
$$u^2 + v^2 = 5p + 1 + 5q + 4$$
$$u^2 + v^2 = 5p + 5q + 5$$
$$u^2 + v^2 = 5(p + q + 1) = 5t_3 \text{ , com } t_3 \in \mathbb{Z}_+^*$$

*Se u^2 for do tipo $5q + 4$ e v^2 for do tipo $5p + 1$, com $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$, teremos:

$$u^2 + v^2 = (5q + 4) + (5p + 1)$$
$$u^2 + v^2 = 5q + 4 + 5p + 1$$
$$u^2 + v^2 = 5(p + q + 1)$$
$$u^2 + v^2 = 5(p + q + 1) = 5t_4 \text{ , com } t_4 \in \mathbb{Z}_+^*$$

Então que 5 divide o elemento $u^2 + v^2$.

E, desse modo temos que 5 divide ou elemento do terno pitagórico $u^2 - v^2$ ou divide o elemento do terno pitagórico $u^2 + v^2$, ou seja o fator 5 está presente no elemento $u^2 - v^2$ ou está presente no elemento $u^2 + v^2$.

Assim, temos que, em qualquer terno pitagórico primitivo, os fatores 3, 4 e 5 estão presentes.

2.3 Propriedades dos ternos pitagóricos

Bez (1997, p.33-35) apresenta algumas propriedades dos ternos pitagóricos, as quais serão demonstradas a seguir e servirão tanto para facilitar a compreensão dos ternos pitagóricos quanto para fundamentar os tópicos que apresentaremos mais adiante.

São cinco as propriedades. Vejamos:

P_1: Os elementos de um terno pitagórico (x, y, z) correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo.

P_2: Se um terno pitagórico é primitivo, então não existem dois elementos pares.

P_3: Se um terno pitagórico é primitivo, então o maior elemento é ímpar e um só dos outros dois é par.

P_4: Todo número inteiro positivo maior ou igual a 3 é elemento de um terno pitagórico.

P_5: Um terno pitagórico (x, y, z) não corresponde a um triângulo isósceles.

Demonstraremos cada uma destas propriedades.

Propriedade 1:

Suponhamos o terno pitagórico (x, y, z).

Para que segmentos com as medidas dos elementos x, y e z formem um triângulo é suficiente que fique mostrada a propriedade da desigualdade triangular, ou seja, a medida de qualquer lado de um triângulo é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Desse modo, devemos ter:

$\mathrm{z} < \mathrm{x} + \mathrm{y}$ (I) $\quad$ $\mathrm{y} < \mathrm{x} + \mathrm{z}$ (II) $\quad$ $\mathrm{x} < \mathrm{y} + \mathrm{z}$ (III)

Tomemos z como o maior dos lados e assim tem-se, por consequência, que $z \geq x$ e $z \geq y$ e, com mais obviedade I e II estão provadas, pois se z é o maior dos lados, então $z + x > y$ e $z + y > x$.

Devemos mostrar, agora que (III) é verdadeira.

Considere (x, y, z) como sendo um terno pitagórico.

Pela própria definição de ternos pitagóricos é válida a relação $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{z}^2$.

Adicionando 2xy aos dois membros da igualdade, teremos: $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2 = \mathrm{z}^2 + 2\mathrm{xy} \Longrightarrow (\mathrm{x} + \mathrm{y})^2 = \mathrm{z}^2 + 2\mathrm{xy}$ e, como $\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{xy} > \mathrm{z}^2$, temos que $(\mathrm{x} + \mathrm{y})^2 > \mathrm{z}^2$.

Assim, se $(\mathrm{x} + \mathrm{y})^2 > \mathrm{z}^2$, temos que $\mathbf{x} + \mathbf{y} > \mathbf{z}$, visto que x, y e z são números inteiros e positivos.

Conclui a prova de que os elementos do terno pitagórico $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Diante dessa propriedade dos ternos pitagóricos podemos definir triângulo retângulo pitagórico como todo triângulo retângulo de medidas x, y e z, com x e y sendo os catetos e z, a hipotenusa, lados inteiros e positivos, ou seja, os elementos do terno pitagórico (x, y, z) são lados do triângulo retângulo. O triângulo retângulo que não apresenta as medidas dos três lados inteiras, será chamado de triângulo retângulo não pitagórico.

<u>Propriedade 2:</u>

De acordo com a definição de ternos pitagóricos primitivos, temos que se (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo, o m.d.c. (x, y) = m.d.c. (x, z) = m.d.c. (y, z) = m.d.c. $(x, y, z) = 1$, ou seja, os elementos x, y e z são primos entre si.

Seja o terno pitagórico (x, y, z).

Analisaremos três casos distintos.

<u>1º CASO:</u> Sejam x e y números pares.

Se x é par, temos que x é do tipo $x = 2p$, então $x^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2.(2p^2)$, isto é, $x = 2k_1$, ou melhor, x^2 também será par.

Se y é par, temos que y é do tipo $y = 2q$, então $x^2 = (2q)^2 = 4q^2 = 2.(2q)$, isto é, $x = 2k_2$, ou melhor, $x = 2p$, então $x^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2.(2p^2)$, isto é, x^2 será par.

Sendo $x^2 = 2k_1$ e $y^2 = 2k_2$, temos que $x = 2p$, então $x^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2.(2p^2)$, isto é, $x^2 + y^2 = 2k$ ou melhor, $x^2 + y^2$ também será par.

Como $x^2 + y^2 = z^2$, temos que z^2 será par e, sendo z^2 par então z também será par, ou seja, z é do tipo $2r$.

Desse modo temos que x, y e z são números pares, dos tipos, 2p, 2q e 2r, respectivamente e, portanto não são primos entre si, pois apresentam, no mínimo, um fator comum, o fator 2.

<u>2º CASO:</u> Sejam x e y números ímpares.

Se x é ímpar, temos que x é do tipo $x = 2p + 1$, então $x^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2.(2p^2 + 2p) + 1$, ou melhor, x^2 também será ímpar

Se y é ímpar, temos que y é do tipo $y = 2q + 1$, então $y^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2.(2q^2 + 2p) + 1 = 2k_2 + 1$, ou melhor, y^2 também será ímpar.

Sendo $x^2 = 4p^2 + 4p + 1$ e $y^2 = 4q^2 + 4q + 1$, temos que $x^2 + y^2 = (4p^2 + 4p + 1) + (4q^2 + 4q + 1) = 4.(p^2 + q^2 + p + q) + 2 = 4k + 2$, isto é, $x^2 + y^2 = 4K + 2$, o que mostra que $x^2 + y^2$ é divisível por 2, mas não por 4.

Sendo $x^2 + y^2 = 4K_1 + 2 = 2(2K_1 + 1) = 2K_2$, e como $x^2 + y^2 = z^2$, temos que z^2 é par, ou seja, divisível por 2.

Se z^2 é divisível por 2, temos que z também é, e como z é divisível por 2, temos que z^2 é divisível por 4, o que não pode acontecer, pois conforme foi demonstrado anteriormente, temos que $x^2 + y^2 = z^2$ não é divisível por 4.

Desse modo temos para que (x, y, z) seja um terno pitagórico primitivo, os elementos x e y não podem ser, simultaneamente ímpares.

3º CASO: Seja x um número par e y um número ímpar, ou vice-versa.

Se x é par, temos que x é do tipo $x = 2p$, então $x^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2.(2p^2)$, isto é, $x = 2k_1$, ou melhor, x^2 também será par.

Se y é ímpar, temos que y é do tipo $y = 2q + 1$, então $y^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2.(2q^2 + 2p) + 1 = 2k_2 + 1$, ou melhor, y^2 também será ímpar.

Sendo $x^2 = 2k_1$ e $y^2 = 2k_2 + 1$, temos que $x^2 + y^2 = 2k_1 + (2k_2 + 1) = 2(k_1 + k_2) + 1$, isto é, $x^2 + y^2 = 2K + 1$, ou melhor, $x^2 + y^2$ será ímpar.

Sendo $x^2 + y^2 = 2K + 1$, e como $x^2 + y^2 = z^2$ temos que z^2 é ímpar, e sendo z^2 ímpar, temos que z também será ímpar.

Desse modo, temos para que (x, y, z) seja um terno pitagórico primitivo, o elemento x deverá ser par, o elemento y deverá ser ímpar ou vice-versa e o elemento z deverá ser ímpar.

Assim, se um terno pitagórico (x, y, z) é primitivo, não temos dois elementos pares.

Propriedade 3:

Conforme foi demonstrado na propriedade 2, anteriormente, temos que se um terno pitagórico (x, y, z) é primitivo, o elemento x é par e o elemento y é ímpar, ou vice-versa, e o elemento z será ímpar, ou seja, não teremos dois elementos pares.

Demonstramos, também, na propriedade 1, que no terno pitagórico (x, y, z), o maior elemento é o elemento z.

Como o elemento z é o maior, e ele é ímpar, sendo o elemento x par e o elemento y ímpar, ou vice-versa, temos que se um terno pitagórico (x, y, z) é primitivo, então o maior elemento é ímpar e um só dos outros dois é par.

Propriedade 4:

Conforme foi demonstrado no teorema 1, a fórmula atribuída a Pitágoras diz que se $n \in \mathbb{Z}_+^*$, $\left(2n + 1, \frac{1}{2}(2n + 1)^2 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2n + 1)^2 + \frac{1}{2}\right)$ é um terno pitagórico e como foi demonstrado no teorema 2, a fórmula atribuída a Platão diz que se $n \in \mathbb{Z}_+^* - \{1\}$,

$(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ é um terno pitagórico, temos que todo número inteiro positivo maior ou igual a 3 é elemento de um terno pitagórico.

Observe que o primeiro elemento do terno pitagórico gerado no teorema 1, o elemento (2n + 1), com n inteiro e positivo, gera todos os números ímpares maiores ou iguais a 3. Enquanto que o primeiro elemento do terno pitagórico gerado no teorema 2, o elemento (2n), com n $\in \mathbb{Z}_+^* - \{1\}$, gera todos os números pares maiores ou iguais a 4.

Tem-se, então, que todos os números inteiros e positivos maiores ou iguais a 3 são elementos de um terno pitagórico.

Propriedade 5:

Seja o terno pitagórico (x, y, z), corresponde aos lados de um triângulo retângulo.

Temos, pelo Teorema de Pitágoras que $x^2 + y^2 = z^2$.

Analisando que o terno pitagórico (x, y, z) corresponda a um triângulo isósceles, teremos $x = y$, e, assim, o terno (x, y, z) corresponderia a um triângulo isósceles.

Vejamos: $x^2 + y^2 = z^2 \implies x^2 + x^2 = z^2 \implies \mathbf{2x^2 = z^2} \implies \frac{z}{x} = \sqrt{2}$

O que é um absurdo, pois se $2x^2$ é par, z^2 também será par, visto que $2x^2 = z^2$.

Se z^2 é par, temos que z também será.

Tal conclusão é uma contradição, pois conforme foi demonstrado na propriedade 3, o maior elemento do terno, no caso o elemento z, é ímpar.

Desse modo temos que um terno pitagórico não corresponde a um triângulo isósceles.

2.4 Curiosidades sobre os ternos pitagóricos

Muitas são as curiosidades em relação aos ternos pitagóricos, tanto primitivos quanto derivados e aos triângulos retângulos pitagóricos correspondentes.

- Em relação ao terno (3, 4, 5) temos:

a) é o único em que seus elementos são números consecutivos;

Demonstração:

Sejam os elementos do terno pitagórico (x, y, z) números inteiros e consecutivos.

Nessa ocasião temos o terno pitagórico (x, x +1, x + 2), com x $\in \mathbb{Z}_+^*$.

Aplicando a relação pitagórica, temos:

$x^2 + y^2 = z^2 \Longrightarrow x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Longrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Longrightarrow$
$x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x' = 3$ e $x'' = -1$ (Não serve, pois $-1 \notin \mathbb{Z}_+^*$).

Como x = 3, temos o terno (x, x + 1, x + 2) = (3, 4, 5).

b) a área do triângulo retângulo pitagórico correspondente é 6 u.a., o próximo número da sequência numérica;

c) o perímetro do referido triângulo é 12 u.c., o dobro da sua área;

d) o produto dos seus elementos é 60, que equivale a 10 vezes sua área;

e) a soma dos cubos dos seus elementos, ou seja, $3^3 + 4^3 + 5^3$, é igual ao cubo do quarto consecutivo, o número 6, isto é, $3^3 + 4^{3\,+}\, 5^3 = 6^3$, portanto, se construirmos três cubos de arestas respectivamente 3, 4 e 5 unidades, a soma dos seus volumes será igual ao volume do cubo de aresta, 6 unidades.

- A área do triângulo retângulo pitagórico de lados 683, 1924 e 2014 é formada por um único algarismo. Sua área é 666.666.

- O triângulo de lados 372, 925 e 997 é o triângulo retângulo de maior perímetro que tem lados menores do que 1.000.

- Cada um dos ternos pitagóricos (88209, 90288, 126225) e (125928, 829521, 839025) tem seus dois elementos menores sendo números inteiros na ordem inversa.

- Os ternos pitagóricos (33, 56, 65) e (3333, 5656, 6565) têm como maiores elementos os números 65 e 6565, que quando invertidos tornam-se seus respectivos elementos intermediários.

- Inserindo-se o "um" antes dos elementos do terno pitagórico (5, 12, 13), obtemos um outro terno pitagórico, o terno (15, 112, 113).

- Sob a forma de curiosidade aqui fica uma forma de obter ternos pitagóricos: consideremos qualquer par consecutivo de números ímpares ou pares e somemos os seus inversos. Por exemplo, 1/3 + 1/5 = 8/15. Desta forma, 8 e 15 são os catetos de um triângulo retângulo: de fato, $8^2+15^2=17^2$.

<u>Demonstração:</u>

Sejam dois números inteiros, pares ou ímpares, consecutivos, $(a-1)$ e $(a+1)$, com a maior que 1, inteiro e positivo.

Somando os seus inversos, teremos:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} = \frac{a+1+a-1}{a^2-1} = \frac{2a}{a^2-1}$$

Assim, temos que $2a$ e $a^2 - 1$ são os catetos do triângulo retângulo pitagórico, ou seja, são os dois menores elementos de um terno pitagóricos, x e y. Então, temos que $x = 2a$ e $y = a^2 - 1$.

Daí, com $x = 2a$ e $y = a^2 - 1$, aplicamos a relação $x^2 + y^2 = z^2$, teremos:

$$(2a)^2 + (a^2 - 1)^2 = z^2 \Longrightarrow 4a^2 + a^4 - 2a^2 + 1 = z^2 \Longrightarrow z^2 = a^4 + 2a^2 + 1$$

$$\Longrightarrow z^2 = (a^2 + 1)^2 \Longrightarrow z = a^2 + 1 .$$

E, como a é um número inteiro e positivo maior que 1, temos que $a^2 + 1$, $2a$ e $a^2 - 1$ são números inteiros e positivos.

* Temos, aqui, outra forma de obtermos ternos pitagóricos:

1. Tomemos dois números racionais positivos cujo produto é 2. Por exemplo:

$$\frac{5}{4} \qquad e \qquad \frac{8}{5}$$

2. Adicionamos duas unidades a cada um desses números:

$$\frac{5}{4} + 2 = \frac{13}{4} \qquad e \qquad \frac{8}{5} + 2 = \frac{18}{5}$$

3. Multiplicamos tanto o numerador quanto o denominador das frações pelo denominador da outra fração:

$$\frac{13}{4} x \frac{5}{5} = \frac{65}{20} \qquad e \qquad \frac{18}{5} x \frac{4}{4} = \frac{72}{20}$$

4. Os numeradores das duas frações obtidas são os dois elementos menores do terno pitagórico:

$$(65, 72, z)$$

5. Aplicamos o teorema de Pitágoras para descobrirmos o maior dos elementos:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Longrightarrow 65^2 + 72^2 = z^2 \Longrightarrow z^2 = 9.409 \Longrightarrow z = \sqrt{9.409} \Longrightarrow z = 97$$

Temos o terno pitagórico $(65, 72, 97)$

<u>Demonstração:</u>

1. Tomemos dois números racionais positivos cujo produto é 2. Por exemplo:

$$\frac{a}{b} \qquad e \qquad \frac{2b}{a}$$

2. Adicionamos duas unidades a cada um desses números:

$$\frac{a}{b} + 2 = \frac{a + 2b}{b} \qquad e \qquad \frac{2b}{a} + 2 = \frac{2a + 2b}{a}$$

3. Multiplicamos tanto o numerador quanto o denominador das frações pelo denominador da outra fração:

$$\frac{a + 2b}{b} x \frac{a}{a} = \frac{a^2 + 2ab}{a.b} \qquad e \qquad \frac{2a + 2b}{a} x \frac{b}{b} = \frac{2ab + 2b^2}{a.b}$$

4. Os numeradores das duas frações obtidas são os dois elementos menores do terno pitagórico:

$$(a^2 + 2ab, \qquad 2ab + 2b^2, \qquad z)$$

5. Aplicamos o teorema de Pitágoras para descobrirmos o maior dos elementos:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow (a^2 + 2ab)^2 + \left(2ab + 2b^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$z^2 = a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2 + 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \Rightarrow$$

$$z^2 = a^4 + 2a^3b + 2a^3b + 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + 2a^2b^2 + 4ab^3 + 4ab^3 + 4b^4 \Rightarrow$$

$$z^2 = (a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2) + \left(2a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3\right) + (2a^2b^2 + 4ab^3$$
$$+ 4b^4) \Rightarrow$$

$$z^2 = a^2(a^2 + 2ab + 2b^2) + 2ab\left(a^2 + 2ab + 2b^2\right) + 2b^2(a^2 + 2ab + 2b^2) \Rightarrow$$

$$z^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2).(a^2 + 2ab + 2b^2) \Rightarrow z^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)^2$$

$$z = a^2 + 2ab + 2b^2$$

Temos o terno pitagórico $(a^2 + 2ab,\ 2ab + 2b^2,\ a^2 + 2ab + 2b^2)$

* Segundo Barbosa (1993, p.68), Lehmer provou, em 1900, em trabalho publicado no *American Journal of Mathematics*, que o número de ternos pitagóricos primitivos, com maior elemento (hipotenusa) menor que um número fixado N, é aproximadamente N : 2π. Ou seja, dado um número N, inteiro positivo, o número de ternos pitagóricos cujo valor do maior elemento (z) é menor que N é, aproximadamente o valor de N dividido por 2π (3,14159465358979...). Como exemplo tomando N = 40, o número de ternos pitagóricos é 6, que é, aproximadamente 40 : 2π, ou seja, 40 dividido por 2 vezes 3,141594 ..., ou ainda, 40 dividido por 6,283188.., o que equivale a 6,366194995.... Então, o menor valor inteiro menor que 6,283188... é o número 6, que quer dizer que existem 6 ternos pitagóricos com maior

elemento menor que 40. São eles: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20, 21, 29) e (12, 35, 37).

3 RELAÇÃO DOS TERNOS PITAGÓRICOS COM OUTRAS ÁREAS DA MATEMÁTICA

Neste tópico serão apresentadas as relações dos ternos pitagóricos com algumas áreas do conhecimento matemático, incluindo as sucessões de Fibonacci, círculo inscrito em triângulo pitagórico, círculo unitário, entre outros.

3.1 Ternos pitagóricos com sucessão de Fibonacci

De acordo com a Wikipédia, a enciclopédia livre, a sucessão de Fibonacci ou sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais, na qual os primeiros dois termos são 0 e 1, e cada termo subsequente corresponde à soma dos dois precedentes.

A sequência tem o nome do matemático pisano do século XIII Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, e os termos da sequência são chamados números de Fibonacci. Os números de Fibonacci são, portanto, os números que compõem a seguinte sequência de números inteiros:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Ainda de acordo com a Wikipédia, a sequência de Fibonacci teve sua origem no ocidente, onde apareceu pela primeira vez no livro *Liber Abaci* (1202), de Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, embora ela já tivesse sido descrita por matemáticos indianos. Fibonacci considerou o crescimento de uma população idealizada (não realista biologicamente) de coelhos. Os números descrevem o número de casais na população de coelhos depois de n meses se for suposto que:

a) no primeiro mês nasce apenas um casal;

b) casais amadurecem sexualmente (e reproduzem-se) apenas após o segundo mês de vida;

c) não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;

d) todos os meses, cada casal fértil dá à luz um novo casal; e

e) os coelhos nunca morrem.

