INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Ana Paula Mendes da Silva Roschel

A TEORIA DE VAN HIELE E O ENSINO DA GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS: CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dissertação

São Paulo
2024

Ana Paula Mendes da Silva Roschel

A TEORIA DE VAN HIELE E O ENSINO DA GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS: CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Instituto Federal de Educação,Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Profa Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta

São Paulo
2024

DEDICATÓRIA

A todos os meus professores, da Educação Infantil à Pós-graduação, que foram de fundamental importância na minha vida, em todos os âmbitos - pessoal, acadêmico, e em minha construção enquanto profissional no campo da educação.

À professora Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta, pela sua paciência, conselhos e ensinamentos, essenciais no processo de ampliação e desenvolvimento do meu olhar, que resultou na presente dissertação.

À minha família e amigos, que estiveram presentes - direta ou indiretamente, em todos os momentos de minha trajetória formativa.

A todos vocês, o meu eterno carinho e gratidão.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, e por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do percurso.

Aos meus pais, ao meu marido e às minhas filhas, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização desta dissertação.

Aos meus professores, pelas correções e ensinamentos, que me permitiram apresentar um salto de melhora no meu desempenho ao longo de todo processo de formação profissional.

“As nuvens mudam sempre de posição, mas são sempre nuvens no céu. Assim devemos ser todo dia, mutantes, porém leais com o que pensamos e sonhamos; lembre-se, tudo se desmancha no ar, menos os pensamentos”.

Paulo Beleki

RESUMO

A presente dissertação tem por objetivo, analisar a abordagem do conceito de congruência de triângulos contido nos livros de Matemática de 8° ano do Ensino Fundamental anos finais selecionados por nós em nosso trabalho, e, sugerir estratégias que colaborem para que o processo de aprendizagem se dê de forma mais significativa. Nossa pesquisa aborda o conceito de Congruência de Triângulos no Ensino Fundamental anos finais, mais precisamente no 8° ano, em dois livros didáticos distribuídos no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2024 e no livro Matemática e Realidade utilizado em minha prática como referência. A contribuição pretendida compõe-se de estratégias que visam colaborar com o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos pautados na Teoria de Van Hiele. Para fundamentar a pesquisa, trazemos tanto a história da Geometria no Brasil, quanto a sua importância, observada em documentos oficiais brasileiros, assim como apresentamos a teoria de Van Hiele, cuja proposta discorre sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Palavras-chave: Livro Didático. Pensamento geométrico. Congruência de Triângulos.

ABSTRACT

The present dissertation aims to analyze the approach to the concept of triangle congruence as presented in the 8th-grade mathematics textbooks for the final years of elementary school that we selected for our study, and to suggest strategies that facilitate a more meaningful learning process. Our research addresses the concept of triangle congruence in the final years of elementary school, specifically in the 8th grade, using two textbooks distributed through the Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2024 and the book "Mathematics and Reality," which is used as a reference in my practice. The intended contribution consists of strategies designed to support the development of students' geometric thinking, based on Van Hiele's Theory. To underpin the research, we include both the history of geometry in Brazil and its importance as observed in official Brazilian documents, and we present Van Hiele's Theory, which discusses the development of geometric thinking.

Keywords: Textbook. Van Hiele Model. Triangle congruency.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Comparação dos textos introdutórios 23
Figura 2 – Pierre Marie Van Hiele 27
Figura 3 – Pierre e Dina van Hiele-Geldof (1956) 28
Figura 4 – Werkboeken, uitgegeven bij Muusses 29
Figura 5 – Criação e utilização de um modelo matemático 30
Figura 6 – Sugestões para exercícios de congruência de triângulos 43
Figura 7 – Abertura do Capítulo- Triângulos e quadriláteros 44
Figura 8 – Exercícios da página 137 - Desafios da Matemática 46
Figura 9 – Exercício 7- Desafios da Matemática 48
Figura 10 – Exercício 8 - Desafios da Matemática 49
Figura 11 – Exercício 9- Desafios da Matemática 50
Figura 12 – Exercício 10 - Desafios da Matemática 51
Figura 13 – Exercício 11 - Desafios da Matemática 52
Figura 14 – Introdução do capítulo sobre congruência de triângulos 53
Figura 15 – Dobradura: Mediana e Baricentro (Araribá Conecta) 56
Figura 16 – Dobradura - Bissetrizes e Incentro (Araribá Conecta) 56
Figura 17 – Dobradura: Altura e Ortocentro (Araribá Conecta) 57
Figura 18 – Exercício 1- Araribá Conecta 58
Figura 19 – Exercícios 2 e 3 59
Figura 20 – Exercício 4 e 5 - Araribá Conecta 60
Figura 21 – Representação da mesa de bilhar - Matemática e Realidade 61
Figura 22 – Experimento proposto pelo autor para definir Congruência de Triângulos- Matemática e Realidade 62
Figura 23 – Transformações no plano e figuras congruentes 63
Figura 24 – Exercício 1- Matemática e Realidade 64
Figura 25 – Exercícios 3, 4 e 5 - Matemática e Realidade 64
Figura 26 – Exercícios 2 e 6- Matemática e Realidade 65
Figura 27 – Exercícios 26, 27 e 28 : Matemática e Realidade 66
Figura 28 – Exercício 29 - Matemática e Realidade 67
Figura 29 – Exercício 30 - Matemática e Realidade 67
Figura 30 – Exercício 31- Matemática e Realidade 68
Figura 31 – Tabela dos exercícios conforme as Fases de Aprendizagem. 70
Figura 32 – Enunciados - Fase de Aprendizagem 1 71
Figura 33 – Exercício 1 73
Figura 34 – Tabela 2 – Tabela de auxílio na resolução do exercício 01. 73
Figura 35 – Sugestão de Resumo 74
Figura 36 – Possível resposta do aluno enquadrado no nível 4. 74

Figura 37 – Exemplo de apresentação do vocabulário ao aluno. 75
Figura 38 – Exercício 29-b da página 81 do livro Matemática e Realidade. 76
Figura 39 – Modelo de caderneta: Bloquinho do saber geométrico. 76
Figura 40 – Exercício 10 77
Figura 41 – Exercício 29 c 78
Figura 42 – Exemplo de diagrama. 79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela: Ordem lógica 35

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
FURB	Fundação Universidade Regional de Blumenau
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
ULBRA	Universidade Luterana do Brasil

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	**12**
1	**REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**	**16**
2	**A HISTÓRIA DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL**	**18**
3	**A GEOMETRIA NA BNCC E NOS PCNS**	**22**
4	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**	**26**
4.1	**A Teoria de Van Hiele**	**26**
4.1.1	Pierre Marie Van Hiele	**26**
4.1.2	Modelo matemático e educativo	**30**
4.1.3	O Modelo de Van Hiele	**31**
4.1.4	Os Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico	**32**
4.1.5	Características dos Níveis	**34**
4.1.6	A Evolução de Níveis	**36**
4.1.7	Processo de aprendizagem	**37**
4.1.8	Fases de aprendizagem segundo o modelo de Van Hiele	**38**
5	**RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS**	**42**
5.1	**Análise de Obras para o Ensino de Congruência de Triângulos no 8º Ano do Ensino Fundamental Anos Finais**	**42**
5.1.1	Obra: Desafios da matemática com Ênio Silveira.	**43**
5.1.2	Obra: Araribá Conecta Matemática - 8.º ano	**52**
5.1.3	Obra: Matemática e Realidade - 8° ano	**61**
5.1.4	Considerações	**68**
5.1.4.1	Fase de Aprendizagem: Informação ou investigação.	**70**
5.1.4.2	Fase de Aprendizagem: Orientação dirigida.	**72**
5.1.4.3	Fase de Aprendizagem: Explicação.	**74**
5.1.4.4	Fase de Aprendizagem: Orientação livre.	**77**
5.1.4.5	Fase de Aprendizagem: Integração.	**78**
6	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**80**
	REFERÊNCIAS	**81**

INTRODUÇÃO

Em nossa dissertação, realizamos a análise da abordagem da geometria, mais especificamente, do conceito de Congruência de Triângulos, em dois livros didáticos distribuídos no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) no ano de 2024 e no livro Matemática e Realidade utilizado em minha prática como referência , procurando contribuir com sugestões e estratégias que possam desenvolver o pensamento geométrico segundo a Teoria de Van Hiele.

Para tal, destacamos como objetivo primeiro, restringir a análise a livros didáticos de Matemática - 8° ano do Ensino Fundamental anos finais, que pertençam ao catálogo da PNLD 2024 e ao livro didático adotado pela instituição da qual faço parte do quadro docente, e isso posto, identificar o modo como o pensamento geométrico desenvolve-se no decorrer do processo de aprendizado dos alunos, culminando então em estratégias que favoreçam a aprendizagem tendo como horizonte a Teoria de Van Hiele.

No Brasil, apesar de não ser o único, o livro didático é, sem dúvida, o material mais usado em sala de aula, ocupando um lugar fundamental na educação, uma vez que é uma ferramenta central, que, por ser facilitadora da aprendizagem, tornou-se um suporte imprescindível à prática pedagógica.

É sabido que o responsável pela utilização do livro didático é o professor, e devemos considerar que a ele cabe elaborar estratégias que tornem o aprendizado mais significativo, motivador e eficiente.

Cientes de que o livro didático, para uma quantidade muito grande de professores, é a única ferramenta disponibilizada para a organização e planejamento de suas aulas, é essencial complementar o uso inclusive com outras ferramentas, visando a melhoria desta sequência de uso.

Sendo este um consenso, traz à luz a necessidade dos livros didáticos proporcionarem em seu conteúdo, resultante pesquisas, clareza e credibilidade, para alunos e professores, ambos envolvidos no processo de ensino aprendizagem.

No Brasil possuímos documentos norteadores que estabelecem que todas as crianças e jovens do país serão educados, independentemente da sua idade, origem, raça, religião, sexo ou qualquer outro fator que comprometa o direito à educação, são eles a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Lei de Diretrizes e Bases (LDB).

A BNCC é um documento de caráter normativo que delimita um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais aos estudantes, em seu desenvolvimento, ao longo da trajetória na Educação Básica, e para isso pretende alcançar a igualdade de oportunidades, identificando as aprendizagens básicas que as crianças e os jovens devem desenvolver durante o ensino básico.

A BNCC propõe que se desenvolvam dez competências gerais que se inter-relacionam na construção de conhecimentos e habilidades e na formação de atitudes e valores.

A matemática é considerada pela BNCC importante área acadêmica para que os alunos resolvam problemas, investiguem, formulem, comuniquem ideias e desenvolvam projetos que lhes permitam aplicar conceitos e métodos de forma significativa, para tal indica cinco unidades temáticas, entre elas a geometria que possui como finalidade do desenvolvimento do pensamento geométrico (investigar propriedades, estabelecer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes).

Segundo os estudos de Lorenzato (1995) e Pavanello (1993), no Brasil, o ensino de geometria viveu as mazelas da falta de importância que lhe é devida no ensino básico e tanto mais na formação de professores, o que acarretou reformulação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1998), cujo intuito de redimensionar a relevância da questão acima posta, logrou angariar maior destaque e assim a geometria passou a ter sua importância largamente reconhecida.

Com sua inserção na grade curricular, evidenciou-se a dificuldade dos alunos, que, não raro, relataram ter pouco ou nenhum contato com a geometria. Este ponto catalisou o interesse em realizar o presente estudo, que busca formas de menorizar dificuldades contornáveis e conduzir o ensino da geometria gerando motivação na aprendizagem, por meio de um processo de ensino e aprendizagem que vise uma maior coerência com as necessidades dos alunos, principalmente no ensino fundamental anos finais. Veremos mais a adiante como a Teoria de Van Hiele tem a contribuir com a problemática exposta.

A teoria de Van Hiele baseia-se nos trabalhos realizados pelos professores holandeses, Dina van Hiele-Geldof, e seu marido, Pierre Marie Van Hiele, que investigaram o desenvolvimento do pensamento pela perspectiva da geometria.

Os Van Hiele notaram que, os problemas e tarefas apresentadas aos alunos requeriam vocabulário, conceitos ou conhecimento de propriedades além do nível de pensamento da criança, que em sua desproporção, acarretavam em um processo de ensino e aprendizagem que conduz à falha.

Segundo os Parâmetros Nacionais Curriculares, tem-se que:

> [. . .] os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (Brasil, 1998, p.51).

Então, é por meio da geometria, que podemos observar, interpretar e representar os espaços e formas que compõem o mundo onde vivemos, e portanto, seu papel no desenvolvimento do raciocínio matemático e na resolução de problemas mostra-se fundamental.

Ainda segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, “uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem [. . .]”(Brasil, 1998, p. 128). A aquisição desses conhecimentos permite ao aluno obter uma aprendizagem mais significativa, tornando-os autônomos e ajudando-os na resolução de problemas cotidianos.

Pautados na teoria de Van Hiele, respeitando os níveis e as fases de aprendizagem, podemos ajudar os alunos no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Segundo Nasser e Sant'anna (2017) mesmo quando os alunos apresentam desempenho satisfatório, ainda podemos identificar dificuldades no processo dedutivo, na exposição de argumentação, justificativa ou prova, as quais podem ser explicadas pela hierarquia de níveis da teoria de Van Hiele.

A teoria de Van Hiele descreve um modelo para o desenvolvimento do pensamento geométrico, em uma sequência de níveis de compreensão e fases de aprendizagem. O modelo sustenta que o aprendiz avança sequencialmente do nível inicial - ou básico, assim chamado de visualização, onde o espaço é meramente observado e as propriedades das figuras não são explicitamente reconhecidas, até o nível de rigor, em que demonstra-se maior preocupação com aspectos abstratos formais da dedução. Esta progressão é auxiliada por experiências instrucionais apropriadas a cada nível.

Para Pierre van Hiele, os problemas e tarefas apresentados às crianças necessitam de vocabulário, conceitos ou conhecimento de propriedades além do nível de pensamento da criança, revelando uma falta de harmonia entre o ponto de partida - do ensino, e o de chegada - no aprendizado em matemática. Em outras palavras, as crianças de mesma idade pensam em diferentes níveis, diferindo entre si, e o professor, no emprego de palavras e teorias, difere inclusive do modo como as mesmas são encontradas nos livros didáticos.

O primeiro capítulo é destinado à revisão bibliográfica, onde realizamos um levantamento de dissertações, livros e artigos, além de documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Iniciamos realizando um levantamento bibliográfico de dissertações e artigos que abordam a teoria e/ou a congruência de triângulos. Para tal, utilizamos plataformas de busca, como Google Acadêmico e periódicos disponibilizados pela CAPES. Através desse processo, pudemos ter uma visão do que é discutido academicamente sobre esses temas.

No Capítulo 2 trataremos da história da geometria no Brasil, o contexto no qual ela surgiu e como desenvolveu-se até a atualidade, com breves comentários sobre os movimentos e reformas na educação, desde a aplicação militar até os debates atuais, que buscam sua inserção e ressaltam sua importância.

No Capítulo 3, apresentaremos a parte de nosso estudo que debruçou-se sobre documentos oficiais brasileiros, a saber, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cuja função é reger as propostas curriculares, mais especificamente no Ensino Fundamental anos finais, no que tange, em específico, ao ensino de geometria.

A fundamentação teórica está disposta no Capítulo 4, iniciado com uma sucinta biografia de Pierre Marie Van Hiele, seguido da teoria de Van Hiele, que propõe níveis de raciocínio e fases de aprendizagem.

No Capítulo 5, abordamos o ensino e a aprendizagem de maneira progressiva e integrada, indo além do currículo tradicional para incluir o método de ensino e a continuidade da experiência escolar.

Reconhecendo a importância da escolha dos recursos didáticos apropriados, após uma análise detalhada no capítulo sobre congruência de triângulos nos livros didáticos destinados ao 8º ano do Ensino Fundamental, conforme o catálogo do PNLD-2024 selecionados por nós, além do livro adotado pela instituição onde atuo como docente, sugerimos estratégias didáticas alinhadas aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme a teoria de Van Hiele.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nosso estudo se concentra na análise da congruência de triângulos, um tema abordado no 8º ano do Ensino Fundamental anos finais.

Buscamos, com nosso trabalho, contribuir com os professores em sua prática diária, elaborando estratégias alinhadas com os níveis de raciocínio geométrico, baseadas na Teoria de Van Hiele, em atividades encontradas em obras didáticas atuais.

Iniciamos realizando um levantamento bibliográfico de dissertações e artigos que abordassem a teoria e/ou a congruência de triângulos e para tal utilizamos plataformas de busca como Google Acadêmico e periódicos disponibilizados pela CAPES[1]. Através desse processo, pudemos ter uma visão do que é discutido academicamente sobre esses temas.

Tendo ciência da importância do estudo da geometria, realizamos a leitura dos documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), relacionando-os à história do ensino de geometria no Brasil, a elaboração e a execução das leis e projetos em vigência.

O abandono nas últimas décadas, sofrido pelo ensino da Geometria e a defasagem de conhecimento acerca deste conteúdo, por parte de alunos e professores nos motivou na escolha de nosso do tema de nosso estudo.

> O gradual abandono do ensino da Geometria, verificado nestas últimas décadas, no Brasil, é um fato que tem preocupado bastante os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas, principalmente após a promulgação da Lei 5692/71 (Pavanello, 1993, p. 7).

A leitura de Pavanello (1993) definiu a necessidade de constar em nosso trabalho um capítulo que tratasse da história da geometria, especificamente, no Brasil.

Ainda no contexto da história da geometria no Brasil, nos dedicamos à leitura da dissertação de Gomes (2023) que propõe uma série de atividades para o ensino de quadriláteros. Essas atividades foram elaboradas com o suporte de materiais concretos e baseadas no Modelo de Visualização Geométrica de Van Hiele.

Nessa dissertação foi abordada a história do ensino da geometria no Brasil e sua relevância nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), fonte de interesse para nossa pesquisa.

Estudamos, também, relacionados a essa temática, o artigo de Teixeira e Jardim (2019) onde o objetivo principal foi relacionar o currículo de geometria na educação básica ao desenvolvimento do pensamento geométrico por Van Hiele.

A leitura desse estudo foi importante na elaboração das sugestões em que foi realizada considerando sempre as habilidades e as competências estabelecidas para o ensino de geometria no 8° ano do ensino fundamental anos finais.

[1] https://www.periodicos.capes.gov.br/consultaip.php

Para embasar nossa pesquisa sobre o ensino da geometria no 8.º ano do Ensino Fundamental, consultamos diversas fontes relevantes. Pesquisamos revistas especializadas como a Quadrante, uma publicação periódica da Associação de Professores de Matemática (APM), que serve como um espaço de investigação em Educação Matemática. Nessa revista, encontramos o artigo de Caldatto e Pavanello (2015), que oferece uma análise elucidativa sobre a evolução do ensino da geometria no Brasil, contribuindo significativamente para nossa compreensão do contexto histórico.

Adicionalmente, examinamos a pesquisa de Carvalho (2000). Este trabalho forneceu *insights* valiosos sobre as reformas educacionais que influenciaram o ensino de geometria no Brasil.

Ao revisar dissertações e artigos relacionados à Teoria de Van Hiele, encontramos diversos trabalhos que corroboram nossos objetivos. Por exemplo, o artigo de Villiers (2010) destaca as dificuldades que os alunos enfrentam ao aprender geometria de maneira tradicional e discute as implicações teóricas na concepção de atividades de aprendizagem.

Villiers compara experiências em países como Rússia e África do Sul, ressaltando que o ensino de geometria no Ensino Fundamental não atende às demandas do Ensino Médio, o que evidencia a necessidade de revisar o currículo geométrico de acordo com os conceitos de Van Hiele.

Essa leitura também nos proporcionou uma reflexão sobre a prova de teorias na geometria e sobre como criar oportunidades para que alunos de todos os níveis de pensamento geométrico realizem, por meio de argumentação intuitiva ou visual, funções destinadas à prova, como explicação, descoberta e verificação.

Reconhecendo a relevância dos idealizadores da teoria, dedicamos uma seção do Capítulo de fundamentação teórica a Pierre Van Hiele. Infelizmente, não encontramos informações detalhadas sobre Dina Van Hiele-Geldolf, esposa de Pierre.

Para enriquecer nosso conhecimento, traduzimos um artigo bibliográfico em homenagem póstuma a Pierre Marie Van Hiele (1909-2010), de autoria de Broekman e Verhoef (2012), dado não haver versões em português.

Além disso, o recente trabalho acadêmico de Cordeiro (2019), apresenta uma proposta baseada na habilidade de visualização, conforme o modelo de Van Hiele e a Base Nacional Comum Curricular. Este estudo analisa materiais já disponíveis em livros didáticos e orientou nossos objetivos, levando-nos a examinar os livros didáticos disponíveis e oferecer sugestões de estratégias alinhadas ao modelo de Van Hiele.

Por fim, a obra de Jaime e Gutiérez (1990), leitura necessária na identificação das fases do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Essa leitura foi fundamental para a escrita da fundamentação teórica de nossa pesquisa.

2 A HISTÓRIA DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

As origens da Geometria (do grego *medir a terra*) parecem coincidir com as necessidades do dia-a-dia. Partilhar terras férteis às margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros, são algumas das muitas atividades humanas que dependeram sempre de operações geométricas, assim como descrito por Pavanello (1989):

> É difícil precisar quando o homem começou a desenvolver o conhecimento geométrico, o que parece é que foi construído de forma empírica, como resposta às necessidades de ordens práticas da comunidade, como a necessidade de demarcação de terras e a construção de moradias mais avançadas para abrigar homens, animais e alimentos. (Pavanello, 1989, p.21).

