UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Um estudo sobre a Análise Combinatória nas provas do ENEM no período de 2016 a 2022: Desempenho dos alunos do município de Mazagão - AP

Macapá-AP
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Um estudo sobre a Análise Combinatória nas provas do ENEM no período de 2016 a 2022: Desempenho dos alunos do município de Mazagão - AP

Mestrando: Raimundo Laudemir dos Santos

Orientador: Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Dissertação apresentada à banca do curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, como requisito para a obtenção do Título de Mestre Profissional em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

Macapá-AP

2024

I
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB-2 / 1569

S237e Santos, Raimundo Laudemir dos.
Um estudo sobre a análise combinatória nas provas do ENEM no período de 2016 a 2022 desempenho dos alunos do município de Mazagão - AP / Raimundo Laudemir dos Santos. - Macapá, 2024.
1 recurso eletrônico. 124 folhas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Macapá, 2024.
Orientador: José Walter Cárdenas Sotil.
Coorientador: .

Modo de acesso: World Wide Web.
Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Análise combinatória. 2. Ensino médio. 3. Enem. I. Sotil, José Walter Cárdenas, orientador. II. Universidade Federal do Amapá . III. Título.

CDD 23. ed. – 373.011

Santos, Raimundo Laudemir dos. Um estudo sobre a análise combinatória nas provas do ENEM no período de 2016 a 2022 desempenho dos alunos do município de Mazagão - AP . Orientador: José Walter Cárdenas Sotil. 2024. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal do Amapá , Macapá, 2024.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PROFMAT

Raimundo Laudemir dos Santos

Um estudo sobre a Análise Combinatória nas provas do ENEM no período de 2016 a 2022: Desempenho dos alunos do município de Mazagão - Ap

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do programa de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de Raimundo Laudemir dos Santos, intitulada "**Um Estudo sobre a Análise Combinatória nas provas do ENEM no período de 2016 a 2022: Desempenho dos alunos do município de Mazagão-AP**", após terem inquerido o acadêmico e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita a homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Macapá, 29 de fevereiro de 2024

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil – Orientador
Presidente da Banca Examinadora (PROFMAT/UNIFAP)

Prof. Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco
Avaliador interno (PROFMAT/UNIFAP)

Ítalo Bruno Mendes Duarte

Prof. Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte
Avaliador externo (UEAP)

Dedico este trabalho ao meu querido avô, **João Pantoja** (in memoriam) que sempre me incentivou nos estudos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus por ter me dado saúde e força para que eu conseguisse superar as dificuldades.

A minha mãe, Elizabeth dos Santos Pantoja, por estar sempre presente e que sempre me incentiva a não desistir.

Aos meus filhos, Jhenifer Lima dos Santos e João Miguel Lima dos Santos.

A minha avó, Maria dos Santos Pantoja, por sempre está ao meu lado me aconselhando.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil, pelo suporte na elaboração desse trabalho com correções e sugestões.

A minha esposa e companheira, Emanuela Lima da Cruz, que sempre esteve ao meu lado nessa caminhada, apoiando-me e incentivando.

Aos meus amigos de turma que foram essenciais para que eu pudesse concluir esse mestrado.

A todos os professores do curso que contribuíram de forma significante para meu aprendizado.

“Quando lhe disserem que algo em que você acredita é impossível, tenha paciência. Talvez ele não saiba de verdade que a vida é o eterno ato de transformar o impossível em realidade.”