De acordo com os estudos de Barbosa (1993, p. 69), existe uma relação bastante interessante da Sequência de Fibonacci com os Ternos Pitagóricos.

Analisemos a Sequência de Fibonacci, estando ausente o 1º termo da sequência, ou seja, o elemento 0:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Observe que muitos desses elementos aparecem em ternos pitagóricos, principalmente como elementos da Hipotenusa, por exemplo, o 5, o 13, o 34, . . .

Analisando os quatro primeiros termos da sequência: $1, 1, 2, 3$.

O produto dos termos das extremidades: $1.3 = 3$

O dobro do produto dos termos do meio: $2.1.2 = 4$

Os valores encontrados são os catetos do terno pitagórico $(3, 4, 5)$

Analisando, agora, os quatro próximos termos da sequência: $1, 2, 3, 5$.

O produto dos termos das extremidades: $1.5 = 5$

O dobro do produto dos termos do meio: $2.2.3 = 12$

Os valores encontrados são os catetos do terno pitagórico $(5,12,13)$

Analisando, ainda, os quatro termos que seguem na sequência: $2, 3, 5, 8$.

O produto dos termos das extremidades: $2.8 = 16$

O dobro do produto dos termos do meio: $2.3.5 = 30$

Os valores encontrados são os catetos do terno pitagórico $(16,30,34) \sim (8, 15, 17)$

Observe que na primeira situação a hipotenusa do terno pitagórico é o número 5, que corresponde ao quinto termo da sequência de Fibonacci, que ainda tem sua ordem correspondente à soma das ordens dos dois termos centrais, ou seja, o segundo com o terceiro, visto que o número 5 é o quinto termo da sequência. Observando, ainda, o mesmo acontece com a segunda situação, em que a hipotenusa do terno pitagórico é o número 13, que corresponde ao sétimo termo da sequência de Fibonacci, em que sua ordem é, exatamente, a soma das ordens dos termos centrais, ou seja, o terceiro com o quarto termos, visto que o número 13 é o sétimo termo da sequência. A mesma coisa acontece com a análise da terceira situação, em que a hipotenusa do terno pitagórico, o número 34, corresponde ao nono termo da sequência de Fibonacci, e que sua ordem corresponde à soma das ordens dos termos centrais, ou seja, o quarto com o quinto termos, visto que o número 34 é o nono termo da sequência.

Observando, ainda, veremos que se o primeiro termo da sequência de quatro números analisados for par, teremos um terno pitagórico não primitivo, visto que o segundo cateto é calculado pelo dobro dos dois termos centrais, o que implicará em dois catetos pares, acarretando que os mesmos não serão primos entre si, pois ambos serão pares e teriam, no mínimo, um fator em comum, o fator 2.

Utilizando-se do mesmo raciocínio das análises feitas anteriormente, das sequências de quatro números, teremos:

Sequência: $f_n \quad f_{n+1} \quad f_{n+2} \quad f_{n+3}$

Cálculo do 1º cateto: $f_n \cdot f_{n+3}$

Cálculo do 2º cateto: $2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2}$

Hipotenusa: $f_{(n+1)+(n+2)} = f_{2n+3}$

Diante da situação exposta, temos que "O índice da hipotenusa é o resultado da soma dos índices dos termos intermediários da sequência tomada".

Na sequência de Fibonacci, cada grupo de 4 números consecutivos, é do tipo:

$$a \quad b \quad a+b \quad a+2b$$

Calculando os termos do terno pitagórico pelo que foi mostrado anteriormente:

1º cateto: $a.(a+2b) = a^2 + 2ab$

2º cateto: $2b.(a+b) = 2ab + 2b^2$

Hipotenusa: $x^2 + y^2 = (a^2 + 2ab)^2 + (2ab + 2b^2)^2$

$$x^2 + y^2 = a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2 + 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4$$

$$x^2 + y^2 = (a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2) + (2a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3) + \\ + (2a^2b^2 + 4ab^3 + 4b^4)$$

$$x^2 + y^2 = a^2(a^2 + 2ab + 2b^2) + 2ab(a^2 + 2ab + 2b^2) + \\ + 2b^2(a^2 + 2ab + 2b^2)$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2) + (a^2 + 2ab + 2b^2)$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)^2$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 + 2ab + b^2 + b^2)^2$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 = [(a+b)^2 + b^2]^2}$$

Diante dessa situação, temos que "O elemento correspondente à hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos termos intermediários".

Mostraremos que $(a+b)^2 + b^2$ é um número da sequência de Fibonacci.

Mostrar que $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$

Aplicaremos a seguinte propriedade da sequência de Fibonacci, demonstrado no apêndice: "$f_{n+m} = f_{n-1}.f_m + f_n.f_{m+1} \; \forall\, m \geq 1, \forall\, n \geq 1 \quad f_1 = f_2 = 1$" da sequência de Fibonacci". Observe que

$$f_{2n+3} = f_{n+(n+3)}$$

$$f_{2n+3} = f_{n+(n+3)} = f_{n-1}.f_{n+3} + f_n.f_{n+4}$$

$$f_{2n+3} = (f_{n+1} - f_n).(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_n.(f_{n+2} + f_{n+3})$$
$$f_{2n+3} = f^2{}_{n+1} + f_{n+1}.f_{n+2} - f_n.f_{n+1} - f_n.f_{n+2} + f_n.f_{n+2} + f_n.f_{n+3}$$
$$f_{2n+3} = f^2{}_{n+1} + f_{n+1}.f_{n+2} - f_n.f_{n+1} + f_n.f_{n+3}$$
$$f_{2n+3} = f^2{}_{n+1} + f_{n+1}.f_{n+2} + f_n.(f_{n+3} - f_{n+1})$$
$$f_{2n+3} = f^2{}_{n+1} + f_{n+1}.f_{n+2} + f_n.f_{n+2}$$
$$f_{2n+3} = f^2{}_{n+1} + f_{n+2}.(f_n + f_{n+1})$$
$$f_{2n+3} = f^2{}_{n+1} + f_{n+2}.f_{n+2}$$
$$f_{2n+3} = f^2{}_{n+1} + f^2{}_{n+2}$$

Portanto demonstramos que a soma dos quadrados de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci é um número de Fibonacci.

3.2 Círculo inscrito em um triângulo pitagórico

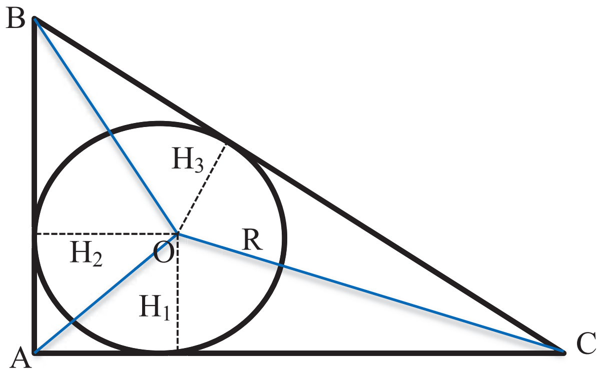
Um triângulo retângulo pitagórico é todo triângulo retângulo de medidas x, y e z, com x e y sendo os catetos e z, a hipotenusa, com lados inteiros e positivos, ou seja, os elementos do terno pitagórico (x, y, z) são lados do triângulo.

De acordo com os estudos de Bez (1997. p. 54), um problema interessante envolvendo ternos pitagóricos é o que nos leva a demonstrar que “todo círculo inscrito num triângulo retângulo pitagórico, tem como medida de seu raio um número inteiro positivo”.

Bez (1997) apresenta esse problema de ternos pitagóricos por meio da qual subsidiamos a seguinte demonstração.

Vejamos:

Seja o triângulo retângulo ABC, reto em A, de medidas AB = x, AC = y e BC = z, sendo AB e AC os catetos e BC a hipotenusa, circunscrito à circunferência de centro O e raio R.



Mostraremos que todo círculo inscrito num triângulo retângulo pitagórico, tem como medida de seu raio um número inteiro e positivo.

Sendo (x, y, z) um terno pitagórico primitivo, temos que x, y e z são números inteiros e positivos, onde $x^2 + y^2 = z^2$.

Calculando a área do triângulo retângulo ABC:

$$\text{Área} = \frac{\text{base}\,.\text{altura}}{2} \Rightarrow A = \frac{AC\,.AB}{2} \Rightarrow A = \frac{y\,.x}{2} \Rightarrow A = \frac{x\,.y}{2} \qquad \text{(I)}$$

Observe que o triângulo ABC foi dividido em 3 triângulos menores, o Δ AOB, o Δ AOC e o Δ BOC, e a área do triângulo maior é igual à soma das áreas dos triângulos menores, ou seja:

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta AOB} + A_{\Delta AOC} + A_{\Delta BOC} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{AB\,.\,OH_2}{2} + \frac{AC\,.\,OH_1}{2} + \frac{BC\,.\,OH_3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{x\,.R}{2} + \frac{y\,.R}{2} + \frac{z\,.R}{2} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{x\,.R + y\,.R + z\,.R}{2} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{R.(x + y + z)}{2} \quad \text{(II)}$$

Comparando I e II, teremos:

$$\frac{x\,.\,y}{2} = \frac{R.\,(x\, + y + z)}{2} \qquad \rightarrow \qquad x\,.\,y = R.\,(x\, + y + z) \qquad \text{(III)}$$

Lembrando o Teorema 3 já demonstrado anteriormente que diz "(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, u > v, u e v primos entre si e não ambos ímpares, tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$".

Fazendo $x = 2uv$ $\quad y = u^2 - v^2$ $\quad z = u^2 + v^2$ e substituindo em III, teremos:

$$x\,.\,y = R.\,(x\, + y + z) \Rightarrow 2uv.\,(u^2 - v^2) = R.\,(2uv\, + u^2 - v^2 + u^2 + v^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2uv.\,(u^2 - v^2) = R.\,(2uv\, + 2u^2) \Rightarrow 2uv.\,(u^2 - v^2) = R.\,2u(v + u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{2uv.\,(u^2 - v^2)}{2u(u + v)} \Rightarrow R = \frac{2uv.\,(u + v).\,(u - v)}{2u.\,(u + v)} \Rightarrow R = v.\,(u - v)$$

Observe que, como u e v são números inteiros e positivos, com $u > v$, temos que $u - v$ também será inteiro e positivo e, desse modo temos que R será um número inteiro e positivo.

Desse modo, temos que "todo círculo inscrito num triângulo retângulo pitagórico tem como medida de seu raio um número inteiro positivo".

3.3 A equação pitagórica, as equações diofantinas e o último teorema de Fermat

Mostraremos que existe uma vasta relação entre a equação pitagórica, as *equações diofantinas* e o Último Teorema de Fermat.

Inicialmente definiremos equação pitagórica e mostraremos os ternos que solucionam tal equação. A seguir trabalharemos com as *equações diofantinas*, as definiremos e comprovaremos que toda equação pitagórica também é uma *equação diofantina* e que algumas dessas equações não apresentam soluções diferentes da trivial. Para demonstrar que algumas *equações diofantinas* não apresentam soluções diferentes da trivial, utilizaremos o método da descida infinita.

Finalizaremos discorrendo um pouco sobre a vida de Pierre de Fermat e descrevendo um pouco sobre a história do "Último Teorema de Fermat".

3.3.1 A equação pitagórica

A equação pitagórica é toda equação do tipo $x^2 + y^2 = z^2$, sendo x, y e z lados de um triângulo retângulo, onde x e y representam os catetos e z a hipotenusa.

Uma solução inteira da equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ é o terno pitagórico (a, b, c). Se a, b e c são números inteiros primos entre si, teremos uma solução primitiva.

Quando multiplicamos uma solução primitiva por um número inteiro positivo "k" encontramos todas as soluções inteiras e positivas da equação pitagórica.

Chamaremos a solução (0, 0, 0) de solução trivial, toda e qualquer solução diferente de (0, 0, 0) será chamada de solução não-trivial.

O terno (3, 4, 5) será uma solução primitiva da equação pitagórica, pois os números 3, 4 e 5 são primos entre si, enquanto que o terno (6, 8, 10) é uma solução não primitiva da equação pitagórica.

Desse modo, temos que todo o estudo dos ternos pitagóricos feito anteriormente, incluindo os teoremas e propriedades, é utilizado na resolução das equações pitagóricas.

3.3.2 Equações diofantinas

Todas as equações com uma ou mais incógnitas que procuram soluções inteiras (ou naturais) são chamadas de *equações diofantinas* (vem do nome do matemático grego Diofanto, que viveu no séc. III d.C., e estudou o assunto numa obra intitulada *Arithmetica).*

Temos um campo vastíssimo, sem qualquer tipo de processo geral, de análise para tal tipo de problema.

Observe que a equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$, cuja solução (x, y, z) é um terno pitagórico é um exemplo de uma *equação diofantina* e apresenta como solução o terno pitagórico (x, y, z). Como solução dessa equação temos, além da solução chamada de trivial (0, 0 , 0), infinitas soluções, como por exemplo (3, 4, 5), (5, 12, 13), entre outros.

As equações pitagóricas sempre terão soluções, mesmo diferentes da trivial (0, 0, 0), enquanto que as *equações diofantinas* podem não ter soluções, além das triviais.

A inexistência de soluções de algumas *equações diofantinas*, é provada pela utilização do método da descida infinita, cuja criação é atribuída ao matemático francês Pierre de Fermat (1601 – 1665).

Para provarmos a inexistência de soluções de algumas *equações diofantinas* por meio do método da descida infinita, devemos assumir a existência de uma solução inteira e positiva e, a partir dela, mostrar que podemos obter outra solução de valor inteiro e positivo menor que a anterior. Prosseguimos dessa maneira, construiremos uma sequência infinita decrescente de valores inteiros positivos, o que é um absurdo.

Pelo Princípio da Boa Ordem temos que todo conjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento, e utilizando-se desse princípio e do método da descida infinita, mostraremos por absurdo (contradição) que a *equação diofantina* não tem solução. Essa contradição decorre da suposição de que o problema possui uma solução inteira e positiva e assim pelo método da redução ao absurdo concluímos que o problema original não possui solução.

Vejamos alguns exemplos de *equações diofantinas* e suas respectivas soluções.

<u>Exemplo 1:</u> Determinar as soluções da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$.

Observe que para termos soluções da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$, devemos ter que x e y devem apresentar a mesma paridade, ou ambos pares ou ambos ímpares, visto que $2z^2$ é par.

De fato, se x e y tiverem paridades diferente, x^2 e y^2 também terão e, assim, temos que $x^2 + y^2$ seria ímpar, o que não é possível.

Assim, temos que existem inteiros a e b, tais que: $x = a + b$ e $y = a – b$.

Para isso, basta tomarmos $a = \frac{1}{2}(x + y)$ e $b = \frac{1}{2}(x - y)$, notando que (x + y) e (x – y) são números pares, pois apresentam a mesma paridade.

Substituindo as expressões acima na equação original, temos:

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \implies (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2z^2 \implies$$

$$\implies (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = 2z^2 \implies 2a^2 + 2b^2 = 2z^2 \implies$$

$$a^2 + b^2 = z^2$$

Observe que a equação $a^2 + b^2 = z^2$ é uma equação Pitagórica. Então (a, b, z) é sua solução.

Pelo teorema 3 dos ternos pitagóricos, temos que “(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$"

Assim, $(a, b, z) = (2uv, u^2 – v^2, u^2 + v^2)$ ou $(a, b, z) = (u^2 – v^2, 2uv, u^2 + v^2)$.

Como $x = a + b$ e $y = a – b$ e $(x, y, 2z)$ é a solução da equação original, temos:

$$x = a + b = u^2 - v^2 + 2uv = u^2 + 2uv - v^2$$

$$y = a - b = u^2 - v^2 - 2uv = u^2 - 2uv - v^2$$

$$2z = 2(u^2 + v^2) = 2u^2 + 2v^2$$

Desse modo, temos que $(u^2 + 2uv – v^2, u^2 - 2uv – v^2, 2u^2 + 2v^2)$ é a solução da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$, com u e v números inteiros e positivos, $u > v$ e u e v primos entre si e de paridades diferentes.

<u>Exemplo 2:</u> Mostre que a equação $x^2 + y^2 = 4z + 3$ não tem solução.

Seja “a” um número inteiro. Temos dois casos a observar:

1º CASO: Se “a” é um número par.

$a = 2p \implies a^2 = (2p)^2 \implies a^2 = 4p^2 \implies a^2 = 4k_1$, ou seja, o quadrado de “a” é divisível por 4.

2º CASO: Se “a” é um número ímpar.

$a = 2p + 1 \Rightarrow a^2 = (2p + 1)^2 \Rightarrow a^2 = 4p^2 + 4p + 1 \Rightarrow a^2 = 4(p^2 + p) + 1 \Rightarrow a^2 = k_2 + 1$, ou seja, o quadrado de “a” deixa resto 1 quando é dividido por 4.

Somando-se os quadrados de dois números, x e y, teremos as seguintes situações distintas:

<u>1ª SITUAÇÃO:</u> Os números x e y são pares.

$$x = 2p \Rightarrow x^2 = (2p)^2 \Rightarrow x^2 = 4p^2 \Rightarrow x^2 = 4k_1, \text{ com } k_1 \in \mathbb{Z}.$$

$$y = 2q \Rightarrow y^2 = (2q)^2 \Rightarrow y^2 = 4q^2 \Rightarrow y^2 = 4k_2, \text{ com } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Somando-se x^2 com y^2, teremos:

$$x^2 + y^2 = 4k_1 + 4k_2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4(k_1 + k_2) \Rightarrow x^2 + y^2 = 4z, \text{ com } z \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, nessa situação somando-se x^2 com y^2 teremos um número divisível por 4.

<u>2ª SITUAÇÃO:</u> Os números x e y são ímpares.

$$x = 2p + 1 \Rightarrow x^2 = (2p + 1)^2 \Rightarrow x^2 = 4p^2 + 4p + 1 \Rightarrow x^2 = 4(p^2 + p) + 1 \Rightarrow x^2 = 4k_1 + 1, \text{ com } k_1 \in \mathbb{Z}.$$

$$y = 2q + 1 \Rightarrow y^2 = (2q + 1)^2 \Rightarrow y^2 = 4q^2 + 4q + 1 \Rightarrow y^2 = 4(q^2 + q) + 1 \Rightarrow x^2 = 4k_2 + 1, \text{ com } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Somando-se x^2 com y^2, teremos:

$$x^2 + y^2 = (4k_1 + 1) + (4k_2 + 1) \Rightarrow x^2 + y^2 = 4(k_1 + k_2) + 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4z + 2, \text{ com } z \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, nessa situação somando-se x^2 com y^2 teremos um número que deixa resto 2 quando é dividido por 4.

<u>3ª SITUAÇÃO:</u> Um dos números x ou y é par e o outro é ímpar.

Seja x par e y ímpar:

$$x = 2p \Rightarrow x^2 = (2p)^2 \Rightarrow x^2 = 4p^2 \Rightarrow x^2 = 4k_1, \text{ com } k_1 \in \mathbb{Z}.$$

$$y = 2q + 1 \Rightarrow y^2 = (2q + 1)^2 \Rightarrow y^2 = 4q^2 + 4q + 1 \Rightarrow y^2 = 4(q^2 + q) + 1 \Rightarrow y^2 = 4k_2 + 1, \text{ com } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Somando-se x^2 com y^2, teremos:

$$x^2 + y^2 = (4k_1) + (4k_2 + 1) \Rightarrow x^2 + y^2 = 4(k_1 + k_2) + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4z + 1, \text{ com } z \in \mathbb{Z}.$$

Seja y par e x ímpar:

$$y = 2p \Rightarrow y^2 = (2p)^2 \Rightarrow y^2 = 4p^2 \Rightarrow y^2 = 4k_1, \text{ com } k_1 \in \mathbb{Z}.$$

$$x = 2q + 1 \Rightarrow x^2 = (2q + 1)^2 \Rightarrow x^2 = 4q^2 + 4q + 1 \Rightarrow x^2 = 4(q^2 + q) + 1 \Rightarrow x^2 = 4k_2 + 1, \text{ com } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Somando-se x^2 com y^2, teremos:

$x^2 + y^2 = (4k_2 + 1) + (4k_1) \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4(k_1 + k_2) + 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4z + 1$, com $z \in \mathbb{Z}$.

