UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em
Matemática em Rede Nacional

Matemática recreativa: uma experiência no Ensino Fundamental

Adriana Valentina Maneta Rigobello

PROFMAT

Rio Claro/SP
2024

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Adriana Valentina Maneta Rigobello

Matemática recreativa: uma experiência no Ensino Fundamental

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora
Profa. Dra. Érika Capelato

Rio Claro/SP
2024

R572m

Rigobello, Adriana Valentina Maneta
Matemática recreativa : uma experiência no Ensino Fundamental / Adriana Valentina Maneta Rigobello. -- Rio Claro, 2024
52 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Érika Capelato

1. Matemática Recreativa. 2. Malba Tahan. 3. Sudoku. 4. Problema dos Quatro Quatros. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Impacto potencial desta pesquisa

Este trabalho apresenta contribuições para a docência em matemática pois, ao trazer a Matemática Recreativa como foco de estudo, possibilita ao professor complementar suas práticas pedagógicas no ensino da Matemática utilizando-se de jogos e problemas matemáticos que promovam a criatividade e a curiosidade do estudante. Além disso, o trabalho propõe uma associação dos problemas do livro “O homem que calculava” de Malba Tahan com as habilidades do Currículo Paulista de Matemática. Cabe ressaltar que as habilidades presentes neste currículo orientam as práticas pedagógicas do professor de matemática do Estado de São Paulo.

Potential impact of this research

This work presents contributions to mathematics teaching because, by focusing on recreational mathematics, it allows teachers to complement their pedagogical practices in teaching mathematics by using mathematical games and problems that promote creativity and curiosity in students. In addition, the work proposes an association of problems from the book "The man who calculated"by Malba Tahan with the skills of the São Paulo Mathematics Curriculum. It is worth noting that the skills present in this curriculum guide the pedagogical practices of mathematics teachers in the State of São Paulo.

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Adriana Valentina Maneta Rigobello

Matemática recreativa: uma experiência no Ensino Fundamental

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Érika Capelato
Departamento de Economia - FCL UNESP

Profa. Dra. Camila Fernanda Bassetto Sampaio
Departamento Educação - FCL UNESP

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática - IGCE UNESP

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 15 de julho de 2024

Ao meu esposo Daniel
e à minha filha Júlia.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me capacitar para exercer a docência. Ao meu marido Daniel e à minha filha Júlia, que nunca me recusaram amor, apoio e incentivo nos inúmeros momentos de ansiedade e estresse.

Agradeço aos professores que contribuíram com a minha formação acadêmica e profissional desde o início de minha formação. A toda a comunidade acadêmica da Unesp, campus de Rio Claro, em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Profissional - PROFMAT que me proporcionaram um ensino de qualidade.

À minha orientadora professora Érika por sua dedicação e paciência durante este período, os quais fizeram grande diferença no resultado final deste trabalho.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos meus pais, que sempre me incentivaram e apoiaram em todas as áreas da minha vida.

Por ter alto valor no desenvolvimento da inteligência e do raciocínio, é a Matemática um dos caminhos mais seguros por onde podemos levar o homem a sentir o poder do pensamento, a mágica do espírito.

Beremiz para o Califa e seus convidados em “O homem que calculava”.

Resumo

A Matemática Recreativa é uma forma de despertar a curiosidade e o pensamento matemático nos estudantes por meio de jogos e problemas criativos e, desta forma, favorecer o ensino-aprendizagem desta ciência. Este trabalho apresenta algumas definições da Matemática Recreativa encontrada na literatura e faz um breve relato sobre a biografia de Malba Tahan, um dos pioneiros na idealização da Matemática Recreativa no Brasil. Como produto final, apresentamos uma associação entre alguns problemas do livro "O homem que calculava" de Malba Tahan e as habilidades do Currículo Paulista de Matemática. Cabe ressaltar que as habilidades presentes neste currículo orientam as práticas pedagógicas do professor de matemática do Estado de São Paulo. Além disso, apresentamos duas propostas de jogos recreativos que podem ser aplicados a estudantes do Ensino Fundamental - o Sudoku e o problema dos quatro quatros. Estes jogos podem ser utilizados para reforçar ou introduzir algum conceito matemático ou simplesmente desenvolver o pensamento matemático nos estudantes. Neste trabalho abordamos alguns aspectos matemáticos deste jogos como, uma forma geral para o problema dos quatro quatros e o número mínimo de pistas do Sudoku. Finalmente, descrevemos o desenvolvimento destes jogos junto aos alunos do 6^o ano do Ensino Fundamental II de uma escola pública e fazemos uma descrição do ganho pedagógico do uso da Matemática Recreativa neste contexto escolar.

Palavras-chave: Matemática Recreativa. Malba Tahan. Suduku. Problema dos Quatro Quatros.

Abstract

Recreational Mathematics is a way of awakening curiosity and mathematical thinking in students through games and creative problems and, in this way, favoring the teaching-learning of this science. This work presents some definitions of Recreational Mathematics found in the literature and gives a brief account of the biography of Malba Tahan, one of the pioneers in the idealization of Recreational Mathematics in Brazil. As a final product, we present an association between some problems from the book "The Man Who Calculated" by Malba Tahan and the skills of the São Paulo Mathematics Curriculum. It is worth noting that the skills present in this curriculum guide the pedagogical practices of mathematics teachers in the State of São Paulo. Furthermore, we present two proposals for recreational games that can be applied to elementary school students - Sudoku and the problem of four fours. These games can be used to reinforce or introduce a mathematical concept or simply develop mathematical thinking in students. In this work we address some mathematical aspects of this game, such as a general form for the four fours problem and the minimum number of Sudoku clues. Finally, we describe the development of these games with students in the 6th year of Elementary School II at a public school and describe the pedagogical benefits of using Recreational Mathematics in this school context.

Keywords: Recreational Math. Malba Tahan. Sudoku. Problem of the Four Fours.

Lista de Figuras

2.1 Júlio César de Mello e Souza. 18
2.2 Capa da revista ERRE. 19
2.3 Capa do livro Matemática divertida e curiosa. 21
2.4 Capa do livro O homem que calculava. 22

4.1 Sudoku 4×4 33
4.2 Sudoku 4×4 33
4.3 Sudoku 9×9 com sub-blocos 34
4.4 Sub-blocos superiores do Sudoku 9×9 para contagem do caso 1 35
4.5 Sub-blocos superiores do Sudoku 9×9 para contagem do caso 2 35
4.6 Sub-blocos superiores do Sudoku 9×9 - possibilidades do caso 2 35
4.7 Puzzle com 77 pistas e duas soluções 40

5.1 Jogo em sala de aula 42
5.2 Resolução do grupo A 43
5.3 Resolução do grupo B 43
5.4 Resolução do grupo C 44
5.5 Resolução do grupo D 44
5.6 Resolução do grupo E. 44
5.7 Atividades do Sudoku em cada semana. 45
5.8 Atividades do Sudoku sem dicas realizada por alguns estudantes. 46
5.9 Atividades do Sudoku realizada por alguns estudantes. 46
5.10 Atividades do Sudoku realizada por alguns estudantes. 47

Sumário

1 Introdução **12**

2 Sobre a Matemática Recreativa **16**
2.1 Algumas definições 16
2.2 Breve biografia de Malba Tahan 18
2.3 Habilidades do currículo paulista de matemática em "O homem que calculava" 22

3 Sobre o problema dos quatro quatros **28**

4 Sobre o jogo do Sudoku **32**
4.1 Quantidade de grades completas para um Sudoku 33
4.2 O problema do número mínimo de pistas 37
4.2.1 Variante do problema 40

5 Matemática recreativa: uma experiência **41**
5.1 Jogo na sala de aula: o problema dos quatro quatros 41
5.2 Jogo em aula de tutoria: Sudoku 45
5.3 O ganho pedagógico das atividades matemáticas recreativas 47

6 Considerações finais **49**

Referências **50**

1 Introdução

A professora-pesquisadora formou-se em licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos em 2002 e, desde então, trabalha na rede pública de ensino estadual na cidade de Araras - SP. Em janeiro de 2005, quando efetivou-se na rede, começou a lecionar Matemática no ensino fundamental II e Física na Educação de Jovens e Adultos - EJA. Em 2010 ingressou na pós-graduação à distância na Universidade Federal Fluminense, cursando "Novas Tecnologias para o Ensino da Matemática". Participou de vários cursos ofertados pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo na forma EaD, e também diversos cursos e orientações metodológicas oferecidas pela Diretoria de Ensino de Pirassununga.

Após vinte anos exercendo a docência em Matemática, sentiu a necessidade de buscar um conhecimento matemático mais aprofundado. Assim, em 2021 ingressou no mestrado profissional em Matemática PROFMAT na Unesp de Rio Claro, o qual ampliou as possibilidades de práticas docente pela troca de experiências com professores de outras cidades que faziam este curso.

Entrar no PROFMAT proporcionou o convite para assumir o cargo de Coordenadora de Gestão Pedagógica Geral no Programa de Ensino Integral da escola. Nesta função, atua dando formação aos professores do ensino fundamental e médio da escola, através de estudo sobre a documentação do Programa, incentivo à utilização de novas metodologias e análise de dados das avaliações internas e externas. Além disso, exerce a função de Professora Coordenadora de Área na área de Matemática e Ciências da Natureza onde, junto aos professores da escola, estuda os materiais digitais do Currículo Paulista, auxilia na preparação de aulas e provas e orienta sobre o uso de Plataformas Digitais (Matific, Khan Academy, Tarefas SP e Prova Paulista).

Nesses anos de docência, observou que muitos professores apresentam dificuldades para propôr jogos na aprendizagem. A atuação profissional de muitos professores fica apenas focada na utilização de livros didáticos e apostilas oferecidas pela secretaria da educação. Este contexto, motivou a escolha pela Matemática Recreativa como tema para estudo da dissertação de mestrado.

A temática da *Matemática Recreativa* tem suscitado interesse entre pesquisadores e professores, pois tem em sua concepção diversas potencialidades para tornar a matemática mais atraente para os estudantes. No entanto, algumas perguntas surgem para o professor e, nesta pesquisa, nos centramos na seguinte questão:

Como pode ser implementada a Matemática Recreativa na Educação Básica para que ela contribua com o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes?

A busca pela resposta à esta pergunta foi construída usando metodologias que contribuíssem para o conhecimento do referencial teórico sobre o assunto, bem como com a aplicação prática de dois jogos matemáticos para estudantes do sexto ano do Ensino

Fundamental de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo.

É possível encontrar na literatura nacional diversos trabalhos acadêmicos que descrevem o uso da matemática recreativa na sala de aula. Especificamente, na base de dados das dissertações do PROFMAT, encontra-se dois trabalhos nesta abordagem. O primeiro, é o trabalho de Ribeiro (2018) que aborda, dentre outros aspectos da matemática recreativa, como ela é apresentada em competições, como Olimpíadas de Matemática. Recentemente, o trabalho de Silva (2020) que conta a história do matemático indiano Kaprekar com enfoque matemático nos Números de Kaprekar. O produto educacional desta dissertação é uma atividade que se utiliza da matemática recreativa para abordar a história da matemática contida nos Números de Kaprekar.

A literatura aponta Malba Tahan como o pioneiro a impulsionar a matemática recreativa no Brasil. Assim, muitos pesquisadores se debruçaram em apresentar as potencialidades de suas obras para o ensino de Matemática.

No trabalho de Moreira, Silva e Lima (2019) os autores fizeram uma revisão sistemática da literatura nacional no período de 2014 a 2017 para identificar as principais pesquisas que utilizaram as contribuições didáticas e a historiografia de Malba Tahan para a Educação Matemática. Para este levantamento utilizaram o portal CAPES, o *Google* Acadêmico e o *Scielo* e cinco descritores: "Malba Tahan e Educação Matemática"; "Malba Tahan e Matemática"; "Malba Tahan"; "Júlio César de Melo e Educação Matemática" e, finalmente, "Júlio César de Melo e Matemática". Como resultado, os autores identificaram 6 dissertações e 4 artigos em periódicos nacionais.

No sentido de ampliar esta pesquisa, e tornar o período mais recente, selecionou-se os anos de 2018 a 2023 e escolheu-se como recorte, apenas o Scielo e o portal de teses e dissertações da CAPES. Além disso, utilizou-se o descritor "Malba Tahan".

Na busca feita no *Scielo* não foram encontrados artigos publicados em periódicos que abordassem as contribuições do autor para o ensino e aprendizagem da Matemática. Já a busca no portal CAPES formam encontradas as seguintes dissertações de mestrado:

"Um estudo sobre elementos matemáticos em contos de Malba Tahan" de Zwiernik (2021). De acordo com a autora a pergunta diretriz desta pesquisa é "como e quais elementos matemáticos emergem e são abordados em contos de Malba Tahan?" A pesquisa analisa contos retirados dos livros "Céu de Allah", "Maktub", "O gato do cheique e outras lendas" e "O livro de Aladim" que, segundo a autora, "apresentam os elementos matemáticos ora de forma explícita ora implícita na narrativa, articulada com as situações vivenciadas pelos personagens e com o contexto árabe, que é uma característica marcante do autor-personagem Malba Tahan". Dentre os elementos matemáticos presentes nos contos, a autora destaca o que ela chama de "violentar o raciocínio lógico", que são situações originadas de desafios que, a primeira vista, o leitor pode julgar impossíveis de serem solucionados, mas cuja solução após conceito ou propriedade matemática surpreende. Ainda de acordo com a autora, os contos de Malba Tahan possuem riqueza criativa e potencial pedagógico e são considerados um legado para a Educação Matemática.