Roberto Thinyashiki

RESUMO

A Análise Combinatória é conteúdo indispensável no rol de conhecimentos adquiridos pelos alunos, em especial aos que se submetem ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), uma vez que tal conteúdo é frequente nesse exame. Após uma observação, em uma aula de preparação para o referido processo seletivo, em uma escola do município de Mazagão – Amapá, percebeu-se que os alunos tinham bastantes dificuldades no referido conteúdo, surgindo a indagação a respeito do desempenho dos alunos de Mazagão nas provas anteriores do exame ENEM. Nesse sentido, o referido trabalho teve como finalidade investigar quais fatores contribuíram para tais dificuldades, bem como verificar o desempenho dos alunos, do referido município, nessa prova nacional, com o intuito de fornecer aos docentes subsídios de como e o que trabalhar com seus alunos sobre o referido tema. Para tanto, foi feita uma pesquisa quantitativa, em que foram coletados dados referentes aos exames de 2016 a 2022 com o intuito de verificar os erros e acertos dos discentes no referente objeto de estudo. Após o término da pesquisa, foram identificados fatores que contribuíram para tais dificuldades, alguns desses fatores são: não estudou, no ensino médio, tal conteúdo por parte de alguns alunos, interpretação errada da questão, entre outros, assim como foram identificados erros cometidos pelos alunos nas provas do exame em questão relacionadas ao conteúdo estudado, dentre os erros encontrados podemos destacar uso e aplicabilidade incorreta das fórmulas, confusão entre o princípio aditivo e multiplicativo. Também foram registrados os principais tipos de contagem abordados nas provas e sugeridas maneiras de como trabalhar esses tipos de contagem tais como trabalhar o conteúdo de forma contextualizada, partir de situações-problemas para poder inserir os conceitos e fórmulas.

Palavras – chave: Análise Combinatória; Ensino Médio; Enem,

SUMMARY

Combinatorial Analysis is an essential content in the list of knowledge acquired by students, especially those who take the National High School Exam (ENEM), since such content is frequent in this exam. After an observation, in a preparation class for the aforementioned selection process, in a school in the municipality of Mazagão – Amapá, it was noticed that the students had a lot of difficulties in the aforementioned content, raising the question regarding the performance of students from Mazagão in the previous tests of the ENEM exam. In this sense, the aforementioned work aimed to investigate which factors contributed to such difficulties, as well as verify the performance of students, from the aforementioned municipality, in this national test, with the aim of providing teachers with information on how and what to work with their students. on the aforementioned topic. To this end, quantitative research was carried out, in which data relating to exams from 2016 to 2022 were collected in order to verify the errors and successes of students in the relevant object of study. After the end of the research, factors that contributed to such difficulties were identified, some of these factors are: some students did not study such content in high school, misinterpretation of the question, among others, as well as errors made by the students in the exam tests in question related to the content studied, among the errors found we can highlight incorrect use and applicability of formulas, confusion between the additive and multiplicative principle. The main types of counting covered in the tests were also recorded and ways were suggested on how to work these types of counting, such as working the content in a contextualized way, starting from problem situations to be able to insert concepts and formulas.

Keywords: Combinatorial, Analysis, High School, Enem.

Sumário

1. INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é um conteúdo em que são trabalhadas basicamente as quatro operações básicas – adição, subtração, multiplicação e divisão – contudo, o mesmo é um dos mais difíceis no ensino médio. Tais dificuldades estão relacionadas a uma série de fatores que vai desde o despreparo por parte dos docentes para ministrar tal assunto até o próprio desinteresse do aluno, já que é um conteúdo abordado de forma abstrata por grande parte dos professores.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), um dos documentos que orientam a educação no Brasil, é destacada a importância do raciocínio combinatório na formação dos educandos do ensino médio, bem como o cuidado que os professores precisam ter ao desenvolvê-lo. De acordo com esse documento:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p.257).

Devido à grande variedade que podem apresentar os problemas de contagem, a Análise Combinatória se torna um conteúdo complexo tanto para ensinar quanto para aprender. Um grande obstáculo que os estudantes do ensino médio encontram nesses problemas diz respeito à questão de ler e interpretar, uma vez que tais problemas não vêm pedindo explicitamente o que se usar para determinar sua solução, mas vêm acompanhados de longos textos onde o aluno precisa identificar o que usar dentre os vários tipos de contagem, tarefa essa que não é fácil uma vez que caso cometa algum equívoco na interpretação irá, com certeza, errar a questão.

Nesse sentido, diversos autores (Roa, 2000; Batanero, 1997; Hadar e Hadass, 1981; Roa e Navarro-Pelayo, 2001; Fernandes e Correia, 2007) listam os principais erros apresentados pelos alunos ao resolver questões envolvendo raciocínio combinatório.

