UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GLEISON RICARDO ROZA DE ARAUJO

UM ESTUDO SOBRE MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA ENFATIZANDO A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Boa Vista, RR

2024

GLEISON RICARDO ROZA DE ARAUJO

UM ESTUDO SOBRE MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA ENFATIZANDO A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino

Boa Vista, RR

2024

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

A663e Araujo, Gleison Ricardo Roza de.

Um estudo sobre matemática financeira básica enfatizando a educação financeira de alunos do ensino médio / Gleison Ricardo Roza de Araujo. – Boa Vista, 2024.

113 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

1 – Matemática financeira. 2 – Metodologias ativas. 3 – Experiências e GeoGebra. I – Título. II – Rufino, Elzimar de Oliveira (orientador).

CDU (2. ed.) 51:373.5

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista:
Mariede Pimentel e Couto Diogo - CRB-11-354 - AM

GLEISON RICARDO ROZA DE ARAUJO

UM ESTUDO SOBRE MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA ENFATIZANDO A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 24 de julho de 2024 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Elzimar de Oliveira Rufino

Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino
Orientador - UFRR

Almir Neto

Prof. Dr. Almir Cunha da Graça Neto
Membro Externo - UEA

Lindeval F. Lima

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
Membro Interno - UFRR

Boa Vista, RR
2024

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela força e sabedoria e pelas maravilhas realizadas em minha vida ao longo dessa caminhada.

Ao meu orientador, professor Dr. Elzimar Oliveira Rufino, por estar sempre ao meu lado e acreditar no meu trabalho. Sou muito grato pelas orientações, você é uma professor muito atencioso. Obrigado por ter contribuído na realização desse projeto, a palavra que me define é gratidão.

Agradeço à minha família, que sempre esteve ao meu lado, me apoiou e me incentivou nas horas mais difíceis dessa jornada, muito obrigado.

Agradeço também a todos os professores do PROFMAT-UFRR, que contribuíram de forma direta e indireta, com seus ensinamentos, orientações, conselhos, incentivo e apoio acima de tudo. Aos coordenadores do mestrado que sempre disponibilizaram espaço físico para que tivéssemos onde realizar estudos complementares, enfim, obrigado à todos por fazerem parte deste momento.

Sou grato a todos que contribuíram direta ou indiretamente na conclusão deste trabalho.

Gratidão a todos.

"Deus não escolhe os capacitados, capacita os escolhidos. Fazer ou não fazer algo só depende de nossa vontade e perseverança".

Albert Einstein

RESUMO

Esta dissertação tem início em uma ampla pesquisa bibliográfica voltada para estudo de tópicos de matemática financeira, educação financeira e tomada de decisão, construindo um conjunto de conceitos e definições julgados necessários para que os alunos possam compreender de forma mais clara a influência financeira em suas vidas e poder tomar decisões financeiras matematicamente conscientes. Nosso objetivo inicial é de apresentar ferramentas tecnológicas que possam auxiliar nesse processo de análise e tomada de decisões, juntamente com a produção de um produto educacional que traz em seu contexto situações problemas envolvendo a realidade dos alunos e que busquem despertar um olhar financeiro. Nos últimos anos o avanço tecnológico tem provocado grandes mudanças na forma de ensinar e aprender, as tecnologias portáteis, como tablets, smartphones e notebook têm se tornado ferramentas essenciais como instrumentos para auxiliar o processo de aprendizagem. E devido às dificuldades apresentadas pelos alunos para relacionar Matemática Financeira com as situações práticas do seu cotidiano, pela dificuldade em internalizar alguns conceitos financeiros e pela forma como alguns livros trazem uma abordagem superficial de matemática financeira, faz-se necessário a utilização de metodologias de ensino da Matemática que favoreçam a compreensão e o uso de recursos tecnológicos para concretizar um aprendizado significativo. Por esse motivo utilizamos o software Geogebra para apresentar os conceitos financeiros de forma a oportunizar as metodologias Ativas e as teorias de experimentos. Esta dissertação traz em sua essência a necessidade de uma abordagem educacional direcionada para as práticas vivenciadas pelos alunos em seu cotidiano. A metodologia utilizada neste trabalho tem caráter qualitativo e fundamenta-se na teoria de John Dewey, com a Teoria da Experiência de José Moran e em metodologias ativas de aprendizagem.

Palavras-chave: Matemática Financeira; Metodologia Ativas; Experiências e Geogebra.

ABSTRACT

This dissertation begins with a broad bibliographical research focused on the study of topics in financial mathematics, financial education and decision making, building a set of concepts and definitions deemed necessary so that students can understand more clearly the financial influence on their lives. and being able to make mathematically conscious financial decisions. Our initial objective is to present technological tools that can assist in this analysis and decision-making process, together with the production of an educational product that brings into its context problem situations involving the reality of students and that seek to awaken a financial perspective. In recent years, technological advances have caused major changes in the way of teaching and learning, portable technologies such as tablets, smartphones and notebooks have become essential tools to assist the learning process. And due to the difficulties presented by students in relating Financial Mathematics with the practical situations of their daily lives, the difficulty in internalizing some financial concepts and the way some books bring a superficial approach to financial mathematics, it is necessary to use methodologies of financial mathematics. Mathematics teaching that promotes understanding and the use of technological resources to achieve meaningful learning. For this reason, we use Geogebra software to present financial concepts in order to provide opportunities for Active methodologies and experimental theories. This dissertation highlights the need for an educational approach aimed at the practices experienced by students in their daily lives. The methodology used in this work has a qualitative character and is based on the theory of John Dewey, the Theory of Experience and José Moran and active learning methodologies.

Keywords: Financial math; Active Methodology; Experiences and Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação básica tem um papel essencial na formação dos cidadãos brasileiros, capacitando-os para uma vida de sucesso e também para o mercado de trabalho. Nesse contexto, a assimilação da matemática financeira dentre as quais sua aplicabilidade na prática são partes importantes para preparar os estudantes a tomar suas próprias decisões, se tornando indivíduos mais conscientes e preparados em relação aos seus rendimentos financeiros profissionais e pessoais.

A matemática financeira na educação básica, não se limita apenas contas vazias, ela envolve muitas habilidades e competências, dentre elas vamos citar, interpretações gráficas, resoluções de problemas, raciocínio lógico, etc. Essas habilidades são importantes, pois contornamos desafios em sala de aula e no cotidiano na vida dos alunos, levando-os a uma assimilação mais eficaz em relação aos conteúdos financeiros trabalhados em sala de aula.

As formações financeiras, assumem um papel crucial na vida dos estudantes, capacitando-os a tomar decisões financeiras adequadas e responsáveis ao longo de suas jornadas. Dentro desse contexto, a matemática financeira surge como uma disciplina indispensável para promover o pensamento crítico e reflexivo, preparando-os para tomar decisões financeiras conscientes.

A Base Nacional Comum Curricular, BNCC (BRASIL, 2018) define que a educação básica deve assegurar o desenvolvimento de dez competências gerais, sendo o Pensamento Científico, Crítico e Criativo, e a Cultura Digital duas delas. Das dez competências gerais assegurada para educação básica, iremos ter um maior foco nas competências 2: *Pensamento cientíifico, crítico e criativo*, e na competência 5: *Cultura digital*.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), uma competência é definida como a capacidade de mobilizar os conhecimentos, entendidos como conceitos e procedimentos; as habilidades tanto práticas como cognitivas e socioemocionais e, também, as atitudes e os valores para resolver as demandas vivenciadas no cotidiano, no pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Com base na BNCC, iremos trabalhar as seguintes competência.

***2. PENSAMENTO CIENTÍFICO, CRÍTICO E CRIATIVO*:** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

***5. CULTURA DIGITAL*:** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. Para obter informações mais específicas sobre as competências e habilidades obrigatórias da matemática financeira na BNCC, é recomendável consultar os documentos oficiais fornecidos pelo Ministério da Educação (MEC), que é a BNCC (BRASIL, 2018) e as diretrizes curriculares de cada rede de ensino.

Da BNCC, temos as habilidades que iremos trabalhar na dissertação.

> **EM13MAT104:** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
>
> **EM13MAT203:** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
>
> **EM13MAT301:** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> **EM13MAT303:** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
>
> **EM13MAT304:** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
>
> **EM13MAT305:** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
>
> **EM13MAT404:** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> **EM13MAT507**: Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
>
> **EM13MAT508:** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

O trabalho inicia com um estudo que compreende os diversos conceitos envolvendo matemática financeira, educação financeira e tomada de decisões a partir de fontes diversas, incluindo principalmente obras literárias e publicações científicas que discutem a aplicação da matemática financeira, educação financeira e processos decisórios.

Serão explorados conceitos matemáticos, como razão, proporção, porcentagem, progressões aritméticas e geométricas, função exponencial, logaritmos e juros, fundamentais para a compreensão de temas como depósitos com valor fixos ou variáveis, parcelas fixas, tempo e dinheiro, investimento, aposentadoria, sistemas de monetização, taxas e inflação. Esses temas mostram a importância da educação financeira na formação de uma sociedade economicamente consciente e capaz de fazer escolhas financeiras adequadas.

Com base nas competências e habilidades da BNCC, esta apresentamos a seguir os objetivos, bem como as justificativas para a produção desta dissertação.

Objetivo geral

Desenvolver um material didático destinado a alunos do ensin médio, que integre os conceitos de matemática financeira, educação financeira e tomada de decisão, com o objetivo de proporcionar aos alunos da educação básica uma abordagem prática e interativa, considerando a promoção do uso de tecnologias educacionais.

Objetivos específicos

- Fazer uma revisão sobre os principais tópicos da matemática financeira como porcentagem, juros simples, juros compostos e suas fórmulas, investimentos, taxas de juros, inflação, sistemas de amortização entre outros conceitos.
- Relacionar matemática financeira e educação financeira com foco na tomada de decisões.
- Desenvolver atividades e exercícios que integrem conceitos da matemática financeira, educação financeira e tomada de decisões.
- Produzir um produto educacional em forma de atividade, utilizando a plataforma do geogebra.
- Produzir um produto educacional em forma de protocolo, direcionado aos docentes da educação básica, ensinando como utilizar a plataforma Geogebra para produzir atividades interativas direcionadas aos alunos.

Justificativa

A matemática financeira surgiu no decorrer da história há milhares de anos, tendo como suas principais atividades o sistema de trocas e o comércio em geral, até chegar aos sistemas financeiros mais complexos. A matemática financeira era aplicada principalmente em transações comerciais simples, como a troca de mercadorias ou a determinação do valor de empréstimos e juros. No entanto, foi no final do século XVII e durante o século XVIII que surgiram algumas das bases teóricas da matemática financeira moderna.

De acordo com (SILVA; BARBOSA; SANTOS,) na época Renascimento houve uma crescente na atividade comercial e no interesse pela educação, o que resultou, ainda antes do século XVIII, na elaboração de escritos populares sobre aritmética.

Por exemplo, a obra "Aritmética de Treviso "foi publicada na cidade Treviso, em 1478 e abrange uma aritmética comercial, cálculo e aplicações envolvendo o escambo.[1]

Uma crescente atividade comercial e o interesse pela educação, ainda antes do século XVIII, resultaram em vários escritos aritméticos, aliás a aritmética foi o primeiro ramo da matemática há apresentar em seus cálculos, problemas envolvendo relações comerciais, depois evoluindo para as aplicações algébricas, deixando grandes contribuições nas questões da matemática financeira e comercial.

No século XIX, a matemática financeira começou a se tornar uma disciplina mais formalizada. Durante esse período, ocorreram avanços significativos na teoria dos juros compostos. Com o avanço da tecnologia no século XX, ocorreu uma progressão crescente no setor financeiro, pois a matemática financeira tornou-se mais importante para a sociedade.

O uso da matemática financeira hoje em dia, é muito abordado nos cursos de graduação e pós-graduação, como nos cursos de economia, administração e finanças, em várias instuições públicas e privadas como, bancos, seguradoras, empresas de planejamentos financeiros e consultorias. A compreensão dos princípios matemáticos financeiros é muito importante, pois através deles podemos tomar decisões de uma maneira precisa e analítica.

Ensino de matemática financeira no ensino médio é de extrema importância por diversas razões. Aqui estão alguns motivos pelos quais essa disciplina é relevante nesse nível de ensino:

1 Tomada de decisões financeiras pessoais: os estudantes, ao chegarem ao ensino médio, começam a se deparar com questões financeiras mais complexas, como

[1] O escambo foi uma transação comercial, onde as partes envolvidas iniciavam as negociações, e concluíam a base de troca de mercadorias.

poupar dinheiro, fazer escolhas de consumo e até mesmo pensar em investimentos futuros. A matemática financeira fornece as ferramentas necessárias para entender conceitos como juros, inflação, orçamento pessoal e planejamento financeiro, permitindo que os alunos tomem decisões financeiras mais informadas e responsáveis.

2 Preparação para a vida adulta: o ensino médio é o momento em que os alunos estão se preparando para entrar no mercado de trabalho ou ingressar no ensino superior. Independentemente do caminho escolhido, eles precisarão lidar com questões financeiras ao longo da vida.

3 Compreensão do sistema financeiro: os estudantes precisam compreender como funciona os sistemas relacionados aos bancos, como juros, taxas, investimentos ou empréstimos. Pois a matemática financeira possibilita essa compreensão do funcionamento do sistema financeiro, tornando-os cidadãos financeiramente alfabetizados, capazes de tomar decisões informadas.

4 Desenvolvimento de habilidades matemáticas: O estudo da matemática financeira no ensino médio incentiva o aluno a utilizar definições de uma maneira simples, prática e eficiente, aplicando seus conceitos no seu cotidiano. Aprendem a utilizar fórmulas matemáticas para solucionar questões financeiras reais do seu cotidiano, reforçando sua aprendizagem e habilidades desenvolvidas a partir de cálculos, raciocínio lógico e resolução de problemas.

Existe uma relação entre a matemática financeira, educação financeira e tomada de decisões, onde ambas tem um papel importante na qualificação dos indivíduos, para encarar os problemas do mundo financeiro. A matemática financeira estabelece instrumentos necessários capazes de analisar fatores quantitativos em operações financeiras, que possam ser utilizadas na educação financeira, onde os indivíduos possam aplicar esses conceitos de forma prática em suas vidas. A tomada de decisão, por sua vez, requer a integração do conhecimento matemático e financeiro com habilidades cognitivas e emocionais para avaliar opções e escolher a melhor estratégia em um contexto financeiro.

Ensinar matemática financeira no ensino médio é essencial para capacitar os alunos com habilidades financeiras fundamentais, preparando-os para tomar decisões financeiras responsáveis, compreender o sistema financeiro e desenvolver habilidades matemáticas práticas. Isso contribui para uma maior educação financeira e para o desenvolvimento de cidadãos financeiramente conscientes.

Um dos fatores pela qual a educação financeira deve ser trabalhada na educação básica, é os dados referente ao endividamento das famílias brasileiras. De acordo com a Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC) e divulgado pela (PEIC, junho,2024), temos que em junho de 2023 78,5% das famílias brasileiras estavam endividadas e em junho de 2024, tínhamos 78,8% das famílias brasileiras endividadas.

Esta dissertação possui a seguinte estrutura:

- **Seção 01:** Na seção preliminares, apresentamos os principais conceitos e definições voltados para auxiliar e no desenvolvimento das habilidades de matemática financeira;
- **Seção 02:** São apresentados os fundamentos essenciais da matemática financeira, como expressões matemática, fórmulas, todos voltados para o desenvolvimento da educação financeira e processos decisórios;
- **Seção 03:** Nesta seção, abordaremos alguns conceitos e algumas visões de alguns autores sobre o tema de educação financeira
- **Seção 04:** Será detalhado a construção de dois produtos educacionais, destinado ao fortalecimento do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos voltados para temas financeiros, em especial a matemática financeira. Esse produto educacional, consiste em um material didático de atividades, voltado para auxiliar o processo de ensino aprendizagem dos alunos. O outro produto, consiste em um guia que orienta o docente a construir sua própria atividade. O software geogebra será a principal ferramenta utilizada para construção do produto educacional.

1 PRELIMINARES

Nesta seção abordaremos alguns conceitos necessários para uma melhor compreensão dos temas financeiros que apresentaremos nesta dissertação.

1.1 PROPORCIONALIDADE

A teoria das grandezas proporcionais é bastante útil em diversas situações práticas. Nesta seção faremos uma breve revisão deste assunto.

Sejam x e y são duas grandezas relacionadas de modo que a cada valor de x está associado um valor bem determinado y. Nesta situação, notação $x \mapsto y$ indica que y é o valor associado a x.

Definição 1.1.1. *Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é proporcional a x quando:*

1. *As grandezas x e y estão relacionadas de modo que cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y.*
2. *Quanto maior for x maior será o seu correspondente y. Em outros termos, se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y < y'$.*
3. *Se $x \mapsto y$ e c é um número qualquer, então $cx \mapsto cy$.*

Observação 1.1.1. *Quando uma grandeza y é proporcional a uma grandeza $x,$ diz-se que temos uma proporcionalidade $x \mapsto y.$*

Observação 1.1.2. *Dada uma proporcionalidade $x \mapsto y$ o número k que indica o valor de y correspondente a $x = 1$, chama-se fator de proporcionalidade. Em símbolos temos*

$$1 \mapsto k \tag{1.1}$$

$$x \mapsto k.x \tag{1.2}$$

.

Em outras palavras, dada uma proporcionalidade $x \mapsto y$ existe um número $k,$ chamado fator de proporcionalidade, tal que $y = k.x.$ Assim, dizer que uma grandeza y é proporcional a uma grandeza x equivale a afirmar que existe um número k tal que $y = k.x.$

1.1.1 Regra de três

Conforme pode-se ver em (LIMA et al., 2005) um processo matemático bastante útil é a chamada *regra de três.* Neste processo temos uma proporcionalidade $x \mapsto y$ e os valores específicos $x' \mapsto y', x'' \mapsto y''$, onde são conhecidos três dos números x', y', x'', y'' e deseja-se determinar o quarto número. Segue da proporcionalidade que existe um número k tal que

$$y' = kx' \text{ e } y'' = kx''.$$

Nestes termos,

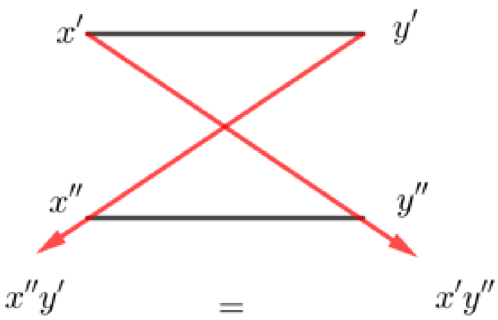
$$\frac{y'}{y''} = k = \frac{x'}{x''}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{y'}{y''} = \frac{x'}{x''}.$$

Segue imediatamente que

$$y' = kx' \text{ e } y'' = kx'' \Leftrightarrow \frac{y'}{y''} = \frac{x'}{x''} \Leftrightarrow x'y'' = y'x''. \tag{1.3}$$

Para efeitos práticos e de acordo com as equivalências dadas em (1.3), podemos dispor os elementos das proporções conforme indica a Figura 1 e fazer a multiplicação cruzada dos termos conforme indica as setas e igualar os resultados.

Figura 1 – Esquema prático para a regra de três



Fonte: Autor

Dada uma proporcionalidade $x \mapsto y$ e os valores específicos $x' \mapsto y', x'' \mapsto y''$, o esquema dado na Figura 1 nos fornece:

$$x' \mapsto y', x'' \mapsto y'' \Rightarrow x''y' = x'y''.$$

O esquema também pode ser pensado como segue:

Figura 2 – Esquema prático para a regra de três

Fonte: Autor

Para maiores detalhes, sugerimos ao leitor consultar as referências (LIMA et al., 2005) e (ARAUJO, 2017).

Exemplo 1.1.1. *Um consumidor pagou 27 reais por 1kg de um certo tipo de carne. Quanto pagaria por 2,3kg?*

Solução: Devermos verificar que de fato se trata de uma situação envolvendo proporcionalidade.

Temos:

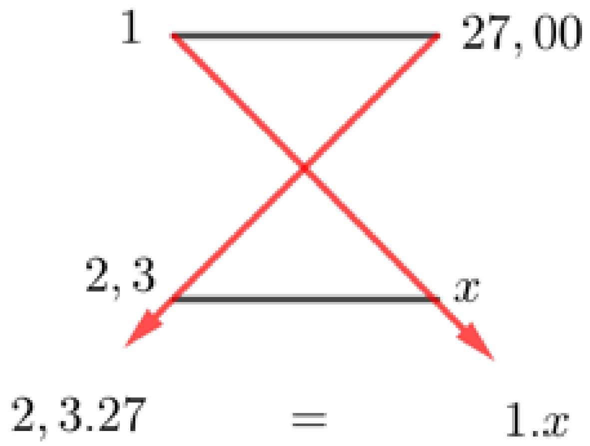
1. Se x é quantidade de quilogramas e y é o valor a ser pago pela quantidade x de quilogramas então, de fato temos uma relação $x \mapsto y$ bem definida.

2. Aumentando a quantidade de quilogramas aumenta o valor a ser pago.

3. Se paga-se y pela quantidade x de quilogramas então paga-se n vezes y pela quantidade n vezes x de quilogramas, onde n é um número natural. Pelo Teorema Fundamental da proporcionalidade (LIMA, p 86, 2013a) paga-se cy pela quantidade cx de quilogramas, onde c é um número real qualquer.

Pelo que vimos $x \mapsto y$ é de fato uma proporcionalidade. Então, podemos usar o esquema da Figura 3.

Figura 3 – Esquema prático para a regra de três



Fonte: Autor

De acordo com o esquema prático da Figura 3 devemos ter $x = 2,3.27 = 62,1.$

Vejamos algumas situações onde se encontra a ideia de proporcionalidade:

Situação 1.1.1. *Em uma compra, o valor do quilograma do tomate é R\$ x. Se for comprado n kg de tomate, o valor será R\$ nx. De certa forma, existe uma relação de proporcionalidade entre quantidade e valor pago.*

n(kg)	R\$ nx
1	1x
2	2x
3	3x
4	4x

Fonte: Autor

Situação 1.1.2. *Um lojista deseja repassar um reajuste de preços que teve de seus fornecedores a seus clientes. Esse aumento foi de um décimo, assim para determinar os valores das mercadorias com esse reajuste ele deverá realizar aumento de 0,1 em cima de cada produto, ou seja, sendo y o valor de compra e x o valor de venda, então com o aumento o valor de compra passará a ser x=y + $0,1y$ = $1,1y$. Desse modo, podemos ver que o valor de venda x, após o reajuste é proporcional ao valor de compra y.*

Situação 1.1.3. *Ao realizar um investimento de uma quantia q em um fundo de investimento, após decorrer o tempo de um mês, obtém-se um valor $R\$25,00$. Há uma correspondência entre q e $R\$25,00$ para o tempo de um mês. Então, é claro que investindo uma quantia n vezes maior que q, teremos como valor $R\$25n$.*

1.1.2 RAZÃO

Razão é o quociente entre os valores de duas grandezas, podendo ser representada na forma fracionária, decimal e percentual.

Exemplo 1.1.2. *Uma sala de aula há 50 alunos, sendo 30 meninas. Qual é a razão entre o número de meninas e meninos?*

Solução: Sendo 30 o número de meninas e 20 o númenro de meninos então temos que $\frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ é a razão entre o número de meninas e meninos, ou seja, para cada 3 meninas há 2 meninos.

1.1.3 PROPORÇÃO

A relação entre duas ou mais razões são ferramentas que auxiliam a resolver varios problemas na matemática, e quando essas razões são iguais temos uma proporção. Em outras palavras, *proporção* é a igualdade de duas ou mais razões.

Duas razões podem ou não se relacionar de forma proporcional. Quando se relacionam de forma proporcional, essas relações podem ser diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Nesta seção iremos fazer um breve estudo das grandezas proporcionais, visto que serão úteis a nosso trabalho.

1.1.3.1 GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Grandezas diretamente proporcionais, são aquelas que a variação de uma implica na variação da outra na mesma proporção, ou seja, triplicando uma delas, a outra também triplica; reduzindo pela metade, a outra também reduz a metade, em outras palavras se x implica em y então nx implica em ny.

1.1.3.2 VARIÁVEIS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Variáveis diretamente proporcionais, são grandezas onde a variação de uma implica na variação imediata da outra, numa mesma escala de variação.Também conhecido como Divisões em partes Proporcionais, nessa seção iremos mostrar como encontrar essa variável proporcional. A definição suporte será a do livro (LIMA et al., 2005).

Dadas duas sequências $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$, diz-se que os números $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ são proporcionais aos números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ quando

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = ... = \frac{b_n}{a_n}.$$

Chamando de k o valor comum dessas n razões, temos

$$ka_1 = b_1, ka_2 = b_2, ka_3 = b_3, ..., ka_n = b_n.$$

Problema 1.1.1. *Dois amigos A e B decidem realizar um investimento que juntos gerou lucro de R$ 55000,00, sendo que eles investiram R$ 120000,00 e R$ 100000,00 respectivamente. Agora eles desejam dividir os lucros de forma proporcional ao investimento.*

Solução: Se a e b são os valores que eles devem receber de forma proporcional ao investimento, então $a + b = 55000$. Agora iremos determinar a constante de proporcionalidade. Observe que

$$\frac{120000}{a} = \frac{100000}{b} = k. Assim$$
$$120000 = ak$$
$$e$$
$$100000 = bk.$$

Somando as duas equações acima obtemos

$$\begin{aligned} 220000 &= k \cdot (a+b); \\ 220000 &= 55000k; \\ k &= 4. \end{aligned}$$

Portanto:

O amigo A deverá receber, $a = \dfrac{120000}{4} = 30000$.

O amigo B deverá receber, $b = \dfrac{100000}{4} = 25000$.

1.2 PORCENTAGEM

O cálculo de porcentagem se faz presente em várias circunstância do cotidiano e não apenas no ambiente escolar. A porcentagem é uma técnica matemática, adequada para comparar quantidades, principalmente envolvendo situações de cálculo de juros, lucros e perdas em negociações e em diversas outras situações.

A porcentagem também é utilizada em questões de saúde, envolvendo estatística diversas sobre remédio, riscos, doenças, dieta, etc. Ela facilita a compreensão e a tomada de decisões, sendo essencial para o exercício da cidadania.

A porcentagem é uma razão centesimal, ou seja, uma razão(fração) que possui 100 como denominador. É utilizado o simbolo $\%$ para representar a porcentagem.

Também podemos usar uma representação decimal ou uma fração equivalente à fração centesimal, caso haja.

A tabela a seguir traz alguns exemplos:

Tabela 1 – Exemplos de Porcentagem

Porcentagem	Razão centesimal	Número decimal	Parte do todo
100%	$\frac{100}{100}$	1	tudo(o todo)
50%	$\frac{50}{100}$	$0,50$	a metade
25%	$\frac{25}{100}$	$0,25$	a quarta parte
20%	$\frac{20}{100}$	$0,20$	um quinto
10%	$\frac{10}{100}$	$0,10$	um décimo
150%	$\frac{150}{100}$	$1,5$	o todo mais a metade

Fonte: Autor

Exemplo 1.2.1. *Para calcular uma porcentagem de uma certa quantidade basta multiplicar a razão centesimal(ou a fração equivalente a ela) pela quantidade. Assim, por exemplo, se foi dado um desconto de* 50% *no preço de um produto que custa 30 reais, então o desconto foi de* $\frac{50}{100}.30 = \frac{1}{2}.30 = 15,$ *ou seja, o desconto foi de 15 reais.*

Exemplo 1.2.2. *Uma empresa que trabalha com reformas de piscinas, tem as seguintes ofertas para clientes que desejam fazer uma reforma de custo* $R\$5500,00$. *Para pagamento à vista eles tem um desconto de* 8%*, no pagamento para o mês seguinte, ela cobra uma taxa de* 7% *ao mês. A empresa oferece uma forma de investimento de renda fixa de* $0,04\%$ *ao dia. Nessas condições e supondo que um cliente tenha o dinheiro em mãos e precise realizar essa reforma da piscina com urgência, o que é melhor para o cliente? Lembrando que o cliente precisa da reforma com urgência.*

Solução: Iremos analisar cada umas das três situações de pagamento que o cliente dispõe para pagar a reforma de sua piscina.

1. Com pagamento à vista o cliente tem 8% de desconto, então ele so pagará pelo produto $92\% = 100\% - 8\%$. Como 92% de 5500 é $5060,00$, no pagamento à vista a reforma custará $R\$5060,00$.

2. Na compra para pagamento com um mês após a compra, o cliente pagará $107\% = 100\% + 7\%$. Como 107% de 5500 é $5885,00$, para quitação após um mês ele pagará $R\$5885,00$.