É indiscutível que a geometria está intrinsecamente ligada à capacidade criativa, evidenciando a habilidade de compreensão em várias esferas da vida. Por exemplo, por descrições espaciais, é possível orientar-se no planeta, no continente, na cidade e até mesmo dentro de edifícios. A capacidade de abstração necessária para a compreensão espacial é observável na leitura, sendo fundamental para o desenvolvimento da percepção espacial em crianças.

Além disso, o movimento do corpo está relacionado aos princípios geométricos, e a comunicação humana pode ser afetada por ruídos se a espacialidade não for comunicada de forma objetiva e clara, permitindo que o interlocutor visualize o que está sendo transmitido. Assim, a geometria não se restringe apenas à sua aplicação na ciência exata, mas também estabelece interrelações importantes com a comunicação e as relações humanas.

O interesse pelo estudo da geometria no Brasil não é nada recente, e se dá pela dificuldade que muitos professores e estudantes enfrentam. Pavanello (1993), Pavanello (1989) , dentre outros, realizaram pesquisas ora sobre o conhecimento dos alunos, ora sobre o conhecimento dos professores.

Durante o período de 1549, com a chegada do primeiro governador-geral, Tomé de Souza, e dos padres da Companhia de Jesus do Brasil, até 1759, a educação no Brasil esteve predominantemente associada à catequese realizada pelos jesuítas. É importante ressaltar que, antes da chegada dos membros da nobreza portuguesa, o principal objetivo era a catequização dos indígenas.

Somente após a chegada dos membros da nobreza, aqueles que professavam a fé cristã e possuíam nobreza passaram a ter acesso a uma educação que incluía disciplinas como língua portuguesa, aritmética, música e treinamento em algumas profissões específicas, conforme descrito por Lima (1975).

Em meio a conflitos de interesses crescentes à época da reforma protestante, os jesuítas, enquanto católicos, foram, em 1759, expulsos pelo Marquês de Pombal, recém-chegado ao poder de Portugal, com o discurso de que a educação fornecida por eles não mais atenderiam aos interesses da coroa portuguesa, e na esteira de sua a expulsão, houve a implementação do modelo de Aulas Régias, que consistia no ensino isolado de cada

disciplina, não mais por área do saber.

A educação brasileira à época ainda estruturava-se, e tal medida causou desestabilização que veio a qualificá-la como retrocesso, devido, entre outros fatores, à falta tanto de profissionais habilitados para o ensino, quanto de estrutura física para acomodação ou mesmo de planejamento pedagógico, o que não impediu que as aulas régias se mantivessem, e assim passou-se então à divisão da área de ensino da matemática em três campos: aritmética, álgebra e geometria.

A reestruturação de Portugal após sua independência do domínio espanhol estendida ao Brasil priorizou os setores ligados à economia e aos militares, sendo que foi por meio de uma Carta Régia, que em 1738, o ensino militar foi tornado obrigatório para todos os oficiais, e este tinha por base a matemática e a geometria, fato que efetivou o ensino destas disciplinas no Brasil.

O ano de 1822, marcado pela Independência que deu fim ao Brasil colônia, foi quando se fundaram cursos superiores nas áreas de direito, engenharia e medicina, o que ocasionou a necessidade de aulas avulsas que auxiliassem os alunos no seu ingresso, já que possuíam a matemática como pré-requisito, e em especial a geometria.

Segundo D'Ambrosio (1999, p.14) "com a Proclamação da República, em 1889, inicia-se uma fase que, do ponto de vista matemático e científico, em geral, pouca inovação trouxe ao país", somente em 1920 com a chegada ao Brasil do Movimento Internacional de Reforma do Ensino de Matemática, percebeu-se alguma alteração de proporções significativas.

A comissão designada por este movimento, tinha como objetivo inicialmente apenas a coleta de dados, que com o passar do tempo ampliou-se para a sugestão de modificações no ensino secundário, dentre as quais, Carvalho (2000, p. 420) esmiuçou destacar:

1) Tornar predominante o ponto de vista psicológico, de forma que o ensino não dependa apenas dos conteúdos ensinados, atendendo às expectativas dos alunos;

2) Que os conteúdos a serem ensinados tenham, de alguma forma, aplicação nas demais disciplinas;

3) O ensino de matemática deve estar subordinado às finalidades da escola moderna.

Estas recomendações, segundo Carvalho (2000, p. 420) , geraram outras, por suas vezes mais específicas, dentre as quais, algumas estavam relacionadas diretamente ao ensino de geometria:

1) Fusão da aritmética, da álgebra e da geometria;

2) Introdução precoce do estudo de funções enfatizando interpretação gráfica e geométrica;

3) O abandono da didática rígida de Euclides;

4) Introdução de noções de cálculo integral e diferencial de forma intuitiva, baseando-se em métodos geométricos;

5) Maior ênfase ao ensino de desenho geométrico;

6) Introdução às aulas de laboratório;

7) Utilização do método histórico no desenvolvimento da matemática.

A partir da década de 1930, o Brasil procurou, influenciado pelas sugestões da comissão, implementar um ensino baseado nas orientações dadas, houve, porém, muita resistência dos professores defensores da escola tradicional.

Uma mudança mais significativa ocorreu em 1931, com a Reforma Francisco Campos, que fixou em sete anos a duração para o ensino secundário, e voltou à proposta unificadora do saber matemático e seu ensino passou a objetivar em um campo único de conhecimento, geometria e álgebra, aritmética e trigonometria, além, claro, dos pontos já estabelecidos anteriormente, como o desenvolvimento do raciocínio lógico e de outras faculdades intelectuais. Para o ensino da geometria, a orientação era de que a metodologia empregada fosse centrada em uma abordagem de caráter intuitivo e experimental.

Essa nova abordagem de ensino sofreu inúmeras críticas e percalços, destacando-se a suposta inabilidade atribuída aos professores, que, na ausência total e completa de cursos de atualização ou de formação continuada, não tiveram a eles ofertados subsídios práticos que dessem o devido suporte para a alteração curricular de fato. Cabe acrescentar que os professores com formação condizente só puderam se formar a partir da criação das Universidades de São Paulo e do Brasil, esta segunda que posteriormente veio a se tornar a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), em 1934 e 1935, respectivamente. Portanto, sublinha-se que a Reforma Francisco Campos foi implementada com professores não habilitados e sem o devido material didático, o qual só veio a surgir posteriormente a ela.

> No início da década de 30, não existem cursos para a formação do magistério secundário — que só se tornarão realidade com a criação da Universidade de São Paulo e a do Distrito Federal, em 34 e 35 respectivamente — e os critérios para a seleção de professores para esse nível de ensino nas escolas oficiais, embora existam (provas escritas e orais, defesa de tese, etc.), não são eficientes (Pavanello, 1989, p.117).

Na década de 1960, influenciados pelas reformas de outros países, com destaque para os Estados Unidos e a França, inicia-se um processo significativo de mudanças no ensino da matemática, tanto que há a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1961), a qual estabeleceu novos rumos para a geometria e a matemática como um todo.

Com a promulgação da Lei 5.692/71, a escola secundária experimentou a democratização preconizada pelo acesso universal. Tornando-se acessível a uma parcela maior de

jovens brasileiros e com a liberdade concedida na escolha dos programas educacionais, o estudo da matemática acabou sendo quase restrito à álgebra e à aritmética. Segundo Pavanello (1989, 1993), esse ato jurídico foi um dos fatores que relegou o estudo da geometria a um grau de abandono que perdurou por mais de meio século, até meados de 2010. Isso se deveu à reformulação da educação primária e média e à profissionalização, focadas na qualificação do trabalho em resposta às necessidades do modelo econômico adotado.

A Lei 5.692/71, ao flexibilizar o currículo, permitiu que as escolas deixassem de lado conteúdos considerados menos importantes, entre eles a geometria. Esse processo foi agravado pela falta de materiais didáticos adequados e pela formação deficiente dos professores, que não estavam preparados para ensinar a disciplina de forma integrada ao novo currículo.

Não sem considerar que durante as décadas de 1980 e 1990, a democracia restabelecida no Brasil, percebe-se, a intenção do resgate do ensino da geometria por parte da classe política, este movimento, porém não obteve sucesso diante da problemática da formação docente; os professores responsáveis por ministrar as aulas de geometria na educação básica estiveram relegados à ausência de cursos de capacitação - ilustrando a fragilidade do sistema educacional brasileiro até então, pois até meados dos anos 1990 os poucos professores aptos para a tarefa eram por certo autodidatas em sua formação continuada.

Este breve e sucinto panorama histórico não visa aprofundar-se, e sim oferecer subsídios para a compreensão dos eixos que atravessam o campo de heranças político-administrativas de nosso país, quais os elementos que condicionaram o labor pedagógico da matemática através do tempo, para que então sim, haja compreensão, e se projete com precisão, quais os rumos da pesquisa, que em sua intenção de avanço nas melhorias possíveis no ensino de matemática, em específico, da geometria, obriga-se a balancear de onde viemos, onde estamos e onde almejamos chegar após o vislumbre deste acúmulo histórico.

Consoante à pesquisa, o ensino de matemática e geometria no Brasil flui por entre ideias educacionais desenvolvidas em outros países. Tais ideias são resultantes de políticas públicas e interrelacionam-se com atividades políticas, sociais e econômicas, como bem retratam as autoras do artigo “Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais” (Caldatto; Pavanello, 2015, p.126).

3 A GEOMETRIA NA BNCC E NOS PCNS

Neste capítulo, estudaremos o quanto importa a geometria ao verificar sua recorrência em dois grandes pilares oficiais brasileiros que documentam e regem as propostas curriculares, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e, conforme já explicitado, recortamos este interesse especificamente em relação ao Ensino Fundamental anos finais.

Os PCNs são uma coleção de documentos desenvolvidos para ajudar na criação dos projetos educacionais e propostas curriculares das escolas brasileiras que oferecem o Ensino Fundamental, e também para "[. . .] reflexão e discussão de aspectos do cotidiano da prática pedagógica, a serem transformados continuamente pelo professor" (Brasil, 1998, p.9), e assim o papel que desempenha é o de ponto de referência para o ensino neste estágio escolar.

A BNCC, diferentemente, é composta pelas diretrizes que estabelecem um conjunto de objetivos de aprendizagem, consideradas essenciais para serem desenvolvidas ao longo de todo percurso de escolaridade do indivíduo, iniciando-se na educação infantil, passando pelo ensino fundamental e chegando até o ensino médio.

O objetivo da BNCC em si, é o de garantir uma base comum para a promoção do desenvolvimento integral de cada indivíduo no Brasil por meio de dez competências gerais estabelecidas para a Educação Básica (Brasil, 2017c). Assim, estabelece-se o conhecimento básico necessário para serem compostos os currículos de todas as escolas brasileiras. Na página oferecida pelo ministério de Educação e Cultura - MEC[1] encontramos:

> [. . .] A Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

No Brasil, o ensino de matemática orienta-se segundo a organização do currículo que segmenta-se em ciclos escolares, a saber, atualmente do 2º ao 5º ano, antiga 1ª à 4ª série, e em sequência, do 6º ao 9º ano, outrora da 5ª à 8ª série.

Se ressaltam que a geometria é um campo útil para desenvolver no aluno habilidades de argumentação e demonstração, além de auxiliá-lo na desenvoltura do raciocínio que visa compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo à sua volta.

A BNCC propõe que os alunos devam interpretar e descrever, representar e argumentar para que se construa a comunicação matemática e que para isso, percorra-se linguagens diversas, ao estabelecer por entre elas relações, além de várias representações matemáticas.

As diretrizes da BNCC em matemática estão alinhadas com uma tendência global de incluir um eixo de processos que visa garantir um desenvolvimento direcionado das

[1] http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

habilidades e competências matemáticas dos alunos que dialogue com todas as áreas de conhecimento e ao longo de todos os anos da formação básica.

Para os anos finais do ensino fundamental, encontra-se expresso que os conteúdos geométricos são construídos com representações de localização e/ou movimento de objetos no plano e no espaço, inclusive, claro, o plano cartesiano.

No entanto, é necessário dar continuidade para que se consolidem os conhecimentos anteriormente adquiridos, principalmente em relação à compreensão das características e propriedades das figuras geométricas, suas construções com o uso de materiais manipuláveis e tecnologias e também suas aplicações em outras áreas do conhecimento. Tendo isto em vista, a aprendizagem se beneficiará por estar mais articulada a elementos, cuja concretude a tornará mais significativa.

Selecionamos um quadro comparativo contido no artigo “ORIENTAÇÕES DO BNCC E PCN: uma análise da geometria dos anos finais do Ensino Fundamental”, escrito por Costa e Silva (2019) , o qual mostra que o texto existente na BNCC não contradiz o excerto encontrado nos PCNs, muito pelo contrário, o mesmo complementa e inclusive atualiza o valor dado à consideração da realidade em torno dos alunos.

Figura 1 – Comparação dos textos introdutórios

Comparação dos textos introdutórios.	
BNCC (Anos Finais)	**PCN (Anos Finais)**
A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.	As questões relacionadas com as formas e relações entre elas, com as possibilidades de ocupação do espaço, com a localização e o deslocamento de objetos no espaço, vistos sob diferentes ângulos são tão necessárias hoje quanto o foram no passado.
Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes.	Situações quotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica etc., demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente.
As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.	Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo.
Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras.	Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Fonte: Costa e Silva (2019).

Ao confrontar ambos os documentos, percebemos que, no 8º ano do Ensino Funda-

mental anos finais, é enfatizado o estudo da álgebra. Observamos que na BNCC consta que a “Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros” enquanto nos PCNs vê-se relacionado àquele como “Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos”.

Já para o Ensino fundamental anos finais, encontramos descritas na BNCC, quais as competências específicas de matemática cuja garantia é prevista:

> 1) Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3) Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4) Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> 5) Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6) Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> 7) Desenvolver e/ou discutir projetos que abordam, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 8) Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 2018, p. 263).

De acordo com a BNCC, as “habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos estudantes nos diferentes contextos escolares”(Brasil, 2018), no tocante a elas, observamos para o 8º ano do Ensino Fundamental no ensino de geometria a listagem abaixo:

> (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
>
> (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90º, 60°, 45° e 30º e polígonos regulares.

> (EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
>
> (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
>
> (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
>
> (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
>
> (EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.
>
> (EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular (Brasil, 2018, p. 311)

Os PCNs e a BNCC são instrumentos que estabelecem diretrizes de conteúdo a ser ofertado ao e adquirido pelo aluno, para que ele possa se utilizar do conhecimento matemático como ferramenta para ler, compreender e transformar a sua realidade garantindo uma perspectiva de igualdade, diversidade e equidade, por meio de uma proposta comum de direitos e objetivos que inter-relacionam ao aprendizado do aluno, seu desenvolvimento integral, tanto cognitivo, quanto socioemocional.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentaremos o modelo geométrico de Van Hiele, e para tal, discorreremos brevemente a respeito: das vidas de Pierre Marie Van Hiele, marido de Dina Van Hiele-Geldof, falecida logo após a conclusão de sua tese de doutorado; do processo de elaboração e utilização dos modelos matemáticos e educativos; das ideias geradoras da teoria a ser estudada, dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e suas características, às cinco fases de aprendizagem e a evolução esperada no decorrer do processo.

Dina Van Hiele-Geldof foi uma das mentes por trás da criação da Teoria de Van Hiele e teve um papel crucial na sua evolução, a qual explora a forma como os alunos assimilam os conceitos geométricos em variados graus de pensamento. Apesar de ser menos reconhecida que seu marido, Pierre Van Hiele, Dina teve uma contribuição importante na investigação e implementação educacional dessa teoria.

A Teoria de Van Hiele surgiu nos anos 50 e é conhecida por fornecer um modelo organizado que descreve a evolução do conhecimento geométrico. Dina Van Hiele-Geldof focou principalmente em como aplicar essa teoria na prática em salas de aula, criando recursos educativos e estratégias que auxiliam os alunos na transição entre os diferentes estágios de pensamento geométrico.

Lamentavelmente, existem poucos dados completos disponíveis sobre a vida pessoal e profissional de Dina Van Hiele-Geldof, dificultando a apreciação de suas realizações únicas. Contudo, a parceria entre Pierre e Dina Van Hiele é fundamental para compreender o desenvolvimento e a aplicação da teoria que leva o nome deles.

4.1 A Teoria de Van Hiele

4.1.1 Pierre Marie Van Hiele

Pierre Marie Van Hiele, holandês, nascido em 4 de maio de 1909, faleceu em 1º de novembro de 2010, com respeitáveis 101 anos. Sua vida foi dedicada ao desenvolvimento do pensamento matemático das crianças e ele destacando-se nas diversas áreas dentro das quais atuou: como professor de matemática, pesquisador na área de educação matemática e autor de livros didáticos, e também como repórter por ser um atento observador.

Figura 2 – Pierre Marie Van Hiele

Fonte: Broekman e Verhoef (2012).

Broekman e Verhoef citam um trecho de uma homenagem póstuma a Pierre:

> O mundo da percepção, onde a visão e a audição se desenvolvem como maravilhas técnicas, é a base de um pensamento originalmente não verbal, mas onde uma linguagem se desenvolve gradualmente no homem. Essa linguagem torna possível para os raciocínios de níveis superiores de pensamento. O pensamento humano pode, assim, ser levado a enormes realizações. Isso levou a psicologia do pensamento a se concentrar principalmente na realização intelectual. Pode-se até negar um pensamento inferior porque esse pensamento não é racionalmente testável. No entanto, esse pensamento visual existe e fazemos uso constante dele (Broekman; Verhoef, 2012, p. 121, tradução nossa).

Como crítico dos materiais didáticos disponíveis, destinou tempo para elaborar adaptações e melhorias e, em conjunto com sua primeira esposa, Dina Van Hiele-Geldof, publicou-se primeiramente o livro de álgebra e posteriormente o restante da série intitulada “DE A a Z”.

Figura 3 – Pierre e Dina van Hiele-Geldof (1956)

Fonte: Broekman e Verhoef (2012).

O primeiro livro desta série foi escrito a partir de 1944 e, logo após a guerra, fora oferecido aos Wolters para edição, e à época não houve interesse por parte deles. A partir de 1960, a editora Muusses publicou a série composta por um conjunto de pastas de trabalhos e atividades voltados para os alunos da faixa etária que corresponde ao nosso Ensino Médio. A metodologia desta série aplicava os conceitos de forma intuitiva, desafiando os alunos de forma gradual a atingirem um pensamento dedutivo, estágio no qual as figuras tornariam-se dispensáveis e a linguagem, mais formal. O método de A a Z acabou por amargar seu fracasso com a editora Muusses, porém os trabalhos de Van Hiele tiveram continuidade através de publicações acadêmicas e profissionais.

Figura 4 – ***Werkboeken, uitgegeven bij Muusses***

Fonte: Broekman e Verhoef (2012).

Para Hiele, o processo de aprendizagem da matemática deve ser intuitivo e informal, acontecendo por experimentos próprios dos alunos.

Pierre e sua esposa nutriam admiração pelo processo de pesquisa de Piaget, sem, contudo, compartilharem de suas conclusões. Se para Piaget, por um lado, a compreensão matemática se desenvolveria por meio do processo natural de crescimento, ou seja, no decorrer da maturação da criança, para os Van Hiele, por outro lado, a aprendizagem deveria ocorrer em fases delineadas, e apoiada por materiais cuja qualidade estava sob a presente orientação da figura do professor. E há também Freudenthal, outro estudioso cujas visões, ainda que compartilhadas em partes, difeririam das de Pierre em relação à aprendizagem de matemática.

O que está explícito na obra de Pierre, é que o pensamento reflexivo é necessário para que se aumente seu grau de complexidade, galgando atingir níveis mais avançados, e para que isto ocorra, é necessário o estímulo à reflexão, sem que se prescinda de materiais didáticos adequados.

Ao aprender, as crianças partiriam da geometria para a aritmética, atravessando uma fase de transição, da visualização para as abstrações, em que se enfatiza que o nível visual, em particular, exerce grande importância no aprendizado.

Já Freudenthal, coloca de outro modo, que a aprendizagem em matemática se iniciaria com uma análise fenomenológica e didatizada, o que porém acarretaria em uma certa negligência quanto à fase visual e por consequência, se não superestimando, ao menos sobrecarregando as possibilidades dos aprendizes de instrumentalizarem um conhecimento tão recentemente apresentado.

No que pesem as divergências, elas muito contribuíram para a difusão a nível internacional do trabalho teórico dos Van Hiele sobre os níveis de pensamento, justamente em função das palestras e publicações de Freudenthal, nas quais o debate de ideias se fez presente.