"A Literatura de Malba Tahan na formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental I", de Reis (2023). O objetivo da pesquisa foi apresentar a onze docentes polivalentes do Ensino Fundamental I da Rede Municipal de Limeira a obra literária, a metodologia de Malba Tahan e alguns de seus desafios por meio de atividades pedagógicas baseadas em uma perspectiva interdisciplinar. A pesquisa ocorreu durante uma formação que se deu de forma on-line devido a pandemia da Covid-19. A partir de um questionário semiaberto aplicados aos professores participantes da pesquisa os resultados apontaram que "as aproximações interdisciplinares entre o ensino da Matemática e a Literatura de Malba Tahan têm muito a contribuir com a prática docente e com o processo de aprendizagem do estudante" e que a "literatura de Malba Tahan ainda precisa ser amplamente discutida em reuniões de Horário de Trabalho Pedagógico e Coletivo (HTPC), bem como nas formações continuadas."

"A literatura de Malba Tahan: a interdisciplinaridade como abordagem significativa para o ensino e aprendizagem de Matemática e o uso das TICs como forma de disseminação do aprendizado", de Franca (2021). O objetivo da pesquisa foi o incentivo à leitura de contos da literatura de Malba Tahan em uma abordagem interdisciplinar e significativa para o ensino e aprendizagem de Matemática. A pesquisa correu de forma remota devido a pandemia da Covid-19 com 30 estudantes 6º ano do Ensino Fundamental II. Ainda de acordo com o autor, durante a pesquisa os alunos foram incentivados a produzirem um vídeo sobre um dos contos lidos, por meio do uso de diversos aplicativos de edição com intuito de protagonizar o aprendizado. Os resultados, quanti-qualitativos da pesquisa evidenciaram a eficácia deste projeto interdisciplinar para o aprendizado de Matemática.

"Investigando problemas aritméticos, algébricos e geométricos com o GeoGebra e o GNU Octave", de Oliveira (2023). Nesta pesquisa a autora selecionou três problemas nas obras de Malba Tahan: "O problema dos 35 camelos", "O problema dos quadrados mágicos" e "O problema da duplicação do cubo". Esses problemas foram interpretados com o auxílio dos softwares GeoGebra e GNU Octave, onde é possível visualizar e manipular as soluções, resultando em sequências didáticas para uso em sala de aula.

"Resoluções de problemas matemáticos por meio da literatura: Uma abordagem interdisciplinar baseada na Obra de Malba Tahan", de Paes (2021). Nesta pesquisa é analisado como crianças do 5º ano do Ensino Fundamental constroem conceito de *numeramento* através da resolução de problemas matemáticos baseados na obra literária "O homem que calculava", de Malba Tahan. Apresenta um breve histórico do surgimento dos números e da escrita em diversas sociedades e do legado da pedagogia Malbatahanica, sendo uma pesquisa embasada na bibliografia de George Polya e Guy Brousseau.

"Produção de significados de professores Ensino Fundamental ao adotarem textos de Malba Tahan", de Toniato (2021). Nesta pesquisa foi investigado a produção de significados de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir de uma proposta de interdisciplinaridade, envolvendo releituras e adaptações de obras literárias com narrativas matemáticas, produzido em um curso de extensão e tendo como referência textos da obra "O homem que calculava", de Malba Tahan, ofertado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática, vinculado ao Instituto Federal do Espírito Santo, coordenado pelos pesquisadores, tendo como participantes alunos licenciados em Matemática e professores do Ensino Fundamental da rede pública. Através da reflexão sobre a temática, foi formulada a seguinte questão: Que significados são produzidos pelos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, quando incentivados a participarem de uma proposta de interdisciplinaridade, envolvendo releituras e adaptações de obras literárias com narrativas temáticas, com vistas à dialogicidade como prática de liberdade? Este trabalho permite a reflexão sobre práticas pedagógicas frente ao ensino de matemática para os anos iniciais.

"O Legado de Malba Tahan no âmbito da Educação Profissional e Tecnológica" de Lourenço (2023). Nesta pesquisa o autor faz uma análise do livro "Didática da Matemática" publicado por Malba Tahan em 1961 e conclui que o legado pedagógico de Malba Tahan vai ao encontro da finalidade da Educação Profissional e Tecnológica que é humanizar o conhecimento e levá-lo a um grande número de pessoas.

A descrição dos trabalhos anteriores mostra que as obras do escritor estão presentes em pesquisas atuais e contribuem para o ensino de Matemática. É possível perceber também a presença comum, em muitos destes textos, da obra "O homem que calculava", amplamente conhecida ela é uma forma de perceber a matemática recreativa presentes nos problemas encontrados no livro.

É neste contexto que este trabalho se insere com o foco na matemática recreativa, nas potencialidades dos problemas do livro "O homem que calculava" para contribuir no desenvolvimento das habilidades do currículo paulista de matemática no Ensino Fundamental e com a aplicação dos jogos: o problema dos quatro quatros e do Sudoku para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Além desta introdução, este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 apresenta-se algumas definições de matemática recreativa encontradas na literatura, bem como o seu impacto no ensino e aprendizagem da matemática na Educação Básica. Além disso, faz-se uma breve descrição da biografia de Malba Tahan e propõem-se uma relação que identifica, para alguns problemas encontrados nos capítulos de seu livro "O homem que calculava", a habilidade do Currículo Paulista de Matemática que pode ser trabalhada na sala de aula da Educação Fundamental II.

No capítulo 3 apresenta-se a matemática por traz do problema dos quatro quatros, ou seja, apresenta-se a fórmula proposta por Rui Chammas e Roger Chammas para a determinação de uma das possíveis soluções para deste problema.

No capítulo 4 apresenta-se a matemática por traz do jogo do Sudoku. O texto deste capítulo apresenta o problema do número mínimo de pistas presentes em um Sudoku para que este seja válido, ou seja, tenha solução única.

No capítulo 5 apresenta-se como foram organizadas e aplicadas os jogos - o problema dos quatro quatros e o Sudoku - para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. O primeiro jogo foi aplicado durante uma aula de matemática para 25 estudantes e o segundo, em uma aula de tutoria para 4 estudantes. O objetivo era avaliar se as atividades recreativas são apropriadas e cumprem a mesma finalidade em ambientes e contextos diferentes dentro da escola e o ganho pedagógico do uso da matemática recreativa no ambiente escolar.

Finalmente, no capítulo 6 apresenta-se a conclusão final deste trabalho destacando suas fragilidades e novas perspectivas para estudo.

2 Sobre a Matemática Recreativa

2.1 Algumas definições

Pode-se encontrar na literatura diversas definições para o termo "matemática recreativa".

Segundo Bartilová (2016), Martin Gardner é o principal nome associado a matemática recreativa. Ele a define como "aquela parte da matemática que inclui qualquer coisa que tem espírito de jogo" (Bartilová, 2016, p.2, tradução nossa).

Em contribuição, Bartilová (2016) também apresenta uma definição para o termo utilizando quatro aspectos: científico-popular, divertido, pedagógico e histórico. A seguir, apresenta-se cada um destes aspectos:

> O aspecto científico-popular: a Matemática Recreativa é a parte da matemática que é divertida e popular. Ou seja, os problemas correspondentes devem ser compreensíveis para um leigo interessado, embora as soluções possam ser mais difíceis. Pela Matemática Recreativa, podemos entender a abordagem usando a qual podemos tornar a matemática séria compreensível. (Bezerra, 2018, p.29)

Entende-se assim, que a matemática recreativa quando proposta de uma forma criativa e com as palavras adequadas pode despertar o interesse de um público que possua o conhecimento matemático ou não. Este aspecto torna-se fundamental aos estudantes, pois o aspecto "popular" da proposta trazida, seja através de jogos, enigmas, quebra-cabeças, brincadeiras, origamis ou desafios, tem potencial para envolver o estudante na atividade fazendo-o compreender os aspectos "científicos-matemáticos" necessários para resolução da proposta.

> O aspecto do divertimento - a Matemática Recreativa é uma matemática usada como um desvio da matemática séria para a diversão. (Bezerra, 2018, p.30)

Acredita-se que sentimentos de tensão, ansiedade e medo que os estudantes possam ter em relação ao ensino-aprendizagem de Matemática são culturais e, muitas vezes, interferem no processo de cognição. Neste sentido, a matemática pode ser percebida como "séria", ou seja, cheia de regras, conceitos e hipóteses que estudantes não compreendem e, portanto, que eles classificam como ciência desprovida de aplicações que estão próximas à sua realidade. A matemática recreativa assim, pode "desviar" esta percepção do estudante amenizando os sentimentos de tensão, ansiedade e medo antes presentes em uma aula de matemática. Isto explica o seu caráter pedagógico.

> O aspecto pedagógico - a Matemática Recreativa pode ser usada para fins de ensino. É visto como uma grande utilidade pedagógica. (Bezerra, 2018, p.30)
>
> O aspecto histórico - a Matemática Recreativa sempre desempenhou um papel muito importante na história da matemática e foi responsável pela origem de teorias e conceitos matemáticos importantes que não existiriam sem ela. (BÁRTLOVÁ, 2016 apud Bezerra, 2018, p.30)

Neste aspecto o autor destaca o papel da Matemática Recreativa como facilitadora para se trabalhar aspectos históricos e multiculturais da Matemática. No trabalho de Bezerra (2018) o autor faz uma descrição de obras e matemáticos que contribuíram para a divulgação da Matemática Recreativa como Leon Battisti Alberti(1404–1472), Luca Pacioli(1445–1517), Leonhard Euler(1707–1788), PierredeFermat(1601–1665), os quais segundo o autor são citados na História da Matemática em algum problema recreativo.

Em Singmaster (2000), o autor define o termo da seguinte maneira:

> Matemática Recreativa é matemática divertida e popular [...] é uma matemática divertida e usada pedagogicamente como um desvio da matemática séria ou como uma maneira de tornar matemática séria compreensível ou palatável. (Singmaster, 2000, p.4)

Conforme descrito anteriormente, acredita-se que a matemática recreativa pode exercer um papel importante no aspecto pedagógico, pois pode ser utilizada pelo professor para prender a atenção dos alunos, para introdução de um novo objeto do conhecimento, para fazer explicações com uma nova abordagem metodológica, para que as aulas de matemática deixem de ser monótonas e se tornem mais atraentes e estimulantes. Neste sentido, Ribeiro (2018) escreve:

> A procura da solução de um problema nem sempre exige um grande conhecimento de matemática. É nesse momento que a recreação atrai a curiosidade dos que não se interessam pela matéria e os convida à prática do raciocínio lógico-dedutivo e consequentemente ao estudo da disciplina. (RIBEIRO, 2018, p.11)

Desta forma, acredita-se que há uma necessidade de associar diversas metodologias e métodos que contribuam com o ensino e aprendizagem da matemática o que provoca, supostamente, a quebra de paradigmas em alguns professores para que possam (re)planejar todo o seu trabalho no intuito de potencializar o processo de ensino e aprendizagem na educação básica. Uma das possibilidades, vem com a matemática recreativa.

Na próxima seção resgata-se a biografia de Malba Tahan, heterônimo de Júlio César de Melo e Souza (1895-1974), que foi um dos pioneiros na idealização da Matemática Recreativa no Brasil, escrevendo diversos livros de didática e ensino, promovendo a popularização da matemática em todo o território nacional.

2.2 Breve biografia de Malba Tahan

Nesta seção apresenta-se brevemente a história do escritor matemático Júlio César de Mello e Souza, a qual foi retirada do site[1] criado pela própria família e seus admiradores, onde é possível ter acesso a biografia completa do autor (desde sua infância até sua morte) e informações sobre todas as suas obras literárias.

Júlio César de Mello e Souza, com pseudônimo Malba Tahan, foi pioneiro a utilizar recreações e curiosidades da matemática que transformaram a aridez dos números e a exigência de raciocínio em brincadeira, ao mesmo tempo útil e prazerosa. Malba Tahan conseguiu unir a ciência com o lúdico, transformando a leitura de seus livros num agradável passatempo.

Júlio César de Mello e Souza (Figura 2.1) é filho de João de Deus de Mello e Souza (08/03/1863 - 09/03/1911) e de Carolina Santos de Toledo (04/11/1866 - 01/06/1925). João de Deus nasceu no Rio de Janeiro, mas resolveu fundar um colégio interno para filhos de fazendeiros na cidade de Queluz, interior de São Paulo, onde conheceu Carolina que aos 17 anos assumiu a regência da escola primária da cidade.

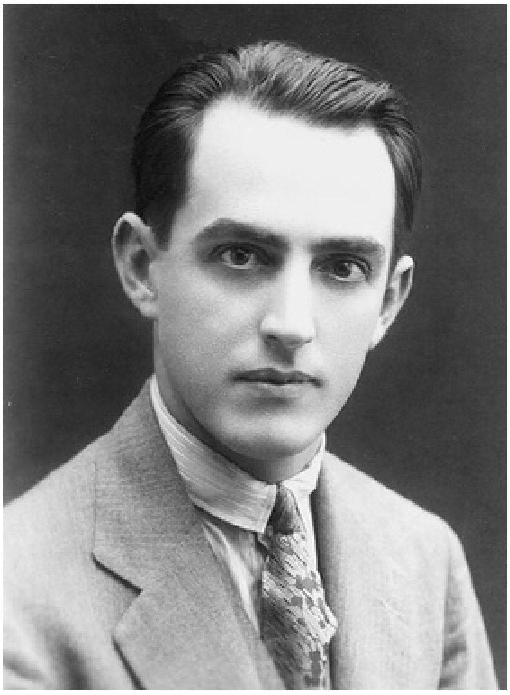


Figura 2.1: Júlio César de Mello e Souza.
Fonte: https://malbatahan.com.br/fotos/retratos/

Júlio César nasceu no Rio de Janeiro e tem quatro irmãos mais velhos e quatro irmãos mais novos. Os mais velhos chamavam-se Maria Antonieta, Laura, João Batista e Julieta. Os mais novos chamavam-se Nelson, Rubens, José Carlos e Olga. Sete irmãos tornaram-se professores e eram conhecidos como os "Mello e Souza"

A escola pública em Queluz funcionava na sala da casa de Carolina, cujo apelido era dona Sinhá. Haviam quatro classes diferentes estudando no mesmo ambiente, e Júlio César e sua irmã Julieta ainda eram crianças, mas ajudavam a mãe a entregar ou recolher as lições, apagar a lousa e até mesmo ajudar a cuidar da irmã bebê Olga.