3. Na compra realizando o investimento na empresa, onde lhe rende $0,04\%$ de 5500 por dia ele terá por dia como rendimento $R\$2,20$ e por mês terá $R\$66,00$. Assim no final de 30 dias ele terá $R\$5566,00$.

Após fazer os cálculos, o cliente irá decidir qual das opções é mais vantajosa.

Na primeira opção ele paga a reforma com desconto e ainda fica com $R\$440 = 5500 - 5060$.

Na segunda opção ele pagará pela reforma após um mês, o valor de $R\$5885,00$, onde terá que desembolsar mais $R\$385,00 = 5885 - 5500$.

Na terceira opção ele pagará com um mês após o início da reforma, mas investe o valor da reforma na empresa. Isso lhe gera um valor de $R\$5566,00$. Como esse valor poderá pagar a reforma um mês após o inicio, sendo que para esse período o valor é de $R\$5885,00$ então ainda lhe terá que desembolsar $R\$319,00 = 5885,00 - 5566,00$.

Analisando as opções, seria mais viável o pagamento de forma à vista, ficando com um valor de saldo maior possível.

1.2.1 UMA CURIOSIDADE SOBRE PORCENTAGEM

Você sabia que podemos comutar a porcentagem com o valor do qual desejamos calcular a porcentagem? Funciona como uma espécie de comutatividade. O que queremos dizer com isso é que calcular $a\%$ de um valor b equivale a calcular $b\%$ do valor a. Resumindo:

$$a\% \text{ de } b \text{ é igual a } b\% \text{ de } a.$$

A justificativa é simples, pois

$$a\% \text{ de } b = \frac{a}{100}.b = \frac{ab}{100} = \frac{ba}{100} = \frac{b}{100}a = b\% \text{ de } a.$$

Exemplo 1.2.3. 25% *de* $50 = 50\%$ *de 25* $= 12,5$.

1.3 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Nesta seção abordaremos o tema de progressões aritméticas, utilizando como referências (LIMA et al., 2006a) e (MORGADO; CARVALHO, 2022).

Existem grandezas que sofrem variações iguais de termo a termo, isto é, a variação de uma grandeza a outra é uma constante, para todos intervalos iguais analisados.

Situação 1.3.1. *Um estacionamento para carros e motos cobra o valor de* $R\$5,00$ *por hora para carros e* $R\$3,00$ *por hora para motos, sendo que independe o tempo que ficarem, sempre vai ser cobrado esses valores por hora que o veiculo estiver no estacionamento.*

Na Situação 1.3.1 a sequência $(5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...)$ determina os valores a serem pagos no decorrer das horas para carros e a sequência $(3, 6, 9, 12, 15, ...)$ determina os valores a serem pagos no decorrer das horas para motos. A diferença entre um termo e seu antecessor para cada sequência é sempre constante: 5 para os carros e 3 para as motos.

Situação 1.3.2. *Uma empresa produz 3800 lembranças por mês e deseja aumentar sua produção em* 10% *e manter essa produção por 2 anos.*

Na Situação 1.3.2 a sequência $(3800, 4180, 4560, 4940, 5320, ..., 12540)$ representa a escala de produção de lembranças, tendo um aumento de 10% em cada mês. A diferença entre a quantidade de lembranças produzidas por dois meses seguidos é sempre a constante 380.

Progressões aritméticas são sequências numéricas nas quais o aumento ou decrescimento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.

De acordo com (MORGADO; CARVALHO, 2022), temos a seguinte definição.

Definição 1.3.1. *Uma progressão aritmética* PA *é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra* r *.*

Usaremos a notação a_1 para o primeiro termo, a_2 para o segundo termo, a_3 para o terceiro termo e assim por diante.

De acordo com a Definição (1.3.1), temos

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$a_5 = a_4 + r,$$

e assim por diante.

Exemplo 1.3.1. *Uma empresa que produz grãos, decide definir uma meta de produção para o ano seguinte, onde haja um aumento de 25 toneladas de grãos em cada ciclo de colheita. A empresa tem uma constante na produção de 212 toneladas por ciclo de colheita.*

Comentários: No Exemplo 1.3.1, a meta de aumento na produção de 25 toneladas é a razão r, ou seja, a constante de variação de um ciclo para o seguinte ciclo de colheita, o primeiro ciclo de colheita é 212 toneladas de grãos, que será representado por a_1 . Com essas informações e de posse da Definição 1.3.1 podemos determinar a quantidade de grãos produzidos em cada ciclo de colheita ha partir do inicio dessa meta de produção.

A seguinte proposição fornece o termo geral de uma progressão aritmética em função da razão, do primeiro termo e do valor n.

Proposição 1.3.1. *O termo geral de uma progressão aritmética* $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..)$ *de razão* r *é dado por*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \tag{1.4}$$

Demonstração. Usaremos Definição (1.3.1) para provar a proposição (1.3.1).

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r \\
a_4 &= a_3 + r \\
a_5 &= a_4 + r \\
a_6 &= a_5 + r \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\
a_n &= a_{n-1} + r
\end{aligned}$$

A soma dos termos do lado esquerdo das equações é igual à soma dos termos do lado direito das mesmas equações, ou seja, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

□

De acordo com a Proposição 1.3.1 um termo qualquer de uma P.A. fica inteiramente determinado pelo primeiro termo, pela razão e pelo índice do termo a ser determinado. Por exemplo, $a_{65} = a_1 + 64.r$

Exemplo 1.3.2. *A sequência* $(2, 5, 8, 11, 14, ...)$ *é uma progressão aritmética cuja razão é* $r = 5 - 2 = 8 - 5 = 3$ *De acordo com a Proposição 1.3.1 o milésimo termo da sequência é dado por* $a_{1000} = a_1 + 999 \cdot r = 2 + 999 \cdot 3 = 2997.$

Exemplo 1.3.3. *O conjunto dos números pares positivos constituem uma progressão aritmética cujo primeiro termo é* $a_1 = 2$ *e a razão é* $r = 2.$ *Explicitamente temos a* *sequência*

$$(2, 4, 6, 8, 10, ...).$$

Para determinarmos o milésimo número par positivo a_{1000}, *basta usar a Fórmula (1.4). Assim,* $a_{1000} = a_1 + 999.r = 2 + 999.2 = 2 + 1998 = 2000$. *De modo mais geral,* $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2$, *ou seja,* $a_n = 2n$.

Exemplo 1.3.4. *Em um pequeno município, o prefeito deseja colocar postes de iluminação em uma via retilínea, saindo da prefeitura até a praça desse município. Sendo que o primeiro poste será instalado a 50 metros da prefeitura e os restantes equidistantes de 28 metros, sabendo que foram usados 10 postes e que o ultimo poste foi colocado no início da praça. Qual é a distancia entre a prefeitura e a praça?*

Usando a Fórmula (1.4) para determinar a distância do décimo poste. Sabendo que a razão $r = 28$ *e* $a_1 = 50$, *temos*

$$\begin{aligned} a_{10} &= 50 + (10-1) \cdot 28 \\ a_{10} &= 50 + 252 \\ a_{10} &= 302. \end{aligned}$$

Assim, a distância entre a prefeitura e a praça é de 302 metros.

1.3.1 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$ a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n), ...$. Obteremos uma fórmula para determinar a soma desses n termos . Vejamos:

Temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$. Reescrevendo essa soma com os termos com a ordem inversa, temos $S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1$.

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n) \\ S_n &= (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1) \end{aligned}$$

Somando as duas equações acima, temos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_n &= (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + ... + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n), ou\, seja, \\ &= (a_n + a_1) + (a_n + a_1) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \\ &= n \cdot (a_n + a_1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \tag{1.5}$$

Exemplo 1.3.5. *Vamos calcular a soma dos 12 primeiros termos de uma progressão aritmética, onde o primeiro termo $a_1 = 8$ e razão $r = 3$. Usando a Fórmula (1.4) podemos determinar o décimo termo dessa progressão.*

De fato:

$a_{12} = 8 + (12 - 1) \cdot 3 = 8 + 11 \cdot 3 = 8 + 33 = 41.$

Agora, usando a Fórmula (1.5) , temos:

$$S_{12} = \frac{(8 + 41) \cdot 12}{2} = 49 \cdot 6 = 294.$$

Logo, 294 é a soma dos 12 primeiros termos da PA onde $r = 3$ e $a_1 = 8$.

Exemplo 1.3.6. *Em uma prova de corrida de rua, um competidor realizou a prova em exatamente 5 horas, sendo que na primeira hora ele percorreu 18 quilômetros, na segunda hora ele percorreu mais 16 quilômetros, na terceira hora de prova ele percorreu 14 km e assim por diante até concluir a prova. Quantos quilômetros tinha essa prova?*

Solução: *Ao analisar os dados referentes aos quilômetros percorridos por hora, temos que os dados se caracterizam com uma progressão aritmética, tendo como primeiro termo $a_1 = 18$ e razão $r = -2$. Usando a Fórmula (1.4), chegamos em $a_5 = 10$, ou seja, ele percorreu 10 quilômetro na ultima hora de prova.*

Usando a Fórmula 1.5 temos $S_5 = \frac{(18 + 10) \cdot 5}{2}$=70. Logo, o competidor percorreu 70 km em 5 horas.

1.3.2 Revisão sobre potenciação

Começaremos essa subseção com a definição de potenciação, usando recorrência.

Definição 1.3.2. *Seja a um número real positivo, a potência a^n, de base a e expoente $n \in \mathbb{N}$ é definida pondo-se*

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^n = a^{n-1}.a \end{cases}$$

para todo n natural.

.

De acordo com a Definição 1.3.2,

$$\begin{aligned} a^2 &= a.a \\ a^3 &= a^2.a = a.a.a \\ a^4 &= a^3.a = a.a.a.a. \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Para quaisquer $m, n, k \in \mathbb{N},$ valem as seguintes propriedades:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ ou $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,
- $(a^m)^k = a^{mk}$.

Sendo $1 = a^0 = a^{(-n+n)} = a^{-n} \cdot a^n$, então $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Para maiores detalhes sugerimos (LIMA, 2013) e (LIMA et al., 2006b).

1.4 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

O estudo e análise dessa seção utilizam como referências (LIMA et al., 2006a) , (MORGADO; CARVALHO, 2022) e (DANTE, p 119, 2009a).

Definição 1.4.1. *Uma progressão geométrica é uma sequência de números não nulos, no qual é sempre constante o quociente entre um termo e seu antecessor. A esse quociente chamaremos de razão q.*

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão geométrica PG. Multiplicando um termo pela razão q teremos o termo seguinte, para avançar dois termos, basta multiplicar a razão q duas vezes, ou seja, $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$ e assim por diante.

De modo geral, se o primeiro termo de uma PG é a_1 e a razão é q, então a fórmula do termo geral da progressão geométrica PG é dada por

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (1.6)}$$

1.4.1 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Seja a PG dada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$, chamaremos de S_n a soma de seus n primeiros termos. Então,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n.$$

Utilizando a Fórmula (1.6) obtemos:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} \tag{1.7}$$

$$S_n - a_1 = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} \tag{1.8}$$

Multiplicando a Equação (1.7) por q temos :

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n \tag{1.9}$$

Substituindo a Equação (1.8) na Equação (1.9), temos:

$$\begin{aligned} S_nq &= S_n - a_1 + a_1q^n \\ S_nq - S_n &= -a_1 + a_1q^n \\ S_n(q-1) &= a_1(q^n - 1). \end{aligned}$$

Segue que:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (1.10)}$$

A Fórmula (1.10) determina a soma dos n primeiros termos de uma PG onde a_1 é o primeiro termo e q é a razão.

1.5 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Os estudos expostos nessa seção possuem como base bibliográfica (LIMA, p 159, 2013a) e (LIMA et al., 2006b) e servem de auxílio aos propósitos desta dissertação. Para um estudo mais aprofundado sugerimos ao leitor estudar as referências mencionadas.

Definição 1.5.1. *Seja $a \neq 1$ um número real positivo. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é chamada de função exponencial de base a.*

Exemplo 1.5.1. *Em um decisão judicial a favor dos trabalhadores de uma empresa, ficou acertado que eles teriam uma aumento de 4,5% ao ano no decorrer de 4 anos. Sabendo que antes dessa decisão judicial o salário de cada funcionário era de R$ 2.200,00. Qual será a porcentagem de aumento após decorrer esses 4 anos?*

Solução: Com o aumento de $4,5\%$, após o primeiro aumento o trabalhador irá receber $104,5\%$ do seu salário, ou seja, $\frac{104,5}{100} \cdot 2200 = 1,045 \cdot 2200 = (1,045)^1 \cdot 2200$. No segundo aumento irá receber $104,5\%$ de $1,045 \cdot 2200 = (1,045)^2 \cdot 2200$. Com raciocício análogo obtemos que o trabalhador irá receber $(1,045)^3 \cdot 2200$ após o terceiro aumento, $(1,045)^4 \cdot 2200$ após o quarto aumento. Observe o valor do salário após cada aumento é obtido multiplicando-se o salário inicial por uma potência de 1,045. Esse fator elevado a uma potência obedece o padrão de uma função exponencial. Se definirmos a função f pela regra $f(x) = (1,045)^x$, então os salários a serem recebidos após o primeiro, o segundo, o terceiros e o quarto aumento são, respectivamente, $f(1) \cdot 2200, f(2) \cdot 2200, f(3) \cdot 2200$ e $f(4) \cdot 2200$. Agora voltando à pergunta da questão, note que,

$$f(4) = (1,045)^4 = 1,1925.$$

Isso nos permite concluir que o trabalhador teve um aumento aproximado de $19,25\%$ no quadriênio.

1.6 LOGARITMOS

O estudo realizado nesta seção teve suporte em (LIMA, p 159, 2013a), (DANTE, p 119, 2009a), (CHAVANTE; PRESTES, 2016) e (LIMA et al., 2006b).

Começaremos com a definição de logaritmo.

Definição 1.6.1. *Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a. Usando a notação $\log_a x = c$ para o logaritmo de x na base a, temos*

$$\log_a x = c \Longleftrightarrow a^c = b.$$

Usamos a notação $\log x$ para indicar $\log_{10} x$.

São consequências da Definição 1.6.1.

1) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, para qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$;

2) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$;

3) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo n;

4) $a^{\log_a x} = x$, com $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;

5) $\log_a x = log_a y \iff x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

São válidas as seguintes propriedades operatórias dos logaritmos. Para detalhes sobre a prova destas propriedades sugerimos ao leitor consultar a referência (DANTE, p 119, 2009a).

I) $log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$;

II) $\log_a \dfrac{x}{y} = log_a x - log_a y$;

III) $\log_a x^y = y \cdot log_a x$;

IV) $\log_y x = \dfrac{log_a x}{log_a y}$.

1.6.1 Resolvendo equações exponenciais

A solução de alguns problemas matemáticos recaem em uma equação exponencial. Este é o objeto de estudo desta subseção.

As equações que temos interesse são aquelas do tipo

$$a^x = b,$$

onde a e b são números reais positivos.

Exemplo 1.6.1. *Resolver a equação exponencial* $2^x = 16$.

Solução: Este tipo de equação exponencial é mais simples de resolver visto que 16 é uma potência de 2, ou seja, $16 = 2^4$. Assim,

$$2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4.$$

Necessitamos fazer uma observação sobre a última igualdade. A equivalência $2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$ decorre do fato de que a função exponencial dada por $f(x) = 2^x$, é injetiva. A igualdade $2^x = 2^4$ significa que $f(x) = f(4)$ seguindo da injetividade de f que $x = 4$.

Exemplo 1.6.2. *Resolva a equação* $3^x = 6$.

Solução: O leitor pode observar que não é possível utilizar a mesma técnica que foi utilizada no Exemplo 1.6.1. Isso por que não conseguimos escrever o número 6 como uma potência de base 3. Neste caso, convém aplicarmos o logaritmo em ambos os membros da equação. Fazendo isso obtemos

$$3^x = 6 \Longleftrightarrow \log(3^x) = \log 6.$$

Usando a propriedade (III) de logaritmo, resulta que $\log(3^x) = \log 6 \Longleftrightarrow x \log 3 = \log 6$. Segue imediatamente que $x = \frac{\log 6}{\log 3}$. Neste momento se tivermos conhecimento, de pelo menos, valores aproximados de $\log 6$ e de $\log 2$ então podemos determinar o valor(possivelmente aproximado) de x. Se conhecermos $\log 2$ e $\log 3$ podemos obter $\log 6 = \log(2.3)$. Como o logaritmo transforma um produto em uma soma de logaritmos (veja a propriedade (I) de logaritmo) temos que $\log 6 = \log 2 + \log 3$. Supondo que $log3 = 0,48$ e $log2 = 0,3$ obtemos

$$x = \frac{\log(2.3)}{\log 3} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 3} = 1,63.$$

Por fim deixamos a observação que logaritmos podem ser obtidos diretamente com o uso de calculadoras.

1.7 DESIGUALDADE DE BERNOULLI

A desigualdade que veremos nesta seção, conhecida como desigualdade de Bernoulli[1], possui muitas aplicações na matemática. Em nosso trabalho iremos utilizá-la na matemática financeira, mais especificametne em situações envolvendo juros simples e compostos.

Proposição 1.7.1 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x \geq -1$, *então vale*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Demonstração. Seja $P(n) : (1+x)^n \geq 1 + xn$. Iremos usar o método de indução finita sobre n.

1) Para $n = 1$ temos:
   $P(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$.Logo, $P(1)$ é verdadeira.

2) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para algum n natural, ou seja, $(1+x)^n \geq 1 + xn$. Vamos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira. Como $x + 1 > 0$, pois por

[1] Jacob Bernoulli (1655 - 1705) matemático suíço de uma família de grandes matemáticos e é considerado o pai do cálculo exponencial.

hipótese $x > -1$, podemos multiplicar $P(n)$ por $(1+x)$ para obter $(1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+xn) \cdot (1+x)$, ou seja, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + x + xn + x^2n$. Como $x^2n \geq 0$, segue que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + x^2n \geq 1 + (n+1)x$. Por transitividade temos, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$, ou seja, $P(n+1)$ é verdadeira.
Portanto, pelo principio da indução finita $(1+x)^n \geq 1 + xn$, para todo n natural e todo $x > -1$.

□

Como consequência da desiguadade de Bernoulli temos imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 1.7.1. *Se C é um número real positivo, $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, então*

$$C(1+x)^n \geq C(1+nx). \tag{1.11}$$

Para os casos onde $n \geq 2$ no Corolário 1.7.1, temos

$$C(1+x)^n \geq C(1+nx).$$

2 MATEMÁTICA FINANCEIRA

A matemática financeira surgiu com a evolução das relações comerciais e com o surgimento do dinheiro, essa evolução está presente nos dias de hoje em praticamente todas as transações monetárias. Essas transações são regidas por um conjunto de regras e formulações que juntas são utilizadas para resolver vários problemas no campo financeiro.

> Por muitos séculos, as pessoas utilizavam o escambo quando precisavam de alguma mercadoria. Na prática, para conseguir um produto que necessitava, tinha de oferecer algo em troca ao outro negociante, que, por sua vez, tinha de estar interessado naquilo que se estava dispondo. Essa necessidade mútua entre os negociantes tornava, em muitas situações, complicadas as transações. Foi de situações como essa que surgiu as primeiras moedas. (SOUZA; GARCIA, p. 9, 2016)

Um ramo da matemática que fornece subsídios para que as pessoas possam analisar criticamente situações cotidianas envolvendo porcentagem, juro, investimentos, entre outros é a matemática financeira (CHAVANTE; PRESTES, 2016).

A matemática financeira é uma área da Matemática que estuda o comportamento do dinheiro no decorrer de um determinado tempo, fornecendo subsídios para que pessoas possam analisar criticamente situações do seu cotidiano e tomar decisões favoráveis.

De acordo do (PRIMON, p 31, 2017) em sua Dissertação

> Certamente, da Matemática do Ensino Médio, a Financeira é a que mais está presente no cotidiano de todos. Entender de inflação, porcentagem, compra parcelada, financiamento, taxas de juros, descontos, capital, montante, localizar o dinheiro no tempo, são exemplos de assuntos que despertam grande interesse, e apropriar-se desses conceitos e procedimentos torna-se cada vez mais indispensável para o exercício pleno da cidadania.(PRIMON, p 31, 2017)

Quando uma pessoa aplica seu dinheiro em uma instituição financeira por um determinado tempo, esse valor depositado chamamos de Capital C e o rendimento desse capital nesse determinado tempo t chamamos de Juros j, ou seja, juros é o que essa pessoa ganha por emprestar o seu dinheiro C para o banco. Após esse determinado tempo t temos um valor, que iremos chamar de Montante M, que é o somatório do Capital com o Juros. Esse valor recebido a mais, o Juros é uma porcentagem do capital C, que iremos chamar de taxa de juros i.

Percebemos que em vários momentos de nossa vida, aplicamos os conceitos de matemática financeira, mesmo que de forma intuitiva. Existem várias situações que serão abordadas no decorrer da dissertação onde encontramos uma das mais básicas das operações em matemática, isto é, os empréstimos. Os empréstimos são projetados para atender diferentes necessidades financeiras, podendo ser destinados para fins pessoais, para pagamento de dívidas, para aquisição de móveis ou imóveis, entre outras situações.

Os movimentos financeiros de empréstimo com juros envolvidos, devem ser regidos pela Lei (BRASIL, 1951) e regulada pelas resoluções 4656 de 2018 e 4657 de 2018 do Conselho Monetário Nacional (CMN).

Para que possamos entender o que é o empréstimo, precisamos inicialmente entender o conceito de juros.

Situação 2.0.1. *É comum ocorrer transações monetárias em nossa sociedade, portanto que envolvem conceitos de matemática financeira: Quando uma pessoa empresta R$10,00 para seu colega comprar um lanche, mas exige que a devolução seja feita no dia seguinte, logo tempo t igual a 1 dia, e que tenham R$ 1,00 a mais do que emprestou, ou seja, ele emprestou R$10,00 o seu capital e ganhara R$1,00, o seu juros. Nota-se que o juros em questão é a decima parte do valor emprestado, ou seja, foi pago 10% que é a taxa de juros. Totalizando um montante de R$11,00. Então, claramente estamos aplicando os conceitos de matemática financeira em nosso cotidiano.*

Na seção seguinte abordaremos as situações envolvendo juros com mais detalhes.

2.1 JUROS

A matemática financeira tem sua essência na análise do dinheiro ao longo de um determinado tempo. O juros é a remuneração pelo uso do dinheiro por esse determinado tempo.

De acordo com DANTE :

> A matemática financeira é utilizada em muitas situações de nosso cotidiano, e um de seus principais conceitos é o juros, uma relação entre o dinheiro e o tempo(DANTE, p 119, 2009a).

De acordo com (ROCHA, 2018) Juros:

> São rendimentos em cima de uma aplicação (empréstimo), calculado a partir de uma taxa percentual em relação ao tempo de aplicação (ROCHA, 2018).

Quando falamos de juros, estamos nos referindo a dois tipos distintos de juros. O juros que é aplicando sempre no capital inicial, que chamaremos de *juros simples* e o juros que é aplicado sempre sobre o montante anterior, que por sua vez chamaremos de *juros composto.*

2.1.1 JUROS SIMPLES

De acordo com (NOVAES, 2009) juros é:

> a remuneração do capital emprestado, podendo ser entendido, de forma simplificada, como o aluguel pago pelo uso do dinheiro durante certo período de tempo (NOVAES, 2009).

Em sua dissertação de mestrado (COSTA, 2015) diz que juros simples é:

> aquele em que a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial, não incidindo sobre os juros acumulados. Neste regime de capitalização a taxa de juros varia linearmente em função do tempo (COSTA, 2015).

O juros simples é aquele em que a taxa incide somente sobre o capital inicial, não incidindo sobre os juros acumulados, ou seja, os juros gerados em cada período são sempre os mesmos e são dados pelo produto do capital pela taxa.

O conceito de juros simples é utilizado em transações financeiras nas quais a taxa de juros i é calculada sobre o capital C. Se o tempo for $t = 1,$ ou seja, se for considerado somente um período, a expressão matemática para o juros é dada por

$$J = C \cdot i \cdot 1 = C \cdot i.$$

Se o tempo for $t = 2$ a expressão matemática para o juros é dada por

$$J = C \cdot i + C \cdot i = C \cdot i \cdot 2$$

De modo geral, o juros simples é calculado para um determinado tempo $t \in \mathbb{N}$ é dado pela fórmula

$$J = C \cdot i \cdot t. \tag{2.1}$$

Definição 2.1.1. *No regime de juros simples, Montante é o somatório do capital C com os juros J obtidos pelas t aplicações*

De acordo com a Definição (2.1.1) o montante M é dado pela fórmula

$$M = C + J = C + C \cdot i \cdot t = C \cdot (1 + it). \tag{2.2}$$

Problema 2.1.1. *Em um investimento financeiro, foi investido um capital de R$ 2000,00. Obtendo um lucro de R$ 52,00. Qual foi o montante ao final desse período?*

Solução: Temos como informações do problema que o capital é de R$ 2000,00 e que o juros é de R$ 52,00. Usando Fórmula (2.2), temos que:

$$\begin{aligned} M &= C + J \\ M &= 2000 + 52 \\ M &= 2052. \end{aligned}$$

Logo, o montante referente a esse período é de R$ 2052,00.

Problema 2.1.2. *Um capital aplicado durante 6 meses a uma taxa de juros de 1,5% ao mês gerou montante de R$ 1700,40. Qual foi esse capital aplicado?*

Solução: O tempo decorrido é $t = 6$, a taxa de juros $i = 1,5\%$ ao mês, e o montante de R$ 1700,40 . Usando a Fórmula (2.2) temos:

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1 + it) \\ 1700,40 &= C \cdot (1 + 0,015 \cdot 6) \\ 1700,40 &= C \cdot (1,09) \\ C &= \frac{1700,40}{1,09} \\ C &= 1560. \end{aligned}$$

Assim, o capital aplicado foi de R$ 1560,00.

Agora faremos uma análise com várias aplicações de juros simples, e usaremos esse conceito para ter uma melhor percepção de movimentos financeiros. Por exemplo, descobrir valor de taxa de juros, tempo, capital e montante quando uma dessas informações for omitida no processo.

Problema 2.1.3. *Em uma viagem intermunicipal de Boa Vista à Caracaraí, uma empresa cobra R$ 50,00 pelo transporte de passageiro na hora do embarque. Ricardo está em Boa Vista e deseja ir para a sua casa no município de Caracaraí. No entanto, Ricardo esqueceu seu dinheiro em casa. Em conversa com o gerente da empresa eles decidem levar Ricardo, mas ele deverá pagar pela passagem R$ 54,00 assim que chegar em Caracaraí. Qual foi o juros na viagem cobrado pela empresa? Qual foi a taxa de juros cobrada na viagem pela empresa?*

Solução: Analisando a situação temos que R$ 50,00 seria o valor inicialmente investido para a viagem, ou seja, o capital. O valor R$ 54,00 é o valor final que Ricardo deve pagar, logo o montante. Usando a Fórmula (2.2) temos que $J = M - C$. Com os dados do problema resulta que $J = 54 - 50 = 4$. Assim, concluímos que a empresa cobrou R$ 4,00 de juros. Usando a Fórmula (2.1) com $t = 1$, obtemos $i = \dfrac{J}{C}$. Logo, $i = \dfrac{4}{50} = \dfrac{8}{100}$. Portanto, concluímos que a empresa cobrou uma taxa de juros de 8% por viagem.

Problema 2.1.4. *Uma pessoa precisa de R$ 4000,00 para pagar uma dívida que não tem como negociar, então recorre a uma empresa que trabalha com empréstimo cobrando uma taxa de juros simples de 5% ao mês. Essa pessoa pega o valor desejado e retorna a empresa para fazer o pagamento após três meses. Qual é o valor do juros a ser pago?*

Solução: Neste problema, o capital C é R$ 4000,00, o tempo t é de 3 meses e a taxa de juros i é de 5% ao mês. Usando a a Fórmula (2.1) obtemos

$$J = 4000 \cdot 0,05 \cdot 3 = 4000 \cdot 0,15 = 600.$$

Essa pessoa pagará R$ 600,00 de juros e um montante de R$ 4600,00.

Problema 2.1.5. *Um cliente fez um empréstimo de R$ 3500,00 em uma instituição financeira, com o intuito de realizar o pagamento após quatro meses em parcela única. Após os quatro meses pagou o valor de R$ 4480,00. Supondo que essa instituição financeira trabalha com o regime de juros simples. Qual foi a taxa de juros mensal utilizada pela financeira? Qual é o juros cobrado por mês? Qual foi a taxa de juros quadrimestral?*

Solução: Neste problema o capital C é de R$ 3500,00, o montante M é de R$ 4480,00 e o tempo t é de 4 meses. Assim, usando a fórmula (2.2), isto é, $M = C\cdot(1+it)$, obtemos $4480 = 3500 \cdot (1 + i4)$, ou seja, $1,28 = 1 + 4i \quad 1,28 - 1 = 4i$. Segue que $i = \frac{0,28}{4} = 0,07$. Logo, a taxa de juros da financeira é de 7% ao mês . O juros cobrado por mês é $J = 3500 \cdot 0,07 = 245$. Temos o juros mensal de R$ 245,00 a taxa de juros 7% ao mês . Com pagamento realizado em parcela única a taxa quadrimestral aplicada neste caso, $4480 = 3500(1 + i)$, ou seja, $i = 28\%$. ao quadrimestre, resultando em um juros de $J = 980$ reais.

