

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FERNANDO NEY SABOIA GOMES

MODELAGEM DA FUNÇÃO DE MÍNIMA VARIÂNCIA DA TEORIA  
DE MARKOWITZ E RESOLUÇÃO ATRAVÉS DE TÉCNICAS DE  
OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA.

CURITIBA

2024

FERNANDO NEY SABOIA GOMES

MODELAGEM DA FUNÇÃO DE MÍNIMA VARIÂNCIA DA TEORIA DE  
MARKOWITZ E RESOLUÇÃO ATRAVÉS DE TÉCNICAS DE  
OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA.

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientadora:** Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Lucelina Batista dos Santos.

Curitiba

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Gomes, Fernando Ney Saboia

Modelagem da função de mínima variância da teoria de Markowitz e resolução através de técnicas de otimização contínua. / Fernando Ney Saboia Gomes. – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciência Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Lucelina Batista dos Santos.

1. Bolsa de valores. 2. Otimização matemática. 3. Funções (Matemática). I. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. II. Santos, Lucelina Batista dos. III. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **FERNANDO NEY SABOIA GOMES** intitulada: **MODELAGEM DA FUNÇÃO DE MÍNIMA VARIÂNCIA DA TEORIA DE MARKOWITZ E RESOLUÇÃO ATRAVÉS DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA.**, sob orientação da Profa. Dra. LUCELINA BATISTA DOS SANTOS, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua Aprovado no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 19 de Abril de 2024.



LUCELINA BATISTA DOS SANTOS  
Presidente da Banca Examinadora



ADRIANA LUIZA DO PRADO  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Documento assinado digitalmente



CAMILA ISOTON

Data: 25/04/2024 20:35:07-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS)

## **Agradecimentos**

Muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente para a elaboração deste trabalho. Em especial, agradeço à minha mãe Raquel e à minha orientadora Lucelina.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento e aplicação, na Bolsa de Valores do Brasil (B3), da função de mínima variância presente na teoria de Markowitz. Esta função é uma ferramenta importante para a tomada de decisões em investimentos em renda variável. Ela determina uma carteira ótima de investimentos no sentido de estabelecer o percentual a ser investido em cada ativo em renda variável, de maneira que se tome o menor risco possível. Uma vez estabelecida a função de mínima variância, enunciaremos e demonstraremos algumas ferramentas da otimização contínua que garantem a existência e determinam as soluções ótimas do problema geral. Mais precisamente, o problema consiste em minimizar uma função quadrática sujeita a restrições de igualdade e desigualdade.

Palavras-chave: Função Mínima Variância; Otimização Contínua; B3 (Bolsa de Valores do Brasil).

## **ABSTRACT**

This work presents the development and application, on the Brazilian stock exchange (B3), of the minimum variance function present in Markowitz's theory. This function is an important tool for making decisions in variable income investments. It determines an optimal investment portfolio in terms of establishing the percentage to be invested in each variable income asset, so that the lowest possible risk is taken. Once the minimum variance function is established, we will state and demonstrate some continuous optimization tools that guarantee the existence and determine the optimal solutions to the general problem. To be more precise, it consists of minimizing a quadratic function subject to equality and inequality constraints.

**Keywords:** Minimum Variance Function; Continuous Optimization; B3 (Brazilian Stock Exchange).

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>7</b>
<b>2 TEORIA DE MARKOWITZ: MODELANDO A FUNÇÃO DE MÍNIMA VARIÂNCIA .....</b>	<b>12</b>
2.1 Teoria de Markowitz .....	12
2.2 Retorno esperado e medidas de dispersão .....	14
2.3 Análise de diferentes carteiras compostas por 2 ativos e fronteira eficiente. ....	18
2.4 Modelando a função de mínima variância para duas variáveis .....	22
2.5 Cálculo da carteira que estabelece o menor risco para 2 ativos. ....	27
2.6 Diversificação pode oferecer menor risco: análise empírica. ....	32
2.7 Modelando a função de mínima variância para n ativos .....	36
<b>3 OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA PARA RESOLVER O PROBLEMA DA FUNÇÃO DE MÍNIMA VARIÂNCIA... ..</b>	<b>39</b>
3.1 Definições básicas .....	39
3.2 Existência de minimizador .....	42
3.3 Convexidade .....	43
3.4 Teoria dos cones.....	47
3.5 Cones importantes para analisar o teorema de KKT. ....	50
3.6 Teorema de KKT e convexidade .....	55
3.7 Aplicando os resultados obtidos na função de mínima variância.....	60
<b>4 APLICAÇÃO DA FUNÇÃO MÍNIMA VARIÂNCIA EM AÇÕES DA B3. ....</b>	<b>63</b>
4.1 Ações consideradas.....	63
4.2 Análise das variações das ações consideradas. ....	66
4.3 Composição da carteira que oferece o menor risco a partir de 10 ações.....	68
4.4 Comparação da carteira de menor risco. ....	69
4.5 Desempenho de cada mês ao longo do primeiro trimestre do ano de 2023.....	71
4.5.1 Janeiro 2023 .....	71
4.5.2 Fevereiro 2023 .....	73
4.5.3 Março 2023 .....	74
4.6 Análise do desempenho das 5 carteiras no primeiro trimestre de 2023.....	76
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>77</b>
<b>6 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>79</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A otimização pode ser entendida como o processo de encontrar a melhor solução, através da maximização ou minimização de uma função que modela a situação investigada (problema real) sujeita (possivelmente) a certos critérios ou restrições. Ela desempenha um papel significativo em várias áreas do conhecimento tais como matemática, engenharia, economia e ciência da computação [6].

Por Santiago [13], infere-se que a origem da otimização pode remontar à época de Euclides (por volta de 300 a. C.). Podemos observar que ao longo de sua obra, *Elementos*, algumas proposições podem ser interpretadas como problemas de otimização.

A formalização da teoria da otimização começou a se desenvolver no final do século XVII, com os trabalhos de matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Leibniz. No século XX, a otimização se tornou uma área de pesquisa fundamental em matemática aplicada, especialmente durante a Segunda Guerra Mundial, quando os esforços de guerra levaram ao desenvolvimento de técnicas de otimização para resolver problemas logísticos e de programação linear. A programação linear, em particular, desempenhou um papel crucial na otimização de recursos durante essa época.

Com o avanço da tecnologia da computação na segunda metade do século XX, a otimização tornou-se uma ferramenta indispensável em uma ampla gama de aplicações, incluindo o projeto de sistemas de transporte, a alocação de recursos em empresas e até mesmo a otimização de algoritmos em ciência da computação [6].

Hoje, a otimização continua sendo uma área ativa de pesquisa e aplicação, com desenvolvimentos significativos em algoritmos e modelagem matemática. Ela desempenha um papel crucial na resolução de problemas complexos em várias áreas contribuindo para a melhoria da eficiência e o avanço tecnológico em muitos campos.

O problema, cuja solução será obtida através das ferramentas de otimização, formulado neste trabalho é baseado em conceitos básicos da teoria moderna de finanças desenvolvida por Harry Markowitz na década de 1950 [10]. Essa teoria é uma

abordagem fundamental para a gestão de investimentos que busca encontrar a alocação ideal de ativos em uma carteira de investimentos, considerando aspectos de risco e retorno esperado.

O problema de otimização de carteiras de Markowitz parte do princípio de que os investidores estão interessados em maximizar seu retorno esperado, mas também desejam minimizar o risco associado aos seus investimentos. Para isso, Markowitz propôs uma abordagem matemática que leva em consideração uma análise estatística de desempenhos passados de ativos em renda variável. A partir da análise de um período estabelecido, o qual pode ser, por exemplo, diário, mensal ou anual, são levadas em consideração, principalmente, três ideias: a média dos retornos de cada período; a variância apresentada, a qual expressa o quão volátil se demonstrou um determinado ativo; e a covariância entre os ativos, que é uma medida que determina o quão relacionados, às variações do mercado, dois deles estiveram. As duas últimas ideias se relacionam para determinar o risco que o ativo oferece.

A principal ideia por trás dessa teoria é que a diversificação pode reduzir o risco de uma carteira de investimento. Isso significa que, ao incluir ativos que não têm uma correlação perfeita entre si, é possível obter uma carteira que tenha menos risco do que qualquer um dos ativos individuais que a compõem. No entanto, essa redução de risco não ocorre indefinidamente, e há um ponto de equilíbrio onde a adição de mais ativos à carteira pode não proporcionar uma redução significativa ao risco.

Uma possibilidade para o problema de otimização de carteiras de Markowitz é encontrar a alocação de ativos que maximize o retorno esperado da carteira sujeito a um nível de risco especificado. É possível também determinar a carteira que oferece a maior razão entre o retorno excedente (retorno esperado subtraído da opção no mercado livre de risco) e o risco (desvio padrão). Há ainda a possibilidade em determinar a carteira que oferece menor risco.

Para qualquer um dos problemas, é necessário determinar as restrições relacionadas ao peso de cada ativo que compõe a carteira. A soma de cada um desses pesos deve ser igual a 1. Outra restrição está relacionada, por exemplo, ao percentual máximo, ou mínimo, a ser investido em um determinado ativo. Há ainda a possibilidade de se considerar a opção de venda a descoberto, que é uma prática financeira que consiste na venda de um ativo ou derivativo, esperando que o preço

caia para então comprá-lo de volta e lucrar com a diferença. Se for considerada, o percentual do ativo pode ser um número negativo, caso contrário, deve ser um número não negativo.

Neste trabalho, vamos modelar e apresentar técnicas de resolução para minimizar o risco da carteira sem opção de venda a descoberto. Consideramos o seguinte problema de otimização contínua que consiste em minimizar a raiz quadrada da função objetivo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$f(X) = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + \dots + X_i^2 \sigma_i^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + \dots + 2X_{i-1} X_i \sigma_{(i-1)i},$$

sujeito às restrições:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_i = 1 \text{ e } X_1, X_2, \dots, X_i \geq 0 \text{ com } ; i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Cada variável  $X_i$  representa o peso a ser investido em cada ativo. Os coeficientes  $\sigma_i^2$  e  $\sigma_{(i-1)i}$  representam, respectivamente, a variância e covariância entre o conjunto de dados. Tais coeficientes são constantes reais, intrínsecas a um determinado problema. Os conceitos de variância e covariância serão detalhados, respectivamente, ao longo das seções 2.2 e 2.4.

Existem muitas ferramentas que podem ser usadas para resolver problemas de otimização, sujeitos ou não a restrições. Aqui estão alguns exemplos:

- Programação Linear: Quando as restrições e a função objetivo são lineares, a programação linear pode ser usada para encontrar a solução ótima.

- Programação Quadrática: O problema de otimização de Markowitz geralmente é formulado como um problema de programação quadrática, pois envolve otimizar uma função quadrática sujeita a restrições lineares.

- Técnicas de Otimização Não Linear: Em alguns casos, restrições ou objetivos não podem ser expressos de forma linear ou quadrática, e métodos de otimização não linear podem ser usados.

- Algoritmos de Otimização: Para resolver problemas de otimização, podem ser utilizados diversos algoritmos, incluindo o método de Newton, algoritmos de gradiente descendente, algoritmos de otimização convexa, entre outros.

- Ferramentas de Software: Para implementar a otimização de carteiras de Markowitz, muitos investidores e gestores de ativos utilizam ferramentas de software especializadas em otimização de portfólio, como o MATLAB, R, Python (com bibliotecas como NumPy, SciPy ou CVXPY), ou plataformas de software financeiro específicas.

Para cada tipo de problema de otimização, existem condições necessárias e suficientes de otimalidade, as quais são um conjunto de critérios matemáticos que determinam quando uma solução é ótima. Essas condições garantem que, se uma solução satisfaz todas elas, então essa solução é de fato a solução ótima do problema.

No presente trabalho, vamos minimizar o risco de uma carteira que é formulada por uma função quadrática. Para este caso, as condições necessárias de otimalidade incluem as "condições de Karush-Kuhn-Tucker" (KKT). Estas incidem sobre o vetor gradiente da função objetivo e das restrições. Neste contexto, é imprescindível considerar as condições de qualificação, que podem ser verificadas através da análise, por exemplo, da relação de independência linear entre os gradientes dos vetores das funções de restrição ou ainda, analisando a igualdade de determinados cones avaliados em um ponto factível do problema. Tais cones serão explicados e contextualizados ao longo desta dissertação. Veremos que as condições necessárias de otimalidade de nosso problema são também suficientes devido à presença de convexidade das funções envolvidas no problema.

A metodologia utilizada para desenvolver este trabalho consistiu na análise de teses, dissertações e livros a respeito da teoria de otimização de carteiras de Markowitz e conceitos de otimização contínua sujeito a restrições de igualdade e desigualdade.

O objetivo geral consiste em demonstrar a aplicabilidade de ferramentas da matemática em problemas da vida real. Para atingi-lo, formulou-se um problema, a partir de conceitos básicos de Estatística, para o qual foram analisadas ferramentas úteis para sua resolução.

Os objetivos específicos consistem em: analisar dados e aplicar conceitos básicos de Estatística, tais como médias simples e ponderada, medidas de dispersão e covariância; entender o processo de modelar um problema da vida real a partir da análise de casos para poucas variáveis para que se possa ficar claro o processo de

generalização das mesmas; discutir a necessidade e importância de ferramentas avançadas de otimização contínua para resolver o problema proposto.

Em um primeiro momento, faremos a formulação de um problema que consiste em encontrar um valor ótimo. Na sequência, discutiremos algumas ferramentas de otimização para resolver o problema proposto. Em seguida, faremos a aplicação da teoria abordada em dados reais, do ano de 2022, de algumas ações da Bolsa de Valores de São Paulo (B3). Por fim, faremos as considerações finais enfatizando os resultados obtidos e a relevância deste trabalho na formação.

## 2 TEORIA DE MARKOWITZ: MODELANDO A FUNÇÃO DE MÍNIMA VARIÂNCIA

Nesse capítulo, faremos uma breve discussão sobre os aspectos gerais da Teoria de Markowitz. Em seguida, trataremos um problema fictício composto por 3 ativos. Veremos a importância de conceitos simples da Estatística, tais como média simples e ponderada, medidas de dispersão e covariância. Na sequência, faremos a análise de diferentes composições para uma carteira composta por 2 ativos. Neste contexto, definiremos a fronteira eficiente. Após isso, vamos modelar a função de variância mínima, proposta na teoria de Markowitz, para o caso de 2, 3 e  $n$  ativos. Nesta circunstância, veremos a importância, a partir da análise empírica, da diversificação ao se investir em renda variável.

### 2.1 Teoria de Markowitz

A teoria de Markowitz, também conhecida como a Teoria da Carteira de Markowitz, é um estudo financeiro desenvolvido por Harry Markowitz em 1952. Ele foi laureado com o Prêmio Nobel de Economia em 1990 por desenvolver esta teoria. Sua pesquisa, publicada em 1952 no artigo "*Portfolio Selection*", e posteriormente no livro "*Portfolio Selection: Efficient Diversification*", foi importante para o início da moderna teoria de portfólio e análise de investimentos. Desde então, a construção de portfólios com base em suas ideias tem sido amplamente adotada no mercado financeiro.

Um investidor se encara com a situação de ter que escolher um número muito grande de possibilidades de ativos para se investir. Neste contexto, esta teoria está relacionada à forma de como os investidores podem tomar decisões racionais sobre como alocar seus ativos financeiros em uma carteira de investimentos, levando em consideração a relação do retorno e risco.

A teoria surgiu em um contexto de pós-guerra e crescimento econômico. Após a Segunda Guerra Mundial, os Estados Unidos e outras economias ocidentais estavam se recuperando do conflito e experimentando um período de crescimento econômico significativo. Na época, os mercados financeiros estavam em constante evolução. As pessoas se interessavam cada vez mais em investir em ações. Apesar

do interesse crescente, havia uma carência de abordagens sistemáticas e científicas para a criação de carteiras de investimento. Muitas vezes, investimentos eram considerados levando-se em consideração apenas o retorno de um ativo, ignorando a volatilidade, a qual transmite a ideia de dispersão de um ativo em relação a sua média. Um ativo com volatilidade alta, ou seja, que tem variações com altas amplitudes, tende ser mais arriscado. Um exemplo numérico será apresentado na seção 2.2 para um melhor entendimento desse conceito.

A importância da teoria de Markowitz reside na sua contribuição para a compreensão e gestão do risco em investimentos. Conforme Markowitz [10], é possível criar carteiras diversificadas que oferecem um equilíbrio entre retorno e risco, permitindo aos investidores maximizarem seu retorno para um nível de risco dado ou minimizar o risco para um nível de retorno desejado. Ela também deu origem a diversas outras teorias e modelos, como o Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM) e a Teoria da Eficiência do Mercado. O Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM) foi desenvolvido em parte por William Sharpe em seu trabalho "*Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*", publicado em 1964 no "*Journal of Finance*". A Teoria da Eficiência do Mercado foi formalmente apresentada por Eugene Fama no artigo "*Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*", publicado em 1970 no "*Journal of Finance*". Estes trabalhos são referências primárias para essas teorias na literatura de finanças.

Podemos destacar alguns pontos importantes para aplicar a teoria de Markowitz:

- Coleta de dados, a qual consiste em reunir informações sobre os ativos financeiros que se deseja incluir em seu portfólio;
- Cálculo do retorno esperado, que envolve a média histórica dos retornos passados;
- Cálculo de volatilidade, que é feito usando o desvio padrão dos retornos históricos do ativo;
- Definição de metas e restrições, que consiste em determinar seus objetivos de investimento, incluindo o nível de retorno desejado, o nível de risco que está disposto a aceitar e limitações de investimento em ativos específicos;

- Otimização, que consiste em utilizar um software ou uma planilha para encontrar a alocação de ativos que maximiza ou minimiza seus objetivos de investimento;
- Rebalanceamento e monitoramento contínuo, os quais enfatizam a importância de acompanhar regularmente o desempenho da carteira estabelecida e fazer eventuais mudanças de acordo com o mercado financeiro atual a fim de se atender às suas metas de investimento em curso.

É importante ressaltar que a teoria de Markowitz é um modelo simplificado e não leva em consideração todas as complexidades do mercado real. Portanto, é válido ser cuidadoso ao aplicar essa teoria na prática e considerar fatores adicionais, como custos de transação e taxas, política interna e externa, juros, inflação, horizonte de investimento e outras variáveis importantes para sua situação específica.

## 2.2 Retorno esperado e medidas de dispersão

A tabela abaixo representa uma variação em percentual de três ativos de renda variável ao longo de quatro períodos. Vamos supor que os períodos sejam mensais. Optou-se por escolher valores hipotéticos para facilitar o entendimento da construção do problema, caso o leitor não esteja familiarizado com tais termos. Vamos usar tais dados ao longo das discussões e construções que faremos neste capítulo.

Tabela 2.1 – Dados iniciais.

<b>Período</b>	<b>Ativo A</b>	<b>Ativo B</b>	<b>Ativo C</b>
1	1	4	3
2	4	1	6
3	3	3	1
4	5	1	6

Fonte: Autor.