- Interpretação incorreta do enunciado;
- Cálculo aritmético incorreto;
- Utilização incorreta da estratégia escolhida;
- Escolha de uma estratégia pouco eficaz ou ineficaz;
- Deixar de considerar alguns agrupamentos possíveis;
- Não ser capaz de observar padrões e generalizar soluções.

Outro fator que corrobora a dificuldade na resolução de problemas sobre Análise combinatória é a aplicação das fórmulas, uma vez que são muitas fórmulas diferentes as quais devem ser aplicadas em cada situação específica, sendo que existem problemas em que tais fórmulas devem ser agrupadas para se chegar à resposta correta. Além disso, os docentes apenas apresentam tais fórmulas sem se preocupar com o porquê de usar e como elas surgiram.

Nessa linha de pensamento, Esteves (2001) considera que o estudo de Análise Combinatória deveria ser iniciado no Ensino Fundamental de forma significativa, sem apresentação de fórmulas, e que no Ensino Médio, o aluno pudesse ter esse conceito institucionalizado, apresentando as fórmulas de forma significativa e não apenas como algoritmo que o leve a mecanizar e associar palavras-chave.

Diante do exposto acima, nota-se que problemas de contagem se tornam complexos porque não se tem domínio do mesmo. E para se ter domínio de um determinado objeto do conhecimento é imprescindível que se reserve um tempo para estudar, em especial para o conteúdo envolvendo problema de contagem faz-se necessário um bom tempo de estudo, uma vez que o mesmo além de ser extenso também é um pouco complexo. Porém, observou-se, na escola trabalhada, que tal tempo não é suficiente para abordar esse conteúdo de forma completa, uma vez que o mesmo consta no Guia de Aprendizagem apenas no 4.º bimestre, sendo que muitas vezes nem é estudado.

Nesse sentido, o presente trabalho irá abordar como a Análise Combinatória é trabalhada no Ensino Médio, na referida escola, sendo esse um conteúdo de suma importância para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) haja vista que, após uma consulta nas provas dos anos anteriores do Enem, verificou que o mesmo está presente em praticamente todas as edições do referido exame.

O referido trabalho tem como objetivo identificar porque os alunos, do município de Mazagão Novo, têm dificuldades em Análise Combinatória no ensino médio e até que ponto essa deficiência influencia os mesmos no que tange aos seus desempenhos no ENEM, haja vista que, como mencionado acima, tal conteúdo lança mão essencialmente das operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) na resolução dos problemas e também apresentar os principais métodos de contagem abordados no ENEM, bem como os mesmos são trabalhados.

O referido trabalho está dividido em 7 tópicos. No primeiro tópico apresentamos a importância da análise combinatória segundo os pensamentos de alguns autores. Também discorremos a respeito das dificuldades em se resolver questões de contagem.

No tópico 2, apresentamos a história do ENEM desde sua criação aos dias atuais, apresentando todas suas datas marcantes, bem como falamos da matriz referencia da matemática, em especial a da matemática, em especifico a habilidade e competência referente ao nosso objeto de estudo.

Já no tópico 3, Embasamento Teórico sobre a Análise Combinatória, tratamos dos conceitos sobre os métodos de contagem, apresentando os conceitos e exemplos.

No tópico 4, exibimos as questões a respeito dos métodos de contagem, referente as anos de 2016 a 2022 fazendo uma discussão a cerca das resposta dos discentes do município de Mazagão e apresentando solução das mesmas. Também é apresentado o número de questões por ano do conteúdo abordado, bem como os métodos de contagem mis recorrentes no ENEM.

No tópico 5, é discorrido sobre a pesquisa de campo, a qual ocorreu em uma escola do município de Mazagão-AP, no referido tópico apresentamos os três momentos em que se deu a referida intervenção.

No tópico 6, é apresentado a análise e discussão referente a intervenção, onde é feita a discussão de algumas soluções expostas dos discentes.

