

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

CHARLENE TAÍS THEISEN

**UMA ABORDAGEM SOBRE A OPERAÇÃO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES
POR MEIO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIAS**

Santa Maria, RS
2024

CHARLENE TAÍS THEISEN

UMA ABORDAGEM SOBRE A OPERAÇÃO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES POR MEIO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIAS

Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional realizado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof.^a Luciane Gobbi Tonet

Santa Maria, RS
2024

Theisen, Charlene Taís
UMA ABORDAGEM SOBRE A OPERAÇÃO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES
POR MEIO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIAS / Charlene Taís
Theisen.- 2024.
62 p.; 30 cm

Orientadora: Luciane Gobbi Tonet
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2024

1. Adição de Frações 2. Classes de Equivalência 3.
Transposição Didática I. Tonet, Luciane Gobbi II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, CHARLENE TAÍS THEISEN, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

CHARLENE TAÍS THEISEN

UMA ABORDAGEM SOBRE A OPERAÇÃO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES POR MEIO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIAS

Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional realizado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 25 de março de 2024:

Luciane Gobbi Tonet, Dra. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Karine Faverzani Magnago, Dra. (UFSM)

Vitalino Cesca Filho, Dr. (UNIPAMPA)

Santa Maria, RS
2024

DEDICATÓRIA

Ao Leo (*in memoriam*), em nome de todos os meus alunos, os quais me motivam a ser melhor a cada dia, e ao Alexandre (*in memoriam*) colega querido, que esteve presente em grande parte desta trajetória.

AGRADECIMENTOS

Com imenso carinho, agradeço a algumas pessoas muito especiais que estiveram comigo nesta longa jornada:

Aos meus pais, pelo incentivo e pela importância que sempre atribuíram à educação. Em especial, agradeço à minha mãe, Zelair, por todo o apoio, encorajamento e orações.

Aos meus irmãos, que me ensinam muito sobre a vida, e, nesta etapa, foram tão pacientes.

Ao Fábio, pelo companheirismo, compreensão, cuidado e incentivo, em todos os momentos.

Aos meus alunos, fontes de inspiração diária, cujo envolvimento e colaboração foram essenciais para a construção da prática aqui apresentada.

Aos meus colegas de mestrado, pela ótima companhia e com os quais compartilhei experiências enriquecedoras.

Aos professores que tive ao longo de toda vida, em especial durante o PROFMAT, pelo conhecimento transmitido e pelo desejo contínuo de aprendizado que instigaram em mim.

À Prof. Dra. Karine Faverzani Magnago, que me acolheu em momentos tão delicados durante esta trajetória.

E um agradecimento especial à minha orientadora, a Prof. Dra. Luciane Gobbi Tonet, pela atenção, paciência e competência, tanto durante suas aulas, quanto durante a orientação desta dissertação.

RESUMO

UMA ABORDAGEM SOBRE A OPERAÇÃO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES POR MEIO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIAS

AUTORA: CHARLENE TAÍS THEISEN

Orientadora: Luciane Gobbi Tonet

Este trabalho apresenta uma sequência didática aplicada em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, em uma escola da rede estadual, no município de Estância Velha/RS, na qual a autora é professora referência de matemática. A proposta didática trata da adição de frações por meio de classes de equivalência, com o objetivo de ressignificar os números fracionários através de uma abordagem algébrica, geralmente introduzida no Ensino Superior. Para tanto, inicia-se explorando as vivências docentes e as fragilidades presentes no processo de ensino e aprendizagem das frações. Logo em seguida, apresenta-se uma breve introdução à teoria da Transposição Didática, metodologia esta escolhida para este trabalho, a qual se apresenta como uma estratégia que visa adaptar conceitos complexos de maneira a torná-los acessíveis ao nível de compreensão dos alunos. Na sequência, é exposto o roteiro dos exercícios, o qual foi organizado de modo a desafiar os alunos à leitura, interpretação e discussão das resoluções em grupo. O relato das aulas, contendo a definição de relações, propriedades, demonstrações e operações, fornece uma visão detalhada do desenvolvimento do ensino ao longo do tempo. Observa-se uma resistência inicial por parte dos alunos relativa à proposta, a qual rapidamente foi substituída por fases de superação, integração e um crescente interesse pelos conceitos apresentados. Essa evolução destaca, principalmente, a relevância das abordagens pedagógicas diferenciadas, bem como evidencia a importância da intervenção ativa dos professores quando surgem dificuldades ou resistência por parte dos alunos. A capacidade dos docentes em lidar com esses desafios desempenha um papel crucial no sucesso da aplicação de novas metodologias, garantindo que os objetivos sejam alcançados, bem como ocorreu nesta proposta.

Palavras-chave: Classes de equivalência. Frações. Transposição didática.

ABSTRACT

AN APPROACH TO THE OPERATION OF ADDING FRACTIONS THROUGH EQUIVALENCE CLASSES

AUTHOR: CHARLENE TAÍS THEISEN

ADVISOR: Luciane Gobbi Tonet

This work presents a didactic sequence applied in a second-year high school class at a public school in the municipality of Estância Velha/RS, where the author is a reference math teacher. The didactic proposal addresses the addition of fractions through equivalence classes, aiming to reframe fractional numbers through an algebraic approach typically introduced in higher education. To this end, the work begins by exploring teaching experiences and the weaknesses present in the teaching and learning process of fractions. Subsequently, a brief introduction to the Theory of Didactic Transposition is presented, which was chosen as the methodology for this work, serving as a strategy to adapt complex concepts to make them accessible at the students level of understanding. Following this, the exercise script is presented, organized to challenge students to read, interpret, and discuss resolutions in groups. The class reports, containing the definition of relationships, properties, demonstrations, and operations, provide a detailed view of the development of teaching over time. Initially, there was resistance from students to the proposed new educational approach, which quickly gave way to phases of overcoming, integration, and a growing interest in the concepts addressed. This evolution mainly highlights the relevance of differentiated pedagogical approaches and underscores the importance of active teacher intervention when difficulties or resistance arise from students. The ability of teachers to deal with these challenges plays a crucial role in the success of implementing new methodologies, ensuring that objectives are achieved, as was the case in this proposal.

Keywords: Fractions. Equivalence classes. Addition of fractions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A atividade: Primeiros exemplos	29
Figura 2 – A atividade: Relação Binária - Divisibilidade	29
Figura 3 – A atividade: Definição das Relações de Equivalência	30
Figura 4 – A atividade: Demonstração das propriedades das relações de equivalência	30
Figura 5 – A atividade: Relação entre pares ordenados	30
Figura 6 – A atividade: Relação de equivalência entre inteiros	31
Figura 7 – A atividade: Exemplos sobre as classes de equivalência	31
Figura 8 – A atividade: Exercícios sobre as classes de equivalência	32
Figura 9 – A atividade: Exercícios de aplicação	32
Figura 10 – A atividade: Definindo o conjunto dos números racionais	33
Figura 11 – A atividade: A representação na forma de fração	33
Figura 12 – A atividade: A adição nos racionais na forma de classes de equivalência	34
Figura 13 – A atividade: A adição nos racionais na forma de fração	34
Figura 14 – A atividade: A adição nos racionais - exercício	35
Figura 15 – Exemplos de relações binárias - anotações de aluno	36
Figura 16 – Anotações dos alunos sobre as relações de equivalência - anotações de aluno	37
Figura 17 – Registro de contraexemplos das propriedades - anotações de aluno	38
Figura 18 – Registro dos alunos sobre as propriedades - anotações de aluno	39
Figura 19 – Registro de exemplos numéricos e do raciocínio das propriedades - ano- tações de aluno	40
Figura 20 – Registro de exemplos numéricos e raciocínio do registro genérico das pro- priedades - anotações de aluno	41
Figura 21 – Registro de exemplos - anotações de aluno	42
Figura 22 – Registros da linha de raciocínio construída pelo aluno - anotações de aluno	43
Figura 23 – Prova da transitividade - anotações de aluno	44
Figura 24 – As classes de equivalência - anotações de aluno	45
Figura 25 – Exemplos de Classes de Equivalência - anotações de aluno	45
Figura 26 – Registros a relação entre pares ordenados - anotações de aluno	46
Figura 27 – Registros na forma fracionária - anotações de aluno	47
Figura 28 – A adição nos racionais - anotações de aluno	47
Figura 29 – A comparação entre a notação de classes de equivalências e frações - anotações de aluno	48
Figura 30 – O algoritmo da operação de Adição - anotações de aluno	48
Figura 31 – As classes de equivalência e as frações equivalentes - anotações de aluno	49

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – O estudo de frações segundo a BNCC.....	19
--	----

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
UNISINOS	Universidade do Vale do Rio dos Sinos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES	15
2.1	VIVÊNCIAS DOCENTES E AS FRAGILIDADES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FRAÇÕES	15
2.2	FRAÇÕES E A BNCC	17
3	A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA	23
4	O ESTUDO DE FRAÇÕES POR MEIO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIA	27
4.1	DESCRIÇÃO DA TURMA	27
4.2	AS ATIVIDADES PROPOSTAS	29
4.3	RELATO SOBRE A APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES	35
4.3.1	Primeiro encontro - definindo as relações	36
4.3.2	Segundo encontro - definindo as propriedades das relações	37
4.3.3	Terceiro encontro - demonstração das propriedades	40
4.3.4	Quarto encontro - relação de equivalência nos inteiros	42
4.3.5	Quinto encontro - classes de equivalência	44
4.3.6	Sexto encontro - a escrita como fração e a operação de adição	46
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52
	APÊNDICE A – ROTEIRO DAS ATIVIDADES	54

1 INTRODUÇÃO

O ensino dos números racionais é um desafio persistente na educação matemática. A natureza deste conjunto, cuja essência reside nas classes de equivalência, mostra a complexidade do tema que, ao ser suprimida na Educação Básica, pode se tornar um fator dificultador de sua compreensão. Além disso, as regras para as operações são definidas de maneira pouco natural, ao serem comparadas às operações no conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) ou dos inteiros (\mathbb{Z}), até então conhecidas pelos alunos. Essa lacuna de aprendizagem gera problemas não apenas durante o ensino das frações, no Ensino Fundamental, mas durante o Ensino Médio, Graduação e outras situações cotidianas, acarretando a necessidade de investigar estratégias pedagógicas eficazes para amenizar essa deficiência.

Durante as aulas do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, na UFSM, diversos assuntos foram abordados, tanto nas disciplinas quanto em conversas de corredor entre professores e colegas. Ao encontro das dificuldades relatadas em diferentes realidades da Educação Básica, em todas as disciplinas do curso de mestrado haviam tópicos que, com as devidas adaptações, poderiam (e deveriam) ser desenvolvidos na Educação Básica. Questões envolvendo o ensino do conjunto dos números racionais foi um dos assuntos citados.

A complexidade intrínseca às frações muitas vezes é um obstáculo para a aprendizagem efetiva, não apenas deste, mas de outros conteúdos. Com isso, esta pesquisa objetiva explorar, segundo os fundamentos da transposição didática, o conjunto dos números racionais, aprofundando os conceitos de Frações Equivalentes e da operação de Adição de Frações, por meio das relações binárias e de equivalência, de modo que discentes e docentes envolvidos com a prática exercitem e/ou desenvolvam habilidades de leitura, interpretação e escrita da Matemática.

Considerando o que é previsto na BNCC, os conceitos elementares de fração são inseridos já a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, aprofundados gradativamente até o 8º ano do Ensino Fundamental. Ou seja, a BNCC propõe um aprofundamento gradual a cada ano, dando por completo ao final do 8º ano. No entanto, sabe-se que esta não é a realidade e, infelizmente, muitos alunos concluem o Ensino Médio, sem compreender os conceitos e as operações, dificultando a compreensão de muitos outros conteúdos. Por este motivo, desenvolver atividades relacionadas sobre os conceitos básicos de Frações e propiciar o contato de modo a significar, ou ressignificar, a simbologia é importante e pode ser um marco positivo, mesmo no Ensino Médio.

Nessa linha, o motivo de ter elaborado uma proposta didática sobre frações para alunos do Ensino Médio deveu-se à constatação de dificuldades acumuladas ao longo da vida discente, com o objetivo de ressignificar alguns conceitos, por meio de uma abor-

dagem pedagógica que não apenas apresentava os conceitos de forma acessível, mas também promovia a aplicação prática desses conhecimentos. Dessa forma, buscou-se contribuir significativamente para o aprimoramento do ensino de frações no Ensino Médio, promovendo uma base sólida para o desenvolvimento contínuo dos estudantes no âmbito matemático e cognitivo.

As contribuições esperadas deste estudo foram diversas. Enumeraram-se, com destaque, o enriquecimento do repertório de estratégias pedagógicas e a promoção da compreensão mais significativa dos conceitos de Frações Equivalentes e da operação de Adição de Frações, por parte de discentes e docentes. Previa-se que os resultados desta pesquisa teriam um impacto significativo tanto para os alunos inseridos na proposta didática, dado que teriam nova oportunidade de construção de conhecimento, por meio de uma abordagem diferenciada, quanto na prática profissional, por oferecer ferramentas concretas para educadores. Isto foi ao encontro do que estabelece o Regimento do programa PROFMAT que “tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática.”

Conforme o banco de dissertações do PROFMAT ¹, existem 95 trabalhos que possuem no título a palavra Frações. No entanto, a maioria desses é voltada para a aplicação de atividades no Ensino Fundamental. Fez-se, então, uma análise dos trabalhos indicados ou direcionados ao Ensino Médio e, para esta, observou-se o título, o resumo e/ou as atividades propostas pelo autor. Com esses critérios, foram selecionados 27 trabalhos.

Aqui, será dado destaque aos trabalhos de Noletto (2014), Rodrigues (2016) e Santos (2019) por exemplificarem os três tipos de abordagem mais comuns às dissertações examinadas.