Passaremos agora à análise do valor esperado de cada ativo e seu respectivo risco. O valor esperado, ou retorno médio, é dado pela média simples das variações dos quatro períodos. É possível calcular a média ponderada se quisermos estabelecer pesos para a variação de cada mês. Vamos, no entanto, calcular o valor esperado com a média simples. Assim, sejam  $\overline{R}_A$ ,  $\overline{R}_B$ ,  $\overline{R}_C$  os valores esperados dos ativos A, B e C.

$$E(R_A) = \overline{R}_A = \frac{1 + 4 + 3 + 5}{4} = \frac{13}{4} = 3,25$$

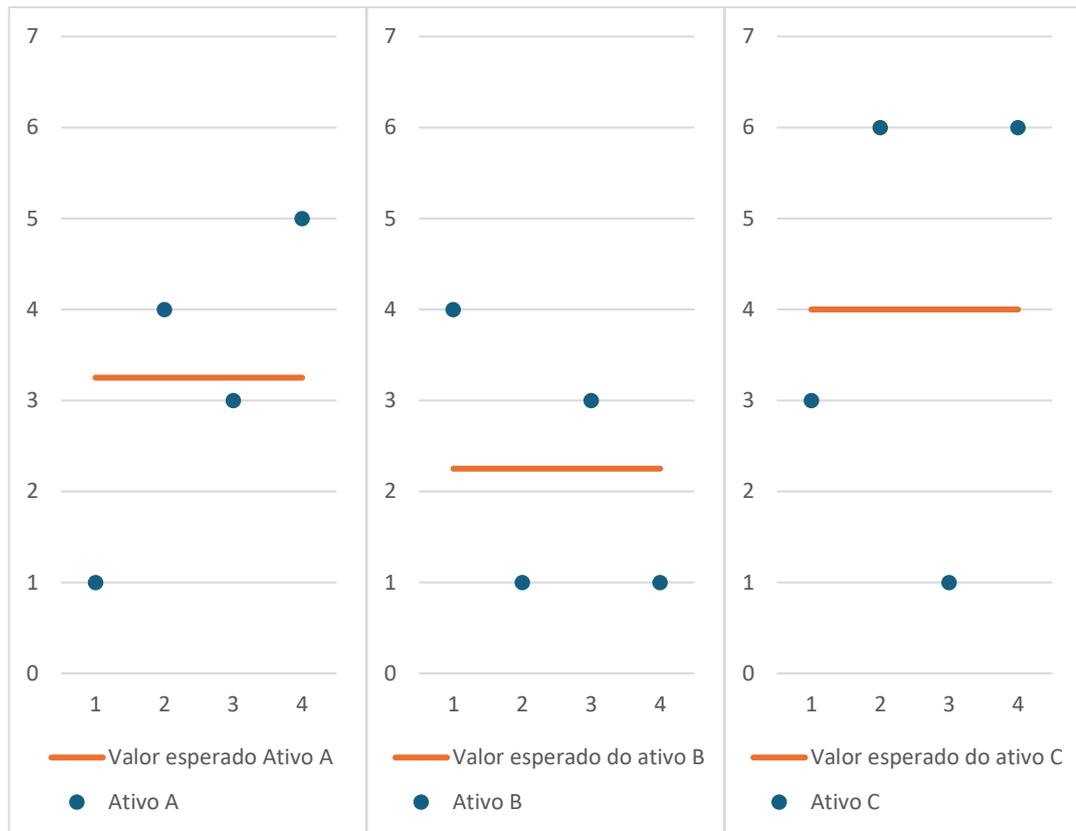
$$E(R_B) = \overline{R}_B = \frac{4 + 1 + 3 + 1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$E(R_C) = \overline{R}_C = \frac{3 + 6 + 1 + 6}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

Baseando-se na análise das variações de quatro períodos mensais, espera-se que, no período 5, os ativos A, B e C obtenham, respectivamente, uma valorização de 3,25%; 2,25% e 4% em relação ao período 4.

Para cada investimento em renda variável, existe um risco atrelado, portanto, não se pode considerar apenas a média por si só. É útil analisar alguma medida que leva em conta o quanto o valor de cada período difere da média. Essa análise será considerada para determinar o risco. O gráfico abaixo ilustra essa reflexão.

Gráfico 2.1 - Dispersão em relação à média.



Fonte: Autor.

Analisando apenas a Tabela 2.1 e o Gráfico 2.1, nota-se que o ativo C tem um comportamento mais irregular em relação aos ativos A e B, ou seja, suas variações estão mais distantes da média.

É preciso determinar um número que quantifique essas variações em relação à média. Uma maneira intuitiva de se fazer isso é calcular a diferença entre o valor de cada período e o valor médio. Ao fazer isso, algumas diferenças seriam positivas e outras negativas, o que implicaria que a soma das diferenças se anularia.

Nesse contexto, vamos considerar o risco a partir da variância de cada conjunto de dados dos ativos. Trata-se de uma medida de dispersão, expressa por um número real positivo, que considera o quadrado da diferença entre o valor de cada período e o valor médio.

Vamos calcular a variância de cada ativo e, em seguida, determinar seus respectivos riscos. Sejam  $\sigma_A^2$ ,  $\sigma_B^2$  e  $\sigma_C^2$  as variâncias dos ativos A, B e C, respectivamente,

$$\sigma_A^2 = \frac{(1 - 3,25)^2 + (4 - 3,25)^2 + (3 - 3,25)^2 + (5 - 3,25)^2}{4} = 2,1875$$

$$\sigma_B^2 = \frac{(4 - 2,25)^2 + (1 - 2,25)^2 + (3 - 2,25)^2 + (1 - 2,25)^2}{4} = 1,6875$$

$$\sigma_C^2 = \frac{(3 - 4)^2 + (6 - 4)^2 + (1 - 4)^2 + (6 - 4)^2}{4} = 4,5.$$

Visto que as parcelas das igualdades acima foram elevadas ao quadrado, é preciso reconsiderar essa medida através da operação inversa, que é a raiz quadrada. Assim, o risco será determinado pelo desvio padrão, ou seja, pela raiz quadrada da variância. Sejam  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  e  $\sigma_C$ , respectivamente, os desvios padrões, isto é, os riscos, dos ativos A, B e C:

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = \sqrt{2,1875} \cong 1,48; \sigma_B = \sqrt{\sigma_B^2} = \sqrt{1,6865} \cong 1,3; \sigma_C = \sqrt{\sigma_C^2} = \sqrt{4,5} \cong 2,12.$$

Tabela 2.2 - Retorno médio e risco.

Ativo	Retorno Médio	Risco
A	3,25	1,48
B	2,25	1,3
C	4	2,12

Fonte: Autor.

Como  $\sigma_C > \sigma_A > \sigma_B$ , é mais arriscado investir no ativo C do que em A ou B.

Se levarmos em conta um investimento de menor risco, seria melhor investir todo o capital no ativo B. Mesmo que seu retorno seja inferior aos dos demais, é um investimento mais seguro. Em investimentos em renda variável, de uma maneira geral, é preferível um risco baixo a um retorno alto.

### 2.3 Análise de diferentes carteiras compostas por 2 ativos e fronteira eficiente.

Uma questão natural que surge nesse ponto é se uma combinação de investimentos em cada ativo não poderia ser menos arriscada. De fato, muitas vezes, são feitos investimentos em vários ativos distintos, o que compõe o que chamamos de carteira de investimentos. É preciso escolher quais serão os ativos que farão parte da carteira de investimentos, bem como, as suas respectivas quantidades visando obter uma boa relação risco/retorno. Há ainda aqueles que preferem uma carteira que determina o menor risco possível.

Em um primeiro momento, vamos analisar uma carteira composta por 50% em A e 50% em B. Calculemos seu retorno esperado e seu risco.

O retorno da carteira desse investimento é simplesmente a média ponderada dos retornos dos ativos médios de cada ativo. Seja  $\overline{R}_p$  o retorno esperado da carteira de investimentos composta por A e B:

$$\overline{R}_p = \overline{R}_A * 0,5 + \overline{R}_B * 0,5 = 3,25 * 0,5 + 2,25 * 0,5 = 2,75. \quad (2.1)$$

Assim, espera-se que no período 5, a carteira de investimentos, composta por 50% de ativo A e 50% de B, valorize-se em 2,75%.

Analisemos agora o risco dessa carteira que é calculado a partir do valor esperado das variâncias do retorno médio da carteira e denodo por  $\sigma_p$ .

Tabela 2.3 – Cálculo do risco da carteira.

Período	Ativo A	Ativo B	Retorno médio da carteira por período
1	1	4	$0,5*1+0,5*4=2,5$
2	4	1	$0,5*4+0,5*1=2,5$
3	3	3	$0,5*3+0,5*3=3$
4	5	1	$0,5*5+0,5*1=3$

Fonte: Autor.

$$\sigma_p^2 = \frac{(2,5 - 2,75)^2 + (2,5 - 2,75)^2 + (3 - 2,75)^2 + (3 - 2,75)^2}{4} = 0,0625$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = 0,25.$$

Podemos concluir então que ao investir em uma carteira composta por 50% de ativo A e 50% de ativo B, espera-se um retorno de 2,75% e um risco de 0,25.

Nota-se que também que  $\sigma_p < \sigma_A$  e  $\sigma_p < \sigma_B$ . O investimento em uma combinação de ativos seria menos arriscado do que investir unicamente em A ou B. De maneira análoga à construção da Tabela 2.3, consideremos a Tabela 2.4 contendo outras possíveis composições de carteira.

Tabela 2.4 – Composição de carteira com diferentes percentuais.

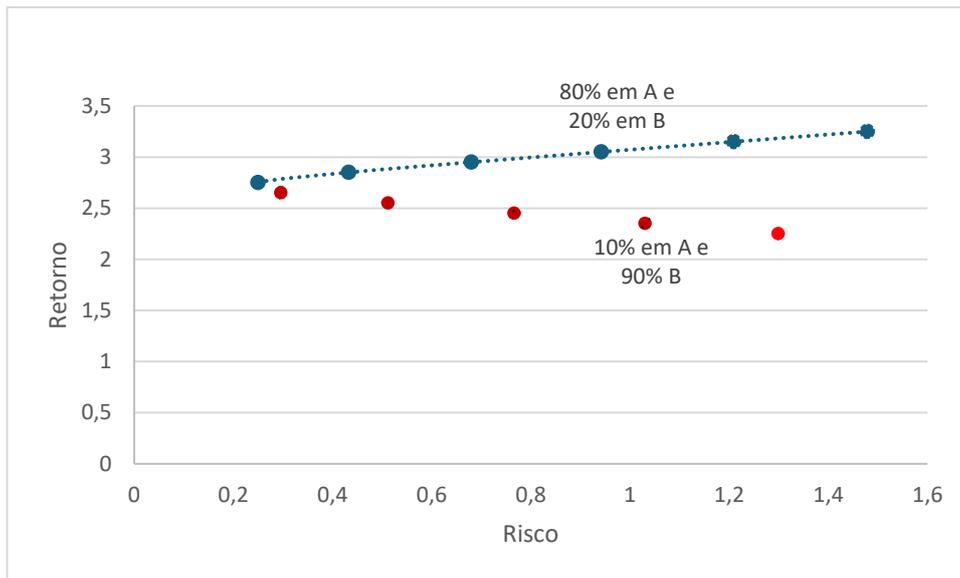
<b>Composição da carteira</b>	<b>Retorno Esperado</b>	<b>Risco</b>
0% em A e 100% em B	2,25	1,3
10% em A e 90% em B	2,35	1,03
20% em A e 80% em B	2,45	0,77
30% em A e 70% em B	2,55	0,51
40% em A e 60% em B	2,65	0,3
50% em A e 50% em B	2,75	0,25
60% em A e 40% em B	2,85	0,43
70% em A e 30% em B	2,95	0,68
80% em A e 20% em B	3,05	0,94
90% em A e 10% em B	3,15	1,21
100% em A e 0% em B	3,25	1,48

Fonte: Autor.

Ao analisarmos os valores da Tabela 2.4, observamos que ao investir em um único ativo, o risco é fixo. Ao investir em dois ativos, o risco varia em função da porcentagem investida em cada um deles.

Vejamos através do gráfico 2.2 as opções de investimento que foram apresentadas na Tabela 2.4.

Gráfico 2.2 – Análise gráfica de diferentes composições de carteira.



Fonte: Autor.

Notemos que os pontos em azul são as melhores opções de investimento. Ao investirmos, por exemplo, 80% em A e 20% em B estaríamos expostos a menos risco e teríamos um retorno esperado mais satisfatório em relação a investir 10% em A e 90% B. Se levarmos em consideração apenas os investimentos contidos na Tabela 2.4, os pontos em azul formariam o que denotamos como fronteira eficiente.

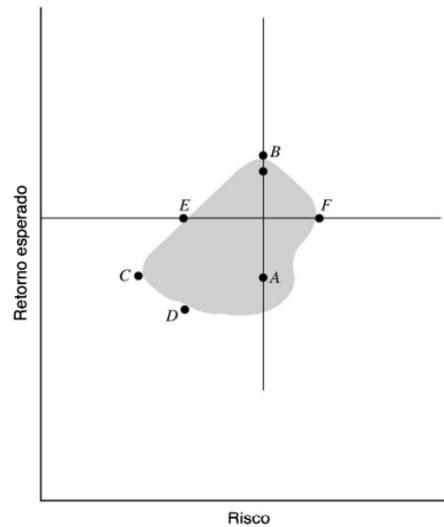
Considerando o investimento em vários ativos e as diferentes possibilidades de combinações de percentual investido em cada um, definimos por **fronteira eficiente** como o conjunto de carteiras que oferecem o maior retorno esperado para um nível específico de risco. Ela é determinada por uma curva gerada pela projeção do ponto que oferece o menor risco (obtido através de ferramentas de otimização) até o ponto da carteira que oferece o maior retorno. As carteiras que estão abaixo da fronteira eficiente não são consideradas como boas opções de investimento.

Vamos analisar o caso geral sem venda a descoberto<sup>1</sup>. Vamos considerar, primeiramente, todas as possibilidades de carteira plotadas no espaço bidimensional do risco x retorno. Neste caso, obtemos um diagrama semelhante ao da figura a

<sup>1</sup> É uma prática financeira que consiste na venda de um ativo ou derivativo, esperando que o preço caia para então comprá-lo de volta e lucrar com a diferença.

seguir, onde cada letra representa uma possibilidade de carteira que determina um risco e retorno específico.

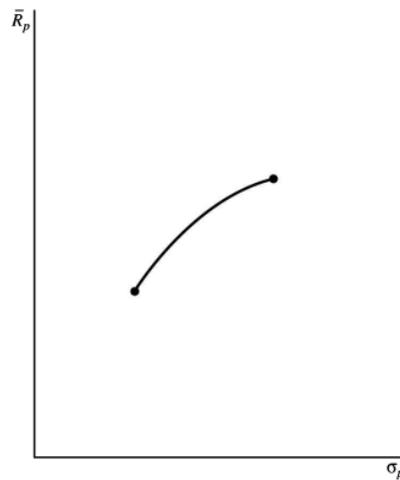
Gráfico 2.3 – Possibilidade de risco x retorno para vários ativos e carteiras



Fonte: Elton, Gruber, Brown e Goetzmann [3]

Considerando os pontos presentes no Gráfico 2.3 que oferecem o maior retorno para o mesmo risco (ou que oferecem o risco menor para o mesmo retorno), teremos identificado todas as carteiras pertinentes de investimento. Todas as demais são ignoradas e a fronteira eficiente é formada através dos pontos pertencentes à curva, concava e suave, projetada partindo do ponto C (carteira que representa o menor risco) até o ponto B (carteira que representa o maior retorno), como mostra o Gráfico 2.4.

Gráfico 2.4 – A fronteira eficiente



Fonte: Elton, Gruber, Brown e Goetzmann [3]

Voltemos ao problema cujos dados se encontram na Tabela 2.1. Se levarmos em conta a carteira de menor risco, dentre as opções contidas na tabela, a melhor escolha seria: investir 50% em A e 50% em B. De maneira aparentemente linear, nota-se que o valor do risco diminui até um certo ponto para em seguida aumentar. Existiria então um valor mínimo do risco? Se a resposta para esta pergunta for positiva, o valor mínimo estaria compreendido entre 40% e 60% do investimento no ativo A, e o restante no ativo B. Nas próximas seções, vamos analisar com mais detalhe essa questão.

## 2.4 Modelando a função de mínima variância para duas variáveis

Para mencionarmos “valor mínimo”, devemos modelar o problema com uma função cujas variáveis sejam as porcentagens de investimentos em cada ativo. Não vamos considerar vendas a descoberto.

Lembrando que o risco de investimentos de uma carteira está relacionado ao valor esperado das variâncias do retorno médio da carteira, vamos modelar uma função que estabelece o risco para uma carteira composta por dois ativos. Para isto, retomamos a situação da Seção 2.3, isto é, consideramos investimento de 50% em no ativo A e 50% em B. Retomemos a Tabela 2.3

Tabela 2.3 – Cálculo do risco da carteira

Período	Ativo A	Ativo B	Retorno médio da carteira por período
1	1	4	$0,5 * 1 + 0,5 * 4 = 2,5$
2	4	1	$0,5 * 4 + 0,5 * 1 = 2,5$
3	3	3	$0,5 * 3 + 0,5 * 3 = 3$
4	5	1	$0,5 * 5 + 0,5 * 1 = 3$

Fonte: Autor.

$$\sigma_p^2 = \frac{(2,5 - 2,75)^2 + (2,5 - 2,75)^2 + (3 - 2,75)^2 + (3 - 2,75)^2}{4} = 0,0625 \quad (2.2)$$

Vamos generalizar a expressão numérica acima com dados obtidos e conceitos vistos previamente.

Lembrando que  $2,75 = \bar{R}_p$  (retome a equação (2.1)), substituímos esse valor na equação 2.2 do retorno médio da carteira por período, de modo que obtemos:

$$\sigma_p^2 = \frac{(0,5 * 1 + 0,5 * 4 - \bar{R}_p)^2 + (0,5 * 4 + 0,5 * 1 - \bar{R}_p)^2}{4} + \frac{(0,5 * 3 + 0,5 * 3 - \bar{R}_p)^2 + (0,5 * 5 + 0,5 * 1 - \bar{R}_p)^2}{4} \quad (2.3)$$

Sejam:

$X_1$  o percentual investido no ativo A.

$X_2$  o percentual investido no ativo B.

$R_{Aj}$  o retorno do ativo A no período  $j$ ;  $j \in \{1,2,3,4\}$

$R_{Bj}$  o retorno do ativo B no período  $j$ ;  $j \in \{1,2,3,4\}$

É importante ressaltar que:

$$X_1 + X_2 = 1 \text{ e } X_1, X_2 \geq 0.$$

A restrição de igualdade se deve ao fato de que  $X_1$  e  $X_2$  representam percentuais de investimento para o qual será investido 100% do capital. A relação de desigualdade provém do fato de que não estamos considerando vendas a descoberto.