[1]Site disponível em: https://malbatahan.com.br/. Acesso em 08 de maio de 2024.

Júlio César fez o primário na escola da sua mãe, dentro de sua própria casa, e muitos na época diziam que ele era um menino de muita imaginação e seu brinquedo preferido eram os sapos do quintal. Julinho, como era carinhosamente chamado, usava uma varinha para dar aula a uma turma de sapos. Mesmo após adulto, muitos admiradores o presentearam com réplicas de sapos em diversos tipos de materiais.

Em 1908, Julinho com apenas 12 anos, criou sua primeira obra, que era uma revista intitulada: Revista ERRE!, veja Figura 2.2. Já nessa revista usou seu primeiro pseudônimo: "ERRE Redactor Salomão IV", para que ninguém descobrisse a autoria e fizesse mais sucesso.

Figura 2.2: Capa da revista ERRE.
Fonte: https://malbatahan.com.br/wp-content/uploads/2017/07/02-1908-Revista-ERRE-700x1024.jpg

A revista ERRE se tratava de um caderno pequeno, com folhas dobradas e costuradas à mão, escrito com caneta tinteiro e ilustrado pelo próprio Julinho com desenhos coloridos com guache ou lápis de cor. Havia estórias sobre guerras, animais, ciências, suspense, etc. A revista durou de janeiro de 1907 a novembro de 1908.

João Batista deu aulas particulares a seu irmão Júlio César, mas relatou que ele era muito inquieto, não se concentrava nos estudos, sempre corria para o quintal quando ouvia os gansos, pois achava que talvez estivessem atacando os sapos. Foi aprovado no Colégio Militar em 1906, mas permaneceu por apenas três anos, pois seus pais não tinham condições de pagar a mensalidade. Já em 1909 obteve nota no exame de admissão no Colégio Pedro II, conseguindo gratuidade parcial. Uma das recordações mais bonitas do colégio foi quando o diretor o acordou de madrugada para ver o Cometa Halley que passaria pelo céu, e isso deixou Júlio César muito feliz e jamais esquecera esse gesto, sendo que anos mais tarde escreveu um livro contando este fato.

Nesse colégio ele tinha um professor de português que era membro da Academia Brasileira de Letras, e passava redações para os alunos, e se caso alguém não fizesse ficava impedido de voltar para casa no final de semana. Júlio César começou a escrever redações para os alunos e começou a ganhar um pouco de dinheiro com o novo negócio. Com o dinheiro começou a andar de bonde quando voltava para casa, e podia comprar seu chocolate preferido chamado Bering.

Seu pai faleceu em 1911 e sua mãe Carolina voltou para o Rio de Janeiro onde fundou o Colégio São Paulo em Copacabana, onde seus filhos lecionavam. Em 1912 Júlio César foi nomeado Auxiliar da Biblioteca Nacional, e no ano seguinte iniciou a graduação em engenharia civil, na Universidade do Brasil. Também estudava o curso Normal durante o período da noite.

Já em 1921 assumiu o cargo de professor substituto na Escola Normal, e dois anos após passou em concurso público, e permaneceu nessa mesma escola por 40 anos lecionando Matemática, Geografia, Literatura infantil, Folclore e a Arte de Ler e contar histórias, tornando-se professor catedrático. Após a morte de sua mãe ministrou aulas no Colégio Mello e Souza que eram de suas irmãs Julieta e Olga. Júlio acabou encantado por uma aluna chamada Nair Marques da Costa, com quem se casou em 26 de março de 1925 e com ela teve três filhos: Rubens Sérgio, Sonia Maria e Ivan Gil.

A carreira literária de Malba Tahan teve início em 1918, no jornal O Imparcial. Ele não assinava como Júlio César, e sim com seu pseudônimo R. V. Slady, pois havia muita indiferença em relação a seus contos, que na maioria das vezes não era publicado. Com isso disse que se tratava de um escritor americano, e isso deu certo pois o editor acreditou em suas histórias e acabou publicando as estórias em seu jornal.

Em 1925 criou Malba Tahan, e a sua primeira publicação foi nomeada "Contos de Malba Tahan", cujo autor era ele próprio. Já no segundo livro intitulado "Céo de Allah", Malba Tahan era o autor. Na sequência surgiram outros livros, dentre eles "Amor de Beduíno", "Lendas do deserto", "Mil histórias sem fim", totalizando aproximadamente cem livros publicados até a sua morte.

Descobriram apenas nos anos 40 a mistificação literária do autor. Antes disso, para dar maior veracidade, o editor informava que o livro havia sido traduzido do original árabe.

Júlio César conseguiu publicar seus livros em muitas editoras, e seus contos eram assinados pelo misterioso autor árabe. Suas estórias eram encontradas em muitos jornais de diversos estados brasileiros, dentre os quais se destacavam: Diário de São Paulo, revista Fon-Fon, Gazeta Comercial, O Malho, etc. A partir da década de 30 suas histórias se espalharam para Rio de Janeiro, Espírito Santo, Minas Gerais, Santa Catarina, etc.

Júlio César usou o pseudônimo Malba Tahan, que era um personagem que parecia real e que tivesse de fato existido, se caracterizando dessa forma como uma mistificação literária. Para convencer o público em geral, ele estudou a cultura árabe para que as obras fossem realmente convincentes ao público leitor, incluindo linguagem específica e ambientação árabe em suas histórias.

Com a ajuda do jornalista Irineu Marinho, que era diretor do periódico "A Noite", publicou os contos de Ali Yezzid Izz-edin Ibn-Salin Malba Tahan. O jornal divulgou que os contos do escritor árabe eram traduzidos e adaptados por um de nossos colaboradores.

Em nenhum momento o jornalista Irineu Marinho revelou o segredo da mistificação literária. E permaneceu por longos anos no imaginário brasileiro, até que Júlio César inventou Breno Alencar Bianco, que será o tradutor fictício que começou a aparecer em seus livros a partir da edição de "O homem que calculava".

Seus contos impulsionaram outras atividades tais como recreações matemáticas, passatempos e vários artigos sobre educação matemática e didática. Em 1934 Júlio César publicou seu primeiro livro intitulado "Matemática Divertida e Curiosa" (ver Figura 2.3.

O livro apresenta narrativas célebres do autor, como "O homem que calculava", história

Figura 2.3: Capa do livro Matemática divertida e curiosa.
Fonte:https://malbatahan.com.br/portfolio/matematica-divertida-e-curiosa-2/

que viria a consagrar Malba Tahan como o mais destacado professor de matemática de seu tempo. Opondo-se ao "algebrismo" de sua época, que, em vez de problemas práticos, interessantes e simples, exigia sistematicamente dos alunos verdadeiras charadas, cujo sentido o estudante não chega a absorver, Malba Tahan incentivava uma forma mais lúdica de ensinar a matemática. O livro apresenta, de forma entrelaçada, os problemas numéricos, anedotas, sofismas, contos, frases célebres, de modo que o aluno tenha contato com os temas de forma elementar e intuitiva, incentivando o interesse e a aprendizagem.

Já na década de 1930, o autor recomendava o jogo como situação de aprendizagem, fornecendo sugestões de materiais didáticos, a utilização de paradoxos, falácias e recreações em sala de aula, com apresentação de problemas interessantes, a narração de histórias e a integração da língua materna com a linguagem matemática. Malba Tahan foi arauto e precursor de uma nova forma de ensinar matemática, cujas concepções passaram a integrar, muitos anos depois, os Parâmetros Curriculares Nacionais definidos pelo Ministério da Educação.

Com seus métodos, Júlio César de Melo e Sousa conseguiu protagonizar e revolucionar o ensino da época, "[...] no entanto foi muito criticado e contestado pelos seus colegas de trabalho que eram tradicionalistas" (PIRES e APOLINÁRIO, 2017, p. 41). Por tamanha notoriedade de seu grande personagem, que constava em sua identificação, ele conseguiu validar seu pseudônimo, com o qual ficou conhecido.

> [...] em 1952, por decreto do então Presidente da República Getúlio Vargas, o pseudônimo foi anexado ao seu nome, passando a constar em sua carteira de identidade. (BIANI E LORENZATO, 2017, p. 836)

No Brasil, desde o ano de 2013, pela Lei nº 12.835 foi atribuído ao dia 6 de maio, dia de seu nascimento, o Dia Nacional da Matemática. Fato que eternizou a sua contribuição para a Educação Matemática no Brasil.

2.3 Habilidades do currículo paulista de matemática em "O homem que calculava"

Júlio César de Melo e Sousa publicou 120 livros, dos quais, 51 são referentes à Matemática. "O homem que calculava" (ver Figura 2.4) é seu maior sucesso, sendo traduzido para diversos idiomas.

Publicado em 1937, ele conseguiu reunir aventura, romance, fantasia, informações históricas e culturais, jogos e raciocínios matemáticos. As histórias descritas no livro apresentam um teor moral para formação dos jovens leitores e possuem sempre um desfecho justo e inteligente.

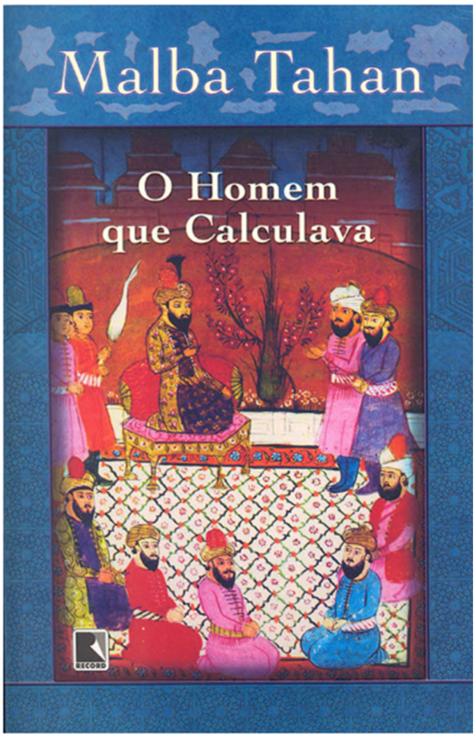


Figura 2.4: Capa do livro O homem que calculava.
Fonte:https://malbatahan.com.br/portfolio/o-homem-que-calculava/

Este livro, em estilo de ficção, narra as aventuras de Malba Tahan, em primeira pessoa, e de seu amigo Beremiz Samir, mais conhecido como o homem que calculava, em suas andanças pelas terras árabes no início do século XX. Podemos encontrar várias histórias, que envolvem situações matemáticas nos campos da aritmética, álgebra e geometria, introduzindo a linguagem matemática na Educação Básica.

O livro "O homem que calculava" pode ser considerado um convite para o professor utilizá-lo em sua prática pedagógica para enriquecer o currículo do ano em que estiver lecionando, aumentando o vocabulário e repertório matemático na resolução de problemas do cotidiano.

No trabalho de Lindolfo (2021) a autora apresenta um quadro associando algumas habilidades da Base Nacional Comum Curricular que podem ser mobilizadas, a partir dos problemas apresentados na obra "O homem que calculava". Os problemas selecionados são dos capítulos 3 ao 10 além dos capítulos 13, 28 e 32.

De forma a contribuir com o professor de matemática do Estado de São Paulo, no Quadro abaixo apresenta-se alguns problemas do livro adaptados para serem utilizados na Educação Básica, mais precisamente nos anos finais do Ensino Fundamental 2. Além disso, associa-se também, para cada problema do livro, a habilidade a ser trabalhada de acordo com o Currículo Paulista (São Paulo, 2019).

De acordo com São Paulo (2019) "o Currículo Paulista define e explicita, a todos os profissionais da educação que atuam no Estado, as competências e as habilidades essenciais para o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos estudantes paulistas e considera sempre sua formação integral na perspectiva do desenvolvimento humano." (São Paulo, 2019, p.11)

De forma geral, o Currículo Paulista tem como pressuposto ser um instrumento de apoio e reflexão para a Educação Básica. Sua concepção está afinada com as definições pedagógicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018).

De acordo com o Currículo Paulista as habilidades "apontam o que deve ser ensinado em relação aos objetos de conhecimento" (São Paulo, 2019, p. 234).

Para a leitura da habilidade deve-se considerar as indicações contidas no Currículo Paulista (São Paulo, 2019). Por exemplo, na habilidade EF06MA01 as letras EF referem-se ser uma habilidade para o Ensino Fundamental, o primeiro par de números denota que está aplicada ao sexto ano do Ensino Fundamental, as letras MA denotam que é uma habilidade de Matemática e o último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano ou do bloco de anos conforme apresentado na BNCC.

No Quadro abaixo as habilidades EF06MA01, EF06MA02, EF06MA03, EF06MA05, EF06MA06, EF07MA01, EF07MA05, EF07MA09, EF07MA12, EF08MA02, EF08MA03 referem-se a unidade temática Números.

As habilidades EF06MA14, EF06MA15, EF07MA13, EF08MA13 a unidade temática Álgebra. A habilidade EF09MA14 refere-se a unidade temática Geometria.