Ou seja, nessa situação somando-se x^2 com y^2 teremos um número que deixa resto 1 quando é dividido por 4.

Desse modo temos que a equação $x^2 + y^2 = 4z + 3$ não admite soluções inteiras.

Exemplo 3: *A equação diofantina* $x^n + y^n = z^n$ não tem solução em inteiros não nulos, se n for um número inteiro positivo múltiplo de 4.

Se n é um número inteiro positivo múltiplo de 4, suponhamos que $n = 4k$.

Temos, então, que:

$x^n + y^n = z^n \Longrightarrow x^{4k} + y^{4k} = z^{4k} \Longrightarrow (x^k)^4 + (y^k)^4 = (z^{2k})^2$

Assim temos que o terno (x^k, y^k, z^{2k}) é solução da equação $a^4 + b^4 = c^2$

Devemos mostrar, agora, que a equação não tem solução além da trivial.

Aplicando-se o método da descida infinita de Fermat, vamos incluir a hipótese adicional que c seja mínima. Vejamos:

Se $a^4 + b^4 = c^2$ tem solução, temos $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$, ou seja, pelo Teorema 3 dos ternos pitagóricos, temos que "(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$".

Assim: $(a^2, b^2, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$, ou seja, $a^2 = u^2 - v^2$, $b^2 = 2uv$ e $c = u^2 + v^2$.

Como $a^2 = u^2 - v^2 \Longrightarrow a^2 + v^2 = u^2$

Observe que $a^2 + v^2 = u^2$ é uma equação Pitagórica e, sendo assim, ainda pelo Teorema 3 dos ternos pitagóricos, citado anteriormente, temos que existem inteiros positivos p e q, primos entre si, tais que $(a, v, u) = (p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$, ou seja, $a = p^2 - q^2$ $v = 2pq$ e $u = p^2 + q^2$.

Daí, segue que $b^2 = 2uv \Longrightarrow b^2 = 2(p^2 + q^2).2pq \Longrightarrow b^2 = 4pq.(p^2 + q^2)$.

Como p e q são primos entre si, observe que ambos são relativamente primos com $p^2 + q^2$.

Sendo $b^2 = 4pq.(p^2 + q^2)$, temos que $4pq.(p^2 + q^2)$ é um quadrado perfeito e, assim, p, q e $(p^2 + q^2)$ também são quadrados perfeitos.

Portanto, existem α, β *e* γ, tais que:

$$p = \alpha^2 \quad q = \beta^2 \quad e \quad (p^2 + q^2) = \gamma^2$$

Dai segue que $p^2 + q^2 = \gamma^2 \Rightarrow (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = \gamma^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2.$

Sendo $c = u^2 + v^2 > u = p^2 + q^2 = \gamma^2 \geq \gamma.$

Isso contradiz a minimalidade de c.

Desse modo, portanto, temos que, pelo método da descida infinita de Fermat, a *equação diofantina* $x^n + y^n = z^n$ não tem solução em inteiros não nulos, se n for um número inteiro positivo múltiplo de 4.

3.3.3 O último teorema de Fermat

O matemático e cientista francês Pierre de Fermat nasceu em Beaumont-de-Lomagne, no dia 17 de agosto de 1601 e morreu em Castres, no dia 12 de janeiro de 1665. Teve uma educação privilegiada, pois seu pai, Dominique de Fermat, era um rico mercador de pele. Pierre de Fermat ingressou no serviço público em 1631 e, em 1652 foi promovido para Juiz Supremo na Corte Criminal Soberana do Parlamento de Toulouse.

Fermat era conhecido por lançar problemas desafiadores, muitas vezes sem solução. Ele se contentava em rabiscar o que era necessário para recordar que tinha encontrado uma solução e, muitas vezes usava as margens dos livros lidos para esboçar comentários, raciocínios, pensamentos ou algo que achasse interessante na resolução ou na busca de soluções dos problemas lançados.

Diante dessa falta de interesse em publicar suas descobertas é que a influência de Fermat foi limitada para a matemática de sua época, pois Fermat nunca revelou suas descobertas ou solução dos problemas desafiadores, aos matemáticos seus contemporâneos.

Foi somente depois de uma série de observações e tentativas de resolver problemas relativos ao Teorema de Pitágoras e trios pitagóricos, que Fermat teve um olhar mais atento para a equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$, que apresenta infinitas soluções, e a modificou de maneira que obteve uma equação muito semelhante, em que o expoente era maior do que dois.

Chegou a equação $x^n + y^n = z^n$, com $n > 2$ e x, y, z e n inteiros positivos e passou considerar que essa equação não tem solução.

Junto ao problema que Fermat apresentou com relação à equação, escreveu a seguinte nota:

> É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de duas quartas potências ou, em geral, para qualquer número que é uma potência maior do que segunda, ser escrito como a soma de duas potências com o mesmo expoente.” (Singh, 1998. P. 82)

Às margens de uma tradução de *Arithmetica* de Diofanto, ao lado do enunciado deste problema, Fermat escreveu:

“*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*"

"Encontrei uma demonstração verdadeiramente maravilhosa disto, mas esta margem é estreita demais para contê-la."

Se não fosse o filho mais velho de Fermat que percebesse a importância de seus escritos no exemplar da *Arithmetica*, reuni-las e publicá-las numa edição especial em 1670, em *Arithmetica* de Diofanto contendo observações feitas por P. de Fermat, toda a sociedade matemática e mundial não teria conhecido sua existência.

Todas as observações apresentadas nesse livro não estavam acompanhadas da respectiva demonstração, mas foram uma a uma sendo demonstradas com o passar dos anos, ficando esta, a última por demonstrar, ficando, por este motivo, conhecido como o “Último Teorema de Fermat.”

O “Último Teorema de Fermat” alcançou muita popularidade e muitos foram aqueles que tentaram, sem sucesso, sua demonstração ou constatar que ela era falsa. Passados mais de três séculos, em novembro de 1994, depois de alguns meses de apreciação das mais de duzentas páginas, a demonstração do matemático Andrew Wiles é definitivamente aceita e, temos assim, o conhecido “Último Teorema de Fermat”. Vejamos:

O ‘Último Teorema de Fermat”, ou o Teorema de Fermat-Wiles, afirma que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos x, y, z e n com n maior do que 2 que satisfaça a equação $x^n + y^n = z^n$.

4 APLICABILIDADE DOS TERNOS PITAGÓRICOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Veremos que são inúmeras as aplicações dos ternos pitagóricos na educação básica, principalmente nos problemas geométricos que envolvem o conhecido Teorema de Pitágoras. Tanto na geometria plana quanto na geometria espacial, os problemas que envolvem triângulos retângulos ou os polígonos e/ou sólidos geométricos que na sua construção envolva o triângulo retângulo, como o triângulo isósceles, o retângulo, os prismas, as pirâmides e s cones, por exemplo.

Dada uma das dimensões inteiras de qualquer polígono ou de qualquer sólido geométrico desses, podemos encontrar determinar todas as outras dimensões inteiras desse n o u desse sólido que estamos trabalhando. Para isso, utilizamo-nos dos conhecimentos básicos adquiridos no nosso estudo sobre os ternos pitagóricos.

4.1 Ternos pitagóricos e os triângulos retângulos

Vejamos a aplicabilidade dos ternos pitagóricos em problemas que envolvem o conhecido Teorema de Pitágoras.

Dado apenas um dos lados de um triângulo retângulo podemos, por meio dos teoremas e/ou das propriedades dos ternos pitagóricos, determinar todos os triângulos retângulos que apresentem esse valor dado, seja de um dos catetos ou seja da hipotenusa.

Abordagem diferente da algebrização dada ao Teorema de Pitágoras, onde mecanicamente aplicamos a fórmula matemática que representa tal teorema, dados dois dos lados de um triângulo retângulo, podemos calcular o terceiro lado desconhecido.

Veremos, agora, aplicação dos ternos pitagóricos na resolução de problemas que envolvem o conhecido Teorema de Pitágoras, onde trabalharemos exemplo em que o cateto dado é par, exemplo em que o cateto dado é ímpar e exemplo em que é dada a hipotenusa. Seguem as questões:

<u>QUESTÃO 1:</u> Determine todos os triângulos retângulos pitagóricos cuja medida de um dos catetos é $x = 12$

<u>Solução:</u>

Elevamos 12 ao quadrado. Depois fatoramos 12^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($12^2 = 144 = 72\,x\,2 = 36\,x\,4 = 24\,x\,6 = 18\,x\,8$) .

Mostraremos que existem 4 triângulos retângulos pitagóricos com cateto de comprimento 12.

Vejamos:

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que $u.v$ seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $12^2 = 144 = 72\,x\,2$, temos que $u = 72$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{72-2}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{72+2}{2} = \frac{74}{2} = 37 \implies (12, 35, 37)$$

Se $12^2 = 144 = 36\,x\,4$, temos que $u = 36$ e $v = 4$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{36-4}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{36+4}{2} = \frac{40}{2} = 20 \implies (12, 16, 20)$$

Se $12^2 = 144 = 24\,x\,6$, temos que $u = 24$ e $v = 6$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{24-6}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{24+6}{2} = \frac{30}{2} = 15 \implies (9, 12, 15)$$

Se $12^2 = 144 = 18\,x\,8$, temos que $u = 18$ e $v = 8$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{18+8}{2} = \frac{26}{2} = 13 \implies (5, 12, 13)$$

Portanto, os comprimentos dos lados desses triângulos são dados por $(12, 35, 37), (12, 16, 20), (12, 9, 15), (12, 5, 13)$.

QUESTÃO 2: Determine todos os triângulos retângulos pitagóricos cuja medida de um dos catetos é $x = 15$

Solução:

Elevamos 15 ao quadrado. Depois fatoramos 15^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($15^2 = 225 = 75\,x\,3 = 45\,x\,5 = 25\,x\,9$) .

Mostraremos que existem 3 triângulos retângulos pitagóricos com cateto de comprimento 15.

Vejamos:

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$"

Se $15^2 = 225 = 75\, x\, 3$, temos que $u = 75$ e $v = 3$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{75-3}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{75+3}{2} = \frac{78}{2} = 39 \implies (15, 36, 39)$$

Se $15^2 = 225 = 45\, x\, 5$, temos que $u = 45$ e $v = 5$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{45-5}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{45+5}{2} = \frac{50}{2} = 25 \implies (15, 20, 25)$$

Se $15^2 = 225 = 25\, x\, 9$, temos que $u = 25$ e $v = 9$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{25-9}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{25+9}{2} = \frac{34}{2} = 17 \implies (8, 15, 17)$$

Os comprimentos dos lados desses triângulos são dados por $(15, 36, 39), (15, 20, 25), (8, 15, 17)$.

QUESTÃO 3: Determine todos os triângulos retângulos pitagóricos cuja medida da hipotenusa é $z = 40$.

Solução:

Fatorando o 40, teremos: 40 =1.40 = 2.20 = 4.10 = 5.8.

Observe que de acordo com o Teorema 3 que diz que “(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$" e com a propriedade 3 que diz que “se um terno pitagórico é primitivo, então o maior elemento é ímpar e um só dos outros dois é par”.

Temos a seguinte situação: 40 é um número par, então o(s) terno(s) pitagórico(s) que apresentam 40 como maior elemento, ou seja o(s) triângulo(s) retângulo(s) pitagórico(s) que apresenta(m) 40 como medida de sua hipotenusa não corresponde(m) a um terno pitagórico primitivo.

Desse modo temos ternos pitagóricos derivados, ou seja, $(x, y, z) = (k.2uv, k.(u^2 - v^2), k.(u^2 + v^2)$, com $u^2 + v^2$ sendo, de acordo com a propriedade 3, um número ímpar.

Então, teremos um único triângulo retângulo pitagórico de hipotenusa 40. Vejamos:

Fazendo 40 = 5.8, teremos k = 8 e $u^2 + v^2 = 5$ e, assim, u = 2 e v = 1, pois u > v. Com k =8, u = 2 e v = 1, temos:

$$(x, y, z) = (k.2uv, k.(u^2 - v^2), k.(u^2 + v^2)$$

$$(x, y, z) = (8.2.2.1, 8.(2^2 - 1^2), 8.(2^2 + 1^2) = (32, 24, 40) = (24, 32, 40).$$

Temos, então, um único terno pitagórico (24, 32, 40) de maior elemento 40, ou seja, temos um único triângulo retângulo pitagórico de hipotenusa 40, tendo os seus catetos medidas 24 e 32.

QUESTÃO 4: Os três lados de um triângulo retângulo são números inteiros. Um dos catetos mede 17. Qual é o perímetro desse triângulo?

Solução:

Temos pelo Teorema 3 que, "$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{v}$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$".

Como 17 é um número ímpar e um dos catetos, não podemos ter 2uv = 17, e sim, devemos ter $u^2 - v^2 = 17$, ou seja, (u + v)(u - v) = 17.

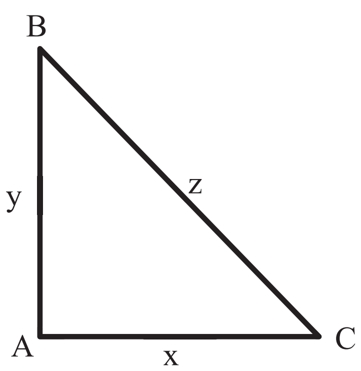
Observe que 17 é primo, então, necessariamente, u + v = 17 e u - v = 1, o que dá u = 9 e v = 8. Portanto, o outro cateto é 2.u.v = 2.9.8 = 144 e a hipotenusa é $u^2 + v^2 = 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145$.

Desse modo temos o seguinte terno pitagórico (17, 144, 145), ou seja, os catetos do triângulo retângulo medem 17 e 144, enquanto que a hipotenusa mede 145 e, nesse caso, o perímetro do triângulo mede 17 + 144 + 145 = 306.

QUESTÃO 5: Encontre todos os triângulos retângulos pitagóricos em que a medida de sua área é igual a "n" vezes a medida de seu perímetro.

Solução:

Seja o triângulo retângulo ABC, reto em A, de lados x, y, z, sendo, x e y os catetos e z, a hipotenusa.



Temos pelo Teorema 3 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$".

Nessa situação, temos que x = 2uv, y = $u^2 - v^2$ e z = $u^2 + v^2$.

Calculando a área do triângulo retângulo pitagórico:

$$A = \frac{x.y}{2} = \frac{2uv.(u^2 - v^2)}{2} = \frac{2uv.(u+v).(u-v)}{2} \Rightarrow A = uv.(u+v).(u-v)$$

Calculando o perímetro do triângulo retângulo pitagórico:

$$2P = x + y + z = 2uv + (u^2 - v^2) + (u^2 + v^2) = 2uv + 2u^2 \Rightarrow 2P = 2u.(u+v)$$

Igualando a área a "n" vezes o perímetro, teremos:

$$A = n.2P \Rightarrow uv.(u+v).(u-v) = n.2u.(u+v)$$

Cancelando os fatores iguais nos dois membros:

$$v.(u-v) = 2n$$

Vejamos algumas questões em que a medida da área de um triângulo retângulo pitagórico é "n" vezes a medida do seu perímetro:

<u>Área igual ao Perímetro (n = 1):</u>

Teremos $v.(u-v) = 2 = 2.1$

Assim, teremos dois casos a serem analisados: v = 2 ou v = 1.

<u>1º Caso:</u> Sendo v = 2, temos que u – v = 1.

Como v = 2 e u – v = 1, temos: u – 2 = 1, ou seja u = 1 + 2 e assim u = 3.

Desse modo, temos u = 3 e v = 2, sendo u e v de paridades diferentes, e assim teremos um terno pitagórico primitivo.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = (2.3.2,\ 3^2 - 2^2, 3^2 + 2^2) = (12, 5, 13)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 5 e 12, e hipotenusa 13, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{5.12}{2} = \frac{60}{2} \Rightarrow A = 30\ u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 5 + 12 + 13 \Rightarrow 2P = 30\ u.c.$ como medida de seu perímetro.

<u>2º Caso:</u> Sendo v = 1, temos que u – v = 2.

Como v = 1 e u – v = 2, temos: u – 1 = 2, ou seja, u = 2 + 1 e assim u = 3.

Desse modo, temos u = 3 e v = 1, sendo u e v de mesma paridade, e assim teremos um terno pitagórico derivado.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.3.1,\ 3^2 - 1^2, 3^2 + 1^2) = (6, 8, 10)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 6 e 8, e hipotenusa 10, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{6.8}{2} = \frac{48}{2} \Longrightarrow A = 24\, u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 6 + 8 + 10 \Longrightarrow 2P = 24\, u.c.$ como medida de seu perímetro.

Área igual a duas vezes o Perímetro (n = 2):

Teremos $v.(u - v) = 4 = 4.1 = 2.2$

Assim, teremos três casos a serem analisados: v = 4, v = 2 ou v = 1.

1º Caso: Sendo v = 4, temos que u – v = 1.

Como v = 4 e u – v = 1, temos: u – 4 = 1, ou seja, u = 1 + 4 e assim u = 5.

Desse, modo temos u = 5 e v = 4, sendo u e v de paridades diferentes, e assim teremos um terno pitagórico primitivo.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.4.5,\ 5^2 - 4^2, 5^2 + 4^2) = (40, 9, 41)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 9 e 40, e hipotenusa 41, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{9.40}{2} = \frac{360}{2} \Longrightarrow A = 180\, u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 9 + 40 + 41 \Longrightarrow 2P = 90\, u.c.$ como medida de seu perímetro.

2º Caso: Sendo v = 2, temos que u – v = 2.

Como v = 2 e u – v = 2, temos: u – 2 = 2, ou seja, u = 2 + 2 e assim u = 4.

Desse, modo temos u = 4 e v = 2, sendo u e v de mesma paridade, e assim teremos um terno pitagórico derivado.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.4.2,\ 4^2 - 2^2, 4^2 + 2^2) = (16, 12, 20)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 12 e 16, e hipotenusa 20, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{12.16}{2} = \frac{192}{2} \Longrightarrow A = 96\, u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 12 + 16 + 20 \Longrightarrow 2P = 48\, u.c.$ como medida de seu perímetro.

3º Caso: Sendo v = 1, temos que u – v = 4.

Como v = 1 e u – v = 4, temos: u – 1 = 4, ou seja u = 4 + 1 e assim u = 5.

Desse modo, temos u = 5 e v = 1, sendo u e v de mesma paridade, e assim teremos um terno pitagórico derivado.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.5.1,\ 5^2 - 1^2, 5^2 + 1^2) = (10, 24, 26)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 10 e 24, e hipotenusa 26, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{10.24}{2} = \frac{240}{2} \Longrightarrow A = 120\ u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 10 + 24 + 26 \Longrightarrow 2P = 60\ u.c.$ como medida de seu perímetro.

<u>Área igual a três vezes o Perímetro (n = 3):</u>

Teremos $v.(u - v) = \ 6 = 6.1 = 3.2$

Assim, teremos quatro casos a serem analisados: v = 6, v = 3, v = 2 ou v = 1.

<u>1º Caso:</u> Sendo v = 6, temos que u – v = 1.

Como v = 6 e u – v = 1, temos: u – 6 = 1, ou seja u = 1 + 6 e assim u = 7.

Desse modo, temos u = 7 e v = 6, sendo u e v de paridades diferentes, e assim teremos um terno pitagórico primitivo.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.7.6,\ 7^2 - 6^2, 7^2 + 6^2) = (84, 13, 85)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 13 e 84, e hipotenusa 85, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{13.84}{2} = \frac{1092}{2} \Longrightarrow A = 546\ u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 13 + 84 + 85 \Longrightarrow 2P = 182\ u.c.$ como medida de seu perímetro.