Relacionando as frações e o ensino de Trigonometria, Noletto (2014) apresenta em sua dissertação, uma abordagem na qual as frações aparecem como suporte para o desenvolvimento de questões próprias do estudo da Trigonometria. O intuito da proposta didática é de que o aluno crie gosto por esta representação. Segundo o autor:

[...] este trabalho não tem a intenção de apresentar propostas inovadoras para o ensino da Matemática no Ensino Médio, mas sim uma mudança metodológica na postura do professor, com uma abordagem diferenciada e simplificada acerca de alguns tópicos de Trigonometria, com a ajuda do conceito de Frações e suas operações. (NOLETO, 2014, p. 11)

Assim, o autor estabelece um ambiente propício para que os alunos se apropriem dos conteúdos, através da elaboração de exercícios apropriados, já que, muitas vezes, dadas as dificuldades, muitos professores acabam negligenciando esse aspecto.

Em contrapartida, Rodrigues (2016) apresenta em sua dissertação uma sequência didática com a utilização de material concreto, para estudantes do 1º ano do Ensino Mé-

¹Disponível em <https://profmatsbm.org.br>, acessado em 02/11/2023

dio. Fazendo uso de discos fracionados, a proposta é apresentada com cunho de revisão. Segundo a autora, a utilização do material concreto possibilitou compreender o significado das frações, conseguindo classificá-las e realizar operações, a partir do conhecimento lógico. A autora destaca ainda que:

[...] faz-se necessário utilizar metodologias diferentes, para dinamizar o processo de ensino-aprendizagem de fração, não utilizando apenas exemplos com barras de chocolates e pizzas, fazendo com que o aluno desperte o gosto e a curiosidade de aprender o assunto. (RODRIGUES, 2016, p. 10)

Já Santos (2019), em sua dissertação intitulada como “O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações”, após realizar a contextualização histórica das frações e a construção do conjunto dos números racionais sobre as perspectivas geométrica e algébrica, apresenta o Tangram como material manipulativo para o ensino das frações. Sem indicar o público-alvo, Santos (2019) fornece uma excelente sequência que pode ser trabalhada com o Ensino Médio. Nesta, a linha de raciocínio percorre sob a perspectiva geométrica, considerando o significado de fração como parte de um todo, seguido da observação das equivalências e comparação entre frações, finalizando com as operações de adição e multiplicação, por meio da manipulação das peças do Tangram. A autora ainda ressalta uma valiosa reflexão sobre a prática:

[...] é importante que o professor produza diferentes significados com relação às frações para que os alunos possam perceber todos os possíveis significados que a fração pode assumir, pois as dificuldades de aprendizagem desta podem decorrer não só da maneira como as frações estão sendo ensinadas mas, também devido a complexidade desse número. (SANTOS, 2019, p. 76)

Sendo assim, o presente trabalho de dissertação se diferencia dos demais, especialmente por abordar um estudo sobre frações, direcionado ao Ensino Médio, sob uma perspectiva algébrica inerente, por meio de uma transposição didática adequada.

Na sequência didática proposta, as questões foram estruturadas de modo a conceituar a partir de definições, exemplos e exercícios as Relações Binárias, as Relações de Equivalência e Classes de Equivalência, para então relacionar com o Conjunto dos Números Racionais, sua representação na forma de fração e a operação de Adição entre eles.

Para tanto, a dissertação está estruturada da seguinte forma: no segundo capítulo, serão exploradas as vivências docentes, principalmente as relacionadas ao ensino de frações, identificando as fragilidades no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. No terceiro capítulo, serão explorados os conceitos da Teoria da Transposição Didática como estratégia de ensino na Educação Básica, bem como alguns exemplos de aplicação desta.

No quarto capítulo apresenta-se a prática pedagógica elaborada para o estudo das frações, utilizando classes de equivalência. Inicialmente descreve-se a turma envolvida

no estudo, as atividades propostas, bem como a justificativa para tal sequência. Finaliza-se o capítulo com um relato detalhado da aplicação dessas atividades, apresentando os registros dos alunos, destacando os principais momentos, como a definição de relações, propriedades, demonstração das propriedades, relações de equivalência nos inteiros, classes de equivalência, e a escrita como fração, bem como a operação de adição.

No quinto e último capítulo estão presentes as considerações finais, consolidando os resultados obtidos, a análise da execução, sugestões para o aperfeiçoamento da proposta e possíveis direções para futuras pesquisas.

2 SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES

Este capítulo inicia apontando inúmeras dificuldades presentes na prática docente relacionadas ao tema Frações. A abordagem que aqui se apresenta, via Classes de Equivalência, é estudada, na grande maioria das vezes, à nível superior. Por isso, em seguida, destaca-se a importância da Transposição Didática como forma de adequar o conteúdo aos alunos da educação básica.

2.1 VIVÊNCIAS DOCENTES E AS FRAGILIDADES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FRAÇÕES

Ser professor é fascinante. É uma combinação de elementos intrigantes e estimulantes, que causam um impacto profundo nas emoções daqueles que vivenciam o processo de ensino e aprendizagem. Mas ser professor de Matemática é indescritível. A descoberta compartilhada, a resolução colaborativa de problemas e o diálogo constante criam um ambiente que desafia tanto o professor quanto o aluno a crescerem e se desenvolverem em conjunto. Afinal, a disciplina de matemática pode ser percebida e aplicada em todas as áreas, de alguma forma.

Licenciada em Matemática há nove anos, foi ainda como aluna do terceiro ano do Ensino Médio que firmou-se uma certeza sobre o meu futuro: trabalhar em ambiente escolar com Matemática. Há 12 anos atuando como professora, minha trajetória docente iniciou em dezembro de 2010, como bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID. Este programa, subsidiado pela CAPES, insere licenciandos na rotina escolar sob supervisão da professora titular, conectando o meio acadêmico e a Educação Básica.

O PIBID - Subprojeto Matemática, da UNISINOS, tinha como modalidade a docência compartilhada. Nesta, as atividades eram desenvolvidas na Universidade e na Escola, concomitantemente. Em grupos de três a cinco “pibidianos”¹, na escola acompanhavam a rotina da professora supervisora, desde o planejamento e produção de materiais, até sua aplicação em sala de aula, avaliação e melhoramento destes, além de auxiliar os alunos durante a resolução de suas tarefas. Já na universidade, os “pibidianos” participavam de reuniões mensais, com trocas sobre as vivências em suas respectivas escolas e criavam estratégias para melhorar pontos específicos do Ensino de Matemática.

Esta primeira experiência com a rotina docente foi decisiva para a construção da minha identidade profissional. Treinando o olhar atento e sensível, desde este primeiro contato com as fragilidades do Ensino de Matemática, já observava pontos específicos

¹ termo usado para referir-se aos bolsistas deste projeto

que tomam grande proporção na construção do saber matemático do aluno.

Destes pontos, cabe destaque positivo à integração do aluno no processo de ensino e aprendizagem, não apenas como um receptor, mas como peça-chave, responsável pelo seu crescimento, com base em suas experiências. Ou seja, um aluno ativo durante as propostas e que consiga interagir com o professor, apresentando suas potencialidades e dificuldades. Ao encontro disso, evidencia-se a importância de aulas dinâmicas, cujos objetivos sejam claros, principalmente ao docente, este responsável por qualquer ajuste necessário no desenvolvimento do conteúdo. Caso contrário, o processo de construção do saber pode deixar lacunas de conhecimento irreparáveis, o que, muitas vezes, explica a resistência dos alunos em relação à disciplina. Conforme pondera Pedrozo (2023):

Por vezes essa aversão à matemática é algo que o estudante carrega desde os primeiros anos escolares, seja por ter sentido dificuldade ao aprender conteúdos novos ou pela forma com que eles foram transmitidos. A fluência na disciplina depende de vários fatores e a forma como os conteúdos são apresentados é um dos principais. É fundamental que o docente tenha domínio dos conteúdos e que sua comunicação seja feita de forma clara e coerente, que se façam questionamentos aos estudantes sobre qual seria a melhor forma de se resolver determinada situação. (PEDROZO, 2023, p. 12)

Logo após a formatura, fui contratada para trabalhar como professora titular de Matemática de sexto e oitavo ano do ensino regular em escolas municipais de Ivoti/RS, além de atender alunos na modalidade de reforço escolar, ofertados pela própria escola em contraturno. Nesta experiência com alunos do Ensino Fundamental, ficaram evidentes não apenas as questões relacionadas à *expertise* do professor sobre o conteúdo, mas também a importância do vínculo afetivo. Conforme expresso por Silva (2013), esse vínculo é um “fator facilitador do processo de ensino-aprendizagem, despertando no discente a motivação, a segurança e a melhora no seu desempenho escolar, a partir de atividades e atitudes que direcionem a um maior conhecimento do aluno e de sua realidade”. É um conjunto de ações que envolvem um olhar atento e sensível à construção do conhecimento, as quais motivam por meio de questionamentos, correções reflexivas e incentivo.

Corroborando Osti e Brenelli (2013), o processo de ensino e aprendizagem envolve professores e alunos num movimento em que as reflexões pessoais e interpessoais são primordiais porque o sujeito, para aprender, precisa estar interagindo com o outro. Ou seja, toda a sistemática de aprendizagem deve ser significativa aos envolvidos isso é percebido em cada oportunidade, a partir das relações construídas.

Após sete anos trabalhando exclusivamente com alunos do Ensino Fundamental, em 2017, iniciei minhas atividades como professora de Ensino Médio e percebi, claramente, que o problema só aumenta com o passar dos anos. Infelizmente, no cotidiano escolar, as demandas além da sala de aula tornam o trabalho docente cansativo, o que, muitas vezes, dificulta as ações realmente eficazes para suprir déficits acumulados ao longo do tempo. No entanto, várias lacunas acabam virando bloqueios e muitos alunos

passam a abominar disciplinas do currículo que envolvam cálculos como, por exemplo, Química, Física e, claro, Matemática. Ou seja, as falhas percebidas no Ensino Fundamental tornam-se abismos e fragilizam a construção do pensamento lógico matemático como um todo, bem como afirma Carvalho (2005):

Com o avanço da escolaridade, os alunos podem vivenciar relações positivas ou negativas no ambiente escolar. Quando vivenciam relações positivas, tendem a se sentir mais confortáveis e seguros. As relações negativas podem contribuir para o desenvolvimento de atitudes de rejeição em relação à escola, acarretando assim uma desvalorização pessoal e baixo rendimento relacionado à aprendizagem cognitiva, social ou emocional. (CARVALHO, 2005, p. 117)

De modo geral, percebe-se que grande parte das dificuldades está relacionada aos conceitos básicos da matemática, ainda estabelecidos no conjunto dos números naturais. Contudo, na rotina em sala de aula, destaca-se a complexidade associada a alguns assuntos específicos, como, por exemplo, aos estudos que abrangem a notação algébrica. Neste caso, é comum escutar comentários dos alunos sobre a dificuldade nos cálculos envolvendo, por exemplo, letras na matemática. Além disso, questões que envolvam as normas relativas aos sinais matemáticos, exemplificadas pelo questionamento: “Professora, qual é a regra de sinais que devo usar agora?”, bem como o entendimento do conjunto dos números racionais, sobretudo quando apresentado na forma fracionária, são pontos de enfoque, provocando reações como “ah, não! Colocou frações só para dificultar! Eu nunca aprendi frações!”. Este foi um dos fatores determinantes para a escolha do tema deste trabalho.

2.2 FRAÇÕES E A BNCC

De acordo com Bertoni (2009)

Frações têm sido um dos temas mais difíceis no ensino fundamental. Avaliações e pesquisas atestam o baixo rendimento dos alunos no assunto. Nos últimos anos, as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse tema têm detectado inúmeros problemas e levantado hipóteses, que, entretanto, não abrangem a totalidade da problemática, nem são conclusivas. (BERTONI, 2009, p. 16)

O ensino de frações no contexto do Ensino Fundamental enfrenta uma série de desafios que impactam a compreensão e aplicação efetiva desses conceitos matemáticos pelos alunos. O primeiro contato com os números racionais, de acordo com documentos normativos, é dado ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental, quando surgem situações problemas a serem resolvidas onde apenas o uso de números naturais não é suficiente.

É comum empregar situações que envolvem “meio” ou “terço” como forma de introduzir o estudo sobre frações, apresentando-as como relações parte-todo. No entanto, fazendo uso do questionamento de Merlini (2005), a Matemática construída pelo homem busca, a partir dos conhecimentos adquiridos, sanar as necessidades da humanidade, mas “qual é a necessidade de dividir e pintar figuras geométricas?”. Muitas vezes, os alunos, ao tentarem conectar os conceitos aprendidos em sala de aula com situações do cotidiano, enfrentam desafios que restringem sua habilidade de aplicar esse conhecimento além do ambiente escolar. Ou seja, percebe-se uma desconexão entre a teoria envolvendo as frações e sua aplicação prática no mundo real. Ainda sobre a representação geométrica, Pedrozo (2023) ressalta que “este não é o único significado da fração, e, para que um estudante possa dominar o conceito de fração, é necessário que ele conheça e reconheça uma fração em seus diferentes formatos e com seus diferentes significados.”. Ou seja, é preciso ir além das situações hipotéticas cotidianas, permitindo ao aluno significar o conjunto dos números racionais em sua completude.

Nas palavras de Santos (2019)

É notório que os números naturais juntamente com os números decimais resolvem a maioria das situações problemas do cotidiano, no entanto, as frações são fundamentais para uma compreensão mais significativa de número racional, proporcionalidade, probabilidade e cálculo algébrico. Além disso, ajudam a entender melhor escalas, porcentagens, razões, possibilidades - e ainda são frequentemente usadas nas receitas culinárias. (SANTOS, 2019, p. 62)

Entendendo que o estudo de fração é fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos, a passagem do estudo do conjunto dos números naturais para os racionais deve ser feita com muita atenção tanto em relação à noção de número quanto na interpretação ou, neste caso, reinterpretção, das operações elementares.