2.1.2 JUROS SIMPLES E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Nesta subseção analisaremos a situação em que um capital C é aplicado no regime de juros simples por um período n meses, com uma taxa de juros de i % ao mês. Adotaremos as notações:

- M_o = investimento inicial C.

- M_1 = valor acumulado no mês 1;
- M_2 = valor acumulado no mês 2;
- M_3 = valor acumulado no mês 3, e assim por diante,
- M_n = valor acumulado no mês n.

No regime de juros simples, sabemos que o juros é sempre o mesmo em cada mês. Em nosso caso $J = Ci$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} M_2 & = & M_1 + Ci \\ M_3 & = & M_2 + Ci \\ M_4 & = & M_3 + Ci \\ M_5 & = & M_4 + Ci \\ M_6 & = & M_5 + Ci \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n-1} & = & M_{n-2} + Ci \\ M_n & = & M_{n-1} + Ci \end{array}$$

A soma dos termos do lado esquerdo das equações é igual à soma dos termos do lado direito das mesmas equações, ou seja,

$$M_n = M_1 + (n-1) \cdot Ci, \tag{2.3}$$

ou, de modo equivalente,

$$M_n = M_1 + (n-1) \cdot J. \tag{2.4}$$

Para $j \geq 2$ fixado, segue da Equação (2.4) que $M_j - M_{j-1} = J$, isto nos diz que a diferença entre dois termos consecutivos da sequência

$$(M_1, M_2, ..., M_n, ...)$$

é a constante J. Então, $(M_1, M_2, ..., M_n, ...)$ é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é M_1 e a razão é $r = J$. Em particular, se $C = 20$, $i = 5\%$, então $J = 0,05 \cdot 20 = 1$. Neste caso, temos a progressão aritmética

$$(21, 22, 23, 24, 25, 26, ...).$$

cujo primeiro termo é 21 e a razão é $r = J = 1.$

Assim, destacamos que os termos capitalizados no regime de juros simples, onde o primeiro termo é o capital e a razão é o juros e os termos seguintes são os montantes de cada período, são elementos de uma progressão aritmética.

Em matemática financeira o primeiro investimento é dado no tempo zero. por esta razão iremos reorganizar a fórmula do termo geral $M_n = M_1 + (n-1) \cdot Ci,$ para determinar o montante no tempo desejado. Desta forma, iremos considerar a fórmula

$$M_{n-1} = M_o + (n-1)Ci, \tag{2.5}$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Como sabemos $M_0 = C$ e $Ci = r$, então temos:

$$\begin{aligned}
M_{n-1} &= C + (n-1)Ci \\
M_{n-1} &= C + Cin - Ci \\
M_{n-1} + Ci &= C + Cin \\
M_n &= C(1 + in)
\end{aligned}$$

Assim chegamos à Fórmula (2.2), considerando $t = n$.

Problema 2.1.6. *Um investimento de R$ 1200,00 no regime de juros simples, onde a taxa de juros é 4% ao mês. Qual será o montante após o termino do 18° mês?*

Solução: Devemos lembrar que o nosso primeiro montante é o termo a_1 da (PA), que por sua vez é o 2° termo da sequência. A razão é o juros, ou seja, $r = 1200 \cdot 0,04 = 48$. Devemos considerar $n - 1 = 18,$ isto é, $n = 19.$ Usando a Fórmula (2.5) obtemos

$$\begin{aligned}
M_{18} &= M_0 + 18 \cdot 48 \\
&= 1200 + 864 \\
&= 2064.
\end{aligned}$$

Portanto, ao final do 18° mês, o montante pago será de R$ 2064,00.

Problema 2.1.7. *Determinado cliente deseja saber por quanto tempo deve deixar um capital de R$ 5800,00 em uma instituição financeira que opera no regime de juros simples a uma taxa de 1,5% a.m para que tenha um montante acima de R$ 8000,00.*

Solução: As informações do problema são: Capital C igual a R$ 5800,00 taxa de juros de 1,5% e desejo de ter um montante acima de R$ 8000,00. Daí $J = 5800 \cdot 0,015 = 87$. Então, usando a Fórmula (2.5), devemos ter $5800 + (n-1) \cdot 87 > 8000$. Mas,

$$\begin{aligned}
& 5800 + (n-1).87 > 8000 \\
\Leftrightarrow \quad & 5800 + (n-1).87 - 5800 > 8000 - 5800 \\
\Leftrightarrow \quad & (n-1).87 > 2200 \\
\Leftrightarrow \quad & 87n - 87 > 2200 \\
\Leftrightarrow \quad & 87n - 87 + 87 > 2200 + 87 \\
\Leftrightarrow \quad & 87n > 2287 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{87n}{87} > \frac{2287}{87} \\
\Leftrightarrow \quad & n > 26,28.
\end{aligned}$$

Logo, devemos escolher o menor inteiro maior do que 26,28, isto é, $n = 27$.

Portanto, o cliente deve deixar o seu investimento por no mínimo 27 meses.

2.1.3 JUROS COMPOSTOS

Vejamos uma situação onde um investidor aplica um capital C, em uma determinada instituição financeira, com uma taxa de juros i, que é calculada sempre sobre o montante desse período, gerando uma sequência crescente de juros.

Nesse regime temos:

- o juros do 1° período de tempo é o produto da taxa de juros $i\%$ pelo capital C, que somado com o capital nos fornece o primeiro montante M_1.
- O juros do 2° período de tempo é o produto da taxa de juros pelo montante M_1, que somado com M_1 nos fornece o segundo montante M_2.
- O juros do 3° período é o produto da taxa de juros por M_2, que somado M_2 nos dá o terceiro montante M_3.
- De modo geral, os juros no n-ésimo período é igual ao produto do montante do período anterior ao t-ésimo período, pela taxa de juros e, esses juros somado com M_{t-1}, gerando M_t

Sendo C o capital inicial, i a taxa de juros e t o tempo (período) e M_t o montante associado ao período t, temos:

$$\begin{aligned} M_1 &= C \cdot (1+i) \\ M_2 &= M_1 \cdot (1+i) \\ M_3 &= M_2 \cdot (1+i) \\ M_4 &= M_3 \cdot (1+i) \\ \vdots & \quad \vdots \\ M_t &= M_{t-1} \cdot (1+i) \end{aligned}$$

Multiplicando-se as equações, obtem-se

$$M_t = C \cdot (1+i)^t.$$

Assim, chegamos à seguinte fórmula que determina o montante associado ao regime de juros compostos. E para efeito de simplificar omitiremos o índice em M_t. Então,

$$\boxed{M = C \cdot (1+i)^t. \qquad (2.6)}$$

Problema 2.1.8. *Uma pessoa aplicará em uma instituição financeira um capital de R\$ 3850,00 por um período de 8 meses, sendo que essa instituição trabalha com uma taxa de juros de 1,2% ao mês. Supondo que não houve nenhuma movimentação financeira nesse período de 8 meses. Qual será o valor após decorrer esse período?*

Solução: Temos que $C = 3850$, a taxa de juros é $i = 1,2\%$ ao mês e t=8 meses. Desejamos determinar o montante M. Usando a Fórmula (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+i)^t \\ &= 3850 \cdot (1+0,012)^8 \\ &= 3850 \cdot (1,012)^8 \\ &= 4235,50. \end{aligned}$$

Após decorrer do período de 8 meses a pessoa que investiu seu capital de R$ 3850,00 nesta instituição financeira, terá R$ 4235,50 como montante.

Problema 2.1.9. *Um capital de R\$ 7640,00 aplicado no regime de juros compostos por 3 meses gera um montante de R\$ 8470,60. Qual é a taxa de juros?*

Solução: Sabemos que $C = 7640, M = 8470,60$, $t = 3$ e queremos determinar a taxa i. Colocando os dados na Fórmula (2.6) temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
M &= C \cdot (1+i)^t \\
8470,60 &= 7640 \cdot (1+i)^3 \\
\frac{8470,60}{7640} &= (1+i)^3 \\
1,10871 &= (1+i)^3 \\
\sqrt[3]{1,10871} &= \sqrt[3]{(1+i)^3} \\
1,03499 &= 1+i \\
1,03499 - 1 &= i \\
i &= 0,03499.
\end{aligned}$$

Portanto, a taxa de juro é de aproximadamente 3,5% ao mês.

2.1.4 JUROS COMPOSTOS E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Analisando um investimento de um determinado capital C, a uma taxa de juros compostos i por determinado tempo $n,$ obtemos a seguinte sequência

$$(C,\ C \cdot (1+i),\ C \cdot (1+i)^2,\ C \cdot (1+i)^3,\ ...,\ C \cdot (1+i)^n).$$

Iremos chamar $M_0 = C, M_1 = C \cdot (1+i), M_2 = C \cdot (1+i)^2, M_3 = C \cdot (1+i)\ 3, ...,$ $M_n = C \cdot (1+i)^n$. Os termos da sequência $(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots, M_n)$ são termos de uma progressão geométrica de primeiro termo C e razão $(1+i)$.

Como sabemos a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica é dada por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde a_1 é o primeiro termo e q é a razão:

No nosso caso, obtemos

$$M_n = M_o \cdot (1+i)^n. \tag{2.7}$$

Na sequência dos termos $(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots, M_n)$ temos que o primeiro termo é o capital, pois é considerado no tempo zero e os termos seguintes representam o valor acumulado de cada período. Iremos considerar para o termo geral, a Fórmula (2.7) reorganizada.

Como $M_0 = C, q = (1+i),$ temos :

$$M_n = C \cdot (1+i)^n.$$

Abandonando o índice de M_n para efeito de simplificar a escrita, temos:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \qquad (2.8)$$

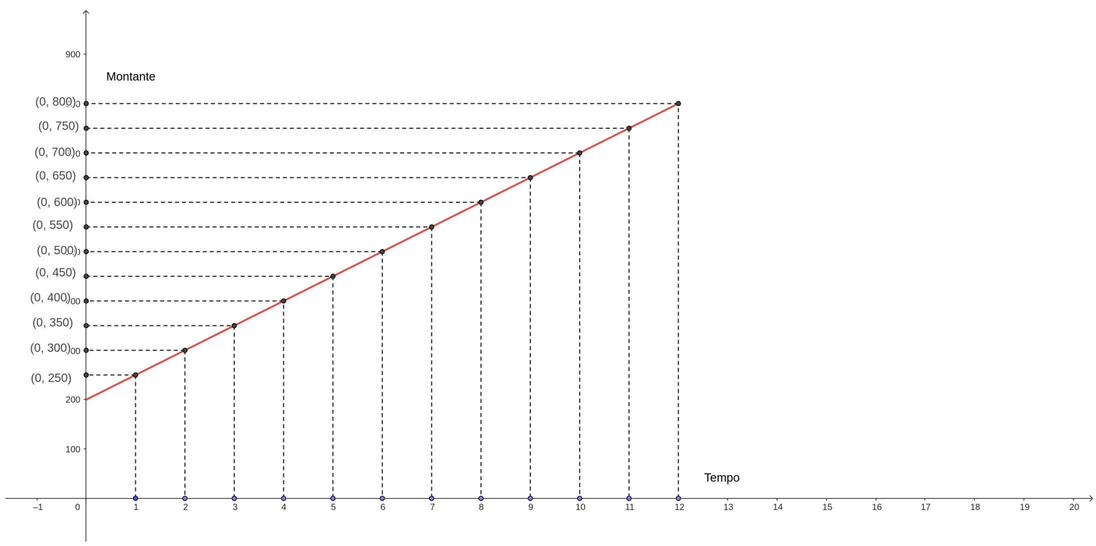
A Fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica PG é usada para determinar os montantes de uma aplicação financeira no regime de juros compostos.

2.1.4.1 JUROS SIMPLES X JUROS COMPOSTOS

Como vimos em seções anteriores, no juros simples a correção é aplicada a cada período e considera apenas o valor inicial. Já nos juros compostos a correção é feita em cima dos valores já corrigidos.

Analisaremos o comportamento do dinheiro em uma situação onde é investido o valor de R$ 200,00 por um período de um ano, à uma taxa de juros simples de 25% ao mês.

Figura 4 – Gráfico da função Juros Simples



Fonte: Autor

Para efeito de estudos sobre o comportamento das duas funções, podem ser analisado em <https://www.geogebra.org/classic/nurcudff> ou através do QRcode da Figura 5.

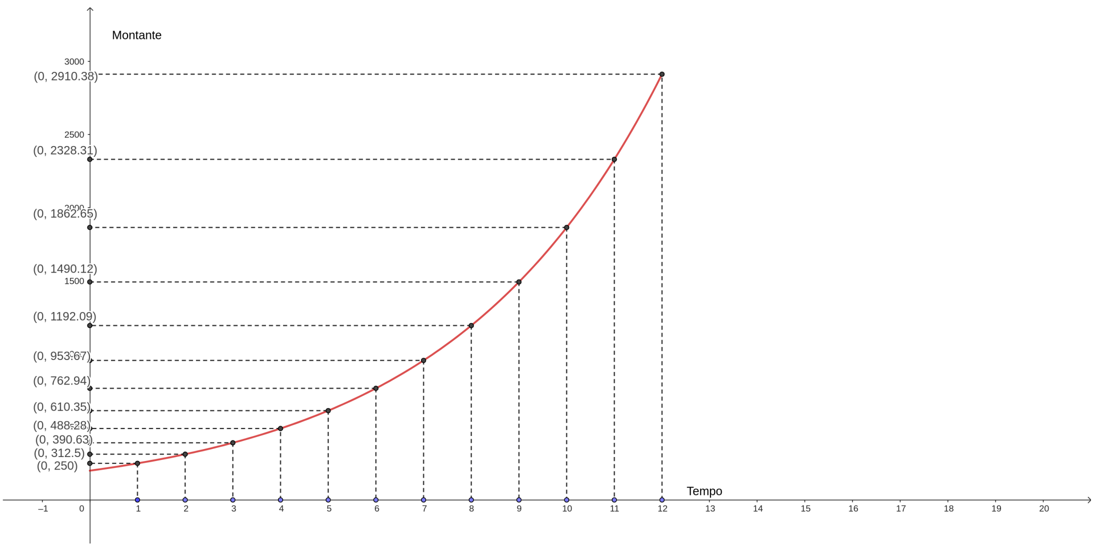
Figura 5 – QRcode do gráfico de Juros Simples e Composto

Fonte: Autor

Observe que no período de 1 ano(12 meses) o montante gerado foi de R$ 800,00. Não estamos levando em considerações outros fatores como por exemplo, inflação. Nossa analise inicial é apenas para verificar o comportamento do valor em cada período de tempo e no final do tempo determinado.

Na sequência temos o comportamento do dinheiro, só que agora nos moldes do sistema de juro composto. Utilizaremos os mesmos valores para investimento, taxa e tempo usados na Figura 4.

Figura 6 – Gráfico da função Juros Compostos



Fonte: Autor

Para efeito de estudos sobre o comportamento das duas funções, podem ser analisado em <https://www.geogebra.org/classic/t3dnrnv7> ou através do QRcode da

Figura 7.

Figura 7 – QRcode do gráfico de Juros Simples e Composto

Fonte: Autor

Considerações importantes sobre juros simples e juros compostos:

1 Para $t = 1$ ambos coincidem, ou seja, $C(1 + it) = C(1 + i)^t$.

2 Juros simples rendem mais do que juros compostos para $t < 1$. No entanto não existe capitalização de juros simples para tempo menor do que 1(um) período.

3 A longo prazo, juros compostos possuem maior rentabilidade, no entanto, podem gerar mais custos no caso de outras aplicações financeiras.

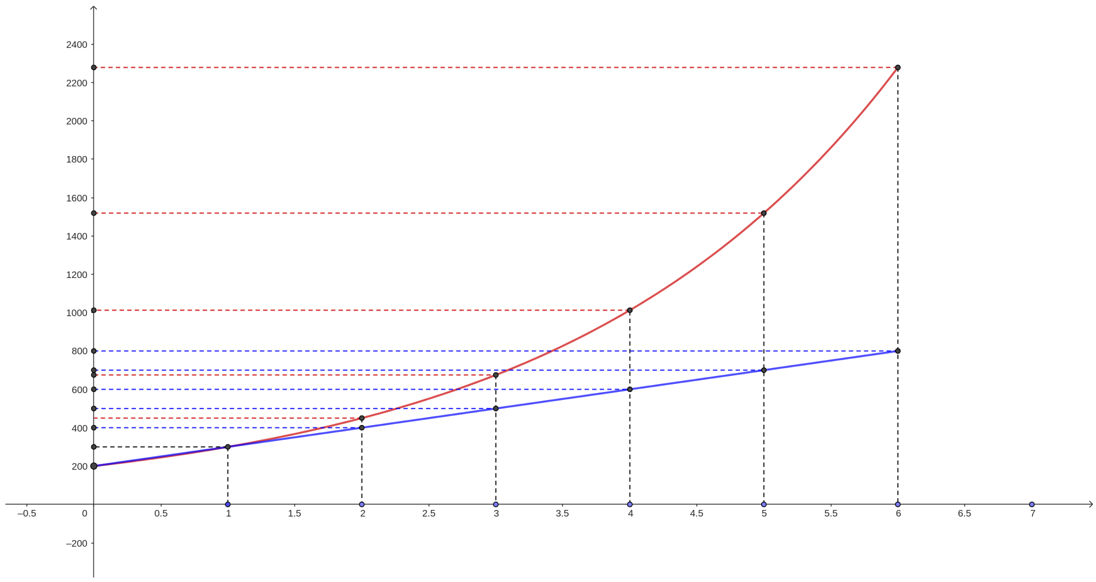
4 Na capitalização dos juros o tempo t é considerado de modo discreto, ou seja, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. Neste caso, segue da desigualdade de Bernoulli que

$$C(1 + i)^t \geq C(1 + it).$$

Para mais detalhes veja a Proposição 1.7.1, o Corolário 1.7.1 e a referência (MORGADO; CARVALHO, p. 19, 2022). A igualdade ocorre quando $t = 0$ ou $t = 1$. Nos demais casos o valor acumulado com juros compostos será sempre maior do que o valor acumulado com juros simples, em um mesmo período de tempo.

5 As aplicações de juros simples são puramente teóricas, na prática se usa juros compostos.

Figura 8 – Juros Simples x Juros Compostos



Fonte: Autor

Para efeito de estudos sobre o comportamento das duas funções, podem ser analisado em <https://www.geogebra.org/classic/tn3uefd6> ou através do QRcode da Figura 9.

Figura 9 – QRcode do gráfico de Juros Simples e Composto

Fonte: Autor

Problema 2.1.10. *Uma empresa realizou um empréstimo de R$ 1800,00 para um cliente, que deseja realizar o pagamento em 4 meses em parcela única. Sendo que esse empréstimo foi regido no regime de juro composto, com uma taxa de juros de 5% ao mês. Qual é o valor que esse cliente deverá pagar?*

Solução: Sabemos que $C = 1800$ é o valor emprestado, que a taxa de juros é $i = 5\%$ e o período é 4 meses. Usando a Fórmula, (2.8) temos:

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ &= 1800(1+0,05)^4 \\ &= 1800 \cdot 1,21550625 \\ &= 2187,91. \end{aligned}$$

Deverá pagar R$ 2187,91 pelo empréstimo de R$ 1800,00.

Problema 2.1.11. *Um investidor aplicou um capital de R$ 5000,00 em duas instituições financeiras diferentes que operam com regime de juros simples e composto. A instituição A oferece uma taxa de juros de 5% ao mês, e opera com regime de juros simples, a instituição B oferece uma taxa de 2,5% ao mês, e opera com juros composto. Sabendo que após um mês o investidor obteve o mesmo montante em ambas as aplicações. Determine o valor do capital aplicado em cada financeira. E qual será o montante após 2 meses?*

Solução: O problema nos diz que no primeiro mês temos o mesmo montante nas duas financeiras. Chamaremos de M_A(o montante na financeira A) e M_B (o montante na financeira B), e C_A (o capital aplicado na financeira A) e C_B (o capital aplicado na financeira B), i_A (taxa da instituição A) e i_B (a taxa da instituição B). Sabemos que $M_A = M_B$ e $C_A + C_B = 5000$, dai podemos dizer que $C_A = 5000 - C_B$.

Separando as informações obtidas no problema e usando as Fórmulas 2.2 e 2.6 temos:

$$\begin{array}{ll} M_A = C_A(1 + i_A t) & M_B = C_B(1+i_B)^t \\ = (5000 - C_B)(1+0,05) & = C_B(1+0,025) \\ = (5000 - C_B)1,05 & = C_B 1,025 \end{array}$$

Como o montante nos dois investimento são iguais para o período de um mês, então $M_A = M_B$, dai temos:

$$\begin{aligned} (5000 - C_B)1,05 &= C_B 1,025 \\ 5250 - 1,05C_B &= 1,025C_B \\ 5250 &= 2,075C_B \\ C_B &= \frac{5250}{2,075} \end{aligned}$$

$C_B = 2530,12$ substituindo em $C_A = 5000 - C_B$, obtemos $C_A = 2469,88$.

Logo o capital aplicado na instituição financeira A foi de R$ 2469,88 e na instituição financeira B foi de R$ 2530,12. Em posse desses dados iremos determinar o montante para o período de 2 meses.

$$M_A = 2469,88(1+0,05\cdot 2) \quad M_B = 2530,12(1+0,025)^2$$
$$= 2716,87 \quad\quad = 2658,21$$

Portanto após 2 meses o investidor terá R$ 5375,08.

2.1.5 JUROS COMPOSTOS COM TAXA DE JUROS VARIÁVEIS

Na seção anterior vimos que a fórmula do Montante para juros compostos, a taxa de juros é fixa, ou seja, ela permanece sempre a mesma. Mas há algumas situações onde a taxa de juros pode ter algumas variações ao longo dos períodos. Um exemplo disso é quando analisamos um investimento, que trabalha com taxas que assumem valores diferentes período a período.

2.1.5.1 INVESTIMENTO COM JUROS VARIÁVEIS

Seja um capital C aplicado num sistema de juros compostos, durante um período n de tempo, sendo i_1 a taxa no 1° período, i_2 a taxa no 2° período, i_3 a taxa no 3° período e assim por diante ate i_n a taxa no n-ésimo período. Sendo C o capital inicial, i a taxa de juros e t o tempo (período) e M_t o montante associado ao período t, temos:

$$\begin{aligned}
M_1 &= C\cdot(1+i_1)\\
M_2 &= M_1\cdot(1+i_2)\\
M_3 &= M_2\cdot(1+i_3)\\
&\vdots\\
M_n &= M_{n-1}\cdot(1+i_n).
\end{aligned}$$

Multiplicando as equações acima e realizando as simplificações necessárias, chegamos a uma fórmula que determina o montante gerado por uma aplicação de taxas variáveis

$$M_n = C\cdot(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot\ldots\cdot(1+i_n) \quad (2.9)$$

Problema 2.1.12. *Um investidor aplicou R$ 4500,00 em um fundo de investimento por 4 meses. Esse fundo rende nos dois primeiro meses 1,4%, no terceiro mês rende 0,9% e no quarto mês rende 2,1%. Qual foi o montante ao final do quarto mês?*

Solução: Neste problema $C = 4500$ e $i_1 = i_2 = 1,4\%$ e $i_3 = 0,9\%$ e $i_4 = 2,1\%$, e queremos determinar M_4. Aplicaremos a Fórmula (2.9) de juros com taxas variáveis.

$$
\begin{aligned}
M_4 &= 4500 \cdot (1 + 0,014)^2 \cdot (1 + 0,009) \cdot (1 + 0,021) \\
&= 4500 \cdot (1,028196) \cdot (1,009) \cdot (1,021) \\
&= 4766,56.
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que o montante no quarto período é de R$ 4766,56.

2.2 TEMPO E DINHEIRO

Nos tempos atuais os valores dos bens, produtos ou serviços sofrem mudanças frequentes no decorrer do tempo. Isso ocorre devido a vários fatores, como é o caso da inflação. Está se tornando comum irmos a um supermercado comprarmos um produto e na semana seguinte o valor do produto ter sofrido alguma alteração.

Quando nos referirmos a inflação estaremos relacionados os dados oficiais retirados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2024), e estamos usando o índice nacional de preço ao consumidor amplo como base para a inflação.

Exemplo 2.2.1. *Quanto valeria hoje uma quantia do passado? Por exemplo, quanto valeria hoje RS 4500,00 de 2020? Se eu emprestei RS 4500,00 a uma pessoa em janeiro de 2020, quanto ela deveria me pagar em março de 2023? Qual seria o valor justo a pagar?*

Solução: Para resolver esse exemplo iremos em busca do índice acumulado de inflação para esse período. Nossa busca foi realizada no site do Banco Central do Brasil, onde obtivemos como índice acumulado a taxa de 24,235750%. Multiplicando o índice de acumulo no valor da dívida, temos $4500,00 \cdot 1,2423575 = 5590,61$.

Logo, o valor justo há ser pago é R$ 5590,61.

Exemplo 2.2.2. *Considere que um trabalhador que tenha recebido como salário um rendimento mensal de R$ 2500,00 em todos meses de 2023. Ele deseja fazer a atualização salarial após um ano de inflação. Qual será o valor do seu salário?*

Solução: O índice de inflação divulgado pelo IBGE para o ano de 2023 foi de 4,62%, dai temos que realizar o produto do valor do salário pela taxa de inflação acumulada do ano de 2023. Então temos $2500 \cdot 1,0462 = 2615,50$. Logo, temos como salário para janeiro de 2024 o valor de R$ 2615,50 .

Situação 2.2.1. *A situação a seguir mostra o que acontecerá se uma pessoa aplica um valor relativo do capital, para realizar o pagamento de R$ 10 000,00 daqui um mês, sendo que essa aplicação pagará juros de 2% ao mês .*

Temos de informações que a taxa juro é de 2% ao mês e o montante é de R$10000,00 e o tempo é um mês. Então, queremos determinar o capital C. Usando a Fórmula (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} 10000 &= C \cdot (1+0,02)^1 \\ \frac{10000}{1+0,02} &= C, \end{aligned}$$

isto é,

$$C = 9803,21.$$

Isso nos diz que o valor do capital é de R$ 9803,21 em um mês valerá R$ 10000,00 a uma taxa de 2% ao mês.

Como seria a mesma Situação (2.2.1) mas com o pagamento para daqui dois meses. Qual seria o valor aplicado?

Usando a Fórmula (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} 10000 &= C \cdot (1+0,02)^2 \\ \frac{10000}{(1+0,02)^2} &= C, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C = 9611,69.$$

Logo, temos que R$ 9611,69 valerá R$10000,00 daqui a dois meses, ou seja, para ter R$ 10000,00 daqui dois meses devemos aplicar R$ 9611,69 a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês.

De modo geral, em uma aplicação a juros compostos $\dfrac{M}{(1+i)^t} = C$ é o valor atual para um tempo t.

Vejamos a situação onde temos alguns valores futuros, que podem ser dívidas vencendo ou valor desejado que desejamos trazer todos para ter um valor presente. Sejam esses valores futuros m_n com $n \in \mathbb{N}$. Vamos chamar V de valor atual e m_1 valor no tempo 1, m_2 valor no tempo 2, m_3 valor no tempo 3 e assim por diante ate m_n valor no tempo n, tudo isso aplicado a uma taxa i. Temos um conjunto de valores monetários em seu tempo, e desejamos saber o valor atual V.

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{m_1}{(1+i)^1} \\
V_2 &= \frac{m_2}{(1+i)^2} \\
V_3 &= \frac{m_3}{(1+i)^3} \\
&\vdots \\
V_n &= \frac{m_n}{(1+i)^n}
\end{aligned}
$$

Como $V = V_1 + V_2 + V_2 + V_3 + ... + V_n,$ segue que:

$$
V = \frac{m_1}{(1+i)^1} + \frac{m_2}{(1+i)^2} + \frac{m_3}{(1+i)^3} + ... + \frac{m_n}{(1+i)^n} \quad (2.10)
$$

Assim, obtemos uma fórmula que determina o valor atual V de um conjunto de valores aplicado em distintos tempos.