Retomando as substituições a partir da equação 2.3, temos que:

$$\sigma_p^2 = \frac{(X_1 * R_{A1} + X_2 * R_{B1} - \bar{R}_p)^2 + (X_1 * R_{A2} + X_2 * R_{B2} - \bar{R}_p)^2}{4} + \frac{(X_1 * R_{A3} + X_2 * R_{B3} - \bar{R}_p)^2 + (X_1 * R_{A4} + X_2 * R_{B4} - \bar{R}_p)^2}{4} \quad (2.4)$$

Vamos trabalhar com a primeira parcela da equação (2.4). O desenvolvimento para as demais segue de forma análoga.

$$\begin{aligned} \frac{(X_1 * R_{A1} + X_2 * R_{B1} - \bar{R}_p)^2}{4} &= \\ \frac{[X_1 * R_{A1} + X_2 * R_{B1} - (\bar{R}_A * X_1 + \bar{R}_B * X_2)]^2}{4} &= \\ \frac{[X_1(R_{A1} - \bar{R}_A) + X_2(R_{B1} - \bar{R}_B)]^2}{4} &= \\ \frac{X_1^2(R_{A1} - \bar{R}_A)^2 + X_2^2(R_{B1} - \bar{R}_B)^2 + 2X_1X_2(R_{A1} - \bar{R}_A)(R_{B1} - \bar{R}_B)}{4} & \end{aligned} \quad (2.5)$$

Assim, da equação 2.4, obtemos:

$$\sigma_p^2 = \frac{X_1^2(R_{A1} - \bar{R}_A)^2 + X_2^2(R_{B1} - \bar{R}_B)^2 + 2X_1X_2(R_{A1} - \bar{R}_A)(R_{B1} - \bar{R}_B)}{4} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{X_1^2(R_{A2} - \bar{R}_A)^2 + X_2^2(R_{B2} - \bar{R}_B)^2 + 2X_1X_2(R_{A2} - \bar{R}_A)(R_{B2} - \bar{R}_B)}{4} + \\
& \frac{X_1^2(R_{A3} - \bar{R}_A)^2 + X_2^2(R_{B3} - \bar{R}_B)^2 + 2X_1X_2(R_{A3} - \bar{R}_A)(R_{B3} - \bar{R}_B)}{4} + \\
& \frac{X_1^2(R_{A4} - \bar{R}_A)^2 + X_2^2(R_{B4} - \bar{R}_B)^2 + 2X_1X_2(R_{A4} - \bar{R}_A)(R_{B4} - \bar{R}_B)}{4} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Na equação (2.6), vamos deixar  $X_1^2$ ,  $X_2^2$  e  $2X_1X_2$  em evidência:

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 = & \frac{X_1^2[(R_{A1} - \bar{R}_A)^2 + (R_{A2} - \bar{R}_A)^2 + (R_{A3} - \bar{R}_A)^2 + (R_{A4} - \bar{R}_A)^2]}{4} + \\
& \frac{X_2^2[(R_{B1} - \bar{R}_B)^2 + (R_{B2} - \bar{R}_B)^2 + (R_{B3} - \bar{R}_B)^2 + (R_{B4} - \bar{R}_B)^2]}{4} + \\
& 2X_1X_2 \sum_{j=1}^4 \frac{(R_{Aj} - \bar{R}_A)(R_{Bj} - \bar{R}_B)}{4} \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Apontaremos abaixo algumas observações sobre a equação (2.7).

- i) O coeficiente de  $X_1^2$  é a variância do conjunto de dados (ao longo dos quatro períodos) do ativo A, isto é:

$$X_1^2 \frac{[(R_{A1} - \bar{R}_A)^2 + (R_{A2} - \bar{R}_A)^2 + (R_{A3} - \bar{R}_A)^2 + (R_{A4} - \bar{R}_A)^2]}{4} = X_1^2 \sigma_A^2$$

- ii) O coeficiente de  $X_2^2$  é a variância do conjunto de dados (ao longo dos quatro períodos) do ativo B, isto é:

$$X_2^2[(R_{B1} - \overline{R_B})^2 + (R_{B2} - \overline{R_B})^2 + (R_{B3} - \overline{R_B})^2 + (R_{B4} - \overline{R_B})^2] = X_2^2 \sigma_B^2$$

- iii) O coeficiente de  $2X_1X_2$  é a covariância entre os ativos A e B, isto é, a média do produto de dois desvios: os desvios do ativo A em relação à sua média ( $R_{Aj} - \overline{R_A}$ ) e os desvios dos retornos do ativo 2 em relação à sua média ( $R_{Bj} - \overline{R_B}$ ). Esse valor pode ser positivo ou negativo. Será positivo se existe uma relação entre as tendências de cada ativo. Desse modo, se os ativos A e B subirem ou caírem (no mesmo período) a covariância é um número real positivo. Por outro lado, se o ativo A cair e o ativo B subir (ou vice-versa) no mesmo período, a covariância entre eles é negativa. Isso significa que as variações dos ativos A e B são opostas. Em nosso problema, é um número real constante. Ela representa o quão relacionadas estão as variações dos ativos A e B em relação ao mesmo período. Se não existe relação aparente entre as tendências de cada ativo, a covariância é um número real cujo módulo é próximo ou igual a zero. Logo, quanto maior este módulo, mais intensamente estão relacionados dois ativos em relação às suas variações.

Vamos denotar a covariância entre os ativos A e B por  $\sigma_{AB}$ , isto é:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{(R_{Aj} - \overline{R_A})(R_{Bj} - \overline{R_B})}{4} = \sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

Aplicando a fórmula da covariância aos dados da Tabela 2.1, segue que:

$$\sigma_{AB} = \frac{(1-3,25)(4-2,25) + (4-3,25)(1-2,25) + (3-3,25)(3-2,25) + (5-3,25)(1-2,25)}{4} = -1,8125$$

$\sigma_{AB}$  é negativo, logo, pode-se dizer que os ativos A e B possuem comportamentos de mercado opostos, isto é, quando o ativo A cai, o ativo B tende a subir (e vice-versa). Os termos "cair" e "subir" podem também ser usados na análise das variações em relação à sua média. Por exemplo, no período 1, o ativo A teve uma

variação positiva de 1%, no entanto, menor do que sua média 3.25%, e o ativo B, obteve uma variação de 4%, logo, superior à sua média de 2.25%.

Podemos então concluir nesta seção que a forma genérica de uma carteira que estabelece o menor risco de investimento considerando dois ativos é:

$$\sigma_P^2 = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12}, \quad (2.8)$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são as variáveis e  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  e  $\sigma_{12}$  são constantes intrínsecas a um problema dado no formato da equação 2.8

Observamos que a equação 2.8 pode ser generalizada para “n” períodos, naturalmente.

Notemos também que ela pode ser interpretada como uma função contínua, com duas variáveis, cujo domínio é um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$ , tal que:

$$X_1 + X_2 = 1 \text{ e } X_1, X_2 \geq 0 \quad (2.9)$$

Na próxima seção veremos como é possível estabelecer a carteira que oferece menor risco considerando a equação (2.8).

## 2.5 Cálculo da carteira que estabelece o menor risco para 2 ativos.

Para minimizar a equação (2.8), sujeito às restrições em (2.9), vamos usar ferramentas de otimização contínua. Em um primeiro momento, vamos explorar o problema em questão usando conceitos básicos de função do segundo grau para encontrar o eventual minimizador. Vejamos que é de fato possível encontrar um minimizador para a equação (2.8), sujeito às restrições em (2.9).

Da equação, 2.9, se fizermos  $X_2 = 1 - X_1$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2X_1(1 - X_1)\sigma_{12} \\
\sigma_p^2 &= X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - 2X_1 + X_1^2) \sigma_2^2 + 2X_1\sigma_{12} - 2X_1^2 \sigma_{12} \\
\sigma_p^2 &= X_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + X_1(2\sigma_{12} - 2\sigma_2^2) + \sigma_2^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

E é fácil ver que (2.10) é uma função do segundo grau em  $X_1$  com coeficientes constantes. Essa função possui um valor extremo (de máximo ou de mínimo) em:

$$\dot{X}_1 = \frac{-(2\sigma_{12} - 2\sigma_2^2)}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{2.11}$$

Considerando investimento nos ativos A e B mencionados nesse capítulo ( $\sigma_A^2 = 2,1875$ ;  $\sigma_B^2 = 1,6875$ ;  $\sigma_{12} = -1,8125$ ), segue que  $\dot{X}_1 \cong 0,4667$ .

Substituindo  $\dot{X}_1 \cong 0,4667$  à equação (2.10), segue que  $\sigma_p \cong 0,233\%$ . Analisando a Tabela 2.3, percebemos que esse valor é menor do que, por exemplo, investir 50% em cada ativo. Assim, alocar aproximadamente 46,67% em A e 53,33% em B é um valor extremo de mínimo, ou seja, o investimento de menor risco. Substituindo esses percentuais para o retorno esperado, segue que  $\bar{R}_p = 2,72\%$ .

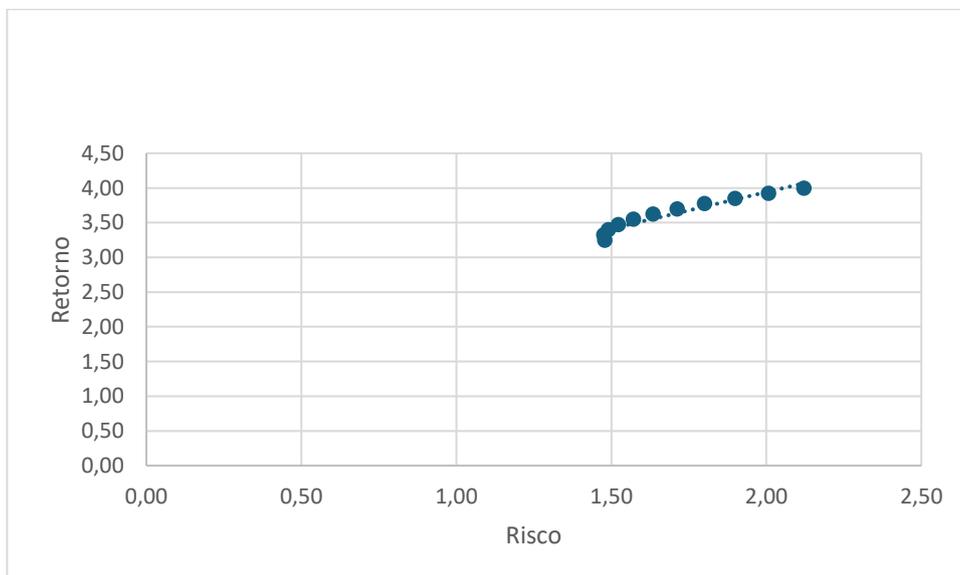
De maneira análoga à construção da Tabela 2.3, consideremos o caso de se investir nos ativos A e C cujos dados iniciais se encontram na Tabela 2.1:

Tabela 2.5 – Composição de carteira com diferentes percentuais

Composição da carteira	Retorno Esperado	Risco
0% em A e 100% em C	4	2,12
10% em A e 90% em C	3,93	2,01
20% em A e 80% em C	3,85	1,90
30% em A e 70% em C	3,78	1,80
40% em A e 60% em C	3,70	1,71
50% em A e 50% em C	3,63	1,63
60% em A e 40% em C	3,55	1,57
70% em A e 30% em C	3,48	1,52
80% em A e 20% em C	3,40	1,49
90% em A e 10% em C	3,33	1,475
100% em A e 0% em C	3,25	1,479

Fonte: autor.

Gráfico 2.6 – Relação risco x retorno dos ativos A e C



Fonte: Autor.

Analisando a Tabela 2.5, o valor a ser investido em A para se ter o menor risco possível está entre 80% e 100%. De fato, vamos calcular esse valor através da igualdade (2.10) aplicados ao investimento em A e C:

$$X_1 = \frac{\sigma_{AC} + \sigma_c^2}{\sigma_A^2 - \sigma_c^2 + 2\sigma_{AC}}$$

$$X_1 = \frac{2 + 4,5}{2,1875 - 4,5 + 2 * 2} \cong ,93$$

Assim, segue que  $\sigma_p \cong 1,474\%$  para uma carteira composta por, aproximadamente, 93% de ativo A e 7% de C. O retorno esperado ( $\bar{R}_p$ ) é de aproximadamente 3,30%.

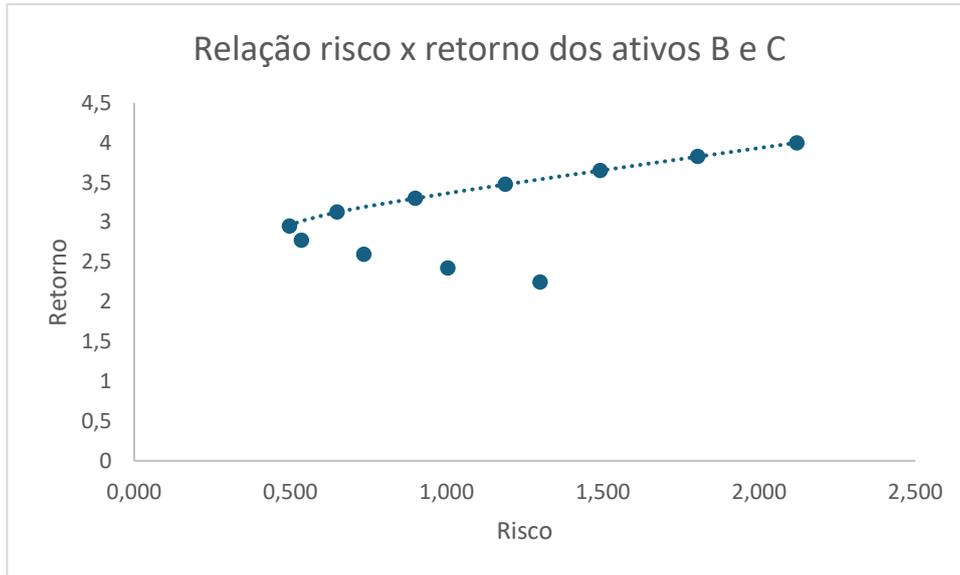
De maneira análoga à construção da Tabela 2.3, consideremos agora o caso de se investir nos ativos B e C cujos dados iniciais se encontram na Tabela 2.1:

Tabela 2.6 – Composição de carteira com diferentes percentuais

<b>Composição da carteira</b>	<b>Retorno Esperado</b>	<b>Risco</b>
0% em B e 100% em C	4,00	2,12
10% em B e 90% em C	3,82	1,81
20% em B e 80% em C	3,65	1,49
30% em B e 70% em C	3,47	1,19
40% em B e 60% em C	3,30	0,90
50% em B e 50% em C	3,13	0,65
60% em B e 40% em C	2,95	0,50
70% em B e 30% em C	2,78	0,53
80% em B e 20% em C	2,60	0,74
90% em B e 10% em C	2,43	1,00
100% em B e 0% em C	2,25	1,30

Fonte: Autor.

Gráfico 2.7 – Relação risco x retorno dos ativos B e C



Fonte: Autor.

Analisando a Tabela 2.6, o valor a ser investido em B para se ter o menor risco possível está entre 50% e 70%. De fato, vamos calcular esse valor através da igualdade (2.10) aplicados ao investimento em B e C:

$$\hat{X}_1 = \frac{\sigma_{BC} + \sigma_C^2}{\sigma_B^2 - \sigma_C^2 + 2\sigma_{BC}}$$

$$\hat{X}_1 = \frac{-2,25 + 4,5}{1,6875 - 4,5 - 2 * 2,25} \cong 0,63$$

Assim, segue que  $\sigma_p \cong 0,49\%$  para uma carteira composta por, aproximadamente, 63% de ativo B e 37% de C. O retorno esperado ( $\bar{R}_p$ ) é de aproximadamente 2,89%.

A tabela abaixo resume os resultados obtidos, relacionados às carteiras otimizadas, nessa seção

Tabela 2.7 – Carteiras otimizadas para investimento em dois ativos.

<b>Carteira ótima composta por 2 ativos</b>	<b>risco</b>	<b>retorno</b>
46,67% em A e 53,33% em B	0,233%	2,72%
93,02% em A e 6,98% em C	1,474%	3,3%
63% em B e 37% em C	0,49%	2,89%

Fonte: Autor.

Concluimos que ao escolher dois ativos, a melhor opção de investimento, considerando a carteira com menor risco, é alocar aproximadamente 46,67% em A e 53,33% em B.

## 2.6 Diversificação pode oferecer menor risco: análise empírica.

Uma pergunta interessante é se podemos diminuir ainda mais o risco ao compor a carteira com três ativos. Vamos, primeiramente, modelar a função do risco com três variáveis, cada uma delas sendo a porcentagem a ser investida em cada um dos três ativos.

Lembrando que o risco de uma carteira é calculado pelo valor esperado das variâncias do retorno médio da carteira, isto é:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= E(R_P - \bar{R}_P)^2 = E[X_1 R_{Aj} + X_2 R_{Bj} + X_3 R_{Cj} - (X_1 \bar{R}_A + X_2 \bar{R}_B + X_3 \bar{R}_C)]^2 \\ \sigma_P^2 &= E[X_1(R_{Aj} - \bar{R}_A) + X_2(R_{Bj} - \bar{R}_B) + X_3(R_{Cj} - \bar{R}_C)]^2\end{aligned}\quad (2.12)$$

Para todo  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , segue que:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + c^2 + 2bc \\ (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}\quad (2.13)$$

Assim, retomando a equação (2.12) e baseando-se em (2.13), segue que:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= E[X_1(R_{Aj} - \bar{R}_A) + X_2(R_{Bj} - \bar{R}_B) + X_3(R_{Cj} - \bar{R}_C)]^2 \\ &= E[X_1^2(R_{Aj} - \bar{R}_A)^2 + X_2^2(R_{Bj} - \bar{R}_B)^2 + X_3^2(R_{Cj} - \bar{R}_C)^2 \\ &\quad + 2X_1X_2(R_{Aj} - \bar{R}_A)(R_{Bj} - \bar{R}_B) + 2X_1X_3(R_{Aj} - \bar{R}_A)(R_{Cj} - \bar{R}_C) \\ &\quad + 2X_2X_3(R_{Bj} - \bar{R}_B)(R_{Cj} - \bar{R}_C)]\end{aligned}\quad (2.14)$$

Para continuarmos a manipulação, vejamos duas propriedades importantes envolvendo o valor esperado.

Por definição, o valor esperado do ativo A ao longo de  $j$  períodos é:

$$E(R_{Aj}) = \frac{R_{A1} + R_{A2} \dots + R_{Aj}}{j}$$

Vejamos que o valor esperado da soma dos retornos de dois ativos é soma da média de cada um deles, isto é:

$$E(R_{Aj} + R_{Bj}) = \bar{R}_A + \bar{R}_B \quad (2.15)$$

De fato:

$$\begin{aligned} E(R_{Aj} + R_{Bj}) &= \frac{R_{A1} + R_{B1} + R_{A2} + R_{B2} + \dots + R_{Aj} + R_{Bj}}{j} = \\ &= \frac{R_{A1} + R_{A2} \dots + R_{Aj}}{j} + \frac{R_{B1} + R_{B2} \dots + R_{Bj}}{j} = \bar{R}_A + \bar{R}_B \end{aligned}$$

Vejamos também que:

$$E(cR_{Aj}) = c\bar{R}_A, \quad (2.16)$$

com  $c$  uma constante real.