Smole e Diniz (2016) ressaltam como razões dificultadoras para a compreensão das frações por parte dos alunos, justamente, a forma tradicional como o assunto é abordado pelos professores, principalmente em relação à rápida “ênfase excessiva na nomenclatura - introduzindo-se termos como numerador, denominador, frações equivalentes, frações próprias e impróprias antes da compreensão do significado e dos usos dos números fracionários” e a “inadequação do tempo de ensino e aprendizagem dedicado aos racionais na escola”.

Para Llinares e Sánchez (1988), a pouca destreza com frações leva a questionar o nível apropriado para o seu aprendizado:

A experiência que os alunos têm com os Números Naturais os levam à tendência de ver as frações como um conjunto de dois Números Naturais separados por um traço. Como consequência, acabam utilizando seus conhecimentos de cálculo, regras e algoritmos com os Números Naturais para as frações. Isso constitui o que alguns autores denominam de “efeito de distração dos Números Naturais”. (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988 apud MONTEIRO; GROEWALD, 2014)

Os desafios enfrentados pelos alunos ao lidar com esse conteúdo destacam a importância de uma transição cuidadosa do estudo dos números naturais para os racionais, enfatizando não apenas a manipulação de símbolos, mas também a compreensão dos conceitos subjacentes. De acordo com a BNCC:

[...] para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado. (BRASIL, 2018, p. 529)

Ou seja, é crucial adotar abordagens pedagógicas que estimulem o pensamento crítico, a investigação ativa e a aplicação prática dos conceitos matemáticos, indo além da mera memorização de procedimentos. Pois, ao compreender de forma profunda os princípios subjacentes e experienciar aprendizagens significativas, os alunos tendem a desenvolver uma fluência matemática genuína.

A orientação de habilidades matemáticas desejadas para os alunos ao longo do Ensino Fundamental e Médio, conforme a BNCC,

estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). Em relação aos números, os estudantes do Ensino Fundamental têm a oportunidade de desenvolver habilidades referentes ao pensamento numérico, ampliando a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações. Para isso, propõe-se a resolução de problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento). (BRASIL, 2018, p. 527)

Especificamente sobre os conceitos elementares de fração, é previsto que sejam inseridos já a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, sendo estudados até o 8º ano do Ensino Fundamental, sendo as habilidades distribuídas conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – O estudo de frações segundo a BNCC

ANO/FAIXA	UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
2º	Números	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
3º	Números	Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte	(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

4°	Números	Números racionais: frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$)	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5°	Números	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
5°	Números	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.
5°	Números	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
5°	Números	Cálculo de porcentagens e representação fracionária	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
6°	Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
6°	Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

6°	Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
6°	Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
6°	Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
6°	Números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
7°	Números	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
7°	Números	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
7°	Números	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

8°	Números	Dízimas periódicas: fração geratriz	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
----	---------	--	--

Observando a Tabela 1, nota-se que a BNCC propõe um aprofundamento gradual ao ensino de frações, dando por completo ao final do 8° ano. Já ao Ensino Médio é orientado que:

Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. [...] a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (BRASIL, 2018, p. 529)

No entanto, sabe-se que esta não é a realidade e, infelizmente, muitos alunos concluem o Ensino Médio sem compreender os conceitos e as operações relacionadas ao conjunto \mathbb{Q} , dificultando a compreensão de muitos outros conteúdos. Segundo os dados do INEP (2022), no SAEB de 2021 a nota média nacional em Matemática foi de, aproximadamente, 268 pontos em uma escala de 0 a 500.

Por este motivo, desenvolver atividades relacionadas aos os conceitos básicos de Frações e propiciar o contato de modo a significar, ou ressignificar, a simbologia é importante e pode ser um marco positivo, mesmo no Ensino Médio.

Tratando-se de uma abordagem pedagógica que não apenas apresenta os conceitos de forma acessível, mas que também promove a aplicação prática desses conhecimentos, a proposta didática elaborada, vai ao encontro das competências específicas de Matemática para o Ensino Médio, na BNCC (BRASIL, 2018): "Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, [...] identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas". Dessa forma, buscou-se auxiliar significativamente para o aprimoramento do ensino de frações no Ensino Médio, promovendo uma base sólida para o desenvolvimento contínuo dos estudantes no âmbito matemático e cognitivo.

3 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Na tentativa de amenizar todos os problemas elencados, neste trabalho é proposta uma abordagem algébrica para o ensino de frações, na qual o conteúdo se desenvolve por meio das relações binárias e classes de equivalência.

Kieren (1980 apud WROBEL; KILL, 2021) destaca que o conhecimento sobre os números racionais requer uma capacidade funcional com classes de equivalência e corpo quociente, mas traz uma análise onde algumas dessas interpretações são isomorfas do ponto de vista das estruturas matemáticas. Ele apresenta, então, uma defesa explícita de apenas cinco subconstructos básicos que representam padrões de pensamento distintos: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador.

No entanto, Behr et al. (1983 apud WROBEL; KILL, 2021) afirmam que o nível de sofisticação associado ao corpo quociente não é adequado a alunos do ensino fundamental por relacionar os números racionais a sistemas algébricos abstratos.

Para atenuar esse problema de inadequação, faz necessário uma transposição didática elaborada com o objetivo de tornar a linguagem das classes de equivalência e demais definições inerentes, adequada aos alunos do Ensino Médio.

O estudo das frações, por meio das classes de equivalências, é frequentemente abordado no ensino superior e se apresenta por meio de uma linguagem robusta, com simbologia nada usual em se tratando da realidade da Educação Básica. Essa diferença de linguagem entre os níveis de ensino é comparável a ler um livro escrito décadas atrás e encontrar termos desconhecidos, devido à evolução da linguagem ao longo do tempo. Essa diferença linguística pode representar um desafio significativo para os alunos, que muitas vezes lutam para compreender conceitos matemáticos complexos e/ou desconhecidos. Em termos matemáticos, esta analogia pode ser exemplificada como se um aluno do Ensino Fundamental, estivesse subitamente exposto a aulas de álgebra linear no Ensino Superior, encontrando-se diante de conceitos e notações que não foram previamente introduzidos ou contextualizados de maneira acessível. Portanto, é crucial considerar abordagens pedagógicas que facilitem a compreensão, independentemente do nível de complexidade.

Neste preciso ponto reside a importância da Transposição Didática, como uma forma de adaptar a definição de conjunto quociente, mais ampla e geral, ao caso particular das frações. Para isso, são necessários muitos exemplos, uma linguagem mais próxima da realidade do aluno e um tempo adequado para desenvolver a atividade, transformando o trajeto que nos leva à construção científica em outro formato que possa ser trabalhado pedagogicamente, de modo que resulte em uma experiência efetiva ao aluno.

A Teoria da Transposição Didática foi formulada originalmente pelo sociólogo Michel Verret, em 1975. Em 1982, Yves Chevallard retoma os estudos e conceitua a Transposição Didática como um processo no qual o conhecimento acadêmico é transformado em objetos de aprendizagem. Este processo não consiste apenas na simplificação do conhecimento, mas sim na mudança significativa do conhecimento acadêmico a ser ensinado e aprendido. Trata-se de um processo de desconstrução e reconstrução com o objetivo de tornar o conhecimento acadêmico ensinável, de acordo com as características dos aprendizes, seu nível de desenvolvimento cognitivo e o contexto

de ensino em que se encontram.

Segundo Chevallard (1985 apud SANT'ANNA; BITTENCOURT; OLSSON, 2007):

Um conteúdo do conhecimento, designado como saber a ensinar, passa por um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar, faz um objeto de ensino, é chamado de Transposição Didática. (CHEVALLARD, 1985)

A contextualização da Transposição Didática, para Chevallard e Joshua (1982), parte da premissa da existência de três esferas do saber: o Saber Sábio, o Saber a Ensinar e o Saber Ensinado. Essa tríade de saberes é essencial para compreender o processo de adaptação do conhecimento acadêmico ao ambiente educacional e para garantir uma aprendizagem significativa e eficaz.

Tem-se por “Saber Sábio” o conhecimento acadêmico em sua forma mais pura e complexa, frequentemente encontrado na literatura acadêmica, pesquisas e publicações científicas. Este é intrinsecamente detalhado e abstrato, destinado à comunidade acadêmica. Resultado do trabalho produtivo de um grupo especializado, formado principalmente por intelectuais e cientistas que desenvolvem o chamado “conhecimento científico”, este saber torna-se público por meio de publicações específicas, como revistas e periódicos científicos ou em congressos.

Por outro lado, o “Saber a Ensinar” é uma versão adaptada do *Saber Sábio*, projetada especificamente para o contexto de ensino. Este envolve a simplificação e contextualização do conhecimento, tornando-o acessível e apropriado para o público-alvo em cada nível de ensino. Ou seja, é a etapa de transformação e reorganização do conhecimento acadêmico, com objetivo de facilitar a compreensão pelos alunos. É na elaboração do *saber a ensinar* que o professor faz as escolhas didáticas que irão interferir diretamente na percepção e na concepção que os alunos irão desenvolver do que será ensinado. Filho (2000) afirma que:

Existem diferenças entre o que professor prepara como material didático de sua aula e o que foi produzido pelo cientista, ou seja a ciência da sala de aula é diferente da ciência do cientista. Dos processos transformadores que ocorreram, o primeiro transformou o saber sábio em saber a ensinar. Este primeiro processo corresponderia a Transposição Didática externa, regida pelos grupos que compõe esta noosfera. No que concerne ao ensino em sala de aula ocorre novamente o fenômeno da Transposição Didática, só que neste espaço envolve a transfiguração do saber a ensinar em saber ensinado. (FILHO, 2000, p. 229)

A sala de aula seria o espaço de referência para definir o “Saber Ensinado”. Este representa o conhecimento que foi efetivamente absorvido pelos alunos ao longo do processo de ensino. É o resultado da implementação do *Saber a Ensinar* na sala de aula, refletindo o que os estudantes conseguiram assimilar e compreender.

De acordo com Silva (1997): “ao aluno compete o papel de transformar o saber que foi transmitido, em saber efetivamente aprendido, personalizando-o e inserindo-o em suas próprias representações a partir do saber apresentado pelo professor”. Porém, para que essa transformação aconteça, é fundamental que o professor considere o tempo de cada aluno e a maturidade necessária para cada aprendizagem. Por isso, Silva (1997), pondera que:

o modo de ensinar do professor está estreitamente ligado ao que ele pensa sobre a aprendizagem, o ensino, a matemática, a educação, a sua relação com o aluno, além da visão que tem do mundo e da sociedade em que vive. Enfim, o modo de ensinar reflete o que o professor é, em relação a sua competência profissional, a sua posição como cidadão e como ser humano. (SILVA, 1997, p. 32)

Podemos dizer que, na transposição didática, o saber ganha e constrói sentido na medida em que se consolida em um vínculo com a cultura escolar, mantendo alguma referência com a área de conhecimento da qual provém. Por este motivo, Grillo (1999) discute a temática da transposição didática muito mais como processo de diálogo:

Contrariando referências à Transposição Didática como um processo de transmissão, estudos recentes e mais próximos da realidade têm demonstrado que, na prática, estabelece-se um diálogo com os alunos. Dos questionamentos surgem indagações e problemas que encaminham à produção de um novo saber, construído na própria prática. (GRILLO, 1999, p. 7)

Afinal, conforme Henn e Caetano (2015) destacam: “tornar-se professor implica um processo contínuo de aprender e ensinar, compreendendo as variáveis e os diferentes atores envolvidos nessa dinâmica”. O professor, na prática docente diária, no esforço de transmitir seus conhecimentos aos alunos, traduz seu conhecimento científico acumulado em formas e estratégias de ensino, que validam a transformação efetivada durante esse processo.

Novamente em consulta ao banco de dissertações do PROFMAT, desta vez em busca de "Transposição Didática", foram encontrados três trabalhos cujo título continha o termo. Em todos, o objetivo era fazer uso dos princípios da Transposição Didática para estruturar as sequências propostas aos alunos.

Oliveira (2020), em sua dissertação intitulada como “A Transposição Didática no conceito de Ângulo: Uma análise em livros didáticos da Educação Básica” analisou em livros didáticos se o tratamento do conceito de ângulo propicia a abordagem da Transposição Didática e concluiu que a teoria pode ser um caminho para a construção dos saberes.

De modo semelhante, Mariano (2022) desenvolve uma sequência didática específica para o ensino de grupos de isometrias no plano euclidiano. Ele transforma conhecimentos científicos em exercícios e problemas práticos para os alunos, com o objetivo de desenvolver a escrita matemática dos estudantes e tornar a linguagem acessível. Segundo o autor, “a teoria moderna de grupos não é ensinada a nível médio e as isometrias mal são abordadas e/ou são apenas estudadas de forma superficial”. Para avaliar a eficácia e a aplicabilidade da sequência didática, Mariano realiza uma pesquisa qualitativa com professores de matemática. Eles foram convidados a analisar se a sequência atinge os objetivos propostos, se é interessante para os alunos, e se a linguagem e o nível de dificuldade estão adequados. Como conclusão, o autor observa que “ir imediatamente para as definições e a formalidade, causa o distanciamento da intuição e imaginação do estudante, nos levando ao enrijecimento da matemática e a aversão das crianças e jovens do querer aprender mais”. O autor define que “a Transposição Didática visa suavizar as barreiras do ‘saber sábio’ até chegar ao estudante através do ‘saber ensinado’.”