Nas considerações finais, destacamos a importância do ENEM como principal porta para entrada no ensino superior, bem como enfatizar a importância da análise combinatória nas provas do referido exame.

2. HISTÓRICO SOBRE O ENEM E O CONTEÚDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM.

Por volta de 1990, com a criação da Lei de Diretrizes e bases da educação Nacional (LDB, lei n.º 9394/1996) foi colada em prática uma reforma com o intuito de modificar o sistema educacional brasileiro. Essa Lei incluía na educação básica o Ensino Médio, como sendo a última etapa de formação. Em seu artigo 35, a LDB trazia os objetivos gerais dessa última etapa da educação básica.

O Ensino Médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV – a compreensão dos fundamentos científicos - tecnológicos dos processos produtivos, relacionados à teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Dessa forma, o Ensino Médio se torna parte integrante da educação básica dos estudantes brasileiros, o qual tinha como pressuposto a continuação dos estudos, a formação do indivíduo para o mercado de trabalho, o desenvolvimento ético e humano das pessoas, etc.

Dando continuidade nessa onda de mudanças do sistema educacional brasileiro, o Ministério da Educação publicou o texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), cuja proposta do mesmo era elaborar um currículo pautado em competências e habilidades, apoiado em áreas do conhecimento e eixos cognitivos. No entanto, ao contrário das diretrizes, os PCNEM não têm caráter obrigatório, mas sim um caráter norteador para a construção do novo currículo do Ensino Médio.

Baseados nesses documentos, e suas visões a respeito da última etapa da Educação Básica, visão essa que tem como princípio norteador uma educação voltada à formação da cidadania, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi pensado.

Em 1998, através da portaria n.º 438, foi criado pelo Ministério da Educação à primeira versão do Exame nacional do Ensino Médio (ENEM). Em seu primeiro formato o ENEM, composto de sessenta e três questões, tinha como objetivo avaliar o desempenho dos estudantes no término da educação básica com base em quatro objetivos distintos relacionados (BRASIL, 1998);

- À autoavaliação do cidadão para fins de continuidade dos estudos e sua inserção no mercado de trabalho;
- À criação de referência de caráter nacional para os estudantes egressos da modalidade do ensino médio;
- Fornecer às modalidades do ensino superior os subsídios necessários;
- Servir de acesso aos cursos profissionalizantes pós – médio.

Em 2001, o governo concedeu isenção na taxa de inscrição aos alunos oriundos da rede pública, tal medida fez crescer consideravelmente o aumento de inscritos no certame, que passou de 390 mil inscritos em 2000 para mais de 1,6 milhão em 2021. Sendo que nas duas primeiras edições era cobrada uma taxa no valor de R$ 20,00 e em 2000 essa taxa passou para R$ 35,00. Outra mudança significativa nessa época foi a duração da prova, que teve um aumento de uma hora, passando de 4 horas para 5 horas de duração.

Em 2005 o governo, pela Lei n.º 11.096/2005, criou o Programa Universidade para Todos (ProUni). Tal programa foi criado com o intuito de fornecer bolsas de estudos, parciais e integrais, em estabelecimentos privados através da nota do ENEM. O ProUni foi visto, pelos egressos do ensino médio, como uma oportunidade de entrada no Ensino Superior, tanto que, em 2006, das 3,7 milhões de inscrições no ENEM, 1,6 milhões de inscrições foram de estudantes que já haviam concluído o ensino médio.

Aprile e Barone (2009) destacam como alguns dos benefícios oferecidos pelo programa: a concessão de bolsa integral para brasileiros não portadores de diploma de curso superior e cuja renda per capita não seja superior ao valor de até um salário mínimo e meio e; bolsa parcial (50% do valor total) para brasileiros não portadores de diploma de curso superior e cuja renda familiar per capita seja superior ao valor de até três salários mínimos.

Já em 2009, por meio de uma nota, a Associação Nacional dos Dirigentes de Instituições Federais de ensino Superior (ANDIFES) é convidada a participar de um debate cujo teor é a substituição total ou parcial dos vestibulares tradicionais pela nota do ENEM.