Problema 2.2.1. *Uma dívida de R$ 1200,00, R$ 3500,00 e R$ 5000,00 que vencem dentro de 3, 2 e 4 meses respectivamente. Quanto deve aplicar hoje a uma taxa de juros compostos de 3% ao mês para que possa honrar os compromissos?*

Solução: Para resolver esse problemas temos que analisar que os valores são dívidas vencendo no futuro e que se deseja investir hoje no presente para quitar essas dívidas. Logo iremos usar a Fórmula (2.10) para resolver. Sendo $m_3 = 1200,$ $m_2 = 3500, m_4 = 5000, i = 3\%$ e queremos o valor atual V. Das informações temos,

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{m_1}{(1+i)^1} + \frac{m_2}{(1+i)^2} + \frac{m_3}{(1+i)^3} + ... + \frac{m_n}{(1+i)^n} \\
&= \frac{m_3}{(1+i)^3} + \frac{m_2}{(1+i)^2} + \frac{m_4}{(1+i)^4} \\
&= \frac{1200}{(1+0,03)^3} + \frac{3500}{(1+0,03)^2} + \frac{5000}{(1+0,03)^4}.
\end{aligned}
$$

Resolvendo temos $V = 8839,70$. Logo para honrar com os compromissos, precisa ser aplicado o valor de R$8839,70 a uma taxa de 3% ao mês .

Problema 2.2.2. *Agora você já é entendido de matemática financeira e vai dar uma consultoria para a sua Mãe, que deseja comprar uma TV smart de 50". A loja oferece duas forma de pagamentos: Pagamento á vista de R$2400,00 ou em 5 parcelas fixas de R$ 500,00, sendo a primeira paga um mês após a compra. Sabendo que sua Mãe consegue aplicar seu dinheiro á taxa de 5% ao mês. Qual é a melhor decisão a tomar?*

Solução: Vamos analisar o valor atual nas duas situações.

Para pagamento a vista, temos $V = 2400$.

Para o pagamento parcelado temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{500}{(1+0,05)^1} + \frac{500}{(1+0,05)^2} + \frac{500}{(1+0,05)^3} + \frac{500}{(1+0,05)^4} + \frac{500}{(1+0,05)^5} \\ &= 2164,73. \end{aligned}$$

Como o valor atual para pagamento a vista é maior que o valor atual para o pagamento a prazo, então a melhor decisão é realizar a compra mediante pagamento a prazo.

2.2.1 PAGAMENTOS FIXOS

Vejamos uma situação, onde desejamos determinar o valor V financiado, que deve ser pago em prestações iguais de um valor P, num determinado tempo $t \in (1, 2, 3, 4, \ldots, n)$ com uma taxa de juros compostos i .

Dá Fórmula (2.10), temos:

$$V = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}. \tag{2.11}$$

Os termos do somatório em (2.11) constituem uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\dfrac{P}{(1+i)}$ e a razão é $\dfrac{1}{(1+i)}$. Usando a Fórmula (1.10) temos:

$$S = \frac{P}{(1+i)} . \frac{[\frac{1}{(1+i)^n} - 1]}{\frac{1}{(1+i)} - 1}.$$

Como $\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1 = \dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}$ e $\dfrac{1}{(1+i)} - 1 = \dfrac{-i}{1+i}$, segue que

$$S = P.\frac{[\frac{1}{(1+i)^n} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}]}{(-i)} = P.\frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{(-i)}.$$

Consequentemente, $S = P.\frac{-1 + (1+i)^n}{i(1+i)^n}$. Usando a Fórmula (2.11) , temos

$$S = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n} = V.$$

Assim, chegamos a uma fórmula que determina o valor atual com prestações fixas a uma taxa de juros.

$$V = P \cdot \left(\frac{-1 + (1+i)^n}{i(1+i)^n} \right) \tag{2.12}$$

Problema 2.2.3. *Um cliente deseja pegar um empréstimo em uma instituição financeira que opera com taxa de juros de 4% ao mês. Deseja pagar por mês o valor de R$ 350,00 por parcela durante quatro meses. Qual deve ser o valor que a financeira pode emprestar?*

Solução: Temos de informações que $P = 350$, $i = 4\%$ ao mês e queremos descobrir o valor V a ser emprestado. Usando a Fórmula (2.12) , temos:

$$V = 350.\frac{-1 + (1 + 0,04)^4}{0,04(1 + 0,04)^4} = 1270,46.$$

Logo, a financeira deverá emprestar R$ 1270,46.

Problema 2.2.4. *Uma pessoa deseja realizar um empréstimo de R$ 1000,00 em uma instituição financeira que opera com taxa de juros compostos de 1% ao mês. Ela deseja realizar o pagamento em 5 parcelas fixas, sendo a primeira 30 dias após o empréstimo. Qual será o valor de cada parcela que essa pessoa irá pagar à financeira?*

Solução: Temos um Capital de R$1000,00, um tempo de 5 meses e uma taxa de juros de 1% ao mês e queremos determinar o valor de P, que é o valor da parcela á ser paga. Então, usando a Fórmula (2.12) , temos:

$1000 = P.\frac{-1 + (1 + 0,01)^5}{0,01(1 + 0,01)^5}$, onde $1000 = P.\frac{-1 + (1,01)^5}{0,01(1,01)^5}$. Isolando o P temos,

$P = 1000.\frac{0,01(1,01)5}{(1,01)^5 - 1}$. Resolvendo essa equação chegamos em $P = 206,04$.

Logo, o valor de cada parcelas é R$ 206,04.

2.2.2 DEPÓSITOS FIXOS

Suponhamos que uma pessoa realize depósitos mensais e fixos de valor D, em um fundo de investimento que rende juros compostos a uma taxa i% ao mês, e seja M o montante ao final de n meses. A seguir veremos os montantes para cada tempo n:

Denotando por M_1 o montante ao final do primeiro mês, M_2 o montante ao final do segundo mês, M_3 o montante ao final do terceiro mês e, prosseguindo, M_n o montante ao final do $n-$ésimo mês, temos:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= D \cdot (1+i)^{n-1} \\
M_2 &= D \cdot (1+i)^{n-2} \\
M_3 &= D \cdot (1+i)^{n-3} \\
&\vdots \\
M_n &= D \cdot (1+i)^{0}.
\end{aligned}
$$

Como $M_1 + M_n + ... + M_n = M$, segue imediatamente que

$$M = D \cdot (1+i)^{n-1} + D \cdot (1+i)^{n-2} + D \cdot (1+i)^{n-3} + ... + D \cdot (1+i) + D$$

Colocando D em evidência, resulta:

$$M = D.[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1] \tag{2.13}$$

Calcularemos separadamente $S = [1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}]$. Observe que S é a soma dos termos de uma progressão geométrica de n termos, cujo primeiro termo é 1 e a razão é $(1+i)$. Assim, segue da Fórmula (1.10) da soma dos termos de uma PG, que

$$S \;=\; 1 \cdot \frac{((1+i)^n - 1)}{(1+i-1)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.14}$$

Substituindo o valor de S dado em (2.14) na Equação (2.13) obtemos

$$\boxed{M = D.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]. \qquad (2.15)}$$

Chegamos a uma fórmula para determinar o Montante para n depósitos fixos. Vale ressaltar que o regime de juros é composto.

Problema 2.2.5. *Uma pessoa decide poupar uma parte de seu salário em um fundo de investimento que rende 1,2% a.m. Decide investir R$300,00 todo mês durante 5 anos(60 meses). Qual será o montante após esse período?*

Solução: Temos as seguintes informações. Deposito fixos no valor de R$300,00 por um período de 60 mês. Usando a Fórmula (2.15) temos,

$$M = 300 \cdot \frac{(1 + 0,012)^{60} - 1}{0,012} = 26141,18.$$

Logo, essa pessoa terá R$ 26141,18 após 5 anos de investimento.

Problema 2.2.6. *Para realizar o sonho de comprar um carro, um investidor decide investir todo mês R$500,00 em uma instituição financeira que opera com uma taxa de juros de 0,65% a.m. Sabendo que o carro desejado custa R$50500,00. Por quanto tempo deve ser o investimento?*

Solução: Temos que o montante desejado é R$50500,00 e que um investimento mensal de R$500,00 com uma taxa de 0,65% ao mês. Usando a Fórmula (2.15) temos,

$$\begin{aligned}
50500 &= 500 \cdot \frac{(1 + 0,0065)^n - 1}{0,0065} \\
\frac{50500}{500} &= \frac{(1,0065)^n - 1}{0,0065} \\
101 \cdot 0,0065 &= 1,0065^n - 1 \\
0,6565 + 1 &= 1,0065^n
\end{aligned}$$

Aplicando log na base 10 e em seguida usando a propriedade 1.6 temos

$$\begin{aligned}
\log 1,6565 &= \log 1,0065^n \\
\log 1,6565 &= n \log 1,0065 \\
n &= \frac{\log 1,6565}{\log 1,0065} \\
n &= 77,90.
\end{aligned}$$

Logo, são necessários 78 meses para obter o montante desejado.

2.3 INFLAÇÃO

Esta seção aborda os aspectos relacionados aos índices de inflação, destacando seus princípios fundamentais e as implicações econômicas correspondentes. A compreensão desses elementos é fundamental para investidores, formuladores de políticas e cidadãos em geral, uma vez que a inflação exerce impacto direto sobre o poder de compra, o planejamento econômico e a estabilidade financeira. A inflação, enquanto indicador econômico, desempenha um papel crucial na análise da condição econômica de um país.

Existem várias definições para a inflação por diversos autores, onde cada um tem uma visão sobre o que é a inflação. Veremos algumas dessas definições:

De acordo com (SOARES, 2021) inflação é:

> um fenômeno essencialmente monetário com repercussão no patrimônio (na ropriedade) dos cidadãos. Em razão de outras variáveis macroeconômicas (emprego, renda, poupança, câmbio, juros etc.), a inflação pode afligir mais severamente uma economia que outra, motivo pelo qual uma teoria sobre a inflação baseada em elementos empíricos deva ser construída de país para país.(SOARES, 2021).

Na visão de (HAYEK, 2011) inflação é:

> um aumento excessivo da quantidade de dinheiro que, por sua vez, determina um aumento de preços. Um aumento geral de preços, porém, causado, por exemplo, por uma escassez de alimentos decorrente de más colheitas não é inflação. Tampouco poderíamos apropriadamente chamar de "inflação" a uma alta generalizada de preços causada por uma escassez de petróleo, ou de outras fontes de energia, que determinasse uma redução absoluta de consumo, a menos que essa carência se transformasse em pretexto para um aumento adicional da quantidade de dinheiro. (HAYEK, 2011).

De acordo com informações do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) (IBGE, 2024), a inflação é caracterizada pelo aumento nos preços de bens e serviços, sendo calculada por meio de índices de preços, frequentemente referidos como índices de inflação.

A inflação nada mais é do que o nome dado ao aumento generalizado dos preços de produtos e serviços. Ou seja, ela indica quando tudo fica mais caro, o custo de vida aumenta e, com isso, o poder de compra da moeda, no nosso caso, o real diminui.

Uma vez que a inflação reflete o encarecimento dos produtos e serviços, ela é calculada por meio de índices que medem qual foi a variação nos preços. O principal deles é o IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo).

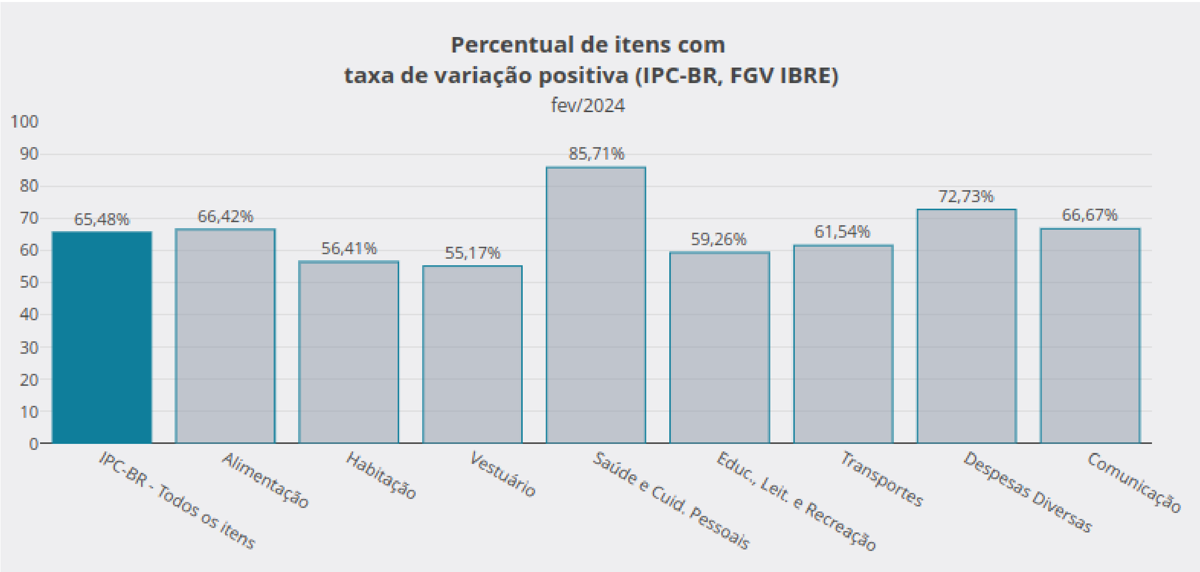
Calculado pelo IBGE, esse índice considera o valor dos itens básicos consumidos pela população brasileira. Entram na conta:

- Alimentos;
- Habitação;

- Vestuário;
- Transporte;
- Saúde;
- Despesas pessoais;
- Educação;
- Comunicação.

Na Figura 10 o Instituto Brasileiro de Econômia -IBRE, divulga no portal da inflação, a taxa de variação mensal positiva de alguns produtos, serviços e alimentos.

Figura 10 – Variação mensal por grupo



Fonte: <https://portal-da-inflacao-ibre.fgv.br/#!/inicio>

Para alcançar uma amostragem representativa dos preços em todo o país, o IBGE faz um levantamento mensal em 13 áreas urbanas do Brasil, computando cerca de 430 mil preços. No IPCA, o instituto considera os hábitos de consumo de famílias que recebem de um a 40 salários mínimos. Isso significa que o índice é uma média e não reflete, necessariamente, tudo que entra ou não em todos os lares brasileiros. Por isso, o índice pessoal de inflação de cada família não será exatamente o mesmo registrado pelo IPCA.

2.3.1 DEFLAÇÃO

A deflação podemos definir como sendo a taxa de inflação negativa, em outras palavras podemos dizer que não houve uma redução na média dos preços dos produtos e serviços analisados. Em outras palavras, deflação é quando na economia de um país os preços passam a diminuir, ao invés de aumentar. Na Figura 11 no mês de junho de 2023 temos uma indicação de deflação, pois temos uma indicação que redução nos preços de produtos e serviços.

2.3.1.1 REDUFLAÇÃO

REDUFLAÇÃO de acordo com (JUSBRASIL, 2024) é a prática de determinadas empresas em reduzir a quantidade de produtos embalados para contornar a inflação, ou lidar com a pressão inflacionária, viabilizando a possibilidade de manutenção da prática de valores aparentemente mais atrativos ao consumidor, seja pelo não reajuste, redução ou pequeno aumento do produto na prateleira dos estabelecimentos.

Em matéria divulgada no site G1 (PORTAL G1 REDUFLAÇÃO, 2024), reduflação é a redução do tamanho ou da quantidade de um determinado produto, ao mesmo em que seu preço permanece estável.

Esta prática pode ser, e muitas vezes é, prejudicial porque dá aos consumidores a falsa impressão de que estão a comprar a mesma quantidade e a pagar um preço justo, colocando-os numa desvantagem significativa que vai contra o consumidor.

Dada a ampla difusão e conscientização desta prática, existe a necessidade de regulamentar a forma como os fornecedores devem agir para garantir a devida publicidade e atenção aos consumidores, reduzindo o risco de danos que lhes sejam causados, como por exemplo, comprar menos produtos ao mesmo preço. A portaria de número 392 de 29 de setembro de 2021 do Ministério da Justiça e Segurança Pública. Esta portaria estabelece formas de como o fornecedor deve declarar e informar as alterações de quantidade, peso e volume nos rótulos dos produtos, entre outras informações, que devem ser as alterações passíveis de obrigatória exposição no rotulo da embalagem.

Em reportagem apresentada pela (CNNBRASIL, 2023), mostra que alguns produtos tiveram uma redução nas embalagens de seus produtos, permanecendo o mesmo valor o produto e em alguns casos tendo um aumento no valor do produto. Dos produtos com maior impacto da reduflação temos o sabão em pó, que saiu de 1102,7g para 1000,3 g, molho de tomate que passou de 401,7g para 369g, suco pronto que passou de 1124,2g para 1004,5g, entre outros produtos que podemos perceber a presença da reduflação, como é o caso do papel higiênico, que passou de 40m para 30m o rolo, a barra de chocolate que passou de 90g para 80g, a lata de leite, que passou de 400g para 380g, entre outros produtos que vem sofrendo efeito da reduflação.

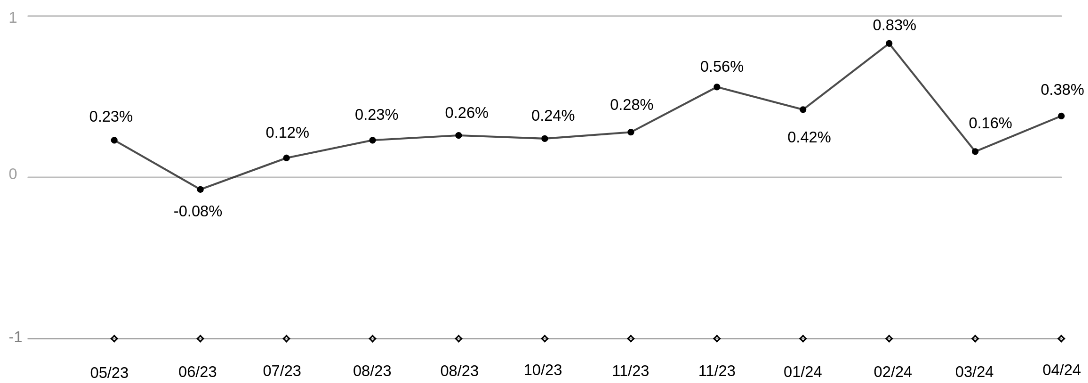
Situação 2.3.1. *Uma prática que está se tornando comum nas compras, é se deparar com produtos que permaneceram com os mesmos valores de compra ou até mesmo valores maiores, mas em compensação, houve uma redução na massa ou volume. Essa redução nos tamanhos das embalagens de alguns produtos é a medida que foi encontrada para suavizar os impactos da inflação para os consumidores.*

2.3.2 TAXA DE INFLAÇÃO

O IBGE em si é responsável pela produção de dois dos mais significativos índices de preços, a saber, o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC). Além dos já mencionados IPCA e INPC, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) elabora mais dois índices de inflação. Esses índices desempenham um papel crucial na análise abrangente dos movimentos de preços na economia. O IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo), INPC (Índice Nacional de Preços ao Consumidor), IPCA-15: Diferindo do IPCA apenas no período de coleta, IPCA-E: Este índice representa o acumulado trimestral do IPCA-15.

Na Figura 11 temos os IPCA entre os meses de Maio de 2023 á Abril de 2024, onde podemos perceber o comportamnto financeiro dos produtos e serviços por mês. Os dados foram coletado em <https://www.ibge.gov.br/indicadores#ipca>.

Figura 11 – Variação mensal do IPCA



Fonte: Autor

Além do IBGE, temos outras instituições que também produzem índices que auxiliam na tomada de decisões financeiras, como a FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS (FGV) e a FUNDAÇÃO INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA (FIPE), como o IPP (Índice de Preços ao Produtor), SINAPI (Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil), IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado), IGP-DI (Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna), IPC-S (Índice Semanal de Variação de Preços ao Consumidor), IPC-Fipe (Índice de Variação de Preços ao Consumidor), que podemos ter acesso em (FGV, 2024) e (FIPE, 2024)

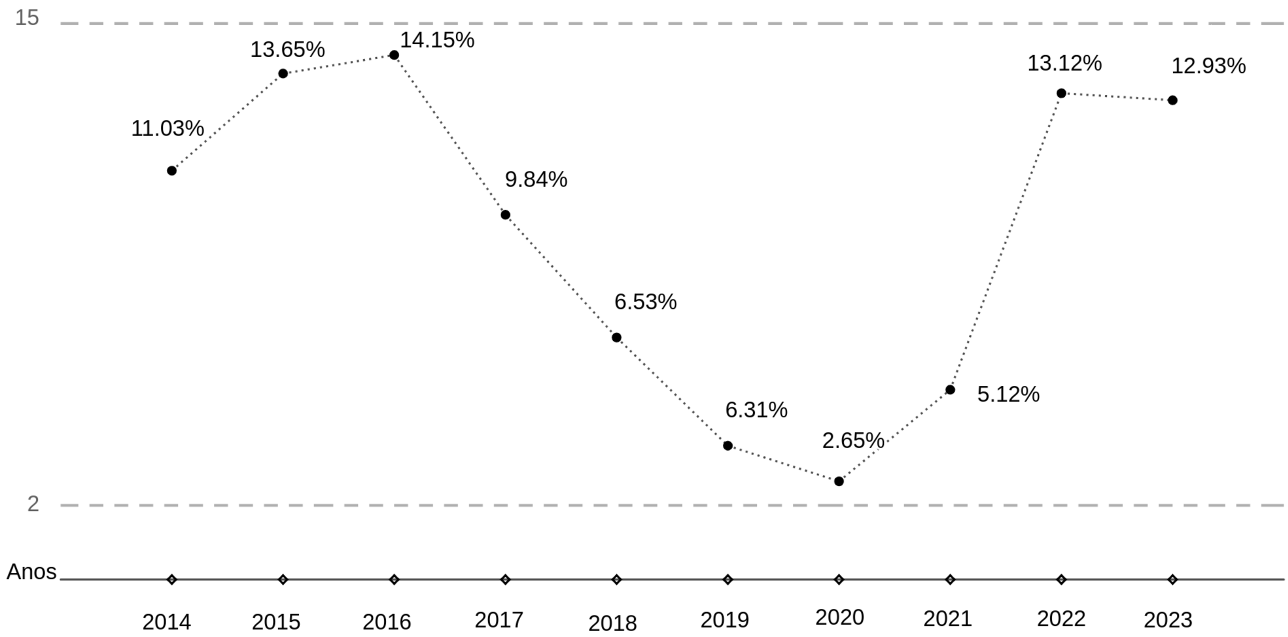
Temos também a Taxa Selic que suas siglas são referente ao Sistema Especial de Liquidação e de Custódia. Essa taxa é que influencia outras taxas de juros do país, como taxas de empréstimos, financiamentos e aplicações financeiras. A definição da taxa Selic é o principal instrumento de política monetária utilizado pelo Banco Central (BC) para controlar a inflação.

Há cada 45 dias o Comitê de Política Monetária (Copom) do BC se reúne para definir se a taxa Selic aumenta, diminui ou se mantém estável. A reunião é dividida em dois dias. No primeiro são discutidas a conjuntura econômica e os indicadores de inflação, no segundo dia a taxa de juros.

A taxa Selic tem um grande papel no controle da ecônomia do país, pois é ela que regula taxa importantes para empréstimos e financiamentos dos bancos e instituições financeiras. Por outro temos que a taxa também tem um papel importante para os investimentos financeiros, principalmente aos investimentos atrelados a renda fixas, que veremos mais á frente.

Na Figura 12 temos uma média anual das projeções da taxa Selic para os anos de 2014 á 2023. Podendo ser mais estudados no site do BCB através do link <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicotaxasjuros>. Como visto acima, a taxa Selic infuência outras taxas e quando a taxa Selic aumenta, temos uma tendência de aumento nas taxas de fianciamentos e emprestimos, caso contrário, ou seja, quando a taxa Selic tem redução, temos que os bancos e as instituições financeiras cobrem taxas mais baixas.

Figura 12 – Média anual para a taxa Selic



Fonte: Autor

Na Figura 13 temos a inflação acumulada anual, registrada no mês de dezembro dos anos de 2021 á 2023.

Figura 13 – Inflação anual acumulada

dezembro 2021	10,06
dezembro 2022	5,79
dezembro 2023	4,62

Fonte: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=series-historicas>

Exemplo 2.3.1. *Um empregador deseja reajustar em 2024 o salário de seus funcionários de acordo com a inflação referente aos ultimos três anos. Para isso ele precisa determinar o fator de correção da inflação acumulada desses três anos para poder fazer o reajuste. Como ele deve encontrar esse fator? Qual foi o percentual de aumento?*

Solução: De acordo com os dados da Figura 13 temos como inflação anual acumulada 10,06; 5,79; e 4,62 referentes aos anos de 2021, 2022 e 2023 respectivamente. Iremos determinar uma taxa equivalente trienal. Vamos chamar de F_3 a fator acumulada trienal e T_3 a taxa acumulada trienal.

$$\begin{aligned} F_3 &= (1+0,1006)(1+0,0579)(1+0,0462) \\ F_3 &= 1,1006 \cdot 1,0579 \cdot 1,0462 \\ F_3 &= 1,218116543. \end{aligned}$$

Assim temos que o fator é $F_3 = 1,218116543$ e $T_3 = F_3 - 1 = 0,218116543$, tendo um aumento de aproximadamente $21,81\%$.

2.3.3 Calculadora do Cidadão

Mostraremos uma ferramenta do Banco Central do Brasil que auxilia nas tomadas de decisões: A Calculadora do Cidadão, uma ferramenta pensada e feita para o cidadão analisar cada tomada de decisão. Na calculadora do cidadão, você pode ter acesso as correções de valores pela Poupança, correção pela taxa Selic, correção pela TR, correção pelo CDI, e por uma grande quantidades de índices de preços, também podem ser determinados valores futuros de um capital, aplicações com depósitos regulares e financiamento com prestações fixas. Essa ferramenta que nada mais é que um aplicativo que simula várias operações do cotidianos financeiro do cidadão, a partir das informações fornecidas.

Detalharemos os passos a serem seguidos para conseguir acesso à ferramenta Calculadora do Cidadão, e mostraremos como usar e aplicaremos essa ferramenta em exemplos.

- PASSO 1: Para ter acesso há essa ferramente, entre no site do Banco Central do Brasil em <https://www.bcb.gov.br>, em seguida clique em **Acesso à informações**, em seguida clique em **Cidadania Financeira**, e em seguida **Calculadora do Cidadão**, como mostra a Figura 14, onde teremos a tela incial após entrar no site do BCB, na Figura 15 é a tela que mostra a ação após ser clicado em **Acesso à informações** e Figura 16, temos a tela inicial da Calculadora do Cidadão, onde é oferecido quatro opções de ferramenta **Aplicação com depósitos regulares**, **Financiamento com prestações fixas**, **Valor fututo de capital** e **correção de valores**.

Figura 14 – Calculadora do Cidadão

Fonte: <https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao>

Figura 15 – Calculadora do Cidadão

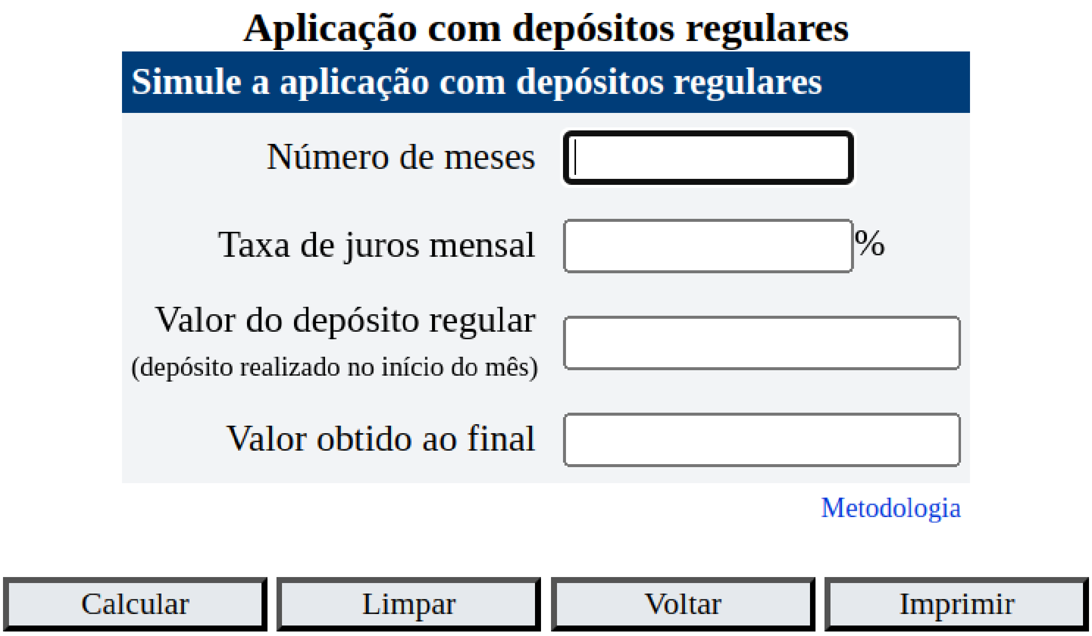
Fonte: <https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao>

Figura 16 – Calculadora do Cidadão

Fonte: <https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao>

- PASSO 2:Clicando em **Aplicação com depósitos regulares** teremos acesso a Calculadora do Cidadão que oferece uma análise das situações onde envolvem depósitos regulares, como veremos na Figura 17. Com essa ferramenta é possível o cidadão realizar simulações com depósitos regulares para verificar um montante futuro, ou quanto se deve depositar regularmente para se ter um montante M?