Já Silva (2018), em sua dissertação intitulada como “Filtros de imagens digitais: uma transposição didática para o ensino médio”, considerou que “a teoria da transposição didática foi utilizada

para adequar o conteúdo de processamento digital de imagens a alunos de ensino médio”. A autora propôs uma sequência didática cujos conteúdos de Matemática abordados eram proporcionalidade, funções (principalmente, análise de gráficos de funções), análise de histogramas e porcentagem. Esta sequência foi aplicada por 10 professores de Matemática e, como avaliação da viabilidade da proposta, Silva destaca a importância da criação de materiais didáticos sob a teoria da Transposição Didática para que os professores adaptem a sua metodologia de ensino à realidade em que os alunos estão inseridos. Salieta também sobre a falta de tempo hábil e de maiores conhecimentos, por parte dos professores, para desenvolver determinadas atividades, o que nos faz refletir sobre a prática do *saber a ensinar*.

Ao reconhecer as diferentes esferas do saber e a necessidade de uma abordagem pedagógica adequada, no presente trabalho, foi considerado, portanto, a transposição didática enquanto fenômeno característico das modificações entre conhecimento acadêmico e conhecimento escolar com o objetivo de desenvolver habilidades e correlacionar os saberes.

4 O ESTUDO DE FRAÇÕES POR MEIO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Este capítulo apresenta uma sequência didática com exemplos e exercícios que envolvem os conceitos das relações binárias, relações de equivalência e classes de equivalência, de modo a conceituar o conjunto dos números racionais por meio das propriedades destas relações. As atividades foram elaboradas para alunos do segundo ano do Ensino Médio, por meio de uma transposição didática de conceitos abordados no Ensino Superior, relacionando com regras e estratégias já trabalhadas pelos próprios alunos, durante o Ensino Fundamental.

O objetivo era que os alunos experienciassem uma nova linha de raciocínio, de modo a fundamentar algumas definições, em especial, as frações equivalentes e a operação de adição entre frações. Nesta oportunidade, também foi desenvolvida por meio das classes de equivalência, uma estratégia de resolução da operação de adição entre frações, conhecida pelos alunos como método borboleta. Além disso, dado que os alunos não estão acostumados a registrar de forma genérica conceitos abordados em aula, esta acabou sendo uma das habilidades que foram desenvolvidas com os exercícios apresentados.

Inicia-se com uma breve descrição da turma na qual as atividades foram executadas e, em seguida, aborda-se um relato detalhado da aplicação da proposta e análise de algumas das respostas dos alunos.

4.1 DESCRIÇÃO DA TURMA

A proposta didática foi aplicada em outubro de 2023, em uma turma do segundo ano do Ensino Médio, no Colégio Estadual 8 de Setembro, da cidade de Estância Velha/RS. Localizada em região central, a escola atende, aproximadamente, 60% dos alunos advindos da rede municipal de ensino. Por sua localização, possui um público misto, tanto no quesito de renda, quanto de aprendizagem.

A turma em questão, cuja autora é professora referência de Matemática, é composta por 23 alunos, sendo um deles atendido com atividades domiciliares e uma aluna infrequente. De modo geral, possui alunos com boas médias, não apenas em Matemática, com boa postura diante dos desafios e abertos a propostas diferentes.

No entanto, um problema que tangencia o ensino, tanto como consequência do ensino remoto adotado durante a pandemia quanto pela época do ano em que o trabalho foi aplicado (terceiro trimestre), é a frequência irregular dos alunos. Infelizmente, dadas algumas fragilidades do sistema escolar, como a falta de professores, que faz com que os alunos tenham períodos vagos durante o turno, e as inúmeras oportunidades de recuperação ao final do ano letivo, os alunos se distanciam da rotina escolar e da troca diária com professores e colegas, o que é fundamental para a construção de um aprendizado sólido. Isso os faz acreditar que a aprovação está garantida e que isso é o suficiente. Sendo assim, uma atividade que demanda tempo, como esta, dificilmente será contemplada por todos os alunos em sua integralidade, o que fragiliza a construção do conhecimento

como um todo.

O material, elaborado pela autora dessa dissertação, foi planejado especialmente para essa aplicação. Todos os exercícios propostos foram organizados visando o avanço gradual dos conceitos. Dado que é a primeira experiência, mesmo a autora já conhecendo os alunos, a proposta poderia sofrer alterações ao longo da aplicação, afinal o principal objetivo é tornar a aprendizagem significativa, considerando as experiências dos alunos.

A atividade foi organizada da seguinte forma:

- **Conteúdo:** Conjunto dos números racionais.
- **Objetivo Geral:** Compreender, sob a perspectiva de classes de equivalência, o conceito das Frações Equivalentes e a operação de adição de frações.
- **Objetivos Específicos:**
 - Desenvolver habilidades de leitura, interpretação e escrita da Matemática, com uso de simbologia específica;
 - Correlacionar os saberes sobre o conjunto dos números racionais e as relações binárias e de equivalência;
 - Compreender a representatividade de uma fração como um conjunto de frações equivalentes;
- **Tema:** Conjunto dos números racionais – Frações Equivalentes e Adição de Frações.
- **Tempo de Aula:** 10 períodos de 45 minutos cada, totalizando 7h30min de aula.
- **Turma:** 2º ano do Ensino Médio
- **Metodologia:** Organizados em grupos, cada aluno receberá o material impresso em duas etapas, e desenvolverá as atividades propostas. Ao longo do período, com base nas colocações, dúvidas e conclusões dos alunos, a professora fará a resolução/correção colaborativa, registrando no quadro as respostas de cada exercício.
- **Avaliação:** Será observada a postura individual, ativa, questionadora do aluno, objetivando o seu progresso ao longo do período. Considerando seus conhecimentos prévios, será instigada a sua participação, estimulando-o com perguntas e com a socialização de suas opiniões, além de atividades com registro, contribuindo para a identificação do real aprendido. Pondera-se que a atividade terá sido positiva se os alunos demonstrarem a compreensão da relação entre os assuntos abordados e se responderem corretamente os exercícios propostos.

4.2 AS ATIVIDADES PROPOSTAS

A seguir, são apresentados os exemplos e exercícios presentes na sequência didática. O material inicia com a definição das relações binárias. Para maiores detalhes sobre o assunto, bem como, um aporte teórico mais aprofundado, sugere-se Oliveira (2017) e Soares (1999).

Dado que um dos objetivos deste trabalho consiste na prática da habilidade de leitura e interpretação, as atividades foram inicialmente propostas à resolução dos alunos e, posteriormente, corrigidas no grande grupo.

Conforme a Figura 1, a simbologia matemática é utilizada como desafio, além de aproximar e familiarizar o aluno com determinada formalidade de escrita.

Figura 1 – A atividade: Primeiros exemplos

1 Relações Binárias

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma relação binária é um subconjunto de pares ordenados (a, b) , com $a \in A$ e $b \in B$, que pode ser definida de várias maneiras, dependendo das propriedades e restrições que são estabelecidas. Em outras palavras,

Definição 1.1. *Uma relação binária R de A em B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.*

No caso em que $A = B$, dizemos que a relação binária R de A em B é simplesmente uma relação em A . Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.2. *O subconjunto $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; a - b = 1\}$ é uma relação binária em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Vamos determinar alguns pares desta relação?*

Fonte: Autora (2024)

O objetivo deste exemplo é estudar relações por meio de uma operação conhecida, como a subtração. Dado o exemplo da diferença entre dois números, o material segue com uma relação de divisibilidade (Figura 2). A intenção é de que o aluno compreenda a ordem dada na relação e busque exemplos numéricos que a ilustrem.

Figura 2 – A atividade: Relação Binária - Divisibilidade

Exemplo 1.3. *O subconjunto $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; a \text{ é divisível por } b\}$ é uma relação binária. Vamos determinar alguns pares desta relação?*

Fonte: Autora (2024)

Por meio deste exercício, busca-se destacar a importância da representação dos resultados em pares ordenados.

Na Figura 3, apresenta-se a definição de relações de equivalência. A apropriação desta definição é de suma importância para a continuidade das atividades a serem propostas. Concomitantemente, sabe-se das dificuldades inerentes a esta apropriação, tendo em vista ser esta definição uma das abstratas e, possivelmente, mais complicadas, presentes neste material. Por isso, o objetivo do exercício 1.5, é fazer a transcrição das propriedades para a linguagem usual e construir exemplos que auxiliem na compreensão de cada uma delas.

Figura 3 – A atividade: Definição das Relações de Equivalência

1.1 Relações de Equivalência

A partir de agora, estudaremos um tipo especial de relação binária. Utilizaremos a notação aRb para dizer que $(a, b) \in R$.

Definição 1.4. *Uma relação de equivalência é uma relação binária R sobre um conjunto A que necessariamente satisfaz três propriedades fundamentais:*

- *Reflexividade: Para todo elemento $a \in A$, temos que aRa .*
- *Simetria: Se aRb então bRa , para quaisquer $a, b \in A$.*
- *Transitividade: Se aRb e bRc , então aRc , para quaisquer $a, b, c \in A$.*

Vamos estudar esta definição por meio de alguns exemplos.

Exemplo 1.5. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ elementos quaisquer. Consideremos a relação binária R em \mathbb{N} definida por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2. Mostraremos que \sim é uma relação de equivalência.*

Fonte: Autora (2024)

Tem-se ciência de que essa possa ser uma das etapas mais desafiadoras do material, dado que a demonstração das propriedades ultrapassa os exemplos numéricos e requer apropriação para o registro genérico. Sendo assim, na sequência é proposto um exercício (Figura 4) no qual serão desenvolvidas as demonstrações das propriedades.

Figura 4 – A atividade: Demonstração das propriedades das relações de equivalência

Vamos praticar um pouco mais?

Exercício 1.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ elementos quaisquer. Consideremos a relação binária R em \mathbb{N} definida por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 3. Mostre que \sim é uma relação de equivalência.*

Fonte: Autora (2024)

Como os alunos estarão em pequenos grupos, o exercício 1.6 é um desafio para a generalização dos conceitos anteriormente discutidos no grande grupo, durante as correções dos exemplos. Idealiza-se que, a partir das conversas e discussões entre colegas, consigam encontrar exemplos numéricos que satisfazem cada propriedade e, a partir deles, esboçar de forma genérica a demonstração.

Na sequência, apresenta-se o exercício 1.7, na Figura 5, o qual requer do aluno a identificação de pares ordenados que satisfaçam a relação.

Figura 5 – A atividade: Relação entre pares ordenados

Exercício 1.7. *Seja \mathbb{Z}^* o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$. Cite cinco exemplos numéricos que satisfazem essa relação.*

Fonte: Autora (2024)

Esse exercício foi importante para identificar a compreensão do aluno sobre a interpretação

da escrita genérica da relação. Considerando que, a partir de então, a relação tinha sido definida por meio de pares ordenados, esse exercício foi um passo importante no avanço do conteúdo, uma vez que o tópico subsequente sobre adição, abordado no final deste material, demandava o desenvolvimento prévio das relações definidas por pares ordenados.

Após a discussão e correção do exercício 1.7, foi realizada a demonstração de tal relação como uma relação de equivalência, conforme Figura 6.

Figura 6 – A atividade: Relação de equivalência entre inteiros

1.2 Relações de Equivalência nos Inteiros

Seja \mathbb{Z}^* o símbolo que representa o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação de equivalência, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

com $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Mostraremos que \sim é uma relação de equivalência.

Fonte: Autora (2024)

O objetivo de ter novamente solicitado a demonstração foi realmente envolver o aluno no processo de abstração do conteúdo. Evidentemente, foram observadas as possíveis dificuldades no desenvolvimento das questões anteriores e, com base na compreensão dos alunos, essa demonstração foi desenvolvida no quadro, observando-se o seu grande grau de dificuldade.

Estimava-se que, com os exemplos e exercícios propostos até aqui, os alunos tivessem compreendido as relações binárias e as propriedades das relações de equivalência. Posto isso, na sequência, foi apresentada a definição das classes de equivalência, conforme Figura 7.

Figura 7 – A atividade: Exemplos sobre as classes de equivalência

1.3 Classes de Equivalência

Seja \sim uma relação de equivalência em um conjunto A . Para cada $a \in A$, obtemos um subconjunto especial, definido a seguir:

Definição 1.8. *A classe de equivalência de a pela relação \sim é o conjunto $\bar{a} = \{x \in A; x \sim a\}$.*

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.9. *Consideremos a relação \sim definida em \mathbb{N} por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Na aula anterior, que \sim é uma relação de equivalência. Vamos determinar as classes $\bar{0}$ e $\bar{1}$. O que cada uma delas representa?*

Fonte: Autora (2024)

O exemplo 1.9 foi resolvido em conjunto. O objetivo era compreender minuciosamente cada item presente na definição de classes de equivalência por meio do comportamento dos restos da divisão por dois. Pretendia-se, naquele momento, classificar os números naturais em dois grupos: um para o resto 0 e outro para o resto 1, e, por fim, defini-los como conjuntos $\bar{0}$ e $\bar{1}$, conforme definição 1.8, presente na Figura 7. O objetivo era que, com esse exemplo, percebessem as classes

de equivalência como conjuntos de números “com mesmo comportamento” perante determinada relação.

Visto isso, segue o exemplo 1.10 (Figura 8), no qual foi solicitada a identificação das classes de equivalência na divisão por 3, registrando-as na forma de conjunto, conforme a definição 1.8 (Figura 7).

Figura 8 – A atividade: Exercícios sobre as classes de equivalência

Exemplo 1.10. *Seja a relação \sim definida em \mathbb{N} por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 3, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Em quantas classes a relação \sim divide o conjunto \mathbb{N} ? Quais serão estas classes?*

Fonte: Autora (2024)

Durante todo processo de aplicação do roteiro, a questão do curto intervalo de tempo para aplicação e análise de resultados foi determinante para o avanço do conteúdo. Considerava-se que os dois exemplos seriam suficientes para a compreensão das classes de equivalência. Portanto, no exercício 1.11 (Figura 9), os alunos foram desafiados a identificar as classes de equivalência de pares ordenados. No item (a) foram solicitados exemplos numéricos, os quais foram organizados como conjuntos conforme o item (b).