<u>2º Caso:</u> Sendo v = 3, temos que u – v = 2.

Como v = 3 e u – v = 2, temos: u – 3 = 2, ou seja u = 2 + 3 e assim u = 5.

Desse modo, temos u = 5 e v = 3, sendo u e v de mesma paridade, e assim teremos um terno pitagórico derivado.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.5.3,\ 5^2 - 3^2, 5^2 + 3^2) = (30, 16, 34)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 16 e 30, e hipotenusa 34, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{16.30}{2} = \frac{480}{2} \Longrightarrow A = 240\ u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 16 + 30 + 34 \Longrightarrow 2P = 80\ u.c.$ como medida de seu perímetro.

<u>3º Caso:</u> Sendo v = 2, temos que u – v = 3.

Como v = 2 e u – v = 3, temos: u – 2 = 3, ou seja, u = 3 + 2 e assim u = 5.

Desse modo, temos u = 5 e v = 2, sendo u e v de paridades diferentes, e assim teremos um terno pitagórico primitivo.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.5.2,\ 5^2 - 2^2, 5^2 + 2^2) = (20, 21, 29)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 20 e 21, e hipotenusa 29, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{20.21}{2} = \frac{420}{2} \Longrightarrow A = 210\ u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 20 + 21 + 29\ \Longrightarrow 2P = 70\ u.c.$ como medida de seu perímetro.

<u>4º Caso:</u> Sendo v = 1, temos que u – v = 6.

Como v = 1 e u – v = 6, temos: u – 1 = 6, ou seja, u = 6 + 1 e assim u = 7.

Desse modo, temos u = 7 e v = 1, sendo u e v de mesma paridade, e assim teremos um terno pitagórico derivado.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.7.1,\ 7^2 - 1^2, 7^2 + 1^2) = (14, 48, 50)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 14 e 48, e hipotenusa 50, que apresenta $A = \frac{x.y}{2} = \frac{14.48}{2} = \frac{672}{2} \Longrightarrow A = 336\ u.a.$ como medida de sua área e $2P = x + y + z = 14 + 48 + 50\ \Longrightarrow 2P = 112\ u.c.$ como medida de seu perímetro.

<u>QUESTÃO 5:</u> Encontre todos os triângulos retângulos pitagóricos cuja medida de seu perímetro é 144 u.c. (unidades de comprimento).

<u>Solução</u>:

Seja o triângulo retângulo ABC, reto em A, de lados x, y, z, sendo, x e y os catetos e z, a hipotenusa.

Temos pelo Teorema 3 que, “(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$”.

Nessa situação, temos que x = 2uv, $y = u^2 - v^2$ e $z = u^2 + v^2$.

Calculando o perímetro do triângulo pitagórico:

$$2P = x + y + z = 2uv + (u^2 - v^2) + (u^2 + v^2) = 2uv + 2u^2 \Longrightarrow 2P = 2u.(u + v)$$

Sendo o perímetro do triângulo 144 u.c., teremos:

$$2P = 2u.(u+v) \implies 2u.(u+v) = 144 \implies u.(u+v) = 72 = 72.1 = 36.2 = 18.4$$
$$= 12.6 = 9.8 = 24.3$$

Assim, teremos seis casos a serem analisados, podemos ter 72 = 72.1, 72 = 36.2, 72 = 18.4, 72 = 12.6, 72 = 9.8 ou 72 = 24.3

<u>1º Caso:</u> Sendo 72 = 72.1, temos que u.(u + v) = 72.1

Como u.(u + v) = 72.1, temos: u = 72 ou u = 1.

Se u = 72, temos u + v = 1, assim: 72 + v = 1, ou seja, v = 1 - 72 e assim v = -71, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 1, temos u + v = 72, assim: 1 + v = 72, ou seja, v = 72 - 1 e assim u = 71, o que é impossível, pois u < v.

<u>2º Caso:</u> Sendo 72 = 36.2, temos que u.(u + v) = 36.2

Como u.(u + v) = 36.2, temos: u = 36 ou u = 2.

Se u = 36, temos u + v = 2, assim: 36 + v = 2, ou seja, v = 2 - 36 e assim v = - 34, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 2, temos u + v = 36, assim: 2 + v = 36, ou seja, v = 36 - 2 e assim v = 34, o que é impossível, pois u < v.

<u>3º Caso:</u> Sendo 72 = 18.4, temos que u.(u + v) = 18.4

Como u.(u + v) = 18.4, temos: u = 18 ou u = 4.

Se u = 18, temos u + v = 4, assim: 18 + v = 4, ou seja, v = 4 - 18 e assim v = - 14, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 4, temos u +v = 18, assim: 4 + v = 18, ou seja, v = 18 - 4 e assim v = 14, o que é impossível, pois u < v.

<u>4º Caso:</u> Sendo 72 = 12.6, temos que u.(u + v) = 12.6

Como u.(u + v) = 12.6, temos: u = 12 ou u = 6.

Se u = 12, temos u + v = 6, assim: 12 + v = 6, ou seja, v = 6 - 12 e assim v = - 6, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 6, temos u +v = 12, assim: 6 + v = 12, ou seja, v = 12 - 6 e assim v = 6, o que é impossível, pois u = v.

<u>5º Caso:</u> Sendo 72 = 9.8, temos que u.(u + v) = 9.8

Como u.(u + v) = 9.8, temos: u = 9 ou u = 8.

Se u = 9, temos u + v = 8, assim: 9 + v = 8, ou seja, v = 8 - 9 e assim v = - 1, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 8, temos u +v = 9, assim: 8 + v = 9, ou seja, v = 9 - 8 e assim v = 1, o que é possível, pois u > v.

Desse modo, temos u = 8 e v = 1, sendo u e v de paridades diferentes, e assim teremos um terno pitagórico primitivo.

Substituindo, temos:

$$(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2) = \ (2.8.1,\ 8^2 - 1^2, 8^2 + 1^2) = (16{,}63, 65)$$

Assim, temos o triângulo retângulo de catetos 16 e 63, e hipotenusa 65, que apresenta $2P = x + y + z = 16 + 63 + 65 \ \Longrightarrow 2P = 144\, u.c.$ como medida de seu perímetro.

<u>6º Caso:</u> Sendo 72 = 24.3, temos que u.(u + v) = 24.3

Como u.(u + v) = 24.3, temos: u = 24 ou u = 3.

Se u = 24, temos u + v = 3, assim: 24 + v = 3, ou seja, v = 3 - 24 e assim v = - 21, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 3, temos u +v = 24, assim: 3 + v = 24, ou seja, v = 24 - 3 e assim v = 21, o que é impossível, pois u < v.

Desse modo, temos um único triângulo retângulo pitagórico de perímetro 144 u.c., é o triângulo de catetos 16 u.c. e 63 u.c. e hipotenusa 65 u.c.

<u>QUESTÃO 6:</u> Encontre todos os triângulos retângulos pitagóricos cuja medida de seu perímetro é 36 u.c. (unidades de comprimento).

<u>Solução</u>:

Seja o triângulo retângulo ABC, reto em A, de lados x, y, z, sendo, x e y os catetos e z, a hipotenusa.

Temos pelo Teorema 3 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos u e v, $u > v$ primos entre si não ambos ímpares tais que $(x, y, z) = (2uv,\ u^2 - v^2, u^2 + v^2)$".

Nessa situação, temos que x = 2uv, y = $u^2 - v^2$ e z = $u^2 + v^2$.

Calculando o perímetro do triângulo pitagórico:

$$2P = x + y + z = 2uv + (u^2 - v^2) + (u^2 + v^2) = 2uv + 2u^2 \Longrightarrow 2P = 2u.(u + v)$$

Sendo o perímetro do triângulo 36 u.c., teremos:

$$2P = 2u.(u+v) \implies 2u.(u+v) = 36 \implies u.(u+v) = 18 = 18.1 = 9.2 = 6.3$$

Assim, teremos três casos a serem analisados, podemos ter 18 = 18.1, 18 = 9.2 ou 18 = 6.3.

<u>1º Caso:</u> Sendo 18 = 18.1, temos que u.(u + v) = 18.1

Como u.(u + v) = 18.1, temos: u = 18 ou u = 1.

Se u = 18, temos u + v = 1, assim: 18 + v = 1, ou seja, v = 1 - 18 e assim v = -17, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 1, temos u + v = 18, assim: 1 + v = 18, ou seja, v = 18 - 1 e assim u = 17, o que é impossível, pois u < v.

<u>2º Caso:</u> Sendo 18 = 9.2, temos que u.(u + v) = 9.2

Como u.(u + v) = 9.2, temos: u = 9 ou u = 2.

Se u = 9, temos u + v = 2, assim: 9 + v = 2, ou seja, v = 2 - 9 e assim v = - 7, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 2, temos u + v = 9, assim: 2 + v = 9, ou seja, v = 9 - 2 e assim v = 7, o que é impossível, pois u < v.

<u>3º Caso:</u> Sendo 18 = 6.3, temos que u.(u + v) = 6.3

Como u.(u + v) = 6.3, temos: u = 6 ou u = 3.

Se u = 6, temos u + v = 3, assim: 6 + v = 3, ou seja, v = 3 - 6 e assim v = - 3, o que é impossível, pois v < 0.

Se u = 3, temos u + v = 6, assim: 3 + v = 6, ou seja, v = 6 - 3 e assim v = 3, o que é impossível, pois u = v.

Desse modo, temos que não existem triângulos pitagóricos com perímetro 36 u.c..

4.2 Aplicabilidade dos ternos pitagóricos na geometria plana

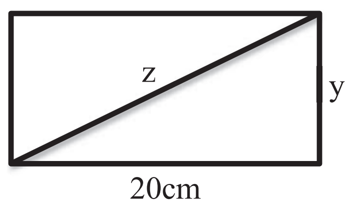
Vejamos a aplicabilidade dos ternos pitagóricos na geometria plana, principalmente em figuras como o retângulo e o triângulo isósceles, que a sua construção envolve o triângulo retângulo.

Trabalhando apenas com valores inteiros e positivos para os lados de um retângulo, de um triângulo isósceles, como também de um triângulo retângulo, ou seja, um triângulo retângulo pitagórico, teremos a utilização de teoremas e/ou propriedades dos ternos pitagóricos na construção das figuras, dado um dos lados do retângulo (base ou altura), poderemos calcular todos os retângulos que apresentem o lado dado, como também a partir daí, encontrar os retângulos que apresentam a área máxima e a área mínima com a medida dada, e a partir da base dada de um triângulo isósceles, podemos determinar quantos triângulos podemos construir com essa medida dada.

Observe que a diagonal do retângulo, como também a altura relativa à base de um triângulo isósceles, divide-o em dois triângulos retângulos congruentes, sendo que, no caso do retângulo, a hipotenusa do triângulo corresponde à diagonal do retângulo e os catetos do triângulo correspondem aos lados do retângulo, ou melhor, à base e à altura, enquanto que no triângulo isósceles, a hipotenusa e o outro cateto do triângulo retângulo, respectivamente, correspondem ao lado congruente do triângulo isósceles e à altura relativa à base.

Vejamos algumas questões apresentadas:

QUESTÃO 1: Encontre todos os retângulos com diagonal e lados inteiros, cuja medida de sua base é 20 cm. Dentre os retângulos encontrados, determine aquele que apresenta área máxima e aquele que apresenta área mínima.



Solução:

Elevamos 20 ao quadrado. Depois fatoramos 20^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($20^2 = 400 = 400\,x\,1 = 200\,x\,2 = 100\,x\,4 = 50\,x\,8 = 40\,x\,10 = 25\,x\,16 = 20\,x\,20$) .

Portanto, existem 4 retângulos que apresentam 20 cm como comprimento de sua base, pois escrevendo o 400 como produto 25 x 16 e como produto $400\,x\,1$, teremos, em ambos os casos, dois fatores de paridades diferentes e escrevendo como produto 20 x 20, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Vejamos:

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que $u.v$ seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$"

Se $20^2 = 400 = 200\,x\,2$, temos que $u = 200$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{200-2}{2} = \frac{198}{2} = 99 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{200+2}{2} = \frac{202}{2} = 101 \Rightarrow (20, 99, 101),$$

Se $20^2 = 400 = 100\,x\,4$, temos que $u = 100$ e $v = 4$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{100-4}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{100+4}{2} = \frac{104}{2} = 52 \Rightarrow (20, 48, 52),$$

Se $20^2 = 400 = 50\,x\,8$, temos que $u = 50$ e $v = 8$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{50-8}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{50+8}{2} = \frac{58}{2} = 29 \Rightarrow (20, 21, 29),$$

Se $20^2 = 400 = 40\,x\,10$, temos que $u = 40$ e $v = 10$. Assim:

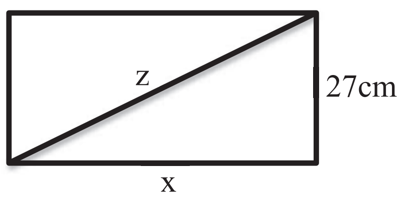
$$\frac{u-v}{2} = \frac{40-10}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{40+10}{2} = \frac{50}{2} = 25 \Rightarrow (15, 20, 25),$$

Portanto, podemos construir os seguintes retângulos que apresentam como medida de sua base 20 cm:

Retângulo 1: base = 20 cm	altura = 99 cm	diagonal = 101 cm
Retângulo 2: base = 20 cm	altura = 48 cm	diagonal = 52 cm
Retângulo 3: base = 20 cm	altura = 21 cm	diagonal = 29 cm
Retângulo 4: base = 20 cm	altura = 15 cm	diagonal = 25 cm

Teremos, então, como área máxima o retângulo 1, com medidas 20 cm e 99 cm, respectivamente da base e da altura, resultando numa área de A = 20 cm x 99 cm = 1980 cm^2, e como área mínima o retângulo 4, com medidas 20 cm e 15 cm, respectivamente da base e da altura, resultando numa área de A = 20 cm x 15 cm = 300 cm^2.

<u>QUESTÃO 2:</u> Encontre todos os retângulos com diagonal e lados inteiros, cuja medida de sua altura é 27 cm. Dentre os retângulos encontrados, determine aquele que apresenta área máxima e aquele que apresenta área mínima.



<u>Solução</u>:

Elevamos 27 ao quadrado. Depois fatoramos 27^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($27^2 = 729 = 729\ x\ 1 = 243\ x\ 3 = 81\ x\ 9 = 27\ x\ 27$) .

Mostraremos que existem 3 retângulos que apresentam 27 cm como comprimento de sua altura, pois escrevendo o 27 como produto 27 x 27, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Vejamos:

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$"

Se $27^2 = 729 = 729\ x\ 1$, temos que $u = 729$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{729-1}{2} = \frac{728}{2} = 364 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{729+1}{2} = \frac{730}{2} = 365 \implies (27, 364, 365),$$

Se $27^2 = 729 = 243\ x\ 3$, temos que $u = 243$ e $v = 3$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{243-3}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{243+3}{2} = \frac{246}{2} = 123 \implies (27, 120, 123),$$

Se $27^2 = 729 = 81\ x\ 9$, temos que $u = 81$ e $v = 9$. Assim:

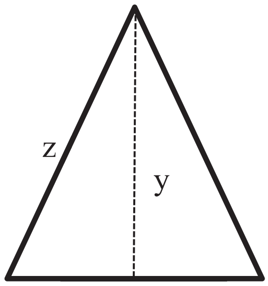
$$\frac{u-v}{2} = \frac{81-9}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{81+9}{2} = \frac{90}{2} = 45 \implies (27, 36, 45),$$

Portanto, podemos construir os seguintes retângulos que apresentam como medida de sua base 27 cm:

Retângulo 1: base = 27 cm	altura = 364 cm	diagonal = 365 cm
Retângulo 2: base = 27 cm	altura = 120 cm	diagonal = 123 cm
Retângulo 3: base = 27 cm	altura = 36 cm	diagonal = 45 cm

Teremos, então, como área máxima o retângulo 1, com medidas 27 cm e 364 cm, respectivamente da base e da altura, resultando numa área de A = 27 cm x 364 cm = 9828 cm^2, e como área mínima o retângulo 3, com medidas 27 cm e 36 cm, respectivamente da base e da altura, resultando numa área de A = 27 cm x 36 cm = 972 cm^2.

<u>QUESTÃO 3:</u> Encontre todos os triângulos isósceles com medidas inteiras para altura e lados congruentes, cuja medida da base é 100 cm.



<u>Solução:</u>

Observe que quando traçamos a altura relativa à base de um triângulo isósceles, dois triângulos retângulos idênticos são formados, sendo que um dos catetos (x) do triângulo retângulo mede a metade da base do triângulo isósceles, enquanto que o outro cateto (y) e a hipotenusa (z) do triângulo retângulo correspondem, respectivamente ao lado congruente e à altura do triângulo isósceles relativa à base.

Assim, teremos um triângulo retângulo com um dos catetos medindo 50 cm.

Calculando as outras medidas do triângulo, teremos:

Elevamos 50 ao quadrado. Depois, fatoramos 50^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($50^2 = 2.500 = 2.500\ x\ 1 = 1.250\ x\ 2 = 625\ x\ 4 = 500\ x\ 5 = 250\ x\ 10 = 125\ x\ 20 = 100\ x\ 25 = 50\ x\ 50$) .

Mostraremos que existem 2 triângulos retângulos que apresentam 50 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 50 como produto 2.500 x 1, 625 x 4, 500 x 5 e 100 x 25, temos fatores de paridades diferentes e, escrevendo o 50 como produto 50 x 50, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$"

Se $50^2 = 2.500 = 1.250\ x\ 2$, temos que $u = 1.250$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{1.250-2}{2} = \frac{1.248}{2} = 624 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{1.250+2}{2} = \frac{1.252}{2} = 626.$$

Se $50^2 = 2.500 = 250\ x\ 10$, temos que $u = 250$ e $v = 10$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{250-10}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{250+10}{2} = \frac{260}{2} = 130.$$

Desse modo, temos os seguintes ternos pitagóricos (50, 624, 626) e (50, 120, 130), ou seja, podemos construir dois triângulos retângulos pitagóricos com um dos catetos medindo 50 cm. Suas hipotenusas medem, respectivamente, 130 cm e 626 cm.

Então, com base medindo 100 cm, podemos construir dois triângulos isósceles com lados congruentes e altura apresentam medidas inteiras, um apresenta 130 cm e o outro apresenta 626 cm como medida de seu lado congruente.

4.3 Aplicabilidade dos ternos pitagóricos na geometria espacial

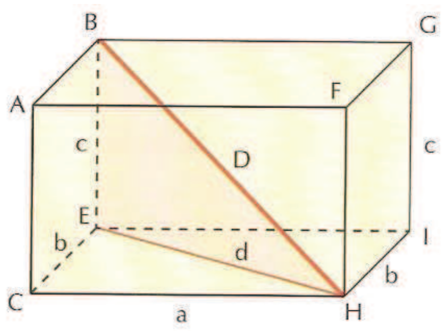
Vejamos a aplicabilidade dos ternos pitagóricos na geometria espacial, principalmente em figuras geométricas como prismas, pirâmides e cones, que na sua construção envolvem o triângulo retângulo.

4.3.1 Aplicação dos ternos pitagóricos na construção dos prismas

Trabalhando apenas com valores inteiros e positivos para as dimensões de prismas, teremos a utilização de teoremas e/ou propriedades dos ternos pitagóricos na construção das figuras, dada uma das medidas, seja o comprimento ou largura da base, seja a altura do prisma, podemos determinar quantos prisma podemos construir com a dimensão dada e as outras dimensões inteiras e positivas.

Observe que a diagonal da base do prisma divide a base em dois triângulos retângulos iguais, sendo que a hipotenusa do triângulo corresponde à diagonal da base do prisma e os catetos do triângulo correspondem aos lados (comprimento e largura) da base.