Figura 17 – Calculadora do Cidadão

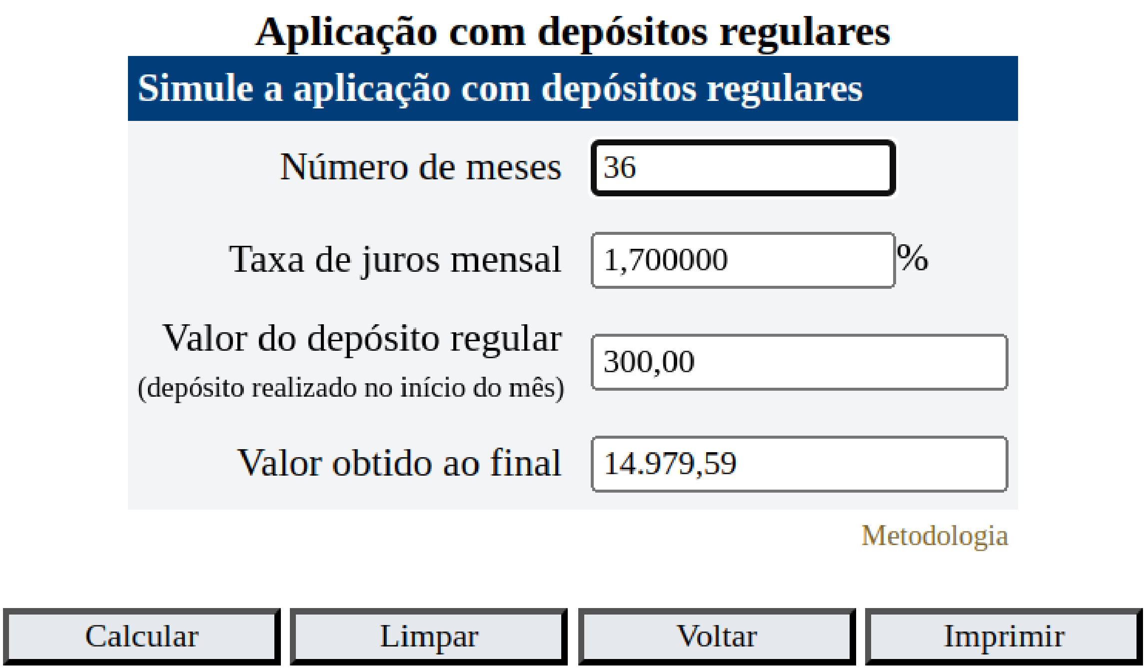


Fonte: <https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao>

- PASSO 3: Agora nos resta inserir os dados que desejamos, que em nosso caso será 36 o número de meses, 1,7% a taxa de juros mensal e R$ 300,00 o valor do depósito regular. Após inserir os valores desejados, basta clicar em **Calcular** que a Calculadora irá apresentar o **Valor obtido ao final**, que em nosso caso foi de R$ 14.979,59 como podemos ver na Figura 18. Vale ressaltar que para processo de futuras pesquisas e análises, o processo é análogo, bastando somente inserir os dados em mãos e clicar em calcular para obter o dado desejado.

Figura 18 – Calculadora do Cidadão

s



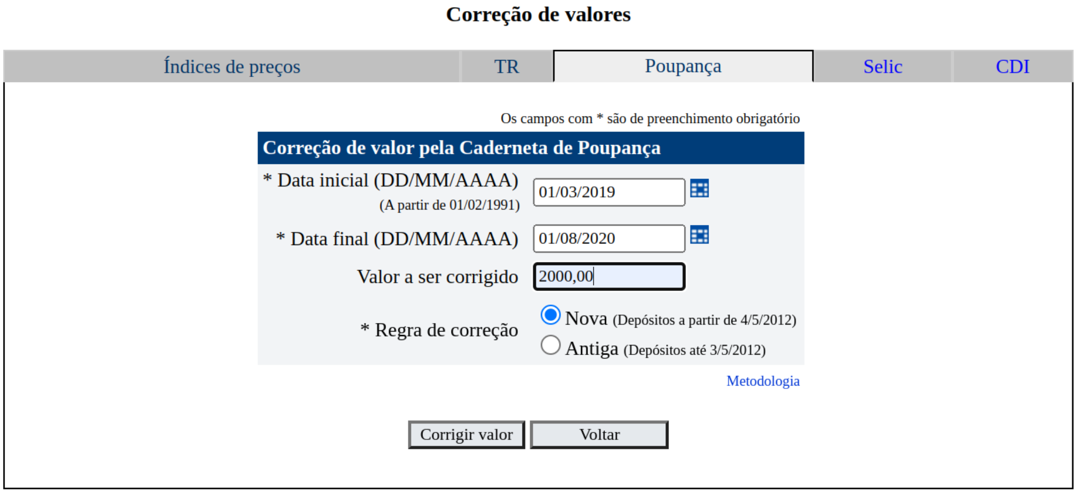
Fonte: <https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/calcularAplicacaoDepositosRegulares.do>

Vejamos um exemplo usando a Calculadora do Cidadão:

Exemplo 2.3.2. *Um cidadão deseja verificar uma correção de valores referente a uma aplicação regular na poupança de R$ 2000,00 para o intervalo das seguintes datas,* $01/03/2019$ *á* $01/08/2022$.

Solução: Para isso utilizaremos a calculadora do cidadão, na ferramenta Correção de Valores. Depois de seguir os passos orientados de como acessar a calculadora do cidadão, e com a mesma aberta, passe a inserir as datas nos campos específicos e o valor a corrigir, após esse procedimento iremos clicar em Corrigir Valor, lembrando que deve ser selecionado a Regra de correção, Nova regra para depositos a partir de $04/05/2012$ e Regra Antiga para depósito até $03/05/2012$. Na figura 19 temos a visualização desse passo, onde aparece as datas inseridas, o valor á ser corrigido, e um detalhe importante, que é a regra de correção, que vai depende das datas que esse valor irá ser corrigido.

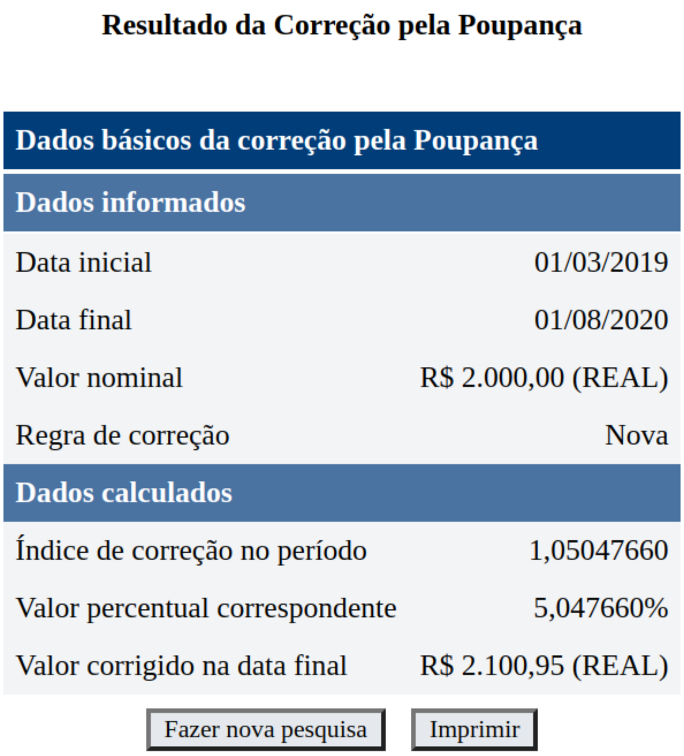
Figura 19 – Calculadora do Cidadão



Fonte: <https://bcb.gov.br>

Após clicar em **Corrigir valor**, que resultara na Figura 20, teremos o resultado dos dados corrigidos, como Valor corrigido na data final, índice de correção no período e o valor percentual da correção.

Figura 20 – Calculadora do Cidadão



Resultado da Correção pela Poupança

Dados básicos da correção pela Poupança	
Dados informados	
Data inicial	01/03/2019
Data final	01/08/2020
Valor nominal	R$ 2.000,00 (REAL)
Regra de correção	Nova
Dados calculados	
Índice de correção no período	1,05047660
Valor percentual correspondente	5,047660%
Valor corrigido na data final	R$ 2.100,95 (REAL)

Fazer nova pesquisa | Imprimir

Fonte: <https://bcb.gov.br>

2.3.3.1 INDICADORES DE ELEVAÇÃO DE PREÇO

Existem vários fatores que influenciam nas altas das taxas, como por exemplo fenômenos da natureza, onde em determinada região ha altas temperaturas, baixas temperaturas ou até mesmos chuvas em excesso, onde as mesmas situações acabam dificultando a produção de alimentos, fazendo assim ter uma elevação nos preços desses alimentos a afetados por esses fenômenos. Também podemos citar a escassez da matéria prima utilizada para a construção de certo produto, fazendo com que esse produto tenha seu preço elevado, entre várias outras situações que influenciam diretamente nos índices de inflação .

A inflação exerce impacto em diversos aspectos econômicos, afetando o poder de compra, a alocação eficiente de recursos e as taxas de juros. Uma inflação moderada pode indicar uma economia saudável, enquanto taxas elevadas podem provocar instabilidade e desequilíbrios econômico .

Os responsáveis pelas políticas econômicas adotam estratégias como o controle da oferta de moeda, medidas fiscais e a manipulação das taxas de juros para gerir a inflação. Uma análise minuciosa dos indicadores de inflação é imperativa para a tomada de decisões efetivas nesse contexto. Uma análise ampla dos indicadores de inflação, ressaltando a relevância desses elementos na compreensão da dinâmica econômica e a capacidade de interpretar e responder adequadamente às flutuações nos indicadores de inflação é crucial para promover a estabilidade econômica e garantir o bem-estar da sociedade.

2.4 INVESTIMENTOS

Para estudos mais aprofundados temos como sugestão de bibliografia (ROCHA, 2018) e o site do governo federal em (PORTAL DO INVESTIDOR, 2024).

Investir é uma atividade fundamental no mundo financeiro, caracterizada pela alocação de recursos em ativos com a expectativa de obter retornos futuros. Existem diversos tipos de investimento, cada um com suas características, riscos e potenciais de retorno. Nesta dissertação, exploraremos alguns desses tipos de investimento, destacando suas principais características e considerações. Vale ressaltar que em nenhum momento iremos sugerir algum tipo de investimento, pois nosso objetivo é expor algumas opções.

O certificado de depósito interbancário (CDI) não é um tipo de investimento, mas um índice que define o rendimento de vários investimentos. O CDI é um título emitido entre bancos, ele funciona como um sistema de empréstimo de curto prazo entre instituições financeiras, e sua finalidade é indicar quanto o banco credor deve receber de juros pelo empréstimo que fez ao concorrente.

2.4.1 TIPOS DE INVESTIMENTOS

POUPANÇA: É o investimento mais tradicional e popular do Brasil, ideal para quem deseja poupar dinheiro. A vantagem é que você pode fazer depósitos e resgates em qualquer dia do mês, sem limite mínimo. Além disso, essa modalidade de investimento oferece baixo risco, ideal para quem gosta de ter mais segurança na hora de aplicar seu dinheiro (PORTAL DO INVESTIDOR, 2024).

Para entender como funciona a aplicação de um dos investimentos mais usados no Brasil(a poupança) iremos expor as orientações do Banco Central.

De acordo com a legislação art. 12 da Lei nº 8.177, de 1º de março de 1991, a remuneração dos depósitos de poupança é composta de duas parcelas:

1) a remuneração básica, dada pela Taxa Referencial - TR

2) a remuneração adicional, correspondente a:

   2.1) 0,5% ao mês, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for superior a 8,5%; ou

   2.2) 70% da meta da taxa Selic ao ano, mensalizada, vigente na data de início do período de rendimento, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for igual ou inferior a 8,5

A remuneração dos depósitos de poupança é calculada sobre o menor saldo de cada período de rendimento. O período de rendimento é o mês corrido, a partir da data de aniversário da conta de depósito de poupança, para os depósitos de pessoas físicas e de entidades sem fins lucrativos. Para os demais depósitos, o período de rendimento é o trimestre corrido, também contado a partir da data de aniversário da conta.(BRASIL, 2013).

A rentabilidade da poupança é de 0,5% a.m +TR(taxa referencial). Mas se a Selic estiver abaixo de 8,5%, o rendimento passa a ser 70% da Selic +TR.

CDB: Certificado de Deposito Bancário é um investimento de renda fixa que pode ser encontrado em 3 modalidades: CDB prefixada, com os juros definidos no momento da aplicação, o CDB pós-fixada, atrelada à variação do CDI e com a taxa definida no momento da aplicação e o CDB atrelado a inflação, que tem rentabilidade pré-fixada mais inflação atrelada a um índice.

TESOURO SELIC(LFT):são títulos de renda fixa pós-fixados atrelados à remuneração da taxa básica de juros da economia, a taxa Selic. Apesar da referência ser a taxa Selic, é importante o investir saber que não receberá como remuneração exatamente 100% dessa taxa. Isso ocorre porque pode haver custos incidentes sobre as operações, como taxas de custódia e/ou negociação (PORTAL DO INVESTIDOR, 2024).

TESOURO PRÉ-FIXADO: Letra do Tesouro Nacional (LTN)- São títulos de renda fixa prefixados, em que já se sabe no momento da compra exatamente quanto irá receber no futuro. Assim como no caso de outros títulos, pode haver custos incidentes sobre as operações, como taxas de custódia e/ou negociação.

TESOURO IPCA: Notas do Tesouro Nacional(NTN-s) possuem rendimento composto por uma taxa de juros mais a variação da inflação (IPCA). Portanto, podem ser considerados como títulos híbridos. Há opções para diferentes vencimentos, com ou sem pagamento de juros semestrais. Assim como no caso dos outros títulos, pode haver custos incidentes sobre as operações, como taxas de custódia e/ou negociação (PORTAL DO INVESTIDOR, 2024).

2.4.2 FUNDO DE INVESTIMENTO

Os fundos de investimento são veículos de investimento que reúnem o dinheiro de diversos investidores para investir em uma ampla gama de ativos, como ações, títulos, imóveis, entre outros. Eles são gerenciados por profissionais financeiros e oferecem uma maneira conveniente de diversificar o portfólio, mesmo para investidores com quantias menores. Os fundos de investimento podem ser classificados em diferentes categorias, como fundos de ações, fundos de renda fixa e fundos multimercados.

AÇÕES: As ações representam uma participação acionária em uma empresa. Os investidores que adquirem ações tornam-se acionistas e têm direito a uma parte dos lucros da empresa, na forma de dividendos, e também podem se beneficiar do aumento do valor das ações ao longo do tempo. Investir em ações pode oferecer potencial de crescimento significativo, mas também está sujeito a volatilidade e riscos do mercado.

IMÓVEIS: O investimento em imóveis envolve a compra, posse e/ou gestão de propriedades com o objetivo de obter retorno financeiro, seja por meio de aluguel, valorização do imóvel ou ambas. Os investimentos imobiliários podem proporcionar fluxos de renda estáveis, proteção contra inflação e potencial de valorização do capital a longo prazo, mas também requerem capital inicial significativo e podem estar sujeitos a custos de manutenção e volatilidade do mercado imobiliário.

MERCADO DE CÂMBIO: O mercado de câmbio envolve a negociação de moedas estrangeiras com o objetivo de obter lucro com as flutuações nas taxas de câmbio. Investir em Forex pode oferecer oportunidades de lucro em um mercado altamente líquido e acessível, mas também está associado a riscos significativos, incluindo volatilidade e exposição a eventos macroeconômicos globais.

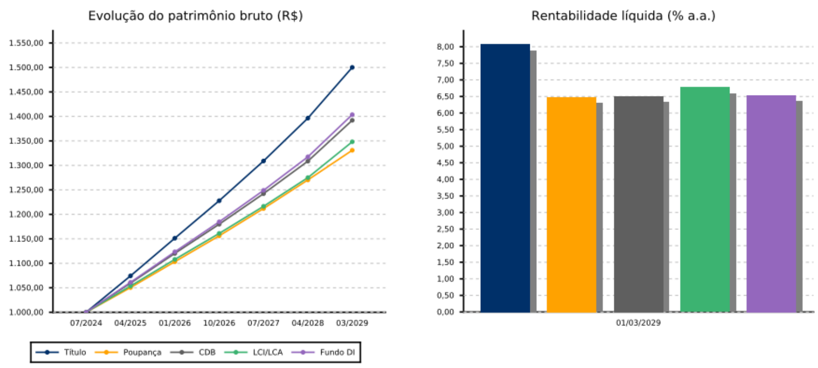
É importante destacar que a escolha do tipo de investimento adequado depende dos objetivos financeiros, tolerância ao risco, horizonte de investimento e outras considerações individuais de cada investidor. Diversificar o portfólio, buscar orientação financeira profissional e realizar uma análise cuidadosa dos diferentes tipos de investimento são práticas essenciais para construir uma carteira de investimentos sólida e bem-sucedida.

Exemplo 2.4.1. *Em uma análise de investimento para o ano de 2023 onde a caderneta de poupança teve um acumulo de 8,0363% e um acumulado na inflação de 4,62% , tem a seguinte dúvida. Vale a pena investir na caderneta de poupança nessas situações?*

Solução: Os rendimentos da poupança, geralmente estão atrelados à taxas fixas, enquanto a inflação não tem uma regularidade em suas taxas, por isso que em casos onde o acúmulo da inflação é maior que o acúmulo da poupança, não é interessante realizar investimento na poupança, pois o dinheiro não acompanha o aumento dos preços. Isso resulta em uma perda de valor real. Em nosso caso que foi feito uma análise no ano de 2023 ainda é interessante realizar um investimento na poupança, pois os rendimentos foram maiores que a inflação.

Na Figura 21 temos uma situação que retrata investimentos no valor de R$ 1000,00 em Tesouro Selic, na Poupança, no CDB, no LCI/LCA e no Fundo DI, que é um fundo de investimento de renda fixa.

Figura 21 – Simulador do Tesouro Direto



Investimento	Valor bruto de resgate (R$)	Rentabilidade bruta (a.a.)	Custos (R$)	Valor do imposto de renda (R$)	Valor líquido de resgate (R$)	Rentabilidade líquida (a.a.)
LFT	1.500,09	9,30	0,00	75,01	1.425,08	8,08
Poupança	1.330,85	6,48	0,00	0,00	1.330,85	6,48
CDB	1.392,03	7,53	0,00	58,80	1.333,23	6,51
LCI/LCA	1.348,16	6,77	0,00	0,00	1.348,16	6,77
Fundo DI	1.403,59	7,72	0,00	59,07	1.335,05	6,54

(*) Simulação avançada considerando:
- Data do resgate: 01/03/2029

Fonte: <https://www.tesourodireto.com.br/titulos/precos-e-taxas.htm#0>

2.5 TOMADA DE DECISÃO

A tomada de decisão no contexto de compras é um processo crucial que demanda uma reflexão cuidadosa, pois influencia diretamente na satisfação do comprador e no sucesso financeiro. Ao decidir sobre uma aquisição, é fundamental adotar uma abordagem criteriosa, levando em consideração não apenas aspectos emocionais e práticos, e sim aspectos econômicos.

O primeiro passo na tomada de decisão de compra é a identificação clara das necessidades e desejos. Compreender o que motiva a compra é essencial para garantir que o produto ou serviço escolhido atenda não apenas às exigências práticas, mas também às expectativas do comprador.

A pesquisa desempenha um papel fundamental nesse processo. Informações sobre diferentes opções de produtos, preços e experiências de outros consumidores fornecem uma base sólida para a decisão. A busca por avaliações e feedbacks contribui para uma escolha mais informada com as expectativas do comprador. O fator emocional não pode ser subestimado na tomada de decisão de compra. Considerar como o produto ou serviço se alinha aos valores pessoais, estilo de vida é crucial, sendo que isso não apenas aumenta a satisfação, mas também fortalece a conexão emocional com a compra.

A avaliação financeira desempenha um papel crítico na tomada de decisão. Analisar o impacto da compra no orçamento pessoal, considerar opções de pagamento e buscar oportunidades de economia são aspectos importantes e que devem ser considerados em todo processo de compra. Em síntese, a tomada de decisão no âmbito das compras é uma jornada que vai além de simplesmente escolher um produto. Envolve compreender as próprias necessidades, pesquisar, considerar aspectos emocionais e financeiros, e, finalmente, fazer uma escolha que não apenas atenda às exigências práticas, mas também proporcione satisfação e alinhamento pessoal. Nessa abordagem a decisão de compra torna-se uma experiência significativa e gratificante.

2.5.1 PROPORÇÃO DE VALORES

O processo de análise de cada compra a ser realizada é fundamental, uma vez que envolve a tomada de decisões estratégicas que impactam diretamente nos resultados financeiros do orçamento familiar, tendo em vista que sempre se deve ter um equilíbrio sustentável entre receitas e despesas.

A relação de consumidor nem sempre é tão fácil, com relação nas tomadas de decisões referentes às compras de determinados produtos. Comumente nos deparamos com situações que requerem uma análise mais detalhada sobre cada tomada de decisão. A seguir veremos alguns exemplos de como é importante realizar uma análise referente a cada compra.

Situação 2.5.1. *Em uma compra de supermercado o comprador deseja comprar um produto x, que esta disponível em duas embalagens diferentes. Embalagem A de 200 gramas e embalagem B de 500 gramas. Ele deseja comprar 1 quilograma desse produto x, mas dai a dúvida, sendo que o produto x na embalagem A custa R$ 32,00 e o produto x na embalagem B custa R$ 75,00 o que será mais vantajoso para o comprador ?.*

Veja que para comprar 1kg pode-se comprar 5 unidades da embalagem A (que comporta 200g), pagando $5 \cdot 32,00 = 160,00$ ou então 2 unidades da embalagem B (que comporta 500g), pagando-se $2 \cdot 75 = 150,00$. Isso já resolveria a dúvida. Usando uma regra de três simples pode-se descobrir qual o valor de 1gr ao escolher cada embalagem. No caso, 16 centavos pelo grama ao se escolher a embalagem A e 15 centavos pelo grama ao se escolher a embalagem B.

Como visto na demonstração anterior é mais vantajoso para o comprador, realizar a compra do produto x na embalagem B.

Na grande maioria das vezes os preços dos produtos são apresentados de tal forma que induza o comprador a realizar a compra do produto com maior quantidade, onde a intenção é sempre a de vender mais, por isso é sempre interessante analisar cada compra.

Situação 2.5.2. *Um comprador B vai ha uma farmácia, onde deseja comprar um medicamento que é oferecido em duas embalagens, uma com uma drágea e outro com duas drágea, todos do mesmo fabricante e mesma miligrama. O medicamento em questão tem os seguintes valores, R$ 4,89 e R$ 10,00 respectivamente para as embalagens de uma drágea e duas drágea. Sabendo que o comprador B precisa de duas drágea dessa medicação, qual é a melhor forma para a compra do medicamento?*

Aparentemente parece ser uma tomada de decisão simples, mas nem sempre todos tomam as mesmas decisões, e muitos se decidem sem o uso dos conceitos matemáticos para obter auxiliar na decisão mais favorável financeiramente. Iremos analisar a tomada de decisão utilizando os conhecimentos matemáticos. Para realizar a compra de duas drágea do medicamento, sendo que o medicamento seja vendido em embalagem com uma unidade, o comprador terá que pagar pela medicação o valor de R$ 9,78. Para realizar a compra de duas drágea do medicamento, sendo que o medicamento seja vendido em embalagem com duas unidades, o comprador terá que pagar pela medicação o valor de R$ 10,00. Sendo assim temos que a decisão favorável para o comprador é realizar a compra da medicação que é vendida em embalagem com uma unidade.

2.6 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

O sistema de amortização é um conceito fundamental em finanças e empréstimos, utilizado para determinar como uma dívida será paga ao longo do tempo. Existem vários métodos de amortização, cada um com suas características e impactos financeiros.
Dentre os vários tipos de amortização temos:

- o *SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE* (SAC), consiste em amortizações iguais em cada período.
- o *SISTEMA PRICE* ou *SISTEMA FRANCÊS AMORTIZAÇÃO* (PRICE), que consiste em pagamento de prestações iguais.
- o *SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO* (SAM) que consiste em pagamentos que são as médias aritméticas dos sistemas SAC e PRICE.

.

Iremos trabalhar os dois mais utilizados sistemas de amortizações, o SAC e PRICE.

No *Sistema de Amortização Constante* (SAC), as amortizações em cada prestação é constante e assim, temos que o valor das prestações diminui com o passar do tempo.

Vamos representar uma situação onde houve um empréstimo de R$ 20 000,00 a uma taxa de juros de 5% ao mês, onde será pago em 5 parcelas. Como no SAC a amortização é um valor constante, então determinamos seu valor através da seguinte relação, Saldo devedor inicial dividido pelo numero de parcelas, dai temos 20000:5=4000, logo temos que R$ 4000,00 é o valor da amortização desse empréstimo.

Na Tabela 2 temos uma distribuição dos valores amortizados, referente ao sistema SAC, onde podemos perceber a situação do dinheiro em cada tempo, como os juros cobrado, os valores das prestações e o saldo devedor em cada período.

Tabela 2 – Tabela de Armotização SAC

Tempo	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	**20000**
1	4000	**1000** 5% de 20000	**5000** 4000+1000	20000-4000= **16000**
2	4000	**800** 5% de 16000	**4800** 4000+800	**12000** 16000-4000=
3	4000	**600** 5% de12000	**4600** 4000+600	**8000** 12000-4000=
4	4000	**400** 5% de 8000	**4400** 4000+400	**4000** 8000-4000=
5	4000	**200** 5% de 4000	**4200** 4000+200	**0** 4000-4000=

Fonte: Autor

Podemos perceber que os valores do juro das prestações diminuem $R\$$ 200,00 a cada mês , e os valores do saldo devedor diminuem o valor da amortização $R\$$ 4000,00, e mais, vimos que o valor da prestação é a soma do valor do juro em determinado momento com o valor da amortização.

Sistema Francês de Amortização, Tabela Price ou Sistema Price, foi desenvolvido pelo inglês Richard Price, cujo campo de estudos envolvia matemática, politica e economia. Devido a sua ampla utilização na França, o sistema ficou conhecido como Sistema Francês de Amortização, embora tenha sido elaborado por um inglês.

A Principal característica desse sistema, é o valor fixo das prestações, para todos os períodos de tempo e para determinar o valor dessa prestação iremos usar a fórmula,

$$P = \frac{C.i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{2.16}$$

onde P é o valor fixo da prestação, C é o valor do empréstimo ou do produto, i é a taxa de juro e n é a quantidade de prestações que serão pagas, sendo a primeira um período de tempo após a dívida ser contraída.

Vejamos uma situação, onde João deseja fazer um empréstimo em uma instituição financeira de R$ 30000,00 e quer pagar em 60 prestações iguais, com uma taxa de juro de 2% ao mês. Qual será o valor da prestação?

Usando a Fórmula (2.16), temos $P = \frac{30000.0,02}{1-(1+0,02)^{-60}}$. Resolvendo com o auxilio de uma calculadora, chegamos em $P = 863,04$

Vamos construir uma tabela para podermos analisar o juros pago em cada prestação e o valor amortizado em cada mês.

Agora João deseja realizar um empréstimo na mesma instituição financeira, que opera com taxa de juro de 2% ao mês, mas o valor que deseja é de R$ 1500,00 e João quer pagar em 5 prestações fixas.

Primeiro determinaremos o valor da prestação, usando a formula (2.16), obtemos $P = \dfrac{15000.0,02}{1-(1+0,02)^{-5}}$. Calculando com o auxílo de uma calculadora resulta $P = 318,24$. Agora iremos analisar o juros, o valor amortizado e o saldo devedor.