Figura 9 – A atividade: Exercícios de aplicação

Exercício 1.11. *Seja \mathbb{Z}^* o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

com $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^$.*

a) Cite alguns exemplos numéricos de pares ordenados que satisfazem essa relação.

b) Obtenha as classes de $\bar{a} = \overline{(1, 2)}$, $\bar{b} = \overline{(2, 3)}$ e $\bar{c} = \overline{(3, 5)}$.

Fonte: Autora (2024)

Ressalta-se que, no item (a), não há indicação de pares e o objetivo disso é permitir com que o aluno estude a relação definida de forma livre. Caso surjam pares como, por exemplo, $(2, 7) \sim (4, 14)$ e $(2, 7) \sim (10, 35)$, os mesmos serão explorados, no item (b), por meio da classe $\overline{(2, 7)}$.

Finalizada esta primeira etapa do conteúdo, enuncia-se o estudo do conjunto dos números racionais, definindo-o conforme consta na Figura 10. Neste momento, retoma-se com atenção a leitura e interpretação da simbologia matemática, fazendo referência agora a todos os tópicos previamente abordados.

Figura 10 – A atividade: Definindo o conjunto dos números racionais

1.4 O Conjunto dos Racionais

Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ elementos quaisquer. Na última aula, vimos que

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

é uma relação de equivalência. Com isso, \sim cria partições no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denominadas classes de equivalência, e denotadas por $\overline{(a, b)}$, onde

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y) \sim (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; xb = ya\}.$$

Exemplo 1.12. Vamos obter as classes $\overline{(1, 3)}$, $\overline{(2, 5)}$ e $\overline{(6, 12)}$.

Fonte: Autora (2024)

Sugeriu-se então o exemplo 1.12, em que novamente foram definidas as classes dos pares em questão, para, na sequência, reescrevê-los na forma de fração, conforme Figura 11.

Figura 11 – A atividade: A representação na forma de fração

Definição 1.13. O conjunto dos números racionais, representado por \mathbb{Q} , é constituído pela união de todas as classes de equivalência obtidas mediante \sim . Em outras palavras, \mathbb{Q} é formado por pares ordenados de números inteiros, nos quais o segundo elemento de cada par é diferente de zero.

No entanto, a representação do conjunto dos racionais com pares ordenados é muito trabalhosa, principalmente para realizar operações, ou seja, fez-se necessário o uso de simbologia adequada que facilite o desenvolvimento dos cálculos. Para isso, vamos escrever a classe $\overline{(a, b)}$, equivalentemente, como $\frac{a}{b}$. Assim,

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; xb = ya\}.$$

Ou seja,

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

Com isso, ressaltamos que cada número racional, é, na verdade o representante de uma classe de equivalência. À expressão $\frac{a}{b}$ chamamos de fração.

Exemplo 1.14. Reescreva as classes $\overline{(1, 3)}$, $\overline{(2, 5)}$ e $\overline{(6, 12)}$ na forma de fração.

Fonte: Autora (2024)

Ou seja, a partir da definição e simplificação da escrita da classe $\overline{(a, b)}$, os alunos reescrevem as classes de equivalências na forma de fração $\frac{a}{b}$ resultando na identificação do conjunto de frações equivalentes. Inicialmente, a relação $xb = ya$ pode parecer artificial; contudo, é precisamente nessa relação que as frações equivalentes são identificadas.

Neste momento, é válida a discussão das estratégias para obter as classes de equivalência, na relação que define o conjunto dos números racionais, e a correlacionar com o método que usam para obter frações equivalentes, conhecido por simplificação de frações. Se necessário, podem ser acrescentados mais exemplos.

Como última etapa desta sequência didática, é apresentada a operação de adição nos racionais, conforme ilustra a Figura 12.

Figura 12 – A atividade: A adição nos racionais na forma de classes de equivalência

1.4.1 A Adição nos racionais

Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}, \beta = \overline{(c, d)} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Chamamos de adição em \mathbb{Q} a operação assim definida:

$$\alpha + \beta = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(ad + bc, bd)}$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.15. Calcule $\overline{(1, 3)} + \overline{(2, 5)}$.

Exemplo 1.16. Calcule $\overline{(1, 3)} + \overline{(6, 12)}$.

Fonte: Autora (2024)

Dada a definição, os exemplos 1.15 e 1.16 são resolvidos na forma de par ordenado. Somente os exemplos 1.17 e 1.18, que constam na Figura 13, serão reescritos na forma de fração.

Figura 13 – A atividade: A adição nos racionais na forma de fração

Considerando $m = \frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{d}$, elementos quaisquer de \mathbb{Q} , temos que a adição entre racionais, na forma de fração, é equivalente a

$$m + n = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Exemplo 1.17. Já vimos que

$$\overline{(1, 3)} + \overline{(2, 5)} = \overline{(1 \cdot 5 + 3 \cdot 2, 3 \cdot 5)} = \overline{(11, 15)}.$$

Vamos reescrever esta igualdade usando a notação de fração.

Exemplo 1.18. Já vimos que

$$\overline{(1, 3)} + \overline{(6, 12)} = \overline{(1 \cdot 12 + 3 \cdot 6, 3 \cdot 12)} = \overline{(30, 36)} = \overline{(5, 6)}.$$

Vamos reescrever esta igualdade usando a notação de fração.

Fonte: Autora (2024)

Esperava-se que o aluno identificasse a estratégia por ele conhecida como “método borboleta” considerando-a uma alternativa rápida de resolução, sem fazer uso do mínimo múltiplo comum entre os denominadores. É válido ressaltar que a atividade não objetivava justificar ou motivar o uso do método, mas sim identificá-lo como um dos possíveis métodos de resolução.

Para finalizar, foi proposto o exercício 1.19, que consta na Figura 14, no qual o aluno realizou a adição tanto usando a notação de classes de equivalências, quanto na forma de fração e, por fim, registrou suas observações.

Figura 14 – A atividade: A adição nos racionais - exercício

Agora é com você!

Exercício 1.19. Calcule $\overline{(5, 2)} + \overline{(4, 8)}$:

a) usando a notação de classe de equivalência.

b) usando a notação de fração.

c) O que podemos concluir ao comparar os cálculos obtidos em (a) e (b)?

d) Defina, de forma mais geral, a operação de adição em \mathbb{Q} a partir da notação de frações.

Fonte: Autora (2024)

4.3 RELATO SOBRE A APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

A aplicação ocorreu ao longo de seis encontros, com cada dia compreendendo um ou dois períodos. Inicialmente, a turma foi informada sobre as atividades dos próximos dias, já que seria a única turma, dentre as seis turmas de segundo ano da escola, a realizar essas atividades. Os alunos receberam a proposta com atenção, demonstrando motivação e curiosidade.

A atividade foi proposta para apenas uma turma, pois foi aplicada durante o horário regular de aula, sendo, desta forma, necessário fazer uma “pausa” no conteúdo previsto no plano de trabalho. Ou seja, foram avaliados aqueles que teriam condições de ajustar o tempo para trabalhar nos demais conteúdos previstos. Além disso, foi considerado o perfil da turma para desenvolver as atividades idealizadas neste material, levando em conta o nível de conhecimento algébrico que seria abordado, sendo fundamental selecionar alunos com certa maturidade matemática e disposição para aprender sob uma abordagem diferente.

Considerando que o material apresentava uma linguagem mais robusta, os alunos, organizados em grupos por afinidade, foram instigados a ler, interpretar e tentar resolver os primeiros exemplos, mesmo antes da explicação.

Durante essa fase inicial, foram feitos registros escritos e observações informais para analisar as ações dos alunos, incluindo seu engajamento para resolver os problemas e disposição para solicitar ajuda ou pesquisar sobre o assunto. Reconhecendo que a dificuldade de interpretação e a falta de atenção dos alunos são desafios comuns na rotina da sala de aula, essas informações foram posteriormente analisadas e utilizadas para adaptar as atividades conforme necessário. Isso garantiu uma abordagem mais eficaz e personalizada, alinhada com as necessidades e habilidades individuais dos alunos.

Ao longo das aulas, após observar os comentários feitos pelos alunos, as discussões sobre as simbologias utilizadas no material e as possíveis respostas, era feita correção colaborativa, registrando no quadro os resultados obtidos por cada grupo. Sempre que necessário, eram feitas alterações nestas respostas e demais explicações, para que todas as etapas do processo fossem realmente compreendidas pelos alunos.

No que segue, descreve-se como decorreram as atividades em cada dia da aplicação.

4.3.1 Primeiro encontro - definindo as relações

Inicialmente, foram retomados os objetivos da atividade. Em conversa descontraída, os alunos foram questionados sobre suas principais dificuldades e, ao citarem as frações e situações problema, iniciou-se a resolução dos exercícios.

Já nos primeiros exemplos, curiosos, ao receberem o material, os alunos se movimentaram para a resolução, demonstraram familiaridade com parte da escrita e compararam os conceitos apresentados com os estudados no primeiro ano, especialmente em relação às funções. No entanto, logo em seguida, surgiram inquietações em relação a símbolos matemáticos desconhecidos, o que dificultou a compreensão inicial das tarefas propostas.

Ao transitar pela sala de aula e observar as colocações e discussões entre os grupos, os alunos foram motivados a expressarem suas dúvidas e dificuldades, promovendo discussões colaborativas para esclarecer o significado e o uso adequado dos símbolos. Durante esse processo, foram feitos registros importantes no quadro, abordando tanto os símbolos dos conjuntos numéricos quanto a notação de pares ordenados. Esses registros foram essenciais para consolidar o aprendizado e fornecer referências visuais para os alunos. Assim, concluíram os dois primeiros exemplos com êxito, conforme ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Exemplos de relações binárias - anotações de aluno

Exemplo 1.2. O subconjunto $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a - b = 1\}$ é uma relação binária em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Vamos determinar alguns pares desta relação? *tal que*

$\in = \text{pertence}$
 $\mathbb{N} = \text{natural}$
 $\mathbb{Z} = \text{inteiro}$

Ex: $(2.000, 1.999)$
 $(9, 8)$
 $(37, 36)$

Exemplo 1.3. O subconjunto $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \text{ é divisível por } b\}$ é uma relação binária. Vamos determinar alguns pares desta relação?

$R = \text{relação}$
 $a = \text{"morador"}$
 $A = \text{"cidade"}$

Ex: $(4, 2)$
 $(6, 3)$
 $(8, 2)$

Fonte: Autora (2024)

Na Figura 15 cabe destaque às anotações de um aluno, que abordam tanto o significado da simbologia de conjuntos, quanto a relação estabelecida pelo próprio aluno entre os conectores. Neste momento, já se corrobora a tese sobre as dificuldades matemáticas derivarem, em grande parte, da interpretação inadequada do enunciado. Por isso, é fundamental a adaptação da linguagem formal, bem como a associação de significados aos símbolos, em especial, da Matemática.

Após a exemplificação, foi apresentada a definição das Relações de Equivalência, enfatizando a verificação das três propriedades fundamentais: *reflexividade, simetria e transitividade*. Durante a construção colaborativa dos conceitos e com a utilização de exemplos numéricos, a mai-

oria dos alunos demonstrou compreender os critérios que definem uma relação de equivalência. Arriscaram-se, inclusive, na representação genérica das propriedades. No entanto, apesar de terem sido registrados no quadro, alguns alunos enfrentaram dificuldades em reproduzir corretamente esses conceitos em seu material, o que pode ser atribuído a não apropriação da simbologia.

4.3.2 Segundo encontro - definindo as propriedades das relações

No segundo encontro, houve alteração no cronograma. Já no início da aula, um grupo de alunos relatou não ter entendido de fato a generalização das relações de equivalência e estavam incomodados com o nível de dificuldade do material. Outros ainda estavam agoniados sobre como seriam avaliados e questionaram se era realmente importante que fizessem as atividades, pois caso não fosse avaliativo, não tinham o porquê fazê-las.

Diante desses questionamentos, percebeu-se uma oportunidade valiosa para promover troca e reflexão. Durante uma conversa produtiva, os alunos foram incentivados a refletir sobre como esses comportamentos afetam diretamente sua compreensão, aplicação e generalização das propriedades que estudam na Matemática, uma vez que não se permitem vivenciar o processo, ou até mesmo progresso, de aprendizado. O desejo de passar na prova supera, com destaque, o prazer de aprender, compreender e generalizar. Infelizmente, poucos alunos percebem o aprendizado como um processo contínuo e para a vida.

Durante a conversa, os alunos se sentiram à vontade para dialogar sobre a construção do conhecimento, dado que tanto ouvem falar sobre serem os *protagonistas*, porém não é desta forma que se percebem, atrelado a isto o sentimento de não serem ouvidos. Neste momento, foram questionados sobre a postura e receptividade quanto às propostas diferenciadas, bem como sua dedicação ao se depararem com as dificuldades.

A professora percebeu que, ao mesmo tempo em que os alunos solicitavam protagonismo por meio de atividades diferenciadas, não havia pró-atividade por parte deles. Com os alunos pensativos, a conversa voltou-se para os exemplos trabalhados na última aula, adaptando-se a escrita das propriedades para a linguagem usual, conforme Figura 16:

Figura 16 – Anotações dos alunos sobre as relações de equivalência - anotações de aluno

1.1 Relações de Equivalência

A partir de agora, estudaremos um tipo especial de relação binária. Utilizaremos a notação aRb para dizer que $(a, b) \in R$.