De fato:

$$E(cR_{Aj}) = \frac{cR_{A1} + cR_{A2} \dots + cR_{Aj}}{j} = \frac{c(R_{A1} + R_{A2} \dots + R_{Aj})}{j} = c\bar{R}_A$$

Usando as duas propriedades acima (representadas pelas equações 2.15 e 2.16) na equação 2.14 segue que:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 = & X_1^2 E \left[ (R_{Aj} - \bar{R}_A)^2 \right] + X_2^2 E \left[ (R_{Bj} - \bar{R}_B)^2 \right] + X_3^2 E \left[ (R_{Cj} - \bar{R}_C)^2 \right] + \\ & 2X_1X_2E[(R_{Aj} - \bar{R}_A)(R_{Bj} - \bar{R}_B)] + 2X_1X_3E[(R_{Aj} - \bar{R}_A)(R_{Cj} - \bar{R}_C)] + \\ & 2X_2X_3E[(R_{Bj} - \bar{R}_B)(R_{Cj} - \bar{R}_C)] \end{aligned}$$

Por definição de variância e covariância, tem-se que os coeficientes de  $X_1^2, X_2^2, X_3^2, 2X_1X_2, 2X_1X_3$  e  $2X_2X_3$  estão relacionados à variância de cada ativo e a covariância entre dois deles. Sendo assim, segue que a equação de mínima variância de uma carteira composta por 3 ativos é dada por:

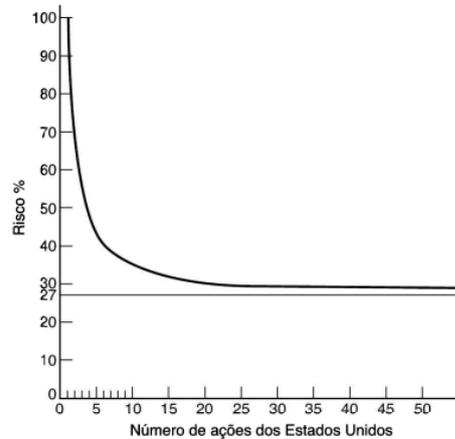
$$\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_A^2 + X_2^2\sigma_B^2 + X_3^2\sigma_C^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_2X_3\sigma_{23}; \quad (2.17)$$

Sujeita às seguintes restrições:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 \text{ e } X_1, X_2, X_3 \geq 0.$$

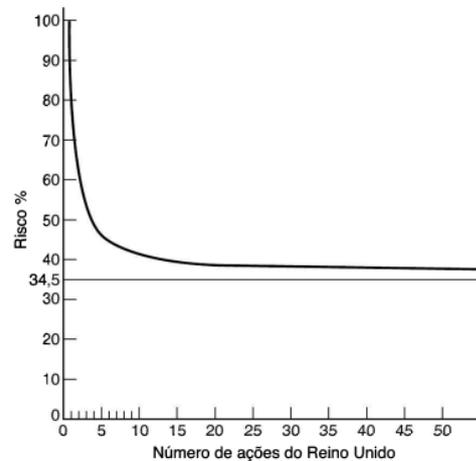
Ao aplicar, na equação (2.17), os valores da Tabela 2.1 obtém-se a carteira de menor risco, a qual consiste em alocar aproximadamente 34% do capital no ativo A, 34% em B e 12% em C. Isso implica em um retorno de aproximadamente 2,8% atrelado a um risco de 0,13%. Essa opção é mais vantajosa que as contidas na Tabela 2.7. De maneira empírica, analisamos um exemplo que favorece o argumento da diversificação de ativos, um dos conceitos centrais propostos na Teoria de Markowitz. Ao se adicionar ativos na composição de carteira, é possível demonstrar que o risco sempre diminui. Os gráficos abaixo ilustram essa afirmação:

Gráfico 2.8 – Efeito do número de ações dos Estados Unidos sobre o risco da carteira



Fonte: Elton, Gruber, Brown e Goetzmann [3]

Gráfico 2.9 – Efeito do número de ações Reino Unido sobre o risco da carteira



Fonte: Elton, Gruber, Brown e Goetzmann [3]

Observando os Gráficos 2.8 e 2.9, o risco diminui (e tem um limite inferior) à medida que investimos em mais ações. A diminuição não é considerável a partir de um certo número de ativos. Para o Gráfico 2.8, por exemplo, o número de ativos interessante (no sentido de não ter muitos ativos para gerenciar e possuir um risco baixo) para compor uma carteira de ações dos Estado Unidos de 1975 estaria compreendido entre 15 e 20.

## 2.7 Modelando a função de mínima variância para $n$ ativos

A partir da análise das equações (2.6) e (2.14), é possível deduzir que o problema de mínima variância de uma carteira com  $n$  ativos é dada por:

$$\sigma_P^2 = X_1^2 \sigma_A^2 + X_2^2 \sigma_B^2 + \dots + X_n^2 \sigma_n^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + \dots + 2X_{n-1} X_n \sigma_{(n-1)n};$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1 \text{ e } X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0 \text{ com } X_i \in \mathbb{R}; i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Vejamos por indução em  $n$  que de fato isso ocorre. Observamos que, para uma carteira de  $n$  ativos, se:

$$E(R_P - \bar{R}_P)^2 = E[X_1 R_{Aj} + \dots + X_n R_{nj} - (X_1 \bar{R}_A + \dots + X_n \bar{R}_n)]^2 =$$

$$X_1^2 \sigma_A^2 + X_2^2 \sigma_B^2 + \dots + X_n^2 \sigma_n^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + \dots + 2X_{n-1} X_n \sigma_{(n-1)n};$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1 \text{ e } X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0 \text{ com } X_i \in \mathbb{R}; i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

então, para uma carteira com  $n + 1$  ativos, tem-se que:

$$E(R_P - \bar{R}_P)^2 = E[X_1 R_{Aj} + \dots + X_{n+1} R_{(n+1)j} - (X_1 \bar{R}_A + \dots + X_{n+1} \bar{R}_{n+1})]^2 =$$

$$X_1^2 \sigma_A^2 + X_2^2 \sigma_B^2 + \dots + X_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + \dots + 2X_n X_{n+1} \sigma_{n(n+1)};$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_{n+1} = 1 \text{ e } X_1, X_2, \dots, X_{n+1} \geq 0 \text{ com } X_i \in \mathbb{R}; i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}.$$

De fato, o resultado para  $n = 2$  já está feito através da equação (2.6) Suponhamos que o resultado seja válido para  $n = k$ , veremos que valerá para  $n = k + 1$  para todo  $k$  natural maior ou igual a 2.

Para  $n = k + 1$ , segue que:

$$E(R_P - \bar{R}_P)^2 = E[X_1 R_{Aj} + \dots + X_{k+1} R_{(k+1)j} - (X_1 \bar{R}_A + \dots + X_{k+1} \bar{R}_{k+1})]^2 =$$

$$E[X_1 R_{Aj} + \dots + X_k R_{Kj} - (X_1 \bar{R}_A + \dots + X_k \bar{R}_K) + X_{k+1} R_{(k+1)j} - X_{k+1} \bar{R}_{k+1}]^2 =$$

$$E[X_1 R_{Aj} + \dots + X_k R_{Kj} - (X_1 \bar{R}_A + \dots + X_k \bar{R}_K)]^2 + E[X_{k+1} (R_{(k+1)j} - \bar{R}_{k+1})]^2 +$$

$$2E\{[X_1 (R_{Aj} - \bar{R}_A) + \dots + X_k (R_{Kj} - \bar{R}_K)][X_{k+1} (R_{(k+1)j} - \bar{R}_{k+1})]\}$$

Vamos analisar cada um dos valores esperados acima. Por hipótese de indução, segue que:

$$E[X_1 R_{A_j} + \dots + X_k R_{K_j} - (X_1 \overline{R_A} + \dots + X_k \overline{R_K})]^2 = \\ X_1^2 \sigma_A^2 + X_2^2 \sigma_B^2 + \dots + X_k^2 \sigma_k^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + \dots + 2X_{k-1} X_k \sigma_{(k-1)k}$$

Pela definição de variância, segue que:

$$E[X_{K+1}(R_{(k+1)j} - \overline{R_{K+1}})]^2 = X_{K+1}^2 \sigma_{K+1}^2$$

Além disso,

$$2E\{[X_1(R_{A_j} - \overline{R_A}) + \dots + X_k(R_{K_j} - \overline{R_K})][X_{K+1}(R_{(k+1)j} - \overline{R_{K+1}})]\} = \\ E[2X_1 X_{K+1}(R_{A_j} - \overline{R_A})(R_{(k+1)j} - \overline{R_{K+1}}) + \dots + 2X_k X_{K+1}(R_{K_j} - \overline{R_K})(R_{(k+1)j} - \overline{R_{K+1}})].$$

Por definição de covariância, segue que:

$$E[2X_1 X_{K+1}(R_{A_j} - \overline{R_A})(R_{(k+1)j} - \overline{R_{K+1}}) + \dots + 2X_k X_{K+1}(R_{K_j} - \overline{R_K})(R_{(k+1)j} - \overline{R_{K+1}})] = \\ 2X_1 X_{K+1} \sigma_{1(k+1)} + \dots + 2X_k X_{K+1} \sigma_{k(k+1)}$$

Assim sendo:

$$E[X_1 R_{A_j} + \dots + X_k R_{K_j} - (X_1 \overline{R_A} + \dots + X_k \overline{R_K}) + X_{k+1} R_{(k+1)j} - X_{k+1} \overline{R_{K+1}}]^2 = \\ E[X_1 R_{A_j} + \dots + X_k R_{K_j} - (X_1 \overline{R_A} + \dots + X_k \overline{R_K})]^2 + E[X_{k+1}(R_{(k+1)j} - \overline{R_{K+1}})]^2 + \\ 2E\{[X_1(R_{A_j} - \overline{R_A}) + \dots + X_k(R_{K_j} - \overline{R_K})][X_{k+1}(R_{(k+1)j} - \overline{R_{K+1}})]\} = \\ X_1^2 \sigma_A^2 + X_2^2 \sigma_B^2 + \dots + X_k^2 \sigma_k^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + \dots + 2X_{k-1} X_k \sigma_{(k-1)k} \\ + X_{k+1}^2 \sigma_{k+1}^2 + 2X_1 X_{k+1} \sigma_{1(k+1)} + \dots + 2X_k X_{k+1} \sigma_{k(k+1)}$$

completando a demonstração.

Essa função pode ser estabelecida em sua forma matricial. Tal forma pode ser útil para examinar características que garantem a aplicação de teoremas importantes de otimização. Vamos analisar, primeiramente, o caso para de dois ativos (lembrando que  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ):

$$\sigma_P^2 = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} = [X_1 \quad X_2] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Veamos agora o caso para 3 ativos:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + 2X_2 X_3 \sigma_{23} \\ &= [X_1 \quad X_2 \quad X_3] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Inferese-se que para o caso de  $n$  ativos, a igualdade a seguir é válida.

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + \dots + X_n^2 \sigma_n^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + \dots + 2X_{n-1} X_n \sigma_{(n-1)n} \\ &= [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_{n-1} \quad X_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}, \\ &= X^T A_n X \end{aligned}$$

$$\text{onde } X^T = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_{n-1} \quad X_n] \text{ e } A_n = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix},$$

tal que  $A_n$  é a matriz de covariância para  $n$  ativos.

Vimos até agora que é possível modelar uma função que determina o risco (baseado na variância) de uma carteira composta por  $n$  ativos. Trata-se de uma função contínua de  $n$  variáveis. Para determinar seu possível minimizador, será necessário abordar conceitos de otimização contínua, o qual será feito no próximo capítulo.

### 3 OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA PARA RESOLVER O PROBLEMA DA FUNÇÃO DE MÍNIMA VARIÂNCIA

Perguntas de natureza mais abstrata podem nos vir em mente. Por exemplo, dada uma função  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , em que condições ela apresenta um valor extremo? Seria este um valor local ou global? Seria este um valor de máximo ou de mínimo?

Esse capítulo será destinado a conceitos dessa natureza, ou seja, alguns conceitos básicos de otimização. Enunciaremos e demonstraremos teoremas importantes que garantem a existência e condições necessárias e suficientes para determinar o minimizador da função de mínima variância da teoria de Markowitz.

#### 3.1 Definições básicas

Vamos considerar o seguinte problema genérico: Minimizar ou maximizar  $f(x)$  sujeito a  $x \in \Omega$ , onde  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função arbitrária e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto não vazio. A função  $f$  é a função objetivo e  $\Omega$  o conjunto factível.

**Definição 3.1 :** Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x^* \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $x^*$  é um minimizador local de  $f$  em  $\Omega$  se existe  $\delta > 0$ , tal que  $f(x^*) \leq f(x)$ , para todo  $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$ .<sup>2</sup> Caso  $f(x^*) \leq f(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , então  $x^*$  é dito minimizador global de  $f$  em  $\Omega$ . Além disso,  $v^* \in \mathbb{R}$ , definido por  $v^* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$ <sup>3</sup> com  $x \in \Omega$ , é o valor ótimo do problema de minimização.

O exemplo 3.1 exemplifica a definição 3.1.

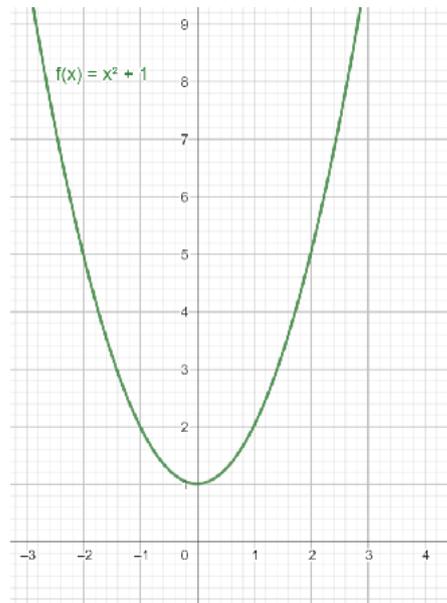
**Exemplo 3.1:**  $x^* = 0$  é minimizador global de  $f(x) = x^2 + 1$  em  $\mathbb{R}$ , pois  $f(0) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Temos que  $v^* = f(0) = 1$  é o valor ótimo do problema.

---

<sup>2</sup> Bola em aberta em  $\mathbb{R}^n$  centrada em  $x^*$  e raio  $\delta$ .

<sup>3</sup> Ínfimo de  $f(x)$ .

Gráfico 3.1 – Gráfico do Exemplo 3.1



Fonte: Autor.

Vejamos agora a definição de maximizador local.

**Definição 3.2 :** Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x^* \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $x^*$  é um maximizador local de  $f$  em  $\Omega$  se existe  $\delta > 0$ , tal que  $f(x^*) \geq f(x)$ , para todo  $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$ . Caso  $f(x^*) \geq f(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , então  $x^*$  é dito maximizado global de  $f$  em  $\Omega$ . Além disso,  $v^* \in \mathbb{R}$ , definido por  $v^* = \sup_{x \in \Omega} f(x)$ <sup>4</sup> com  $x \in \Omega$ , é o valor ótimo do problema de maximização.

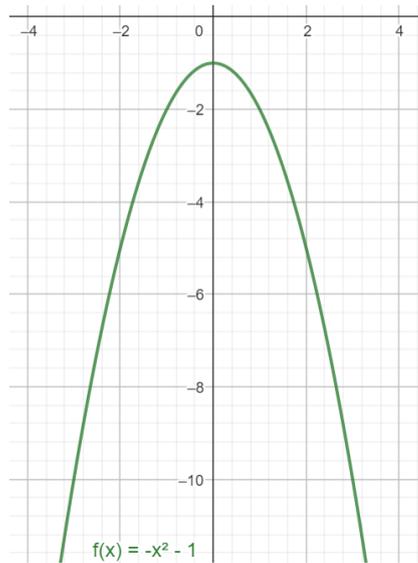
O exemplo 3.2 exemplifica a definição 3.2.

**Exemplo 3.2:**  $x^* = 0$  é maximizador global de  $f(x) = -x^2 - 1$  em  $\mathbb{R}$ , pois  $f(0) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  $v^* = f(0) = -1$  é o valor ótimo do problema.

---

<sup>4</sup> Supremo de  $f(x)$ .

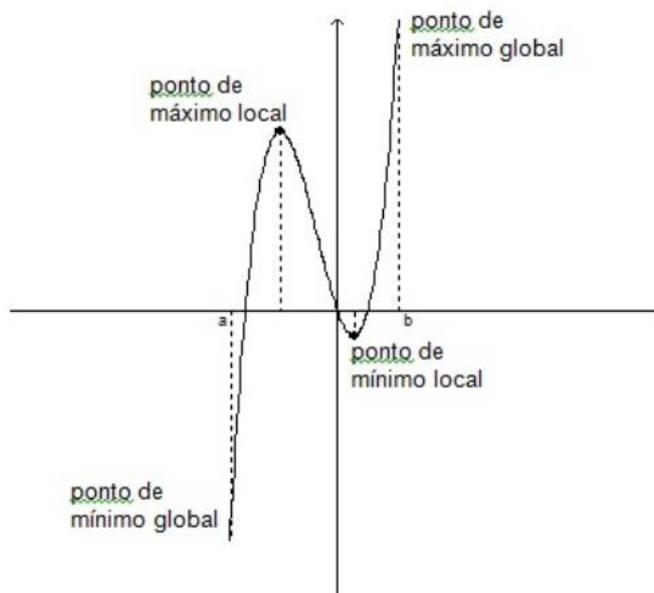
Gráfico 3.2 – Gráfico do Exemplo 3.2



Fonte: Autor.

A figura a seguir ilustra os conceitos de minimizador e de minimizador local.

Gráfico 3.3 – Caracterização de máximos e mínimos



Fonte: Isoton [7].

Vale ressaltar que qualquer problema que consiste em maximizar  $f$  sujeito a  $x \in \Omega$  equivale a minimizar  $-f$  sujeito a  $x \in \Omega$ . Se  $x^*$  é minimizador de  $f(x)$  sujeito a

$x \in \Omega$ , tem-se que  $x^*$  é maximizador de  $-f(x)$  sujeito a  $x \in \Omega$ . Desse fato, nota-se que se  $v^*$  é o valor ótimo do problema de minimização, então  $-v^*$  é o valor ótimo do problema de maximização. Uma função pode admitir vários otimizadores globais, mas o valor ótimo (global) do problema é sempre o mesmo.

Consideramos no presente trabalho problemas de minimização. Uma pergunta natural a se fazer nesse momento é em que condições uma função admite um minimizador e como determiná-lo.