Temos:

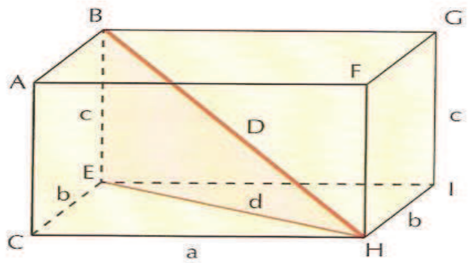


CH = a = dimensão da base
CE = b = dimensão da base
EH = d = diagonal da base
BE = c = altura do prisma
BH = D = diagonal do prisma

Observe também que a diagonal da base, a altura do prisma e a diagonal do prisma formam um triângulo retângulo em que a hipotenusa corresponde à diagonal do prisma.

Vejamos algumas questões apresentadas

<u>QUESTÃO 1:</u> Encontre todos os prismas com medidas inteiras que apresentam uma das dimensões da base medindo 7 cm. Calcule dentre os prismas encontrados, aquele que apresenta o volume máximo e aquele que apresenta o volume mínimo.



CH = dimensão da base = a
CE = dimensão da base = 7 cm
EH = diagonal da base = d
BE = altura do prisma = c
BH = diagonal do prisma = D

<u>Solução</u>:

Observe que o triângulo CEH é retângulo, de hipotenusa EH e catetos CE e CH.

Elevamos 7 ao quadrado. Depois, fatoramos 7^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($7^2 = 49 = 49\ x\ 1 = 7\ x\ 7$) .

Portanto, existe apenas um triângulo retângulo pitagórico que apresenta 7 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 49 como produto 7 x 7, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $7^2 = 49 = 49\ x\ 1$, temos que $u = 49$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{49-1}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{49+1}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

Assim, temos que a base do prisma apresenta dimensões de 24 cm e 7 cm e a sua diagonal mede 25 cm.

Observe que a altura do prisma e as diagonais da base e do prisma formam, também, um triângulo retângulo, sendo a hipotenusa a diagonal do prisma.

Se a diagonal da base mede 25 cm, buscaremos todos os triângulos retângulos em que um dos catetos mede 25 cm. Vejamos:

Elevamos 25 ao quadrado. Depois, fatoramos 25^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($25^2 = 625 = 625\,x\,1 = 125\,x\,5 = 25\,x\,25$) .

Portanto, existem apenas dois triângulos retângulos pitagóricos que apresentam 25 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 625 como produto 25 x 25, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $25^2 = 625 = 625\,x\,1$, temos que $u = 625$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{625-1}{2} = \frac{624}{2} = 312 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{625+1}{2} = \frac{626}{2} = 313.$$

Se $25^2 = 625 = 125\,x\,5$, temos que $u = 125$ e $v = 5$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{125-5}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{125+5}{2} = \frac{130}{2} = 65.$$

Temos, então, dois prismas regulares que apresentam uma de suas dimensões medindo 7cm. São eles:

Prisma 1: Comprimento da base = 24 cm   Largura = 7 cm   Altura = 312 cm

Prisma 2: Comprimento da base = 24 cm   Largura = 7 cm   Altura = 60 cm

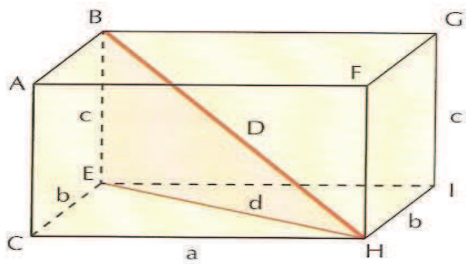
Os dois prismas apresentam a mesma área da base: $A_B = 24\,x\,7 \implies A_B = 168\,cm^2$, diferenciando-se apenas pela altura. Calculando seus respectivos volumes:

Prisma 1: $V = A_B.H \implies V = 168\,x\,312 \implies V = 52416\,cm^3$

Prisma 2: $V = A_B.H \implies V = 168\,x\,60 \implies V = 10080\,cm^3$

Portanto, podemos construir dois prismas, cada prisma com uma das dimensões igual a 7 cm. Sendo que o volume máximo é de $52416\,cm^3$, e o volume mínimo de $10080\,cm^3$.

<u>QUESTÃO 2:</u> Encontre todos os prismas com medidas inteiras que apresentam uma das dimensões da base medindo 5 cm. Calcule, dentre os prismas encontrados, aquele que apresenta o volume máximo e aquele que apresenta o volume mínimo.



CH = dimensão da base = a
CE = dimensão da base = 5 cm
EH = diagonal da base = d
BE = altura do prisma = c
BH = diagonal do prisma = D

<u>Solução</u>:

Observe que o triângulo CEH é retângulo, de hipotenusa EH e catetos CE e CH.

Elevamos 5 ao quadrado. Depois, fatoramos 5^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($5^2 = 25 = 25\,x\,1 = 5\,x\,5$) .

Portanto, existe apenas um triângulo retângulo que apresenta 5 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 25 como produto 5 x 5, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $5^2 = 25 = 25\,x\,1$, temos que $u = 25$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{25-1}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{25+1}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

Assim, temos que a base do prisma apresenta dimensões de 5 cm e 12 cm e a sua diagonal mede 13 cm.

Observe que a altura do prisma, as diagonais da base e do prisma formam, também, um triângulo retângulo, sendo a hipotenusa a diagonal do prisma.

Se a diagonal da base mede 13 cm, buscaremos todos os triângulos retângulos em que um dos catetos mede 13 cm. Vejamos:

Elevamos 13 ao quadrado. Depois, fatoramos 13^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($13^2 = 169 = 169\,x\,1 = 13\,x\,13$) .

Portanto, existe apenas um triângulo retângulo que apresenta 13 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 169 como produto 13 x 13, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $13^2 = 169 = 169\,x\,1$, temos que $u = 169$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{169-1}{2} = \frac{168}{2} = 84 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{169+1}{2} = \frac{170}{2} = 85.$$

Temos, então, um único prisma regular que apresenta uma de suas dimensões medindo 5cm:

Prisma: Comprimento da base = 5 cm Largura = 12cm Altura = 84 cm

Calculando o volume do prisma:

$$A_B = 5\,x\,12 \implies A_B = 60\ cm^2$$

$$V = A_B.H \implies V = 60\,x\,84 \implies V = 5040\ cm^3$$

Portanto, temos um único prisma que apresenta uma de suas dimensões igual a 5 cm, sendo que seu volume é de $5040\ cm^3$.

4.3.2 Aplicação dos ternos pitagóricos na construção das pirâmides

Trabalhando apenas com valores inteiros e positivos para as dimensões de pirâmides, teremos a utilização de teoremas e/ou propriedades dos ternos pitagóricos na construção das figuras. Dada uma das medidas, seja a aresta lateral, seja a aresta da base ou a altura da pirâmide, podemos calcular as outras medidas desconhecidas de todas as pirâmides que apresentam a dimensão dada e, consequentemente, verificaremos, entre as pirâmides encontradas, aquela que apresenta o volume máximo e aquela que apresenta o volume mínimo, como também calcularemos tais volumes.

Especificamente, veremos as pirâmides com bases diferenciadas, como triangulares, quadrangulares e hexagonais, todas regulares.

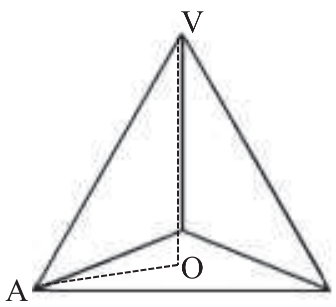
4.3.2.1 Pirâmides triangulares

Seja uma pirâmide reta, de base triangular regular, triângulo equilátero ABC centrada no ponto O, e vértice V.

Ligando o centro O, da base triangular, ao vértice da pirâmide V e a qualquer vértice da base, teremos, respectivamente os segmentos OV e AO.

Analisando as pirâmides triangulares regulares, veremos que os segmentos OV, AO e a aresta lateral formam um triângulo retângulo, reto em O.

Sendo, assim, temos que os catetos AO e OV correspondem, respectivamente, a 2/3 da altura do triângulo equilátero da base e à altura da pirâmide, enquanto que a hipotenusa corresponde à aresta lateral da pirâmide. (OBS.: O ponto O é o ponto de encontro das alturas do triângulo equilátero, daí termos que AO = 2/3 da aresta da base).



VO = altura da pirâmide

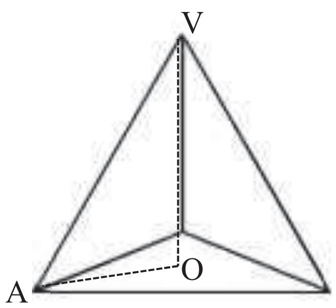
AV = aresta lateral

AO = 2/3 da altura do triângulo equilátero da base

Desse modo, temos que, com apenas uma dimensão dada, podemos construir todas as pirâmides triangulares de dimensões inteiras e positivas que apresentam a dimensão dada, como também calcular o volume máximo e o volume mínimo das pirâmides que podemos construir com a medida dada.

Vejamos alguns exemplos:

<u>EXEMPLO 1:</u> Encontre todas as pirâmides triangulares regulares que apresentam altura medindo 10 cm e altura sendo uma medida inteira. Calcule o volume de todas as pirâmides encontradas.



VO = altura da pirâmide

AV = aresta lateral

AO = 2/3 da altura do triângulo equilátero da base

<u>Solução:</u>

Buscaremos todos os triângulos retângulos pitagóricos que apresentam 10 cm como medida de um de seus catetos.

Elevamos 10 ao quadrado. Depois, fatoramos 10^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($10^2 = 100 = 100\ x\ 1 = 50\ x\ 2 = 25\ x\ 4 = 20\ x\ 5 = 10\ x\ 10$) .

Portanto, existe apenas um triângulo retângulo pitagórico que apresenta 10 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 100 como produto 100 x 1, 25 x 4 e 20 x 5, temos fatores de paridades diferentes e, escrevendo o 100 como produto 10 x 10, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $10^2 = 100 = 50\,x\,2$, temos que $u = 50$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{50-2}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{50+2}{2} = \frac{52}{2} = 26.$$

Desse modo, temos um único terno pitagórico, o (10, 24, 26), ou seja, podemos construir uma única pirâmide triangular regular, de altura 10 cm e que apresenta medidas inteiras para a aresta lateral e para 2/3 da altura do triângulo equilátero da base, a pirâmide que apresenta 10 cm, 24 cm e 26 cm como medidas, respectivamente, da altura da pirâmide, 2/3 da altura do triângulo equilátero da base e aresta lateral.

Calculando-se a altura do triângulo equilátero da base e a medida do seu lado:

$$AO = \frac{2}{3}.h \Rightarrow 24 = \frac{2}{3}.h \Rightarrow 2h = 72 \Rightarrow h = 36\,cm$$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 36 = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L\sqrt{3} = 72\,.\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow 3L = 72\sqrt{3} \Rightarrow L = 24\sqrt{3}\,cm$$

Calculando-se a área da base:

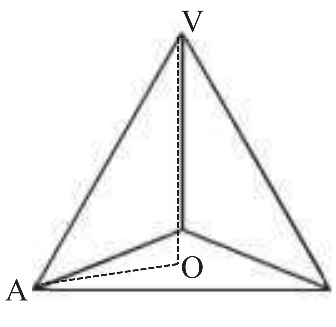
$$A_B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = \frac{\left(24\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = \frac{1728\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 432\sqrt{3}\,cm^2$$

Calculando-se o volume da pirâmide:

$$V = \frac{A_B.h}{3} \Rightarrow V = \frac{432\sqrt{3}\,x\,10}{3} \Rightarrow \quad V = 1.440\sqrt{3}\,cm^3\,.$$

Portanto, a única pirâmide triangular de altura 10 cm, com aresta lateral e 2/3 da altura do triângulo da base inteiras, é a pirâmide de volume $1.440\sqrt{3}\,cm^3$.

<u>EXEMPLO 2:</u> Encontre todas as pirâmides triangulares regulares que apresentam aresta da base medindo $6\sqrt{3}$ cm e altura sendo uma medida inteira. Calcule o volume de todas as pirâmides encontradas.



VO = altura da pirâmide

AV = aresta lateral

AO = 2/3 da altura do triângulo equilátero da base

<u>Solução</u>:

Inicialmente, calcularemos a medida do segmento AO, que mede 2/3 da altura do triângulo equilátero da base:

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{(6\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{18}{2} \Rightarrow h = 9\,cm$$

$$AO = \frac{2}{3}.9 \Rightarrow AO = \frac{18}{3} \Rightarrow h = 6\,cm$$

Buscaremos todos os triângulos retângulos que apresentam 6 cm como medida de um de seus catetos.

Elevamos 6 ao quadrado. Depois, fatoramos 6^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($6^2 = 36 = 36\,x\,1 = 18\,x\,2 = 12\,x\,3 = 9\,x\,4 = 6\,x\,6$) .

Portanto, existe apenas um triângulo retângulo pitagórico que apresenta 6 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 36 como produto 36 x 1, 12 x 3 e 9 x 4, temos fatores de paridades diferentes e, escrevendo o 36 como produto 6 x 6, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $6^2 = 36 = 18\,x\,2$, temos que $u = 18$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{18-2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{18+2}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Desse modo, temos um único terno pitagórico, o (6, 8, 10), ou seja, podemos construir uma única pirâmide triangular regular, cuja medida da aresta da base mede $6\sqrt{3}$ cm e que apresenta medidas inteiras para a aresta lateral e para altura da pirâmide, a pirâmide que apresenta 6 cm, 8 cm e 10 cm como medidas, respectivamente, de 2/3 da altura do triângulo equilátero da base, altura da pirâmide e aresta lateral.

Calculando-se a área da base:

$$A_B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = \frac{(6\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = \frac{108\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 27\sqrt{3}\,cm^2$$

Calculando-se o volume da pirâmide: $V = \frac{A_B.h}{3} \Rightarrow V = \frac{27\sqrt{3}\,x\,10}{3} \Rightarrow V = 90\sqrt{3}\,cm^3$.

Portanto, a única pirâmide triangular cuja medida da aresta da base mede $6\sqrt{3}\,cm$, com aresta lateral e altura de medidas inteiras, é a pirâmide de volume $90\sqrt{3}\,cm^3$.

4.3.2.2 Pirâmides quadrangulares

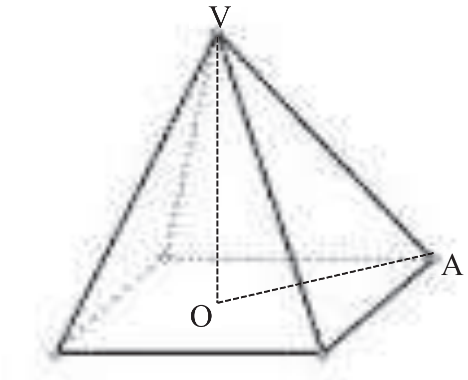
Seja uma pirâmide de base quadrangular, quadrado ABCD centrada no ponto O, e vértice V.

Ligando o centro O, da base quadrangular, ao vértice da pirâmide V e a qualquer vértice da base, teremos, respectivamente os segmentos OV e AO.

Analisando as pirâmides quadrangulares regulares, veremos que os segmentos OV, AO e a aresta lateral VA formam um triângulo retângulo, reto em O.

Sendo, assim, temos que os catetos AO e OV correspondem, respectivamente, à metade da diagonal da base e à altura da pirâmide, enquanto que a hipotenusa corresponde à aresta lateral da pirâmide.

Vejamos:

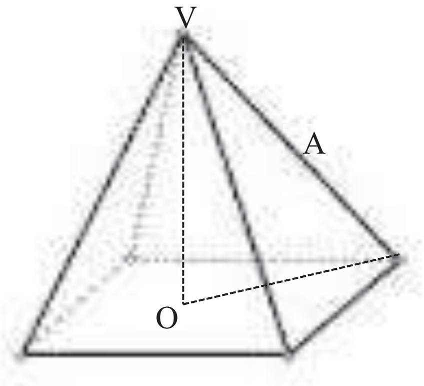


VO = altura da pirâmide
AV = aresta lateral
AO = ½ da diagonal do quadrado

Desse modo, temos que, com apenas uma dimensão dada, podemos construir todas as pirâmides quadrangulares de dimensões inteiras e positivas que apresentam a dimensão dada, como também calcular o volume máximo e o volume mínimo das pirâmides que podemos construir com a medida dada.

Vejamos alguns exemplos:

<u>EXEMPLO 1:</u> Encontre todas as pirâmides quadrangulares regulares que apresentam altura medindo 10 cm com a aresta lateral sendo uma medida inteira. Determine, dentre as pirâmides encontradas, aquela que apresenta o volume máximo e aquela que apresenta o volume mínimo.



VO = altura da pirâmide = 10 cm

AV = z = aresta lateral

AO = x = ½ da diagonal do quadrado

Solução:

Buscaremos todos os triângulos retângulos que apresentam 10 cm como medida de um de seus catetos.

Elevamos 10 ao quadrado. Depois, fatoramos 10^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($10^2 = 100 = 100\,x\,1 = 50\,x\,2 = 25\,x\,4 = 20\,x\,5 = 10\,x\,10$) .

Portanto, existe apenas um triângulo retângulo que apresenta 10 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 100 como produto 100 x 1, 25 x 4 e 20 x 5, temos fatores de paridades diferentes e, escrevendo o 100 como produto 10 x 10, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $10^2 = 100 = 50\,x\,2$, temos que $u = 50$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{50-2}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{50+2}{2} = \frac{52}{2} = 26.$$

Desse modo, temos um único terno pitagórico, o (10, 24, 26), ou seja, podemos construir uma única pirâmide quadrangular regular, de altura 10 cm e que apresenta medidas inteiras para a aresta lateral e para diagonal da base, a pirâmide que apresenta 10 cm, 24 cm e 26 cm como medidas, respectivamente, da altura da pirâmide, metade da diagonal da base e aresta lateral.

Se d/2 = 24 cm, temos que d = 48 cm.

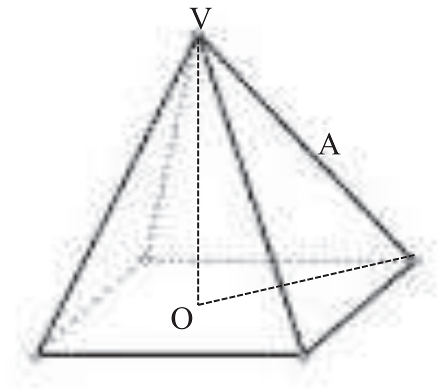
Calculando a aresta da base: Como $d = l\sqrt{2} \Rightarrow 48 = l\sqrt{2} \Rightarrow 48\sqrt{2} = 2l \Rightarrow \boldsymbol{l} = 24\sqrt{2}$ cm

Calculando a área da base: $A_B = l^2 \Rightarrow A_B = \left(24\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow A_B = 1.152$ cm^2

Calculando o volume da pirâmide: $V = \frac{A_B.h}{3} \Longrightarrow V = \frac{1.152 \ x \ 10}{3} \Longrightarrow \quad V = 3.840$ cm^3

Portanto, a única pirâmide de altura 10 cm, com medidas para aresta lateral e para diagonal da base, inteiras, é a pirâmide de volume 3.840 cm^3.

EXEMPLO 2: Encontre todas as pirâmides quadrangulares regulares que apresentam aresta da base medindo $30\sqrt{2}$ cm com altura sendo uma medida inteira. Calcule, dentre as pirâmides encontradas, aquela que apresenta o volume máximo e aquela que apresenta o volume mínimo.



VO = altura da pirâmide = y

AV = z = aresta lateral

AO = x = ½ da diagonal do quadrado

Solução:

Se a aresta da base mede $30\sqrt{2}$ cm , teremos; $d = l\sqrt{2} \Longrightarrow d = 30\sqrt{2}.\sqrt{2} \Longrightarrow \boldsymbol{d} = 60$ cm.

Como $d = 60$ cm , temos que AO = 60/2 = 30 cm.

Buscaremos todos os triângulos retângulos pitagóricos de cateto 30 cm.