Habilidade do Currículo Paulista	**Problema encontrado no livro que pode ser utilizado na Educação Básica (adaptado pela pesquisadora)**
(EF06MA01) Identificar, comparar, ordenar, números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, dizendo quais são, fazendo uso da reta numérica, para localizar os números.	**Capítulo 1:** Pronunciou vagarosamente: **-** Um milhão, quatrocentos e vinte e três mil, setecentos e quarenta e cinco.
(EF08MA03) Resolver e elaborar situações problema de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo.	**Capítulo 2**: Aquela árvore, por exemplo, tem duzentos e oitenta e quatro ramos. Sabendo-se que cada ramo tem, em média, trezentas e quarenta e sete folhas, é fácil concluir que aquela árvore tem um total de noventa e oito mil, quinhentas e quarenta e oito folhas! Estará certo, meu amigo?
(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.	**Capítulo 3**: Somos irmãos — esclareceu o mais velho — e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?
(EF07MA12) Resolver e elaborar situações problema que envolvam as operações com números racionais.	**Capítulo 4**: Beremiz Samir e seu amigo ajudam um viajante ferido e faminto. Beremiz tinha 5 pães e seu amigo 3. Os oito pães seriam divididos entre os três durante o restante da viajem. O novo companheiro, que dizia ser um rico xeique, se propôs a pagar 8 moedas de ouro pelos oito pães quando chegassem ao destino: 5 moedas a Beremiz pelos 5 pães e 3 moedas ao seu amigo pelos seus 3 pães. Como a divisão dos pães e das moedas foram feitas?
(EF08MA13) Resolver e elaborar situações problema que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.	**Capítulo 5**: Um joalheiro e o dono de uma pousada discutem. O joalheiro prometeu pagar ao dono da pousada R$ 20,00 pela hospedagem se vendesse as joias por R$ 100,00 e pagaria R$ 35,00 se vendesse as joias por R$ 200,00. Sabendo que o joalheiro acabou vendendo tudo por R$ 140,00, quanto ele deve pagar ao dono da pousada?
(EF07MA05) Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.	**Capítulo 6:** O pai de Abdul deixou 35 camelos para serem divididos entre os três irmãos, sendo que o mais velho Adib receberá ½ (a metade), o filho do meio Badih receberá 1/3 (um terço) e Abdul, o filho caçula receberá 1/9 (um nono) dos camelos. Quantos camelos cada um receberá?
(EF06MA03) Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	**Capítulo 7:** Podemos escrever os números de 0 a 100 usando quatro algarismos 4 e alguns sinais matemáticos.
(EF07MA12) Resolver e elaborar situações problema que envolvam as operações com números racionais.	**Capítulo 8:** Como pagamento de um pequeno lote de carneiros, 3 muçulmanos receberam uma partida de vinho, composta de 21 vasos iguais, sendo 7 cheios, 7 meio-cheios e 7 vazios. Querem,

	agora, dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba a mesma quantidade de vinho (números decimais, frações)
(EF06MA06) Resolver e elaborar situações problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores.	**Capítulo 10:** 496 é um número perfeito, pois a soma de seus divisores, com exceção de 496, dá como resultado o número 496. Por exemplo, os divisores de 496 são 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 e 248, e se somarmos esses números o resultado dá o número 496.
(EF06MA15) Resolver e elaborar situações problema que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.	**Capítulo 12:** Problema dos 60 melões: Dois irmãos ficaram encarregados de vender duas partidas de melões, com 30 melões cada. Harim ficou com a venda de 30 melões que deviam ser vendidos à razão de 3 por 1 dinar, já Hamed ficou com 30 melões que deveriam ser vendidos à razão de 2 por 1 dinar. Efetuada a venda, Harim e Hamed deveriam receber 10 e 15 dínares respectivamente, totalizando 25 dínares. O mercador teve uma outra ideia, juntar todos os melões e vender 5 melões por 2 dínares. Desta forma, ao final das vendas haviam conseguido 24 dínares. O que não está correto no pensamento do mercador ao juntar as duas partes para facilitar a venda?
(EF07MA01) Resolver e elaborar situações problema com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.	**Capítulo 13:** Os números amigos: Beremiz afirmou que os números 220 e 284 são números amigos, pois 220 tem como divisores os números 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 e o número 284 tem como divisores os números 1, 2, 7, 71 e 142. Se somarmos os divisores de 220 obtemos o número 284, e somando os divisores de 284 obtemos o número 220. Portanto, os números 220 e 284 são considerados amigos. Além disso, a diferença entre 284 e 220 é igual a 64, que é um número que representa um quadrado e um cubo.
(EF08MA02) Resolver e elaborar situações -problema usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.	**Capítulo 16:** A recompensa que o rei daria seria em grãos de trigo da seguinte forma: 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda casa, quatro grãos pela terceira casa, e assim até a sexagésima quarta casa do tabuleiro. Para saber o montante em grãos, o matemático do reino fez o cálculo e chegou a um número astronômico, onde todo o grão de trigo do reino não seria capaz de pagar a recompensa.
(EF06MA03) Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	**Capítulo 17:** Havia em Damasco um camponês e três filhas. O camponês declarava que as filhas eram muito inteligentes, mas o cádi era muito invejoso e resolveu apurar se isso era verdade e pediu para chamar as moças e lhes disse: Aqui estão 90 maçãs que vocês devem vender no mercado. Fátima - a filha mais velha, ficará com 50 maçãs, Cunda ficará com 30 maçãs e Siha, a caçula, ficará com 10 maçãs. Se Fátima vender 7 maçãs por 1 dínar, as irmãs deveriam seguir o exemplo e fazer o mesmo. Se Fátima vender por 3 dínares cada maçã, as irmãs deveriam fazer o mesmo. O desafio é que as 3 irmãs vendam e recebam a mesma quantia.
(EF09MA14) Resolver e elaborar situações problema de aplicação do teorema de Pitágoras.	**Capítulo 18:** O príncipe perguntou a Beremiz como a ciência dos hindus contribuiu para a matemática. Ele lhe explicou que 10 séculos antes de Maomé, viveu na Índia um homem chamado Apastamba, que elaborou uma obra chamada Suba-Sultra. Esta consiste na construção de um triângulo retângulo de 39, 36 e 15

	polegadas. Beremiz desenhou com um bambu na areia um triângulo retângulo, e explicou que o maior lado se chama hipotenusa, e os lados menores se chamam catetos, e depois construiu um quadrado sobre a hipotenusa e sobre cada cateto. Por fim, Beremiz afirmou que a área do quadrado maior é igual a soma dos outros dois quadrados.
(EF06MA03) Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	**Capítulo 19:** Havia um navio vindo de Serendibe com uma grande carga de especiarias que havia sido acometido por uma violenta tempestade. Três marinheiros, no entanto, conseguiram manejar as velas e sair da tormenta. Com isso, o comandante do navio quis recompensar os marinheiros com um certo número de cátis (moedas), cuja quantidade era superior a 200 e inferior a 300. O primeiro marinheiro acordou a noite, foi até a caixa das moedas, dividiu em 3 partes iguais, mas notou que sobrava um cátil, então jogou 1 cátil ao mar, pegou a sua parte e saiu. O segundo e o terceiro marinheiro fizeram a mesma coisa durante a noite. E no outro dia o comandante dividiu a moeda em 3 partes iguais, mas a divisão não foi exata, pois havia sobrado 1 cátil, o qual ele pegou para ele. A pergunta é a seguinte: quantas eram as moedas?
(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal como fruto de um processo histórico, percebendo semelhanças e diferenças com outros sistemas de numeração, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.	**Capítulo 20:** A base 10 surgiu devido a contagem de ovelhas, pois quando um pastor numerava as ovelhas, dobrava os dez dedos e atirava uma pedra no chão. No final, as pedras representavam a mão completa. Com o passar do tempo surgiram caracteres especiais para o sistema de numeração decimal, por exemplo, o número 9.765 era representado por matemáticos antigos como 9m7c6d5, onde m é o milhar, c é a centena, d é a dezena.
(EF07MA12) Resolver e elaborar situações problema que envolvam as operações com números racionais.	**Capítulo 22:** Um rajá deixou para suas filhas certo número de pérolas e determinou a divisão da seguinte forma: a filha mais velha tiraria uma pérola e ficaria com um sétimo do que restasse, já a segunda filha tiraria duas pérolas e ficaria com um sétimo do que restasse, e assim sucessivamente até a última filha. Após feita a partilha, cada filha haveria ficado com a mesma quantidade de pérolas. Quantas filhas tem o rajá?
(EF06MA03) Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	**Capítulo 23:** O amigo de Beremiz recebeu um bilhete que dizia: Tara-Tir levou 8 bastonadas, pegou multa de 27 sequins de ouro e foi intimado a deixar a cidade, sendo mandado com uma escolta para Damasco. Beremiz ao ler o bilhete ficou surpreso disse: os números 8 e 27 são cubos iguais, pois 8 x 8 x 8 = 512 e 27 x 27 x 27=19.633. A soma dos algarismos de 512 é 8, e a soma dos algarismos de 19.683 é 27.
(EF08MA02) Resolver e elaborar situações problema usando a relação entre potenciação e radiciação, para	**Capítulo 25:** O calculista responde: admita que um algebrista deseja determinar a raiz quadrada de um número de 4 algarismos, sendo eles 2.025 - 3.025 e 9.801. A raiz quadrada de 2.025 é igual a 45, ou seja 45 x 45 = 2.025 e 45 é a soma de 20 mais 25 que são

representar uma raiz como potência de expoente fracionário.	partes do número 2.025 quando decomposto por 1 ponto (20.25). A raiz quadrada de 3.025 é igual a 55, ou seja 55 x 55 = 3.025 e 55 é a soma de 30 mais 25 que são partes do número 3.025 quando decomposto por 1 ponto (30.25). A raiz quadrada de 9.801 é igual a 99, pois 99 x 99 = 9.801 e 99 é a soma de 98 mais 01 quando decomposto por 1 ponto (98.01).
(EF06MA03) Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	**Capítulo 31:** Havia um rei chamado Cassim, o "Indeciso", o qual tinha uma filha chamada Dahizé. Quando sua filha completou 18 anos foi pedida em casamento por três príncipes: Aradim, Benefir e Camozã. A princesa foi consultada para saber qual deles escolheria e ela disse que se casaria com o mais inteligente. Então o rei chamou um sábio para verificar qual seria o mais inteligente. O sábio propôs a prova dos cinco disco, os quais são do mesmo tamanho e mesmo peso, sendo dois pretos e três brancos. Após mostrar os cinco discos aos príncipes, o sábio vendou os três príncipes e pendurou um disco nas costas de cada um. O sábio iria retirar a venda dos olhos de cada príncipe e aquele que descobrisse a cor do disco em suas costas vencerá o desafio e se casará com a princesa.
(EF06MA03) Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	**Capítulo 32: "**Problema da pérola mais leve": Havia 8 pérolas, das quais 1 era mais leve. Usando uma balança de dois pratos, como determinar qual a pérola mais leve realiazando apenas duas pesagens?
(EF06MA03) Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	**Capítulo 33:** O califa desafiou Beremiz Samir, o homem que calculava, a encontrar a solução para um curioso problema: o califa tinha 5 escravas: 2 tinham olhos negros e 3 tinham olhos azuis. As escravas que tinham olhos negros sempre diziam a verdade, mas as escravas que tinham olhos azuis nunca diziam a verdade e todas tinham os rostos cobertos por véu. Fazendo apenas 3 perguntas, uma para cada uma das 3 garotas escolhidas pelo próprio calculista, deveria descobrir, com apenas 3 respostas, as cores dos olhos das 5 escravas.

3 Sobre o problema dos quatro quatros

No livro “O homem que calculava”, Malba Tahan apresenta no capítulo sete o problema com o título “o caso dos quatro quatros”. O problema é o seguinte:

O problema dos quatro quatros *Mediante a história que se desenrola, uma das personagens, Beremiz, o calculista, interessou-se por um elegante turbante azul claro que um sírio, meio corcunda, oferecia por 4 dinares. A tenda desse mercador era, aliás, muito original, pois tudo ali (turbantes, caixas, punhais, pulseiras, etc.) era vendido por 4 dinares. Havia um letreiro, em letras vistosas, que dizia: “Os Quatro Quatros”. Uma espantosa coincidência, digna de atenção, pois a legenda que figura nesse letreiro recorda uma das maravilhas do cálculo: podemos formar um número qualquer empregando apenas quatro quatros.*

Daí por diante, a história apresenta algumas soluções para o enigma em questão, iniciando no zero, a mais simples das expressões, como

$$0 = 44 - 44.$$

De seguida é apresentado, no texto, o número 1, em forma de fração

$$1 = \frac{44}{44}.$$

Depois o número 2, como a soma das duas frações formadas por numerador e denominador iguais a 4, ou seja,

$$2 = (4/4) + (4/4).$$

Logo após o número 3, dado pela expressão:

$$3 = (4 + 4 + 4)/4.$$

O número 4 é expresso por

$$4 = 4 + (4 - 4)/4.$$

Os números a seguir do 5 e até ao 10, são expressos por:

$$(4 \times 4 + 4)/4 = 5$$

$$4 + ((4 + 4)/4) = 6$$

$$(44/4) - 4 = 7$$

$$4 + 4 + 4 - 4 = 8$$
$$4 + 4 + (4/4) = 9$$
$$(44 - 4)/4 = 10.$$

Nesse dado momento, o dono da tenda, que até então estivera a acompanhar a explicação do calculista em respeitoso silêncio e interesse, resolve, observando o quão exímio era nas contas e nos cálculos, dar ao calculista o turbante de presente.

Neste capítulo pretende-se apresentar algumas formas para escrever outros números. O capítulo foi escrito usando como referência Melo (2014). Em seu texto a autora escreve sobre o problema dos quatro quatros.

Segundo Malba Tahan, podemos expressar todos os números inteiros entre 0 e 100, utilizando apenas quatro 4, ou a sua concatenação, por exemplo, 44, ou 444, e as quatro operações aritméticas elementares: adição (+), subtração (−), multiplicação (×) e divisão (/). No entanto, também podemos utilizar alguns símbolos matemáticos. Esses símbolos são: o símbolo de fatorial (!), em que $4! = 24$; o símbolo da raiz quadrada, onde $\sqrt{4} = 2$, e a potenciação, no qual $4^4 = 256$, o que corresponde a $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$.

Por vezes utilizam-se outros símbolos e sinais matemáticos para podermos atingir o propósito do problema, tais como o logaritmo e i que é a unidade imaginária que corresponde a $\sqrt{-1}$.

Relembrando um pouco o que representa o fatorial (!), temos que na matemática o fatorial de um número natural n, representado por $n!$, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Essa notação, $n!$, foi introduzida pelo matemático francês Christian Kramp (8/7/1760 – 13/5/1826) em 1808.

Na Seção 3 deste texto, apresentamos a solução do problema dos quatro quatros para os números de 0 a 10. Vamos ver como podemos solucioná-lo para os valores entre 11 e 20, mas, para tal, iremos recorrer aos símbolos de fatorial (!) e de raiz quadrada $\sqrt{}$.