### 3.2 Existência de minimizador

Dado um problema de otimização, existem alguns teoremas que garantem a existência de minimizador. Nesta seção, vamos enunciar e demonstrar o Teorema de Weierstrass, o qual garante a existência de minimizador global sob determinadas hipóteses.

**Teorema 3.1 (Teorema de Weierstrass):** Sejam  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $\Omega \in \mathbb{R}$  compacto não vazio. Então existe minimizador global de  $f$  em  $\Omega$ .

Demonstração: Vejamos primeiramente que o conjunto  $f(\Omega) = \{f(x); x \in \Omega\}$  é limitado inferiormente. Suponhamos por absurdo que não o é. Desse modo, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $x^k \in \Omega$  tal que  $f(x^k) \leq -k$ . Como a sequência  $(x^k)$  está no compacto  $\Omega$ , ela possui uma subsequência convergente para um ponto pertencente a  $\Omega$ . Denotemos esse ponto por  $\bar{x}$ . Pela continuidade de  $f$ , temos que  $f(x^k) \rightarrow f(\bar{x})$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Assim,  $\forall \epsilon > 0$ , tem-se que:

$$|f(x^k) - f(\bar{x})| < \epsilon$$

$$f(\bar{x}) - \epsilon < f(x^k) < f(\bar{x}) + \epsilon$$

Mas por hipótese, tem-se que:

$$f(x^k) \leq -k$$

Logo, teríamos que:

$$f(\bar{x}) - \epsilon < f(x^k) < -k, \forall k \in \mathbb{N}$$

O que é um absurdo pelo fato de  $f(\bar{x}) - \epsilon$  ser um valor limitado e  $k$  um número natural qualquer. Assim, podemos concluir que  $f(\Omega)$  é limitada inferiormente.

Tomemos agora  $f^* = \inf\{f(x); x \in \Omega\}$ . Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $x^k \in \Omega$  tal que

$$f^* \leq f(x^k) \leq f^* + \frac{1}{k}$$

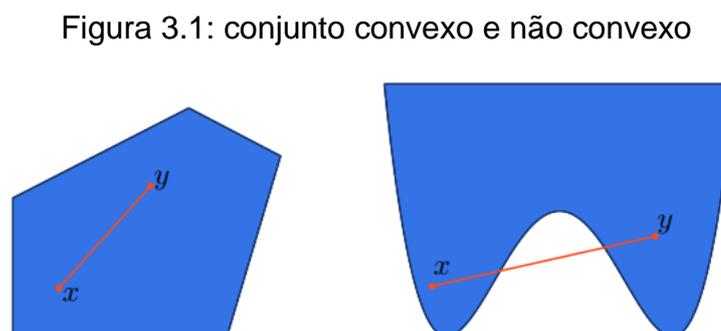
Isto implica que  $f(x^k) \rightarrow f(x^*)$ . Repetindo o argumento acima, obtemos a subsequência  $f(x^k) \xrightarrow{N} f(x^*)$ , com  $x^k \in \Omega$ . Pela unicidade do limite, temos  $f(x^*) = f^* \leq f(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ , o que completa a demonstração.

O Teorema de Weierstrass garante a existência de minimizador. Faremos uso da teoria dos cones para enunciar e demonstrar um teorema que estabelece condições que serão úteis na obtenção do minimizador global de problemas específicos de otimização contínua. A teoria dos cones tem um forte apelo geométrico. Antes de abordá-la, veremos, na próxima seção, conceitos de convexidade, os quais serão de extrema importância neste contexto.

### 3.3 Convexidade

**Definição 3.3:** Um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  é dito convexo quando dados  $x, y \in C$ , o segmento  $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$  estiver inteiramente contido em  $C$ .

A Figura 3.1 representa um conjunto convexo e outro não.



Fonte: Ribeiro e Karas [12]

O Lema 3.1 será importante para a demonstração do Teorema 3.2.

**Lema 3.1:** Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto fechado não vazio. Dado  $z \in \mathbb{R}^n$ , existe  $\bar{z} \in S$  tal que  $\|z - \bar{z}\| \leq \|z - x\| \quad \forall x \in S$ .

Demonstração: Seja  $\alpha = \inf\{\|z - x\| ; x \in S\}$ . Então, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $x^k \in S$  tal que

$$\alpha \leq \|z - x^k\| \leq \alpha + \frac{1}{k}. \quad (3.1)$$

Em particular,  $\|z - x^k\| \leq \alpha + 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo, existe uma subsequência convergente, digamos,  $x^{k'} \rightarrow \bar{z}$ . Sendo  $S$  fechado, temos que  $\bar{z} \in S$ .

Além disso,

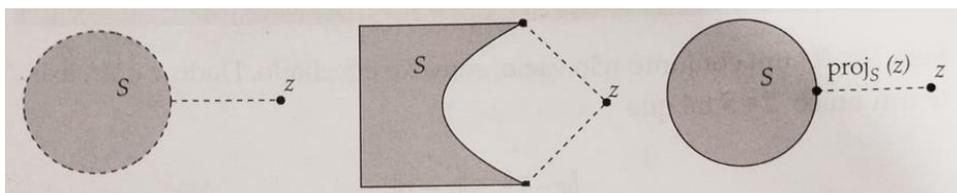
$$\|z - x^{k'}\| \xrightarrow{N'} \|z - \bar{z}\|.$$

Mas pela equação (3.1),  $\|z - \bar{z}\| \rightarrow \alpha$ , de onde segue que  $\|z - \bar{z}\| = \alpha$ , o que completa a demonstração.

O Teorema 3.2 será essencial para demonstrar conceitos prévios da teoria dos cones que servirão para a demonstração das condições de KKT.

**Teorema 3.2:** Sejam  $S \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto não vazio, convexo e fechado,  $z \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{z}$  a projeção de  $z$  sobre o conjunto  $S$ , denotado por  $\bar{z} = \text{proj}_S(z)$  e ilustrado na Figura 3.2, então  $(z - \bar{z})^T(x - \bar{z}) \leq 0 \quad \forall x \in S$ .

Figura 3.2 – Minimização da distância de um ponto a um conjunto



Fonte: Ribeiro e Karas [12]

Demonstração: Considere um ponto arbitrário  $x \in S$ . Dado  $t \in (0,1)$ , pela convexidade de  $S$ , temos que  $(1-t)\bar{z} + tx \in S$ . Portanto,

$$\|z - \bar{z}\| \leq \|z - (1-t)\bar{z} - tx\| = \|z - \bar{z} + t(\bar{z} - x)\|.$$

Assim, usando o Lema 3.1, segue que:

$$\|z - \bar{z}\|^2 \leq \|z - \bar{z} + t(\bar{z} - x)\|^2 = \|z - \bar{z}\|^2 + 2t(z - \bar{z})^T(\bar{z} - z) + t^2\|\bar{z} - x\|^2.$$

Como  $t > 0$ , temos que  $2(z - \bar{z})^T(x - \bar{z}) \leq t\|\bar{z} - x\|^2$ . Passando o limite quando  $t \rightarrow 0$ , temos que

$$(z - \bar{z})^T(x - \bar{z}) \leq 0,$$

Completando a demonstração.

As Definições 3.4 e 3.5 e os Teoremas 3.3 e 3.4 serão de extrema importância para a análise da resolução do problema modelado pela função de mínima variância estabelecida no capítulo anterior.

**Definição 3.4:** Se  $K$  é conjunto convexo,  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ , é uma função convexa se para todo  $x, y \in K$  e  $\lambda \in [0,1]$ , tem-se que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

**Teorema 3.3:** Sejam  $K \subset \mathbb{R}^n$  aberto e convexo,  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  de tal maneira que  $f$  seja continuamente diferenciável em todo o seu domínio, isto é,  $f \in C^1(K)$ . Então  $f$  é convexa se, e somente se,  $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$ , para todo  $x, y \in K$ .

Demonstração: Sejam  $f$  convexa e de classe  $C^1$  como na hipótese do teorema,  $x, y \in K$ ;  $\lambda \in [0,1]$ . Assim, por definição,  $f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x)$ . Portanto,

$$f(x + \lambda(y - x)) - f(x) \leq \lambda(f(y) - f(x))$$

Então,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x) \quad (3.2)$$

Pela definição de derivada,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^T (y - x)$$

Substituindo a igualdade acima na equação (3.2), segue que:

$$\nabla f(x)^T (y - x) \leq f(y) - f(x)$$

Dessa maneira, provamos que  $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$ , para todo  $x, y \in K$ .

Reciprocamente, se  $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$ , para todo  $x, y \in K$  e chamando  $z_\lambda = \lambda y + (1 - \lambda)x$ , temos

$$f(x) \geq f(z_\lambda) + \nabla f(z_\lambda)^T (x - z_\lambda)$$

$$f(y) \geq f(z_\lambda) + \nabla f(z_\lambda)^T (y - z_\lambda)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) &\geq (1 - \lambda)(f(z_\lambda) + \nabla f(z_\lambda)^T (x - z_\lambda)) + \lambda(f(z_\lambda) + \nabla f(z_\lambda)^T (y - z_\lambda)) \\ &= f(z_\lambda) + (f(z_\lambda) + \nabla f(z_\lambda)^T (x - z_\lambda - \lambda x + \lambda z_\lambda + \lambda y - \lambda z_\lambda)) = \\ &= f(z_\lambda) + \nabla f(z_\lambda)^T (\lambda y + (1 - \lambda)x - z_\lambda) = \\ &= f((1 - \lambda)x + \lambda y). \end{aligned}$$

Então,  $(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f((1 - \lambda)x + \lambda y)$

Logo, pela Definição 3.4,  $f$  é convexa, completando a demonstração.

**Definição 3.5:** Uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é semidefinida positiva se, e somente se,  $x^T M x \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Teorema 3.4:** Seja  $K$  um conjunto convexo não vazio de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente duas vezes diferenciável sobre  $K$ , isto é,  $f \in C^2(K)$ . Se  $\nabla^2 f(x)$  é semidefinida positiva para todo  $x \in K$ , então  $f$  é convexa.

Demonstração: Pode ser encontrada em Chiang e Wainwright [1] na Tabela 12.1.

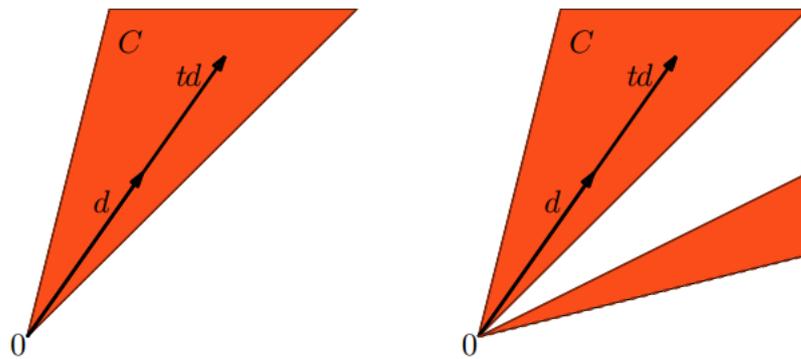
Uma vez verificada a existência de minimizador global em um problema de otimização, é possível obtê-lo, sob determinadas hipóteses, utilizando as condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT). A abordagem que apresentaremos para a obtenção de tais condições é baseada na teoria dos cones, cujo apelo geométrico é a principal característica.

### 3.4 Teoria dos cones

**Definição 3.6:** Um subconjunto não vazio  $C \in \mathbb{R}^n$  é um cone quando para todo  $t \geq 0$  e  $d \in C$  tem-se que  $td \in C$ .

De maneira informal, observa-se que um cone é um conjunto de direções. As imagens abaixo representam um cone convexo e outro não.

Figura 3.3 – Exemplos de cone



Fonte: Ribeiro e Karas [12].

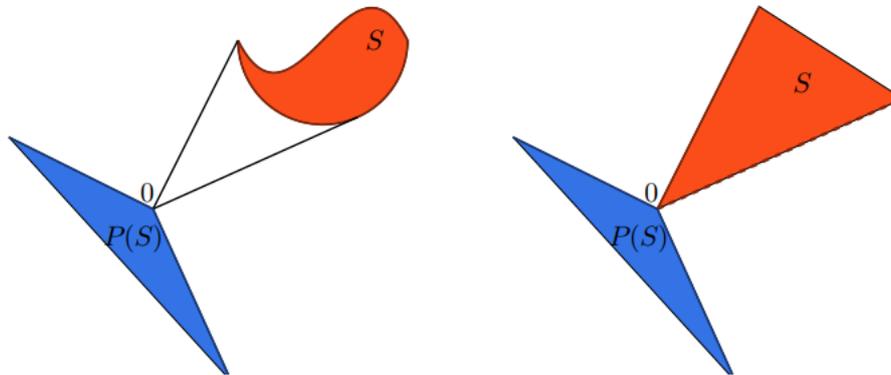
Outro conceito importante para a abordagem da teoria é o polar de um conjunto dado. Geometricamente, em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , o polar é caracterizado pelos vetores que formam um ângulo maior ou igual a  $90^\circ$  com os elementos de um conjunto dado.

**Definição 3.7:** Dado um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$ , definimos o polar de  $S$  por:

$$P(S) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p^T x \leq 0, \forall x \in S\}$$

A Figura 3.4 representa o polar de dois conjuntos.

Figura 3.4 – Exemplos de cone polar



Fonte: Ribeiro e Karas [12]

O conceito de polar de um cone será importante para o Lema 3.2, o qual será usado para a demonstração do Lema 3.7

**Lema 3.2:** Dado  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $P(S)$  é cone, convexo e fechado.

**Demonstração:** Para demonstrar que  $P(S)$  é cone, veremos que, dados  $t \geq 0$  e  $d \in P(S)$ , tem-se que  $td \in P(S)$ . De fato, para todo  $x \in S$ , é possível estabelecer  $(td)^T x = t(d^T x)$ . Visto que  $d \in P(S)$ , segue que  $d^T x \leq 0$  e como  $t \geq 0$ , tem-se que:

$$t(d^T x) \leq 0, \forall x \in S$$

Logo,  $(td)^T x \leq 0$ , assim  $td \in P(S)$ , o que o caracteriza, por definição, como cone.

Vejamos agora a convexidade de  $P(S)$ . Sejam  $u, v \in P(S)$  e  $t \in [0,1]$ . Para todo  $x \in S$ , tem-se que:

$$(1-t)u^T x \leq 0 \text{ e } tv^T x \leq 0$$

Assim,

$$(1-t)u^T x + tv^T x \leq 0$$

$$(1-t)u^T x + tv^T x = ((1-t)u^T + tv^T)x = ((1-t)u + tv)^T x$$

Segue que,  $((1-t)u + tv)^T x \leq 0$ , logo, pela Definição 3.3 de convexidade, o segmento  $[u, v]$  está inteiramente contido em  $P(S)$ .

Vejam agora que  $P(S)$  é fechado. Seja  $(d^k) \subset P(S)$  com  $d^k \rightarrow d$ . Dado  $x \in S$ , temos que  $(d^k)^T x \leq 0$ , assim,  $d^T x \leq 0$ . Logo,  $d \in P(S)$ , complementando a demonstração.

Os Lemas 3.3 e 3.4 serão importantes para demonstrar o Lema 3.5 (Farkas geométrico).

**Lema 3.3:** Considere  $C \subset \mathbb{R}^n$  um cone convexo fechado,  $z \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{z} = \text{proj}_C(z)$ . Então,  $(z - \bar{z}) \in \{\bar{z}\}^\perp \cap P(C)$ , sendo  $\{\bar{z}\}^\perp$  o conjunto de vetores em  $\mathbb{R}^n$  que são ortogonais a  $\bar{z}$ .

Demonstração: Seja  $\bar{z} = \text{proj}_C(z) \in C$ . Pelo Teorema 3.2, segue que

$$(z - \bar{z})^T (x - \bar{z}) \leq 0, \text{ para todo } x \in C. \quad (3.3)$$

Como  $C$  é um cone,  $0$  e  $2\bar{z}$  são elementos de  $C$ . Assim,

$$(z - \bar{z})^T (0 - \bar{z}) \leq 0 \text{ e } (z - \bar{z})^T (2\bar{z} - \bar{z}) \leq 0.$$

$$-(z - \bar{z})^T (\bar{z}) \leq 0 \text{ e } (z - \bar{z})^T (\bar{z}) \leq 0.$$

Logo,  $(z - \bar{z})^T \bar{z} = 0$ . Essa igualdade garante que  $(z - \bar{z})^T \in \{\bar{z}\}^\perp$  e usando o fato de que  $(z - \bar{z})^T (\bar{z}) \leq 0$ , podemos concluir que  $(z - \bar{z}) \in P(C)$ , completando a demonstração.

**Lema 3.4:** Dado  $S \subset \mathbb{R}^n$ , temos  $S \subset P(P(S))$ .

Demonstração: Considere  $x \in S$  e  $C = P(S)$ . Dado  $d \in C$ , temos que  $x^T d \leq 0$ . Logo  $x \in P(C) = P(P(S))$ , completando a demonstração.

O Lema 3.5 (Farkas geométrico) será importante para demonstrar o Lema 3.9.

**Lema 3.5 (Farkas geométrico):** Considere  $C \subset \mathbb{R}^n$  um cone convexo fechado não vazio. Então  $P(P(C)) = C$

Demonstração: Em virtude do lema 3.4, basta mostrar que  $P(P(C)) \subset C$ . Considere então  $z \in P(P(C))$  e  $\bar{z} = \text{proj}_C(z)$ . Vamos provar que  $z = \bar{z}$ . Pelo lema 3.3, temos que  $(z - \bar{z}) \in P(C)$ . Como  $z \in P(P(C))$ , segue que  $(z - \bar{z})^T z \leq 0$ . Usando novamente o Lema 3.3, obtemos:

$$\|z - \bar{z}\|^2 = (z - \bar{z})^T z - (z - \bar{z})^T \bar{z} = (z - \bar{z})z \leq 0$$

Isso implica que  $z = \bar{z}$ , completando a demonstração.

O Lema 3.6 será importante para demonstrar o Lema 3.9.

**Lema 3.6:** Dado os vetores  $v^1, v^2, \dots, v^m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , o conjunto

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^m y_i v^i ; y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

é um conjunto convexo e fechado.

Demonstração: Pode ser encontrada em Ribeiro e Karas [12], no Lema 7.12

### 3.5 Cones importantes para analisar o Teorema de KKT.

A partir de agora, vamos considerar, o problema geral de otimização (P1) que consiste em

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & C_E(x) = 0 \\ & C_\Gamma(x) \leq 0, \end{array}$$

onde  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in E \cup \Gamma$  são funções de classe  $C^2$ . O conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; C_E(x) = 0, C_\Gamma(x) \leq 0\}$$

será o conjunto viável.

Para estabelecer o Teorema de KKT, vamos estudar os cones relacionados com o problema geral de otimização (P1). Alguns desses cones podem ser interpretados como aproximações lineares do conjunto viável.