Elevamos 30 ao quadrado. Depois, fatoramos 30^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($30^2 = 900 = 900 \ x \ 1 = 450 \ x \ 2 = 300 \ x \ 3 = 225 \ x \ 4 = 180 \ x \ 5 = 150 \ x \ 6 = 100 \ x \ 9 = 90 \ x \ 10 = 75 \ x \ 12 = 60 \ x \ 15 = 50 \ x \ 18 = 45 \ x \ 20 = 36 \ x \ 25 = 30 \ x \ 30$) .

Portanto, existem quatro triângulos retângulos pitagóricos que apresentam 30 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 900 como produto 900 x 1, 300 x 3, 225 x 4, 180 x 5, 100 x 9, 75 x 12, 60 x 15, 45 x 20 e 36 x 20, temos fatores de paridades diferentes e, escrevendo o 900 como produto 30 x 30, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\, , \frac{u-v}{2}\, , \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $30^2 = 900 = 450\ x\ 2$, temos que $u = 450$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{450-2}{2} = \frac{448}{2} = 224 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{450+2}{2} = \frac{452}{2} = 226.$$

Se $30^2 = 900 = 150\ x\ 6$, temos que $u = 150$ e $v = 6$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{150-6}{2} = \frac{144}{2} = 72 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{150+6}{2} = \frac{156}{2} = 78.$$

Se $30^2 = 900 = 90\ x\ 10$, temos que $u = 90$ e $v = 10$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{90-10}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{90+10}{2} = \frac{100}{2} = 50.$$

Se $30^2 = 900 = 50\ x\ 18$, temos que $u = 50$ e $v = 18$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{50-18}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{50+18}{2} = \frac{68}{2} = 34.$$

Desse modo, temos quatro ternos pitagóricos: (30, 224, 226), (30, 72, 78), (30, 40, 50) e (16, 30, 34), ou seja, podemos construir quatro pirâmides quadrangulares, de aresta da base $30\sqrt{2}$ cm e que apresentam medidas inteiras para a aresta lateral, altura e diagonal da base.

Todas as pirâmides apresentam a mesma aresta da base, $30\sqrt{2}$ cm, diferenciando-se, apenas, pela aresta lateral e pela altura.

Calculando a área da base: $A_B = l^2 \Rightarrow A_B = \left(30\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow A_B = 1.800$ cm^2

Portanto, podemos construir as seguintes pirâmides quadrangulares que apresentam como medida da aresta da base $30\sqrt{2}$ cm:

Pirâmide 1: Área da base = 1.800 cm^2	altura = 224 cm	aresta lateral = 226 cm
Pirâmide 2: Área da base = 1.800 cm^2	altura = 72 cm	aresta lateral = 78 cm
Pirâmide 3: Área da base = 1.800 cm^2	altura = 40 cm	aresta lateral = 50 cm
Pirâmide 4: Área da base = 1.800 cm^2	altura = 16 cm	aresta lateral = 34 cm

Teremos, então, as pirâmides 1 e 4, respectivamente, as pirâmides que apresentam volume máximo e mínimo. Sendo o volume máximo: $V = \frac{A_B.h}{3} \Rightarrow V = \frac{1.800\ x\ 224}{3} \Rightarrow V = 134.400$ cm^3 e o volume mínimo $V = \frac{A_B.h}{3} \Rightarrow V = \frac{1.800\ x\ 16}{3} \Rightarrow V = 9.600$ cm^3.

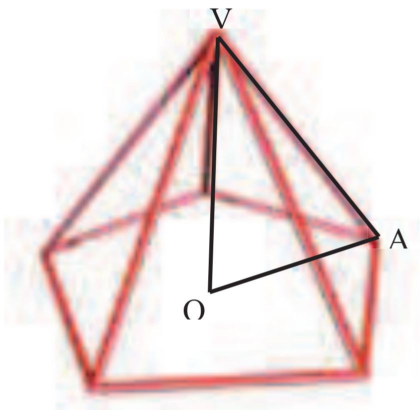
4.3.2.3 Pirâmides hexagonais

Seja uma pirâmide de base hexagonal, o hexágono ABCDEF centrado no ponto O, e vértice V.

Ligando o centro O, da base hexagonal, ao vértice da pirâmide V e a qualquer vértice da base, teremos, respectivamente os segmentos OV e AO.

Analisando as pirâmides hexagonais regulares, veremos que os segmentos OV, AO e a aresta lateral formam um triângulo retângulo, reto em O.

Sendo assim, temos que os catetos AO e OV correspondem, respectivamente, à aresta da base (medida do lado do hexágono) e à altura da pirâmide, enquanto que a hipotenusa corresponde à aresta lateral da pirâmide.



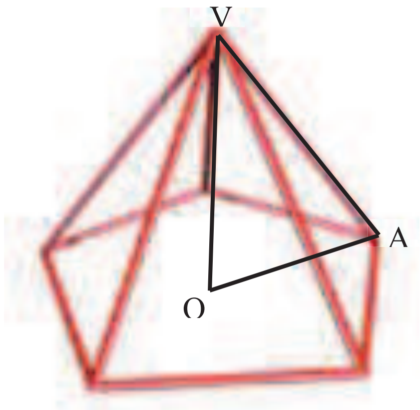
VO = altura da pirâmide
AV = aresta lateral
AO = aresta da base (lado do hexágono)

Vejamos:

Desse modo, temos que, com apenas uma dimensão dada, podemos construir todas as pirâmides hexagonais de dimensões inteiras e positivas que apresentam a dimensão dada, como também calcular o volume máximo e o volume mínimo das pirâmides que podemos construir com a medida dada.

Vejamos alguns exemplos:

<u>EXEMPLO 1:</u> Encontre todas as pirâmides hexagonais regulares com medidas de suas arestas lateral e da base sendo inteiras, que apresentam altura medindo 20 cm.



VO = altura da pirâmide = 20 cm
AV = z = aresta lateral
AO = x = aresta da base

<u>Solução:</u>

Buscaremos todos os triângulos retângulos de cateto 20 cm.

Elevamos 20 ao quadrado. Depois, fatoramos 20^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($20^2 = 400 = 400\ x\ 1 = 200\ x\ 2 = 100\ x\ 4 = 80\ x\ 5 = 50\ x\ 8 = 40\ x\ 10 = 25\ x\ 16 = 20\ x\ 20$) .

Portanto, existem 4 triângulos retângulos que apresentam 20 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 400 como produto $400\ x\ 1,\ 80\ x\ 5\ e\ 25\ x\ 16$, temos fatores de paridades diferentes e, escrevendo o 400 como produto $20\ x\ 20$, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $20^2 = 400 = 200\ x\ 2$, temos que $u = 200$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{200-2}{2} = \frac{198}{2} = 99 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{200+2}{2} = \frac{202}{2} = 101.$$

Se $20^2 = 400 = 100\ x\ 4$, temos que $u = 100$ e $v = 4$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{100-4}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{100+4}{2} = \frac{104}{2} = 52.$$

Se $20^2 = 400 = 50\ x\ 8$, temos que $u = 50$ e $v = 8$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{50-8}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{50+8}{2} = \frac{58}{2} = 29.$$

Se $20^2 = 400 = 40\ x\ 10$, temos que $u = 40$ e $v = 10$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{40-10}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{40+10}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

Desse modo, temos quatro ternos pitagóricos: (99, 20, 101), (48, 20, 52), (21, 20, 29) e (15, 20, 25), ou seja, podemos construir quatro pirâmides hexagonais, de altura medindo 20 cm e que apresentam medidas inteiras para a aresta lateral, altura e aresta da base.

Todas as pirâmides apresentam a mesma altura de 20 cm, diferenciando-se, apenas, pela aresta lateral e pela aresta da base.

Pirâmide 1: Aresta da base = 99 cm altura = 20 cm aresta lateral = 101 cm

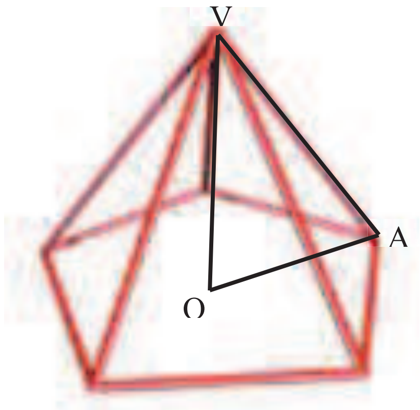
Pirâmide 2: Aresta da base = 48 cm altura = 20 cm aresta lateral = 52 cm

Pirâmide 3: Aresta da base = 21 cm altura = 20 cm aresta lateral = 29 cm

Pirâmide 4: Aresta da base = 15 cm altura = 20 cm aresta lateral = 25 cm

Temos, portanto, quatro pirâmides hexagonais de medidas inteiras com altura medindo 20 cm.

<u>EXEMPLO 2:</u> Encontre todas as pirâmides hexagonais regulares com medidas inteiras para as arestas lateral e da base que apresentam altura medindo 15 cm.



VO = altura da pirâmide = 15 cm
AV = z = aresta lateral
AO = x = lado da base

<u>Solução</u>:

Buscaremos todos os triângulos retângulos pitagóricos de cateto 15 cm.

Elevamos 15 ao quadrado. Depois, fatoramos 15^2 como produto de dois inteiros positivos $(u$ e $v)$, distintos e de mesma paridade $(15^2 = 225 = 225\,x\,1 = 75\,x\,3 = 45\,x\,5 = 25\,x\,9 = 15\,x\,15)$.

Portanto, existem quatro triângulos retângulos que apresentam 15 cm como medida de seu cateto, pois escrevendo o 225 como produto $15\,x\,15$, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Temos pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $15^2 = 225 = 225 \ x \ 1$, temos que $u = 225$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{225-1}{2} = \frac{224}{2} = 112 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{225+1}{2} = \frac{226}{2} = 113.$$

Se $15^2 = 225 = 75 \ x \ 3$, temos que $u = 75$ e $v = 3$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{75-3}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{75+3}{2} = \frac{78}{2} = 39.$$

Se $15^2 = 225 = 45 \ x \ 5$, temos que $u = 45$ e $v = 5$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{45-5}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{45+5}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

Se $20^2 = 400 = 25 \ x \ 9$, temos que $u = 25$ e $v = 9$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{25-9}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{25+9}{2} = \frac{34}{2} = 17.$$

Desse modo, temos quatro ternos pitagóricos: (112, 15, 113), (36, 15, 39), (20, 15, 25) e (8, 15, 17), ou seja, podemos construir quatro pirâmides hexagonais, de altura medindo 15 cm e que apresentam medidas inteiras para a aresta lateral, altura e aresta da base.

Todas as pirâmides apresentam a mesma altura de 15 cm, diferenciando-se, apenas pela aresta lateral e pela aresta da base.

Pirâmide 1: Aresta da base = 112 cm	altura = 15 cm	aresta lateral = 113 cm
Pirâmide 2: Aresta da base = 36 cm	altura = 15 cm	aresta lateral = 39 cm
Pirâmide 3: Aresta da base = 20 cm	altura = 15 cm	aresta lateral = 25 cm
Pirâmide 4: Aresta da base = 8 cm	altura = 15 cm	aresta lateral = 17 cm

Temos, portanto, quatro pirâmides hexagonais de medidas inteiras, com altura medindo 15 cm.

4.3.3 Aplicação dos ternos pitagóricos na construção dos cones

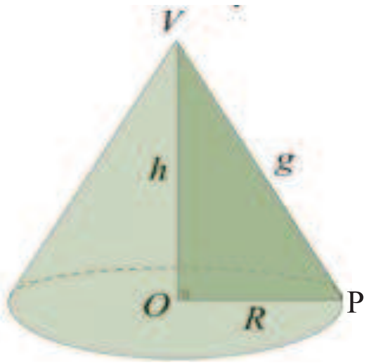
Trabalhando apenas com valores inteiros e positivos para as dimensões dos cones, teremos a utilização de teoremas e/ou propriedades dos ternos pitagóricos na construção desses sólidos. Dada uma das medidas, seja a altura do cone, sua altura ou raio da base circular, poderemos calcular todas as outras medidas desconhecidas, como também, determinar quantos cones podemos construir, trabalhando com valores inteiros e positivos, com a medida dada. A partir daí, calcularemos, entre todos os cones encontrados, aquele que apresenta o volume máximo e aquele que apresenta o volume mínimo.

Seja um cone circular reto, de vértice V, de centro da base O e um ponto, P, qualquer da circunferência da base.

Observe que a altura h da pirâmide é o segmento VO, a geratriz g é o segmento VP e o raio da base r é o segmento OP.

A altura da pirâmide, o raio da base e a geratriz formam um triângulo retângulo de catetos VO e OP, e hipotenusa VP.

Vejamos:

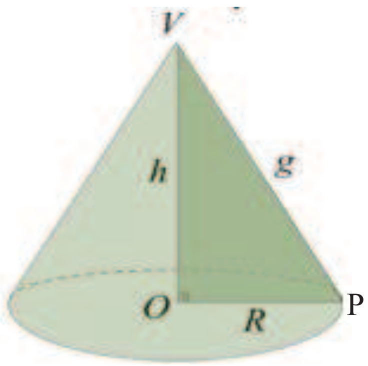


VO = altura do cone
OP = raio da base
VP = geratriz do cone

Desse modo temos que, com apenas uma dimensão dada, podemos construir todos os cones circulares de dimensões inteiras e positivas que apresentam a dimensão dada.

Vejamos alguns exemplos:

<u>EXEMPLO 1:</u> Encontre todos os cones circulares retos com medidas inteiras que apresentam altura medindo 30 cm. Calcule, entre os cones encontrados, aquele que apresenta o volume máximo e aquele que apresenta volume mínimo.



VO = altura = 30 cm
OP = x = raio da base
VP = z = geratriz do cone

<u>Solução:</u>

Buscaremos todos os triângulos retângulos pitagóricos de cateto 30 cm.

Elevamos 30 ao quadrado. Depois, fatoramos 30^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($30^2 = 900 = 900\,x\,1 = 450\,x\,2 = 300\,x\,3 = 225\,x\,4 = 180\,x\,5 = 150\,x\,6 = 100\,x\,9 = 90\,x\,10 = 75\,x\,12 = 60\,x\,15 = 50\,x\,18 = 45\,x\,20 = 36\,x\,25 = 30\,x\,30$) .

Portanto, existem quatro cones circulares retos que apresentam 30 cm como medida de sua altura e medidas do raio da base e da sua geratriz, inteiras, pois escrevendo o 900 como produto $30\,x\,30$, teremos um cateto zero, o que é impossível. Escrevendo o 900 como produto $900 = 900\,x\,1 = 300\,x\,3 = 225\,x\,4 = 180\,x\,5 = 100\,x\,9 = 75\,x\,12 = 60\,x\,15 = 45\,x\,20 = 36\,x\,25$, teremos fatores de paridades diferentes e, pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $30^2 = 900 = 450\,x\,2$, temos que $u = 450$ e $v = 2$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{450-2}{2} = \frac{448}{2} = 224 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{450+2}{2} = \frac{452}{2} = 226.$$

Se $30^2 = 900 = 150\,x\,6$, temos que $u = 150$ e $v = 6$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{150-6}{2} = \frac{144}{2} = 72 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{150+6}{2} = \frac{156}{2} = 78.$$

Se $30^2 = 900 = 90\,x\,10$, temos que $u = 90$ e $v = 10$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{90-10}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{90+10}{2} = \frac{100}{2} = 50.$$

Se $30^2 = 900 = 50\,x\,18$, temos que $u = 50$ e $v = 18$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{50-18}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{50+18}{2} = \frac{68}{2} = 34.$$

Desse modo, temos quatro ternos pitagóricos: (16, 30, 34), (30, 224, 226), (30, 72, 78) e (30, 40, 50), ou seja, podemos construir quatro cones circulares retos, de altura medindo 30 cm e que apresentam medidas inteiras para a geratriz do cone e o raio da base.

Todas as pirâmides apresentam a mesma altura de 30 cm, diferenciando-se, apenas, pela área da base e pela geratriz.

Temos os seguintes cones circulares retos:

Cone 1: Altura = 30 cm	Raio da base = 224 cm	Geratriz = 226 cm
Cone 2: Altura = 30 cm	Raio da base = 72 cm	Geratriz = 78 cm
Cone 3: Altura = 30 cm	Raio da base = 40 cm	Geratriz = 226 cm
Cone 4: Altura = 30 cm	Raio da base = 16 cm	Geratriz = 34 cm

Calculando a área da base de cada cone, separadamente e, consequentemente, seu volume, teremos:

Cone 1:

$$A_b = \pi.R^2$$

$$A_b = \pi.224^2$$

$$A_b = 50176\pi\ cm^2$$

$$V = \frac{A_b.H}{3} \Longrightarrow = \frac{50176\pi.30}{3} \Longrightarrow V = 501760\pi\ cm^3$$

Cone 2:

$$A_b = \pi.R^2$$

$$A_b = \pi.72^2$$

$$A_b = 5184\pi\ cm^2$$

$$V = \frac{A_b.H}{3} \Longrightarrow = \frac{5184\pi.30}{3} \Longrightarrow V = 51840\pi\ cm^3$$

Cone 3:

$$A_b = \pi.R^2$$

$$A_b = \pi.40^2$$

$$A_b = 1600\pi\ cm^2$$

$$V = \frac{A_b.H}{3} \Longrightarrow = \frac{1600\pi.30}{3} \Longrightarrow V = 16000\pi\ cm^3$$

Cone 4:

$$A_b = \pi.R^2$$

$$A_b = \pi.16^2$$

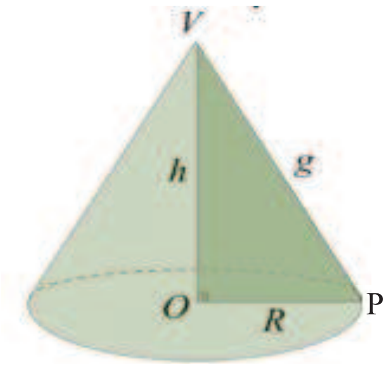
$$A_b = 256\pi\ cm^2$$

$$V = \frac{A_b.H}{3} \Longrightarrow = \frac{256\pi.30}{3} \Longrightarrow V = 2560\pi\ cm^3$$

Temos, então, os cones 1 e 4, respectivamente, os cones que apresentam volume máximo e mínimo. Sendo o volume máximo $501760\pi\ cm^3$ e o volume mínimo $2560\pi\ cm^3$.

EXEMPLO 2: Encontre todos os cones circulares retos, com medidas de sua geratriz, de sua altura e raio da base inteiras e positivas, que apresentam raio da bas medindo 21 cm.

Determine, entre os cones encontrados, aquele que apresenta o volume máximo e aquele que apresenta volume mínimo.



VO = altura do cone

OP = raio da base = 21 cm

VP = geratriz do cone

<u>Solução:</u>

Buscaremos todos os triângulos retângulos pitagórico de cateto 21 cm.

Elevamos 21 ao quadrado. Depois, fatoramos 21^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de mesma paridade ($21^2 = 441 = 441\ x\ 1 = 147\ x\ 3 = 63\ x\ 7 = 49\ x\ 9 = 21\ x\ 21$) .

Portanto, existem quatro cones circulares retos que apresentam 21 cm como medida do raio da sua base e medidas da altura e geratriz do cone, inteiras e positivas, pois escrevendo o 441 como produto $21\ x\ 21$, teremos um cateto zero, o que é impossível.

Pelo Teorema 4 que, "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e (x, y, z) = $\left(\sqrt{u.v}\,, \frac{u-v}{2}\,, \frac{u+v}{2}\right)$".

Se $21^2 = 441 = 441\ x\ 1$, temos que $u = 441$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{441-1}{2} = \frac{440}{2} = 220 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{441+1}{2} = \frac{442}{2} = 221.$$

Se $21^2 = 441 = 147\ x\ 3$, temos que $u = 147$ e $v = 3$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{147-3}{2} = \frac{144}{2} = 72 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{147+3}{2} = \frac{150}{2} = 75.$$

Se $21^2 = 441 = 63\ x\ 7$, temos que $u = 63$ e $v = 7$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{63-7}{2} = \frac{56}{2} = 28 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{63+7}{2} = \frac{70}{2} = 35.$$

Se $21^2 = 441 = 49\ x\ 9$, temos que $u = 49$ e $v = 9$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{49-9}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{49+9}{2} = \frac{58}{2} = 29.$$

Desse modo temos quatro ternos pitagóricos: (21, 220, 221), (21, 72,75), (21, 28, 35) e (20, 21, 29), ou seja, podemos construir quatro cones circulares retos, de raio da base medindo 21 cm e que apresentam medidas inteiras para a geratriz do cone e a altura da pirâmide.