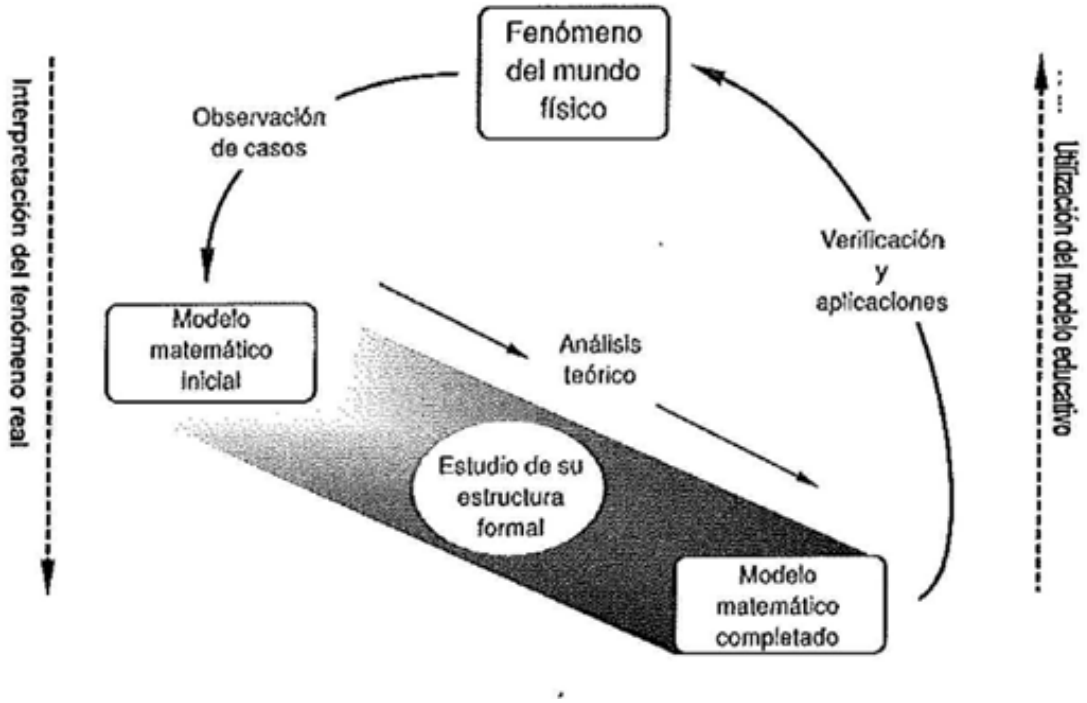
> No meu processo de aprendizagem matemática-educacional, o conhecimento dos níveis de Van Hiele foi crucial por reconhecer a reflexão como uma atividade de elevação de nível: conscientizar sobre o seu inconsciente saber, saber agir, refletir sobre isso, como você sabe disso, porque você faz isso e, finalmente, expressando o resultado de sua análise, ora atribuindo novas funções a meios de linguagem comprovados, ora criando (Broekman; Verhoef, 2012, p. 7, tradução nossa).

4.1.2 Modelo matemático e educativo

Para uma melhor compreensão do modelo de Van Hiele, é fundamental entender o processo de desenvolvimento e aplicação de um modelo matemático que busca descrever uma situação real do mundo de maneira semelhante e recorrente.

A criação de um modelo matemático segue um padrão básico dividido em quatro fases.

Figura 5 – Criação e utilização de um modelo matemático



Fonte: Jaime e Gutierrez (1990, p.300).

Essas fases começam pela necessidade de construir um modelo matemático oriundo da observação de acontecimentos corriqueiros, que produzam resultados semelhantes em indivíduos e objetos quando submetidos a condições similares.

As observações realizadas dão lugar ao início do planejamento de um modelo que considere essas situações observadas na fase anterior e, para a validação, deve-se, com rigor científico, realizar novas experiências e compará-las com os resultados teóricos já observados.

Após validado o modelo matemático, inicia-se o processo de estudo teórico do mesmo, quando então, se completa a estrutura matemática, modificando a proposta original das propriedades descobertas pelos pesquisadores, cuja validade é verificada reiteradamente por meio da aplicação do modelo.

Em modelos educativos, o processo de construção é semelhante ao dos modelos matemáticos.

A base dos modelos educativos é o estudo do comportamento dos estudantes, que por muitas vezes é imprevisível, devido a fatores externos múltiplos, e por este motivo, o professor que aplicar um modelo, não deverá esperar resultados homogêneos, e quando necessário, terá de estabelecer ajustes que atendam melhor às demandas de seus alunos.

4.1.3 O Modelo de Van Hiele

As teses de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, concluídas simultaneamente, na Universidade de Utrecht, serviram de base para o modelo Van Hiele de raciocínio geométrico. Como Dina morreu logo após concluir sua tese, Pierre foi quem deu continuidade à sua melhora, com modificações que perfizeram as ideias ali contidas.

Preocupados com o desenvolvimento de seus alunos da educação básica, os Van Hiele iniciaram o processo de construção de seu modelo educativo/matemático visando buscar modos de solucionar as dificuldades mais agudas que os alunos demonstravam ter. No livro de Jaime e Gutiérrez (Jaime; Gutiérez, 1990, p.304) consta uma citação do próprio Pierre Van Hiele que relata qual foi sua inspiração:

> Quando iniciei minha carreira como professor de matemática, sabia ser uma profissão difícil. Havia partes da matéria em questão que eu podia explicar e explicar, e mesmo assim os alunos não entendiam. Podia ver que eles tentavam, porém, não tinham êxito. Especialmente em relação à geometria, quando havia demonstrações simples por fazer, percebia darem o seu máximo, mas a matéria era demasiada difícil. Por ser um professor inexperiente, também tinha que considerar a possibilidade de que eu era um mau professor. Essa última e desagradável possibilidade se afirmava pelo ocorrido posteriormente. De início parecia compreenderem a matéria em questão. Podiam falar sobre ela com bastante sentido e no próximo minuto diziam: “Não é tão difícil, por que explicou de forma tão complicada?”. Os anos se seguiram e modifiquei minha explicação muitas vezes, porém as dificuldades se mantinham. Parecia que eu estivera falando em uma língua desconhecida, e considerando esta ideia descobri a solução, os diferentes níveis de pensamento.

Apresentaremos a seguir, as ideias centrais do que foi o modelo educativo inicial

criado pelos Van Hiele, ideias essas, que serviram de base para o que conhecemos hoje como teoria.

1) É possível encontrar variados níveis de perfeição no raciocínio dos estudantes de matemática.

2) Um estudante somente poderá compreender os conteúdos matemáticos que o professor explique de maneira adequada ao seu nível de raciocínio.

3) Se uma relação matemática não puder ser expressa no nível de raciocínio em que se encontram os estudantes, será necessário esperar até que estes alcancem um nível de raciocínio superior.

4) Não é possível ensinar uma pessoa a raciocinar de uma determinada maneira, mas sim, é possível ajudá-la, por meio de um ensino adequado, a atingir a capacidade de raciocinar dessa forma.

4.1.4 Os Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

Os Van Hiele nos deixaram a teoria sobre níveis de pensamento (descritivo), as ideias sobre a construção do entendimento (prescritivo) e o uso da linguagem em diferentes níveis. Enfatizou a importância da participação efetiva do aluno no processo de desenvolvimento da compreensão, e a importância de que ocorra em um ambiente de aprendizagem favorável à investigação, à articulação e à atividade.

Seu modelo é composto por duas partes:

- Níveis de raciocínio: Esta parte descritiva é onde se encontra a sequência de níveis de raciocínio por meio dos quais identificamos a capacidade de raciocínio matemático dos alunos, desde o início de sua aprendizagem, até que atinjam maior grau de desenvolvimento intelectual neste campo.

- Fases de aprendizagem: Estas auxiliam os professores com diretrizes de como colaborar com os alunos para alcançarem com maior facilidade um nível superior de raciocínio.

A teoria é composta de cinco níveis de pensamento geométrico. Os níveis são descritos como visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. O modelo sustenta que o aprendiz avança sequencialmente do nível inicial, ou básico nomeado de visualização, onde o espaço é meramente observado e as propriedades das figuras não são explicitamente reconhecidas, até o nível de rigor, no qual se demonstra maior

preocupação com os aspectos abstratos formais da dedução. Essa progressão é auxiliada por experiências instrucionais apropriadas.

Para Pierre Van Hiele, os problemas e tarefas apresentados às crianças são formulados com o uso de vocabulário, conceitos ou conhecimento de propriedades que frequentemente vão além do nível de pensamento da criança. Se isto, por um lado, revela uma falta de harmonia entre o ensino e o aprendizado em matemática, haja vista que por outro, mesmo as crianças de igual idade pensam em diferentes níveis, diferindo umas das outras entre si, não diferem tão somente do próprio professor, e mesmo ele no emprego de palavras e teorias, não raro também o faz de maneiras diferentes inclusive daquelas encontradas nos próprios livros didáticos.

Freudenthal relata que quando o ensinamento ocorre num nível superior ao do aluno, não há a assimilação de forma eficiente do conteúdo, acarretando em sua não memorização.

Visando auxiliar os alunos a desenvolverem a estrutura para uma experiência com os níveis de pensamento, que Van Hiele chamava de *insight*, o aluno deve ser capaz de:

- Obter desempenho numa possível situação não usual;
- Desenvolver correta e adequadamente as ações requeridas pela situação;
- Desenvolver deliberada e conscientemente um método que resolva a situação.

Portanto, para vivenciarem um *insight,* os estudantes devem entender o que estão fazendo, porque o estão fazendo, e quando estão fazendo, aplicando o conhecimento adquirido para resolver problemas.

Descreveremos as principais características de cada nível que permitem ao professor identificar em qual deles o aluno se encontra a partir de suas atividades:

- NÍVEL 1 – VISUALIZAÇÃO ou RECONHECIMENTO: Nesse estágio inicial, os alunos raciocinam principalmente por meio de considerações visuais. Os conceitos geométricos são considerados como um todo, sem levar explicitamente em conta as propriedades relacionadas. Assim, as figuras geométricas são reconhecidas por sua aparência geral, mas os alunos não identificam seus traços distintivos ou suas propriedades. Um aluno neste nível pode aprender vocabulário geométrico, identificar formas específicas, reproduzir uma determinada forma. Este é um nível mais básico de raciocínio matemático, típico das séries iniciais do ensino fundamental, onde os alunos se dedicam, sob supervisão e orientação do professor, a manipular as figuras, observá-las e nomeá-las. Cabe observar que este nível de raciocínio não é exclusivo dos alunos no ensino fundamental séries iniciais, toda vez que o professor apresentar conceitos novos aos seus alunos, eles passarão por esse nível.
- NÍVEL 2 - ANÁLISE: Neste nível, os estudantes conseguem identificar e descrever de modo informal, que as figuras geométricas são compostas por elementos e que

possuem propriedades matemáticas, e esta é a principal característica que a difere do nível anterior, e a partir de experimentação podem deduzir e assim generalizar outras propriedades, que desta vez, sejam desconhecidas.

- NÍVEL 3 - DEDUÇÃO INFORMAL: Em tal nível, o aluno forma definições abstratas e consegue formar relações de recursos em padrões e formas. Eles sabem distinguir entre a necessidade e a suficiência das propriedades quando formam um conceito geométrico. Assim, as classes padrão são identificadas, a inclusão e a interseção de classes são compreendidas. No entanto, um aluno desse nível não entende o significado do raciocínio na totalidade ou o papel dos axiomas. Provas formais podem ser seguidas, mas os alunos não entendem como construir uma prova a partir de diferentes pontos de partida.

- NÍVEL 4 - DEDUÇÃO FORMAL: Este é o nível, onde os alunos desenvolvem conjuntos de afirmações, em que cada afirmação é derivada de outra. A importância das conclusões que se seguem, é entendida como um meio para criar uma teoria geométrica. O aluno raciocina formalmente sobre um sistema matemático completo em um contexto com termos indefinidos, axiomas, um sistema lógico subjacente, definições e teoremas. Um aluno desse nível sabe como demonstrar teorias (e não apenas memorizá-las) e entende a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de uma maneira.

- NÍVEL 5 – RIGOR: Este é o nível em que os alunos avaliam diferentes sistemas dedutivos com muita precisão. Eles comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e, na ausência de modelos concretos, estudam diferentes geometrias. Ele sabe aprofundar a análise das características de um sistema dedutivo, como consistência, independência e completude de axiomas.

4.1.5 Características dos Níveis

Os Van Hieles estabeleceram algumas generalizações que nos fornecem os *insights* sobre o raciocínio que é particular a cada nível do pensamento geométrico e, por consequência, o modelo é descrito.

As características esmiuçadas servem aos professores como ferramentas na escolha do quê e de como ensinar.

- Ordem lógica: Os níveis devem progredir em ordem, como a maioria das teorias do desenvolvimento. Trabalhando eficientemente em um determinado nível, um aluno deve ter dominado as técnicas dos níveis anteriores, isto é, os níveis de raciocínio

de Van Hiele possuem uma estrutura recursiva, aquilo que foi aprendido no nível anterior (elementos implícitos) é utilizado no nível posterior para estabelecer novos conceitos (elementos explícitos) como demonstrado de forma resumida na tabela.

Tabela 1 – Tabela: Ordem lógica

	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos
Nível 1	Figuras	Partes e propriedades das figuras
Nível 2	Partes e propriedades das figuras	Implicações entre propriedades
Nível 3	Implicações entre propriedades	Dedução formal e teoremas
Nível 4	Dedução formal e teoremas	

Portanto, as atividades propostas aos alunos devem ser construídas visando desenvolver a habilidade implícita, possibilitando o desenvolvimento de forma coerente.

É comum observar alunos que, embora aparentem estar em um determinado nível de pensamento geométrico, enfrentam dificuldades quando são propostos exercícios de níveis mais avançados. Esses alunos frequentemente demonstram incompreensão e/ou incapacidade de resolver tais exercícios. Isso ocorre porque, geralmente, foram submetidos a um aprendizado baseado na memorização. Assim, ao se depararem com um problema diferente dos exemplos memorizados, eles podem apresentar dificuldades ao identificar os procedimentos necessários para solucioná-lo.

- Linguística: A cada nível o aluno amplia seu conhecimento em relação aos símbolos linguísticos e as relações conectadas a esses símbolos. Assim, adicionando propriedades e compreendendo-as.

As diferentes capacidades de raciocínio associadas aos níveis do desenvolvimento de raciocínio geométrico de Van Hiele não só refletem na forma como os alunos resolverão os problemas propostos, mas na forma como irão se expressar.

Jaime e Gutiérrez exemplificam esta capacidade através do significado da palavra “demonstrar”. Os alunos no nível 1 não entendem seu significado no estudo da matemática, já para alunos no nível 2, demonstrar é verificar a veracidade da afirmação, enquanto para os alunos no nível 3 as demonstrações já recorrem a argumentos baseados nas observações de exemplos concretos e, finalmente, no nível 4, a palavra possui significado usual entre os matemáticos.

Portanto, cada nível de pensamento geométrico possui um vocabulário específico, e para ser compreendido por seus alunos, o professor deve adequar o seu vocabulário ao nível de seus alunos e guiá-los ao nível superior, para não provocar uma situação de incompreensão mútua.

- Avanço: O progresso (ou a falta dele) de nível para nível depende dos métodos de ensino, sempre verificando o nível em que o aluno se encontra e sua maturidade, não permitindo que nenhum nível seja pulado.

Não se pode confundir a compreensão da solução de um problema concreto, com a aquisição necessária para se afirmar que o aluno está em outro nível de pensamento geométrico.

Cada nível de Van Hiele se caracteriza por diversas habilidades de raciocínio importantes e apenas após o domínio adequado de todas as habilidades descritas pode-se considerar que um certo nível de pensamento geométrico foi adquirido.

Em diversos estudos observou-se que alunos utilizam de forma simultânea habilidades de diferentes níveis na resolução de problemas. Segundo Jaime e Gutiérrez (1990), a transição de um nível para outro se produz de maneira gradual e durante um período o aluno se encontrará em transição, durante a qual combinará diversos níveis de raciocínios. Isto se evidencia quando um estudante de um nível superior encontra dificuldade na resolução de um determinado problema e, na busca de segurança, se utiliza de recursos de um nível inferior.

4.1.6 A Evolução de Níveis

Professores que desejem utilizar a teoria de Van Hiele em suas aulas precisam identificar exatamente em qual dos níveis de pensamento geométrico seus alunos se encontram, para poder determinar um planejamento com linguagem e materiais adequados.

Professores investigadores que trabalham com o modelo de Van Hiele utilizam como método para determinar o nível de seus alunos, entrevistas individuais ou atividades para o coletivo, nas quais cada aluno procura resolver aquilo que é proposto e, dialogando sobre as possíveis soluções, o professor identifica quais as habilidades evidenciada de cada nível. Apesar das entrevistas obterem resultados mais precisos, as atividades escritas são as mais utilizadas, devido à impossibilidade de atendimento individualizado nas salas de aula.

De qualquer maneira, ao se medir um nível de pensamento geométrico dos alunos, é preciso:

- Que as atividades selecionadas visando identificar os níveis de pensamento geométrico proponham soluções em que os alunos devam explicar suas estratégias e justificar os passos da resolução;

- Que ao analisar a solução dos alunos, não verifique-se somente se o aluno chegou ao resultado esperado, mas sim se pôde usar propriedades, e como as utilizou, para que assim se possa determinar em qual nível de pensamento geométrico o aluno enquadra-se;

- Que quando não se tem uma ideia prévia do nível em que seus alunos se enquadram, selecione-se atividades que possam ser resolvidas por alunos nos quatro níveis de pensamento geométrico, e portanto o professor deve pensar em resoluções que se encaixem nesses quatro níveis;

- Que se tenha ciência de que as atividades podem ser resolvidas corretamente de diferentes maneiras, e isto inclui alunos de todos os níveis.

4.1.7 Processo de aprendizagem

Como mencionado anteriormente, os Van Hieles afirmam que o avanço através dos níveis depende mais da instrução recebida do que da idade ou maturidade, diferença fundamental entre os modelos de aprendizagem de Piaget e Van Hiele.

Jaime e Gutierrez (1990) citam um trecho onde Van Hiele menciona essa diferença:

> A impossibilidade das crianças para pensar logicamente não procede da falta de maturidade, mas sim da falta de conhecimento das regras do jogo da lógica. Uma criança não tem à sua disposição as estruturas a partir das quais se originam as perguntas. Não podem entender as questões, pois não terminaram o processo de aprendizagem que as levam ao nível posterior de pensamento. A importância da idade das crianças se refere ao fato de não ter havido tempo suficiente para levá-las ao que é suficientemente necessário no processo de aprendizagem (Jaime; Gutiérez, 1990, p. 332, tradução nossa).

Consequentemente, tanto o formato e a estrutura da instrução, bem como a escolha dos conteúdos e dos materiais didáticos são preocupações didáticas altamente relevantes.

Segundo Jaime e Gutiérrez (1990), a transição de um nível de Van Hiele para outro superior diz respeito ao processo pelo qual um aluno aprende a utilizar métodos e ferramentas de raciocínio já estudados, a decidir onde utilizá-lo, mesmo sendo de um nível anterior, permitindo o aprofundamento de seus conhecimentos geométricos.

Estas modificações consistem na transformação das estruturas mentais atuais em outras mais complexas, onde se é capaz de relacionar os conceitos assimilados com as relações estabelecidas entre esses conceitos. Então, podemos concluir que a evolução nos níveis de Van Hiele se dá pela capacidade de incorporar conceitos já aprendidos, aos novos conceitos, relacionando-os.

Ao analisarmos as estruturas dos tipos de raciocínio próprios em seus diferentes níveis e observarmos os elementos, as operações e as propriedades utilizadas em cada nível, percebemos que é possível criar uma rede de relações análogas. Com isso, descartando o nível 1, temos que:

- No nível 2, o elemento utilizado é a proposição lógica, o estudante nesse nível é capaz de relacionar propriedades diante de afirmações que podem ser consideradas falsas ou verdadeiras dependendo de sua aplicação.

- No nível 3, os estudantes adquirem capacidade de relacionar logicamente uma afirmação com outra, estabelecendo relações simples de modo informal ou formal.
- No nível 4, o estudante adquire completamente a capacidade de raciocínio matemático. As novas relações se constroem mediante a redução da anterior, onde o conjunto de proposições conectadas por implicações simples, se convertem em teoremas, que se convertem em axiomas, definições.

A ideia central do modelo de Van Hiele é de que a aquisição de novas habilidades de raciocínio matemático se dá pelas experiências vividas pelo estudante, que podem ou não ocorrer em sala de aula. Portanto, o ensino adequado é aquele que proporciona ao aluno essas experiências através de metodologias ativas, por meio das quais o aluno participa ativamente de todo o processo.

4.1.8 Fases de aprendizagem segundo o modelo de Van Hiele

Para Van Hiele, as fases de aprendizagem são etapas que o estudante deve cumprir e, desta forma, adquirir experiências que o levem ao próximo nível de raciocínio geométrico, e para tal, é necessário que haja, por parte dele, conhecimentos básicos satisfatórios.

As cinco fases são:

- Fase 1- Informação ou investigação: Nesta fase, o aluno entra em contato com aquilo que será estudado. O professor informa o que será trabalhado, como será trabalhado, e quais são os pré-requisitos necessários. De forma autônoma o aluno poderá se organizar, e até mesmo, rever os conteúdos selecionados como pré-requisitos necessários.

Tanto a utilização de um vocabulário específico e correspondente ao nível, quanto as observações feitas e perguntas colocadas, possuem dois propósitos:

1) Verificar o conhecimento prévio do aluno;
2) Informar aos alunos a direção e o aprofundamento desse conhecimento.

- Fase 2- Orientação dirigida: O objetivo principal desta fase é conseguir que os alunos descubram, compreendam e aprendam quais os conceitos, propriedades, figuras, etc., principais para a área estudada da geometria, para que ocorra a construção dos elementos básicos relacionados a este novo nível. Van Hiele ressalta a importância da escolha das atividades para que essa construção ocorra.
- Fase 3- Explicação: Os alunos expressam e discutem suas opiniões em construção sobre as estruturas que viram, com base em suas experiências anteriores. Essa

discussão se torna mais rica, quando surgem pontos de vistas divergentes, colocando o aluno para justificar sua resposta, descrevendo as estratégias de sua resolução, sempre com justificativas pautadas nos conteúdos estudados.