**Definição 3.8:** Seja  $\bar{x} \in \Omega$ . Uma restrição de desigualdade  $c_i$ , com  $i \in \Gamma$  é dita ativa em  $\bar{x}$  se  $c_i(\bar{x}) = 0$ . Caso  $c_i(\bar{x}) < 0$ , dizemos que  $c_i$  é inativa em  $\bar{x}$ .

Vamos denotar por  $I(\bar{x})$  o conjunto de índices das restrições de desigualdades ativas em um ponto viável  $\bar{x}$ , isto é,

$$I(\bar{x}) = \{i \in \Gamma; c_i(\bar{x}) = 0\}$$

A primeira forma de aproximar o conjunto viável  $\Omega$  é dada na seguinte definição:

**Definição 3.9:** Dado  $\bar{x} \in \Omega$ , definimos o cone viável linearizado de  $\Omega$  em torno de  $\bar{x}$  por:

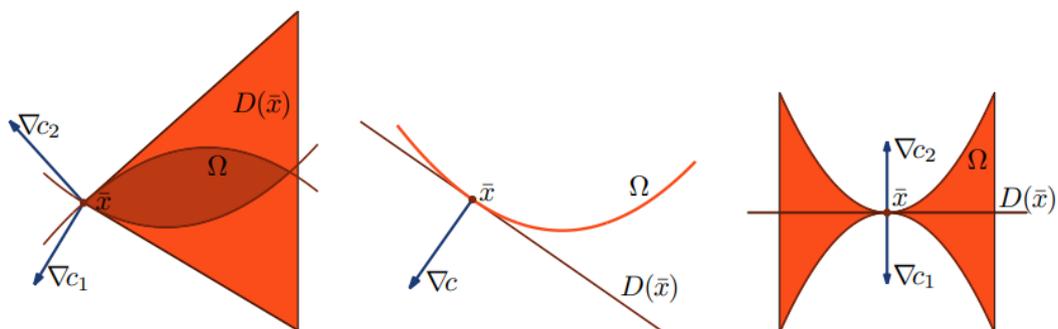
$$D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n; \nabla c_i(\bar{x})^T d = 0, \text{ se } i \in E \text{ e } \nabla c_i(\bar{x})^T d \leq 0, \text{ se } i \in I(\bar{x})\}.$$

Observa-se que o conjunto  $D(\bar{x})$  pode ser interpretado como um conjunto viável, onde as restrições de igualdade e as de desigualdade ativas foram linearizadas. Isso se deve ao fato de que, ao fazer a aproximação de Taylor de 1ª ordem, é válida a aproximação a seguir:

$$\nabla c_i(\bar{x})^T d = c_i(\bar{x}) + \nabla c_i(\bar{x})^T d \approx c_i(\bar{x} + d) \text{ para } i \in E \cup I(\bar{x}).$$

Na Figura a seguir, temos algumas situações que surgem quando consideramos o cone  $D(\bar{x})$ . Na primeira, temos desigualdades e os gradientes ativos são linearmente independentes. Isso confere uma certa regularidade ao conjunto  $\Omega$ , que é bem aproximado por  $D(\bar{x})$  em uma vizinhança de  $\bar{x}$ . Na segunda, temos uma igualdade e podemos dizer que  $D(\bar{x})$  é uma boa aproximação para  $\Omega$ . No entanto, a última situação mostra um caso em que o cone é uma reta, mas o conjunto viável é uma região do plano. Note que, neste caso, os gradientes ativos são linearmente dependentes.

Figura 3.5 - Exemplos ilustrando o cone viável linearizado.



Fonte: Ribeiro e Karas [12]

O Lema 3.7 será importante para estabelecer a relação 3.4.

**Lema 3.7:** O conjunto  $D(\bar{x})$  é um cone convexo fechado e não vazio.

Demonstração: Observa-se que  $D(\bar{x}) = P(S)$ , onde

$$S = \{\nabla c_i(\bar{x}), -\nabla c_i(\bar{x}) ; i \in \varepsilon\} \cup \{\nabla c_i(\bar{x}) ; i \in I(\bar{x})\}$$

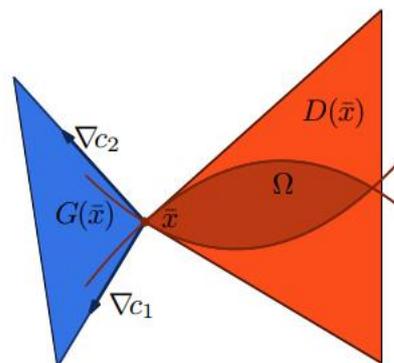
Agora, basta aplicar o Lema 3.2, o que completa a demonstração.

Outro cone relacionado com o problema de otimização (P1) é o cone gerado pelos gradientes das restrições. Mais precisamente, dado  $\bar{x} \in \Omega$  tal que  $E \cup I(\bar{x}) \neq \emptyset$ , definimos o conjunto:

$$G(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i \in E} \lambda_i \nabla c_i(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \mu_i \nabla c_i(\bar{x}) ; \mu_i \geq 0, \forall i \in I(\bar{x}) \right\}$$

Caso  $E \cup I(\bar{x}) = \emptyset$ , consideraremos  $G(\bar{x}) = \{0\}$ . Esse conjunto tem duas propriedades importantes, que provaremos a seguir. Uma delas é que seu polar é justamente o cone  $D(\bar{x})$ . A outra propriedade nos permite afirmar que  $G(\bar{x})$  é um cone convexo fechado.

Figura 3.6 - O cone  $G(\bar{x})$



Fonte: Ribeiro e Karas [12]

Os Lemas 3.8 e 3.9 serão importantes para estabelecer a relação 3.4.

**Lema 3.8:** Dado  $\bar{x} \in \Omega$ , temos que  $D(\bar{x}) = P(G(\bar{x}))$ .

Demonstração: Caso  $E \cup I(\bar{x}) = \emptyset$ , temos  $D(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$  e o resultado segue. No outro caso, considere  $d \in D(\bar{x})$  e  $s \in G(\bar{x})$ . Assim,

$$d^T s = \sum_{i \in E} \lambda_i d^T \nabla c_i(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \mu_i d^T \nabla c_i(\bar{x})$$

Como  $d \in D(\bar{x})$ , temos que  $d^T \nabla c_i(\bar{x}) = 0$  para todo  $i \in E$  e  $d^T \nabla c_i(\bar{x}) \leq 0$  para todo  $i \in I(\bar{x})$ . Assim,  $d^T s \leq 0$ , pois  $\mu_i \geq 0$ . Portanto,  $d \in P(G(\bar{x}))$ . Para provar a inclusão contrária, seja  $d \in P(G(\bar{x}))$ . Então,  $d^T s \leq 0$  para todo  $s \in G(\bar{x})$ . Em particular, para  $i \in E$ , temos que  $\nabla c_i(\bar{x})$  e  $-\nabla c_i(\bar{x})$  são elementos de  $G(\bar{x})$ . Portanto,

$$d^T \nabla c_i(\bar{x}) \leq 0 \text{ e } d^T (-\nabla c_i(\bar{x})) \leq 0,$$

Logo, segue que  $d^T \nabla c_i(\bar{x}) = 0$ . Além disso, para  $i \in I(\bar{x})$ , temos  $\nabla c_i(\bar{x}) \in G(\bar{x})$  e assim  $d^T \nabla c_i(\bar{x}) \leq 0$ . Desta forma,  $d \in D(\bar{x})$ , o que completa a demonstração.

**Lema 3.9:** O conjunto  $G(\bar{x})$  é um cone convexo fechado

Demonstração: O resultado é imediato se  $E \cup I(\bar{x}) = \emptyset$ , pois  $G(\bar{x}) = \{0\}$ . Caso contrário, qualquer elemento do conjunto  $G(\bar{x})$  pode ser escrito como

$$\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i \nabla c_i(\bar{x}) + \sum_{\lambda_i < 0} (-\lambda_i) (-\nabla c_i(\bar{x})) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \mu_i \nabla c_i(\bar{x})$$

Com  $\mu_i \geq 0$  para todo  $i \in I(\bar{x})$ . Desta forma, temos

$$G(\bar{x}) = \{By; y \geq 0\},$$

Onde  $B$  é a matriz cujas colunas são  $\nabla c_i(\bar{x})$ ,  $-\nabla c_i(\bar{x})$  e  $\nabla c_j(\bar{x})$ , com  $i \in E$  e  $j \in I(\bar{x})$ . Pelo lema 3.6, completa-se a demonstração.

Tendo em vista os lemas 3.5 e 3.9, podemos reescrever o lema 3.8 como

$$P(D(\bar{x})) = G(\bar{x}) \tag{3.4}$$

Esta relação é a chave da demonstração das condições de KKT.

Outro cone que também aproxima o conjunto viável  $\Omega$  é o cone formado pelos vetores que tangenciam  $\Omega$ .

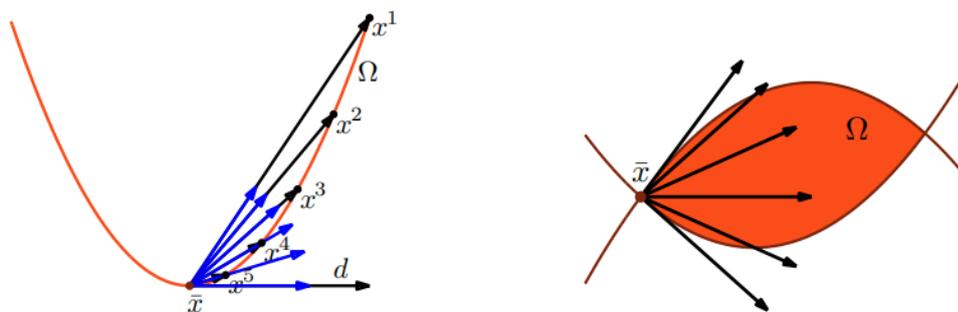
**Definição 3.10:** Uma direção  $d \in \mathbb{R}^n$  é dita tangente a  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  no ponto  $\bar{x} \in \Omega$  quando é nula ou existe uma sequência de pontos viáveis  $(x^k) \subset \Omega$  tal que  $x^k \rightarrow \bar{x}$  e

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}$$

Segue diretamente da definição que, se  $d$  é tangente, o mesmo vale para  $td$ , qualquer que seja  $t \geq 0$ . Assim, o conjunto formado pelos vetores tangentes a  $\Omega$  em  $\bar{x}$  é um cone, chamado de cone tangente a  $\Omega$  no ponto  $\bar{x}$  e denotado por  $T(\bar{x})$ .

Na figura 3.7 ilustramos este conceito. Na esquerda, o conjunto viável é uma curva definida por uma restrição de igualdade, na qual representamos uma direção tangente  $d$  e a convergência indicada na definição. Na outra ilustração o conjunto viável é uma região determinada por duas restrições de desigualdade. Nesta figura aparecem algumas direções tangentes. Note que uma direção que “penetra” no conjunto viável também satisfaz a Definição 3.10.

Figura 3.7 - Direções tangentes



Fonte: Ribeiro e Karas [12]

Temos agora resultados importantes para provar as condições de KKT. Vamos começar com um resultado que será essencial e que pode ser interpretado como uma condição necessária de otimalidade.

**Lema 3.10:** Dado  $\bar{x} \in \Omega$ , temos  $T(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$ .

Demonstração: Considere  $d \in T(\bar{x}), d \neq 0$ . Então existe uma sequência  $x^k \subset \Omega$  tal que  $x^k \rightarrow \bar{x}$  e  $\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}$ . Pela diferenciabilidade de  $c$  segue que  $c_i(x^k) =$

$c_i(\bar{x}) + \nabla c_i(\bar{x})^T(x^k - \bar{x}) + o(\|x^k - \bar{x}\|)$ , para todo  $i \in E \cup I(\bar{x})$ . Considere  $i \in E$  e  $j \in I(\bar{x})$ . Como  $x^k, \bar{x} \in \Omega$ , temos:

$$\nabla c_i(\bar{x})^T \frac{(x^k - \bar{x})}{\|x^k - \bar{x}\|} + \frac{o(\|x^k - \bar{x}\|)}{\|x^k - \bar{x}\|} = 0 \text{ e } \nabla c_j(\bar{x})^T \frac{(x^k - \bar{x})}{\|x^k - \bar{x}\|} + \frac{o(\|x^k - \bar{x}\|)}{\|x^k - \bar{x}\|} \leq 0,$$

Passando o limite, obtemos  $\nabla c_i(\bar{x})^T \frac{d}{\|d\|} = 0$  e  $\nabla c_j(\bar{x})^T \frac{d}{\|d\|} \leq 0$ . Assim,  $d \in D(\bar{x})$ , completando a prova.

### 3.6 Teorema de KKT e convexidade

Nesta seção, vamos enunciar e demonstrar o Teorema de KKT e o Teorema 3.6. Ambos serão aplicados para a determinação do minimizador da função de mínima variância. Antes disso, o Lema 3.11 será usado para demonstrar o Teorema de KKT.

**Lema 3.11:** Se  $x^* \in \Omega$  é um minimizador local do problema, então

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0, \forall d \in T(x^*).$$

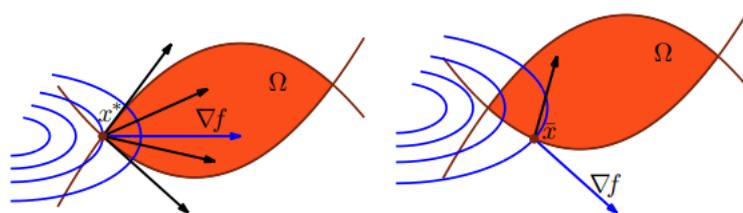
Demonstração: Seja  $d \in T(x^*)$ ,  $d \neq 0$ . Então existe uma sequência  $x^k \subset \Omega$  tal que  $x^k \rightarrow x^*$  e  $\frac{x^k - x^*}{\|x^k - x^*\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}$ . Por outro lado, temos

$$0 \leq f(x^k) - f(x^*) = \nabla f(x^*)^T(x^k - \bar{x}) + o(\|x^k - \bar{x}\|),$$

para todo  $k$  suficientemente grande. Dividindo por  $\|x^k - \bar{x}\|$  e passando o limite, obtemos  $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$ , completando a prova.

Na figura 3.8 ilustramos uma situação que satisfaz as condições do Lema 3.11 e outra onde isto não se verifica.

Figura 3.8 - Relações entre direções tangentes e o gradiente da função objetivo



Fonte: Ribeiro e Karas [12]

O Teorema 3.5 pode ser usado para calcular possíveis minimizadores do problema  $P1$ .

**Teorema 3.5 (KKT):** Seja  $x^* \in \Omega$  um minimizador local do problema e suponha que  $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$ . Existem então vetores  $\lambda^*$  e  $\mu^*$  tais que:

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in \varepsilon} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* \nabla c_i(x^*) \quad (i)$$

$$\mu_i^* \geq 0, \quad i \in \Gamma \quad (ii)$$

$$\mu_i^* c_i(x^*) = 0, \quad i \in \Gamma \quad (iii)$$

Antes da demonstração, é importante destacar que, por definição, um ponto  $x^*$  viável para o problema  $P1$  e que satisfaz as equações (i), (ii) e (iii) é chamado ponto de Karush Kuhn-Tucker (ou KKT) do problema ( $P1$ ) e as equações (i)-(iii) são chamadas condições KKT.

Demonstração: Pelo Lema 3.11, temos  $-\nabla f(x^*)^T d \leq 0$ , para todo  $d \in T(x^*)$ . Assim, usando a hipótese e a relação (3.4), obtemos

$$-\nabla f(x^*)^T \in P(T(x^*)) = P(D(x^*)) = G(x^*).$$

Isto implica que existem vetores  $\lambda$  e  $\mu$  tais que  $\mu \geq 0$  e

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in \varepsilon} \lambda_i \nabla c_i(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i \nabla c_i(x^*)$$

Definindo  $\mu_i^* = \begin{cases} \mu_i, & \text{para } i \in I(x^*) \\ 0, & \text{para } i \in \Gamma \setminus I(x^*) \end{cases}$  e  $\lambda^* = \lambda$ , completamos a prova.

A hipótese sobre os cones  $T(x^*)$  e  $D(x^*)$  feita no teorema 3.5 é chamada de **condição de qualificação**. Essa condição de qualificação foi introduzida por Guignard [5] para dimensão infinita e reformulada para o caso finito por Gould e Tolle [2], onde se estabelece que esta condição é necessária e suficiente para se obter KKT.

Em certos problemas, pode ser difícil encontrar os cones  $T(x^*)$  e  $D(x^*)$  e ainda verificar se a condição  $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$  é satisfeita. Para isso, existem outras condições de qualificação, tais como a independência linear entre os vetores gradientes das funções de restrição. Para o caso em que as restrições de  $P1$  são lineares, é possível verificar que  $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$  é satisfeita. Vejamos tal fato com o teorema a seguir.

Seja  $(P2)$  o problema  $(P1)$  com restrições lineares, isto é,

$$\text{minimizar } f(x)$$

$$\text{sujeito a } Ax = b \text{ com } Mx \leq r,$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $r \in \mathbb{R}^p$ .

**Teorema 3.6:** Se  $x^*$  é um minimizador local do problema  $(P2)$ , então  $x^*$  satisfaz as condições de KKT.

Demonstração: Usando o Lema 3.10. e o Teorema 3.5, basta provar que  $D(x^*) \subset T(x^*)$ . Dado  $d \in D(x^*)$ , temos  $Ad = 0$  e  $Md \leq 0$ . Se  $d = 0$ , temos trivialmente  $d \in T(x^*)$ . Caso  $d \neq 0$ , defina  $x^k = x^* + \frac{1}{k}d$ . Assim,

$$Ax^k = b, Mx^k, x^k \rightarrow x^* \text{ e } \frac{x^k - x^*}{\|x^k - x^*\|} = \frac{d}{\|d\|}.$$

Portanto,  $d \in T(x^*)$ , o que completa a demonstração.

Uma vez verificados os possíveis minimizadores através das condições gerais de KKT, vamos analisar um teorema que garante que, sob hipóteses de convexidade sobre o conjunto viável e a função objetivo, pontos KKT são minimizadores globais de um problema de programação convexa.

Consideremos agora que  $(P1)$  é um problema de programação convexa, isto é, um problema de minimização cuja função objetivo é convexa e cujo conjunto viável é convexo.

**Teorema 3.7:** Se o problema de minimização com restrições de igualdade e desigualdade  $(P1)$  é um problema de programação convexa e em  $x^*$  valem as condições de KKT, então  $x^*$  é minimizador global.

Demonstração: Dado  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; c_E(x) = 0, c_\Gamma(x) \leq 0\}$  e tomamos  $x \in \Omega$ , com  $x \neq x^*$ . Se valem as condições de KKT, existem então vetores  $\lambda^*$  e  $\mu^*$  tais que:

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in E} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* \nabla c_i(x^*)$$

$$\mu_i^* \geq 0, \quad i \in \Gamma$$

$$\mu_i^* c_i(x^*) = 0, \quad i \in \Gamma$$

Temos agora que

$$f(x) \geq f(x) + \sum_{i \in E} \lambda_i^* c_i(x) + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* c_i(x)$$

pois estamos considerando o problema de otimização (P1), no qual tem-se que, pelo conjunto viável,  $c_E(x) = 0, c_\Gamma(x) \leq 0$  e pela condição de  $\mu_i^* \geq 0$ .