Tabela 3 – Tabela de Amortização Sistema Price

Tempo	Prestação (R$)	Juros (R$)	Amortização (R$)	Saldo Devedor(R$)
0	-	-	-	**1500**
1	318,24	**30,00** 2% de 1500	**288,24** 318,24-30,00	**1211,76** 1500-288,24=
2	318,24	**24,24** 2% de 1211,76	**294,00** 318,24-24,24=	**917,76** 1211,76-297=
3	318,24	**18,36** 2% de 917,76	**299,88** 318,24-18,36=	**617,88** 917,76-299,88=
4	318,24	**12,36** 2% de 617,88	**305,88** 318,24-12,36=	**312,00** 617,88-305,88=
5	318,24	**6,24** 2% de 311,97	**312,00** 318,24-6,24=	**0** 312,00-312,00=

Fonte: Autor

Claro que usamos somente as duas primeiras casa decimais e em outros casos financeiro podem ser incluídas algumas taxas de segurança financeira, onde isso pode elevar o valor da prestação.

2.7 FINANCIAMENTO

O Financiamento é o ato de fornecer recursos financeiros, com dinheiro ou crédito, para uma pessoa ou uma empresa, possam adquirir bens, produtos, serviços ou investir em algum projeto específico. Geralmente o financiamento é utilizado quando não se tem o capital suficiente para realizar o projeto desejado. Em outras palavras, Financiamento é uma operação de compra parcelada de um bem ou serviço onde há uma finalidade já estabelecida no ato de sua aquisição. As parcelas são definidas em acordo entre quem compra e quem vende o financiamento, podendo ter valores iguais ou não e podendo ser submetidas a cobrança de juro com relação ao tempo ou não. Um fato importante nessa modalidade de crédito, é que o bem financiado fica como uma garantia, pois o mesmo fica sujeito a ser recolhido pela instituição que realizou o financiamento, caso não haja pagamento ou não cumprimento do acordo firmado entre as partes.

Existem vários tipos de financiamentos, mais iremos comentar os mais utilizados:

Financiamento Imobiliário: Conhecido como financiamento de Imóveis, são os mais utilizados por aquelas pessoas que desejam ter a casa própria. Existem várias formas para a realização desse financiamento, com entrada e o restante em parcelas acrescidas de juros, sem entrada, com poucas parcelas e com um número razoavelmente grande de parcelas.

Financiameto de veículo: O financiamento de veículos é um empréstimo indicado para pessoas que desejam comprar um veículo, mas não possuem o valor total para fazê-lo. É perfeito para quem quer comprar um carro novo, bem como para quem procura um carro usado ou seminovo.

Financiamento Estudantil: O financiamento estudantil é um empréstimo concedido a estudantes com o objetivo de pagar o ensino superior em uma instituição privada.

Quase todas as instituições que oferecem esse produto de empréstimo permitem que o aluno comece a pagar após concluir o curso escolhido. Um bom exemplo de financiamento estudantil é o esquema governamental conhecido como FIES (Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior).

Financiamento de Máquina e Equipamento: Este é um financiamento que só pode ser solicitado por empresas localizadas no Brasil e, como o nome sugere, tem como objetivo principal, a compra e venda de equipamentos para a empresa. Teoricamente, qualquer pessoa pode solicitar um financiamento, bastando apenas ter os documentos exigidos pelo banco credor.

Leasing: O leasing é semelhante ao financiamento convencional, mas em vez de emprestar dinheiro, você na verdade empresta um bem como um carro ou imovel por meio de um contrato. É bem parecido com um aluguel, mas, ao final do contrato entre a instituição proprietária do bem (o locador) e o consumidor que alugou o bem (o locatário), o consumidor tem a oportunidade de adquirir o bem contratado.

Auto Financiamento (Consórcio): A ideia é que você e um grupo de pessoas com interesses semelhantes financiem um bem como um carro por exemplo. O auto-financiado mais conhecido é o consórcio, onde você paga uma determinada quantia a uma empresa todos os meses por um determinado período, nesse período ocorre sorteos onde o contemplado pode pegar de forma integral o dinheiro e comprar o bem desejado. A vantagem em relação ao empréstimo e ao financiamento é que o consórcio não cobra juros, mas sim, uma taxa de administração.

Fazer um empréstimo é uma decisão financeira importante que requer uma análise cuidadosa para garantir que ele seja vantajoso . Aqui estão os alguns pontos a serem considerados ao solicitar um empréstimo:

1 Finalidade do Empréstimo:

1.1- Necessidade Real: Avalie se o empréstimo é realmente necessário e se não há outras alternativas para conseguir os recursos.

1.2 - Uso dos Fundos: Defina claramente como o dinheiro será utilizado e se essa utilização trará benefícios que compensarão o custo do empréstimo.

2 Valor do Empréstimo:

2.1- Quantia Necessária: Solicite apenas o valor que realmente precisa para evitar dívidas desnecessárias.

2.2- Orçamento Pessoal: Verifique se o valor das parcelas se encaixa no seu orçamento sem comprometer outras despesas essenciais.

3 Taxa de Juros:

3.1- Comparação de Taxas: Compare as taxas de diferentes instituições financeiras para encontrar a mais vantajosa.

4 Custo Efetivo Total (CET):

4.1- Encargos e Taxas: Além da taxa de juros, considere todos os encargos e taxas associados ao empréstimo, como tarifas de administração, seguros e outros custos.

4.2- Transparência: Certifique-se de que todas as taxas estejam claramente explicadas no contrato.

5 Prazos de Pagamento:

5.1- Duração do Empréstimo: Avalie se o prazo do empréstimo é adequado para a sua capacidade de pagamento.

5.2- Parcelas Mensais: Verifique o valor das parcelas e se elas se ajustam ao seu fluxo de caixa mensal.

6 Condições Contratuais:

6.1- Cláusulas e Termos: Leia atentamente o contrato para entender todas as cláusulas, incluindo multas por atraso, possibilidade de quitação antecipada e renegociação.

6.2- Flexibilidade: Verifique se há flexibilidade para ajustar prazos e valores de parcelas em caso de necessidade.

7 Instituição Financeira:

7.1- Credibilidade: Escolha uma instituição financeira confiável e bem avaliada.

7.2- Serviço ao Cliente: Considere a qualidade do atendimento ao cliente e o suporte oferecido.

8 Capacidade de Pagamento:

8.1- Renda Mensal: Avalie sua renda e despesas atuais para garantir que poderá arcar com as parcelas do empréstimo sem comprometer sua situação financeira.

8.2- Reserva de Emergência: Mantenha uma reserva financeira para imprevistos, garantindo que poderá continuar pagando o empréstimo em caso de emergências.

9 Impacto no Crédito:

9.1- Histórico de Crédito: Entenda como o novo empréstimo pode afetar seu score de crédito e futuras oportunidades de financiamento.

9.2- Endividamento Total: Considere seu nível de endividamento atual e como o novo empréstimo pode impactar sua capacidade de obter crédito no futuro.

10 Condições Econômicas:

10.1- Taxa de Inflação: Considere a inflação e como ela pode afetar o valor real das parcelas ao longo do tempo.

10.2- Cenário Econômico: Avalie o cenário econômico geral e as perspectivas de estabilidade financeira.

Analisar cuidadosamente esses pontos ajudará a tomar uma decisão informada e evitar problemas financeiros no futuro.

2.7.1 CARTÃO DE CRÉDITO

O cartão de crédito é uma ferramenta que concede o pagamento por compras e serviços sem precisar gastar dinheiro no instante da compra ou da contratação. Mas deve ficar claro que em algum momento essa conta deve ser paga, ou seja, devolver esse dinheiro que usou e que não era seu. Parar realizar o pagamento, o usuário receberá uma fatura contendo todos os gastos que realizou nesse determinado período. Pagando o valor total da fatura dentro do prazo de vencimento, não serão cobrados juros. Deixando de quitar, ou não pagar o valor total da fatura até o vencimento, terá que pagar juros por isso. E é ai onde se encontra o grande perigo do uso do cartão de crédito, pois as taxas de juros são uma das mais altas.

As operadoras de cartão de crédito disponibilizam o pagamento da fatura parcialmente, acima de um mínimo estabelecido e abaixo do valor total. Optar por pagar qualquer valor diferente do total da sua fatura é assumir que o restante do valor será definido como empréstimo pré-aprovado, onde entra o chamado rotativo do cartão de crédito, que é uma credito oferecido automaticamente ao consumidor que não quita 100% da sua fatura antes do vencimento.

Em 2023 quando o Congresso Nacional aprovou o Programa DESENROLA BRASIL, colocou um dispositivo que dava aos bancos 90 dias para apresentarem ao Conselho Monetário Nacional, por meio do Banco Central uma proposta satisfatória para limitar os juros do rotativo do cartão de crédito, caso não houvesse uma proposta satisfatória dentro do prazo, ficaria valendo de forma automática um limite de 100% do valor original da dívida. Com não ouve uma proposta satisfatória, em 03/01/20224 passou a valer as nova regra do juros para o rotativo do cartão de crédito, que não poderá exceder a 100% do valor da dívida com limite máximo de 1 ano, ou seja, após 1 ano não terá mais juros.

Em resumo, uma dívida de R$1000,00 não quitada pode chegar ao máximo R$2000,00 após incidência de juros e encargos contratuais por atraso.

Problema 2.7.1. *Determinada banco oferece para um determinado cliente um cartão de crédito com taxa de juros de 4,71% a.m. sem encargos financeiros. Assim que o cliente ficou em posse do cartão ele realizou uma compra de R$ 600,00 parcelada em 3 vezes sem juros. Não houve outras compras com o cartão de crédito. Ele pagou a primeira parcela antes do vencimento, mas as outras duas parcelas ele so consegui quitar após 14 meses de quitar a primeira parcela. Qual foi o valor pago pela compra?*

Solução: De acordo com as novas regras do uso do catão de crédito, so pode ser capitalizado o saldo devedor por no máximo 1 ano(12 meses), então temos que calcular os juros para esse tempo de 12 meses aplicado numa parcela de R$200,00 com taxa de 4,71% a.m. usando a fórmula (2.8) temos

$$M = 200 \cdot (1 + 0,0471)^{12} = 347,45$$

A segunda e a terceira parcela serão cobrados R$ 347,45 cada, logo temos que o valor da compra ficará no valor de $200 + 347,45 + 347,45 = 894,90.$

2.8 LIQUIDAÇÃO ANTECIPADA DE EMPRÉSTIMO OU FINANCIAMENTO

Um empréstimo bancário consiste em um contrato firmado entre o cliente e uma instituição financeira. Mediante esse contrato, o cliente se compromete a devolver o dinheiro de modo parcelado, com acréscimo de juros. O banco receberá o principal mais os juros.

Como pode ser visto em (BRASIL, 16-06-2024), liquidação antecipada a quitação parcial ou total de uma dívida antes do vencimento, com redução proporcional de juros e demais acréscimos, na forma prevista no contrato. Essa quitação pode ser feita com o uso de recursos próprios ou por transferência de recursos a partir de outro banco.

No caso de empréstimos bancários, a antecipação pode ser feita na ordem inversa, ou seja, da última parcela para as anteriores.

É importante informar a população sobre a liquidação antecipada em empréstimos bancários, pois muitas pessoas desconhecem essa opção e acabam pagando mais juros do que o necessário. Sendo um direito previsto em Lei, no código de defesa do consumidor no Art. 52 garante o direito à redução proporcional dos juros e encargos financeiros em caso de quitação antecipada, seja total ou parcial, de empréstimos e financiamentos. Ao entender essa possibilidade, o cliente pode avaliar se possui recursos financeiros para quitar antecipadamente o empréstimo e economizar com os juros. Além disso, a informação sobre a liquidação antecipada possibilita aos consumidores tomarem decisões mais conscientes e evitarem contrair dívidas desnecessárias. O conhecimento de todos os detalhes dos contratos é de suma importância para que as pessoas tomem as decisões mais vantajosas em seus contratos de empréstimos bancários.

2.8.1 CÁLCULO DAS PARCELAS DA LIQUIDAÇÃO ANTECIPADA

A definição de como deve ser realizado o processo de amortização ou liquidação antecipada decorrente de empréstimos ou financiamentos é regida pelas Resoluções n° 3516 de 06 de Dezembro de 2007 e Resolução n° 4320 de 27 de Março de 2014, podendo ser encontradas facilmente no site do Banco Central do Brasil. . De acordo com essas resoluções, os cálculos referentes a antecipação de parcelas, amortização ou liquidação antecipada, são realizados mediantes a taxas já contratadas, não podendo haver aumento em taxas contratuais ou inclusão de outras taxas.

Para realizarmos os cálculos de liquidação antecipada, usaremos as Fórmulas, (2.12) e (2.10).

2.8.2 EXEMPLOS DE LIQUIDAÇÃO ANTECIPADA

Existem calculadoras online, software e sites de instituições financeiras que realizam os cálculos de forma bem simples, utilizando como base as diretrizes do Código de Defesa do Consumidor e metodologia de cálculo orientado pela Resolução n° 3.516/2007 e Resolução n° 4320/2014 do Banco Central, sendo preciso apenas a inserção de dados. Vale ressaltar que os resultados são meramente ilustrativos e é sempre interessante avaliar todas as situações, e verificar qual se adequa melhor às suas finanças.

Problema 2.8.1. *Em um financiamento com pagamento em 40 parcelas fixas no valor de R$ 400,00 com taxa de juros de 1,2% a.m temos a seguinte situação. O cliente que se encontra na quitação da quinta parcela, deseja quitar juntamente com a quinta parcela a ultima parcela. Qual deverá ser o valor que o cliente deve pagar?*

Solução: Sabemos que o cliente vai pagar o valor de R$ 400,00 referente a quinta parcela do financiamento, e agora temos que determinar o valor da ultima parcela. Para isso usaremos a Fórmula (2.10) onde

$$V = \frac{400}{(1+0,012)^0} + \frac{400}{(1+0,012)^{35}}$$

$$V = 400 + 263,47 = 663,47$$

Logo será R$ 663,47 o valor para liquidar a quinta e a quadragésima parcela, tendo uma economia de R$ 136,53.

Problema 2.8.2. *Um financiamento foi realizado em 5 anos com pagamento em 60 parcelas fixas no valor de R$ 300,00 com taxa de juros de 2% a.m. O cliente deseja liquidar as doze ultimas parcelas juntamente com a primeira parcela. Qual deverá ser o valor que o cliente deve pagar? Qual será a economia?*

Solução: O cliente pagará o valor de R$ 300,00 referente a primeira parcela do financiamento. Agora, calcularemos o valor das ultimas doze parcelas. Para isso usaremos a Fórmula (2.10) onde

$$\begin{aligned} V &= \frac{300}{(1+0,02)^{48}} + \frac{300}{(1+0,02)^{49}} + \frac{300}{(1+0,02)^{50}} + \frac{300}{(1+0,02)^{51}} + \frac{300}{(1+0,02)^{52}} \\ &+ \frac{300}{(1+0,02)^{53}} + \frac{300}{(1+0,02)^{54}} + \frac{300}{(1+0,02)^{55}} + \frac{300}{(1+0,02)^{56}} + \frac{300}{(1+0,02)^{57}} \\ &+ \frac{300}{(1+0,02)^{58}} + \frac{300}{(1+0,02)^{59}} \\ &= 1250,85. \end{aligned}$$

O cliente deverá pagar o valor de $R\$1550,85$ para liquidar a primeira e as doze ultimas parcelas do financiamento, tendo uma economia de $R\$2349,15$ no pagamento das doze ultimas parcelas.

Problema 2.8.3. *Um cliente deseja realizar a quitação de um empréstimo, sendo que restam 12 parcelas fixas de R$ 650,00. A instituição onde foi realizada o empréstimo, opera com taxa de juros de 1,7% a.m. Qual será o valor para quitar o empréstimo?*

Solução: Temos como informação que o valor da parcela é R$650,00 taxa de juros de 1,7% a.m e deseja quitas as 12 parcelas restantes. Então usando a Fórmula (2.12) temos

$$V = 650 \cdot \left(\frac{(1+0,017)^{12} - 1}{0,017(1+0,017)^{12}} \right) = 7002,34$$

Para quitar o cliente deverá pagar R$ 7002,34 tendo uma economia de R$797,66.

Na Tabela 4 temos o valor e o desconto de cada parcela, onde podemos perceber o valor do desconto de cada parcela, como também podemos verificar o valor pago em cada parcela, juntamente com o somatório dos valores das parcelasem suas datas de vencimentos, o somatório dos descontos adquirido pela liqudação antecipada e o somatório dos valores pagos das parcelas antecipadas.

Tabela 4 – Tabela de Descontos nas Parcelas

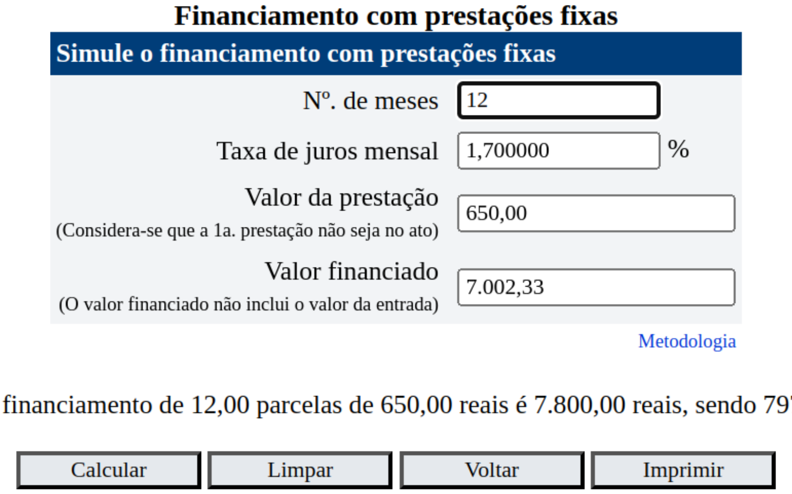
N° de Parcela	Valor da Parcela (R$)	Desconto (R$)	Valor Pago (R$)
1	650,00	10,87	639,13
2	650,00	21,55	628,45
3	650,00	32,05	617,95
4	650,00	42,38	607,62
5	650,00	52,54	597,46
6	650,00	62,53	587,47
7	650,00	72,35	577,65
8	650,00	82,00	568,00
9	650,00	91,50	558,50
10	650,00	100,83	549,17
11	650,00	110,0	539,99
12	650,00	119,04	530,96
Total	**7800,00**	**797,65**	**7002,35**

Fonte: Autor

Para resolver o Problema 2.8.3, podemos usar uma ferramente disponivel no site do Banco Central do Brasil, a Calculadora do Cidadão, como vimos na Seção 2.3.3. Usaremos a ferramenta **Financiamento com prestações fixas**, inserindo os dados informados no problema, temos como resultado os calculos na Figura 22.

Assim temos que para liquidar 12 parcelas de R$ 650,00 aplicadas a uma taxa de 1,7% ao mês, será preciso o valor de R$ 7002,33 tendo um desconto de R$ 797,67.

Figura 22 – Calculadora do Cidadão



Fonte: <https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao>

3 A MATEMÁTICA FINANCEIRA E O EMPREENDEDORISMO

3.1 ALGUNS ASPECTOS SOBRE O EMPREENDEDORISMO

O empreendedorismo é um conceito crucial no mundo dos negócios, referindo-se à capacidade de identificar oportunidades e criar algo novo ou inovador para aproveitá-las. O empreendedorismo vai além de simplesmente começar um negócio; envolve disposição para correr riscos calculados, inovar e buscar soluções criativas para problemas existentes.

Um empreendedor é alguém que não apenas sonha, mas realiza, transformando ideias em ações concretas. Eles são visionários, capazes de identificar lacunas no mercado e desenvolver soluções inovadoras para preenchê-las. O processo empreendedor envolve etapas como identificação de oportunidades, planejamento, obtenção de recursos, implementação e gestão do empreendimento. Além disso, a capacidade de adaptação e aprendizado contínuo são essenciais para o sucesso do empreendedor, pois o ambiente de negócios está em constante mudança.

Outro aspecto importante é a inovação, que pode assumir várias formas, desde a criação de novos produtos ou serviços até a implementação de novos processos ou modelos de negócios. A inovação é o motor do empreendedorismo, impulsionando o crescimento e a competitividade no mercado.

3.2 EMPREENDEDORISMO NO CONTEXTO ESCOLAR

No contexto acadêmico, o estudo do empreendedorismo abrange diversas áreas, como economia, matemática, administração, psicologia, entre outras. O empreendedorismo para alunos do ensino médio é uma maneira incrível de despertar habilidades e mentalidade empreendedora desde cedo. Essa abordagem não apenas fomenta a criatividade, mas também desenvolve competências valiosas para a vida.

Para começar, o empreendedorismo nesse contexto pode ser introduzido por meio de programas extracurriculares ou disciplinas que incentivem os alunos a identificar problemas ao seu redor e pensar em soluções inovadoras para resolvê-los. Isso pode incluir desde a criação de um produto ou serviço até a organização de eventos para arrecadar fundos para causas sociais. Ao ensinar empreendedorismo no ensino médio, é fundamental abordar conceitos básicos, como a importância da criatividade, resolução de problemas e trabalho em equipe. Os alunos podem ser incentivados a desenvolver ideias para negócios sociais, que não visam apenas ao lucro, mas também têm impacto positivo na comunidade.

Os professores podem promover atividades práticas, como simulações de negócios ou desafios empreendedores, onde os alunos trabalhem em equipes para criar e apresentar ideias de negócios. Essas práticas podem ajudar os jovens a desenvolver habilidades de comunicação, liderança e colaboração, fundamentais para o empreendedorismo.

De acordo com ((DOLABELA, 2003)) a educação empreendedora deve ser iniciada na idade tenra, pois está relacionada a cultura que por sua vez tem o poder de induzir ou de inibir a capacidade empreendedora.

Ao introduzir o empreendedorismo no ensino médio, os alunos podem adquirir habilidades valiosas, não apenas para futuros empreendimentos, mas também para suas vidas pessoais e profissionais. Estimular essa mentalidade desde cedo pode abrir portas para oportunidades futuras e preparar os jovens para enfrentar os desafios do mundo real com confiança e criatividade.

3.3 A MATEMÁTICA FINANCEIRA E O EMPREENDEDOR

A matemática financeira é um dispositivo essencial para empreendedores, já que proporciona a base para tomadas de decisão fundamentadas e eficazes dentro do mundo dos negócios. No empreendedorismo, a matemática financeira desempenha um papel crucial na avaliação de viabilidade de um negócio, na análise de investimentos e na gestão financeira. Ela permite aos empreendedores compreender e calcular aspectos como lucro, custos, margens de lucro, movimento de caixa, retorno sobre investimento , entre outros.

Para empreendedores, entender conceitos matemáticos financeiros como juros simples e compostos, amortização, valor presente, valor futuro, taxa interna de retorno e análise de custo-benefício é fundamental. Esses conceitos auxiliam na projeção de resultados futuros, na análise de riscos e na deliberação sobre investimentos ou financiamentos.

A matemática financeira possibilita a elaboração de planos de negócios mais precisos, permitindo prever e avaliar cenários financeiros possíveis. Isso ajuda a determinar a viabilidade de um projeto empreendedor, considerando custos, receitas, prazos e possíveis riscos envolvidos.

É importante ressaltar que a matemática financeira não se restringe apenas a fórmulas e cálculos; ela fornece uma estrutura lógica para embasar decisões estratégicas. Os empreendedores que dominam esses conceitos têm maior capacidade de avaliar e mitigar riscos, otimizar recursos e gerenciar de forma mais eficaz as finanças de seus negócios.

Em resumo, a matemática financeira desempenha um papel significativo no empreendedorismo, capacitando os empreendedores a entender e administrar aspectos financeiros essenciais para o sucesso e sustentabilidade de seus empreendimentos.

3.4 CONTROLE DE RENDA FAMILIAR

O controle de renda familiar está associado ao controle financeiro detalhado de todas as rendas da família e uma análise de todos os gastos produzidos. Para organizar um planejamento financeiro familiar, deve-se em primeiro lugar compreender que receitas e dívidas devem estar em perfeito equilíbrio. Para isso os gastos devem ser levados bastante a sério, sendo de inteira responsabilidade que cada membro familiar, compreenda seu papel nesta organização orçamentária.

Iremos detalhar alguns pontos que devem ser levados em conta quando o assunto é controle de renda familiar.

- Determinar a receita familiar;
- Registrar os gastos fixos e variáveis da família;
- Dividir responsabilidade nas finanças;
- Definir metas coletivas de economizar;
- Eliminar hábitos de compras por impulso;
- Transparência nos gastos e despesas da família;
- Construir uma reserva de emergência;
- Pensar em investir dinheiro;
- Definir metas financeiras da família

Dentre o grande conjunto de informações e orientações sobre a temática de planejamento de renda familiar, podemos destacar algumas instituições que oferecem diversos materiais voltados para organizar a finança pessoal e familiar. Temos :

- Serviço de Proteção ao Crédito (SPC BRASIL): Que oferece dicas para uma vida financeira cada vez melhor;
- SERASA SCORE: Além de oferecer orientações sobre o controle dos gastos familiar o site do SERASA SCORE disponibiliza planilha eletrônica para organizar suas finanças;

- Fundação Getúlio Vargas (FGV-Educação Executiva): O site da FGV oferece orientações e cursos online, com o objetivo de orientar na organização do orçamento familiar;

- CAIXA ECONÔMICA FEDERAL: O site da Caixa Econômica Federal, disponibiliza uma cartilha de planejamento familiar, voltado para toda família, com o objetivo de melhorar a relação com o dinheiro.

4 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Uma sociedade financeiramente educada está mais apta a enfrentar os desafios econômicos do dia a dia, evitando armadilhas financeiras, gerenciando seus recursos de forma eficaz e construindo um futuro financeiro mais sólido. Além disso, a educação financeira promove uma cultura de responsabilidade e autonomia, capacitando os indivíduos a planejarem seus objetivos de longo prazo.

De acordo com Monteiro:

> Uma sociedade educada financeiramente reflete nas atitudes e decisões financeiras dos indivíduos que a compõe, com um potencial para minimizar os endividamentos, o desperdício, adequando os bens adquiridos de forma mais sustentável (MONTEIRO, 2023).

É importante que a educação financeira seja acessível e inclusiva, atingindo todas as faixas etárias e grupos socioeconômicos. Desde a infância, as crianças devem ser introduzidas aos conceitos básicos de dinheiro e finanças, de forma lúdica e adaptada à sua idade, para que cresçam com uma base sólida de conhecimento financeiro. Além disso, programas de educação financeira continuam ao longo da vida adulta podendo ajudar a mitigar o analfabetismo financeiro e promover uma cultura de sustentabilidade financeira em toda a sociedade.

Segundo (ROCHA, 2018) A educação financeira:

> tem um papel importante no que tange a necessidade de se formar uma nova geração de pessoas mais equilibradas e conscientes financeiramente (ROCHA, 2018).

Particularmente a educação financeira é crucial para os estudantes, pois oferece ferramentas essenciais para que possam enfrentar os desafios financeiros encontrados ao longo da vida adulta. Preparando-os para o futuro, nas tomadas de decisões, compreendendo os riscos financeiros, fortalecendo um empoderamento econômico e promovendo uma redução na desigualdade econômica.

De acordo com (JACINTO, 2023) Educação Financeira :

> pode formar estudantes mais conscientes e reflexivos em relação a várias coisas relacionadas ao dinheiro e ao saber aplicá-lo (caso seja do seu interesse) são apenas algumas vertentes (JACINTO, 2023).

Conforme ressaltado por (KAPOOR, 2020), a educação financeira abrange uma variedade de tópicos, desde o básico, como orçamento e poupança, até conceitos avançados de investimentos e planejamento da aposentadoria. Ao entender os princípios da matemática financeira, os indivíduos podem aplicar esse conhecimento na gestão de suas finanças cotidianas, planejamento de longo prazo e mitigação de riscos financeiros. A educação financeira não apenas capacita os indivíduos a alcançar estabilidade financeira, mas também promove uma maior conscientização sobre questões econômicas e sociais (KAPOOR, 2020).

4.0.1 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA BNCC

Sabemos que BNCC é o documento que define os conhecimentos essenciais que todos os alunos da Educação Básica têm o direito de aprender, e estes estão assegurado na Constituição de 1988, na Lei de Diretrizes e Bases(LDB), no Plano Nacional de Ensino (PNE), e nas Diretrizes Curriculares de cada Estado e Município.

A educação financeira é essencial para capacitar os indivíduos a tomar decisões financeiras informadas e responsáveis em suas vidas pessoais e profissionais. E nesse contexto a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) inclui como tema transversais a educação financeira e define como um conjunto de conhecimentos entendidos como essenciais para o fortalecimento da cidadania e voltados para ajudar a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes (BRASIL, 2018).

A BNCC estabelece um conjunto de conhecimentos, competências e habilidades essenciais, organizadas de forma progressiva, para que todos os alunos possam desenvolver ao longo da educação infantil ao ensino médio um conceito de educação financeira. Essa por sua vez deve conter critérios que incentivam uma mudança de postura, tanto como fornecedor como de consumidor. O ensino da temática educação financeira é contemplada nas habilidades dos componentes curriculares, cabendo aos sistemas de ensino e escolas tratá-lo de acordo com suas especificidades e de forma contextualizada.