Nesta fase, espera-se que os alunos observem as regularidades com intenção de generalizar as teorias.

A responsabilidade do professor é mínima, além de ajudar os alunos a usar um vocabulário preciso e adequado. Nesta etapa, a estrutura relacional do nível começa a ficar clara.

Concluímos que esta é a fase onde o aluno realiza uma revisão dos conteúdos já trabalhados de um ponto de vista das conclusões, da prática e do perfeccionismo e na forma de se expressar.

- Fase 4- Orientação Livre: Nesta fase, os alunos aplicam os conceitos utilizando o vocabulário que acabaram de adquirir em atividades mais desafiadoras.

Para tal, o professor deve planejar as atividades priorizando as que apresentem diferentes soluções, levando o aluno a aplicar os conhecimentos prévios adequadamente.

As atividades, nesta fase, devem utilizar novos conceitos e propriedades, não devem ser exercícios visando aplicação e sim, apresentar novas situações que permitam vários caminhos de resolução, estabelecendo relações mais completas.

- Fase 5- Integração: O objetivo é que os alunos construam uma visão geral da nova rede de objetos e relações, revisando e resumindo o que aprenderam. A contribuição do professor deve ser de fornecer, como Van Hiele chamava, “pesquisas globais” dos assuntos que seus alunos aprenderam, ajudando-os na síntese. Mas é crucial que nada de novo seja apresentado nestes resumos. Os conhecimentos que se formaram serão delineados e seu contexto histórico, examinado.

A fase 5 é aquela na qual os alunos atingem um novo nível de pensamento. Os alunos estão preparados para repetir as fases de aprendizagem no próximo nível, quando o novo domínio de pensamento substitui o antigo.

Conforme as experiências baseadas em Van Hiele, as crianças devem ser expostas a uma ampla variedade de experiências geométricas (como recortes, dobraduras, canudos, mosaicos, tangrans e quebra-cabeças geométricos), que possam ajudar, nos primeiros anos do ensino fundamental, a fornecer experiências de exploração.

Nos níveis 1 e 2, aproximadamente, as experiências do ensino fundamental e médio podem incluir o trabalho com tabelas, coleções de formas, “cartões de propriedade”, entre outros.

Algumas características das fases de aprendizagem devem ser observadas com atenção pelo professor ao selecionar as atividades:

É importante refletir sobre as diferenças existentes entre as fases, pois as atividades propostas devem contemplar os objetivos de cada fase.

1) Na fase da Informação, as atividades não têm por objetivo a resolução dos exercícios;

2) Na fase da Orientação dirigida, os problemas têm por objetivo estabelecer os principais elementos a serem estudados;

3) Na fase de Orientação livre, os problemas devem ser mais complexos dos apresentados na fase anterior, obrigando os alunos a utilizar dos conhecimentos prévios na resolução.

Pensando no processo completo de desenvolvimento do raciocínio, a aquisição dos níveis superiores é um processo que poderá levar anos, e, em alguns casos, alunos podem terminar a educação básica no mesmo nível em que a iniciaram.

Em sua tese de doutorado, Dina Van Hiele descreve o ensino de geometria conforme os níveis de raciocínio de um ano do ensino fundamental anos finais (12-13 anos), o que no Brasil corresponderia ao 7º ano, e pontua que seus alunos passaram do nível 1 para o nível 2 em apenas uma semana, porém ao término do curso não haviam alcançado o próximo nível. Concluindo que não poderão ocorrer rupturas no processo de aprendizagem, ao terminar a última fase de um nível, inicia-se o trabalho a partir da primeira fase, mas já no nível posterior.

Os Van Hieles estabeleceram algumas generalizações que nos fornecem os *insights* sobre o raciocínio que é particular a cada nível do pensamento geométrico e que, por consequência, descrevem o modelo em questão.

Essas características servem aos professores como ferramentas na escolha de o quê e de como ensinar.

1) Ordem lógica: Os níveis devem progredir em ordem, como a maioria das teorias do desenvolvimento. Trabalhar eficientemente em um determinado nível, significa que o aluno deva ter dominado as técnicas dos níveis anteriores.

2) Avanço: O progresso, ou a falta dele, de nível em nível, depende dos métodos de ensino, sempre verificando o nível em que o aluno se encontra e sua maturidade, não permitindo que nenhum nível seja pulado.

3) Intrínseco e extrínseco: Aquilo que foi aprendido no nível anterior é utilizado no nível posterior e utilizado para estabelecer novos conceitos.

4) Linguística: A cada nível, o aluno amplia seu conhecimento em relação aos símbolos linguísticos, e também as relações conectadas a esses símbolos. Assim, adicionando propriedades e compreendendo-as, o aluno pode entender que, após o estudo, por

exemplo, dos paralelogramos, que o quadrado é um retângulo, porém o retângulo não é um quadrado. Esta noção linguística é fundamental no nível 2.

5) Incompatibilidade: A aprendizagem e o avanço pretendidos podem não ocorrer se a linguagem utilizada pelo professor e aluno estiverem em níveis diferentes. Portanto, o aluno não conseguirá entender os processos cognitivos empregados pelo professor, se este, com os livros didáticos, estiver em um nível superior ao do aluno.

O professor ao reconhecer a importância de incorporar a teoria de Van Hiele para enriquecer e expandir o conhecimento existente sobre o processo de ensino e aprendizagem, utiliza o modelo como um referencial que oferece diversas abordagens de comunicação com os estudantes. Ele apresenta métodos para introduzir novos conceitos visando estimular a compreensão e o desenvolvimento do raciocínio.

Quando utilizado como uma ferramenta, permite identificar o nível de dificuldade enfrentado pelos alunos e em que estágio de compreensão do pensamento geométrico eles se encontram, capacitando os professores a implementar estratégias de ensino adaptadas, por meio de técnicas de mediação pedagógica, que promovem um aprendizado mais eficaz e duradouro.

5 RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS

O ensino fundamental anos finais marca uma transição significante para os alunos do ensino básico, que vivenciam mudanças físicas, emocionais, cognitivas e sociais, próprias do início da adolescência. Este é um momento importante para o desenvolvimento de áreas cerebrais e para o desenvolvimento da personalidade e da moralidade.

As mudanças inerentes a essa fase da vida envolvem a compreensão dos adolescentes como sujeitos em desenvolvimento, com singularidades e com formações identitárias e culturais próprias, que exigem práticas escolares diferenciadas, capazes de contemplar suas necessidades e diferentes modos de inserção social.

Portanto, é importante pensar o ensino e a aprendizagem de forma progressiva e integrada, não relacionada apenas ao currículo, mas também, ao método e à continuidade da experiência escolar, o que torna de extrema relevância a escolha dos recursos didáticos.

O Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) é um programa do Ministério da Educação, o qual avalia e oferece gratuitamente obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, e que se destinam às três etapas da Educação Básica, sendo normatizado pelo Decreto n° 9099, de 18 de julho de 2017, com o intuito de atender a seis objetivos:

1) Aprimorar o processo de ensino e aprendizagem nas escolas públicas de educação básica, com a consequente melhoria da qualidade da educação;
2) Garantir o padrão de qualidade do material de apoio à prática educativa utilizado nas escolas públicas de educação básica;
3) Democratizar o acesso às fontes de informação e cultura;
4) Fomentar a leitura e o estímulo à atitude investigativa dos estudantes;
5) Apoiar a atualização, a autonomia e o desenvolvimento profissional do professor;
6) Apoiar a implementação da Base Nacional Comum Curricular, além dos demais dispositivos (Brasil, 2017).

Realizamos um levantamento de quais os livros didáticos para o 8.º ano do Ensino Fundamental anos finais no catálogo do PNLD-2024 e, dentre eles, selecionamos dois além do livro didático adotado pela instituição da qual faço parte do quadro docente, para, pós-análise, sugerirmos estratégias em conformidade com os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico apresentando que se pautassem na teoria de Van Hiele.

5.1 Análise de Obras para o Ensino de Congruência de Triângulos no 8º Ano do Ensino Fundamental Anos Finais

O estudo da geometria tem por finalidade desenvolver o pensamento geométrico, incentivando o aluno a investigar propriedades, a estabelecer conjecturas e a produzir argumentos geométricos convincentes. Nos anos finais do Ensino Fundamental, esperamos que, ao estudar as figuras geométricas e suas propriedades, os alunos desenvolvam os

conceitos de congruência e semelhança, e que a partir daí, reconheça e represente figuras simétricas.

A ideia central do modelo de Van Hiele é de que a aquisição de novas habilidades de raciocínio matemático se dá pelas experiências vividas pelo estudante, que podem - ou não - ocorrer em sala de aula, e, sem que nos esqueçamos de que crianças em uma mesma sala de aula podem estar em níveis de desenvolvimento diferentes, faz-se necessário, ao realizar a análise do material didático, considerar estes diversos níveis, e estabelecer o que é essencial para cada um deles.

Na tabela apresentada na dissertação de Pértile (2011), é possível identificar os objetivos a serem atingidos pelos alunos, e o que o livro didático deve mostrar conforme a Teoria de Van Hiele. Com base nela, desenvolvemos a tabela abaixo, a qual foi utilizada como norteadora em nossas análises e sugestões voltadas para os exercícios de congruência de triângulos:

Figura 6 – Sugestões para exercícios de congruência de triângulos

Fase 1: Investigação: Através da observação constatar a congruência.	**Nível 1 –** Solicite que reproduza em outra folha a figura, recorte e faça a comparação manipulando o material . Aqui o aluno também poderá usar o papel vegetal e sobrepor as figuras.
Fase 2: Orientação Dirigida: Indicar o caso de congruência a partir dos dados apresentados.	**Nível 2 -** Sugira que faça uma tabela com os elementos do triângulo facilitando a visualização do caso de congruência. Incentive a perceber a congruência de outros elementos não identificados como congruentes utilizando conceitos já estudados.
Fase 3: Explicação Justificar a congruência, ampliando seu vocabulário.	**Nível 3 –** Solicite que justifique cada caso descrevendo sem a necessidade da utilização dos símbolos matemáticos. Incentive a perceber a congruência de outros elementos não identificados como congruentes utilizando conceitos já estudados.
Fase 4: Orientação Livre: Aplica conceitos já estudados utilizando vocabulário que acabaram de adquirir.	**Nível 4 –** Solicite que utilize de conceitos anteriormente estudados para justificar a congruência de outros elementos não identificados como congruentes. Solicite que justifique os casos de congruência usando uma linguagem matemática mais formal.
Fase 5: Integração: Revisar e resumir o que aprenderam.	

Fonte: De autoria própria.

5.1.1 Obra: Desafios da matemática com Ênio Silveira.

Iniciaremos nossa análise pelo livro Desafios da Matemática com Ênio Silveira, da editora Moderna, com registro na PNLD de n° 0021 P24 0100 020 020.

Na obra citada, o tema de congruência de triângulos é trabalhado no Capítulo 07, e nele coloca-se como objetivos:

- Levantar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre os retângulos.

- Verificar se os estudantes identificam triângulos e quadriláteros em obras de arte (Silveira, 2022, p.135).

Os conceitos iniciais trabalhados estão relacionados ao desenvolvimento das competências gerais e específicas da BNCC, além da habilidade EF08MA14 que deverá desenvolver a demonstração de propriedades dos quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

Na obra foram disponibilizados 11 exercícios, dos quais analisamos 7 por tratarem da condição de existência e da congruência de triângulos.

Na introdução do capítulo, os alunos são incentivados através da apreciação da obra de arte de Pieter Cornellis Mondrian (1872-1944), a valorizar diferentes formas de conhecimento e vivências culturais, exercitando a imaginação, realizando pesquisa de forma coletiva, possibilitando o desenvolvimento de diversas competências. O livro propõe que o aluno cite duas características dos retângulos e, em equipe, pesquise obras de arte nas quais seja possível identificar figuras geométricas, e aqui em específico, os triângulos e os quadriláteros.

Figura 7 – Abertura do capítulo

Capítulo 7

Triângulos e quadriláteros

Trocando ideias

Pieter Cornellis Mondrian (1872-1944), também conhecido como Piet Mondrian, foi um pintor holandês. Suas obras se caracterizam pela presença de linhas retas e de figuras retangulares, nas cores vermelha, azul, amarela, preta e branca, que ele considerava as cores elementares do Universo. Analise esta reprodução de uma de suas obras.

MONDRIAN, Piet. *Composição com vermelho, amarelo, azul e preto*, óleo sobre tela, 59,5 cm × 59,5 cm, 1921.

Conheça mais

No *site* do Museu de Arte Moderna de Nova York (EUA), é possível conhecer mais obras de Piet Mondrian.

- Cite duas características dos retângulos.
- Reúna-se com um colega e pesquisem obras de arte em que é possível identificar figuras que se parecem com triângulos e quadriláteros. Depois, compartilhem com a turma o que encontraram.

Neste capítulo, vamos estudar os **triângulos** e os **quadriláteros**.

135

Fonte: Silveira (2022, p.135).

Essa atividade atende a alunos em todos os níveis de pensamento geométrico, e

para análise, deixaremos de fora o nível de rigor:

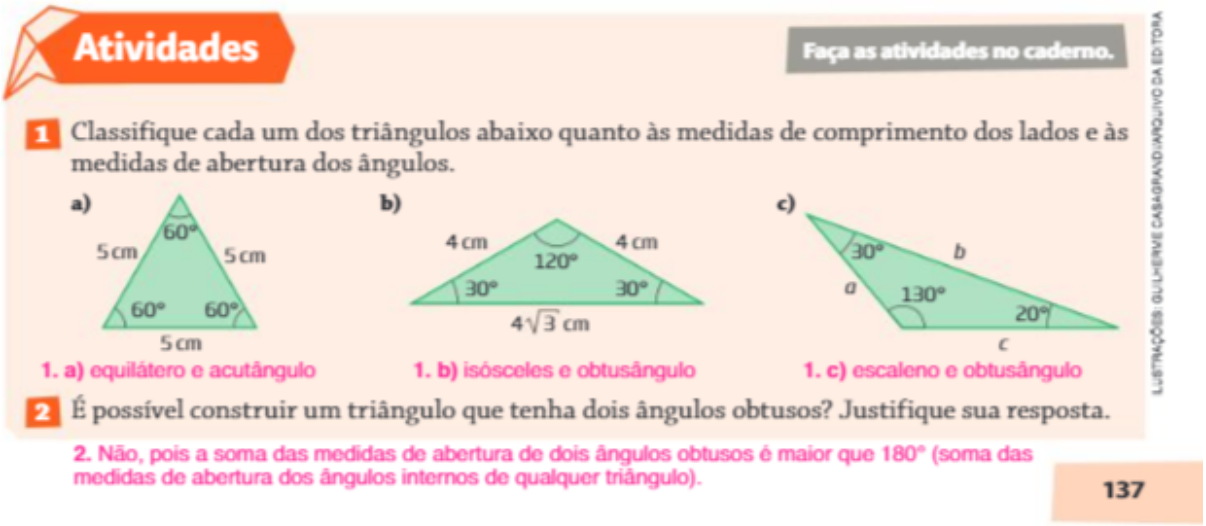
- Os alunos no nível de visualização têm a oportunidade de comparar as várias figuras encontradas em sua pesquisa e de destacar diferenças existentes com relação ao triângulo.
- Aos alunos no nível de análise, é permitido fazerem a descrição de figuras conforme suas propriedades básicas, lados e ângulos internos e externos.
- Os alunos no nível de dedução informal podem observar a rigidez dos triângulos argumentando sobre isso.
- Os alunos no nível de dedução formal podem, ao identificarem os triângulos nas figuras, classificá-los conforme os lados e ângulos.

Lembrando que as fases de aprendizagem no modelo de Van Hiele são as etapas a serem cumpridas para que o aluno adquira experiências que o levem ao próximo nível de raciocínio geométrico. Temos, com esta introdução, a oportunidade de trabalhar a fase 01, de investigação, que tem como objetivos tanto verificar o conhecimento prévio do aluno, quanto informá-lo de como ocorrerá a aquisição desse conhecimento. Isto pode ocorrer quando os alunos citam as características do retângulo identificando-o como uma figura geométrica com 4 ângulos retos e dois pares de lados paralelos e realizando a comparação com o triângulo.

É interessante aqui questionar se o quadrado é um retângulo, e também, se é possível através do retângulo construirmos o triângulo, direcionando os alunos para a fase 2 (orientação dirigida), na qual descobrem, compreendem e aprendem os conceitos e propriedades relacionadas. Com os questionamentos, espera-se que os alunos observem as regularidades existentes, o que os leva à Fase 3 (explicação), e por isso, o debate e os questionamentos são muito valiosos.

Para a realização do Exercício 1, exposto na figura abaixo, sugerimos a sequência de questionamentos: Todos os retângulos têm as mesmas medidas? Todos os triângulos têm as mesmas medidas de lados? O que os diferencia? E neste momento, esperamos que os alunos concluam que não, e que acerca dos triângulos, observem que estes podem ser classificados verificando-se seus lados (isósceles, equilátero e escaleno) e seus ângulos (retângulo, acutângulo e obtusângulo). O professor, sempre se atendo à sua linguagem, utiliza-se de um vocabulário compreensível aos seus alunos.

Figura 8 – Exercícios da página 137



Fonte: Silveira (2022, p.137).

Analisando segundo os níveis de pensamento geométrico, estabelecemos as seguintes sugestões, tendo em vista que neste exercício é possível trabalharmos as fases 1 e 2:

- Nível 1: Na fase 1, o aluno realizará observação, e anotará os dados observados. Na fase 2, realizará a classificação dos triângulos, partindo da comparação dos conceitos, com as observações anotadas por ele, sem se preocupar com o vocabulário.
- Nível 2: Na fase 1, realizará a observação e anotará os dados em uma tabela que facilitará, na fase 2, a classificação dos triângulos.
- Nível 3: Após observar (fase1), o aluno classificará os triângulos, justificando esta classificação com o uso dos conceitos estudados.
- Nível 4: Após a observação (fase 1), o aluno realizará a classificação justificando com um vocabulário aprendido.

O autor propõe no Exercício 2 o seguinte questionamento: É possível construir um triângulo que tenha dois ângulos obtusos? Justifique sua resposta (Silveira, 2022, p.137) . Neste exercício, é possível trabalhar as fases de aprendizagem 3 e 4, em que o aluno aplicará os conceitos estudados e os prévios, adequadamente.

Para respondê-lo, é necessário que o aluno revisite conceitos anteriores, que trata-se da soma dos ângulos internos dos triângulos, e no intuito de atender a todos os alunos em diferentes níveis, sugerimos a utilização de materiais como canudos, e assim, com a concretude dos objetos, os alunos poderão manipulá-los e ter a percepção de que não é

possível construir um triângulo com dois ângulos obtusos, ou mesmo utilizar dobraduras para demonstrar a soma dos ângulos internos (nível de visualização).

Para os alunos no nível de análise, é possível solicitar que eles descrevam as possíveis variações de ângulos no triângulo, já para os alunos no nível de dedução informal, que eles os classifiquem, enquanto os alunos no nível de dedução formal, que expliquem as diferentes variações de ângulos, utilizando a soma dos ângulos internos.

Para dar continuidade ao estudo, serão necessários conceitos prévios, como as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, como ressalta o autor nas orientações para os professores:

> Comente com os estudantes que, para a congruência de triângulos, valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.
>
> • Reflexiva: todo triângulo é congruente a si mesmo.
>
> • Simétrica: se um triângulo ABC é congruente a um triângulo A'B'C', então o triângulo A'B'C' é congruente ao triângulo ABC.
>
> • Transitiva: se um triângulo ABC é congruente a um triângulo DEF, e o triângulo DEF é congruente a um triângulo A'B'C', então o triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C' (Silveira, 2022, p.143).

Finalmente, com os conceitos adquiridos, os alunos estão prontos para estabelecer a Congruência de triângulos, foco de nosso estudo. Aos alunos, que o professor lhes proponha o desafio de, utilizando suas próprias palavras, diferenciarem figuras semelhantes de figuras congruentes, estabelecendo os conceitos geométricos tanto para semelhante como para congruente.

Após compreendido o conceito de congruência, o autor propõe que, em equipes, os alunos reproduzam três triângulos que receberam impressos confeccionados pelo professor conforme orientação (apenas dois deles congruentes), em folha de papel vegetal e, após os recortarem, sobreponham-nos e determinem quais deles são congruentes, analisando ângulos e lados.

> Organize a sala em grupos e distribua para cada grupo uma folha de papel com três triângulos reproduzidos: dois deles devem ser congruentes e o outro não. Depois, oriente os grupos a reproduzir os três triângulos em uma folha de papel vegetal, recortar essas figuras e tentar sobrepor umas às outras. Depois, questione-os: "É possível sobrepor essas figuras? Quais delas?". Depois, solicite que analisem os ângulos e os lados dos triângulos que coincidiram e pergunte: "O que podemos afirmar sobre a medida do comprimento dos lados correspondentes desses triângulos? E sobre as medidas das aberturas dos ângulos internos correspondentes?" (Silveira, 2022, p. 142).

Outra sugestão seria dividir a sala em grupos e solicitar que cada um deles demonstre um dos casos de congruência de triângulos.