Por exemplo, o número 11 é igual ao quociente da divisão de 44 pela raiz quadrada do produto de 4 multiplicado por 4, ou seja,

$$11 = \frac{44}{\sqrt{4 \times 4}} = \frac{44}{4}.$$

Na sequência tem-se:

$$12 = \frac{44 + 4}{4}.$$
$$13 = 4! - \frac{44}{4}.$$
$$14 = 4 + 4 + 4 + \sqrt{4}.$$
$$15 = 4 + \frac{44}{4}.$$
$$16 = (\sqrt{4})^4 + 4 - 4.$$
$$17 = 4! - \frac{4! + 4}{4}.$$
$$18 = \frac{4! + 4! + 4!}{4}.$$

$$19 = 4! - 4 - \frac{4}{4}.$$

$$20 = ((4/4) + 4) \times 4.$$

Como curiosidade apresentaremos alguns números primos que resultam de expressões aritméticas interessantes. Os números primos compreendidos entre 0 e 100 são:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Assim, iniciamos pelo número 23 que é igual a

$$23 = 4! - 4^{4-4}$$

pois como $4! = 24$ e $4^0 = 1$ temos $23 = 24 - 1$.

O próximo primo é o número 29 que é igual a expressão

$$29 = 4! + 4 + (4/4)$$

ou seja, $24 + 4 + 1$.

O número 31 é expresso por

$$31 = \frac{(4 + \sqrt{4})! + 4!}{4!}.$$

Essa expressão corresponde a divisão de $(4+2)! + 4!$ por $4!$, resultando $(6! + 4!)/4!$ que é igual a 31.

Finalizamos essa informação com o primo 53 que utiliza o símbolo i, representativo da unidade imaginária. Assim,

$$53 = (4! \times \sqrt{4}) + 4 + (i^4),$$

ou seja, $24 \times 2 + 4 + (1) = 48 + 4 + 1 = 53$.

Muitos se entusiasmaram e têm tentado resolver este problema para além do pretendido. Uma solução geral para este problema foi proposta por Rui Chamas e Roger Chamas.

$$n = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} \left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{4}}}}}_{n \text{ raízes quadradas}} \right) \tag{3.1}$$

Para $n = 1$ tem-se:

$$1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^1} \right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} \left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^1} \right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} (\log_4 \sqrt{4}). \tag{3.2}$$

Para $n = 2$ tem-se:

$$2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} \left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} (\log_4 \sqrt{\sqrt{4}}). \tag{3.3}$$

Para n qualquer tem-se:

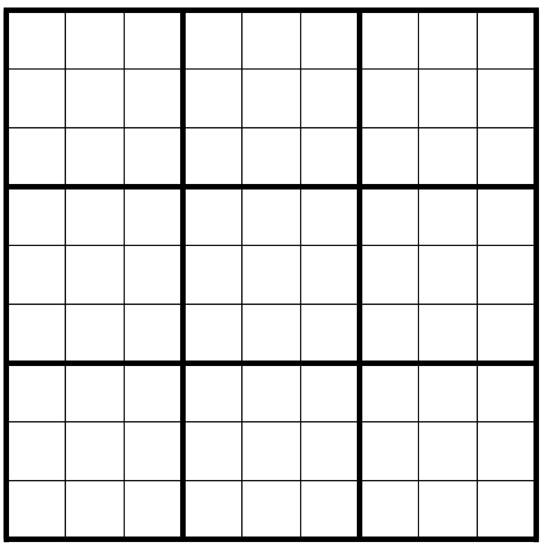
$$\begin{aligned} n &= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} \left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \right) \\ &= \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} \left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{4}}}}}_{n \text{ raízes quadradas}} \right). \end{aligned}$$

Por fim, é importante mencionar que o modo de escrever os números usando 4 algarismos 4 e algumas operações aritmética não é único. Por exemplo, em `http://www.geomatica.eng.uerj.br/docentes/araujo/os_4_4s` e em `https://paulbourke.net/fun/4444/` podemos observar outras formas de escrita para os números.

4 Sobre o jogo do Sudoku

De acordo com as informações da University Cornell[1] o jogo em sua forma atual foi inventado pelo americano Howard Garns em 1979 e publicado pela Dell Magazines como *"Numbers in Place"*. Em 1984, Maki Kaji, do Japão, publicou-o na revista de sua empresa de quebra-cabeças, Nikoli. Ele deu ao jogo o nome moderno de *Sudoku*, que significa "Números Únicos".

Herzberg e Murty (2007) afirmam que o Sudoku se tornou um quebra-cabeça muito popular e muitos jornais o publicam diariamente. Na sua versão padrão o Sudoku consiste em uma grade quadrada 9×9, ou seja, com 81 entradas (quadradinhos) e com algumas destas entradas preenchidas com números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. O objetivo do jogo é completar toda grade de tal forma que cada linha, cada coluna e cada uma das nove sub-grades 3×3 contenha cada número exatamente uma vez. O Sudoku 9×9 e suas sub-grades é apresentado na imagem abaixo.



Ainda de acordo com as informações da University Cornell, para resolver um Sudoku não é necessária nenhuma aritmética, pois quaisquer nove símbolos serviriam para criar e resolver os quebra-cabeças. Para sua solução, é útil o pensamento matemático na forma de dedução lógica.

Herzberg e Murty (2007) escrevem que para quem tenta resolver um quebra-cabeça de Sudoku, diversas questões surgem naturalmente: Para um determinado quebra-cabeça, existe uma solução? Se a solução existir, ela é única? Se a solução não for única, quantas soluções existem? Além disso, existe uma forma sistemática de determinar todas as soluções? Quantos quebra-cabeças existem com uma solução única? Qual é o número

[1]Site disponíel em: `https://pi.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Mahmood/Intro.html`

mínimo de entradas que podem ser especificadas em um único quebra-cabeça para garantir uma solução única?

Neste texto, vamos nos ater somente à última pergunta, ou seja: qual é o número mínimo de entradas (pistas) que podem ser especificadas em um único quebra-cabeça para garantir uma solução única (ou seja, que o Sudoku seja válido)?

Para isto, neste capítulo estudou-se o artigo de Martins e Picado (2012). Em seu texto os autores discutem o recente problema sobre o número mínimo de pistas de um Sudoku, um problema importante no estudo matemático do Sudoku, que se manteve em aberto por muitos anos. Antes vamos contar a quantidade de grades que temos para um Sudoku.

4.1 Quantidade de grades completas para um Sudoku

Caso 4×4**.** Qual a quantidade de grades completas para um Sudoku[2] 4×4?

Considere a disposição dos números de 1 a 4 no primeiro sub-bloco do sudoku. Da teoria de análise combinatória sabe-se que temos 4! maneiras de dispor 4 dígitos nas quatro entradas do primeiro bloco. Considere a disposição conforme a Figura 4.1.

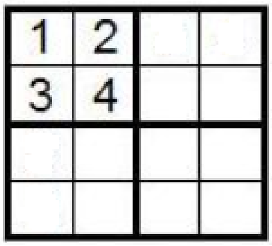


Figura 4.1: Sudoku 4×4
Fonte: `https://pi.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Mahmood/Four.html`, adaptada pela autora.

Assim, para as entradas restantes na primeira linha existem 2 maneiras de inserir os números 3 e 4. Da mesma forma, para as entradas restantes na primeira coluna, existem 2 maneiras de inserir os números 2 e 4. Desta forma, a contagem de grades distintas é: $4! \times 2 \times 2$. Considere a disposição conforme a Figura 4.2.

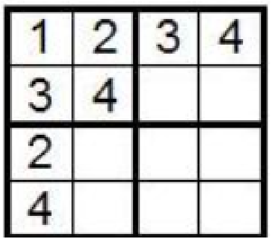


Figura 4.2: Sudoku 4×4
Fonte: https://pi.math.cornell.edu/ mec/Summer2009/Mahmood/Four.html

Observe que na terceira linha já temos o número 2 e na terceira coluna já temos o número 3. Assim, para a posição $(3, 3)$ restam os números 1 e 4. Mas para garantir a regra de preenchimento das grades, este número deve ser 4. Caso fosse 1, o 4 deveria

[2] De acordo com Rosenhouse e Taalman (2011) quando se tem um jogo com sub-blocos 2×2 ele é chamado de Shidoku.

ir para a posição $(4,4)$, o que daria um absurdo. Como o número 4 já está presente na quarta linha e quarta coluna, na posição $(4,4)$ pode ser inserido os números 1, 2 e 3. Ou seja, 3 possibilidades. Assim, a quantidade de grelhas completas para o sudoku 4×4 é

$$4! \times 2 \times 2 \times 3 = 288.$$

Caso 9×9**.** Qual a quantidade de grades completas para um Sudoku 9×9?

De acordo com Rosenhouse e Taalman (2011) este problema foi primeiro resolvido por Felgenhauer e Jarvis. Passamos agora a utilizar esta referência para esta seção. Para apresentar esta solução deste problema, Rosenhouse e Taalman (2011) consideram os sub-blocos 3×3, de um sudoku 9×9 e, como feito no caso anterior, relacionando os dígitos no primeiro sub-bloco da forma como está representado na Figura 4.3.

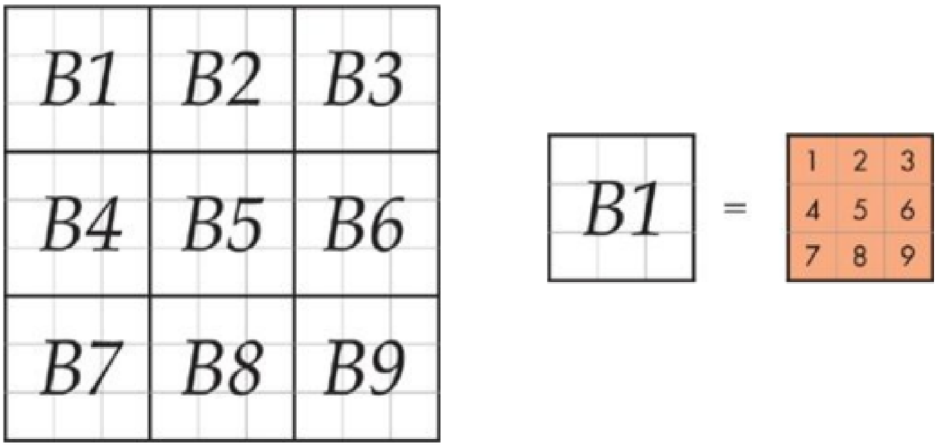


Figura 4.3: Sudoku 9×9 com sub-blocos
Fonte: Rosenhouse e Taalman (2011)

Note que existem $9! = 362.880$ maneiras de obter o preenchimento de $B1$. Considerando $B1$ conforme na Figura 4.3 como podemos preencher $B2$ e $B3$? Quais números que poderiam ficar na linha superior de $B2$? Temos as seguintes possibilidades:

1(a). A linha superior de $B2$ é algum arranjo dos três números da linha 2 de $B21$ (ou seja, 4, 5, 6 em alguma ordem).

1(b). A linha superior de $B2$ é algum arranjo dos três números da linha 3 de $B1$ (ou seja, 7, 8, 9 em alguma ordem) e

2. A linha superior de $B2$ é uma mistura de números retirados das linhas 2 e 3 de $B1$ (por exemplo, 4, 5, 7 em alguma ordem ou 5, 7, 9 em alguma ordem).

Nos casos 1(a) e 1(b) existem apenas duas possibilidades para os dígitos que aparecem nas linhas superiores dos blocos $B2$ e $B3$. Primeiro, suponha que a linha superior do bloco $B2$ seja uma permutação de $\{4,5,6\}$; então a linha superior do bloco $B3$ deve ser alguma permutação de $\{7,8,9\}$. Na verdade, podemos dizer mais; nesta situação, também sabemos como preencher a segunda e terceira linhas de $B2$ e $B3$ até as permutações. As três primeiras linhas do Sudoku ficarão conforme a Figura 4.4.

Assim, mantendo $B1$ conforme sugerido, podemos definir uma contagem para as três primeiras linhas, ou seja, para completar $B2$ e $B3$ que são 6 pequenas regiões 3×1 para

1	2	3	{4,5,6}	{7,8,9}
4	5	6	{7,8,9}	{1,2,3}
7	8	9	{1,2,3}	{4,5,6}

Figura 4.4: Sub-blocos superiores do Sudoku 9×9 para contagem do caso 1
Fonte: Rosenhouse e Taalman (2011)

serem preenchidas com algarismos, o que resulta num total de $(3!)^6$ possibilidades. Assim, nosso primeiro princípio de contagem determina que há

$$2 \times (3!)^6 = 93.312$$

possibilidade de preencher os blocos $B2$ e $B3$ nos casos 1(a) e 1(b).

Agora vamos contar as possibilidades do caso 2. Para isso, suponha que o primeiro bloco seja preenchido conforme mostrado na Figura 4.5, a primeira linha de $B2$ seja uma permutação de $\{4, 5, 7\}$ e a primeira linha de $B3$ seja uma permutação de $\{6, 8, 9\}$. Nessas condições, de quantas maneiras possíveis as três primeiras linhas podem ser completadas?

1	2	3	{4,5,7}			{6,8,9}		
4	5	6						
7	8	9						

Figura 4.5: Sub-blocos superiores do Sudoku 9×9 para contagem do caso 2
Fonte: Rosenhouse e Taalman (2011)

São 3! maneiras de ordenar $\{4, 5, 7\}$ na primeira linha de $B2$ e 3! maneiras de ordenar $\{6, 8, 9\}$ na primeira linha de $B3$. Considerando o fato de que cada dígito pode aparecer apenas uma vez em cada linha, coluna e bloco, as três primeiras linhas devem ser mais ou menos como na Figura 4.6 (novamente usando a notação de conjunto para indicar que os números aparecem em alguma ordem não especificada):

1	2	3	{4,5,7}	{6,8,9}
4	5	6	{8,9,?}	{7,?,?}
7	8	9	{6,?,?}	{4,5,?}

Figura 4.6: Sub-blocos superiores do Sudoku 9×9 - possibilidades do caso 2
Fonte: Rosenhouse e Taalman (2011)

Precisamos colocar os números 1, 2 e 3 nas células marcadas com pontos de interrogação. Tudo o que vai para o ponto de interrogação azul na segunda linha também deve ir para o ponto de interrogação azul na terceira linha, enquanto os dois dígitos restantes devem ir para as células com pontos de interrogação vermelhos. Existem três maneiras de escolher qual dos dígitos 1, 2 e 3 será reservado para o ponto de interrogação azul.