Assim, aplicando a desigualdade do Teorema 3.3 às funções  $f, c_E$  e  $c_\Gamma$  em pontos arbitrários  $x \in \Omega$  e em  $x^* \in \Omega$ , segue que:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i \in E} \lambda_i^* (c_i(x^*) + \nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) \\ &\quad + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* (c_i(x^*) + \nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)). \end{aligned}$$

Vamos analisar algumas parcelas do segundo membro da desigualdade acima.

$\lambda_i^* c_i(x^*) = 0 ; i \in E$  pois o conjunto viável considerado vale  $c_E(x) = 0$ . Além disso, por uma das condições de KKT estabelecidas no teorema 3.5, segue que  $\mu_i^* c_i(x^*) = 0 ; i \in \Gamma$

Assim,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in E} \lambda_i^* (c_i(x^*) + \nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* (c_i(x^*) + \nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) \\ &= \sum_{i \in E} \lambda_i^* (\nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* (\nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) \end{aligned}$$

Analisando a outra condição geral de KKT, segue que:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in E} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* \nabla c_i(x^*) = 0$$

Multiplicando por  $(x - x^*)$  em ambos os membros, segue que:

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i \in E} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* \nabla c_i(x^*)^T (x - x^*) = 0$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i \in E} \lambda_i^* (c_i(x^*) + \nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) \\ &\quad + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* (c_i(x^*) + \nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) \\ &= f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i \in E} \lambda_i^* (\nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) \\ &\quad + \sum_{i \in \Gamma} \mu_i^* (\nabla c_i(x^*)^T (x - x^*)) = f(x^*) + 0 \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração, segue que  $f(x) \geq f(x^*)$  para todo  $x \in \Omega$ , ou seja,  $x^*$  é minimizador global do problema.

### 3.7 Aplicando os resultados obtidos na função de mínima variância

Nesta seção, vamos retomar o problema, que será denominado  $P^*$ , que motivou o desenvolvimento de toda a teoria abordada até aqui, o qual consiste em minimizar função objetivo abaixo ao se investir em  $n$  ativos em renda variável.

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + \dots + x_n^2 \sigma_n^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + 2x_1 x_3 \sigma_{13} + \dots + 2x_{n-1} x_n \sigma_{(n-1)n};$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$$

Lembrando que cada variável  $X_i$  representa o peso a ser investido em cada ativo e que os coeficientes  $\sigma_i^2$  e  $\sigma_{(i-1)i}$  representam, respectivamente, a variância e covariância entre o conjunto de dados. Tais coeficientes são constantes reais, intrínsecas a um determinado problema.

Primeiramente, vamos usar o Teorema de Weierstrass. Observa-se que a função objetivo é contínua no conjunto viável, o qual é compacto, pois, cada uma das equações de restrição representa um conjunto fechado e limitado. De fato:

$$0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } 0 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1 \text{ para } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Assim sendo, a função objetivo admite minimizador global.

Vamos agora verificar os candidatos a mínimo global através do Teorema de KKT. Primeiramente, vamos verificar que a condição de qualificação  $P(x^*) = D(x^*)$  é verificada em nosso problema. Para o problema genérico (P1), o Lema 3.10 garante que  $T(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$  dado  $\bar{x} \in \Omega$ . Visto que as restrições de  $P^*$  são lineares, é possível aplicar o Teorema 3.6, o qual implica que  $D(\bar{x}) \subset T(\bar{x})$ .

Sendo a condição de qualificação verificada para o problema  $P^*$ , é possível determinar os pontos candidatos a mínimo global. Basta agora aplicar os pontos KKT de  $P^*$  e aplicar o Teorema 3.7 para garantir que, de fato, os pontos obtidos são minimizadores globais de  $P^*$ .

Primeiramente, vamos verificar a convexidade de  $f$ . Analisemos se  $\nabla^2 f(x)$  é semidefinida positiva, isto é, se a matriz hessiana  $H_n$  do problema  $P^*$  é tal que:

$$x^T H_n x \geq 0$$

Calculemos primeiramente a matriz hessiana  $H_2$  do problema  $P^*$  para duas variáveis:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12}$  ;  $x_1 + x_2 = 1$  e  $x_1, x_2, \geq 0$ .

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = 2A_2$$

Onde  $A_2$  é a matriz de covariâncias para o problema com duas variáveis.

Calculemos agora a matriz hessiana  $H_3$  do problema  $P^*$  para três variáveis:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + x_3^2 \sigma_3^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + 2x_1 x_3 \sigma_{13} + 2x_2 x_3 \sigma_{23}$  ;

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$  e  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .

$$H_3 = \begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & 2\sigma_{23} \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_3^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = 2A_3$$

Onde  $A_3$  é a matriz de covariâncias para o problema  $P^*$  com três variáveis.

Infere-se que para o problema com  $n$  variáveis, a matriz Hessiana  $H_n$  satisfará a igualdade abaixo:

$$H_n = 2A_n$$

Lembrando que  $A_n$  é a matriz de covariâncias para o problema com  $n$  variáveis.

Tomando agora o problema  $P^*$  em sua forma matricial, segue que:

$$f(x) = x^T A_n x$$

Visto que  $f$  representa a variância, a qual é um número real não negativo, segue que

$$f(x) = x^T A_n x \geq 0$$

para todo  $x$  no conjunto viável.

Analisando agora a matriz Hessiana  $H_n$ , segue que:

$$x^T A_n x = x^T \frac{H_n}{2} x$$

Pelo Teorema 3.5, temos que  $\nabla^2 f(x)$  é semidefinida positiva, o que implica que  $f$  é uma função convexa em seu domínio.

Verificadas as hipóteses de convexidade da função objetivo e restrições de  $P^*$ , segue que todo ponto pertencente ao conjunto viável que satisfaz as condições gerais de KKT, presentes no Teorema 3.5, é minimizador global. Em termos práticos, é o ponto que representa a quantidade a ser alocada em cada um dos  $n$  ativos a fim de que a variância seja mínima.

## 4 APLICAÇÃO DA FUNÇÃO MÍNIMA VARIÂNCIA EM AÇÕES DA B3.

Neste capítulo, vamos aplicar a função mínima variância em ações da B3. A aplicação foi baseada em Figueiredo e Zanini [4]. Isso implicará na determinação da carteira com menor risco. Vamos compará-la com outras carteiras cujas especificações serão discutidas ao longo deste capítulo.

### 4.1 Ações consideradas.

Vamos considerar ações da B3 (anteriormente conhecida como BM&FBOVESPA). Trata-se da bolsa de valores do Brasil. Ela é responsável por facilitar a negociação de ações, títulos, *commodities* e outros instrumentos financeiros. A B3 é uma das maiores bolsas de valores do mundo em termos de valor de mercado das empresas listadas e volume de negociação. O principal indicador de desempenho da B3 é o índice Ibovespa B3.

O Ibovespa é o principal indicador de desempenho das ações negociadas na B3 e reúne as empresas mais importantes do mercado de capitais brasileiro. Foi criado em 1968 e, ao longo desses mais de 50 anos, consolidou-se como referência para investidores ao redor do mundo.

Reavaliado a cada quatro meses, o índice é resultado de uma carteira teórica de ativos. É composto pelas ações e *units* (tipo de ativo que combina dois tipos de ações de uma mesma empresa) de companhias listadas na B3 que atendem aos critérios descritos na sua metodologia, correspondendo a cerca de 80% do número de negócios e do volume financeiro do nosso mercado de capitais.

Devido à importância do índice Ibovespa, foram analisadas ações que estavam presentes nele, no segundo quadrimestre de 2022, para aplicar a função mínima variância. Foram consideradas ações de setores (e subsetores) distintos a fim de diversificar a composição em termos da natureza de ação.

As ações analisadas estão presentes na tabela a seguir.

Tabela 4.1 – Ações consideradas

Nome	Código	Atuação	Setor
<b>PETROBRAS</b>	PETR4	Pesquisa. lavra. refinação. processamento. comércio e transporte de petróleo. de seus derivados. de gás natural e de outros hidrocarbonetos fluidos. além das atividades vinculadas à energia.	Petróleo. Gás e Biocombustíveis / Petróleo. Gás e Biocombustíveis / Exploração. Refino e Distribuição
<b>VALE</b>	VALE3	Mineração	Materiais Básicos / Mineração / Minerais Metálicos
<b>JBS</b>	JBSS3		Consumo não Cíclico / Alimentos Processados / Carnes e Derivados
<b>ITAUUNIBANCO</b>	ITUB4	A sociedade tem por objeto a atividade bancária em todas as modalidades autorizadas. inclusive a de operações de câmbio.	Financeiro / Intermediários Financeiros / Bancos
<b>WEG</b>	WEGE3	A WEG SA é uma sociedade de participação não operacional (holding) e também sociedade de comando do Grupo WEG.	Bens Industriais / Máquinas e Equipamentos / Motores . Compressores e Outros
<b>HAPVIDA</b>	HAPV3	Participação. como sócia ou acionista. em outras empresas. predominantemente de assistência médica. bem como a realização de investimentos diretos e a exploração de atividades de prestação de serviços	Saúde / Serv.Méd.Hospit..Análises e Diagnósticos / Serv.Méd.Hospit..Análises e Diagnósticos
<b>LOCALIZA</b>	RENT3	Aluguel de carros e gestão de frotas	Consumo Cíclico / Diversos / Aluguel de carros
<b>GERDAU</b>	GGBR4	Participação e Administração	Materiais Básicos / Siderurgia e Metalurgia / Siderurgia
<b>EQUATORIAL</b>	EQTL3	Empresa holding com atuação no setor elétrico	Utilidade Pública / Energia Elétrica / Energia Elétrica
<b>AMBEV S/A</b>	ABEV3	Fabricação e distribuição de cervejas. refrigerantes e bebidas não carbonatadas e não alcoólicas.	Consumo não Cíclico / Bebidas / Cervejas e Refrigerantes
<b>LOJAS RENNER</b>	LREN3	Loja de Departamentos (Comércio Varejista)	Consumo Cíclico / Comércio / Tecidos. Vestuário e Calçados
<b>RAIADROGASIL</b>	RADL3	Comércio de produtos farmacêuticos. perfumaria e afins.	Saúde / Comércio e Distribuição / Medicamentos e Outros Produtos

<b>TELEF BRASIL</b>	VIVT3	Prestação de serviços de telecomunicações. exploração de serviços de valor adicionado e soluções integradas.	Comunicações / Telecomunicações / Telecomunicações
<b>SUZANO S.A.</b>	SUZB3	Indústria e Comércio de Papel e Celulose	Materiais Básicos / Madeira e Papel / Papel e Celulose
<b>RUMO S.A.</b>	RAIL3	Prestar serviços de transporte de cargas através dos modais ferroviário e rodoviário. dentre outros. isoladamente ou combinados entre si de forma intermodal ou multimodal. entre outros.	Bens Industriais / Transporte / Transporte Ferroviário
<b>BBSEGURIDADE</b>	BBSE3	Participação no capital social de outras sociedades que realizem quaisquer atividades reguladas pela SUSEP e ANS. além de corretagem desses produtos.	Financeiro / Previdência e Seguros / Seguradoras
<b>TOTVS</b>	TOTS3	Prestação de serviços de consultoria. assessoria e desenvolvimento de sistemas informatizados (software). atividades de pesquisa e inovação tecnológica. prestação de serviços relacionados à gestão.	Tecnologia da Informação / Programas e Serviços / Programas e Serviços
<b>GRUPO NATURA</b>	NTCO3	Gestão de participações societárias em sociedades que desenvolvam suas atividades principais no ramo de beleza.	Consumo não Cíclico / Produtos de Uso Pessoal e de Limpeza / Produtos de Uso Pessoal
<b>EMBRAER</b>	EMBR3	Projeto. desenvolvimento. fabricação. comercialização de aeronaves e sistemas e fornecimento de suporte e serviços de pós-venda.	Bens Industriais / Material de Transporte / Material Aeronáutico e de Defesa
<b>AZUL4</b>	AZUL	Transporte e Logística	Bens Industriais / Transporte / Transporte Aéreo

Fonte: Autor/ B3

## 4.2 Análise das variações das ações consideradas.

Nas duas tabelas a seguir, encontram-se as variações das 20 ações presentes na tabela acima. Para calculá-las, levou-se em conta a variação mensal em percentual do preço de fechamento ajustado (preço de fechamento após os ajustes para todos os eventuais desdobramentos e distribuições de dividendos aplicáveis) de cada ativo. Os valores foram obtidos a partir dos dados históricos disponíveis no site oficial da B3.

Para a variação de janeiro, analisou-se a variação em percentual do preço de fechamento ajustado do último dia de negociação do mês de dezembro de 2021 (30/12/2021) e o último dia de negociação do mês de janeiro de 2022 (31/01/2022). Para a variação de fevereiro, foram analisados os dados mencionados do último dia de negociação do mês de janeiro de 2022 (31/01/2021) e o último dia de negociação do mês de fevereiro de 2022 (25/02/2022).

Tabela 4.2 – Variação percentual mensal

Período/ Ativo	PETR4	VALE3	JBSS3	ITUB4	WEGE3	HAPV3	RENT3	GGBR4	EQTL3	ABEV3
<b>Janeiro</b>	13,71	3,73	-7,54	20,91	-2,49	21,97	10,57	2,13	1,55	-2,92
<b>Fevereiro</b>	5,10	14,11	2,28	0,55	-8,58	-4,19	-1,84	-8,55	11,37	1,54
<b>Março</b>	-1,62	3,60	3,73	7,89	18,61	-2,39	6,22	21,01	6,41	1,32
<b>Abril</b>	-9,48	-12,88	1,67	-13,14	-13,68	-25,93	-13,36	-9,22	-5,77	-5,71
<b>Mai</b>	-0,73	3,51	-5,94	9,59	-15,71	-23,38	8,65	4,29	-7,25	-2,27
<b>Junho</b>	-7,09	-11,19	-11,26	-13,34	4,26	-18,60	-8,88	-23,38	-3,95	-5,57
<b>Julho</b>	22,27	-8,89	1,11	4,19	6,01	12,61	9,92	9,44	8,63	11,42
<b>Agosto</b>	-2,69	-7,53	-7,36	9,27	0,89	18,18	5,57	-4,66	-2,54	2,28
<b>Setembro</b>	-11,92	5,95	-14,23	6,63	7,18	6,46	-0,38	1,67	7,94	2,95
<b>Outubro</b>	1,84	-1,77	-1,65	10,47	32,85	0,65	16,42	8,60	15,06	1,78
<b>Novembro</b>	-10,57	27,68	-11,66	-14,47	-3,18	-33,33	-14,80	22,60	-8,26	-0,50
<b>Dezembro</b>	-8,10	3,70	-0,27	-3,85	-1,26	-2,31	-11,48	-6,97	-1,92	-8,79
<b>Retorno médio</b>	-0,77	1,67	-4,26	2,06	2,07	-4,19	0,55	1,41	1,77	-0,37
<b>Desvio padrão (risco)</b>	9,51	10,56	5,68	10,28	12,42	16,43	9,74	12,06	7,23	4,84

Fonte: Autor/ Dados históricos do site oficial da B3.

Tabela 4.3 – Variação percentual mensal

Período/ Ativo	LREN3	RADL3	VIVT3	SUZB3	RAIL3	BBSE3	TOTS3	NTCO3	AZUL4	EMBR3
Janeiro	15,06	-4,69	3,09	-1,51	-12,05	11,52	1,50	-10,74	19,91	-18,17
Fevereiro	-9,96	0,86	0,99	-6,98	-0,77	-0,43	13,69	1,98	-13,42	-13,34
Março	8,61	2,48	7,02	0,15	19,68	10,94	10,08	12,53	-5,42	-15,00
Abril	-13,64	-12,57	-0,93	-10,05	-11,75	-0,51	-12,12	-28,64	-8,15	-5,01
Maiο	12,00	-1,34	-4,02	7,84	8,00	5,70	-11,26	-11,40	-8,47	-10,34
Junho	-14,96	-7,02	-7,82	-7,12	-9,67	-3,42	-18,01	-18,52	-38,44	-10,20
Julho	11,80	9,27	-5,23	-2,82	9,83	11,67	13,37	16,10	-5,25	2,71
Agosto	4,67	3,72	-7,76	-8,35	15,22	-2,45	8,27	-7,45	40,58	17,62
Setembro	4,38	4,55	-0,95	-1,72	-8,66	-3,15	2,31	-0,83	-4,12	-7,09
Outubro	11,83	15,65	1,37	22,30	19,93	8,40	13,52	4,55	2,02	7,09
Novembro	-25,08	-12,39	-7,89	-0,09	-12,10	5,49	-6,94	-21,67	-23,87	-1,45
Dezembro	-11,53	2,91	0,79	-9,24	-4,37	7,63	-10,50	-0,85	-10,34	5,61
Retorno médio	-0,57	0,12	-1,78	-1,47	1,11	4,28	0,33	-5,41	-4,58	-3,97
Desvio padrão (risco)	12,50	7,67	4,41	8,33	11,70	5,46	10,68	12,48	18,28	9,74

Fonte: autor/ Dados históricos do site oficial da B3.

Existem muitas maneiras de se estabelecer a escolha de quais ativos alocar capital para investimento. É possível considerar a análise fundamentalista, a qual consiste em analisar a saúde financeira da empresa. É possível também considerar a análise técnica, cujo foco principal é estudar linhas de tendências através de gráficos.

Para a escolha dos ativos que serão aplicados à função de variância mínima, vamos considerar aqueles que apresentaram variação média positiva ao longo dos períodos analisados. Observando as Tabelas 4.2 e 4.3, percebe-se que 10 ativos possuem o retorno esperado positivo e outros 10, negativo. Na Tabela 4.4, estão presentes aqueles que apresentaram retorno médio positivo.