Nesta atividade também é possível trabalhar com alunos em todos os níveis:

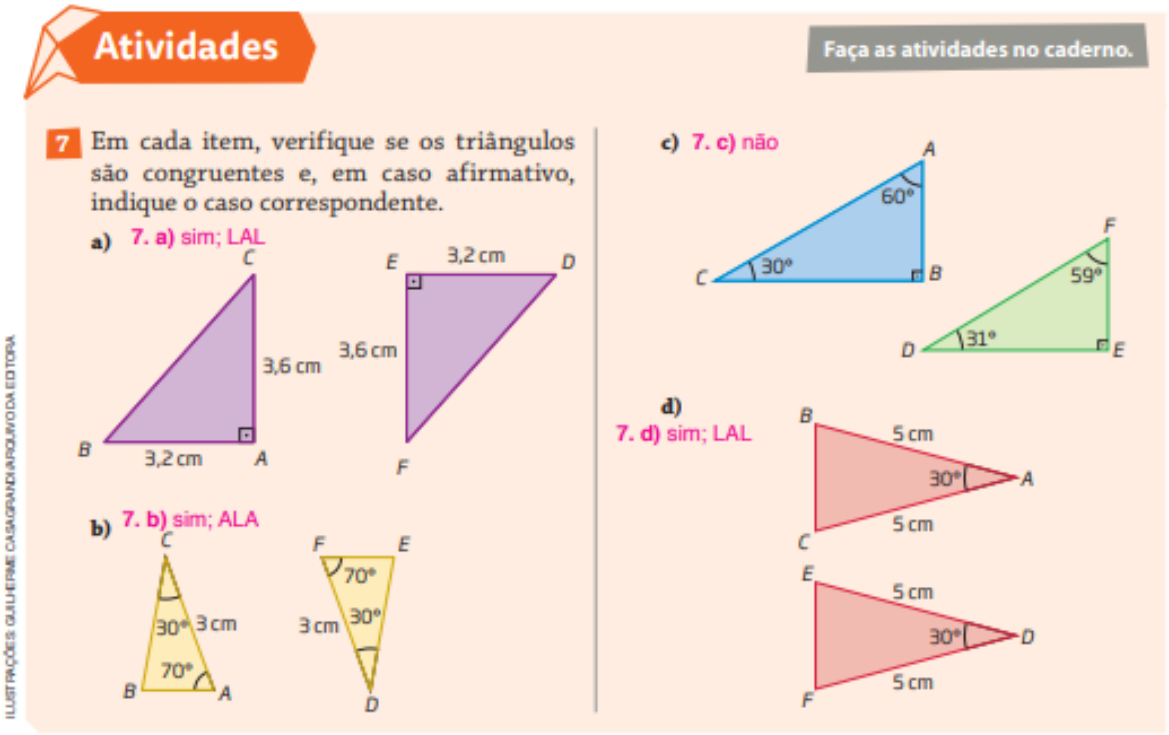
- Visualização: Em figuras congruentes, comparar, por manipulação, os ângulos e lados do triângulo.
- Análise: Identificar os casos de congruência por meio da comparação de figuras.

- Dedução informal: Realizar dedução por meio de figuras apresentadas.
- Dedução formal: Realizar a dedução dos casos de congruência a partir das informações dadas.

Por fim, na fase 5 (integração), os alunos devem elaborar um mapeamento dos conhecimentos aprendidos, atingindo assim, um novo nível de pensamento geométrico.

Em relação às atividades sugeridas pelo livro (Figura 9) , temos inicialmente a verificação de congruência dos triângulos indicando o caso correspondente (fase 1), onde o aluno, através da observação, constata a congruência; em seguida é proposto que, afirmando serem congruentes, ele deva indicar o caso que garanta esta congruência, justificando-a, o que possibilitará o desenvolvimento das fases 2 e 3.

Figura 9 – Exercício 7



Fonte: Silveira (2022, p.144).

Atendendo a todos os níveis de pensamento geométrico, temos:

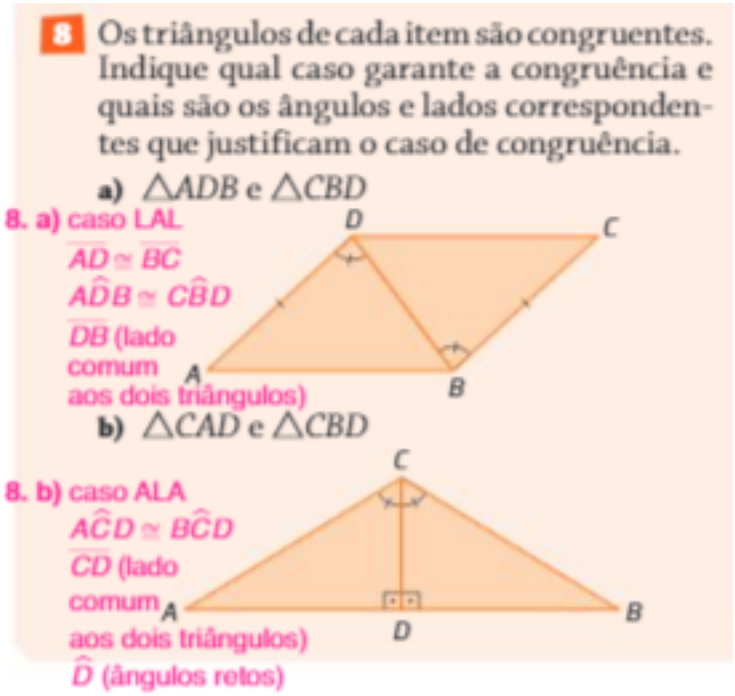
- Nível 1: O aluno poderá utilizar de uma folha de papel vegetal, e nela reproduzir um dos triângulos a ser comparado, e sobrepô-lo a outro triângulo, definindo assim a congruência, porém para tal, o professor deve fornecer ao aluno, em folha anexa, essa construções com as medidas reais expressas no exercício, já que as figuras do livro são meramente ilustrativas. Para indicar o caso de congruência conforme os dados apresentados, o aluno poderá utilizar-se da tabela previamente construída

com auxílio do professor com todos os casos de congruência, e compará-la com os dados apresentados no exercício.

- Nível 2: O aluno deverá registrar os dados apresentados pelo exercício e compará-los com a tabela previamente construída com o auxílio do professor, onde propomos constar as medidas de todos os elementos dos triângulos.
- Nível 3: O aluno deverá, por meio da observação, definir a congruência de triângulos, registrando a sua justificativa com os dados do exercício, sem a necessidade de uma linguagem formal, por exemplo, no item *a)* os triângulos são congruentes (com medidas iguais), pois apresentam 2 lados e 1 ângulo entre eles congruentes.
- Nível 4: O aluno deverá, por meio da observação, definir a congruência de triângulos, justificando, com a utilização de uma linguagem formal, o caso de congruência correspondente, por exemplo, no item *a)* os triângulos são congruentes pelo caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado).

No Exercício 8, podem, assim como no exercício anterior, ser desenvolvidas as fases 2 e 3, no entanto, as figuras possuem um lado em comum, algo que deve ser notado e registrado pelos alunos, e que já estão definidas como congruentes.

Figura 10 – Exercício 8



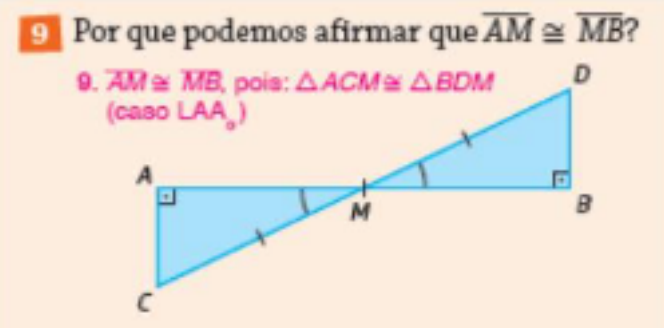
Fonte: Silveira (2022, p.145).

Atendendo a todos os níveis de pensamento geométrico, não temos muita alteração em relação ao exercício anterior:

- Nível 1: Indicar o caso de congruência conforme os dados, utilizando para comparar os dados apresentados no exercício anterior, a tabela previamente construída pelo professor com o intuito de auxiliar o aluno, com todos os casos de congruência.
- Nível 2: O aluno deverá registrar os dados apresentados pelo exercício e compará-los com a tabela previamente construída.
- Nível 3: Registrar a justificativa com os dados do exercício, sem a necessidade de uma linguagem formal.
- Nível 4: Justificar, com a utilização de uma linguagem formal, o caso de congruência correspondente.

Nos exercícios 9, 10 e 11, é possível trabalhar a fase 4, quando o aluno tem a oportunidade de aplicar os conceitos aprendidos e, para finalizar as fases de aprendizagem, possivelmente atingindo assim o próximo nível de pensamento geométrico, de criar uma atividade desafiadora para o colega e, para tal, é necessário conhecer, compreender e relacionar os conceitos recentemente aprendidos.

Figura 11 – Exercício 9



Fonte: Silveira (2022, p.145).

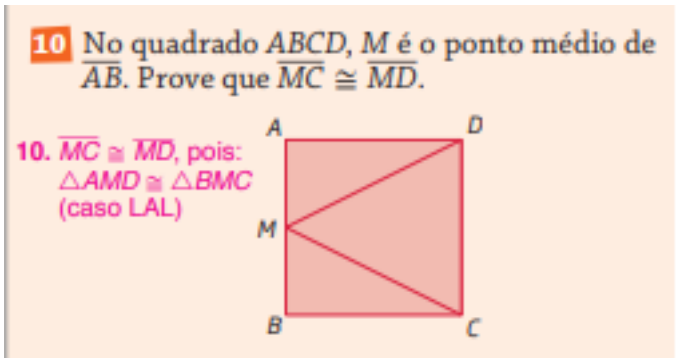
Analisemos o Exercício 9, no qual o autor solicita que se justifique a congruência dos triângulos da figura. Observamos cada um dos níveis:

- Nível 1: O aluno deve utilizar a tabela de casos de congruência e buscar por um caso que possa ser utilizado no exercício. Se necessário, permitir a utilização de materiais que possam auxiliar na visualização.
- Nível 2: O aluno deve utilizar a tabela de casos de congruência e buscar por um caso que possa ser utilizado no exercício.
- Nível 3: O aluno deve perceber o caso de congruência observando os dados da figura, notando a congruência dos ângulos opostos pelo vértice, o que é um conteúdo anteriormente já trabalhado.

- Nível 4: O aluno deve justificar sua resposta, utilizando-se tanto do caso de congruência quanto do conceito de ângulos opostos pelo vértice.

O Exercício 10 propõe que provemos a congruência de dois segmentos de reta que formam um triângulo inscrito no quadrado com vértice no ponto médio de um dos lados do quadrado.

Figura 12 – Exercício 10



Fonte: Silveira (2022, p.145).

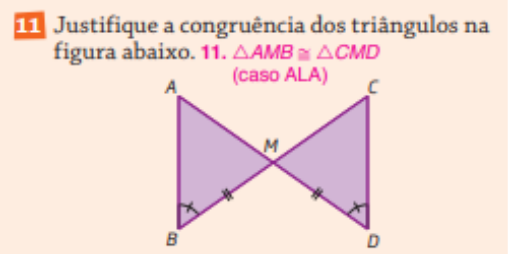
Para a resolução, os alunos devem ser comunicados de que, para ser provado, são necessários conceitos previamente estudados, e que existem diversos caminhos, e que portanto, caberá ao aluno argumentar de forma consistente e matematicamente verdadeira a partir das informações fornecidas: ABCD é quadrado e M é ponto médio de AB para chegar à conclusão de que os segmentos MC e MD são congruentes.

Os alunos nos níveis 1 e 2 provavelmente apresentaram mais dificuldade em associar os conceitos relacionados ao quadrado e ao ponto médio, podendo utilizar de um quadrado recortado em folha avulsa para manipulá-lo marcando vários pontos em um dos lados do quadrado, os quais servirão de vértice para o triângulo. Importante deixar que os alunos concluam que somente será possível ter os segmentos congruentes, quando o vértice estiver no ponto médio.

É interessante que em cada tentativa frustrada incentivados pelo professor, os alunos descrevam o motivo que era suposto, para depois da discussão com seus colegas acerca das respostas encontradas com a participação e orientação do professor, ele consiga relacionar os conceitos previamente estudados com a prova solicitada.

O Exercício 11 é bastante semelhante ao Exercício 8, e, para resolvê-lo, poderão ser utilizadas as mesmas estratégias.

Figura 13 – Exercício 11



Fonte: Silveira (2022, p.145).

Resumidamente, todas as atividades propostas pelo livro podem ser utilizadas com alunos de todos os níveis de pensamento geométrico, e favorecem, através das fases de aprendizagem, a progressão de nível conforme a Teoria de Van Hiele.

5.1.2 Obra: Araribá Conecta Matemática - 8.º ano

Realizaremos a análise do livro Araribá Conecta Matemática - 8° ano da editora Moderna com registro na PNLD de n° 0020 P24 0100 020 020. Por ser uma obra coletiva, consta como responsável a co-autora Mara Regina Garcia Gay.

Nesta obra a congruência de triângulos é tratada no Capítulo 03 e disponibiliza 5 exercícios que abordam o tema. Os autores descrevem os objetivos como sendo:

> Reconhecer o formato triangular em diversas áreas do conhecimento.
>
> Reconhecer a condição de existência de um triângulo.
>
> Classificar triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos. (Gay, 2022, p.82).

As habilidades da BNCC trabalhadas neste capítulo são EF08MA15 e EF08MA23, cuja descrição consta no Capítulo 4 do nosso trabalho.

O capítulo do livro está organizado da seguinte forma:

1) Condição de existência de um triângulo;
2) Classificação dos triângulos;
3) Soma das medidas de abertura dos ângulos internos;
4) Relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes;
5) Pontos notáveis de um triângulo;
6) Congruência;
7) Casos de congruência de triângulos.

Para o estudo deste capítulo, os autores orientam a retomada do estudo dos triângulos (elementos, condição de existência, soma das medidas de abertura de seus ângulos

internos e classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos) destacando a importância da rigidez dos triângulos utilizados em construções pela Engenharia e Arquitetura e, para tal, apresenta a figura das estruturas triangulares em Biosphere, museu dedicado ao meio ambiente, em Montreal, Canadá, 2020, sugerindo a pesquisa de outras imagens que retratem esta utilização.

Figura 14 – Introdução do capítulo sobre congruência de triângulos

CAPÍTULO 3

Os links expressos nesta coleção podem estar indisponíveis após a data de publicação deste material.

Congruência de triângulos

Habilidade da BNCC trabalhada neste Capítulo:
EF08MA15
EF08MA23

1 Triângulos

O formato triangular é constantemente utilizado nas mais diversas áreas, como arte, arquitetura, engenharia e computação. É comum também a utilização do formato triangular na construção de figuras não planas.

Neste Capítulo, você estudará alguns elementos e a classificação dos triângulos, e conhecerá outros conteúdos relacionados a essa figura geométrica.

Imagem de garota em 3-D composta de triângulos em tela de computador.

Estruturas triangulares em Biosphere, museu dedicado ao meio ambiente, em Montreal, Canadá, 2020.

Considere o triângulo ABC.

Podemos destacar alguns de seus elementos.

- Vértices: pontos A, B e C
- Lados: segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$
- Ângulos internos: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$

Em cada vértice, vamos prolongar um dos lados do triângulo ABC para obter seus **ângulos externos**.

- Ângulos externos: $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$

Observação

Podemos indicar um triângulo ABC por: $\triangle ABC$

82

Fonte: Gay (2022, p.82).

A atividade sugerida na introdução do capítulo, na página 82, propicia o desenvolvimento da fase 1 de aprendizado de Van Hiele, já que o aluno poderá pesquisar obras que utilizem do triângulo e sua rigidez, e classificá-los analisando seus elementos. Desta forma, realizará a verificação dos conhecimentos prévios com a retomada dos pré-requisitos necessários. Esta atividade pode ser realizada por alunos classificados em todos os níveis de pensamento geométrico, e aqui, mais uma vez, deixaremos de fora da análise, o nível de rigor:

- O aluno de nível 1 observará as figuras, para em seguida identificar triângulos e quadriláteros;
- O aluno de nível 2 identificará não somente as figuras, mas poderá descrevê-la esmiuçando seus elementos;
- O aluno de nível 3 além de identificar as figuras e seus elementos, poderá compará-los e apontar o que difere um triângulo de um quadrilátero no tocante a seus lados e ângulos;
- O aluno de nível 4 poderá descrever essas diferenças de modo mais formal, utilizando-se de conceitos já aprendidos para justificar a definição de um triângulo e um quadrilátero.

No estudo da condição de existência dos triângulos, o livro orienta a realização de um experimento com canudos para elaborarem hipóteses sobre essa condição, conforme a fase 2 de orientação dirigida:

> [. . .] Leve para a sala de aula diversos trios de canudinhos ou palitos de madeira com medidas de comprimento variados, de modo que alguns desses trios formem triângulos e outros não. Após as tentativas de obter triângulos, peça aos estudantes que meçam o comprimento dos lados das figuras formadas e elaborem hipóteses sobre a condição de existência de um triângulo.
>
> • Ao tentar construir um triângulo, os estudantes vão perceber que não é possível obter um triângulo com as medidas de comprimento indicadas. Comente com eles que, antes de tentar construir o triângulo, é possível verificar a existência dele, pois só é possível construir um triângulo quando a soma das medidas de comprimento de dois de seus lados é maior que a medida de comprimento do terceiro lado. (Gay, 2022, p.83).

Na retomada da classificação dos triângulos e no estudo de seus ângulos (soma da medida dos ângulos internos e a relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes), o autor ressalta que, na demonstração, poderá ser utilizada a relação entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, e orienta a retomada deste assunto, o que ocorrerá na fase 3 de aprendizagem.

É proposto que, em grupos, por meio de experimentação, os alunos tentem descobrir a relação, em um triângulo qualquer, entre a medida de abertura de um ângulo externo e dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Tal experiência pode ser utilizada na Fase 4, propondo que os grupos relatem suas descobertas e que confrontem-nas com as descobertas dos colegas, iniciando um debate sobre as possíveis divergências, no qual cada grupo justificar-se-á, descrevendo sua resolução com afirmações pautadas nos estudos anteriores, e, como conclusão, que organizem os conceitos aprendidos e escrevam a síntese (fase 5).

Essas atividades também podem ser trabalhadas com alunos de todos os níveis de desenvolvimento geométrico, lembrando que, para alunos de níveis diferentes, o professor deve utilizar linguagens diferentes.

Reiniciamos as fases de aprendizagem com o conceito dos pontos notáveis do triângulo. O livro propõe a utilização dos instrumentos de desenho e de dobraduras na construção da mediana, da altura, da bissetriz e da mediatriz de um triângulo, oportunidade para verificar os conhecimentos prévios (fase 1) e definir cada ponto notável (fase 2).

Os estudantes podem ser levados às fases 3, 4 e 5 com a experiência sugerida no livro: “verificar na prática que o triângulo fica em equilíbrio ao apoiar o baricentro na ponta do lápis”(Gay, 2022, p.210). Incentive uma discussão sobre os motivos para ocorrer o equilíbrio, e proponha que tentem o equilíbrio em outros pontos, para que, após definidos, construam um diagrama a ser utilizado para organizar informações de maneira visual.

Devemos lembrar que os estudantes no nível 1 de pensamento geométrico enxergam as figuras de maneira global, portanto, necessitam de recursos para identificar propriedades e características de cada ponto notável, e para tal sugerimos a utilização de dobraduras com triângulos escalenos e obtusângulos. Os autores descrevem esta sugestão no manual do professor:

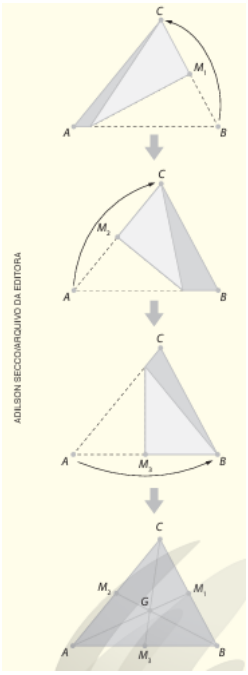
> Por meio das construções feitas com papel é possível verificar experimentalmente algumas propriedades, como o fato de o incentro ser equidistante dos três lados do triângulo. Peça aos estudantes que tracem a circunferência inscrita ao triângulo que construíram.(Gay, 2022, p.92).

Em relação ao uso de dobraduras como estratégia, o livro apresenta algumas sugestões nas orientações ao professor:

- Para obtenção das medianas e do baricentro:

> Para obter as medianas e sua intersecção (baricentro) com dobraduras de papel, peça aos estudantes que recortem triângulos quaisquer (inicialmente triângulos escalenos e acutângulos) e sigam os procedimentos indicados abaixo.
>
> 1. Obter os pontos médios M1, M2 e M3 dos lados BC, AC e AB por dobradura de um lado sobre ele mesmo.
>
> 2. Traçar as medianas A M1, B M2 e C M3, obtendo o baricentro G.

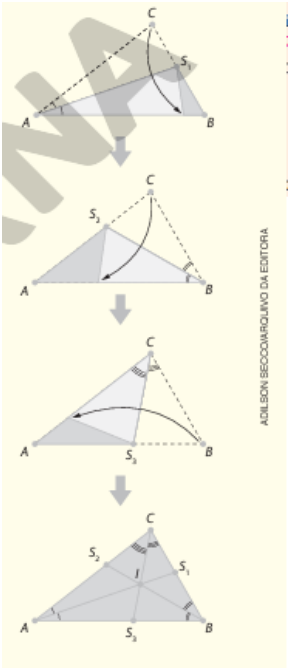
Figura 15 – Dobradura: Mediana e Baricentro



Fonte: Gay (2022, p.88).