Todos os cones circulares retos apresentam o mesmo raio da base de 21 cm, e consequentemente, a mesma área da base, diferenciando-se, apenas, pela altura e pela geratriz do cone.

Calculando a área da base, temos:

$$A_b = \pi.R^2 \implies A_b = \pi.21^2 \implies A_b = 441\pi\ cm^2$$

Temos os seguintes cones circulares retos. Vejamos:

Cone 1: Altura = 220 cm	Área da base = 441π cm^2	Geratriz = 221 cm
Cone 2: Altura = 72 cm	Área da base = 441π cm^2	Geratriz = 75 cm
Cone 3: Altura = 28 cm	Área da base = 441π cm^2	Geratriz = 35 cm
Cone 4: Altura = 20 cm	Área da base = 441π cm^2	Geratriz = 29 cm

Calculando o volume de cada cone, teremos:

<u>Cone 1:</u>

$$V = \frac{A_b.H}{3} \implies V = \frac{441\pi.220}{3} \implies V = \frac{97020\pi}{3} \implies V = 32340\pi\ cm^3$$

<u>Cone 2:</u>

$$V = \frac{A_b.H}{3} \implies V = \frac{441\pi.72}{3} \implies V = \frac{31752\pi}{3} \implies V = 10584\pi\ cm^3$$

<u>Cone 3:</u>

$$V = \frac{A_b.H}{3} \implies V = \frac{441\pi.28}{3} \implies V = \frac{12348\pi}{3} \implies V = 4116\pi\ cm^3$$

<u>Cone 4:</u>

$$V = \frac{A_b.H}{3} \implies V = \frac{441\pi.20}{3} \implies V = \frac{8820\pi}{3} \implies V = 2940\pi\ cm^3$$

Temos, então, os cones 1 e 4, respectivamente, os cones que apresentam volume máximo e mínimo. Sendo o volume máximo $32340\ \pi\ cm^3$ e o volume mínimo $2940\ \pi\ cm^3$.

5 TRABALHANDO COM NÚMEROS RACIONAIS

Podemos ampliar o campo dos ternos pitagóricos para podermos trabalhar com os números racionais. A partir de uma das medidas inteiras, podemos determinar as outras medidas de um terno, sendo racionais.

Observe que, ao dividirmos um número inteiro e positivo por 2 e/ou 5, teremos como resultado um número inteiro ou um decimal exato.

Desse modo, trabalharemos a fatoração com um dos fatores o 2 ou o 5.

Vejamos algumas questões de aplicação dos teoremas dos ternos pitagóricos para encontrarmos medidas racionais de um triângulo retângulo, a partir de uma das medidas conhecidas, sendo um número inteiro positivo.

Seguem as questões:

<u>QUESTÃO 1:</u> Encontre triângulos retângulos, pitagóricos ou não, que têm um cateto $x = 143$

<u>Solução</u>:

Temos que:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = (z+y).(z-y)$$

Observe que $143 = 1\text{x}143 = 11\text{x}13$.

Sendo $x = 143 = 1\text{x}143$, temos que, se $x^2 = (z+y).(z-y)$, então $(z+y).(z-y) = 143^2 \Rightarrow (z+y).(z-y) = 143^2.1^2$

$$\begin{cases} z+y = 143^2 = 20449 \\ \underline{z-y = 1^2 = 1 \qquad\qquad} \\ \qquad 2z = 20450 \\ \qquad z = 10225 \end{cases}$$

Como $z = 10225$, temos que $y = 10224$.

Assim, temos um triângulo retângulo pitagórico de medidas $143, 10224\ e\ 10225$

Sendo $x = 143 = 11\text{x}13$, temos que, se $x^2 = (z+y).(z-y)$, então $(z+y).(z-y) = 143^2 \Rightarrow (z+y).(z-y) = 11^2.13^2$

$$\begin{cases} z+y = 13^2 = 169 \\ \underline{z-y = 11^2 = 121} \\ \qquad 2z = 290 \\ \qquad z = 145 \end{cases}$$

Como $z = 145$, temos que $y = 24$.

Assim, temos um triângulo retângulo pitagórico de medidas $24, 143\ e\ 145$.

Trabalharemos, agora, com números racionais, ou seja, vamos encontrar triângulos retângulos com medidas racionais. Vejamos:

Faremos a decomposição do número 143 em fatores, de tal modo que um dos fatores seja o fator 2 ou uma potência de 2. Vejamos:

Observe que $143 = 71{,}5 \text{ x } 2 = 35{,}75 \text{ x } 4 = 17{,}875 \text{ x } 8 = \cdots$.

Sendo $x = 143 = 71{,}5 \text{ x } 2$, temos que, se $x^2 = (z+y).(z-y)$, então $(z+y).(z-y) = 143^2 \Rightarrow (z+y).(z-y) = 71{,}5^2\, x\, 2^2$

$$\begin{cases} z+y = 71{,}5^2 = 5112{,}25 \\ \underline{z-y = 2^2 = 4} \\ 2z = 5116{,}25 \\ z = 2558{,}125 \end{cases}$$

Como $z = 2558{,}125$, temos que $y = 2554{,}125$.

Assim, temos um triângulo retângulo de medidas $143,\ 2554{,}125\ e\ 2558{,}125$.

De maneira análoga, poderemos trabalhar com $143 = 35{,}75\, x\, 4$, e as demais potências de 2 como fatores do número 143.

Faremos a decomposição do número 143, de tal modo que um dos fatores seja o fator 5 ou uma potência de 5. Vejamos:

Observe que $143 = 28{,}6 \text{ x } 5 = 5{,}72 \text{ x } 25 = 1{,}144 \text{ x } 125 = \cdots$.

Sendo $x = 143 = 28{,}6 \text{ x } 5$, temos que, se $x^2 = (z+y).(z-y)$, então $(z+y).(z-y) = 143^2 \Rightarrow (z+y).(z-y) = 28{,}6^2\, x\, 5^2$

$$\begin{cases} z+y = 28{,}6^2 = 817{,}96 \\ \underline{z-y = 5^2 = 25} \\ 2z = 842{,}96 \\ z = 421{,}48 \end{cases}$$

Como $z = 421{,}48$, temos que $y = 396{,}48$.

Assim, temos um triângulo retângulo de medidas $143,\ 396{,}48\ e\ 421{,}48$.

De maneira análoga, poderemos trabalhar com $143 = 5{,}72\, x\, 25$, e as demais potências de 5 como fatores do número 143.

<u>QUESTÃO 2:</u> Determine triângulos retângulos, pitagóricos ou não, que tem um cateto $x = 27$.

<u>Solução</u>:

Temos que:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = (z+y).(z-y)$$

Observe que $27 = 27 \text{ x } 1 = 9 \text{ x } 3$.

Sendo $x = 27 = 27 \text{ x } 1$, temos que, se $x^2 = (z+y).(z-y)$, então $(z+y).(z-y) = 27^2 \implies (z+y).(z-y) = 27^2\ x\ 1^2$.

$$\begin{cases} z+y = 27^2 = 729 \\ \underline{z-y = 1^2 = 1} \\ \quad 2z = 730 \\ \quad z = 365 \end{cases}$$

Como $z = 365$, temos que $y = 364$.

Assim, temos um triângulo retângulo pitagórico de medidas $27,\ 364\ \ e\ \ 365$.

Sendo $x = 27 = 9 \text{ x } 3$, temos que, se $x^2 = (z+y).(z-y)$, então $(z+y).(z-y) = 27^2 \implies (z+y).(z-y) = 9^2\ x\ 3^2$

$$\begin{cases} z+y = 9^2 = 81 \\ \underline{z-y = 3^2 = 9} \\ \quad 2z = 90 \\ \quad z = 45 \end{cases}$$

Como $z = 45$, temos que $y = 36$.

Assim, temos um triângulo de medidas $27,\ 36\ \ e\ \ 45$.

Trabalharemos, agora, com números racionais, ou seja, vamos encontrar triângulos retângulos com medidas racionais. Vejamos.

Faremos a decomposição do número 27, de tal modo que um dos fatores seja o 2 ou potências de 2. Vejamos:

Observe que $27 = 13{,}5 \text{ x } 2 = 6{,}75 \text{ x } 4 = 3{,}375 \text{ x } 8 = \cdots$.

Sendo $x = 27 = 13{,}5 \text{ x } 2$, temos que, se $x^2 = (z+y).(z-y)$, então $(z+y).(z-y) = 27^2 \implies (z+y).(z-y) = 13{,}5^2\ x\ 2^2$

$$\begin{cases} z+y = 13{,}5^2 = 182{,}25 \\ \underline{z-y = 2^2 = 4} \\ \quad 2z = 186{,}25 \\ \quad z = 93{,}125 \end{cases}$$

Como $z = 93{,}125$, temos que $y = 89{,}125$

Assim, temos um triângulo retângulo de medidas $27,\ 89{,}125\ \ e\ \ 93{,}125$.

De maneira análoga, poderemos trabalhar com $27 = 6{,}75\ x\ 4$, e as demais potências de 5 como fatores do número 27.

Faremos a decomposição do número 27, de tal modo que um dos fatores seja o fator 5 ou potências de 5. Vejamos:

Observe que $27 = 5{,}4 \text{ x } 5 = 1{,}08 \text{ x } 25 = \cdots$.

Sendo $x = 143 = 5{,}4 \text{ x } 5$, temos que, se $x^2 = (z+y).(z-y)$, então $(z+y).(z-y) = 27^2 \Rightarrow (z+y).(z-y) = 5{,}4^2 \ x \ 5^2$

$$\begin{cases} z + y = 5{,}4^2 = 29{,}16 \\ \underline{z - y = 5^2 = 25} \\ \quad 2z = 54{,}96 \\ \quad\ \ z = 27{,}08 \end{cases}$$

Se $z = 27{,}08$, temos que $y = 2{,}08$.

Assim, temos um triângulo retângulo de medidas $2{,}08,\ 27\ \ e\ \ 27{,}08$.

De maneira análoga, poderemos trabalhar com $27 = 1{,}08.25$, e as demais potências de 5 como fatores do número 27.

Apresentaremos, agora, outra maneira de trabalharmos com número racionais. Vejamos:

De acordo com o Teorema 4, temos que "(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros positivos u e v, de mesma paridade, tais que u.v seja um quadrado perfeito e $(x, y, z) = \left(\sqrt{\mathrm{u.v}}, \frac{\mathrm{u-v}}{2}, \frac{\mathrm{u+v}}{2}\right)$".

Observe que, pelo teorema acima citado, se trabalharmos com u e v, inteiros e positivos, mas de paridades diferentes, teremos um terno (x, y, z) em que o elemento x, será inteiro e positivo, e os elementos y e z serão decimais exatos.

Vejamos algumas questões:

QUESTÃO 1: Encontre triângulos retângulos que não sejam pitagóricos, que têm um cateto $x = 30$.

Solução:

Elevamos 30 ao quadrado. Depois, fatoramos 30^2 como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de paridades diferentes ($30^2 = 900 = 900\ x\ 1 = 450\ x\ 2 = 300\ x\ 3 = 225\ x\ 4 = 180\ x\ 5 = 150\ x\ 6 = 100\ x\ 9 = 90\ x\ 10 = 75\ x\ 12 = 60\ x\ 15 = 50\ x\ 18 = 45\ x\ 20 = 36\ x\ 25 = 30\ x\ 30$) .

Observe que em todos esses casos: ($30^2 = 900 = 900\ x\ 1 = 300\ x\ 3 = 225\ x\ 4 = 180\ x\ 5 = 100\ x\ 9 = 75\ x\ 12 = 60\ x\ 15 = 45\ x\ 20 = 36\ x\ 25$), os fatores de 900 apresentam paridades diferentes. Analisando-os, separadamente, teremos:

Se $30^2 = 900 = 900\ x\ 1$, temos que $u = 900$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{900-1}{2} = \frac{899}{2} = 449{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{900+1}{2} = \frac{901}{2} = 450{,}5.$$

Se $30^2 = 900 = 300\ x\ 3$, temos que $u = 300$ e $v = 3$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{300-3}{2} = \frac{297}{2} = 148{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{300+3}{2} = \frac{303}{2} = 151{,}5.$$

Se $30^2 = 900 = 225\ x\ 4$, temos que $u = 225$ e $v = 4$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{225-4}{2} = \frac{221}{2} = 110{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{225+4}{2} = \frac{229}{2} = 114{,}5.$$

Se $30^2 = 900 = 180\ x\ 5$, temos que $u = 185$ e $v = 5$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{180-5}{2} = \frac{175}{2} = 87{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{180+5}{2} = \frac{185}{2} = 92{,}5.$$

Se $30^2 = 900 = 100\ x\ 9$, temos que $u = 100$ e $v = 9$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{100-9}{2} = \frac{91}{2} = 45{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{100+9}{2} = \frac{109}{2} = 54{,}5.$$

Se $30^2 = 900 = 75\ x\ 12$, temos que $u = 75$ e $v = 12$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{75-12}{2} = \frac{63}{2} = 31{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{75+12}{2} = \frac{87}{2} = 43{,}5.$$

Se $30^2 = 900 = 60\ x\ 15$, temos que $u = 60$ e $v = 15$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{60-15}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{60+15}{2} = \frac{75}{2} = 37{,}5.$$

Se $30^2 = 900 = 45\ x\ 20$, temos que $u = 45$ e $v = 20$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{45-20}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{45+20}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5.$$

Se $30^2 = 900 = 36\ x\ 25$, temos que $u = 36$ e $v = 25$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{36-25}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{36+25}{2} = \frac{61}{2} = 30{,}5.$$

Desse modo, utilizando-se do Teorema 4, e trabalhando com fatores de paridades diferentes, podemos construir triângulos retângulos que apresentam medida de um dos catetos inteira e as outras medidas racionais, ou melhor, decimais exatos.

<u>QUESTÃO 2:</u> Encontre triângulos retângulos que não sejam pitagóricos, que têm um cateto $x = 6$.

<u>Solução</u>:

Elevamos 6 ao quadrado. Depois, fatoramos $6^2 = 36$ como produto de dois inteiros positivos (u e v), distintos e de paridades diferentes ($6^2 = 36 = 36\,x\,1 = 18\,x\,2 = 12\,x\,3 = 9\,x\,4 = 6\,x\,6$) .

Observe que em todos esses casos: ($6^2 = 36 = 36\,x\,1 = 12\,x\,3 = 9\,x\,4$) os fatores de 36 apresentam paridades diferentes. Analisando-os, separadamente, teremos:

Se $6^2 = 36 = 36\,x\,1$, temos que $u = 36$ e $v = 1$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{36-1}{2} = \frac{35}{2} = 17{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{36+1}{2} = \frac{37}{2} = 18{,}5.$$

Se $6^2 = 36 = 12\,x\,3$, temos que $u = 12$ e $v = 3$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{12-3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{12+3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

Se $6^2 = 36 = 9\,x\,4$, temos que $u = 9$ e $v = 4$. Assim:

$$\frac{u-v}{2} = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ e } \frac{u+v}{2} = \frac{9+4}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5.$$

Desse modo, utilizando-se do Teorema 4, e trabalhando com fatores de paridades diferentes, podemos construir triângulos retângulos que apresentam medida de um dos catetos inteira e as outras medidas racionais, ou melhor, decimais exatos.

Assim, trabalhando com as propriedades e teoremas dos ternos pitagóricos, podemos encontrar ternos (x, y, z) não pitagóricos, que obedecem à equação pitagórica, ou seja, podemos trabalhar, também, com valores racionais utilizando-se de teoremas e propriedades dos ternos pitagóricos.

6 PROBLEMAS PRÁTICOS RESOLVIDOS COM O USO DE TERNOS PITAGÓRICOS

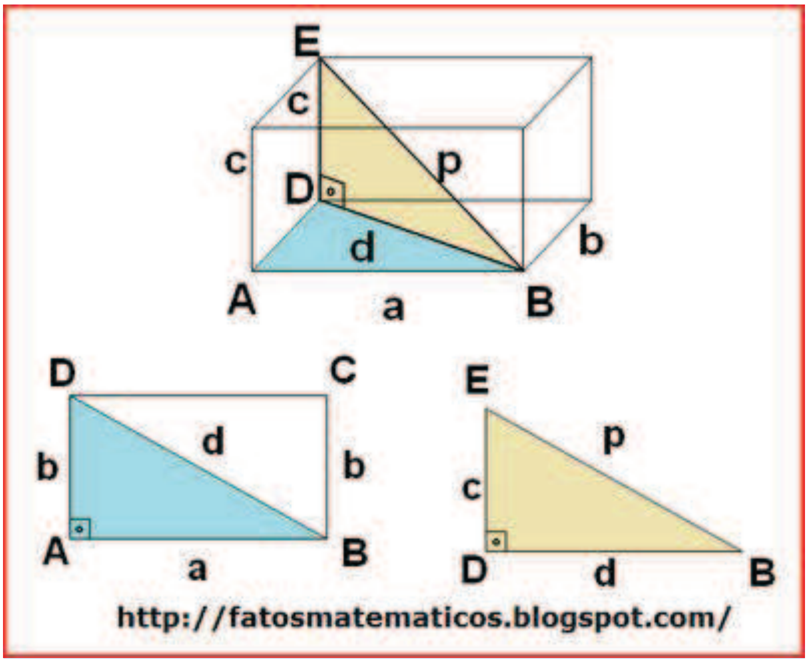
O uso dos ternos pitagóricos na resolução de problemas práticos da nossa vida diária é bastante notável e viável. Visto que é bastante estimulante para todos os alunos quando o professor lhes mostra o quanto é útil todo o conteúdo que está aprendendo em sala de aula, diminuindo, de certa forma, a aversão que o aluno tem à matemática, decorrente da distância que o Ensino Fundamental e Médio guarda da realidade em que vive. De uma certa forma o aluno não consegue fazer a conexão entre o que aprende e suas necessidades do dia a dia, o que estimula o desinteresse e aumenta a aversão ao ensino da matemática. Portanto, toda a matemática ensinada nos Ensinos Fundamental e Médio é importante para a vida do aluno. Mas, da forma como é ensinada, não tem muita utilidade prática no cotidiano dos alunos.

Diante dessa situação, alguns sites publicam problemas bastante práticos da utilização dos ternos pitagóricos, mostrando que o conteúdo visto em sala de aula pode contribuir para nosso dia a dia.

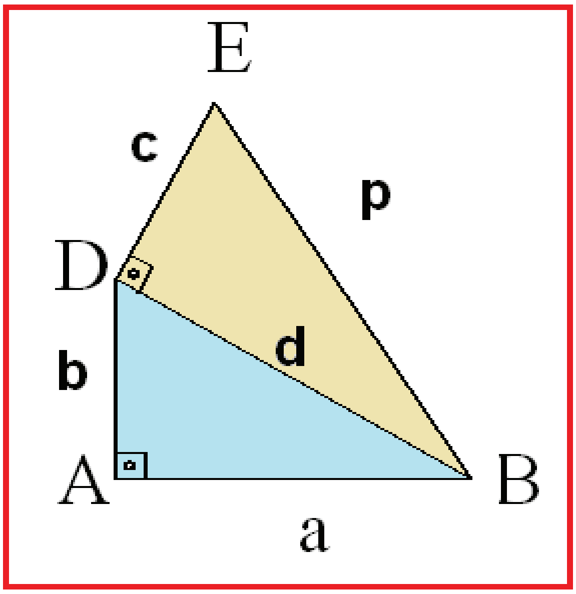
No site http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2012/01/aplicacoes-dos-ternos-pitagoricos-parte.html , postado no sábado, 14 de janeiro de 2012, temos Aplicações dos Ternos Pitagóricos (parte 1), o uso dos teoremas e propriedades dos ternos pitagóricos na confecção de caixas em forma de paralelepípedo retângulo.