Definição 1.4. Uma relação de equivalência é uma relação binária R sobre um conjunto A que necessariamente satisfaz três propriedades fundamentais:

- Reflexividade: Para todo elemento $a \in A$, temos que aRa . - Um n^o pode relacionar consigo seguindo a regra
- Simetria: Se aRb então bRa , para quaisquer $a, b \in A$. - A ordem dos elementos não deve alterar eles diant
te da regra.
- Transitividade: Se aRb e bRc , então aRc , para quaisquer $a, b, c \in A$. - Se A combina com B e B combina
com C (pois tem o msm resto) então A combina com
 C .

Vamos estudar esta definição por meio de alguns exemplos.

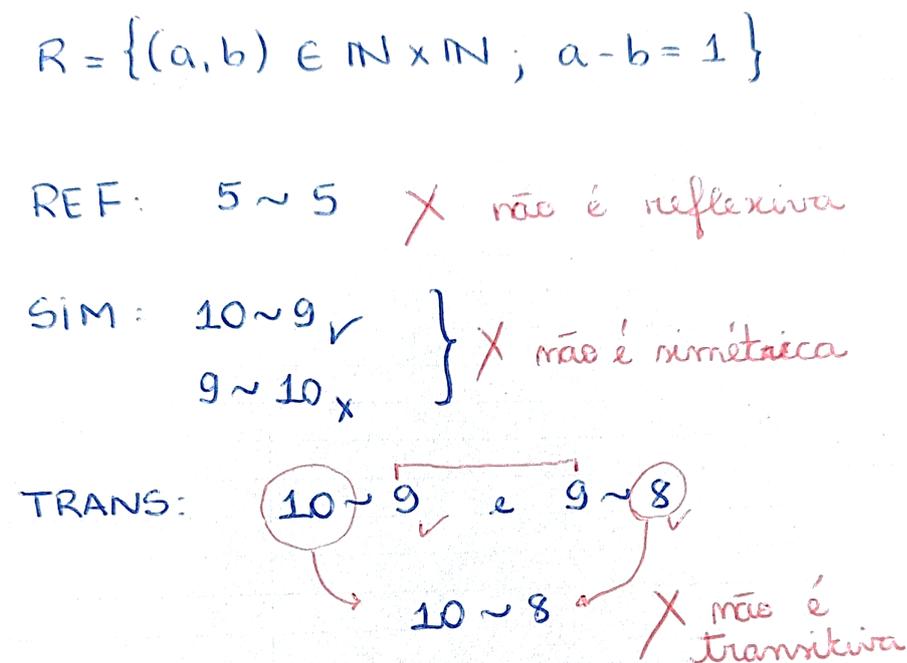
Fonte: Autora (2024)

A Figura 16 representa os registros produzidos pelos alunos, a partir da explicação feita

no quadro, reescrevendo as propriedades em uma linguagem mais familiar. Esses registros refletem não apenas a capacidade dos alunos de aplicar conceitos matemáticos, mas também sua habilidade de comunicação e interpretação, bem como a capacidade de adaptação de conceitos complexos para diferentes públicos. Afinal, analisar as informações, pensar sobre elas e expressar de forma escrita, aprimora não apenas o ler e o escrever, mas a construção do conhecimento global matemático. De acordo com Malta (2004), o desenvolvimento da capacidade de expressão do próprio raciocínio, através da leitura e escrita, promove o desenvolvimento da capacidade de compreensão da Matemática. Aprender a ler e escrever em Matemática precede o desenvolvimento real do pensamento e do conhecimento matemático.

Dando continuidade, ao interpretar o termo *reflexividade* como “reflexo”, esta propriedade foi compreendida como a relação entre elementos iguais. Por outro lado, a *simetria* foi associada à ideia de eixo de simetria, sendo entendida como a troca de lugares entre os elementos. Contudo, para uma compreensão mais abrangente das propriedades, além dos exemplos numéricos, o uso de contraexemplos mostrou-se fundamental. A apresentação de situações em que as propriedades não se aplicam contribuiu significativamente para solidificar o entendimento dos conceitos, permitindo aos alunos visualizarem as limitações das propriedades em questão. Por meio da relação $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; a - b = 1\}$, percebeu-se, conforme Figura 17, que as propriedades de reflexividade e simetria não são válidas, assim como a transitividade.

Figura 17 – Registro de contraexemplos das propriedades - anotações de aluno



Fonte: Autora (2024)

Através deste contraexemplo, os alunos demonstraram uma melhor compreensão da terceira propriedade, a transitividade. Eles perceberam que, mesmo o 9 estando presente nos dois pares, a ordem em que ele aparece faz diferença. Inclusive citaram outros exemplos como $7 \sim 6$ e

$6 \sim 5$, que, segundo suas próprias palavras, “formam” $7 \sim 5$, que é falso; assim como, $12 \sim 11$ e $11 \sim 10$, que “formam” $12 \sim 10$, que é falso. Nas palavras deles, apesar de haver o “encaixe” entre os pares relacionados (elementos centrais iguais), é necessário que o novo par formado também satisfaça a relação.

Na sequência, após novas explicações e registro de vários exemplos numéricos, os alunos resolveram o exemplo 1.5, recorrendo à exemplificação numérica antes da generalização. Na Figura 18, apresentam-se os registros dos alunos, nos quais aparentemente comparam os exemplos numéricos com as definições das propriedades, agora expressas inclusive com apropriada simbologia. Esta etapa é fundamental, pois marca a transição dos exemplos numéricos para a generalização, um passo crucial no processo de aprendizado.

Figura 18 – Registro dos alunos sobre as propriedades - anotações de aluno

Exemplo 1.5. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ elementos quaisquer. Consideremos a relação binária R em \mathbb{N} definida por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2. Mostraremos que \sim é uma relação de equivalência.

$\sim =$ Conexão [sem {}]

Ex: $4 \sim 2$
 $8 \sim 18$
 $10 \sim 6$
 Resto 0

$7 \sim 3$
 $5 \sim 19$
 $25 \sim 11$
 Resto 1

Reflexividade: $2 \sim 2$ $5 \sim 5$ $20 \sim 20$
 Simetria: $21 \sim 19$ $36 \sim 20$ $3 \sim 9$
 Transitividade: $2 \sim 4 \sim 6$ $5 \sim 7 \sim 3$

Reflexividade: $a \sim b$ pois invertido dá o mesmo número.

Simetria: $a \sim b$ pois invertido dá o mesmo resto, $b \sim a$.

Transitividade: $a \sim b \sim c$ pois invertido dá o mesmo resto, então um terceiro número também dá o mesmo resto.

Fonte: Autora (2024)

Situações em que o planejamento da aula difere do esperado, como o ocorrido no segundo dia, são desafiadoras aos docentes. Nestes casos, é fundamental uma intervenção pedagógica e, se necessário, mudança no planejamento inicial, respeitando a realidade e as necessidades dos alunos. Agindo de forma calma e, sobretudo, com sensibilidade, é possível que o processo seja relevante desde o início. Afinal, segundo Vasconcellos (2012), a aprendizagem ocorre quando o professor proporciona ao aluno condições de estudo adequadas, oferecendo situações e atividades que estimulam o aprendizado contínuo e estimulante.

Apesar de terem sido retomados alguns tópicos no segundo dia, ao negligenciar as lacunas de aprendizado, corre-se o risco de deixar os alunos desvinculados do objetivo principal que é gerar um aprendizado efetivo e duradouro. É essencial, portanto, manter os alunos engajados e atentos durante o processo, permitindo que participem ativamente do desenvolvimento do conteúdo. Isso implica proporcionar oportunidades para fazerem perguntas, expressarem suas dúvidas e contribuírem para as discussões em sala de aula. Quando os alunos estão verdadeiramente envolvidos e são capazes de acompanhar o passo-a-passo na evolução do conteúdo, as chances de assimilação e retenção do conhecimento aumentam significativamente.

4.3.3 Terceiro encontro - demonstração das propriedades

No terceiro encontro, os alunos continuaram organizados em pequenos grupos para dar sequência à resolução dos exercícios. Na Figura 19, é ilustrado o exercício 1.6 no qual, apesar da facilidade na identificação dos exemplos numéricos, observou-se que os alunos ainda utilizam uma linguagem usual ao demonstrar as propriedades, revelando fragilidades relacionadas ao registro genérico da demonstração.

Por exemplo, na generalização da propriedade de *simetria*, apesar dos exemplos numéricos estudados, os alunos encontraram dificuldades em aplicar a linguagem matemática formal para descrevê-la.

Figura 19 – Registro de exemplos numéricos e do raciocínio das propriedades - anotações de aluno

Exercício 1.6. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ elementos quaisquer. Consideremos a relação binária R em \mathbb{N} definida por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 3. Mostre que \sim é uma relação de equivalência.

Resto 0	Resto 1	Resto 2
$6 \sim 3$ $9 \sim 12$	$7 \sim 10$	$8 \sim 11$

Os números podem relacionar consigo mesmos

Reflex: $6 \sim 6$ ✓
 $10 \sim 10$ ✓
 $11 \sim 11$ ✓

sim, pois $(a \sim b)$ sempre a regra

simetria: $6 \sim 3 = 3 \sim 6$ ✓
 $7 \sim 10 = 10 \sim 7$ ✓
 $8 \sim 11 = 11 \sim 8$ ✓

Podem trocar a ordem (não muda)

sim, porque se (a) deixa o mesmo resto que (b) então pode se relacionar $a \sim b$ e $b \sim a$

Trans: $6 \sim 3$ e $3 \sim 9$ então $\rightarrow 6 \sim 9$

se (b) tem o mesmo resto e pode se relacionar com (a) e (c) então (a) e (c) possuem o mesmo resto e podem se relacionar.

Fonte: Autora (2024)

Essa dificuldade pode ser atribuída, em parte, ao fato de que muitos alunos estavam tendo seu primeiro contato com esse tipo de registro. Segundo Salvador et al. (2000),

a aquisição de novos conhecimentos - como a aquisição espontânea ligada ao desenvolvimento, ou diretamente ligada a uma situação específica do ensino - implica, para Piaget, 'uma sucessão de desequilíbrios - ajuste - novos equilíbrios - desequilíbrios, etc'. Essa citação de Piaget destaca a complexidade do processo de aprendizado e como os alunos passam por uma série de desequilíbrios e ajustes ao adquirirem novos conhecimentos, o que pode explicar em parte as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução dos exercícios. (SALVADOR et al., 2000)

É fundamental ressaltar que um dos objetivos da atividade é justamente desenvolver as habilidades de leitura e escrita, logo o processo de abstração deve ser valorizado e respeitado. Essa

etapa de transição para uma linguagem mais formal é um passo importante no desenvolvimento matemático dos alunos e requer apoio e orientação adequados por parte do professor.

No exercício 1.7, ilustrado na Figura 20, os alunos demonstraram facilidade na compreensão da exemplificação numérica, ocasionada pelo estudo da questão anterior. Utilizando diferentes estratégias de resolução e associação, as discussões entre os grupos foram extremamente produtivas. Por exemplo, alguns grupos optaram por construir o primeiro par (a, b) e, em seguida, procurar (c, d) que cumprisse a relação, enquanto outros identificaram a relação entre os números a e d e, posteriormente encontravam b e c , para então registrar a relação $(a, b) \sim (c, d)$.

Figura 20 – Registro de exemplos numéricos e raciocínio do registro genérico das propriedades - anotações de aluno

Exercício 1.7. Seja \mathbb{Z}^* o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$. Cite cinco exemplos numéricos que satisfazem essa relação.

The image shows five handwritten examples of the relation $(a, b) \sim (c, d)$ where $a + d = b + c$. Each example uses a hook to connect the numbers being summed:

- Example 1: $(-7, 6) \sim (5, 4)$. A hook connects -7 and 4 (sum 11), and another hook connects 6 and 5 (sum 11).
- Example 2: $(6, 4) \sim (5, 3)$. A hook connects 6 and 3 (sum 9), and another hook connects 4 and 5 (sum 9).
- Example 3: $(8, 7) \sim (2, 1)$. A hook connects 8 and 1 (sum 9), and another hook connects 7 and 2 (sum 9).
- Example 4: $(1, 2) \sim (5, 6)$. A hook connects 1 and 6 (sum 7), and another hook connects 2 and 5 (sum 7).
- Example 5: $(7, 9) \sim (4, 3)$. A hook connects 7 and 3 (sum 10), and another hook connects 9 and 4 (sum 10).

Fonte: Autora (2024)

Percebe-se, pela figura 20, que os alunos fizeram registro semelhante a um gancho para indicar os termos que seriam somados. Já na Figura 21, o aluno preferiu realizar as operações e, na sequência, registrar na forma de par ordenado.

Figura 21 – Registro de exemplos - anotações de aluno

Exercício 1.7. Seja \mathbb{Z}^* o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$. Cite cinco exemplos numéricos que satisfazem essa relação.

$$\begin{array}{l}
 4 + 4 = 2 + 3 \quad (1, 3) \sim (2, 4) \\
 2 + 5 = 3 + 4 \quad (2, 4) \sim (3, 5) \\
 3 + 6 = 4 + 5 \quad (3, 5) \sim (4, 6) \\
 4 + 7 = 5 + 6 \quad (4, 6) \sim (5, 7) \\
 5 + 8 = 6 + 7 \quad (5, 7) \sim (6, 8) \\
 -2 + 9 = 1 + 2 \quad (-2, 9) \sim (1, 2) \\
 -3 + 10 = -7 + 14 \quad (-3, 10) \sim (-7, 14) \\
 -4 + (-1) = -3 + (-2) \quad (-4, -1) \sim (-3, -2)
 \end{array}$$

Fonte: Autora (2024)

Com diferentes estratégias, treinando a autonomia, associaram corretamente a escrita genérica com a relação solicitada. No registro da Figura 21 há erros na passagem para a escrita como par ordenado, o que, pela propriedade da comutatividade da adição, não altera a veracidade dos exemplos, com exceção do último registro que está incorreto.