A educação financeira é apresentada na área da Matemática, na unidade temática Números, que tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico além de julgar e interpretar argumentos. Dentro dessa unidade a educação financeira é apresentada, como:

> o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro (BRASIL, 2018).

5 EXPLORANDO JUROS SIMPLES E COMPOSTOS: USO DA GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Este capítulo tem como objetivo apresentar a construção de um produto educacional em forma de atividade que explora os conceitos de juros simples e compostos, fazendo uso da geometria dinâmica do software Geogebra. A atividade permite que os alunos possam manipular os controles deslizantes e observar as variações nos gráficos, taxas de juros, montantes, entre outros aspectos.

O produto desenvolvido durante esta pesquisa, carrega em seu contexto a importância da utilização de ferramentas tecnológicas para contribuir com o ensino da matemática financeira. Em virtude das dificuldades de compreender conceitos básicos sobre finanças, ocorreu a necessidade de tornar o conhecimento mais flexível e acessível, com atividades que possam envolver os alunos de forma mais ampla. Essa estratégia busca tornar o aprendizado mais interativo e adaptado às diferentes necessidades e estilos de aprendizagem dos estudantes.

A utilização do software Geogebra se deu por ser um aplicativo educacional interativo e dinâmico, mais precisamente um software podendo ser utilizado em todos os níveis da educação, ele disponibiliza uma gama de vantagens onde os alunos aprendem matemática financeira de uma forma lúdica. As funcionalidades do Geogebra permite que os alunos possam manusear seus recursos através de smartphones, tablets ou computadores, construindo animações como funções de juros entre outras, oferecendo uma valiosa experiência, permitindo que os estudantes utilizem seus conhecimentos prévios com os novos conhecimentos adquiridos, tornando-se assim o centro de sua própria aprendizagem.

De acordo com (OLIVEIRA; CUNHA, 2021), o uso de tecnologia no ensino de Matemática é um recurso que só tem a contribuir com a aprendizagem dos alunos e que pode levar o aluno a aprender o conteúdo de maneira dinâmica e participativa, fugindo totalmente do tradicional. O uso do software GeoGebra nas aulas de Matemática é muito eficaz, levando o aluno a pensar e aprender de forma dinâmica e construtiva. O GeoGebra é um aplicativo que só tem a contribuir, além de disponibilizar uma variedade de ferramentas e possibilidades de visualização do conteúdo trabalhado.

O Geogebra é um software muito utilizado no ensino da matemática por conciliar conteúdos de álgebra e geometria, nessa plataforma o estudante pode construir gráficos manusear fórmulas em um ambiente totalmente virtual e dinâmico, permitindo a elaboração de materiais educacionais ricos pedagogicamente.

Na matemática financeira a utilização do aplicativo geogebra se torna mais eficiente e fácil na assimilação de conteúdos como juros simples e compostos, amortizações, pagamento de parcelas fixas ou não, investimento, aplicações entre outras. A finalidade do software geogebra não é somente na ilustração de situações difíceis, porém ele possibilita que o aluno seja protagonista de sua própria aprendizagem com um ser ativo, podendo explorar e localizar relações com os conteúdos matemáticos por si mesmos, possibilitando que o estudante seja capaz de tomar suas próprias decisões, com mais possibilidades de acertos. A busca por essa ferramenta surgiu com a necessidade de melhorar o interesse pelas aulas de matemática financeira, e torná-las mais atraente, amenizando as dificuldades dos alunos em absorver conceitos financeiros, como vem ocorrendo no sistema tradicional de ensino. Ademais, utilizar as ferramentas pedagógicas estão relacionadas com as orientações da BNCC, visam incorporar tecnologias digitais, preparando os estudantes para essa revolução tecnológica que se tornou o século XXI.

5.1 DESCRIÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Nesta seção apresentaremos a ficha técnica do produto educacional desenvolvido sobre o ensino da matemática financeira. Além disso, detalhes importantes sobre sua proposta metodológica, planejamento, desenvolvimento e aplicação do produto. Neste contexto, este capítulo tem o propósito de apresentar e discutir as características e contribuições desse produto educacional para o desenvolvimento de competências e habilidades dos estudantes em relação aos temas financeiros.

5.1.1 Ficha técnica

A ficha técnica apresenta um conjunto de informações que identificam o recurso educacional tais como a linha de pesquisa, a origem do produto, o formato do produto, o software utilizado, sua origem, juntamente com seus responsáveis, autores que contribuíram na produção.

Tabela 5 – Ficha técnica do Produto Educacional

Título: Construíndo uma atividade interativa de matemática financeira com a plataforma Geogebra	
Autor: Gleison Ricardo Roza de Araújo	
Formato do produto educaional	Mídia educacional, contendo mídias visuais, PDFs e vídeo aulas, listas de exercícios e problemas, simulações gráficas e experimentos.
Software Auxiliar	Geogebra
Locus da produção	UFRR-CAMPUS
Classificação do formato do produto	Mídia Educacional
Aplicação do Produto	Meio digital
Professor Orientador	Elzimar Rufino
Programa de ensino/ Instituição associada	PROFMAT/UFRR
Linha de pesquisa	Tecnologias educacionais
Vinculo do produto educacional	Dissertação de Mestrado do PROFMAT
Construção dos gráficos no Geogebra	Gleison Ricardo Roza de Araújo
Origem do Produto	Trabalho de Dissertação intitulado "UM ESTUDO SOBRE MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA ENFATIZANDO A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO "

5.1.2 Finalidade do produto educacional

A finalidade deste produto educacional é disponibilizar ao leitor um material pedagógico, voltado para a construção de um conjunto de atividades interativas que proporcionem aos alunos uma compreensão mais clara e prática sobre os conceitos de juros simples e compostos. Através da utilização da geometria dinâmica do Geogebra, os estudantes podem interagir e experimentar as variações nos cálculos dos juros, taxas e montantes, o que facilita a compreensão do processo.

Essa abordagem proporciona uma aprendizagem mais eficaz e significativa, pois os alunos podem visualizar de forma mais concreta as mudanças nos valores conforme as taxas e períodos de tempo. Além disso, a interatividade do produto permite que os alunos explorem diferentes cenários e comparem os resultados, o que contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico.

Dessa forma, o objetivo deste produto educacional é auxiliar os docentes na construção de seus próprios produtos educacionais, com o objetivo de proporcionar aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos financeiro e aqui em especial os cálculos de juros simples e compostos, tornando o aprendizado mais interessante e envolvente. Espera-se que, através desta atividade, os estudantes desenvolvam sua capacidade de resolver problemas relacionados a juros e consigam aplicar esses conceitos de forma prática em situações do cotidiano.

O produto está voltado para atender os docentes do ensino fundamental nos anos finais e o ensino médio, além disso, acadêmicos de graduação em matemática, que tenham desejo de inovar em suas práticas pedagógicas, utilizando um recurso muito utilizado pelos alunos, a tecnologia digital, possibilitando um melhor entendimento sobre os temas trabalhados .

Por este motivo o produto educacional busca uma relação entre os conceitos e teorias em sua prática, possibilitando aos docentes um material de aprendizado cheio de experiências ricas e atraentes. Os educadores estão convidados a explorar este aplicativo e suas potencialidades e a fazer uso em suas aulas melhorando sua didática pedagógica, promovendo uma educação de qualidade no ensino de matemática financeira, dentro dos parâmetros exigidos pela lei de diretrizes educacionais e das normas da BNCC.

5.2 BASE TEÓRICA

5.2.1 AS CONTRIBUIÇÕES DE JOHN DEWEY NA TEORIA DA APRENDIZAGEM

As teorias de aprendizagem têm um papel importante na área educacional, isto é, auxiliando os docentes e suas ações pedagógicas e consequentemente, conduzindo a formação dos indivíduos. Dessa maneira, o filósofo e pioneiro da teoria da experiência, John Dewey, propôs um modelo pedagógico, onde seus trabalhos eram voltados a um sistema moderno da educação, mais tarde conhecido aqui no Brasil por ser um revolucionário do movimento educacional da Escola Nova, sendo seu ensino um modelo renovador de ensino e aprendizagem. Suas pesquisas eram centradas nas vivências de experiências vividas pelos estudantes, deixando de lado a forma tradicional da transmissão de conteúdos.

Para Dewey, o processo educacional era atribuído na comunicação e troca de informações entre as pessoas e nas execuções das atividades relacionadas às práticas do cotidiano. Nesse olhar pedagógico, faz-se inevitável construir um local aconchegante no qual os estudantes possam aprender e ensinar. Desse modo, o aprendizado na visão de (DEWEY, 1970), acontece quando partilhamos experiências, em um ambiente democrático, sem barreiras de pensamento".

5.2.2 METODOLOGIAS ATIVAS DA APRENDIZAGEM

As metodologias ativas surgiram com a necessidade de estruturação da educação tradicional, almejando a (re) elaboração das práticas docentes com maior socialização, participação e reflexão na hora de contextualização dos temas ensinados em sala de aula.

Para (FREIRE, 1974) uma aprendizagem significativa era necessário ter significado para o estudante, como o princípio que se mostra básico na construção de metodologias ativas, as quais se representam como procedimentos que possibilitem as realizações das atividades em que os estudantes possam compreender e construir seu conhecimento.

A integração das tecnologias digitais com os espaços educativos são fundamentais para estimular uma aprendizagem significativa, e com uso das metodologias ativas os estudantes estão cada vez mais inseridos nesse mundo tecnológico.

De acordo com (BACICH; MORAN, 2018), é preciso reinventar a educação, analisar as contribuições, os riscos e as mudanças advindas da interação com a cultura digital, da integração das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), dos recursos, das interfaces à prática pedagógica, explorar o potencial de integração entre espaços educativos para a criação de contextos autênticos de aprendizagem mediatizados pelas tecnologias. Impulsionar o engajamento dos estudantes nos processos de ensino e aprendizagem diante das suas práticas educacionais, inerentes à cultura digital, ou seja, integrar as mídias e as TDIC no desenvolvimento e na recriação de metodologias ativas (BACICH; MORAN, 2018).

Os processos tradicionais de aprendizagem passiva se aplicam em atividades expositivas nas aulas, com os quais o conhecimento é conduzido pelo docente – único responsável pelo conteúdo ensinado. Dessa maneira, as metodologias ativas da aprendizagem são totalmente contrária à educação tradicional, pois a aprendizagem ativa é focada na produção que os alunos fazem em sala de aula. Sendo assim, existe uma divergência na aprendizagem ativa sendo contrária a passiva onde os estudantes apenas recebem o conhecimento do professor, no qual se reduz a autonomia dos alunos, diminuindo sua dependência do processo para ter sucesso.

De acordo com (MOURAN, 2004), A metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), é fortemente definida com o emprego de situações problemas ou até mesmo problemas menos organizados, com o propósito de estimular o aprendizado baseado em definições das teorias de aprendizagem e do desenvolvimento e sua capacidade de resolver problemas no ambiente escolar. Nessas orientações, a curiosidade é o suporte importante para formulação de perguntas sobre os fenômenos complexos que estejam presentes no dia a dia dos estudantes, dado esse que se procura atrair o desejo de estimular a reflexão.

Para (BACICH; MORAN, 2018), as metodologias ativas demandam a autonomia do professor para criar atividades com potencial de promover a experiência e a aprendizagem dos estudantes. A combinação de metodologias ativas com tecnologias digitais é hoje estratégica para a inovação pedagógica. As tecnologias ampliam as possibilidades de colaboração entre pessoas próximas ou distantes, ampliam a noção de espaço escolar.

Usando o Geogebra os alunos conseguem visualizar problemas relacionados com conceitos financeiros simples e complexos, nesta perspectiva eles são capazes de um entendimento mais duradouro, aprofundando o conteúdo trabalhado na aula. O Geogebra permite uma conexão acessível em uma série de funções, o Geogebra tem capacidade de modificar a prática de ensinar e aprender matemática financeira. Com a aplicação do produto educacional em questão, desejamos incentivar o pensamento crítico como também a resolução de problemas, habilidades essenciais para o sucesso acadêmico e profissional dos estudantes.

5.3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada para a criação do produto educacional foi baseada em algumas etapas fundamentais. Inicialmente, foi realizada uma pesquisa sobre tipos de softwares que atendam as necessidades dos alunos em relação ao aprendizado de juros simples e compostos, identificando as principais dificuldades e lacunas no ensino tradicional.

A escolha do software Geogebra foi feita levando em consideração a sua eficiência e versatilidade em manipulações dinâmicas, em particular com o uso do controle deslizante.

O próximo passo, foi a elaboração de um guia que orientasse o leitor a construir uma atividade usando o software geogebra, a aplicação do produto educacional seguida da avaliação dos resultados.

O produto educacional aborda a matemática financeira com o uso do software educacional Geogebra, a metodologia da pesquisa está estruturada da seguinte forma: planejamento, desenvolvimento, implementação e avaliação. Em seguida abordaremos cada uma das fases:

5.3.1 Planejamento

- Definição dos Objetivos: Construir um guia orientado, que vise a produção de uma atividade utilizando a plataforma do Geogebra, onde a mesma deve conter conceitos básicos de juros simples e compostos, saber qual a diferença entre eles e como está sendo utilizado no seu cotidiano;

- Público-Alvo: Docentes dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio e acadêmicos que buscam aprimorar suas prática pedagógicas;
- Conteúdo programático: Juros simples e compostas e suas aplicações;
- Recursos utilizados: computadores, tablets, smartphones, software Geogebra e matérias de apoio etc. (dissertação de mestrado intitulado "UM ESTUDO SOBRE MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA ENFATIZANDO A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO).

5.3.2 Desenvolvimento do produto

- Elaboração do Conteúdo: Elaborar o conteúdo em união com a teoria e prática, envolvendo problemas que serão investigados com o Geogebra;
- Design das Atividades: Elaborar atividades interativas que possibilite o manuseio de definições financeiras;
- Integração com GeoGebra: Produzir applets (arquivos com extensão) no GeoGebra com intuito que os estudantes possam explorar as definições de maneira mais dinâmica. Explorando sua funções onde os gráficos criados possam interagir de uma forma dinâmica , podendo incluir caixa de entradas para trabalhar valores.

5.3.3 Implementação do produto

- Piloto: O produto educacional deve ser testado em um pequeno grupo de estudantes para detectar possíveis problemas existentes e obter feedback;
- Revisão: Após o feedback deverá ser feito algumas implementações colhidas no decorrer da fase piloto;
- Lançamento: Por em prática o produto educacional com a turma escolhida ou público alvo.

5.3.4 Avaliação

- Avaliação Formativa: Reunir todas as análises do feedback durante essa etapa com os alunos e professores durante a realização do produto, fazendo algumas correções quando for necessário.

- Análise de Resultados: Serão analisadas as informações coletadas durante esta fase da pesquisa, para identificar qual impacto o produto educacional causou na aprendizagem dos alunos e verificar suas áreas de avanço no processo educacional com o uso do Geogebra no ensino da matemática financeira.

5.4 PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO PRODUTO

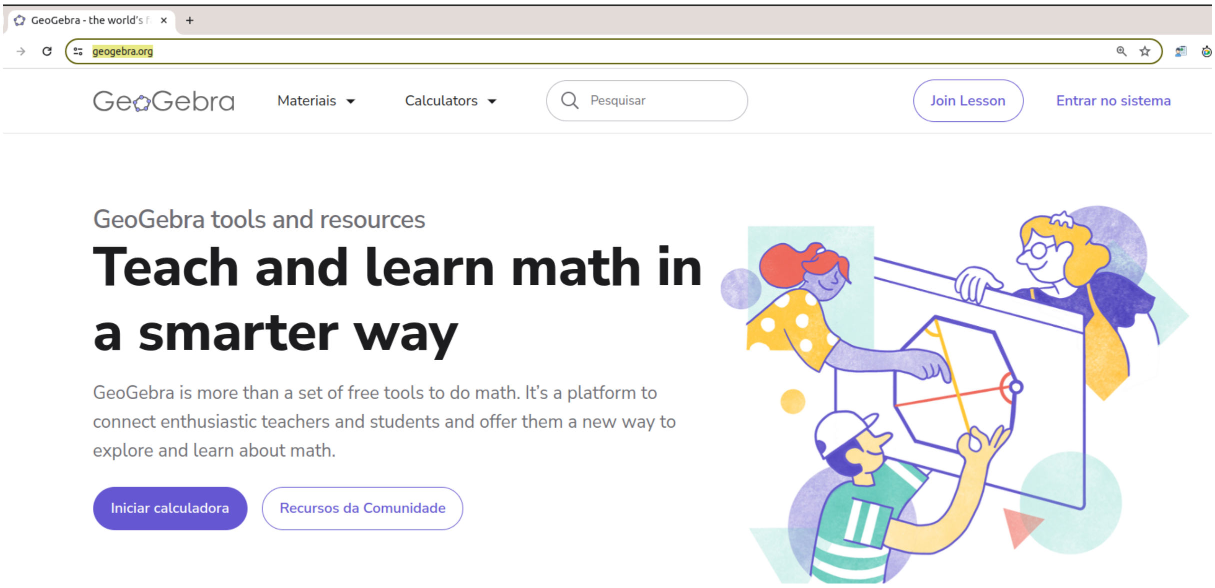
O processo de construção do produto educacional, tem início em uma vasta pesquisa em busca de um aplicativo que possa alinhar várias ferramentas de manipulação, uma interface gráfica atraente e simples de operações que possa agregar atividades de forma síncrona e assíncrona. No geogebra encontramos todas essas funcionalidades presentes, logo sendo ele o aplicativo escolhido para produção.

Demonstraremos cada passo da construção do produto, para que o leitor entenda e se desejar construir algo voltado para o ensino da matemática financeira, assim possa fazer.

5.4.1 Passo 1: Acesso à plataforma geogebra.org

Em seu navegador de internet, entre no site <geogebra.org>, onde terá acesso a plataforma inicial do geogebra, como veremos a Figura 23. Esta é a tela inicial, ou seja, a porta de entrada do software Geogebra.

Figura 23 – Tela inicial geogebra



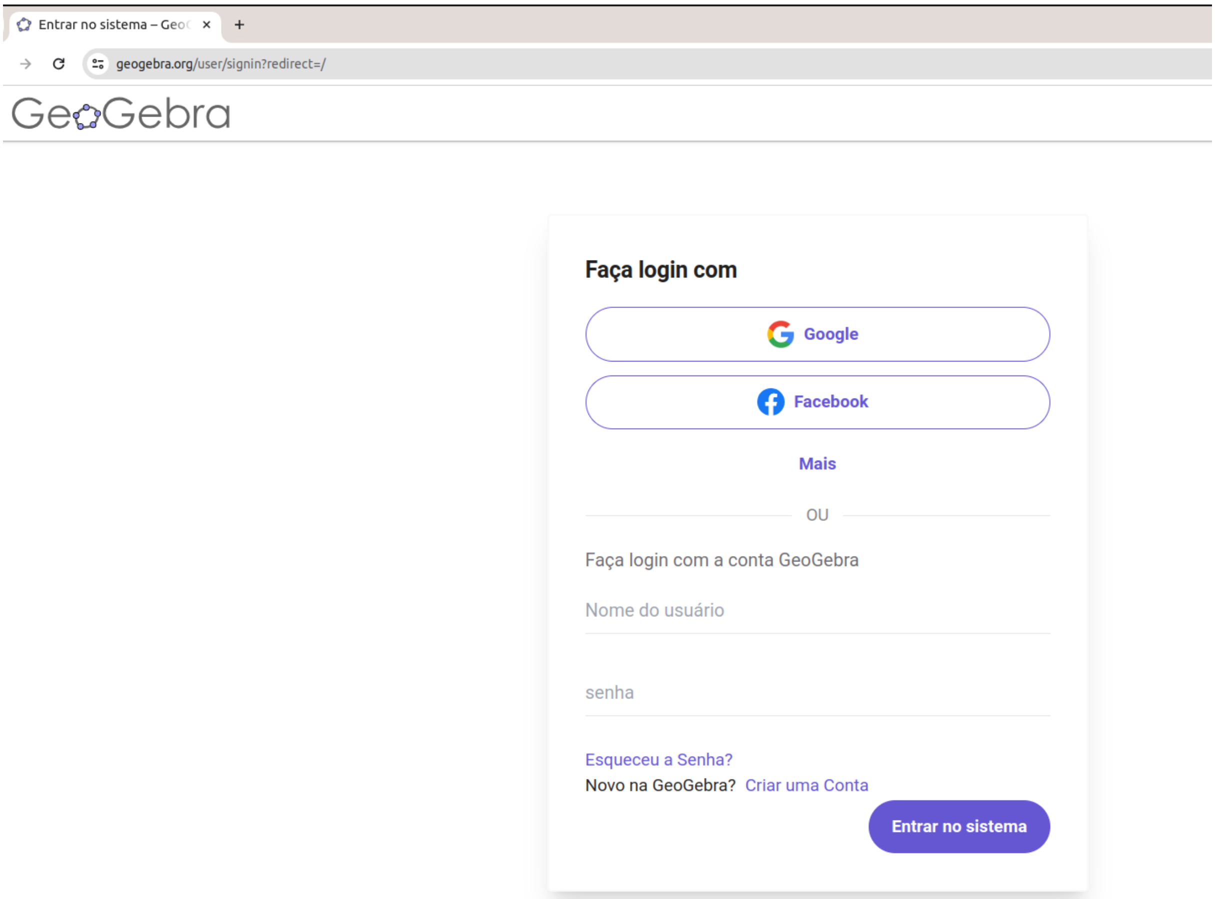
Fonte: <https://geogebra.org>

Nesta página você já consegue ter acesso há alguns recursos que o Geogebra oferece, mesmo sem realizar o passo seguinte, que é fazer o login.

5.4.2 Passo 2: cadastro e login na plataforma Geogebra.org

Agora realizaremos o login ou caso não tenha cadastro, devemos realizar um clicando em "**Entrar no sistema**", como podemos vê na Figura 23. Aparecendo uma nova pagina onde deverá ser realizado o login, como podemos vê na Figura 24. Essa parte é bem intuitiva, o internauta pode fazer atraves de uma conta de email do Gmail, pode fazer utilizando uma conta do Facebbok ou ainda utilizando a função "**Criar uma Conta**", cadastrando um Login e senha.

Figura 24 – Tela do geogebra online

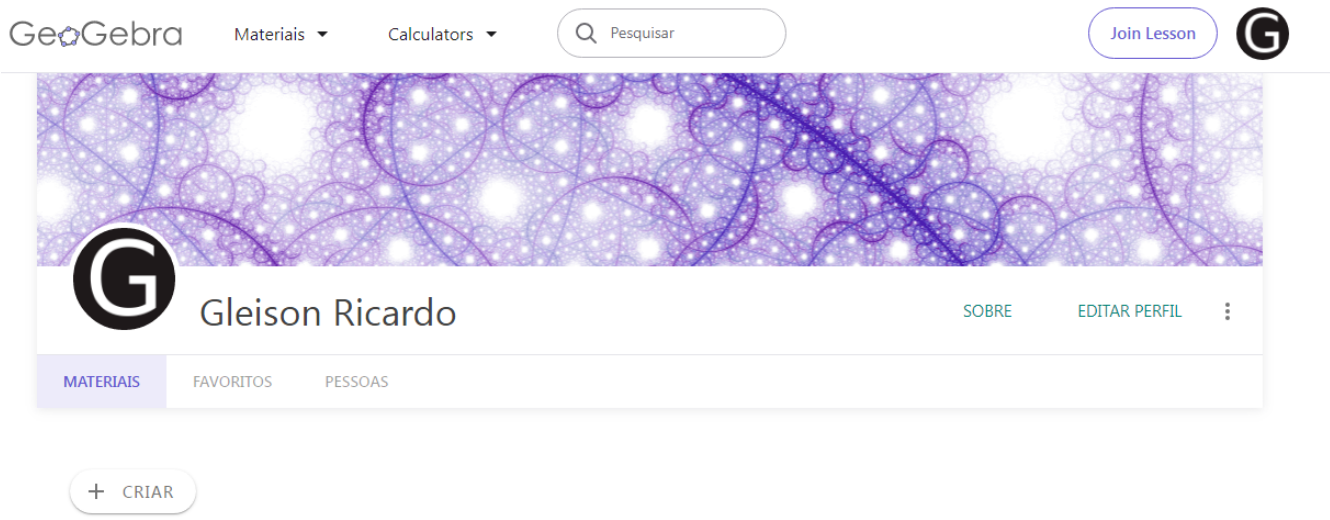


Fonte: <https://geogebra.org>

5.4.3 Passo 3: Tela inicial do Geogebra

Após realizar o cadastro e fazer o login, teremos acesso a página inicial do Geogebra Online, como podemos ver na Figura 25. Nela você terá acesso a materiais, ferramentas entre outras funções que iremos mostrar mais a frente.

Figura 25 – Tela do geogebra online



Fonte: <https://geogebra.org>

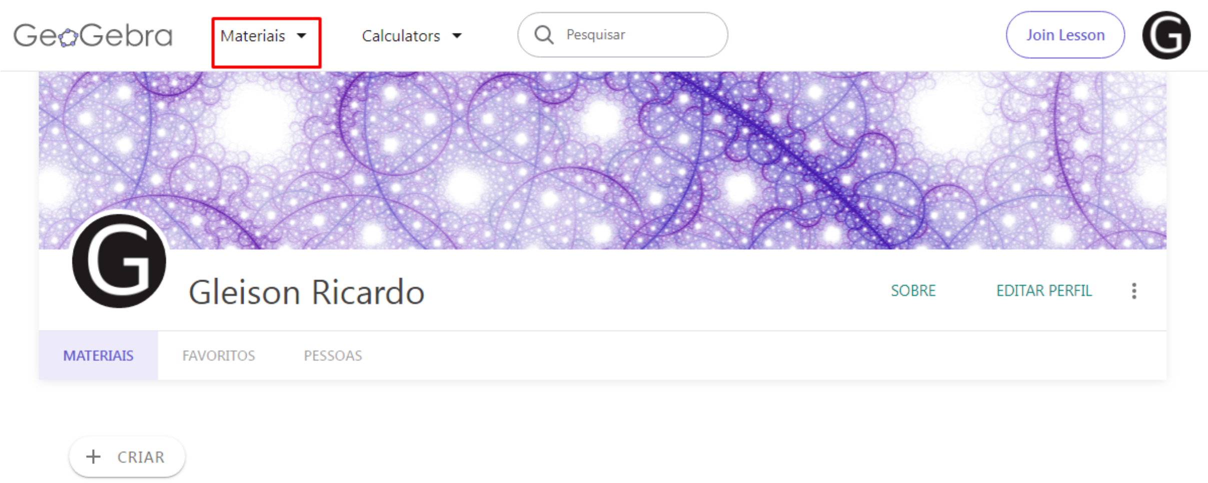
5.4.4 Conhecendo os recursos disponíveis

Nesse momento iremos dar um intervalo nos passos para a construção do produto, pois acreditamos que é importante conhecer o máximo sobre recursos que o Geogebra tem a oferecer.

A interface inicial trás algumas informações que acreditamos ser relevante comentar, então usaremos algumas Figuras para explicar mesmo que superficialmente algumas aplicações e funções do Geogebra.

Clicando em "Materiais"como mostra na Figura 26, iremos ter acesso há vários materiais produzidos no Geogebra, e que podem ser utilizados, pois são públicos. Esta ferramenta é ideal para aqueles que estão iniciando no software Geogebra, pois podem ter acesso há uma grande quantidade de materiais didáticos voltados para a educação básica.

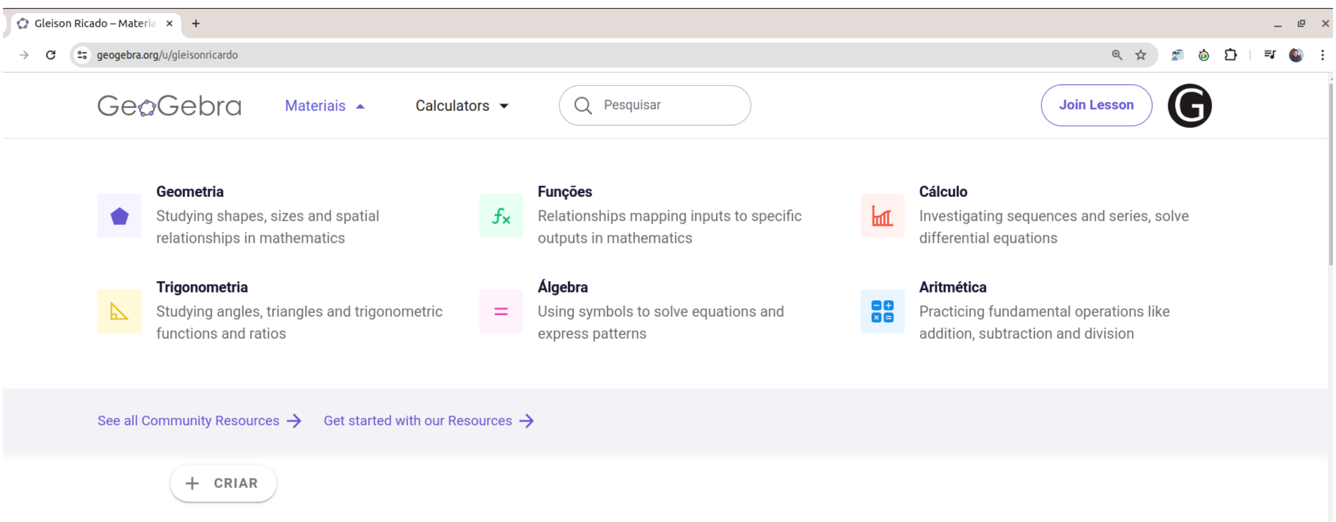
Figura 26 – Tela do geogebra online



Fonte: <https://geogebra.org>

Na Figura 27, temos a visualização da vasta opção de materiais que podem ser utilizados para estudos ou até mesmo em uma aula.