### 4.3 Composição da carteira que oferece o menor risco a partir de 10 ações.

Tabela 4.4 – Ações com retorno médio positivo

mês/ ação	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3
Janeiro	3,73	20,91	-2,49	10,57	2,13	1,55	-4,69	-12,05	11,52	1,50
Fevereiro	14,11	0,55	-8,58	-1,84	-8,55	11,37	0,86	-0,77	-0,43	13,69
Março	3,60	7,89	18,61	6,22	21,01	6,41	2,48	19,68	10,94	10,08
Abril	-12,88	-13,14	-13,68	-13,36	-9,22	-5,77	-12,57	-11,75	-0,51	-12,12
Mai	3,51	9,59	-15,71	8,65	4,29	-7,25	-1,34	8,00	5,70	-11,26
Junho	-11,19	-13,34	4,26	-8,88	-23,38	-3,95	-7,02	-9,67	-3,42	-18,01
Julho	-8,89	4,19	6,01	9,92	9,44	8,63	9,27	9,83	11,67	13,37
Agosto	-7,53	9,27	0,89	5,57	-4,66	-2,54	3,72	15,22	-2,45	8,27
Setembro	5,95	6,63	7,18	-0,38	1,67	7,94	4,55	-8,66	-3,15	2,31
Outubro	-1,77	10,47	32,85	16,42	8,60	15,06	15,65	19,93	8,40	13,52
Novembro	27,68	-14,47	-3,18	-14,80	22,60	-8,26	-12,39	-12,10	5,49	-6,94
Dezembro	3,70	-3,85	-1,26	-11,48	-6,97	-1,92	2,91	-4,37	7,63	-10,50
Retorno Médio	1,67	2,06	2,07	0,55	1,41	1,77	0,12	1,11	4,28	0,33
Desvio Padrão	10,56	10,28	12,42	9,74	12,06	7,23	7,67	11,70	5,46	10,68

Fonte: Autor/ Dados históricos do site oficial da B3.

Com a ferramenta do Solver (Excel), é possível aplicar a função de mínima variância aos dados da tabela acima. A carteira de menor risco (que será denotada por C1) obtida pelo solver é a seguinte (os valores são aproximados):

Tabela 4.5 – Percentual segundo a variância mínima

Ação	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3
Percentual	16,22%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	18,73%	13,98%	0,00%	51,07%	0,00%

Fonte: Autor.

Estes percentuais implicam em, aproximadamente, um retorno de 2,81% e risco de 4,66%. Isto significa que ao longo de um mês, o investidor espera que sua carteira se valorize em pelo menos 2,81%. Quanto ao risco desta carteira, o investidor está sujeito a uma volatilidade média de aproximadamente 4,66%.

#### 4.4 Comparação da carteira de menor risco.

Vamos agora comparar a carteira C1 com outras 4 carteiras. Vamos considerar a carteira ingênua, C2, composta por 10% investido em cada ação presente na Tabela 4.4.

Tabela 4.6 – Percentual de 10% em cada ativo

Ação	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3
Percentual	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%

Fonte: Autor.

Estes percentuais implicam em, aproximadamente, um retorno 1,54% de e risco de 6,9%. Isto significa que ao longo de um mês, o investidor espera que sua carteira se valorize em pelo menos 1,54%. Quanto ao risco desta carteira, o investidor está sujeito a uma volatilidade média de aproximadamente 6,9%.

A carteira C2 não faz parte da fronteira eficiente. De fato, vamos considerar as carteiras C3 e C4.

C3 é a carteira que tem o retorno máximo para um risco aproximado de 6,90%. Aplicando a ferramenta do Solver do Excel, a qual também possibilita encontrar valores ótimos de percentuais dado o risco (ou o retorno médio), a quantidade que cada ativo irá representar na carteira C3 são os seguintes:

Tabela 4.7 – Percentual de retorno máximo dado um risco aproximado.

Ação	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3
Percentual	0%	0%	38,5%	0%	0%	0%	0%	0%	61,5%	0%

Fonte: Autor.

Estes percentuais implicam em, aproximadamente, um retorno médio de 3,43% e risco de 6,90%.

C4 é a carteira que tem o menor risco para um retorno aproximado de 1,54%. Os percentuais que irão compor a carteira C4 são os presentes na tabela a seguir:

Tabela 4.8 – Percentual de risco mínimo dado um retorno médio aproximado.

Ação	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3
Percentual	26,08%	0%	0,00%	0%	0%	0%	49,50%	0%	24,42%	0%

Fonte: Autor.

Estes percentuais implicam em, aproximadamente, um retorno de 1,54% e risco de 5,08%.

Visto que as carteiras C3 e C4 são mais pertinentes em relação à carteira C2, esta não pertence à fronteira eficiente.

Para a carteira C5, vamos considerar a maximização do índice de *Sharpe*, o qual é calculado pela seguinte razão: a diferença do retorno médio de uma carteira e a taxa de retorno em renda fixa e o risco associado à carteira em questão. O índice de *Sharpe* é dado pela seguinte fórmula:

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

$R_p$  é o retorno esperado da carteira,  $R_f$  o retorno em renda fixa e  $\sigma_p$  o risco da carteira.

Um índice de *Sharpe* positivo indica que o retorno do investimento foi superior ao retorno livre de risco. Quanto maior o valor, melhor o ajuste do retorno pelo risco. Se o índice for negativo, significa que o investimento teve um desempenho pior do que a taxa de retorno livre de risco. Um índice de *Sharpe* igual a zero sugere que o investimento gerou um retorno exatamente igual ao retorno livre de risco, após ajustar pelo risco.

No conjunto de dados da Tabela 4.4, nota-se facilmente que a carteira que apresenta o maior índice de *Sharpe* é composta apenas pelo ativo que tem o maior o maior retorno e o menor risco. Trata-se da ação BBSE3. Ao investir todo o capital nessa ação, compomos a carteira C5 e esperamos um retorno de 4,28% e risco de 5,46%.

Considerando as variações, segundo os parâmetros presentes na Tabela 4.2, do índice IBOVESPA, segue que o mesmo apresentou um retorno esperado de 0,58% e risco de 6,14%.

Vamos comparar os resultados obtidos nesta seção a partir da tabela a seguir:

Tabela 4.9 – Comparação de 5 carteiras e o índice Ibovespa

Investimento	Risco	Retorno
C1	4,66%.	2,81%
C2	6,90%.	1,54%
C3	6,90%.	3,43%
C4	5,08%.	1,54%
C5	5,46%.	4,28%
Ibovespa	6,14%.	0,58%

Fonte: Autor.

Observa-se que as carteiras C1 e C3 são as opções mais pertinentes de investimento. C2 possui um risco igual a de C3 mas retorno esperado inferior. A carteira C4 possui risco maior e retorno menor em relação à carteira C1. A carteira C5 possui o maior índice de *Sharpe*. Muitos investidores consideram suas estratégias de investimento a partir de tal índice. No nosso exemplo, a carteira C5 que maximizou o índice de *Sharpe* é composta apenas por 1 ativo. Esse fator não favorece o argumento da diversificação, o qual vimos que é crucial para investimentos em renda variável e portanto, descartamos a carteira C5.

#### 4.5 Desempenho de cada mês ao longo do primeiro trimestre do ano de 2023.

Vejamos agora o desempenho que as cinco carteiras, determinadas através das seções anteriores, teriam tido ao longo do primeiro trimestre do ano de 2023. Será feita a análise com rebalanceamentos mensais a partir dos novos dados obtidos em cada período.

##### 4.5.1 Janeiro 2023

Ao fim do último dia de 2022 de negociações na B3, as carteiras C1, C2, C3, C4 e C5 seriam determinadas e estão rerepresentadas na Tabela 4.10

Tabela 4.10 – Percentual investido para as carteiras em janeiro de 2023.

Carteira	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3
C1 (mínima variância)	16,22%	0%	0%	0%	0%	18,73%	13,98%	0%	51,07%	0%
C2 (ingênua, 10% em cada ativo.)	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
C3 (retorno máximo dado um risco.)	0%	0%	38,5%	0%	0%	0%	0%	0%	61,5%	0%
C4 (risco mínimo dado um retorno.)	26,08%	0%	0,00%	0%	0%	0%	49,50%	0%	24,42%	0%
C5 (maximização do índice de Sharpe.)	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	0%

Fonte: Autor.

A Tabela 4.11 representa a variação mensal de janeiro de 2023 do índice Ibovespa e das 10 ações presentes na Tabela 4.10

Tabela 4.11 – Desempenho de 10 ações e Ibovespa em janeiro de 2023

Variação mensal	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3	IBOV
Janeiro	6,33%	1,32%	-0,7%	11,30%	11,47%	3,7%	4,68%	-1,24%	12,07%	8,87%	3,37%

Fonte: Autor.

Consideremos os dados da Tabela 4.11. Se, no primeiro dia de negociação de janeiro de 2023 da B3, fossem investidos os percentuais presentes na Tabela 4.10, teríamos tido os seguintes resultados aproximados para cada uma das cinco carteiras analisadas:

Tabela 4.12 – Resultado de investimento em janeiro de 2023

Investimento	Retorno
C1	8,54%
C2	5,78%
C3	7,16%
C4	6,91%
C5	12%
Ibovespa	3,37%

Fonte: Autor.

#### 4.5.2 Fevereiro 2023

Ao fim do último dia de janeiro de 2023 de negociações na B3, as carteiras C1, C3, C4 e C5 teriam sido rebalanceadas com os novos dados de janeiro de 2023. Os percentuais rebalanceados estão representados na Tabela 4.13.

Tabela 4.13 – Percentual investido para as carteiras em fevereiro de 2023.

Carteira	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3
C1 (mínima variância)	16,70%	0%	0%	0%	0%	24,50%	10,5%	0,8%	47,5%	0%
C2 (ingênua, 10% em cada ativo.)	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
C3 (retorno máximo dado um risco.)	0%	0%	38,75%	0%	0%	0%	0%	0%	61,25%	0%
C4 (risco mínimo dado um retorno.)	26,65%	0%	0,00%	0%	0%	8%	45,85%	0%	19,5%	0%
C5 (maximização do índice de Sharpe.)	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	0%

Fonte: Autor.

Com tais percentuais investidos, teriam sido esperados os seguintes retornos e riscos:

Tabela 4.14 – Retorno e risco esperados para fevereiro de 2023

Investimento	Risco	Retorno
C1	4,72%	3,18%
C2	6,72%	1,86%
C3	6,72%	3,71%
C4	5,12%	1,86%
C5	5,84%	4,88%
Ibovespa	5,95%	0,79%

Fonte: Autor.

A tabela abaixo representa a variação mensal de fevereiro de 2023 do índice Ibovespa e das 10 ações consideradas na Tabela 4.13.

Tabela 4.15 – Desempenho de 10 ações e Ibovespa em fevereiro de 2023

Variação mensal	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RADL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3	IBOV
Fevereiro	-9,72%	0,39%	2,41%	-6,28%	-12,55%	-9,24%	-8,66%	-2,29%	-9,45%	8,87%	-7,49%

Fonte: Autor.

Consideremos os dados da Tabela 4.15. Se, no primeiro dia de negociação de fevereiro de 2023 da B3, tivessem sido investidos os percentuais presentes na Tabela 4.13, teríamos tido os seguintes resultados aproximados para cada uma das cinco carteiras analisadas:

Tabela 4.16 – Resultado de investimento em fevereiro de 2023

Investimento	Retorno
C1	-9,3%
C2	-6,46%
C3	-4,85%
C4	-9,14%
C5	-9,44%
Ibovespa	-7,49%

Fonte: Autor.

#### 4.5.3 Março 2023

Para a análise de março de 2023, serão consideradas as ações presentes na Tabela 4.15 com exceção da RADL3. Com os novos dados obtidos, essa ação passou a ter retorno esperado negativo a partir dos dados de janeiro de 2022 até fevereiro de 2023.

Ao fim do último dia de fevereiro de 2023 de negociações na B3, as carteiras C1, C2, C3, C4 e C5 teriam sido rebalanceadas com os novos dados de fevereiro de 2023. Os percentuais rebalanceados estão representados na Tabela 4.17.

Tabela 4.17 – Percentual investido para as carteiras em março de 2023.

Carteira	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3
C1 (mínima variância)	18,94%	12,03%	6,43%	0%	0%	24%	0%	38,6%	0%
C2 (ingênua, 11,11% em cada ativo.)	11,11%	11,11%	11,11%	11,11%	11,11%	11,11%	11,11%	11,11%	11,11%
C3 (retorno máximo dado um risco.)	0%	0%	38,4%	0%	0%	0%	0%	61,6%	0%
C4 (risco mínimo dado um retorno.)	29,21%	9,24%	3,98%	10,43%	0%	39,19%	0%	7,95%	0%
C5 (maximização do índice de Sharpe.)	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	0%

Fonte: Autor.

Com tais percentuais investidos, teriam sido esperados os seguintes retornos e riscos:

Tabela 4.18 – Retorno e risco esperados para março de 2023

Investimento	Risco	Retorno
C1	5,51%	2,33%
C2	6,87%	1,43%
C3	6,87%	3,7%
C4	5,89%	1,43%
C5	6,73%	3,86%
Ibovespa	6,11%	0,2%

Fonte: Autor.

A tabela abaixo representa a variação mensal de março de 2023 do índice Ibovespa e das 10 ações consideradas na Tabela 4.17.

Tabela 4.19 – Desempenho de 10 ações e Ibovespa em março de 2023

Variação mensal	VALE3	ITUB4	WEGE3	RENT3	GGBR4	EQTL3	RAIL3	BBSE3	TOTS3	IBOV
Março	-5,90	-6,98	-2,71	3,55	-41,65	-3,77	-7,25	6,02	7,02	-2,91%

Fonte: Autor.

Considerando os dados da tabela 4.19, se no primeiro dia de negociação de março de 2023 da B3, tivessem sido investidos os percentuais presentes na tabela 4.17, teríamos tido os seguintes resultados aproximados para cada uma das cinco carteiras analisadas:

Tabela 4.20 – Resultado de investimento em março de 2023

Investimento	Retorno
C1	-1,69%
C2	-0,76%
C3	-1,69%
C4	-0,26%
C5	-4,96%
Ibovespa	-2,91%

Fonte: Autor.

#### 4.6 Análise do desempenho das 5 carteiras no primeiro trimestre de 2023

Vejamos na Tabela 4.21 o desempenho em relação ao retorno que teria sido obtido em cada mês, do primeiro trimestre de 2023, das cinco carteiras analisadas.

Tabela 4.21 – Resumo dos investimentos feitos no primeiro trimestre em 2023.

Investimento	Janeiro	Fevereiro	Março	Média mensal
C1	8,54%	-9,3%	-1,69%	-0,82%
C2	5,78%	-6,46%	-0,76%	-0,48%
C3	7,16%	-4,85%	-1,69%	0,21%
C4	6,91%	-9,14%	-0,26%	-0,83%
C5	12%	-9,44%	-4,96%	-0,80%
Ibovespa	3,37%	-7,49%	-2,91%	-2,34%

Fonte: Autor.

A carteira que apresentou melhor desempenho médio ao longo dos três meses analisados é a C3, que foi estabelecida a partir do retorno máximo dado um nível específico de risco. O desempenho médio negativo do índice Ibovespa reflete um cenário desfavorável para investimentos em renda variável no primeiro trimestre de 2023.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos estudantes se questionam sobre a importância do uso da matemática. É verdade que sua utilização não está necessariamente aplicada às questões práticas da vida real. É importante ressaltar, contudo, que considerar aplicações concretas de interesse geral pode ser um fator importante para que o aluno se mobilize a fim de favorecer um aprendizado significativo.

Neste contexto, este trabalho propôs fazer uma reflexão sobre o uso da matemática em uma aplicação que se baseia em conceitos básicos da teoria de Markowitz. Modelou-se uma função que determina o percentual a ser investido a fim de se otimizar investimentos feitos em ações da B3. Este percentual determina a carteira que apresenta o menor risco. Visto que este estudo pode ser usado em renda variável, a consideração do risco é de extrema importância.

Uma vez a função modelada, fez-se necessário o uso de ferramentas da otimização contínua para resolver o problema proposto. Os principais teoremas usados para a resolução foram enunciados e demonstrados com base, principalmente, na teoria dos cones e conceitos de convexidade.

Na sequência, aplicou-se a função modelada a um problema real que consistiu em determinar a carteira ótima, em relação ao risco mínimo, a partir da análise de ações cotadas na B3. Os dados foram obtidos a partir de variações, em percentual, mensais ao longo do ano de 2022. Os resultados da carteira de risco mínimo foram comparados com outras 4 carteiras e o índice Ibovespa. O período de comparação foi o 1º trimestre de 2023. De uma maneira geral, foi um período negativo para investimentos em ação. O Índice Ibovespa obteve o pior retorno dentre as cinco carteiras analisadas, das quais, apenas a C3 (que foi estabelecida a partir do retorno máximo dado um nível específico de risco) obteve variação positiva. As demais obtiveram retorno negativo.

Por fim, aplicou-se os percentuais a fim de simular o retorno real que investidor teria tido ao longo de cada mês no primeiro trimestre de 2023.

É importante ressaltar que a análise de dados passados não garante retorno. A perspectiva da análise estudada neste trabalho se baseia em termos quantitativos para prever o comportamento do mercado. É preciso levar em consideração outros

fatores, macro e microeconômicos, que determinam as variações do mercado de ações, como por exemplo, Política Monetária, crescimento econômico, inflação, taxas de câmbio, desempenho empresarial, dividendos, entre outros.

Este trabalho foi de extrema importância para minha formação pois me permitiu enxergar a possibilidade da aplicação de conceitos, básicos e avançados, de matemática a situações-problema que podem ser pertinentes na vida de muitas pessoas. Foi importante também no sentido de ter vivenciado uma situação em que me possibilitou revisar, a fim de se consolidar e aprender significativamente, conceitos de otimização e entender sua importância no cenário da Economia.

## 6 REFERÊNCIAS

- [1] CHIANG, Alpha C; WAINWRIGHT, Kevin. **Matemática para Economistas.**
- [2] COULD, F. J.; TOLLE, J. W. **A necessary and sufficient qualification for constrained optimization. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v.20, p164-172, 1971.**
- [3] ELTON, Edwin J.; GRUBER, Martin J.; BROWN, Stephen J.; GOETZMANN, William N. **Moderna Teoria de carteiras de análise de investimentos.**
- [4] FIGUEIREDO, Antonio Carlos; ZANINI, Francisco Antonio Mesquita. **As teorias de carteira de Markowitz e de Sharpe: Uma aplicação no mercado brasileiro de ações entre julho/95 e junho/2000.**
- [5] GUIGNARD, M. **Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v.7, p.232-241, 1969.**
- [6] HILLIER Frederick S; LIEBERMAN Gerald J. **Introduction to operations research.**
- [7] ISOTON, Camila. **Condições necessárias e suficientes de otimalidade para problemas com um e vários objetivos.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2014.
- [8] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise, volume 2.**
- [9] LIZANA, Rufián Antonio; GARZÓN, Gabriel Ruiz; GÓMEZ, Rafaela Osuna. **Métodos de Optimización Matemática, manual para resolución de problemas de optimización aplicados a la toma de decisiones empresariales.**
- [10] MARKOWITZ, Harry Max. **Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments.**
- [11] MARTÍNEZ, José Mario; SANTOS, Sandra Augusta. **Métodos computacionais de otimização.**
- [12] RIBEIRO, Ademir Alves; KARAS, Elizabeth Wegner. **Otimização contínua, aspectos teóricos e computacionais.**

[13] SANTIAGO, Ana Elisa Esteves. **Evolução histórica dos problemas de otimização e o seu tratamento no ensino secundário português nos séculos XX e XXI.** Tese de doutorado, *Universidad de Salamanca*, 2008.

[14] Site da B3, Bolsa de valores do Brasil. <https://www.b3.com.br>