Contudo, ao perceberem os diferentes modos de resolver os problemas propostos, os alunos engajaram-se em debates para convencer uns aos outros sobre a melhor estratégia. Essa diversidade de métodos não apenas evidencia a criatividade e a capacidade de raciocínio dos estudantes, mas também enriquece o ambiente de aprendizado, promovendo uma compreensão mais profunda e colaborativa dos conceitos.

4.3.4 Quarto encontro - relação de equivalência nos inteiros

No quarto encontro, os alunos exploraram as relações de equivalência entre os números inteiros e as classes de equivalência. Com o passar dos dias, os alunos demonstraram maior confiança em suas habilidades e as discussões sobre os enunciados tornaram-se mais ricas e profundas. Eles começaram a apresentar argumentos mais elaborados e a explorar diferentes perspectivas sobre as relações de equivalência. Na Figura 22 ilustra-se algumas das atividades realizadas durante essas discussões.

Figura 23 – Prova da transitividade - anotações de aluno

Prova da
Transitividade =

$$\underbrace{(a,b) \sim (c,d) \text{ e } (c,d) \sim (e,f)}_{\text{ad=bc e cf=de}}$$

$$ad = bc \quad \text{e} \quad cf = de$$

$$ad \cdot f = b \cdot de$$

simplificar tirando os "nros" iguais

$$af = be$$

$$\underbrace{(2,4) \sim (5,10) \text{ e } (5,10) \sim (4,8)}_{\substack{ad=bc \text{ e } cf=de \\ 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 \text{ e } 5 \cdot 8 = 10 \cdot 4}}$$

$$2 \cdot 10 \cdot 8 = 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4$$

$$2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$$

$$(2,4) \sim (4,8)$$

Fonte: Autora (2024)

Durante a análise dos resultados, observou-se que, não foi questionada a possibilidade de um dos números ser igual a zero. Neste caso, a etapa de divisão dos fatores iguais, não seria possível. No entanto, não haveria necessidade de demonstração pois, evidentemente, após as multiplicações, obtém-se $0=0$.

4.3.5 Quinto encontro - classes de equivalência

No quinto encontro, foram abordadas as classes de equivalência. Mantendo a mesma dinâmica interativa das aulas anteriores, os alunos foram incentivados a participar ativamente das discussões e a desenvolver suas próprias estratégias de resolução. No entanto, surgiu uma dificuldade significativa na representação do conjunto da classe. Para auxiliar os alunos a superar esse obstáculo, exemplos foram cuidadosamente elaborados no quadro, visando conferir significado a cada símbolo utilizado, como demonstrado na Figura 24.

Figura 24 – As classes de equivalência - anotações de aluno

Exemplo 1.9. Consideremos a relação \sim definida em \mathbb{N} por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Na aula anterior, que \sim é uma relação de equivalência. Vamos determinar as classes $\bar{0}$ e $\bar{1}$. O que cada uma delas representa?

Buscar $n \in \mathbb{N}$ que deixam o mesmo resto na divisão por 2.

- Resto 0 = 2, 4, 6, 8, ...
- Resto 1 = 3, 5, 7, 9, ...

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 0\} \quad \bar{1} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 1\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{N}; x = 2q\} \quad \bar{1} = \{x \in \mathbb{N}; x = 2q + 1\}$$

$$\bar{0} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \quad \bar{1} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

Pares Ímpares

Fonte: Autora (2024)

O registro na Figura 24 ilustra a linha de raciocínio construída pelos alunos durante a atividade. A representação dos números pares como $2q$ provocou uma discussão construtiva sobre o registro genérico. Os alunos relacionaram os números pares como uma divisão exata por 2, mas não como uma multiplicação, destacando uma reflexão sobre a interpretação matemática dos conceitos. Para elucidar essas questões e contextualizar o processo, foram utilizados exemplos numéricos: 10 é divisível por 2, pois $2 \times 5 = 10$; bem como 18 é divisível por 2, pois $2 \times 9 = 18$; ou ainda, 36 é divisível por 2, pois $2 \times 18 = 36$. Dessa forma, os alunos puderam compreender que todo número divisível por 2 pode ser expresso como uma multiplicação por 2, ou seja, $2q$.

No exercício subsequente (Figura 25), os alunos se inspiraram no exemplo resolvido anteriormente, o que resultou em registros completos e independentes por parte deles.

Figura 25 – Exemplos de Classes de Equivalência - anotações de aluno

Exemplo 1.10. Seja a relação \sim definida em \mathbb{N} por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 3, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Em quantas classes a relação \sim divide o conjunto \mathbb{N} ? Quais serão estas classes?

3 classes

3 restos.

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 0\} \quad \bar{0} = \{3, 6, 9, 12, \dots, 27, \dots\} \leftarrow \text{Múltiplos de 3}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 1\} \quad \bar{1} = \{4, 7, 10, 13, \dots, 28, \dots\} \leftarrow \text{Múltiplos de } 3+1$$

$$\bar{2} = \{x \in \mathbb{N}; x \sim 2\} \quad \bar{2} = \{5, 8, 11, 14, \dots, 29, \dots\} \leftarrow \text{Múltiplos de } 3+2$$

Fonte: Autora (2024)

Semelhantemente, os alunos resolveram o exercício 1.11, de forma completamente independente, conforme registro na Figura 26.

Figura 26 – Registros a relação entre pares ordenados - anotações de aluno

Exercício 1.11. Seja \mathbb{Z}^* o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

com $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$.

a) Cite alguns exemplos numéricos de pares ordenados que satisfazem essa relação.

$(1, 2) \sim (12, 24)$ $(2, 3) \sim (4, 6)$ $(3, 5) \sim (12, 20)$
 $(1, 2) \sim (4, 8)$ $(2, 3) \sim (6, 9)$ $(3, 5) \sim (6, 10)$
 $(4, 2) \sim (8, 16)$ $(2, 3) \sim (8, 12)$ $(3, 5) \sim (9, 15)$
 $(1, 2) \sim (7, 14)$ $(2, 3) \sim (12, 17)$ $(3, 5) \sim (18, 30)$
 $(1, 2) \sim (18, 36)$ $(2, 3) \sim (18, 36)$ $(3, 5) \sim ($

b) Obtenha as classes de $\bar{a} = (1, 2)$, $\bar{b} = (2, 3)$ e $\bar{c} = (3, 5)$.

$\overline{(1, 2)} = \{(3, 6), (4, 8), (12, 24), (8, 16), (18, 36), \dots\}$
 $\overline{(2, 3)} = \{(4, 6), (6, 9), (8, 12), (12, 17), \dots\}$
 $\overline{(3, 5)} = \{(12, 20), (6, 10), (9, 15), (18, 30), \dots\}$

Fonte: Autora (2024)

Concluindo que as classes de equivalência agrupam elementos que possuem a mesma característica em referência a relação dada, o registro da resposta da letra (b) foi, surpreendentemente, correto.

Observando os comentários dos alunos enquanto auxiliavam uns aos outros, palavras importantes como múltiplo e comum, apareceram com frequência. Ao fazer a correção da atividade, os alunos foram questionados sobre a regularidade percebida e repetiram os mesmos termos. Dando ênfase a estes, os alunos foram desafiados, como tema de casa, a relacionar a escrita dos pares trabalhados com a notação de frações, cuja explicação estava na sequência.

4.3.6 Sexto encontro - a escrita como fração e a operação de adição

No sexto e último encontro, foram desenvolvidos os exemplos e atividades referentes ao conjunto dos números racionais, fazendo a transcrição da forma de par ordenado para a notação de fração, conforme registrado na Figura 27.

Figura 27 – Registros na forma fracionária - anotações de aluno

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Com isso, ressaltamos que cada número racional, é, na verdade o representante de uma classe de equivalência. À expressão $\frac{a}{b}$ chamamos de fração.

Exemplo 1.14. Reescreva as classes $\overline{(1, 3)}$, $\overline{(4, 5)}$ e $\overline{(6, 12)}$ na forma de fração.

$$\begin{aligned} \overline{(1, 3)} &\rightarrow \frac{1}{3} = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{6}; \frac{4}{12}; \frac{5}{15}; \frac{6}{18}; \frac{7}{21}, \dots \right\} \\ \overline{(4, 5)} &\rightarrow \frac{4}{5} = \left\{ \frac{8}{10}; \frac{16}{20}; \frac{40}{50}, \dots \right\} \\ \overline{(6, 12)} &\rightarrow \frac{6}{12} = \left\{ \frac{3}{6}, \frac{4}{8}; \frac{6}{12}, \dots \right\} \end{aligned}$$

Fonte: Autora (2024)

É neste momento, é proferido o tão esperado “Ah, é isso!”, ou seja, os alunos imersos no processo compreenderam a relação entre as representações de par ordenado e a notação de fração. Perceberam também que os dois números inteiros, a e b , com $b \neq 0$, na representação $\frac{a}{b}$, são dependentes um do outro, como consequência da relação binária. Além disso, compreenderam a ideia de frações equivalentes por meio da representação da classe de equivalência.

Avançando o conteúdo para as operações no âmbito do conjunto dos racionais, os alunos foram desafiados a resolver a adição, definida de acordo com a Figura 28.

Figura 28 – A adição nos racionais - anotações de aluno

Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$, $\beta = \overline{(c, d)} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Chamamos de adição em \mathbb{Q} a operação assim definida:

$$\alpha + \beta = \overline{(a, b) + (c, d)} = \overline{(ad + bc, bd)}$$

Vejam alguns exemplos.

Exemplo 1.15. Calcule $\overline{(1, 3)} + \overline{(4, 5)}$.

$$\overline{(1, 3)} + \overline{(4, 5)} = \overline{(17, 15)}$$

Fonte: Autora (2024)

É admirável o quanto os registros de raciocínio ficam evidentes ao longo do material e devem ser valorizados. A escrita formal e generalizações, evidentemente, são pouco desenvolvidas na educação básica e, por consequência, além de dificultar, limitam os alunos na construção do raciocínio lógico matemático e a interpretação de materiais mais avançados.

Por fim, é solicitada a mudança de notação e os alunos a desenvolvem bravamente. Na Figura 29 cabe destaque a lembrança dos alunos sobre o método da borboleta, este que foi utilizado

ao longo do ano como auxílio para a execução do algoritmo da adição e subtração de frações.

Figura 29 – A comparação entre a notação de classes de equivalências e frações - anotações de aluno

Exercício 1.18. Calcule $\overline{(3, 10)} + \overline{(1, 5)}$:

a) usando a notação de classe de equivalência.

$$\overline{(3, 10)} + \overline{(1, 5)} = \overline{(25, 50)}$$

$$15 \cdot 10 = 25, 50$$

b) usando a notação de fração.

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{15+10}{10 \cdot 5} = \frac{25}{50}$$

Fonte: Autora (2024)

Nesta etapa, a escrita genérica foi observada e desenvolvida pelos próprios alunos, mostrando mais segurança diante da formalização, bem como apresentado na Figura 30.

Figura 30 – O algoritmo da operação de Adição - anotações de aluno

d) Defina, de forma mais geral, a operação de adição em \mathbb{Q} a partir da notação de frações.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \rightarrow \text{Regra "Borboleta"}$$

$$(\overline{a, b}) + (\overline{c, d}) = \overline{(ad+bc, bd)} \rightarrow \text{Regra de Classe}$$

Fonte: Autora (2024)

E como uma grata surpresa, foram acrescentadas ao material duas questões solicitadas pelos próprios alunos, nas quais puderam explorar as classes de equivalências e as frações equivalentes, tornando desta forma o material ainda mais rico e provando o conhecimento global do assunto, dada a relação feita com os tópicos anteriores.

Figura 31 – As classes de equivalência e as frações equivalentes - anotações de aluno

e) Encontre a classe equivalente do resultado: $\overline{(25,50)}$

$$\overline{(25,50)} = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10), \dots\}$$

f) Simplifique a fração do resultado: $\frac{25}{50}$

$$\frac{25}{50} \stackrel{::5}{=} \frac{5}{10} \stackrel{::5}{=} \frac{1}{2}$$

Fonte: Autora (2024)

Ou seja, pelos registros da Figura 31, é possível afirmar que os objetivos da atividade foram alcançados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo apresentado neste trabalho teve como objetivo que os alunos experienciassem uma nova linha de raciocínio, de modo a fundamentar algumas definições, em especial, as frações equivalentes e a operação de adição entre frações, sob a perspectiva de classes de equivalência.

Durante a aplicação da sequência didática, nem tudo saiu como o planejado, o que é, de certa forma, comum em sala de aula. Apesar da conversa inicial sobre o porquê de estarem realizando esses exercícios, observou-se uma resistência por parte dos alunos, relativa à nova abordagem educacional utilizada. Por vezes, ao serem desafiados a ler, interpretar e refletir sobre um assunto, os alunos demonstram desconforto e desinteresse. Além disso, infelizmente, muitos deles associam a necessidade de aprendizado apenas à realização de atividades avaliativas, desconsiderando a importância da compreensão profunda dos conceitos.

Essa mentalidade que valoriza apenas resultados imediatos e tangíveis tende a limitar o processo de ensino e aprendizagem, pois negligencia a importância da construção de conhecimento a longo prazo. Nesse sentido, destaca-se o papel fundamental do docente em ouvir e dialogar com os alunos, orientando-os não apenas em relação aos objetivos imediatos da atividade, mas também em relação ao processo de ensino e aprendizagem como um todo.

Após esse tempo de escuta e diálogo, ao longo da sequência dos exercícios, foi possível observar uma mudança gradual na percepção dos alunos. À medida que foram desafiados a explorar os conceitos de forma mais profunda, passaram a reconhecer o valor do aprendizado intrínseco na dinâmica. Esse processo ressalta a importância não apenas de apresentar novas abordagens pedagógicas, mas também de oferecer suporte emocional e encorajamento aos estudantes, contribuindo assim para um ambiente de aprendizado mais estimulante e eficaz.