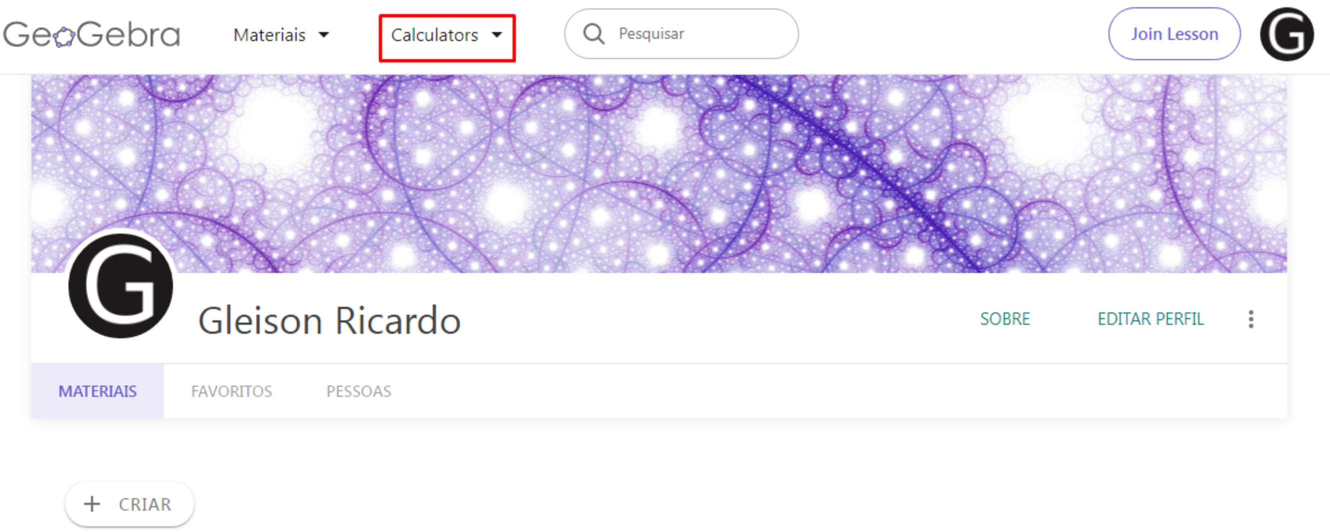
Figura 27 – Tela do geogebra online



Fonte: <https://geogebra.org>

Clicando em "**Calculators**"como mostra a Figura 28, você terá acesso há várias ferramentas do Geogebra. Essas ferramentas lhes oferecem diversos recursos para construções gráficas, geométricas e algébricas.

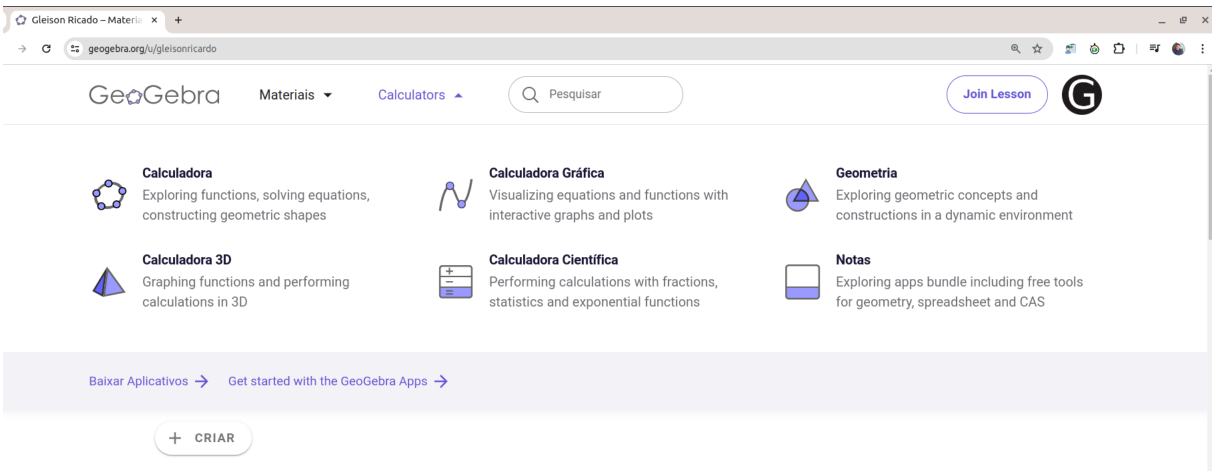
Figura 28 – Tela do geogebra online



Fonte: <https://geogebra.org>

Após clicar em "**Calculators**"abrirá uma janela como podemos vê na Figura 29, onde será apresentada algumas ferramentas que podem ser usadas para a criação de conteúdos diversos no Geogebra.

Figura 29 – Tela do geogebra online



Fonte: <https://geogebra.org>

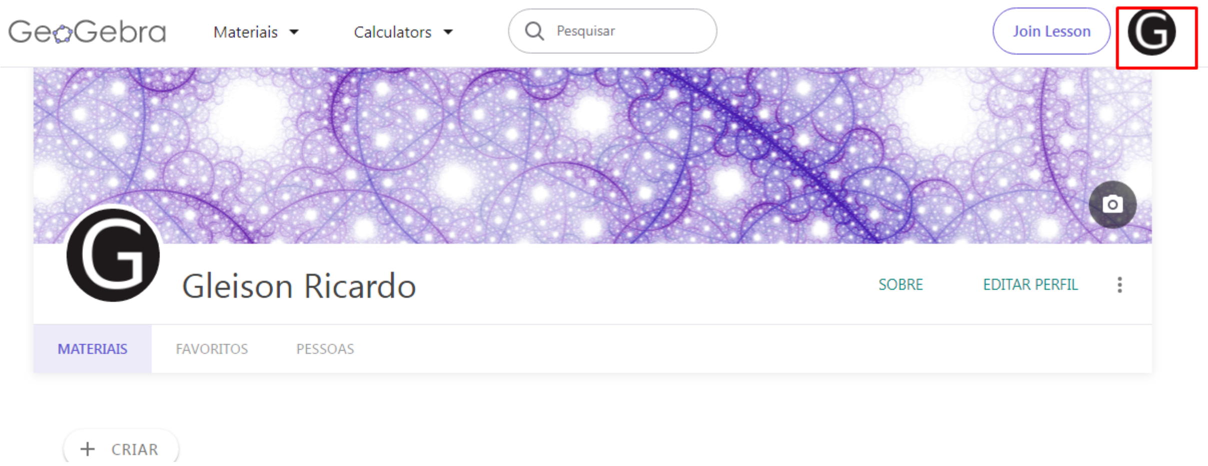
Agora retornaremos para nosso objetivo inicial que é mostrar passo a passo como criar um conteúdo interativo.

Estamos na fase em que o leitor já adquiriu a habilidade de navegar na página do Geogebra online. Agora iremos mostrar outro recurso importante para a criação de conteúdo.

5.4.5 Passo 4: Materiais, Favoritos e Pessoas

No canto superior direito, clique em seu perfil, como mostra a Figura 30, terá acesso há outras ferramentas do Geogebra, tais como **MATERIAIS**, **FAVORITOS** e **PESSOAS**, que iremos falar sobre cada uma delas.

Figura 30 – Tela do geogebra online



Fonte: <https://geogebra.org>

Na seção de "**MATERIAIS**" você tem acesso a todos os materiais produzidos e salvos por você, ou seja, tudo que você criou e salvou no geogebra vai estar nesta seção.

Na seção de "**FAVORITOS**"você terá acesso a todos materiais que foram selecionado como favorito, ou seja, quando lá em "MATERIAIS"em Figura 26 você gostou de um trabalho e tornou ele como favorito, é nesta seção que ele irá aparecer quando clicar.

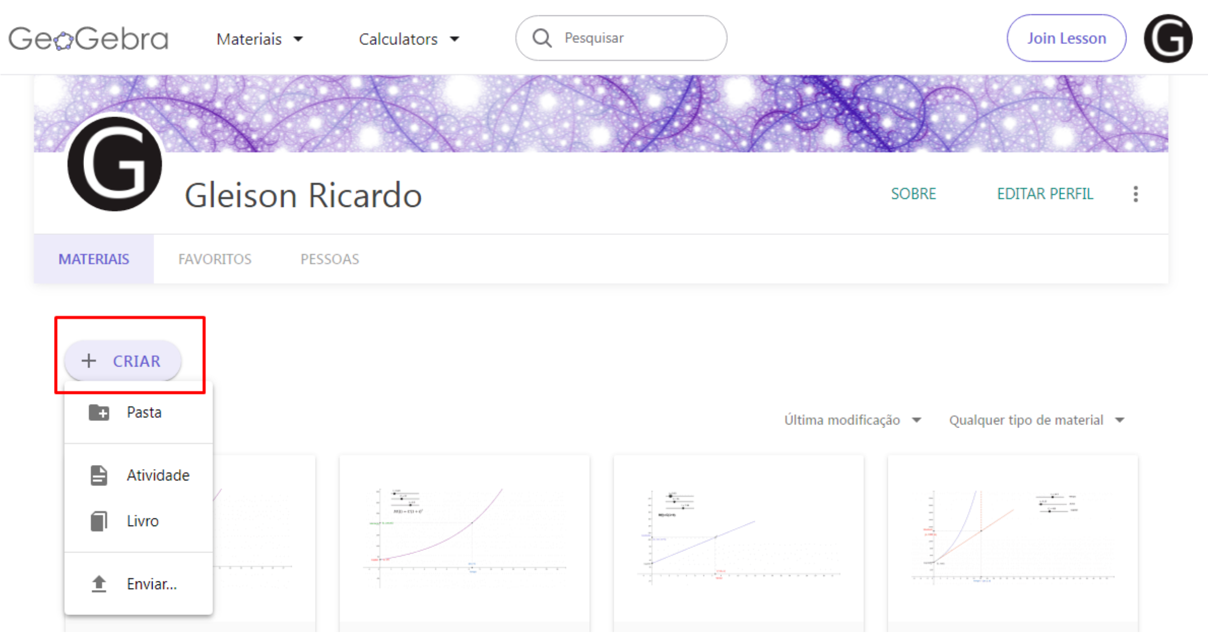
Na seção "**PESSOAS**"vai aparecer todas as pessoas que você segue e as pessoas que seguem você, também irão aparecer nesta seção.

Mas nosso foco é em uma seção em "**MATERIAIS**"chamada "**+ CRIAR**", e é nessa seção que começaremos os trabalhos.

5.4.6 Passo 5: Recursos disponíveis

Clicando em "**+ CRIAR**", como mostra a Figura 31, teremos acesso há uma janela que irá nos disponibilizar alguns recursos muito importantes para a criação de conteúdo.

Figura 31 – Tela do geogebra online



Fonte: <https://geogebra.org>

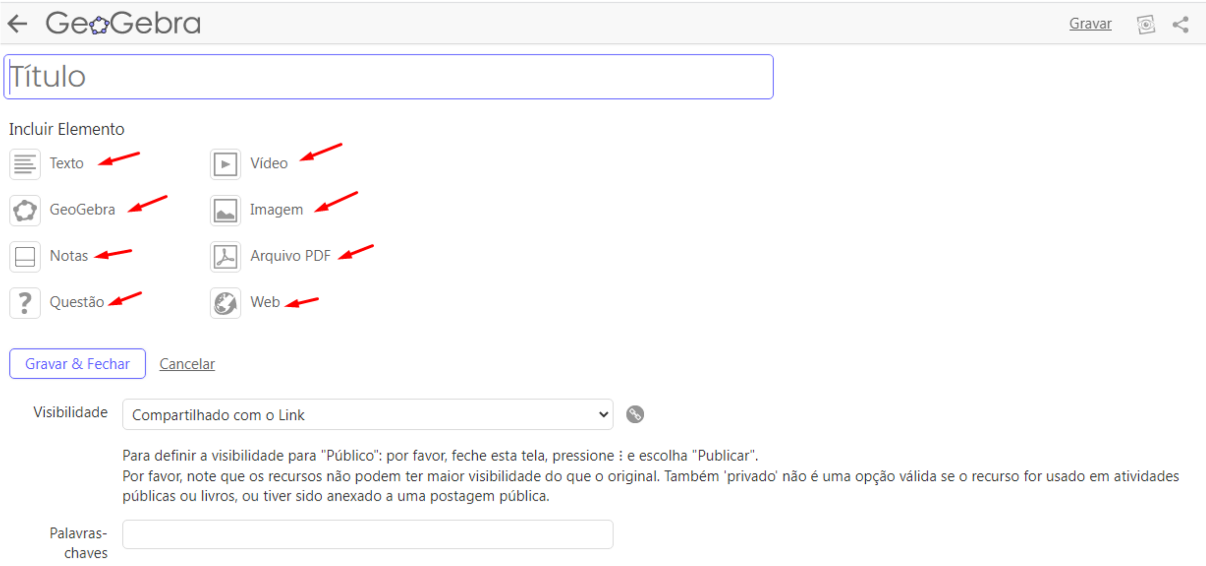
Após clicar em "**+ CRIAR**"como mostra na Figura 31, teremos algumas ferramentas à disposição, tais como Criar uma Pasta, onde podemos organizar um conjunto de trabalhos realizados no Geogebra, temos também a ferramenta Criar Atividade, onde podemos criar atividades, coisa que veremos mais à frente, e a ferramenta Criar Livro, muito parecida com a ferramenta criar atividade, mas nela você pode dispor de um conjunto de outras atividades, por fim a opção Enviar arquivo, que possibilita você enviar um arquivo no formato ggb para o Geogebra online.

5.4.7 Passo 6: Ferramentas disponíveis

Após clicar em "**+ CRIAR**" e logo em seguida clicar em "**Atividade**", teremos essa pagina, como mostra a Figura 32.

Nesse ambiente temos um conjunto de oito ferramentas que juntas auxiliam na construção de um material pedagógico voltado para o aprendizado se assim desejar. Falaremos da potencialidade de cada um deles e como utilizamos em nosso produto educacional.

Figura 32 – Ambiente de Atividades do Geogebra



Fonte: <https://geogebra.org>

Conhecendo um pouco sobre cada recurso da ferramenta "**+ CRIAR**".

- Inicialmente temos que inserir um Título, que por sinal é opcional.
- A ferramenta "**Texto**", permite que você possa editar um texto ou copiar um texto já editado e colar, tem a opção de deletar a qualquer momento, e para concluir, basta clicar **Feito** que é salvo seu texto, lhe dando a oportunidade de usar outra ferramenta clicando em " **+ INCLUIR ELEMENTO**", onde aparecerá todas as opções apresentadas na Figura 32.
- Ferramenta "**Geogebra**", essa ferramenta permite que você possa inserir uma produção do Geogebra, essa podendo ser apresentada com todos os recursos disponíveis no aplicativo Geogebra. Os arquivos em formato ggb podem ser construídos por você, podem ser arquivos públicos, ou seja, que outras pessoas fizeram. O processo para confirmar o envio do arquivo para a atividade é o mesmo do enunciado na ferramenta Texto.
- Na ferramenta "**Notas**"você tem uma vasta variedade de ferramentas para deixar uma mensagem, desde inserir figuras, textos, fórmulas entre outras e editar, usando alguns recursos como caixa de texto, caneta e marcador. Após concluir, o processo é análogo ao apresentado na ferramenta **Texto**.
- Ferramenta "**Questões**", esta ferramenta permite que você possa criar uma serie de questões, que podem ser dissertativas ou de múltiplas escolhas. Podendo inserir uma mensagem para cada resposta, ou tentativa de resposta.

- Ferramenta "**Vídeo**", permite que você possa inserir um vídeo, bastando colocar o link deste vídeo e clicar em **Feito**.
- Ferramenta "**Imagem**", esta por sua vez permite que você possa inserir imagem que esteja nos seus arquivos, bastando arrastá-lo para ou pesquisar a imagem em seus arquivos. Para concluir o processo é análogo aos anteriores.
- A ferramenta "**Arquivo PDF**"permite que seja inserido um arquivo PDF.
- Ferramenta **Web** permite que você possa inserir endereços eletrônicos de sites, plataformas entre outros, bastando colocar a URL.

O processo para concluir é bem simples, bastando clicar em "**GRAVAR & FECHAR**" que a atividade será salva e estará disponivél em sua pasta "**Atividade**"

Na Figura 33 temos o QRcode do produto educacional que pode ser feita usando as ferramentas do Geogebra, que também pode ser acessada no link <https://www.geogebra.org/m/xxf9meta>.

Figura 33 – Exemplo de uma atividade no Geogebra

Fonte: Autor

5.5 SUGESTÃO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO

A ideia inicial do produto é orientar os docentes a construir um produto destinado a potencializar o aprendizado no ensino de matemática financeira, logo acreditamos que o excencial para a aplicação do produto, é que se tenha uma base inicial do conteúdo abordado, sendo que o produto virá para fixar os conhecimentos já adquiridos e construir habilidades propostas pela BNCC.

Nada impede que o docente que deseje incorporar o produto educacional em suas práticas pedagógicas, construa-o com o objetivo de explorar todos seus recursos para iniciar a apresentação do conteúdo.

Na Tabela 6 veremos um cronograma de distribuição de conteúdos e aplicação do produto.

Tabela 6 – Planejamento Produto Educacional

Planejamento para aplicação do produto Educacional	
Conteúdo: Juros simples e juros compostos	
1° e 2° aulas	Introdução ao conteúdo de juros simples, onde docente irá apresentar os conceitos e exemplificar algumas situações problemas do cotidiano dos alunos.
3° e 4° aulas	Introdução ao conteúdo de juros compostos, onde docente irá apresentar os conceitos e exemplificar algumas situações problemas do cotidiano dos alunos.
5° aula	Momento destinado para realizar uma análise sobre os conteúdos abordados nas aulas anteriores, e procurar sanar os problemas encontrados.
6° e 7°	Apresentar várias situações problemas e envolvê-las em formas de exercícios e problemas, e em grupo resolver cada situação e compartilhar suas técnicas de solução.
8° e 9° aulas	Nessas aulas será apresentado para os alunos o produto educacional, cabe ao docente uma breve explicação sobre como manuseá-lo e deixar que os alunos possam descobrir cada ferramenta e interagir com as mesmas.
10° aula	Este momento é destinado para que sejam avaliados os momentos referente as aulas 6° e 7° com às aulas 8° e 9°.

6 CONCLUSÕES

As pesquisas realizadas nesta dissertação nos proporcionaram várias reflexões sobre a importância da integração da matemática financeira, educação financeira e tomada de decisões, essas combinadas e desenvolvidas de forma a potencializar ao máximo a aprendizagem de alunos, e despertar um olhar crítico financeiro, fazendo assim que suas decisões sejam na grande maioria influenciadas com bases matemáticas.

Reconhecemos que o ensinar matemática financeira no ensino médio é essencial para promover uma sociedade alfabetizada financeiramente, e combinada com o tema integrador educação financeira, teremos um cidadão menos suscetível às armadilhas das finanças, podendo tomar decisões mais assertivas para seu bolso.

Esta pesquisa baseou-se nas teorias de John Dewey, “teoria de experimentos,” e do brasileiro José Moran com o uso das metodologias ativas da aprendizagem. Percebemos que não basta ter o domínio dos conteúdos abordados, nem ter domínio em algum tipo de ferramenta educacional, se não tiver o uso de metodologia adequada para o objetivo desejado. No decorrer da dissertação fica claro que o método como as aulas de matemática financeira estão sendo realizadas, não está surtindo os efeitos desejáveis, sendo assim preciso rever a forma como abordar esse conteúdo tão importante que é a matemática financeira.

Enfatizamos a importância da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), na educação financeira como tema integrador na grade curricular de matemática, onde se pode perceber a importância que o tema traz para a vida financeira, pois ela aborda conceitos extremamente importantes e fundamentais na operações ligadas ao dinheiro.

Em nossa metodologia de trabalhos apresentamos os conteúdos de matemática financeira, trazendo em cada seção um conjunto de situações, exemplos e problemas que tratam esses conceitos utilizando as experiências mais próximas dos alunos, pois percebemos que as pesquisas realizadas sobre as metodologias de ensino, é muito importante tratar objeto de estudo tendo como referência as vivências dos alunos.

Acreditamos que o uso do software Geogebra nas práticas no ensino da matemática financeira permite que os estudantes potencializem seus argumentos em suas tomadas de decisões, melhorando seu aprendizado. Observamos que para Dewey o processo educativo é fundamentado na troca de informações e interação entre os indivíduos na execução de tarefas voltadas às práticas diárias.

Concordamos que esta dissertação, juntamente com o produto educacional apresentado nele, pode contribuir de maneira positiva no ensino e aprendizagem dos estudantes com relação ao ensino da matemática financeira, espero que meu trabalho e os recursos utilizados possam ser usados por professores em suas práticas educativas. Vale ressaltar, que o software Geogebra como uma alternativa tecnológica, é um excelente condutor para enriquecer os conteúdos de uma maneira prática e rápida.

Atualmente é possível efetuar suas finanças sem sair de casa, fazendo o uso de um computador ou dispositivo móvel, por isso é importante que essas questões sejam trabalhadas e debatidas pelo docente em sala de aula, dessa maneira os alunos terão um aprofundamento a mais sobre o conteúdo abordado.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, T. A. de. *Proporcionalidade e Matemática Financeira*. SÃO PAULO, SP: Orientador: Antonio Luiz Pereira. Dissertação de Mestrado do Programa de mestrado profissional em Ensino de Matemática – Instituto de Matemática e Estatistica, Universidade de São Paulo„ 2017.

BACICH, L.; MORAN, J. Metodologias ativas para uma educação inovadora. Penso, Porto Alegre-RS, 2018.

BRASIL. Lei nº 1521, de 26 de dezembro de 1951. *Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*, Rio de Janeiro, RJ, 1951. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2012/Lei/L12651.htm>.

BRASIL. Base nacional comum curricular. Ministério da Educação, Brasília, DF, 2018.

BRASIL, B. C. D. LiquidaÇÃo antecipada. *bcb*, p. https://www.bcb.gov.br/meubc/faqs/p/o–que–e–a–liquidacao–antecipada, 16–06–2024.

BRASIL, B. C. D. Caderno de educaÇÃo financeira- gestÃo de finanÇas pessoais. *bcb*, p. https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/Cuidando_do_seu_dinheiro_Gestao_de_Financas_Pessoais/caderno_cidadania_financeira.pdf, 2013.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *MATEMÁTICA 2*. 1º. ed. SÃO PAULO, SP: SM Educaçao, 2016.

CNNBRASIL. *Reduflação*. [S.l.]: acessado 02 jul 2024, 2023. https://www.cnnbrasil.com.br/economia/macroeconomia/produto-diminui-mas-preco-sobe-veja-os-itens-de-supermercado-que-mais-sofreram-reduflacao-este-ano/ p.

COSTA, N. V. D. *A utilização de recursos computacionais para o ensino da matemática financeira no ensino médio*. UBERABA, MG: Orientador: PROF. DRa. Lílian Nasser. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, 2015.

DANTE IUIZ R. *MATEMÁTICA DANTE*. 1°. ed. SÃO PAULO, SP: Ática, p 119, 2009a.

DEWEY, J. *Experiência e educação.* 3º. ed. SÃO PAULO, SP: Ed. Nacional, 1970.

DOLABELA, F. *PEDAGOGIA EMPREENDEDORA*. 1°. ed. São Paulo: de Cultura, 2003.

FGV. p. https://portalibre.fgv.br/?utm_source=portal–fgvutm_medium=menu–indicesutm_campaign=portal–fgv–menu–indices, 2024.

FIPE. p. https://www.fipe.org.br/pt–br/indices, 2024.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido.* 1º. ed. SÃO PAULO, SP: Paz e Terra, 1974.

HAYEK, F. A. *DESEMPREGO E POLÍTICA MONETÁRIA, Tradução de Og Francisco Leme*. 2°. ed. BRASIL: Instituto Rothbard, 2011.

IBGE. p. https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php, 2024.

JACINTO, A. de S. *EDUCAÇÃO FINANCEIRA A PARTIR DO TEMA INFLAÇÃO: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO À LUZ DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA*. OURO PRETO, MG: Orientador: PROF. DR. EDMILSON MINORU TORISU. Dissertação de Mestrado do Programa de mestrado em Educação Matemática – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto„ 2023.

JUSBRASIL. p. https://www.jusbrasil.com.br/artigos/reduflacao–nas–relacoes–consumeristas/1533571182, 2024.

KAPOOR, J. R. K. . L. R. D. . R. J. H. . M. M. H. . *Personal Finance*. Mc graw hill education. NEW YORK, NY: [s.n.], 2020.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1°. ed. RIO DE JANEIRO, RJ: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2013.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1°. ed. RIO DE JANEIRO, RJ: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, p 159, 2013a.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1°. ed. RIO DE JANEIRO, RJ: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, p 86, 2013a.

LIMA, E. L. et al. *Temas e Problemas Elementares*. 2°. ed. RIO DE JANEIRO, RJ: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2005. v. 6°.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6°. ed. RIO DE JANEIRO, RJ: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2006. v. 2°.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 9°. ed. RIO DE JANEIRO, RJ: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2006. v. 1°.

MONTEIRO, D. M. M. *Educação financeira no ensino médio*. RONDONÓPOLIS,MT: Orientador: Prof. Dr. Marcos André de jesus Delgado. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional da Universidade federal de Rondonópolis, 2023.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 3°. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2022.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 3°. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, p. 19, 2022.

MOURAN, J. *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá.* 5º. ed. CAMPINAS, SP: Papirus, 2004.

NOVAES, R. C. N. de. *UMA ABORDAGEM VISUAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO*. RIO DE JANEIRO, RJ: Orientador: PROF. DRa. Lílian Nasser. Dissertação de Mestrado Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

OLIVEIRA, E. R. de; CUNHA, D. da S. O uso da tecnologia no ensino da matemática: contribuições do software geogebra no ensino da função do 1º grau. *Revista Educação Pública*, v. 21, n. 36, p. https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/o–uso–da–tecnologia–no–ensino–da–matematica–contribuicoes–do–isoftwarei–geogebra–no–ensino–da–funcao–do–1–grau, 2021.

PEIC. *Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor*. junho. [S.l.]: SESC SENAC, junho,2024. https://portal-bucket.azureedge.net/wp-content/2024/07/Analise$_{Peic_j}unho_2 024.pdf\ p.$

PORTAL DO INVESTIDOR. p. https://www.gov.br/investidor/pt–br/investir/tipos–de–investimentos/titulos–publicos: :text=Os

PORTAL G1 REDUFLAÇÃO. p. https://g1.globo.com/economia/noticia/2023/09/26/reduflacao–por–que–produtos–menores–com–precos–iguais–vieram–para–ficar.ghtml, 2024.

PRIMON, S. M. *Educação Financeira nas Escolas: uma proposta de ensino*. Dissertação Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional-PROFMAT: Curitiba: 87 p., p 31, 2017.

ROCHA, M. L. L. *O Ensino da Matemática Financeira na Educação Básica Somada a Conhecimentos Bancários e Financeiros na Vida Pessoal e Profissional*. MANAUS, AM: Orientador: Prof. Dr. Claudenir Freire Rodrigues. Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, 2018.

SILVA, C. V. da; BARBOSA, D. E. F.; SANTOS, J. J. C. dos. Matematica financeira: Contexto historico e sua importancia na contemporaneidade. p. https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conapesc/2022/TRABALHO _COMPLET_EV177_MD1_ID130_TB550_20062022143328.pdf.

SOARES, B. de P. InflaÇÃo e desigualdade social: Como o direito deve responder ao discurso econÔmico irresponsÁvel do neoliberalismo inflation and social inequity: How the law must respond to the neoliberalism's irresponsible economic speech. 2021.

SOUZA, J.; GARCIA, J. *Contato Matemática*. 1°. ed. São Paulo: FTD, p. 9, 2016.