Vejamos:

1. Suponha, caro colega, que você deseja montar um pequeno negócio, após sua aposentadoria, voltado para a confecção de caixas em forma de paralelepípedo retângulo, obedecendo às seguintes exigências de mercado: a medida do lado menor de cada caixa, obrigatoriamente, tem que ser $p \geq 3$ (onde p é um primo) e, além disso, a diagonal da base da caixa e as dimensões da caixa sejam números inteiros. Quantas caixas diferentes poderão ser confeccionadas? Quais as dimensões de cada caixa?



Como os triângulos ABC e BCD são retângulos e, além disso, AD = BC, então, fazendo coincidir AD com BC obtém-se:



A diagonal (d) da base é tal que $d^2 = a^2 + b^2$. Para a diagonal (p) do paralelepípedo, temos:

$$p^2 = c^2 + d^2$$

Portanto, a fim de que os lados, a altura e a diagonal da base do paralelepípedo sejam números inteiros, basta que os dois ternos (b, a, d) e (d, c, p) sejam pitagóricos.

Já que $AD = BC$, as dimensões de cada caixa e sua diagonal, em números inteiros, são dadas pela quadra (b, a, c, p).

Seja b o lado menor de cada caixa. Como o triângulo ABC tem que ser pitagórico, logo, $d^2 = a^2 + b^2$ ou $d + a = \frac{b^2}{(d-a)}$. Uma vez que a e d são inteiros, logo, $(d - a)$ tem que dividir b^2 sem deixar resto. Logo $(d - a)$ são os divisores positivos de b^2 . Como b é um primo ímpar, os divisores de b^2 são: b^2 , b e 1. Substituindo b^2 , b e 1, obtém-se os seguintes sistemas de equações:

$$S_1 : \begin{cases} d - a = b^2 \\ d + a = 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} d - a = b \\ d + a = b \end{cases} \qquad \text{e} \qquad S_3 : \begin{cases} d - a = 1 \\ d + a = b^2 \end{cases}$$

Dos três sistemas de equações acima, somente o S_3 é compatível. Resolvendo o S_3, obtém-se:

$$d = \frac{b^2+1}{2} \quad \text{e } a = d - 1$$

Já que $p^2 = c^2 + d^2$, então $p + c = \frac{d^2}{(p-c)}$. Por outro lado, sendo b um primo ímpar, então d é um primo ímpar ou número ímpar composto.

Se d for um primo ímpar, então, chega-se aos mesmos resultados a que se chegou para b, ou seja, três sistemas de equações, S_1, S_2 e S_3 , dos quais somente o S_3 é compatível e obtém-se para p e c as seguintes expressões:

$$p = \frac{d^2+1}{2} \quad \text{e } \ c = p - 1$$

Se d for um número composto ímpar, então, $p + c = \frac{d^2}{(p-c)}$. Como p e c são inteiros, logo, $m = p - c$ são os divisores positivos de d^2 . Então, o número de ternos pitagóricos é igual ao número de vezes em que $m < d$ dividir d^2 sem deixar resto. Se $m = p - c$, então

$$p^2 = c^2 + d^2 \;\Rightarrow\; 2p^2 - 2cp = d^2 + p^2 - 2cp + c^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2p.(p - c) = d^2 + (p - c)^2 \;\Rightarrow\; p = \frac{d^2 + m^2}{2m}$$

<u>Resposta:</u> Se b e d forem dois primos ímpares, então, só é possível confeccionar uma única caixa.

As medidas das diagonais são dadas por:

$d = \frac{b^2+1}{2}$ (diagonal da base da caixa menor)

$p = \frac{d^2+1}{2}$ (diagonal da base da caixa) ,

As dimensões da caixa são dadas por:

$$a = d - 1$$

$$c = p - 1$$

$$b = \text{dimensão dada.}$$

Se b for um número primo ímpar e d um número ímpar composto, então, o número de caixas que poderá ser confeccionado será igual ao número de vezes em que $k^2 < d^2$ sem deixar restos.

As medidas das diagonais são dadas por:

$$d = \frac{b^2+1}{2} \text{ (diagonal da base da caixa menor)}$$

$$p = \frac{d^2+k^2}{2k} \text{ (diagonal de cada caixa)}$$

Note que p só será inteiro se 2k dividir d^2 .

As medidas das dimensões são dadas por:

$$c = d - k$$

$$a = p - 1$$

$$b = \text{dimensão dada.}$$

<u>Exemplo 1:</u> Suponha que seja feita uma encomenda de caixas, com as seguintes condições: as dimensões, a diagonal da base e a diagonal de cada caixa devem ser números inteiros e, além disso, uma das dimensões de cada caixa tenha, por exemplo, $b = 7$ cm (primo ímpar). Quantas caixas poderão ser confeccionadas, e quais as dimensões de cada caixa a fim de que o volume seja:

a) máximo;

b) mínimo.

<u>Resolução:</u>

Cálculo da diagonal da caixa: Como $b = 7$ cm , vem $d = \frac{7^2+1}{2} = \frac{50}{2} = 25$ cm

Como a diagonal da base é um número ímpar composto, logo, o número de caixas que poderá ser confeccionado será igual ao número de vezes em que $k^2 < 25^2$ dividir 25^2

sem deixar resto. Os divisores de 25^2 menores que 25^2 são: 1 e 5. Portanto, poderão ser confeccionadas duas caixas com o lado menor igual a 7 cm.

Cálculo da diagonal de cada caixa:

Para $d = 25$ e $k = 1$, temos:

<u>1ª caixa:</u> $p_1 = \frac{25^2+1^2}{2.1} = 313$ cm

Para $d = 25$ e $k = 5$, temos:

<u>2ª caixa</u>: $p_2 = \frac{25^2+5^2}{2.5} = 65$ cm

Cálculo das dimensões de cada caixa:

<u>1ª caixa:</u>

$$a = d - 1 = 25 - 1 = 24 \text{ cm}$$

$$c = p_1 - k = 313 - 1 = 312 \text{ cm}$$

$$b = 7 \text{ cm}$$

VERIFICAÇÃO:

$$P^2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{24^2 + 7^2 + 312^2} = \sqrt{97969} = 313 \text{ cm}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

<u>2ª caixa:</u>

$$a = d - 1 = 25 - 1 = 24 \text{ cm}$$

$$c = p_2 - k = 65 - 5 = 60 \text{ cm}$$

$$b = 7 \text{ cm}$$

VERIFICAÇÃO:

$$P^2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{24^2 + 7^2 + 60^2} = \sqrt{4225} = 65 \text{ cm}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

Volume da 1ª caixa: Volume = 7 cm x 24 cm x 312 cm = 52416 cm^3

Volume da 2ª caixa: Volume = 7 cm x 24 cm x 60 cm = 10080 cm^3

<u>Resposta:</u> Podem ser confeccionadas duas caixas, cada caixa com um das dimensões igual a 7 cm .

a) volume máximo: 52.416 cm^3 (primeira caixa).

b) volume mínimo: 10.080 cm^3 (segunda caixa).

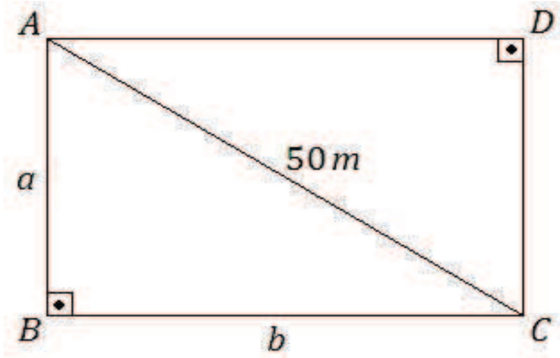
No site http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/02/o-problema-da-doacao-dos-terrenos-e-os.html, postado no sábado, 25 de fevereiro de 2012, temos O Problema Da Doação Dos Terrenos e os Ternos Pitagóricos, por: Sebastião Vieira do Nascimento (Sebá). Vejamos:

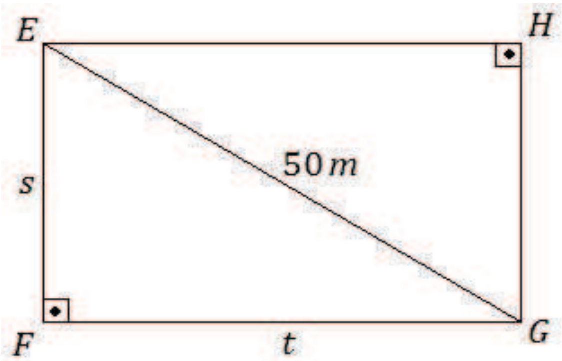
O Sr. Antônio tem um terreno com uma área de 1000m^2 e decidiu doar uma parte do terreno. Pôs um anúncio nos jornais com endereço (rua, bairro, cidade e estado) com a seguinte redação:

Sou proprietário de um terreno com 1000m^2 e decidi doar uma parte do terreno para aquele que conseguir separar dois terrenos em forma retangular, de tal forma que as medidas dos lados sejam expressas por números inteiros e, além disso, a diagonal de cada terreno tenha 50m. Pergunta-se: qual deve ser a área e o perímetro de cada terreno?

Resolução:

As figuras abaixo mostram as duas áreas retangulares:





As fórmulas de Euclides são:

$$a = x^2 - y^2$$
$$b = 2xy$$
$$c = x^2 + y^2$$

Propriedades das fórmulas de Euclides:

1) Só geram ternos pitagóricos primitivos, ou seja, mdc(x, y) = 1;

2) $x > y$ e de paridades opostas, ou seja, um par e outro ímpar;

3) A hipotenusa c é sempre ímpar

4) $x^2 + y^2$ é sempre da forma $4x + 1$.

Como c é sempre ímpar, e 50 é par, vamos multiplicar as fórmulas de Euclides por um número k (par), a fim de que c seja par:

$$a = k(x^2 - y^2)$$
$$b = k(2xy)$$
$$c = k(x^2 + y^2)$$

Regra para achar o valor de k:

Etapa 1: Ache os divisores (D) de 50 no intervalo: $1 < D < 50$. Assim, os divisores de 50, no intervalo, são: 2, 5, 10 e 25.

Etapa 2: Divida 50 pelos divisores encontrados e escolha o(s) quociente(s) da forma $4x + 1$ e o divisor vamos designar por k.

$$\frac{50}{2} = 25 \longrightarrow \text{Como } 25 \text{ é da forma } 4x + 1, \text{logo } k = 2$$

$$\frac{50}{5} = 10 \longrightarrow \text{Como } 10 \text{ não é da forma } 4x + 1, \text{logo } k \neq 5$$

$$\frac{50}{10} = 5 \longrightarrow \text{Como } 5 \text{ é da forma } 4x + 1, \text{logo } k = 10$$

$$\frac{50}{25} = 2 \longrightarrow \text{Como } 2 \text{ não é da forma } 4x + 1, \text{logo } k \neq 25$$

Portanto, existem dois ternos pitagóricos cuja hipotenusa assume valor $c = 50$, para $k = 2$ e para $k = 10$.

Para $k = 2$, temos: $25 = 4^2 + 3^2$, $x = 4$ e $y = 3$, obtém-se:

$$a = k(x^2 - y^2) = 2(4^2 - 3^2) = 14$$

$$b = 2kxy = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$$

$$c = k(x^2 + y^2) = 2(4^2 + 3^2) = 50$$

Assim:

$$(a, b, c) = (14, 48, 50)$$

Para $k = 10$, temos: $5 = 1^2 + 2^2$, $x = 2$ e $y = 1$, obtém-se:

$$s = k(x^2 - y^2) = 10(2^2 - 1^2) = 30$$

$$t = 2kxy = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10 = 40$$

$$c = k(x^2 + y^2) = 10(2^2 + 1^2) = 50$$

Assim:

$$(s, t, c) = (30, 40, 50)$$

Desta forma, para o 1º terreno, temos:

$$-\text{ Dimensões: lado menor} = 14m \text{ e lado maior} = 48m$$

$$-\text{ Área} = \frac{14 \cdot 48}{2} = 336m^2$$

$$-\text{ Perímetro} = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 48 = 124m$$

Para o 2º terreno, temos:

$$-\text{ Dimensões: lado menor} = 30m \text{ e lado maior} = 40m$$

$$-\text{ Área} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600m^2$$

$$-\text{Perímetro} = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 40 = 140m$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa abordou os conhecimentos associados aos ternos pitagóricos, os quais podem ser utilizados de forma significativa como disciplina auxiliar no ensino de diversos tópicos da matemática da educação básica, em especial, quando se utiliza o próprio Teorema de Pitágoras.

As principais conclusões da presente pesquisa são:

a) os teoremas e propriedades dos ternos pitagóricos podem ser didaticamente demonstrados, de forma razoavelmente simples e compreensível a estudantes das últimas séries do ensino fundamental e de todas as séries do ensino médio;

b) inúmeras curiosidades são associadas aos ternos pitagóricos, podendo algumas delas também ser demonstradas de forma acessível a estudantes da educação básica;

c) os ternos pitagóricos podem ser associados, de modo geral, à resolução de problemas que envolvem o teorema de Pitágoras, com aplicações em matérias diversas na educação básica;

d) os conhecimentos sobre os ternos pitagóricos podem ser utilizados na resolução de problemas do dia a dia das pessoas.

Ficou demonstrado que os ternos pitagóricos podem ser utilizados como auxiliar no desenvolvimento de estratégias de resolução de alguns tipos de problemas, constatação essa que, por si só, já credencia este tema como importante meio de facilitação da aprendizagem da matemática na educação básica. Além disso, os teoremas e propriedades dos ternos pitagóricos podem ser demonstrados a partir de técnicas não tão complexas, de modo que podem ser plenamente trabalhados com os alunos dos últimos anos do ensino fundamental e em todo o ensino médio.

Outra importante contribuição que os ternos pitagóricos podem dar ao ensino de matemática na educação básica é no aspecto lúdico, uma vez que há inúmeras curiosidades associadas. Curiosidades estas que servem para despertar e incentivar os discentes ao estudo e aprofundamento do conhecimento matemático, sendo este fator também de relevância no resgate da melhoria do ensino e da aprendizagem em matemática.

A grande questão que se coloca, à vista da situação atual do ensino de matemática na educação básica, seria como introduzir os conceitos tratados nesta dissertação no cotidiano dos professores que trabalham efetivamente nessa etapa do ensino. É que o conteúdo não é explicitamente incluído nos conteúdos dos livros didáticos disponíveis, de modo que uma estratégia deve ser desenvolvida para que tal conhecimento e as formas de sua aplicação em sala de aula possam ser disseminadas.

Não há dúvidas que o desenvolvimento de material didático auxiliar e a realização de oficinas seriam formas de implementação dos ensinamentos junto aos professores, de modo que se percebe a necessidade de ampliação do estudo e a sua continuidade, para transpor os limites do texto dissertativo e tornar-se meio efetivo de melhoria do ensino da matemática.

Por fim, considerando os objetivos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, conclui-se que o objetivo geral da pesquisa foi atingido, uma vez que ficou clara a importância dos ternos pitagóricos para o ensino da matemática e a sua aplicabilidade à educação básica.

Quanto aos objetivos específicos, relacionar e demonstrar os principais teoremas e propriedades que caracterizam os ternos pitagóricos, estabelecer uma relação dos ternos pitagóricos com outras áreas da Matemática, mostrar a importância dos ternos pitagóricos no ensino da matemática na educação básica e apontar formas de aplicabilidade dos ternos pitagóricos aos conteúdos matemáticos da educação básica, também foram plenamente atingidos, a partir do detalhamento do conteúdo abordado nessa dissertação.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo Padrões Pitagóricos: geométricos e numéricos.** São Paulo: Atual, 1993.

BEZ, Edson Tadeu. **Relacionando Padrões entre Sequência de Fibonacci, Secção Áurea e Ternos Pitagóricos.** Licenciatura em matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, 1997. Disponível em <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96816/Edson_Tadeu_Bez.PDF?sequence=1>. Acesso em: 13 fev. 2013.

CAVALCANTI, José Airton; BARROS, José Severino de; ALMEIDA, Jaelson Dantas de. **Ternos Pitagóricos: aprofundamento de um conceito aplicado na educação básica.** VI EPBEM – Monteiro, PB, novembro de 2010. Disponível em <http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/MC-19496965.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2013.

FEITOSA, Hércules de Araújo. Quanto um deus está além de outro deus? Elementos de matemática na Babilônia. Mimesis, Bauru, v. 21, n. 1, p. 25-38, 2000.

FILHO, Homero Gomes. **Teoremas Pitágoras – FERMAT – resolução dos trios pitagóricos.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2010.

______. **Resolução de Pitágoras - os triângulos retângulos pitagóricos.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2011.

FOSSA, John A.; ERICKSON, Glenn W. Uma Heuristica Platonica para Ternos Pitagóricos. **Principios**, v. 4, n. 5, p.147-158, 1997.

MAGALHÃES, Cícero Thiago B., **Sequência de Fibonnacci.** Disponível em <http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=propriedades%20da%20sequencia%20de%20fibonacci&source=web&cd=3&cad=rja&ved=0CD4QFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.obm.org.br%2Fexport%2Fsites%2Fdefault%2Frevista_eureka%2Fdocs%2Fartigos%2Fsequencia_fibonacci.doc&ei=PONIUcW-I8SY0QGlu4CgAg&usg=AFQjCNHMkIKLrsX_SctNTGpPhFPyC9zHiA&bvm=bv.43828540,bs.1,d.eWU>. Acesso em: 19 mar. 2013.

SBM. Sociedade Brasileira de Matemática. **Regimento do PROFMAT 2012**. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/regimento.asp. Acesso em 07/01/2013.

SILVA, Georgiane Amorim. **Ternos Pitagóricos: uma Ferramenta Pedagógica no Ensino do Teorema de Pitágoras.** Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/111-1-A-gt4_amorim_ta.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2013.

______. **Estudo histórico e pedagógico sobre ternos pitagóricos à luz de Eugène Bahier**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil, 2009. Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp129489.pdf >. Acesso em: 11 fev. 2013.

SCHOENFELD, Alan. **Porque toda esta agitação acerca da resolução de problemas?** In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (1996) (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM). Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/schoenfeld%2091.pdf>. Acesso em 10 fev. 2013.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas.** _lp_Pitágoras, 2009/8/17, Estilo OBMEP. Disponível em <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/>. Acesso em: 10 fev. 2013.

Sites consultados:

EQUAÇÕES DIOFANTINAS IV – O PRINCÍPIO DA BOA ORDEM. Disponível em <http://www.somatematica.com.br/coluna/gisele/06112001.php>. Acesso em: 28 mar. 2013.

NÚMERO DE FIBONACCI. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_Fibonacci>. Acesso em: 19 mar. 2013.

APENDICE

De acordo com Magalhães (1997?), dentre as propriedades básicas da Sequencia de Fibonacci, temos que:

(II) Se $m \geq 1$ e $n > 1$, então $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$

<u>Prova:</u> Vamos fazer indução sobre *m*:

$$m = 1: f_{n+1} = f_{n-1}f_1 + f_n f_2 = f_{n-1} + f_n \text{ (verdadeira)}$$

$$m = 2: f_{n+2} = f_{n-1}f_2 + f_n f_3 = f_{n-1} + 2f_n = (f_{n-1} + f_n) + f_n = f_n + f_{n+1} \text{ (verdadeira)}$$

Seja $q > 2$ e suponhamos a propriedade válida para todo $k, 2 \leq k < q,$ e para todo $n > 1$. Esta suposição, mais o fato de que a propriedade vale também para $k = 1$, nos garante:

$$f_{n+(q-2)} = f_{n-1}f_{q-2} + f_n f_{q-1}$$

$$f_{n+(q-1)} = f_{n-1}f_{q-1} + f_n f_q$$

Somando membro a membro essas igualdades e levando em consideração a fórmula recursiva que define (f_n):

$$f_{n+q} = f_{n-1}f_q + f_n f_{q+1}$$

Ou seja, a fórmula vale também para q, sempre que $n > 1$. O princípio da indução nos garante então que vale para todo $m \geq 1$ e qualquer $n > 1$.