Portanto, dados $\{4, 5, 7\}$ e $\{6, 8, 9\}$ na primeira linha, o preenchimento das três primeiras linhas requer mais duas etapas:

1. Coloque um dos números 1, 2, 3 nas células indicadas pelo ponto de interrogação azul. Feita essa escolha, os valores numéricos dos pontos de interrogação vermelhos estão agora determinados. Existem três maneiras de realizar esta etapa – uma maneira para cada escolha do ponto de interrogação azul.

2. Devemos agora escolher uma ordem para cada uma das seis linhas de $B2$ e $B3$. Em cada linha temos 3! maneiras para escolher. Assim, ordenar todas as linhas envolve fazer seis escolhas, cada uma das quais pode ser feita de três maneiras diferentes. Segue-se que esta etapa pode ser realizada de $(3!)^6$ maneiras.

Concluímos assim, que existem $3 \times (3!)^6$ maneiras de preencher as três primeiras linhas no caso 2.

Todos os cenários do caso 2 seguem esse padrão? Na verdade sim. Em qualquer caso, no cenário 2, devemos preencher a primeira linha de $B2$ com três dígitos de 4 a 9, sem escolher $\{4, 5, 6\}$ ou $\{7, 8, 9\}$. Listar todas as maneiras de fazer isso não é difícil: para a primeira linha de $B2$ poderíamos escolher $\{4, 5, 6\}$ como acima, ou $\{4, 5, 8\}$, $\{4, 5, 9\}$ ou $\{5, 6, 7\}$ e assim por diante. Se você listar todas as possibilidades, descobrirá que existem dezoito maneiras de escolher três dígitos para a primeira linha do caso 2 de $B2$. Cada uma dessas escolhas envolve dois dígitos da segunda linha de $B1$ e um dígito da terceira linha de $B1$, ou vice-versa. Isto significa que o padrão geral que investigamos será válido para todas as possibilidades de caso 2. Portanto há um total de

$$18 \times 3 \times (3!)^6 = 2.519.424$$

maneiras de preencher os blocos $B2$ e $B3$ no caso 2. Combinar isso com nossas descobertas para o caso 1 mostra que existem

$$93.312 + 2.519.424 = 2.612.736$$

formas de preencher as três primeiras linhas de um quadrado de Sudoku cujo primeiro bloco $B1$ está na forma padrão da Figura 4.3. Considerando que são 9! formas de preencher o primeiro bloco, e que cada uma delas é equivalente ao caso que examinamos acima, vemos que existem

$$2.612.736 \times 9! = 948.109.639.680$$

maneiras de preencher as três primeiras linhas de um tabuleiro de Sudoku.

Agora faltam as 6 últimas linhas do Sudoku para obtermos a quantidade de grelhas completas para o sudoku 9×9.

O argumento heurístico é o seguinte: sabemos de quantas maneiras podemos preencher as entradas das três primeiras linhas de um quadrado de Sudoku. O mesmo argumento se aplica às linhas 4–6 e 7–9. Consequentemente, o número de maneiras de preencher uma grade 9×9 de modo que cada bloco e cada linha contenha os dígitos de 1 a 9 exatamente uma vez é dado por $(948.109.639.680)^3$. Observe que este número não leva em consideração nenhuma condição nas colunas.

O número de maneiras pelas quais uma grade 9×9 poderia satisfazer tanto a condição do bloco quanto a condição da coluna também é dado por $(948.109.639.680)^3$. Nós simplesmente usamos o mesmo argumento virando a grade noventa graus.

Agora pense por um momento em quantas maneiras um quadrado 9×9 poderia satisfazer apenas a condição de bloco. Nossa única preocupação aqui é que os números de 1 a 9 apareçam exatamente uma vez em cada bloco. São 9! maneiras de colocar os números de 1 a 9 em um bloco e, portanto, $(9!)^9$ maneiras diferentes de preencher um quadrado 9×9 com cada número aparecendo exatamente uma vez em cada bloco.

Juntando esses fatos, vemos que a probabilidade de um quadrado compatível com bloco 9×9 também ser compatível com linha é dada por

$$k = \frac{(948.109.639.680)^3}{(9!)^9}.$$

É claro que o número k também é a probabilidade de que um quadrado compatível com bloco 9×9 também seja compatível com coluna.

Existe um princípio básico de probabilidade de que se dois eventos são independentes um do outro, então a probabilidade de ambos ocorrerem é encontrada multiplicando-se as probabilidades dos eventos individuais. Agora, se as condições de linha e coluna fossem independentes, poderíamos usar este princípio para calcular o número de quadrados do Sudoku. Esse é um grande "se", mas vamos continuar por um momento.

Imagine selecionar um quadrado aleatório de 9×9 que satisfaça a condição do bloco. A probabilidade de ser compatível com a coluna também é k. Portanto, a probabilidade de que seja compatível com linhas e colunas é dada por k^2, desde que essas probabilidades sejam realmente independentes.

Continuando a assumir a independência das condições de linha e coluna, poderíamos calcular o número total de quadrados de Sudoku multiplicando o número total de quadrados compatíveis com blocos pela probabilidade de que um tal quadrado selecionado aleatoriamente seja compatível com linhas e colunas. Ou seja, o número total de quadrados do Sudoku seria dado por

$$(9!)^9 \times k^2 = (9!)^9 \times \left(\frac{(948.109.639.680)^3}{(9!)^9}\right)^2 \approx 6,6571 \times 10^{21}.$$

4.2 O problema do número mínimo de pistas

Como descrevemos acima, o sudoku 9×9 é uma grelha que possui 81 entradas e, algumas destas estão preenchidos com algarismos (as pistas) de 1 a 9. A quantidade de pistas determina o grau de dificuldade do jogo, sendo mais difíceis os jogos com um número reduzido de pistas.

Além da dificuldade do jogo, o número de pistas também determina se ele é válido, ou seja, a forma de preencher todos os quadrados da grelha é única. Se diminuímos muito o número de pistas corremos o risco do jogo passar a ter várias soluções, deixando de ser válido.

Por exemplo, o Sudoku abaixo possui 16 pistas e não é um jogo válido, pois admite duas soluções (trocando entre si os 8's e os 9's, como mostrado nas soluções 1 e 2).

5		2				4		
			7	1				3
					4	6		
	7		2					
	1							
6					2			
				3			1	
4								

Sudoku com 16 pistas

5	6	2	3	8	9	4	7	1
8	4	9	7	1	6	2	5	3
1	3	7	4	2	5	8	9	6
3	5	8	1	9	4	6	2	7
9	7	4	2	6	3	1	8	5
2	1	6	8	5	7	3	4	9
6	9	1	5	4	2	7	3	8
7	2	5	6	3	8	9	1	4
4	8	3	9	7	1	5	6	2

Solução 1

5		2				4		
			7	1				3
					4	6		
	7		2					
	1							
6					2			
				3			1	
4								

Sudoku com 16 pistas

5	6	2	3	9	8	4	7	1
9	4	8	7	1	6	2	5	3
1	3	7	4	2	5	9	8	6
3	5	9	1	8	4	6	2	7
8	7	4	2	6	3	1	9	5
2	1	6	9	5	7	3	4	8
6	8	1	5	4	2	7	3	9
7	2	5	6	3	9	8	1	4
4	9	3	8	7	1	5	6	2

Solução 2

O problema muito conhecido por estar em aberto há muito tempo é habitualmente formulado na seguinte forma:

Problema: Qual o número mínimo P de pistas que um jogo de Sudoku deve ter para que seja válido?

Não é difícil concluir que

$$P \leq 17 \tag{4.1}$$

pois existem exemplos, como o apresentado a seguir, de um puzzle válido com 17 pistas.

			8		1			
							4	3
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

Sudoku com 17 pistas

2	3	7	8	4	1	5	6	9
1	8	6	7	9	5	2	4	3
5	9	4	3	2	6	7	1	8
3	1	5	6	7	4	8	9	2
4	6	9	5	8	2	1	3	7
7	2	8	1	3	9	4	5	6
6	4	2	9	1	8	3	7	5
8	5	3	4	6	7	9	2	1
9	7	1	2	5	3	6	8	4

Solução única

Podemos reduzir o limite superior de P para 16? Até hoje ninguém encontrou nenhum exemplo de um puzzle válido com 16 pistas. O melhor que se conseguiu foi encontrar exemplos (como o apresentado acima), com 16 pistas e exatamente duas soluções, o que motivou a seguinte conjectura:

Conjectura[3]: $P = 17$.

[3]Atenção: isto não significa que todos os sudokus contenham um puzzle válido com 17 pistas — de fato, só uns poucos contêm —; significa que nenhum sudoku contém um puzzle válido com 16 pistas.

Há muitas discussões sobre esta conjectura. Em particular, tem-se tentado resolver o problema usando somente matemática (sem a ajuda de computadores), mas essas tentativas têm-se revelado infrutíferas. Com efeito, é mais fácil concluir que um puzzle com 7 pistas terá sempre múltiplas soluções (porque dois dos algarismos em falta nas pistas podem ser sempre trocados entre si em qualquer solução), mas quando passamos para 8 pistas já parece ser muito difícil encontrar um argumento teórico que justifique o fato do puzzle continuar a ter múltiplas soluções. Pior ainda será com 16 pistas!

O algoritmo óbvio de pesquisa exaustiva, dentro de um dado Sudoku, de um conjunto de 16 pistas que constituem um puzzle válido, testa todos os subconjuntos de cardinal 16 do Sudoku dado, à procura de um que tenha o Sudoku inicial como solução única. Claro que esta estratégia conduz à solução do problema, mas parece ser impraticável. De fato, só a pesquisa numa grelha completa de Sudoku já consumirá muito tempo, pois o número de subconjuntos de cardinal 16 num conjunto com 81 elementos é igual a:

$$\binom{81}{16} \approx 3,4 \times 10^{16}. \tag{4.2}$$

Mas não temos que testar só uma grelha. Conforme vimos anteriormente, existem:

$$6.670.903.752.021.072.936.960 \approx 6,7 \times 10^{21} \tag{4.3}$$

grelhas completas de Sudoku! Claro que não é necessário analisar todas elas. Por exemplo, não alteramos a natureza do Sudoku se permutarmos os seus algarismos, pois é evidente que a grelha depois de permutada conterá um puzzle com 16 pistas se e só se a grelha inicial contém um puzzle com 16 pistas (podemos até usar quaisquer 9 símbolos para representar os diferentes algarismos). Além da numeração da grelha, podemos aplicar outras transformações de equivalência que não alteram a natureza da grelha:

- Permutações: das filas dentro de cada bloco ou dos blocos (um bloco e linhas - ou colunas - é o conjunto de linhas ou colunas 1-3, 4-6 ou 7-9.
- Transposição da grelha.

Estas transformações de equivalência, com a operação de concatenação, formam um grupo. Diz-se que dois Sudokus são equivalentes se um se pode obter do outro por uma sequência de transformações de equivalência (ou seja, por um elemento daquele grupo). Trata-se de uma relação de equivalência e é fácil provar que:

Um Sudoku contém um puzzle válido com 16 pistas se e só se todos os sudokus a ele equivalentes contém um puzzle válido com 16 pistas.

Então, será suficiente realizar a pesquisa num conjunto de representantes de todas as classes desta relação de equivalência. Contudo, mesmo após essa redução, o número de grelhas continua a ser muito grande: $3,4 \times 10^{16}$ grelhas com 16 algarismos contidas em cada um destes 5.472.730.538 Sudokus. Os detalhes desta afirmação estão em Martins e Picado (2012). Esta estratégia de resolução tem esbarrado sempre na complexidade computacional da tarefa. De acordo com os autores, no ano de 2011 esta conjectura foi resolvida por Gary McGuire, Bastian Tufemann e Gilles Civario, analisando matematicamente os chamados conjuntos inevitáveis de pistas que lhes permitiu reduzir muito o número de casos a pesquisar, obtendo a solução em tempo útil. A prova foi realizada com a ajuda de um novo algoritmo e de mais de 7 milhões de horas de trabalho computacional realizado por alguns supercomputadores ao longo de todo o ano de 2011.

4.2.1 Variante do problema

A solução do problema oposto ao problema do número mínimo de pistas (que é a determinação do número máximo de chaves que não garante uma solução única) é bem conhecida: 77.

De fato, é muito fácil ver que com 80, 79 ou 78 pistas dadas, existindo solução, esta é a única. Mas o mesmo já não se pode garantir para 77 pistas, como o exemplo da Tabela 4.7 e as duas soluções.

		3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
		4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

$^{1}2$	$^{2}1$	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
$^{2}1$	$^{1}2$	4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

Figura 4.7: Puzzle com 77 pistas e duas soluções
Fonte: Martins e Picado (2012)

5 Matemática recreativa: uma experiência

Neste capítulo apresenta-se como foi desenvolvido a aplicação de dois jogos para estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo.

O primeiro jogo refere-se ao problema dos quatro quatros. Ele foi aplicado na sala de aula uma turma de 25 alunos durante o horário escolar. O propósito era apresentar o livro "O homem que calculava aos alunos" e, através deste problema, reforçar as operações matemáticas, bem como a forma de resolver expressões matemáticas.

O segundo jogo refere-se ao Sudoku. Ele foi aplicado a 4 alunos em uma aula extra-classe de tutoria escolar. A aula de tutoria é um processo de interação entre o professor e seus alunos, no intuito de orientá-los quanto a sua formação integral, com vistas ao seu pleno desenvolvimento nas dimensões pessoal, acadêmica e profissional. O objetivo do jogo neste caso, foi contribuir para a formação do pensamento matemático deste grupo de estudantes.