Uma vez concluída a aplicação, é possível assumir que a metodologia utilizada foi adequada, alcançando os objetivos traçados. É relevante ressaltar que, nos exercícios finais, os alunos estavam tão imersos na proposta que levantaram questionamentos pertinentes, os quais foram incluídos como questões extras no material. Esse engajamento evidencia a eficácia da abordagem utilizada e sugere possíveis aprimoramentos para futuras implementações. Na possibilidade de mais tempo para a execução, o material poderia ser ampliado com mais exemplos e exercícios, proporcionando um contato ainda mais profundo dos alunos com os novos conceitos.

Quanto à linguagem utilizada, é válido lembrar que esta não se limita apenas aos símbolos e notações formais. Ela também inclui a capacidade de interpretar e comunicar informações. O estímulo ao desenvolvimento dessa habilidade de expressão matemática é essencial para os alunos. Logo, o exercício de reescrita na linguagem usual, pode ser considerado um aspecto positivo neste trabalho.

Quanto ao público escolhido, observa-se que o assunto de frações e operações de frações é previsto para o Ensino Fundamental. No entanto, uma introdução às classes de equivalência pode não ser a mais adequada, dada a maturidade cognitiva dos estudantes e a natureza mais concreta do conteúdo. Já no Ensino Médio, os alunos possuem uma base mais sólida em conceitos matemáticos e estão melhor preparados para explorar abordagens mais avançadas e abstratas. Além disso, a proposta foi como uma revisão e reconstrução de conceitos, sob outra perspectiva,

o que permitiu os alunos relacionarem com definições e operações aprendidas ou decoradas, ainda no Ensino Fundamental.

Em suma, este trabalho teve os objetivos alcançados e evidencia não apenas a importância de adaptar as estratégias de ensino às necessidades e ao nível de maturidade dos estudantes, mas também o potencial transformador de abordagens pedagógicas inovadoras. Apesar do êxito desta aplicação, sabe-se da falta de tempo adicional no cotidiano escolar para além do conteúdo programado, mas com certeza, esta é uma atividade com grande potencial àqueles que desejam explorar o encantador mundo da álgebra.

REFERÊNCIAS

- BEHR, M. J. et al. Rational-number concepts. In: LESH, R.; LESH, R. A.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. [S.l.]: Academic Press, 1983. cap. 4, p. 91–125.
- BERTONI, N. E. **Módulo VI: Educação e linguagem matemática IV: Frações e números fracionários**. Universidade de Brasília, 2009. Acessado em 15 dez 2023. Disponível em: <<https://www.yumpu.com/pt/document/read/14145534/educacao-e-linguagem-matematica-iv-fracoes-e-sbem>>.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CARVALHO, A. M. P. Baixo rendimento escolar: uma visão a partir do professor. In: FUNAYAMA, C. A. R. (Ed.). **Problemas de aprendizagem: enfoque multidisciplinar**. São Paulo: Alínea, 2005.
- CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.
- CHEVALLARD, Y.; JOSHUA, M.-A. **Un Exemple de La Transposition Didactique: La notion de Distance**. [S.l.]: RDM, 1982. v. 3. 83 p.
- FILHO, J. d. P. A. **Atividades experimentais: do método à prática**. 2000. 312 f. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências Naturais) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.
- GRILLO, M. C. Transposição didática: uma prática reflexiva. *educação*. n. 21, p. 33–50, 1999.
- HENN, S.; CAETANO, M. R. **A transposição didática e o processo de (in) formação dos professores: Investigação e discussão**. 2015. Acessado em 26 jan 2024. Disponível em: <<https://www2.faccat.br/portal/sites/default/files/A%20TRANSPOSICAO%20DIDATICA%20E%20O%20PROCESSO.pdf>>.
- INEP. **MEC e Inep divulgam resultados do Saeb e do Ideb 2021**: Pandemia deve ser considerada na análise dos resultados da avaliação e do indicador. dados estão disponíveis no portal do inep. GOV.BR, 2022. Acesso em 06 jan. 2024. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/saeb/mec-e-inep-divulgam-resultados-do-saeb-e-do-ideb-2021>>.
- KIEREN, T. E. The rational number construct its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E. (Ed.). **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, 1980. p. 125–150.
- LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. **Fracciones la relacion parte-todo**. Madri: Síntesis, 1988.
- MALTA, I. Linguagem, leitura e matemática. In: URY, H. N. (Ed.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. cap. 2, p. 41–63.
- MARIANO, F. S. **Grupos de Isometrias no Plano Euclidiano e suas aplicações na Educação Básica através da Transposição Didática**. 2022. 50 f. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade Da Integração Internacional Da Lusofonia Afrobrasileira, Redenção, 2022.
- MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5^a e 6^a séries do Ensino Fundamental**. 2005. 238 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MONTEIRO, A. B.; GROEWALD, C. L. d. O. Dificuldades na aprendizagem de frações: reflexões a partir de uma experiência usando testes adaptativos. **Alexandria - Revista de Educação em ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 2, p. 103–135, 2014.

NOLETO, J. O. S. **Frações e Trigonometria: uma abordagem diferenciada no Ensino Médio**. 2014. 52 f. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2014.

OLIVEIRA, G. F. **(Re)construção do conjunto dos Números Racionais: uma proposta pedagógica sob a luz da aprendizagem significativa**. 2017. 68 f. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

OLIVEIRA, J. H. N. D. **A Transposição Didática no conceito de Ângulo: Uma análise em livros didáticos da Educação Básica**. 2020. 86 p. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade Estadual Do Maranhão, São Luis, 2020.

OSTI, A.; BRENELLI, R. P. Sentimentos de quem fracassa na escola: análise das representações de alunos com dificuldades de aprendizagem. **Psico-USF**, v. 18, p. 9, 2013.

PEDROZO, C. A. R. **Investigando o ensino de frações no Ensino Fundamental**. 2023. 94 f. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2023.

RODRIGUES, M. R. R. **O uso de material concreto para estimular a aprendizagem do conteúdo de frações numa turma da primeira série do Ensino Médio**. 2016. 28 f. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2016.

SALVADOR, C. C. et al. **Psicologia do Ensino**. Porto Alegre: Artmed, 2000. 408 p.

SANT'ANNA, D.; BITTENCOURT, J.; OLSSON, S. Transposição e mediação didática no ensino de frações. **BOLEMA**, v. 20, p. 18, 2007.

SANTOS, S. F. **O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações**. 2019. 116 f. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2019.

SILVA, A. C. d. **Filtros de imagens digitais: uma transposição didática para o ensino médio**. 2018. 90 f. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

SILVA, M. J. F. d. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 245 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Mestrado em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

SILVA, N. A. **A importância da afetividade na relação professor-aluno**. 2013. 44 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Graduação em Pedagogia, Faculdade de Educação, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais**. São Paulo: Penso, 2016. v. 3. 160 p. (Mathemoteca, v. 3).

SOARES, L. J. **Construção dos conjuntos numéricos**. Pelotas: Educat, 1999. 558 p.

VASCONCELLOS, C. d. S. **Avaliação da Aprendizagem - Práticas de Mudança: por uma práxis transformadora**. São Paulo: Libertad, 2012. 230 p.

WROBEL, J. S.; KILL, T. G. Classes de equivalência: uma abordagem moderna para o ensino de frações. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1–27, 2021.

1 Relações Binárias

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma relação binária é um subconjunto de pares ordenados (a, b) , com $a \in A$ e $b \in B$, que pode ser definida de várias maneiras, dependendo das propriedades e restrições que são estabelecidas. Em outras palavras,

Definição 1.1. *Uma relação binária R de A em B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.*

No caso em que $A = B$, dizemos que a relação binária R de A em B é simplesmente uma relação em A . Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.2. *O subconjunto $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; a - b = 1\}$ é uma relação binária em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Vamos determinar alguns pares desta relação?*

Exemplo 1.3. *O subconjunto $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; a \text{ é divisível por } b\}$ é uma relação binária. Vamos determinar alguns pares desta relação?*

1.1 Relações de Equivalência

A partir de agora, estudaremos um tipo especial de relação binária. Utilizaremos a notação aRb ou $a \sim b$ para dizer que $(a, b) \in R$.

Definição 1.4. *Uma relação de equivalência é uma relação binária R sobre um conjunto A que necessariamente satisfaz três propriedades fundamentais:*

- *Reflexividade: Para todo elemento $a \in A$, temos que $a \sim a$.*
- *Simetria: Se $a \sim b$ então $b \sim a$, para quaisquer $a, b \in A$.*
- *Transitividade: Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$, para quaisquer $a, b, c \in A$.*

Vamos estudar esta definição por meio de alguns exemplos.

Exemplo 1.5. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ elementos quaisquer. Consideremos a relação binária R em \mathbb{N} definida por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2. Mostraremos que \sim é uma relação de equivalência.*

Vamos praticar um pouco mais?

Exercício 1.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ elementos quaisquer. Consideremos a relação binária R em \mathbb{N} definida por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 3. Mostre que \sim é uma relação de equivalência.*

Exercício 1.7. *Seja \mathbb{Z}^* o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$. Cite cinco exemplos numéricos que satisfazem essa relação.*

1.2 Relações de Equivalência nos Inteiros

Seja \mathbb{Z}^* o símbolo que representa o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação de equivalência, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

com $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Mostraremos que \sim é uma relação de equivalência.

1.3 Classes de Equivalência

Seja \sim uma relação de equivalência em um conjunto A . Para cada $a \in A$, obtemos um subconjunto especial, definido a seguir:

Definição 1.8. *A classe de equivalência de a pela relação \sim é o conjunto $\bar{a} = \{x \in A; x \sim a\}$.*

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.9. *Consideremos a relação \sim definida em \mathbb{N} por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 2, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Na aula anterior, que \sim é uma relação de equivalência. Vamos determinar as classes $\bar{0}$ e $\bar{1}$. O que cada uma delas representa?*

Exemplo 1.10. *Seja a relação \sim definida em \mathbb{N} por $a \sim b$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por 3, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Em quantas classes a relação \sim divide o conjunto \mathbb{N} ? Quais serão estas classes?*

Agora, chegou a sua vez:

Exercício 1.11. *Seja \mathbb{Z}^* o conjunto dos números inteiros positivos e negativos, excluindo o zero. Consideremos a relação de equivalência, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definida por*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

com $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$.

a) *Cite alguns exemplos numéricos de pares ordenados que satisfazem essa relação.*

b) *Obtenha as classes de $\bar{a} = \overline{(1, 2)}$, $\bar{b} = \overline{(2, 3)}$ e $\bar{c} = \overline{(3, 5)}$.*

1.4 O Conjunto dos Racionais

Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ elementos quaisquer. Na última aula, vimos que

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

é uma relação de equivalência. Com isso, \sim cria partições no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denominadas classes de equivalência, e denotadas por $\overline{(a, b)}$, onde

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y) \sim (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; xb = ya\}.$$

Exemplo 1.12. *Vamos obter as classes $\overline{(1, 3)}$, $\overline{(2, 5)}$ e $\overline{(6, 12)}$.*

Definição 1.13. *O conjunto dos números racionais, representado por \mathbb{Q} , é constituído pela união de todas as classes de equivalência obtidas mediante \sim . Ou ainda, \mathbb{Q} é o conjunto de pares ordenados de números inteiros, identificados entre si pela relação de equivalência \sim , nos quais o segundo elemento de cada par é diferente de zero.*

No entanto, a representação do conjunto dos racionais como pares ordenados é muito trabalhosa, principalmente para realizar operações, ou seja, fez-se necessário o uso de simbologia adequada que facilite o desenvolvimento dos cálculos. Para isso, vamos escrever a classe $\overline{(a, b)}$, equivalentemente, como $\frac{a}{b}$. Assim,

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; xb = ya\}.$$

Ou seja,

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

Com isso, ressaltamos que cada número racional, é, na verdade o representante de uma classe de equivalência. À expressão $\frac{a}{b}$ chamamos de fração.

Exemplo 1.14. *Reescreva as classes $\overline{(1, 3)}$, $\overline{(2, 5)}$ e $\overline{(6, 12)}$ na forma de fração.*

1.4.1 A Adição nos racionais

Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}, \beta = \overline{(c, d)} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Chamamos de adição em \mathbb{Q} a operação assim definida:

$$\alpha + \beta = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(ad + bc, bd)}$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.15. Calcule $\overline{(1, 3)} + \overline{(2, 5)}$.

Exemplo 1.16. Calcule $\overline{(1, 3)} + \overline{(6, 12)}$.

Considerando $m = \frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{d}$, elementos quaisquer de \mathbb{Q} , temos que a adição entre racionais, na forma de fração, é equivalente a

$$m + n = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Exemplo 1.17. Já vimos que

$$\overline{(1, 3)} + \overline{(2, 5)} = \overline{(1 \cdot 5 + 3 \cdot 2, 3 \cdot 5)} = \overline{(11, 15)}.$$

Vamos reescrever esta igualdade usando a notação de fração.

Exemplo 1.18. Já vimos que

$$\overline{(1, 3)} + \overline{(6, 12)} = \overline{(1 \cdot 12 + 3 \cdot 6, 3 \cdot 12)} = \overline{(30, 36)} = \overline{(5, 6)}.$$

Vamos reescrever esta igualdade usando a notação de fração.

Agora é com você!

Exercício 1.19. Calcule $\overline{(5, 2)} + \overline{(4, 8)}$:

a) usando a notação de classe de equivalência.

b) usando a notação de fração.

c) O que podemos concluir ao comparar os cálculos obtidos em (a) e (b)?

d) Defina, de forma mais geral, a operação de adição em \mathbb{Q} a partir da notação de frações.