- Para obtenção das bissetrizes e do incentro:

Figura 16 – Dobradura - Bissetrizes e Incentro



Fonte: Gay (2022, p.91).

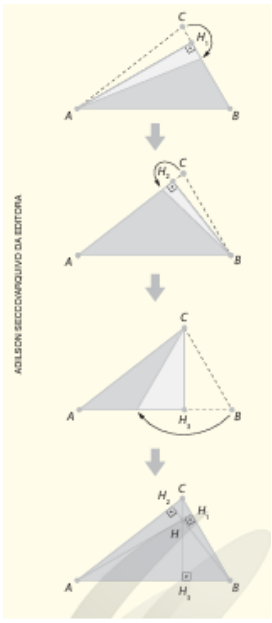
- Para obtenção das alturas e do ortocentro:

Para obter as alturas e sua intersecção (ortocentro) com dobraduras de papel, peça aos estudantes que recortem triângulos quaisquer (exceto obtusângulos, pois nesse caso o ortocentro encontra–se na região externa do triângulo) e sigam os procedimentos indicados abaixo.

1. Dobrar um lado sobre ele mesmo, de modo que o vinco passe pelo vértice que não pertence a esse lado, obtendo as alturas AH1, BH2 e CH3 .

2. As três alturas de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto H, chamado ortocentro do triângulo.(Gay, 2022, p. 90).

Figura 17 – Dobradura: Altura e Ortocentro



Fonte: Gay (2022, p.90).

A estratégia das dobraduras também poderá ser utilizada com alunos no nível 2 de pensamento geométrico, porém por conseguirem identificar algumas relações já estudadas, a experiência pode ser ampliada com triângulos com outras características, não apenas os escalenos e acutângulos.

Alunos nos demais níveis de pensamento geométrico poderão desenvolver as habilidades relacionadas ao conceito de pontos notáveis (EF08MA15) utilizando construções com instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica.

Os autores iniciam o estudo da Congruência de triângulos e destacam como seus objetivos tanto a compreensão do conceito de congruência de triângulos quanto o reconhecimento de triângulos congruentes utilizando os casos de congruência.

A sugestão para este tópico é a de que os alunos pesquisem o que significam as palavras congruente e semelhante enquanto termos da geometria e que comparem-nas (fase1), ressaltando este contraste em especial para alunos nos níveis de pensamento geométrico 1 e 2, que compreenderá melhor este conceito se puder experimentar concreta-

mente o que pode ser feito, por exemplo, com a utilização de uma malha quadriculada, o que facilita ainda mais a visualização.

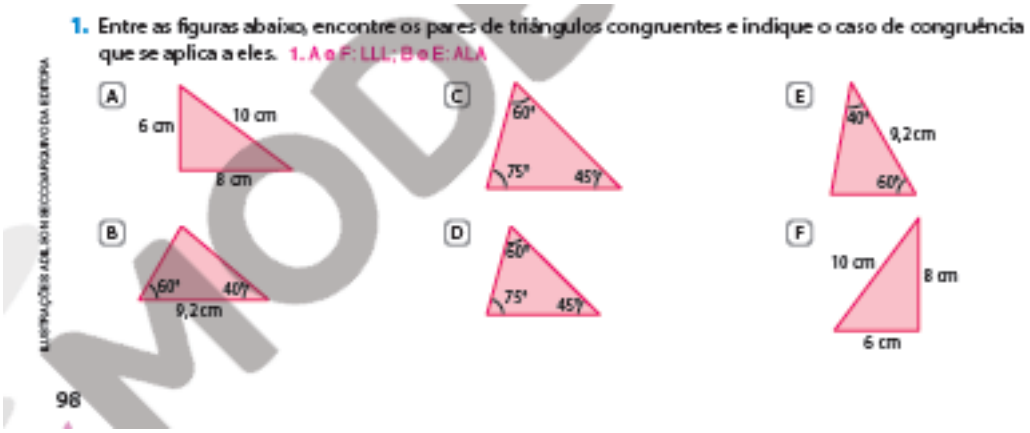
O próximo passo é definir quando triângulos serão congruentes e espera-se que percebam que é necessário verificar apenas três pares de elementos em determinada ordem (fase 2).

Alunos no nível de pensamento geométrico 1 e 2 devem experimentá-lo por meio da construção de dois triângulos com dois lados congruentes apenas, percebendo que se o ângulo entre eles não for congruente, estes triângulos não serão congruentes.

Os alunos nos demais níveis de pensamento geométrico podem, por experimentação, tentar encontrar todos os casos de congruência, e, de forma adequada a seu nível de pensamento geométrico, demonstrar para os demais colegas. Alunos no nível de pensamento geométrico 3 poderão usar como estratégias os casos que experimentados que não validaram a congruência dos triângulos (fases 3 e 4).

Com os exercícios propostos, podemos trabalhar todas as fases de aprendizagem, em todos os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. No Exercício 1, os alunos por meio de observação (fase 1) indicarão quais são os triângulos congruentes e qual caso de congruência de triângulos pode ser indicado segundo os dados informados (fase 2).

Figura 18 – Exercício 1



Fonte: Gay (2022, p.98).

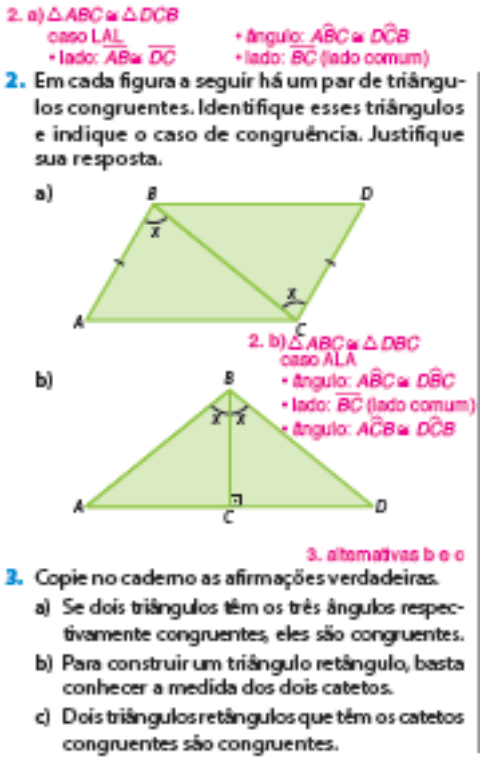
Conforme os níveis de pensamento geométrico, temos:

- Nível 1: É importante ressaltar aos alunos que as figuras são ilustrativas, portanto, eles devem buscar os pares de triângulos congruentes por meio dos dados disponíveis no exercício. Como alunos no nível 1 utilizam as imagens como meio de desenvolver e processar os conceitos estudados, devem utilizar também a comparação entre os triângulos para identificar os congruentes e indicar o caso de congruência.

- Nível 2: Os alunos devem descrever cada triângulo e realizar a comparação indicando o caso de congruência de triângulos.
- Nível 3: Os alunos devem descrever os triângulos e indicar o caso de congruência correspondente, justificando sua resposta.
- Nível 4: O aluno deverá usar uma linguagem matematicamente correta para justificar a congruência de triângulos. O aluno desse nível deve perceber que triângulos com 3 ângulos congruentes não necessariamente são congruentes, portanto AAA (ângulo-ângulo-ângulo) não é um caso de congruência.

Nos exercícios 2 e 3 é possível desenvolver a fase 2, e já que ambos os exercícios têm por objetivo estabelecer os conceitos aprendidos, é interessante que alunos que utilizaram diferentes casos de congruência tenham a oportunidade de justificar sua opção. Perceba-se que o Exercício 3 oportuniza organizar os conceitos aprendidos, identificando as sentenças verdadeiras e corrigindo as sentenças falsas.

Figura 19 – Exercícios 2 e 3



Fonte: Gay (2022, p.99).

Aqueles alunos que estiverem no nível 1 de pensamento geométrico possuem uma visão global da figura, não identificando propriedades relacionadas já estudadas, por esse motivo, precisarão de auxílio para perceber que os tracinhos na figura indicam que possuem

o mesmo tamanho. No Exercício 3, estes mesmos alunos poderão desenhá-la para que os auxilie na interpretação e definição dos casos verdadeiros.

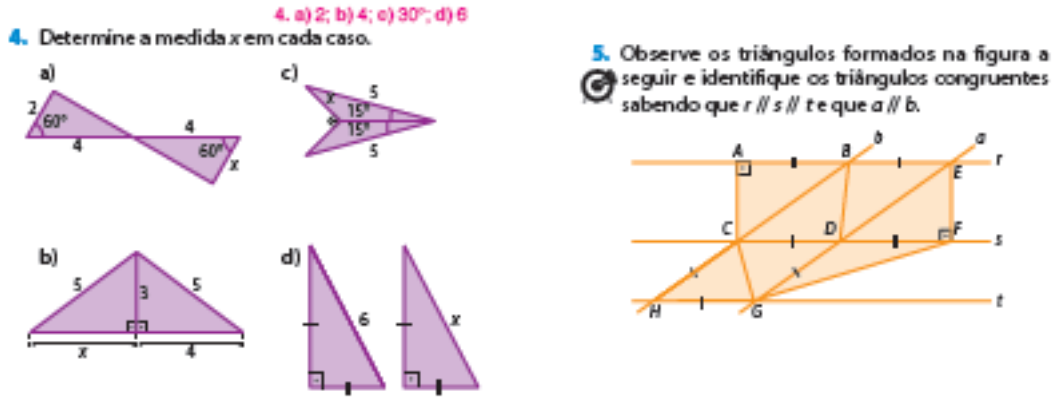
Os alunos que tiverem o nível de pensamento geométrico de análise já conseguem diferenciar os casos de congruência. É importante que os alunos criem o hábito de escrever suas justificativas, por exemplo, no item *a)*, o caso de congruência é o LAL (lado-ângulo-lado), já que possui 1 lado em comum, 1 lado congruente e 1 ângulo congruente. Os estudantes devem perceber, neste nível, que a ordem dos elementos congruentes deve ser respeitada para que os dois triângulos sejam congruentes.

Alunos nos níveis de pensamento geométrico 3 e 4 já conseguem argumentar e relacionar conceitos já aprendidos. Por exemplo, no item *a)* do Exercício 2, os alunos podem ser incentivados com o questionamento: é possível concluir que os ângulos nomeados como x sejam congruentes usando conceitos anteriores? Alunos no nível 4 poderão relacionar os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal com a congruência destes ângulos.

Depois do estudo dos casos de congruência de triângulos, os estudantes devem verbalizar o que aprenderam, apresentando suas conclusões e sínteses para os colegas. Agora, avaliaremos o que aprenderam e o modo como se comunicam matematicamente.

No Exercício 4, pode-se trabalhar a fase 3, quando o aluno se utilizará dos conceitos apreendidos, para descobrir os valores ocultos. Já no Exercício 5, um exercício desafiador, os alunos, tendo em mente a fase 4, devem mostrar suas resoluções e compará-las com as demais soluções e para por fim, na fase 5 criarem um roteiro para as diversas soluções encontradas neste exercício.

Figura 20 – Exercício 4 e 5.



Fonte: Gay (2022, p.99).

Todas as atividades proposta pelo livro podem ser utilizadas com alunos de todos os níveis de pensamento geométrico e favorecem através das fases de aprendizagem a progressão de nível conforme a Teoria de Van Hiele.

5.1.3 Obra: Matemática e Realidade - 8° ano

Analisaremos a seguir a obra Matemática e Realidade - 8° ano de autoria de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, da editora Saraiva.

A congruência de triângulos é estudada na unidade 2, em específico no Capítulo 6 e oferece 29 exercícios, porém apenas 12 foram analisados por tratarem do assunto de objetivo de estudo, o qual subdivide-se em:

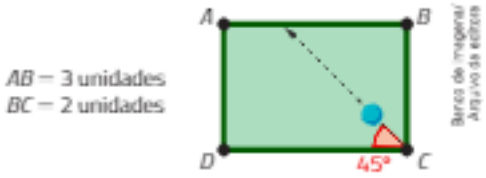
- A ideia de congruência de triângulos;
- Conceito matemático de congruência de triângulos;
- Casos de congruência.

A habilidade na BNCC que será desenvolvida com este estudo, segundo os autores é a EF08MA14, descrita no Capítulo 3 de nosso trabalho.

Na abertura da unidade, o livro traz a proposta referente ao jogo de bilhar:

> Você já jogou bilhar? Esse jogo surgiu por volta do século XV e suas regras podem variar dependendo do estilo de jogo adotado. Importante saber que 15 bolinhas coloridas devem ser encaçapadas em uma mesa retangular usando tacos de madeira. Cada vez que uma bola bate numa tabela, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão e os jogadores que conhecem geometria plana sabem bem disso. Na mesa de bilhar a seguir, se for realizada uma tacada na bola azul, quantas vezes ela vai tocar as tabelas antes de cair em uma caçapa? E em qual caçapa ela cairá? Represente o trajeto da bola com um desenho.(Iezzi; Machado; Dolce, 2021, p. 68).

Figura 21 – Representação da mesa de bilhar



Fonte: Iezzi et al.(2021, p.68).

Os autores sugerem que os alunos utilizem de aplicativos de jogos para experimentar o jogo de bilhar. Na figura apresentada no livro para essa atividade, é permitido que os alunos criem hipóteses sobre os locais que a bola tocará na tabela, considerando que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Apesar da oportunidade de falar sobre as relações entre lados e ângulos, sugerimos que se favoreça antes de mais nada a definição de triângulos congruentes, já que a atividade não atenderia alunos no nível 1 de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Uma sugestão para adaptar esta atividade a esta parcela de alunos, é a de, além de utilizar uma linguagem mais adequada, que se prepare um material que seja em certa

medida refletivo, e cuja forma, imitando a mesa de bilhar, ao ter sobre si projetada a luz de uma lanterna de laser, possa assim simular o traçado do caminho a ser percorrido pelas bolas de bilhar.

Devemos nos lembrar de que alunos, em especial aqueles no nível 1, são bastante visuais e que atividades abstratas não os atenderia tão prontamente.

Ao trabalhar a ideia de congruência de triângulos, é sugerido uma experiência na qual o aluno deva reproduzir os triângulos equiláteros apresentados, recortá-los e sobrepô-los verificando se coincidem. Os autores repetem a experiência com triângulos escalenos e isósceles, favorecendo assim a retomada de classificação de triângulos. Estes experimentos são de grande auxílio, ainda mais aos alunos nos níveis de pensamento 1 e 2, para que se compreenda o conceito de congruentes.

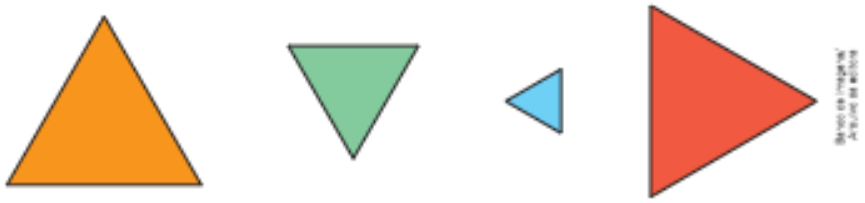
Figura 22 – Experimento proposto para definir Congruência de Triângulos

A ideia de congruência de triângulos

Vamos fazer alguns experimentos envolvendo triângulos. Para realizá-los, você vai precisar de: lápis de cor, transferidor, tesoura, régua e folhas de papel.

Experimento 1

Observe os triângulos abaixo.



Eles são triângulos equiláteros. Com transferidor e régua, você pode verificar que:

- os ângulos internos desses triângulos são todos de 60°;
- os lados desses triângulos medem 3 cm (no triângulo laranja); 2 cm (no triângulo verde); 1 cm (no triângulo azul); 3 cm (no triângulo vermelho).

Agora, siga estes procedimentos:

1º) Em uma folha de papel avulsa, copie os triângulos acima e pinte-os com as mesmas cores representadas.

2º) Recorte os quatro triângulos.

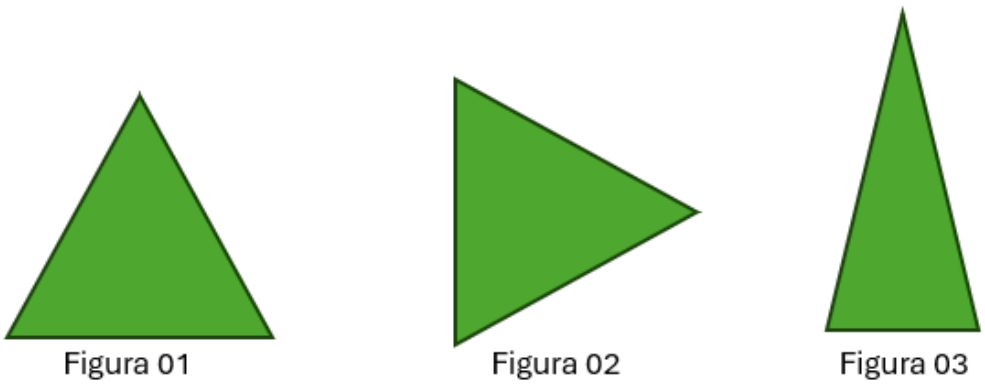
3º) Sobreponha os triângulos e tente fazer coincidir exatamente, em forma e tamanho, dois deles.

Os triângulos laranja e vermelho, que se sobrepõem, são **congruentes**.

Fonte: Iezzi et al. (2021, p. 69).

Para complementar e dinamizar a aquisição do conceito de congruência, sugerimos a atividade da Revista Nova Escola[1] de autoria de Renata Akemi Maekawa, que, se adaptada, poderia auxiliar os alunos na compreensão de congruência e na retomada de conceitos de transformações geométricas. Nesta atividade são feitos alguns questionamentos aos alunos:

Figura 23 – Transformações no plano e figuras congruentes



Fonte: Maekawa (2018).

1) Ao movimentarmos as figuras, quais são as características que serão mantidas?

2) Quais características serão alteradas?

3) A partir da figura 01 é possível encontrar a figura 03 utilizando as transformações geométricas?

Após a identificação dos triângulos semelhantes e da retomada das transformações geométricas, os alunos poderão produzir um triângulo qualquer, descrever suas caraterísticas, projetá-lo utilizando-se da rotação, da translação e a reflexão, explicando o porquê de serem congruentes. Os alunos em níveis de pensamento 3 e 4 poderão utilizar vocabulário matematicamente correto e adquirido com os conceitos trabalhados em suas descrições e conclusões.

Outra sugestão, é a utilização de *softwares* de geometria dinâmica, que ampliam as possibilidades de atividades de transformações geométricas (translação, rotação e reflexão) na comparação dos triângulos e/ou figuras, e desta forma é possível definir quando dois triângulos ou duas figuras são congruentes e também estimular a percepção visual, tão importante para os alunos nos níveis 1 e 2 de pensamento geométrico. Encontramos

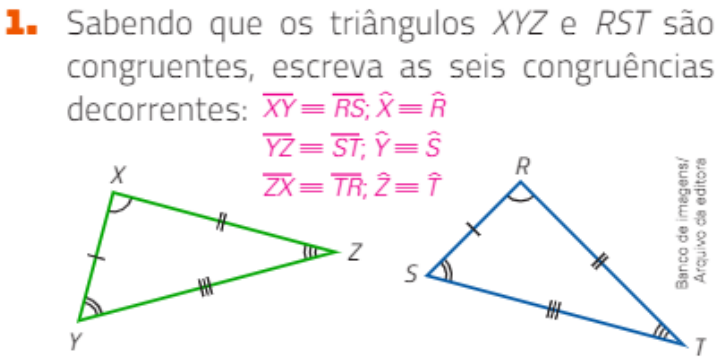
[1] https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/8ano/matematica/transformacoes-no-plano-e-figuras-congruentes/177

algumas sugestões no GEOGEBRA, *software* dinâmico de matemática, que tem por objetivo apoiar a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) e inovações no ensino[2].

Voltando a análise das atividades propostas no livro temos:

O Exercício 1 propõe que o aluno, sabendo que são congruentes, escreva as 6 congruências decorrentes, proporcionando o trabalho nas fases 1 e 2 de aprendizagem segundo a Teoria de Van Hiele, quando os alunos através da observação identificam os elementos de cada triângulo (fase 1) e os comparam, associando os elementos congruentes sinalizados (fase 2). Este Exercício poderá ser resolvido por alunos de todos os níveis de pensamento geométrico.

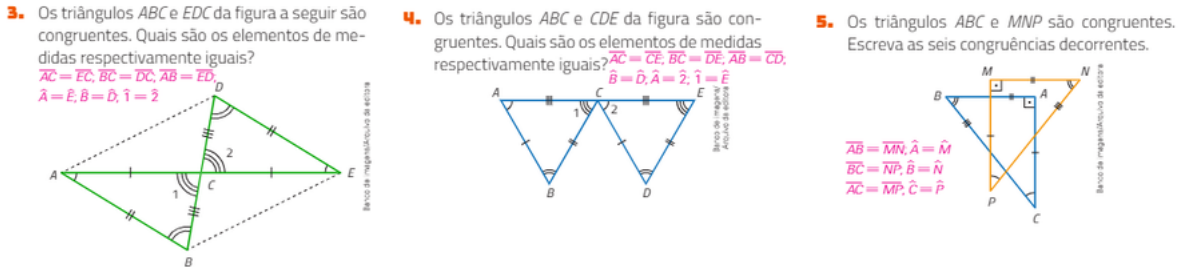
Figura 24 – Exercício 1



Fonte: Iezzi et al.(2021, p.72).