5.1 Jogo na sala de aula: o problema dos quatro quatros

Objetivo Demonstrar domínio nas quatro operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação e divisão), no uso da raiz quadrada e resolução de expressões numéricas que apresentem sinais de associação (parênteses, colchetes e chaves).

Organização e perfil dos estudantes Participaram das atividades propostas 25 alunos do 6º ano C, do Programa de Ensino Integral Dr Maximiliano Baruto, na cidade de Araras-SP. Eles foram organizados em cinco grupos com cinco alunos em cada grupo para que realizassem a atividade de forma colaborativa. É importante dizer que alguns alunos desta sala necessitam de Atendimento Educacional Especializado.

Tempo de duração 90 minutos (duas aulas seguidas).

Descrição da atividade: O professor-pesquisador apresentou aos alunos o livro "O homem que calculava". Em especial, o capítulo do livro que refere-se ao Problema dos Quatro Quatros:

Alguns dias depois, encerrados os trabalhos que Beremiz e o mercador faziam no palácio do vizir, foram dar um giro pelo Suque e pelos jardins de Bagdá. A cidade apresentava, naquela tarde, um movimento intenso, febril, fora do comum. É que, pela manhã, haviam chegado duas ricas caravanas de Damasco. [...] Interessou-se Beremiz por um elegante e harmonioso turbante azul-claro que um sírio, meio corcunda, oferecia por 4 dinares. A tenda desse mercador era, aliás, muito original, pois tudo ali era vendido por 4 dinares. Mas o que impressionava o Calculista era que a tenda era intitulada Os Quatro Quatros. [...] a legenda que figura nesse quadro recorda uma das maravilhas do Cálculo: podemos formar um número qualquer empregando quatro quatros! (TAHAN, 2008, p. 43-51)

Em seguida, foi entregue para as crianças uma folha com o problema apresentado da seguinte forma:

Escreva cada um dos números de 0 a 10 utilizando apenas quatro algarismos 4. Para obter cada um dos números, escreva expressões numéricas utilizando os símbolos das quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) quantas vezes forem necessárias. Além disso, se deseja, utilize a raiz quadrada.

A professora pesquisadora, após realizar a leitura do problema com os estudantes, apresentou na lousa alguns exemplos. Além disso, houve a explicação das operações matemáticas que poderiam ser utilizadas e incluída a explicação sobre a raiz quadrada. Além disso, mencionou que poderiam utilizar de sinais de associação, como o parênteses, para resolução correta das expressões. Na Figura 5.1 é possível ver a aplicação do jogo pela professora pesquisadora em sala de aula e um dos exemplos feito na lousa para explicar como seria a resolução da atividade.

Figura 5.1: Jogo em sala de aula
Fonte: Autor

Percepções: Durante a execução da atividade pelos grupos, a professora-pesquisador seguiu observando os cálculos e as considerações que os alunos faziam. Pode ser observado a empolgação e o interesse dos estudantes durante a atividade. No decorrer, os alunos perceberam que haveria a necessidade da utilização de sinais de associação, por exemplo, o parênteses para obter o resultado esperado, evitando que o conjunto dos números inteiros fosse acessado, pois nesta faixa escolar este conjunto ainda não foi estudado. Outro aspecto observado, é quanto a ordem de resolução nas expressões numéricas. Algumas intervenções do professor-pesquisador foi necessária para que os estudantes descartassem o uso da potenciação e considerasse o uso da raiz quadrada para conseguir chegar aos resultados.

Algumas expressões foram encontradas rapidamente, enquanto outras, como por exemplo, as do 7 e 10, precisaram de muita atenção com tentativas para manipulação das operações aritméticas, pois a maioria dos alunos não utilizaram a concatenação do 4, ou seja, o utilizaram de forma isolada. Durante a execução, foi orientado pelo professor-pesquisador que os estudantes observassem seus registros, pois em alguns casos ao efetuaram as operações o resultado era um número do conjunto dos números inteiros, ainda não estudado pelos alunos desse sexto ano. Vejamos as soluções encontradas em cada grupo:

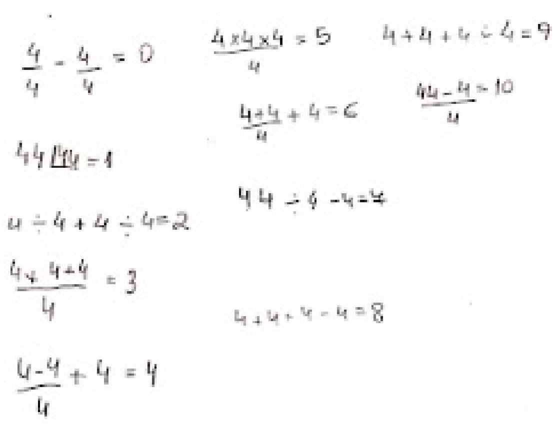


Figura 5.2: Resolução do grupo A

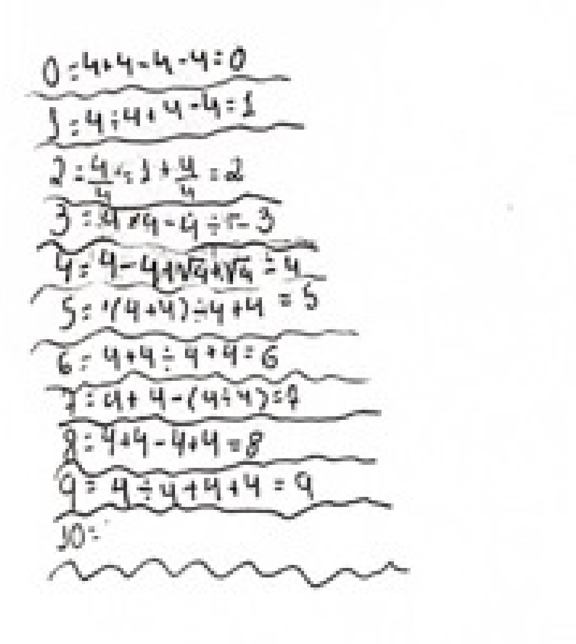


Figura 5.3: Resolução do grupo B

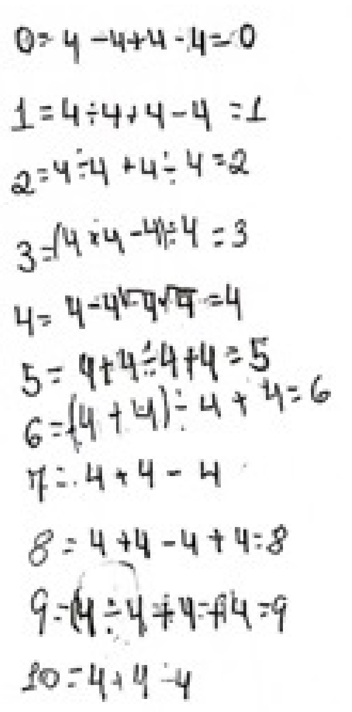


Figura 5.4: Resolução do grupo C

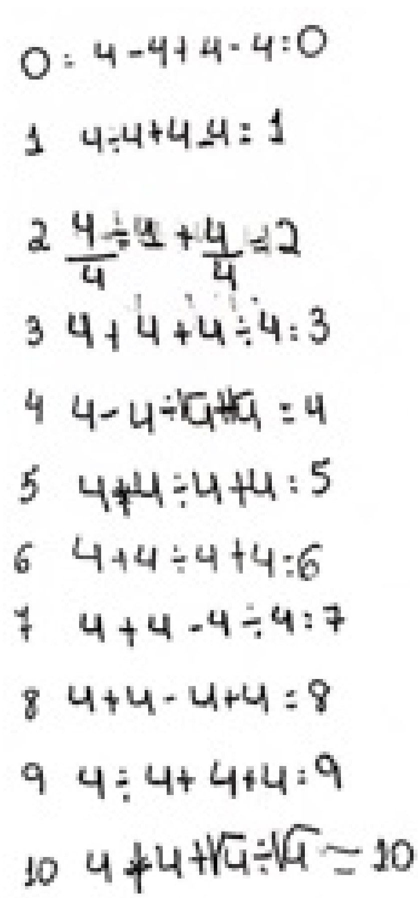


Figura 5.5: Resolução do grupo D

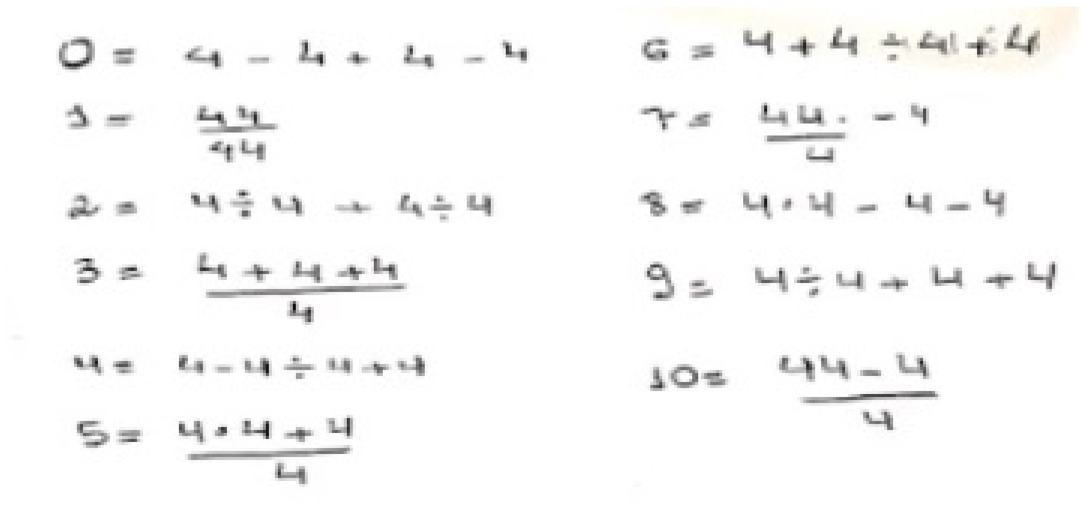


Figura 5.6: Resolução do grupo E.
Fonte: Autor

De forma geral, os alunos do grupo A preferiram trabalhar com frações e foi o grupo que finalizou primeiro a atividade. Para obtenção do número zero, a maioria dos alunos utilizou a expressão $4 - 4 + 4 - 4 = 0$. Os grupos A e E apresentaram a mesma solução para o número 10. Para a obtenção do número 2, dentre os grupos pode-se observar duas resoluções: uma sem sinais de associação e a outra com. Os alunos do grupo C não encontraram solução para os números 7 e 10. Alguns alunos apresentaram dificuldade para obtenção do número 5 e, muitos alunos não utilizaram o sinal de parênteses, necessários nas expressões.

Ao final da atividade a professora-pesquisadora fez algumas soluções na lousa, para explicar que existem diversas possibilidades para obter os algarismos procurados.

5.2 Jogo em aula de tutoria: Sudoku

Objetivo Demonstrar habilidade com cálculos mentais e aumentar o raciocínio lógico.

Organização e perfil dos estudantes As atividades de Sudoku foram aplicadas durante a aula de tutoria da professora-pesquisadora. Participaram desta atividade 4 estudantes sendo um deles com necessidade de Atendimento Educacional Especializado.

Tempo de duração A atividade se desenvolveu durante três aulas de 45 minutos sendo uma aula por semana.

Descrição da atividade: O professor-pesquisador apresentou aos alunos três tipos de sudoku, um em cada semana da atividade.

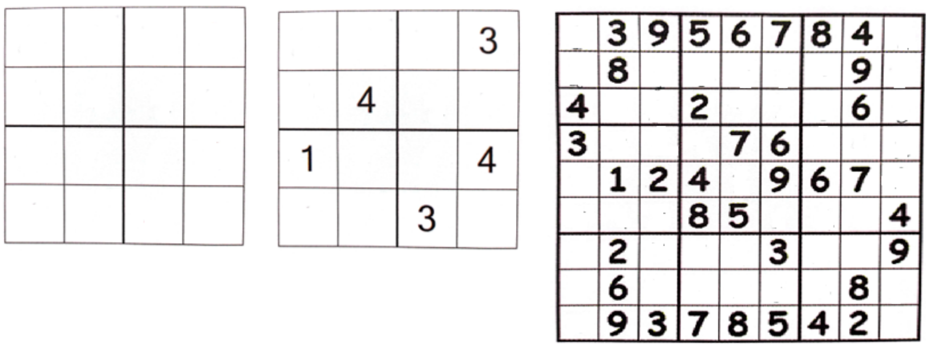


Figura 5.7: Atividades do Sudoku em cada semana.
Fonte: Autor

Na Figura 5.7 apresenta-se os três sudokus propostos. Na primeira semana foi proposto uma grelha 4×4, ou seja, com 16 quadrados e sem nenhuma dica. Na segunda semana um sudoku com 16 quadrados e na terceira semana com 81 quadrados. Em cada semana foi explicado aos alunos que o propósito da atividade. No caso da primeira e segunda semana, o objetivo era preencher os espaços com números de 1 até 4; no entanto, a regra era que em cada linha e cada coluna os números aparecessem uma única vez, ou seja, não poderiam se repetir. Na terceira semana, deveria-se completar os espaços usando algarismos de 1 a 9 com a mesma regra, ou seja, em cada linha e cada coluna os números aparecessem uma única vez, ou seja, não poderiam se repetir.