Sugerimos que os exercícios 3, 4 e 5, nos quais os alunos devem identificar os elementos congruentes (fase 1) e descrevê-los (fase 2), sejam trabalhados primeiramente, por atenderem aos alunos de todos os níveis de pensamento geométrico e estimularem a observação e comparação dos elementos.

Figura 25 – Exercícios 3, 4 e 5



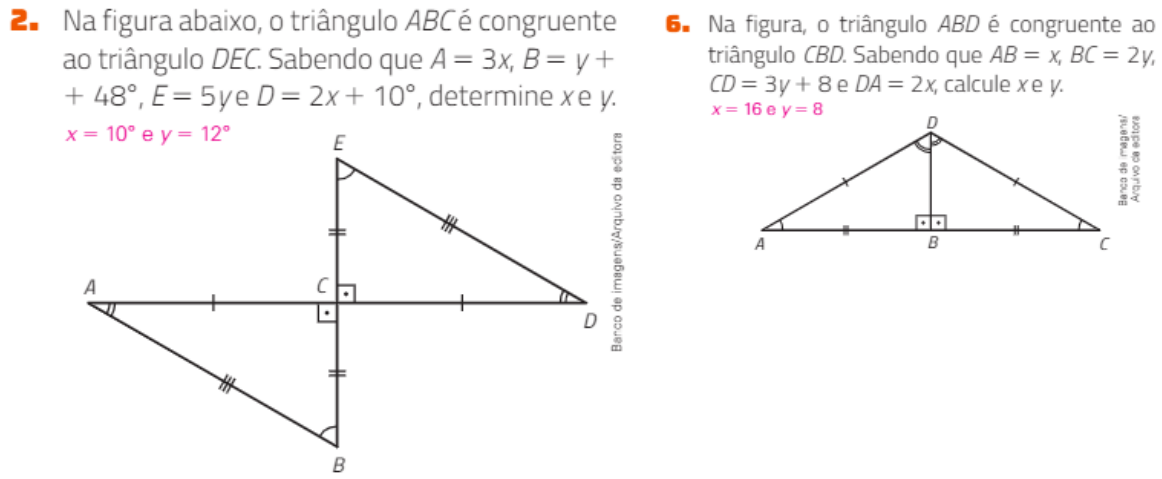
Fonte: Iezzi et al.(2021, p.72).

[2] https://www.geogebra.org/m/egasdzv9
https://www.geogebra.org/m/pkgf3xzg
https://www.geogebra.org/m/kbtbcuud

No Exercício 3, o conceito de ângulos opostos pelo vértice deve ser retomado. Alunos no nível 1 e 2 podem ser auxiliados com o uso de palitos ou canudos, com os quais poderão simular ângulos opostos pelo vértice. Peça que eles coloquem esses palitos sobre uma folha, e que os desenhem, para depois compararem ambos os ângulos. Alunos nos níveis 3 e 4 podem utilizar as propriedades do paralelogramo para explicar a congruência dos elementos.

Nos exercícios 4 e 5, os conceitos de translação geométrica e rotação geométrica podem ser revisitados. É importante que os alunos compreendam que as características dos triângulos são mantidas com as transformações geométricas. Para auxiliar alunos no nível 1 e 2, poderá ser utilizada a malha quadriculada, os alunos no nível 3 poderão identificar a transformação geométrica aplicada, enquanto que os alunos no nível 4, já além de identificarem a transformação geométrica, poderão descrevê-la.

Figura 26 – Exercícios 2 e 6



Fonte: Iezzi et al.(2021, p.72 e 73).

Os exercícios 2 e 6 demandam conhecimentos algébricos em sua resolução (fase 4), além da compreensão do conceito de congruência (fases 1 e 2) e possibilitam a retomada de conceitos como de ângulos opostos pelo vértice (fase 3), e assim sendo, adequam-se tanto mais para alunos no nível de dedução formal, que apresentam mais habilidade na compreensão de dados abstratos.

Para auxiliar os alunos nos níveis iniciais de pensamento geométrico, o professor, ao adequar o vocabulário usado com esses alunos, poderá salientar que, ao multiplicar por 2, como em 2x e 2y, estamos buscando o dobro do valor, assim como ao multiplicar por 3, estaremos buscando o triplo do valor.

Retomando a apresentação dos casos de congruência, os autores utilizam a construção de triângulos para definir cada caso:

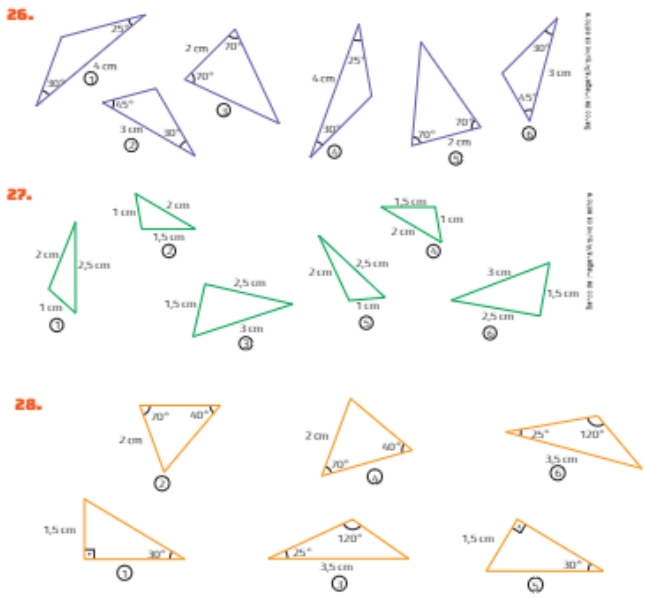
- Construir um triângulo, dados dois lados e o ângulo que eles formam (caso lado -

ângulo - lado);

- Construir um triângulo, dados um lado e os ângulos a ele adjacentes (caso ângulo - lado - ângulo);
- Construir triângulos, dados um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto (caso lado - ângulo adjacente - ângulo oposto);
- Comparar os lados nos casos anteriores (caso Lado - lado - lado).

O livro, no caso dos casos de congruência de triângulos, propõe nos exercícios 26, 27 e 28: “Cada atividade a seguir apresenta seis triângulos. Indique os pares de triângulos congruentes e o caso que justifica a congruência.”(Iezzi; Machado; Dolce, 2021, p.80 e 81). Esta atividade pode ser executada por alunos em todos os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e possibilita o desenvolvimento das fases de aprendizado 1 (Informação e investigação), 2 (orientação dirigida) e 3 (explicação).

Figura 27 – Exercícios 26, 27 e 28

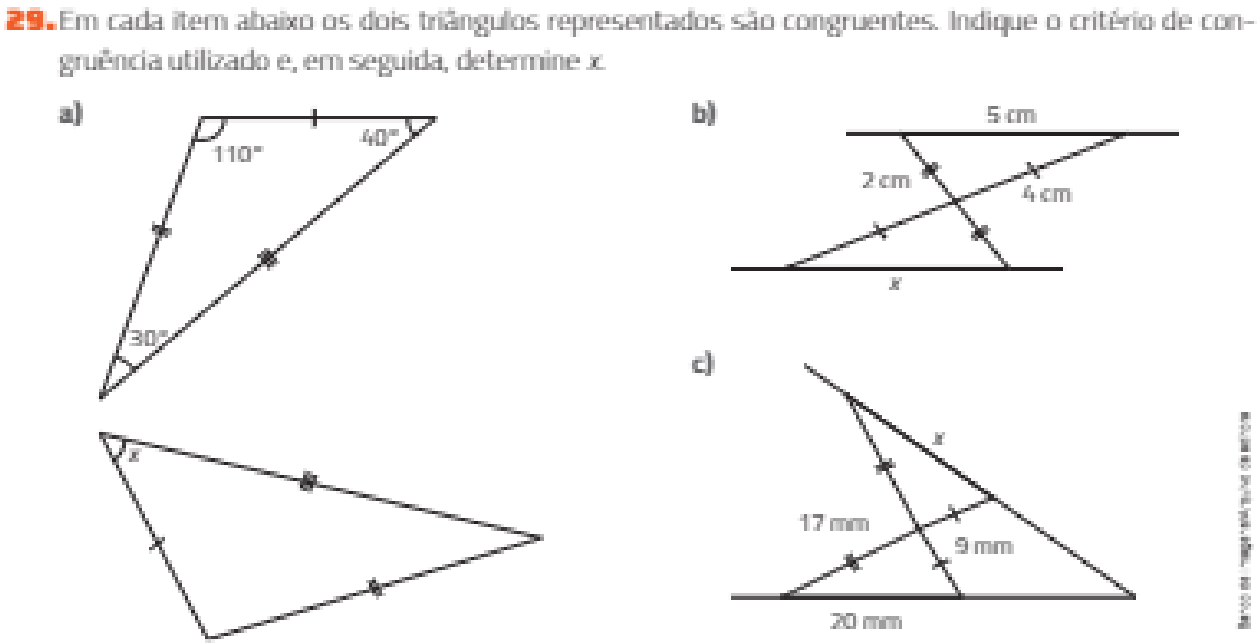


Fonte: Iezzi et al. (2021, p. 80 e 81).

No Exercício 29: “Em cada item abaixo os dois triângulos representados são congruentes. Indique o critério de congruência utilizado e, em seguida, determine x” (Iezzi; Machado; Dolce, 2021, p. 81), vemos que as fases de aprendizagem podem ser trabalhadas, uma vez que, através da observação da figura, o aluno deverá identificar os elementos congruentes (fase 1), a partir dos dados coletados deve identificar o caso de congruência (fase 2) e justificá-lo (fase 3), para, utilizando do conceito de congruência, determinar o

valor de x (fase 4). Este Exercício poderá ser desenvolvido por alunos em todos os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

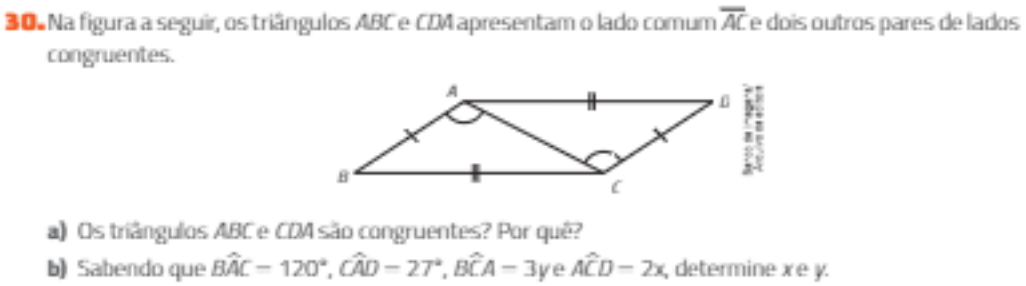
Figura 28 – Exercício 29 - Matemática e Realidade



Fonte: Iezzi et al. (2021, p.81).

No Exercício 30, os autores solicitam que a partir da figura, determine-se se os triângulos são congruentes e que seja justificado, utilizando um dos casos de congruência, o que pode ser realizado por alunos em todos os níveis de pensamento geométrico. Já o item *b)* da questão: "Sabendo que BAC = 120°, CAD = 27°, BCA = 3y e ACD = 2x, determine *x* e *y*."(Iezzi; Dolce; Machado, 2021, p.81), aos alunos nos níveis de desenvolvimento do pensamento 1 e 2, sugerimos que a linguagem esteja adaptada, associando *2x* ao dobro e *3y* ao triplo do tamanho.

Figura 29 – Exercício 30



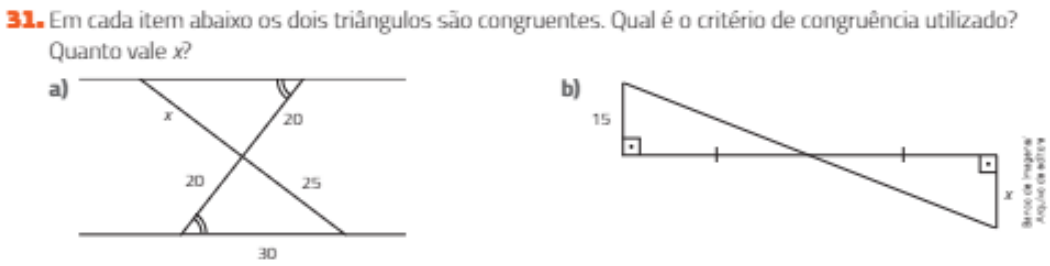
Fonte: Iezzi et al. (2021, p.81).

O Exercício 31: "Em cada item abaixo os dois triângulos são congruentes. Qual é o

critério de congruência utilizado? Quanto vale *x* ? “ (Iezzi; Machado; Dolce, 2021, p.81) é semelhante ao Exercício 29, adequado para alunos de todos os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

No item *a)* poderá ser revisto o conceito de ângulos alternos internos e opostos pelo vértice. Os alunos nos níveis 1 e 2 podem ser auxiliados quando reforçamos a informação de que o enunciado afirma serem congruentes, portanto podemos assumir que lados e ângulos possuem a mesma medida.

Figura 30 – Exercício 31



Fonte: Iezzi et al.(2021, p.81).

Em relação à análise realizada no livro Matemática e Realidade, notamos que a obra apresenta algumas atividades que necessitam da atenção dos professores no intuito de auxiliar os alunos com estratégias que contribuam com o nivelamento dessas atividades para alunos, principalmente, dos níveis de pensamento geométrico 1 e 2, possibilitando o avanço nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, porém é possível realizar um trabalho pautado na Teoria de Van Hiele, com alunos de todos os níveis.

5.1.4 Considerações

Após analisar em separado as três obras selecionadas, realizamos um levantamento onde dividimos os exercícios de congruência de triângulos e seus casos por fase de aprendizagem conforme a Teoria de van Hiele.

A obra Desafios da Matemática com Ênio Silveira apresentada neste trabalho na Seção 5.1.1, mostra no capítulo sete, onze exercícios distribuídos da seguinte maneira:

- Os exercícios 1 e 2 tratam da classificação e da condição de existência dos triângulos;
- Os exercícios 3, 4, 5 e 6 são exercícios que propõe a construção de triângulos e suas cevianas, por esse motivo não foram analisados;
- Os exercícios 7, 8, 9, 10 e 11 referem-se a congruência de triângulos e seus casos.

Na obra sob coordenação de Maria Regina Garcia Gay, intitulada Araribá Conecta Matemática apresentada na Seção 5.1.2 deste trabalho, são oferecidos cinco exercícios que abordam o tema estudado.

Os exercícios do livro estão organizados da seguinte forma:

- Nas páginas 84 e 85 são propostos 6 exercícios que tratam da classificação e da condição de existência dos triângulos, não analisados em nosso trabalho;
- Na página 87 são propostos 6 exercícios que tratam da relação dos ângulos internos e externos dos triângulos, também não analisados por nós;
- Na página 94 são propostos 6 exercícios que abordam o assunto referente as cevianas e os pontos notáveis, também não analisados nesse trabalho;
- Nas páginas 98 e 99 os 5 exercícios propostos foram analisados e realizada sugestões pautadas na teoria de Van Hiele.

Em Matemática e Realidade (Seção 5.1.3) são oferecidos seis exercícios que tratam de congruência de triângulos, dezessete exercícios que utilizam a construção para definir os casos de congruência de triângulos que não foram analisados nesse trabalho, e finalizam com mais seis exercícios que envolvem o conteúdo trabalhado: a congruência e seus casos.

Os exercícios referentes a esse capítulo estão organizados da seguinte maneira:

- Nas páginas 72 e 73 são 6 exercícios que trabalham a noção de congruência, analisados e realizadas as sugestões;
- Nas páginas 74, 76, 78 e 80, são 13 exercícios que trabalham a construção de triângulos;
- Na página 80, os 6 exercícios trabalhados tratam de congruência de triângulos e os casos de congruência, analisados e realizadas as sugestões.

Na Figura a seguir, apresentamos os exercícios conforme a possibilidade de desenvolver as fases de aprendizagem segundo a teoria.

Figura 31 – Tabela dos exercícios conforme as Fases de Aprendizagem.

Livro	Exercício	Página	Fases de Aprendizagem Teoria de Van Hiele			
			Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Desafios da Matemática com Ênio Silveira	07	144	x	x	x	
	08	145		x	x	
	09	145				x
	10	145				x
	11	145				x
Total	05		01	02	02	03
Araribá Conecta-Matemática	01	98	x	x		
	02	99		x		
	03	99		x		
	04	99			x	
	05	99				x
Total	05		01	03	01	01
Matemática e Realidade	01	72	x	x		
	02	72		x	x	
	03	72	x	x		
	04	72	x	x		
	05	73	x	x		
	06	73			x	x
	26	80	x	x	x	
	27	80	x	x	x	
	28	81	x	x	x	
	29	81	x	x	x	x
	30	81	x	x	x	x
	31	81	x	x	x	x
Total	12		10	11	08	04
Total Geral	**22**		**12**	**16**	**11**	**08**

Fonte: De autoria própria.

5.1.4.1 Fase de Aprendizagem: Informação ou investigação.

Na fase de aprendizagem 1, intitulada investigação, consideramos os exercícios que propõe a constatação da congruência através da observação.

Esses exercícios apresentam características da fase de aprendizagem 1, quando solicitam a verificação da congruência de triângulos e a indicação do caso correspondente, ou quando pedem para descrever as congruências existentes observando seus elementos, conforme trechos grifados nos enunciados na Figura 32.

Figura 32 – Enunciados - Fase de Aprendizagem 1

Livro	Exercício	Página	Enunciado do exercício
Desafios da Matemática com Ênio Silveira	07	144	E cada item, **verifique se os triângulos são congruentes e,** em caso afirmativo, indique o caso correspondente.
Araribá Conecta – Matemática	01	98	Entre as figuras a seguir, **encontre os pares de triângulos congruentes** e indique o caso de congruência que se aplica a eles.
Matemática e Realidade	01	72	Sabendo que os triângulos XYZ e RST são congruentes, **escreva as seis congruências decorrentes**:
	03	72	Os triângulos ABC e EDC da figura a seguir são congruentes. **Quais são os elementos de medidas respectivamente iguais**?
	04	72	Os triângulos ABC e CDE da figura são congruentes. **Quais são os elementos de medidas respectivamente iguais**?
	05	73	Os triângulos ABC e MNP são congruentes. **Escreva as seis congruências decorrentes**.
	26	80	Cada atividade a seguir apresenta seis triângulos. **Indique os pares de triângulos congruentes e o caso que justifica a congruência**.
	27	80	Cada atividade a seguir apresenta seis triângulos. **Indique os pares de triângulos congruentes e o caso que justifica a congruência**.
	28	81	Cada atividade a seguir apresenta seis triângulos. **Indique os pares de triângulos congruentes e o caso que justifica a congruência**.
	29	81	Em cada item abaixo os dois triângulos representados são congruentes. **Indique o critério de congruência utilizado** e, em seguida, determine x.
	30	81	Na figura a seguir, os triângulos ABC e CDA apresentam o lado comum AC e dois outros pares de lados congruentes. a) **Os triângulos ABC e CDA são congruentes? Por quê?**
	31	81	Em cada item abaixo os dois triângulos são congruentes. **Qual é o critério de congruência utilizado**? Quanto vale x?

Fonte: De autoria própria.

Para os alunos no nível de desenvolvimento de pensamento geométrico de visualização, não podemos esquecer que as figuras constantes nos exercícios são ilustrativas, portanto, nem sempre são precisas em relação à medida de seus elementos, acarretando, na procura de auxiliar esses alunos, a necessidade de adaptar essas atividades realizando a construção precisa, que pode ser feita em aplicativos disponíveis na *internet*, possibilitando que os alunos possam manipular o material, por exemplo, realizando a sobreposição.

Para a organização dos dados observados, os alunos poderão necessitar de uma tabela construída previamente pelo professor, facilitando a visualização dos dados e por

consequência a conclusão, neste caso, referente a congruência de triângulos e o caso referente.

Para trabalharmos com os alunos de nível de desenvolvimento do pensamento geométrico 2, de análise, por conseguirem identificar e descrever de maneira informal os elementos dos triângulos, segundo a teoria de van Hiele, podemos dispensar a manipulação do material, porém, provavelmente esse aluno ainda precisará da tabela, previamente construída pelo professor, para sua organização e conclusão.

Alunos no nível 3, de dedução formal, possivelmente conseguem construir sua própria tabela, por formar relações de recursos em padrões e formas. Os alunos neste nível devem ser incentivados a descreverem suas conclusões.

Finalmente, alunos no nível 4 e 5, de dedução formal e rigor, deverão ser motivados a utilizar em suas descrições símbolos matemáticos e linguagem formal, além de buscarem novas relações, anteriormente estudadas que podem ser utilizadas ao definir a congruência de triângulos.