Na primeira atividade os alunos realizaram durante a aula de tutoria. Eles foram encorajados a trabalhar sozinhos, sem intervenções ou ajuda do professor pesquisador ou dos colegas. O objetivo foi comparar, ao final da atividade, como ficou o quadro preenchido de cada estudante para argumentar junto aos estudantes que esta atividade

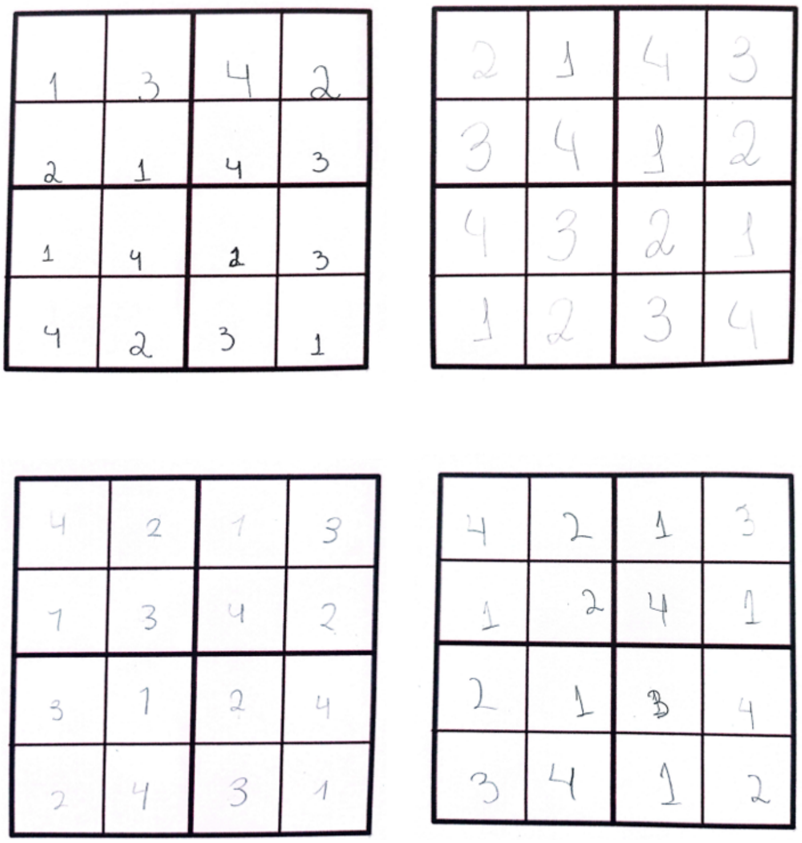


Figura 5.8: Atividades do Sudoku sem dicas realizada por alguns estudantes.
Fonte: Autor

possui várias soluções. Veja na Figura 5.8 algumas soluções desta atividade realizada pelos estudantes.

Na segunda atividade, os alunos foram surpreendidos com alguns números já escritos na grelha. Ao final da atividade foram comparadas as soluções sendo as da Figura 5.9 as três soluções distintas.

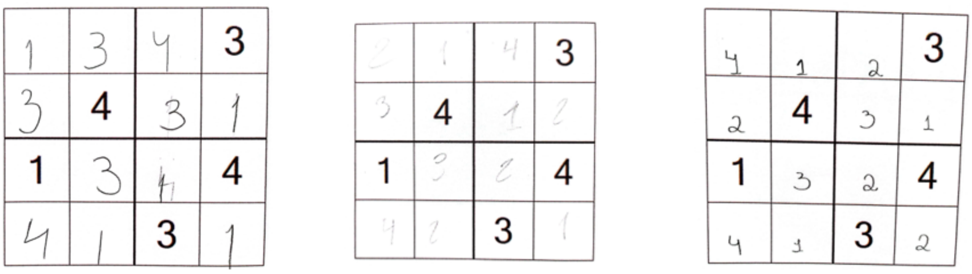


Figura 5.9: Atividades do Sudoku realizada por alguns estudantes.
Fonte: Autor

Finalmente, na terceira atividade o sudoku com 81 grelhas tinha 36 pistas. Nesta atividade, somente um aluno apresentou a solução de forma correta, ver Figura 5.10.

Percepções: Os alunos não conheciam o jogo Sudoku. No início, apresentaram um pouco de dificuldade, mas no decorrer da aula, conseguiram finalizar a atividade

O segundo Sudoku já continha cinco pistas, e embora fosse do tipo $4x4$, verificaram que a resposta seria diferente do primeiro Sudoku que já estava finalizado. Nesta segunda

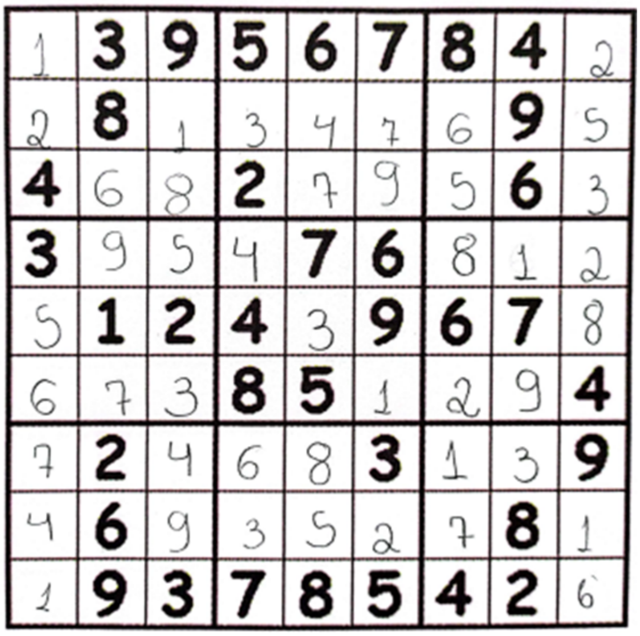


Figura 5.10: Atividades do Sudoku realizada por alguns estudantes.
Fonte: Autor

etapa, apareceram apenas três soluções diferentes, pois as pistas restringiram o número de soluções. Os alunos não tiveram dificuldade em encontrar as soluções como no primeiro caso, pois as pistas facilitaram a resolução do puzzle.

Já o terceiro Sudoku foi de difícil execução pelos alunos, pois demandou um tempo maior para finalização. Constatou-se dificuldade na execução desse puzzle, pois houve uma exigência maior de atenção, percepção, concentração e persistência.

A atividade apresentada traz benefícios que são intrínsecos para aprendizagem matemática, pois o desafio do jogo criou oportunidade dos alunos desenvolverem estratégias e técnicas de resolução próprias, além de aumentar a atenção, percepção, memorização e raciocínio lógico

No entanto, após tentativas e erros os alunos concluíram os Sudokus, houve ajuda colaborativa entre eles. Assim, a professora-pesquisadora avalia, analisando o seu grupo de estudantes, que aplicação dessa atividade contribuiu para despertar a motivação para aprendizagem, estimulando a socialização e interação entre os alunos. Houve interesse e curiosidade por parte dos alunos, além disso, eles foram capazes de verificar erros e propor novas formas de chegar no resultado correto, criando estratégias para obter tais resultados nas interações em grupos.

Acredita-se que esta atividade, principalmente quando aplicada em aulas de tutoria, contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes.

5.3 O ganho pedagógico das atividades matemáticas recreativas

Observa-se que, com o propósito de verificar o impacto das atividades em diferentes ambientes e contextos da escola, a primeira atividade foi aplicada em uma sala de aula durante o horário normal das aulas escolares a 25 alunos. Já a segunda atividade foi aplicada em uma aula de tutoria com apenas 4 alunos.

Pode-se concluir que as exigências para a aplicação de cada uma das atividades são distintas, mas ambas experiências apresentaram ganho pedagógico.

O primeiro ganho pedagógico que pode ser apontado é que estas atividades recreativas possibilitam ao professor cumprir os deveres de sua atividade profissional, que segundo Malba Tahn descreveu em sua obra “Didática da Matemática - volume 1” publicada em 1961 (TAHAN, 1961, apud Sousa et al, 2022, p. 119) são:

1. ensinar o aluno a gostar e a interessar-se pela Matemática;
2. ensinar o aluno a formular com clareza suas dúvidas;
3. ensinar o aluno a encaminhar com lógica o raciocínio;
4. ensinar o aluno a ser cuidadoso nos cálculos e na elaboração do caderno;
5. ensinar o aluno a ser correto na sua linguagem;
6. ensinar o aluno a ser sincero e leal em seus trabalhos e dispensar a maior atenção a seus colegas.

Alguns destes itens foram cumpridos totalmente (como os itens 1 e 6) e os outros de forma parcial.

O segundo ganho pedagógico desta atividades é o próprio jogo como situação de aprendizagem, pois à medida que os alunos avançam na atividade recreativa, hipóteses são formuladas, o raciocínio matemático desperta e uma atenção é dada ao problema até que ele seja resolvido.

6 Considerações finais

O objetivo desta pesquisa era responder à seguinte pergunta norteadora: Como pode ser implementada a Matemática Recreativa na Educação Básica para que ela contribua com o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes?

As respostas a esta indagação foram construídas a partir do estudo das definições de Matemática Recreativa, bem como da biografia de Malba Tahan, um dos pioneiros em impulsionar a Matemática Recreativa no Brasil. Além disso, pode-se experienciar a aplicação de dois jogos a alunos do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo. O primeiro jogo - o problema dos quatro quatros foi aplicado durante uma aula de matemática. O segundo jogo - Sudoku, para alguns alunos em uma aula de tutoria no período extra-classe. Estas experiências possibilitaram observar que estes jogos podem contribuir, tanto para o fortalecimento de algum conceito matemático, como foi o caso do problema dos quatro quatros que reforçou as operações matemáticas ao ser aplicado para uma turma durante a aula de matemática, quanto para o desenvolvimento do pensamento matemático, como foi o caso do Sudoku aplicado a alguns alunos que participam no período extraclasse de uma atividade de tutoria.

De forma geral, a reflexão que fazemos, com base nesta experiência, é que elas colaboram para que os alunos se tornem protagonistas, desenvolvendo sua autoestima, estimulando a perseverança em busca de soluções aos desafios encontrados.

Pode-se dizer que este trabalho teve como desafio criar nos alunos a cultura de ter acesso a uma atividade matemática que era ao mesmo tempo séria e descontraída, uma vez que esta metodologia não havia sido empregada na escola.

Finalmente, observa-se que para cada turma e para cada contexto escolar é sempre desafiador o papel do professor, pois há necessidade de sempre repensar a prática do ensino buscando novos meios de despertar nos alunos o gosto pela aprendizagem matemática. Neste caminho, acredita-se, que a matemática recreativa é um bom aliado da prática docente.

Referências

[1] RIBEIRO, B. d. S. *Matemática Recreativa: uma experiência baseada em clubes*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matem´atica em Rede Nacional do Colégio Pedro II, 2018.

[2] SILVA, A. H. d. *Matemática recreativa de Kaprekar na educação básica*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matem´atica em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2020.

[3] MOREIRA, G. E.; SILVA, J. M. P. da; LIMA, P. V. P. de. Revisão sistemática das contribuições de malba tahan para a educação matemática (2014-2017). *Revemop*, v. 1, n. 3, p. 379–396, 2019.

[4] ZWIERNIK, L. *Um estudo sobre elementos matemáticos em contos de Malba Tahan*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa Ensino de Matemática, Porto Alegre, RS, 08 2021.

[5] REIS, S. C. L. *A LITERATURA DE MALBA TAHAN NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL I*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas. Mestrado Profissional em Educação Escolar, Campinas, SP, 12 2023.

[6] FRANÇA, M. S. A. d. S. *A literatura de Malba Tahan: a interdisciplinaridade como abordagem significativa para o ensino e aprendizagem de Matemática e o uso das TICs como forma de disseminação do aprendizado*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo. Mestrado Profissional em Projetos Educacionais de Ciências., 2021.

[7] OLIVEIRA, K. S. D. *Investigando problemas aritméticos, algébricos e geométricos com o GeoGebra e o GNU Octave*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ., 2023.

[8] PAES, A. M. M. *Resoluções de problemas matemáticos por meio da literatura: Uma abordagem interdisciplinar baseada na Obra de Malba Tahan*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado em EDUCAÇÃO, CULTURA E COMUNICAÇÃO Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO., 2021.

[9] TONIATO, L. *PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS DE PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL AO ADOTAREM TEXTOS DE MALBA TAHAN*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATE-

MÁTICA Instituição de Ensino: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO ESPÍRITO SANTO., 2021.

[10] LOURENCO, L. P. *O LEGADO DE MALBA TAHAN NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA Instituição de Ensino: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS., 2023.

[11] BEZERRA, M. d. C. A. Sobre a matemática recreativa algumas contribuições iniciais. *Revista história da matemática para professores*, v. 4, n. 1, p. 29–36, 2018.

[12] SINGMASTER, C. G. *Equine-Assisted Sandtray Therapy: A Proposed Model Incorporating Gestalt Sandtray Play Therapy Techniques*. [S.l.]: Pacifica Graduate Institute, 2013.

[13] PIRES, L. A.; APOLINÁRIO, A. Malba tahan, seus conceitos presentes na atualidade. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 12, n. 1, p. 37–50, 2017.

[14] BIANI, R. P.; LORENZATO, S. Malba tahan + math = malbatemática. *ETD Educação Temática Digital*, v. 19, n. 3, p. 822–843, 2017.

[15] LINDOLFO, B. *Matemática Recreativa: uma proposta didática a partir da Obra "O homem que calculava" de Malba Tahan*. Dissertação (Mestrado) — Trabalho de Conclusão de curso de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, 2021.

[16] PAULO, S. *Currículo Paulista. São Paulo*. 2019. Disponível em: <escoladeformacao.sp.gov.br>. Acesso em: 20 jul. 2024.

[17] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 20 jul. 2024.

[18] MELO, H. S. Os quatro 4. *Correio dos Açores*, Gráfica Açoreana, Lda, p. 14–14, 2014.

[19] MARTINS, P. M.; PICADO, J. Existe um sudoku com 16 pistas? *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 2012.

[20] ROSENHOUSE, J.; TAALMAN, L. *Taking sudoku seriously: The math behind the world's most popular pencil puzzle*. [S.l.]: OUP USA, 2011.

[21] SOUSA, A. S. de et al. Malba than: Algumas das suas contribuições para a educação matemática. *Cadernos da FUCAMP*, v. 21, n. 51, 2022.