5.1.4.2 Fase de Aprendizagem: Orientação dirigida.

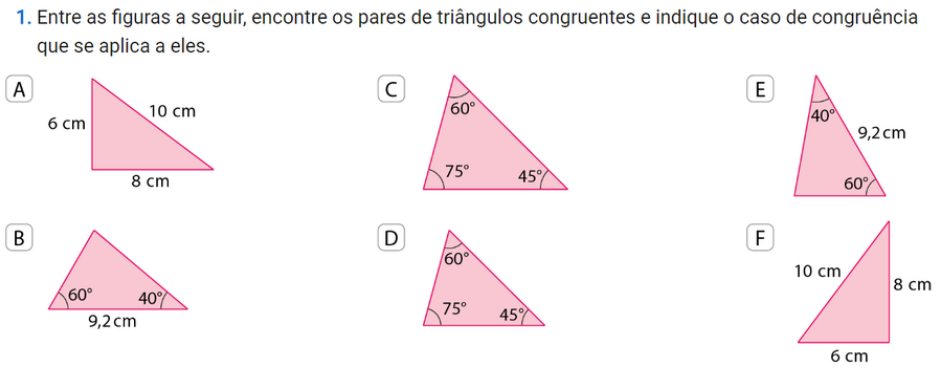
Na fase 2, de orientação dirigida encontramos exercícios que propõe a identificação dos casos de congruência a partir dos dados apresentados. Identificamos 14 exercícios nos livros analisados que nos permitem desenvolver habilidades relacionadas a essa fase.

Notamos em relação a esta fase que os exercícios, de maneira geral, solicitam a constatação da congruência ou, em alguns casos, já afirmam que os triângulos são congruentes, pedindo apenas a identificação do caso aplicado.

Percebemos também, que todos os exercícios que possibilitam trabalhar a fase 1, também possibilitam desenvolver habilidades relacionadas a fase 2, ocasionando que algumas sugestões para esses exercícios se repitam:

Nível 1- Necessidade de material adaptado que facilite o/ou possibilite o seu manuseio, auxiliando o aluno a perceber e/ou constatar a congruência e preencher a tabela previamente disponibilizada pelo professor, como o exemplo abaixo, que poderia ser utilizada no Exercício 01 do livro Araribá Conecta Matemática:

Figura 33 – Exercício 1



Fonte: Gay (2022, p.98).

Figura 34 – Tabela 2 – Tabela de auxílio na resolução do exercício 01.

Triângulo	LADO 1	LADO 2	LADO 3	ÂNGULO 1	ÂNGULO 2	ÂNGULO 3
A	6 cm	10 cm	8 cm	X	X	X
B	9,2 cm	X	X	60°	40°	X
C	X	X	X	60°	75°	45°
D	X	X	X	60°	75°	45°
E	9,2 cm	X	X	60°	40°	X
F	6 cm	10 cm	8 cm	X	X	X

Fonte: De autoria própria.

O professor pode orientar os alunos a utilizar, após preencher a tabela, canetas coloridas facilitando a visualização e também ressaltar que o aluno deve observar se dentro dos dados disponibilizados pelo exercício podemos constatar a congruência, com ênfase aos triângulos C e D, que apresentam 3 ângulos congruentes, porém não existe este caso de congruência.

Nível 2: Uma ferramenta interessante a ser utilizada, para estudantes no nível 2, é a tabela, como no exemplo acima.

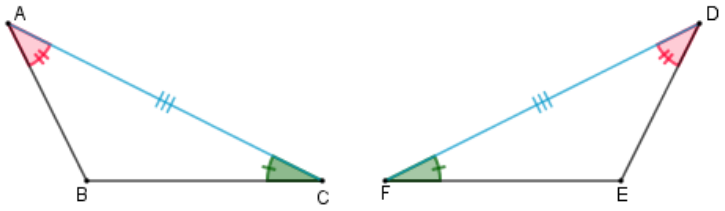
Nível 3: O aluno, no nível 3, poderá utilizar uma tabela, que ele próprio construirá, observando sua necessidade conforme o exercício.

Sugerimos, neste nível, que o professor proponha que os alunos construam para sua consulta um resumo dos casos de congruência ilustrado, como esse encontrado no site do Clube de Matemática da OBEMEP[3]:

[3] http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-para-leitura_024-um-pouco-sobre-congruencia-de-triangulos/

Figura 35 – Sugestão de Resumo

Caso A.L.A. (ângulo – lado – ângulo):
Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado compreendido por eles, então estes triângulos são congruentes.



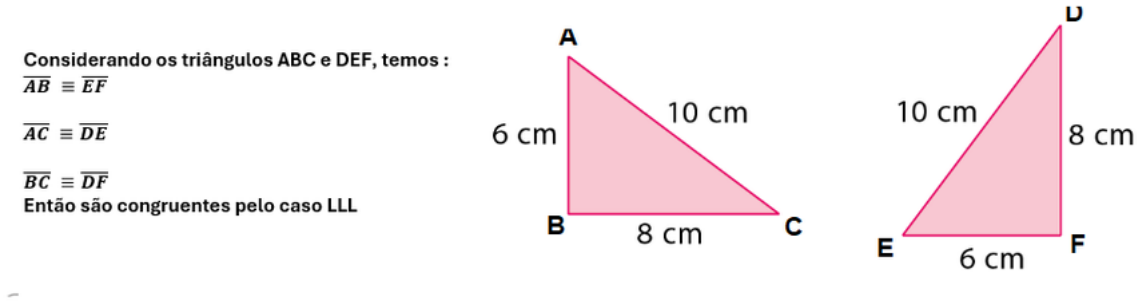
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-para-leitura_024-um-pouco-sobre-congruencia-de-triangulos/

Nível 4: O aluno, no nível 4, poderá constatar a congruência e o caso de congruência aplicado sem ferramentas auxiliares.

Para alunos neste nível devemos proporcionar e incentivar a utilização da linguagem matemática, sempre justificando, com os dados do exercício, sua escolha.

Um exemplo é estabelecer que os triângulos A e F são congruentes pelo caso de congruência LLL (lado-lado-lado), descrever a congruência, conforme a Figura 36.

Figura 36 – Possível resposta do aluno enquadrado no nível 4.



Fonte: Gay (2022, p.98, adaptado).

5.1.4.3 Fase de Aprendizagem: Explicação.

Identificamos os exercícios desta fase de aprendizagem por solicitarem que o aluno justifique o caso de congruência procurando utilizar uma linguagem matemática em sua descrição.

Nesta fase temos dois exercícios em Desafios da Matemática com Ênio Silveira que nos possibilitam o desenvolvimento, os exercícios 7 e 8. Em Araribá conecta matemática, encontramos apenas o exercício 3, no entanto, em Matemática e Realidade , 8 exercícios se encaixam na possibilidade de desenvolvimento dessa fase.

Os exercícios que podemos trabalhar a fase de aprendizagem da explicação apresentam a oportunidade de se explorar conceitos anteriormente trabalhados como a propriedade de ângulos opostos pelo vértice em retas concorrentes e as propriedades relacionadas a duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal.

Nesses exercícios a congruência pode já estar definida, ressaltando o objetivo da justificativa dessa congruência através da análise dos dados apresentados.

Alunos no nível 1 e 2 de pensamento geométrico que necessitem de auxílio na interpretação das figuras, podem ser orientados a observar a sinalização de congruência através dos tracinhos em quantidades iguais, ou até mesmo, da reprodução da figura em material que proporcione a manipulação para preenchimento de uma tabela, assim como a mostrada na seção anterior.

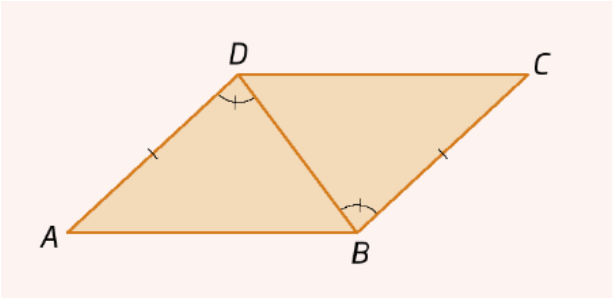
O professor deve observar seus alunos e perceber se os mesmos, naquele momento, podem construir o seu próprio material para manipulação ou se é necessário que ele forneça esse material.

Ainda para alunos desses níveis é importante que tenhamos, como professores, o cuidado de adaptarmos a linguagem utilizada, sem esquecer de ressaltar a forma matemática de se comunicar, auxiliando a ampliar esse vocabulário, por exemplo:

- Ao dizer que são congruentes, sempre acrescentar com o termo de medidas iguais: Estes ângulos são congruentes, eles possuem as mesmas medidas;
- O monômio 2x corresponde ao dobro da medida; x/2 a metade da medida.

A figura abaixo, retirada do Exercício 8 item a, da página 145 do livro Desafios da Matemática com Ênio Silveira, exemplifica uma forma de apresentar ao aluno o auxiliando com o vocabulário, de maneira a conduzi-lo a interpretação.

Figura 37 – Exemplo de apresentação do vocabulário ao aluno.



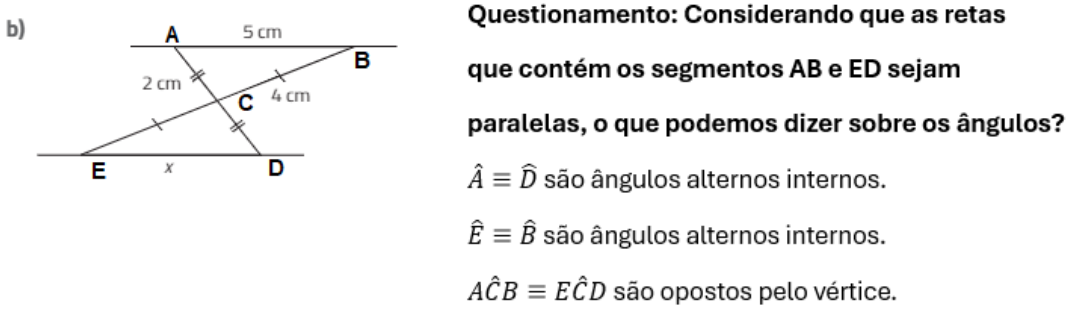
Fonte: Silveira (2022, p.145, adaptado).

Já alunos de nível de dedução informal e dedução formal, devem ser incentivados a utilizar conceitos anteriormente estudados para justificar a congruência dos elementos, e depois indicar o caso de congruência de triângulos mais adequado.

O aluno precisa compreender que se os triângulos são congruentes possuem todos os elementos correspondentes congruentes, e se pudermos comprovar a congruência desses elementos, todos os casos de congruência podem ser utilizados.

Usaremos como exemplo, para alunos de nível 3, o Exercício 29-b da página 81 do livro Matemática e Realidade, acrescentando a informação das retas paralelas e solicitando que comprovem a congruência dos ângulos, como na figura abaixo.

Figura 38 – Exercício 29-b da página 81 do livro Matemática e Realidade,



Fonte: Iezzi et al. (2021, p.81, adaptado).

O desafio para os alunos de nível 4 poderá ser menos específico: Comprove a congruência de todos os elementos correspondentes dos triângulos da figura, proporcionando a possibilidade de utilização de diversos conceitos e propriedades já apresentadas.

Nesta fase, recomenda-se, com base em experiência pessoal, que o professor incentive os alunos a construírem o que chamaremos de “Bloquinho do Saber Geométrico”. Para confeccionar este bloquinho, pode ser utilizada uma caderneta espiral pequena, como a mostrada na figura abaixo, facilmente encontrada em papelarias. Nessa caderneta, os alunos devem registrar todos os conceitos e propriedades geométricas estudadas.

Figura 39 – Modelo de caderneta: Bloquinho do saber geométrico.

Fonte: https://www.bacdesign.com.br

O Bloquinho do saber geométrico servirá de fonte de pesquisa para os alunos no

momento de resolução dos exercícios, e os ajudará na forma de registro que deve ser utilizada.

5.1.4.4 Fase de Aprendizagem: Orientação livre.

Na fase de aprendizagem de orientação livre, os exercícios devem, segundo nossa análise, proporcionar aos alunos além da utilização de conceitos anteriormente estudados, a oportunidade de utilizar o vocabulário recentemente adquirido.

Nas obras analisadas classificamos 8 exercícios nesta fase:

- Exercícios 9, 10 e 11 em Desafios da Matemática com Ênio Silveira;
- Exercício 5 em Araribá Conecta - Matemática;
- Exercícios 6, 29, 30 e 31 em Matemática e Realidade.

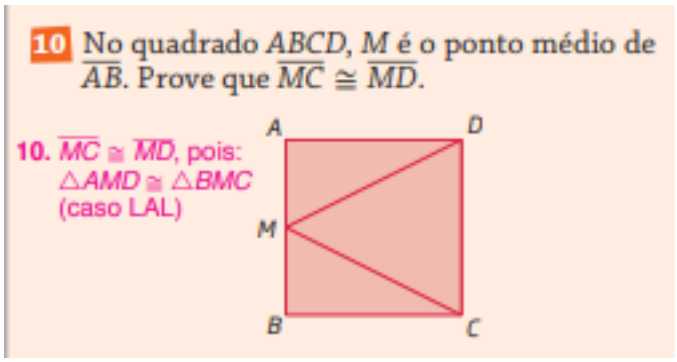
Em alguns desses exercícios é proposto aos alunos o desenvolvimento do conceito de congruência de triângulos de forma inversa a apresentada nos exercícios classificados nas outras fases.

O conceito a ser desenvolvido é de que se os triângulos são congruentes, seus elementos correspondentes também são e podem ser utilizados para provar a congruência desses elementos.

Portanto, esses exercícios procuram demonstrar a aplicabilidade da congruência de triângulos dentro da geometria, preparando-os para estudos posteriores como o dos quadriláteros.

Um exemplo é o Exercício 10 da página 145 da obra de autoria de Ênio Silveira, mostrado na Figura 40.

Figura 40 – Exercício 10



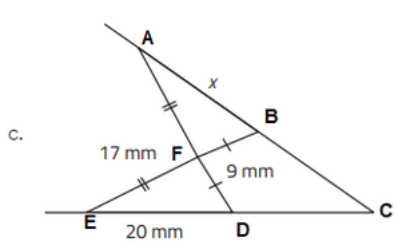
Fonte: Silveira (2022, p.145).

Neste exercício é possível provar a congruência dos segmentos comprovando a congruência dos triângulos ADM e MCB.

Cabe ressaltar que para provar a congruência desses triângulos o aluno deve entender conceitos anteriores, como o de que o ponto médio divide o segmento AB em dois segmentos de mesma medida.

Exercícios nesta fase também propõe que se encontre valores desconhecidos dos elementos e para a realização dos cálculos é necessário a garantia da congruência de triângulos, como mostra o Exercício 29 do livro Matemática e Realidade.

Figura 41 – Exercício 29 c



Banco de imagens/Arquivo da editora

Os triângulos ABF e EFD são congruentes pelo caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado):

AF é congruente a EF (AF≡EF);

$A\hat{F}B \equiv E\hat{F}D$ (ângulos opostos pelo vértice);

FB é congruente a FD (FB≡FD).

Então os segmentos AB e ED são congruentes.

AB = 20 mm

Fonte: Iezzi (2021, p.81, adaptado).

Os alunos nos níveis de pensamento 1 e 2, no desenvolvimento de exercícios classificados na fase 4, poderão ser auxiliados por uma tabela de registro dos elementos.

Nesse exercício em específico, poderá ser proposto que imaginem o que ocorreria se dobrássemos o triângulo AEC, unindo os vértices A ao E.

Esses alunos devem ser incentivados a descrever os passos de sua observação, de maneira informal, o que os auxiliará na organização de seu pensamento melhorando a visualização de sua conclusão.

Os alunos no nível de pensamento 3 e 4, poderão como na resolução apresentada na figura acima, utilizar os conceitos anteriores estudados, e para tal poderão se valer do bloquinho de saber geométrico.

5.1.4.5 Fase de Aprendizagem: Integração.

Esta fase é o momento onde o aluno organiza o conhecimento aprendido.

A atividade relacionada nesta fase é de revisão e resumo dos conceitos e propriedades utilizados nos exercícios propostos.

Recomenda-se a confecção de diagramas para organizar visualmente as informações após a realização dos exercícios. Esses diagramas podem ser elaborados em equipes, individualmente, de forma manual ou utilizando ferramentas disponíveis na *internet*, como o CANVA[4].

[4] https://www.canva.com/pt_br/

Um exemplo desse tipo de diagrama pode ser encontrado no *site* Mindomo[5], como na figura abaixo, que oferece um *software* colaborativo para a criação de mapas mentais.

Figura 42 – Exemplo de diagrama.

Fonte: https://www.mindomo.com/pt/mindmap/congruencia-em-triangulos-143568f8183a46ef8854704c1557c6dd

Posteriormente o professor pode pedir aos alunos que apresentem esses diagramas para os colegas, proporcionando comparação e possibilitando a ampliação e a melhoria dos diagramas inicialmente confeccionados.

[5] https://www.mindomo.com/pt/

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa procurou mostrar como os livros de Matemática distribuídos pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Fundamental anos finais – PNLD-2024 podem ser adaptados com o intuito de contribuírem para o desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo critérios e indicadores organizados com base na teoria Van Hiele. Para isso, foram selecionadas três obras com distribuição em escolas públicas.

O objetivo de nosso estudo é de, por meio dos livros selecionados, analisar as possibilidades de uma abordagem à luz das contribuições da Teoria de Van Hiele, no que são sugeridas estratégias que ampliem a condução bem sucedida do processo de ensino e aprendizagem, processo pelo qual, ao ser bem balanceado, logra atingir esta meta.

Historicamente, o estudo da geometria no Brasil padeceu de descaso e abandono que se arrastaram décadas a fio, e tão somente em tempos recentes, com alteração das leis de Diretrizes e Bases e a implantação dos PCNs, que a geometria passa a ocupar um espaço significativo, condizente com sua importância. Para um trabalho que vise o avanço de um nível de pensamento geométrico, para outro, superior, é necessário atividades pensadas e orientadas para atender as necessidades acadêmicas de todos os alunos.

Escolhemos analisar os livros didáticos, cientes de que são o suporte mais importante e acessível a todos os professores, e a partir deles, sugerir atividades que auxiliem no processo de aquisição do pensamento geométrico.

Em suma, a teoria de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, criada por Pierre Marie Van Hiele e Dina Van Hiele-Geoldof, propõe que alunos progridem segundo os níveis de desenvolvimento e por meio da vivência de atividades planejadas cuidadosamente pelo professor, que deve considerar, neste planejamento, as 5 fases de aprendizagem (informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração). A progressão de um nível para outro não ocorre em um curto intervalo de tempo, são necessárias estratégias e linguagens que atendam o nível de raciocínio em que o aluno se enquadra.

A pesquisa proporcionou uma análise criteriosa do conceito de congruência de triângulos, revelando que, nos livros analisados, é possível realizar um trabalho baseado na Teoria de Van Hiele. As sugestões dos autores direcionadas aos professores e as atividades propostas, mesmo que de forma indireta, atendem a alunos de todos os níveis de pensamento geométrico estabelecidos pela teoria de Van Hiele e facilitam a aplicação das fases de aprendizagem definidas por essa teoria.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Decreto n° 9099, de 18 de julho de 2017. *Programa Nacional do Livro e do Material Didático*, 2017. Disponível em: http://pnld.mec.gov.br. Acesso em: 10 jan. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais: Matemática*, MEC/SEF, Brasilia, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*, MEC, Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 05 jan. 2024.

BROEKMAN, H.; VERHOEF, N. Een leven lang wiskundig denken. *Universiteit Utrecht.*, v. 0, n. 2, jun. 2012. Disponível em: https://www.academia.edu/16429380/Pierre_Marie_van_Hiele_1909_2010_Lifelong_mathematical_thinking_. Acesso em: 05 out. 2023.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. *Quadrante*, XXIV, n. 1, 2015.

CARVALHO, J. B. P. F. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de matemática na década de 30. 2000. Disponível em: https://app.uff.br/riuff/handle/1/323. Acesso em: 10 dez. 2023.

CORDEIRO, A. E. da S. *Material didático e o modelo de Van Hiele para a aprendizagem significativa de semelhanças*. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro.

COSTA, C. B. S.; SILVA, J. R. P. da. ORIENTAÇÕES DO BNCC E PCN: uma análise da geometria dos anos finais do Ensino Fundamental. In: *VI Congresso Nacional de Educção*. [S.l.: s.n.], 2019.

D'AMBROSIO, U. História da Matemática no Brasil: Uma Visão Panorâmica até 1950. *Saber y Tiempo: Revista de Historia de la Ciencia*, 1999.

GAY, M. R. G. (ed.). *Araribá Conecta Matemática*: 8° ano. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

GOMES, M. B. C. *Utilizando materiais concretos e o modelo de van hiele para o ensino de quadriláteros no ensino fundamental*. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional).

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade*: 8° ano. 10. ed. São Paulo: Atual, 2021.

IEZZI, G.; MACHADO, A.; DOLCE, O. *Matemática e Realidade*: 8° ano. 10. ed. São Paulo: Atual, 2021.

JAIME, A.; GUTIÉREZ, A. *Una Propuesta e Fundamentación para la Enseñanz de la Geometría*: El modelo de Van Hiele. Sevilla: Alfar: En S. Llinares y M. V. Sánchez, 1990. 295-384 p.

LIMA, E. L. *Estórias da Educação no Brasil*: de Pombal a Passarinho. Rio de Janeiro: Editora Brasília, 1975.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista*, n. 4, 1995.

PAVANELLO, R. M. *O Abandono do Ensino de Geometria*: Uma visão histórica. 1989. 201 p. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Educação) — UNICAMP.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, Campinas, v. 1, n. 1, 1993.

PÉRTILE, K. *O Modelo de Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico*: Uma análise de obras do Programa Nacional do Livro Didático. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — PUCRS.

TEIXEIRA, J. A.; JARDIM, V. B. F. A Base Nacional Comum Curricular Na Perspectiva Da Teoria De Van Hiele. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática*. [S.l.: s.n.], 2019.

VILLIERS, M. de. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 12, n. 2, 2010.