Tal nota traz o ENEM como instrumento capaz de propor uma reestruturação nos currículos do ensino médio.

> A nova prova do ENEM traria a possibilidade concreta do estabelecimento de uma relação positiva entre o ensino médio e o ensino superior, por meio de um debate focado nas diretrizes da prova. Nesse contexto, a proposta do Ministério da Educação é um chamamento. Um chamamento às IFES para que assumam necessário papel, como entidades autônomas, de protagonistas no processo de repensar o ensino médio, discutindo a relação entre conteúdos exigidos para ingresso na educação superior e habilidades que seriam fundamentais, tanto para o desempenho acadêmico futuro, quanto para a formação humana. Um exame nacional unificado, desenvolvido com base numa concepção de prova focada em habilidades e conteúdos mais relevantes, passaria a ser importante instrumento de política educacional, na medida em que sinalizaria concretamente para o ensino médio orientações curriculares expressas de modo claro, intencional e articulado para cada área de conhecimento. (INEP, 2009).

Então, em 2009, o governo cria o Sistema de Seleção Unificada (Sisu) cujo objetivo era selecionar estudantes às vagas ofertadas pelas instituições públicas de ensino superior, ou seja, os alunos concorreriam, com uma só nota, a vaga de qualquer universidade pública do país inscrita no sistema de seleção, sendo que a seleção se daria exclusivamente por meio da nota do ENEM. Assim, o ENEM passou, não somente, a avaliar as habilidades e competências dos concluintes do ensino médio, mas também ofertar vagas para ingresso no ensino superior no Brasil.

Além dos objetivos já citados, tais ações também tinham como objetivo a reestruturação curricular do ensino médio e a mobilidade estudantil.

> Proporcionar a concorrência de vagas em qualquer IES que aderisse ao Sistema de seleção, possibilitando ao estudante realizar a prova em seu próprio estado e cidade, sem a necessidade exigida pelo vestibular tradicional, no qual era necessário o deslocamento até a cidade da instituição para realizar a prova. Com a mudança, criam-se oportunidades de concorrer a vagas, em nível nacional, o que de fato é a questão central do SISU, “a seleção nacional”. (LUZ; VELOSO, 2014, p. 74).

Como o ENEM se tornaria a principal porta de entrada para o ensino superior, em 2009, houve uma reformulação na prova do mesmo, sendo que passou de 63 questões para 180 questões, além da redação, passando a ser aplicado em dois dias, sábado e domingo. Nesse processo de reformulação, a prova foi dividida em quatro áreas: Ciências Humanas, Linguagens e Códigos, Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias. Tal formato perdura até os dias atuais.

Como citado anteriormente, o Enem é composto por quatro áreas do conhecimento, sendo que cada uma dessas áreas possui sua Matriz Referencial. A Matriz Referencial é um documento estruturado com base nas habilidades e competências necessárias para resolver situações problemas relacionadas a um objeto de conhecimento a ser abordado em determinada prova, ou seja, serve para nortear o educando em seus estudos.

Na área da Matemática e suas Tecnologias a matriz referencial está dividida em sete competências, sendo que cada uma dessas competências é compostas por algumas habilidades que o estudante precisa adquirir ao longo de seus estudos. Na competência 01, segundo a matriz de referência do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), temos:

Competência 01 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade 01 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais e reais;

Habilidade 02 – Identificar padrões numéricos ou princípio de contagem;

Habilidade 03 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

Habilidade 04 – avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas;

Habilidade 05 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Na Habilidade 02, especificamente na parte do princípio de contagem, temos nossos objetos de estudo, pois, essa habilidade engloba as noções de arranjos, combinações, permutações e questões relacionadas à teoria dos conjuntos. A Análise Combinatória é um tema sempre presente nas provas do Enem, tanto que desde 2009 sempre aparece pelo menos uma questão, sendo que as questões a respeito do tema abrangem desde o Princípio Fundamental da Contagem até os agrupamentos - Permutação, Arranjo e Combinação.

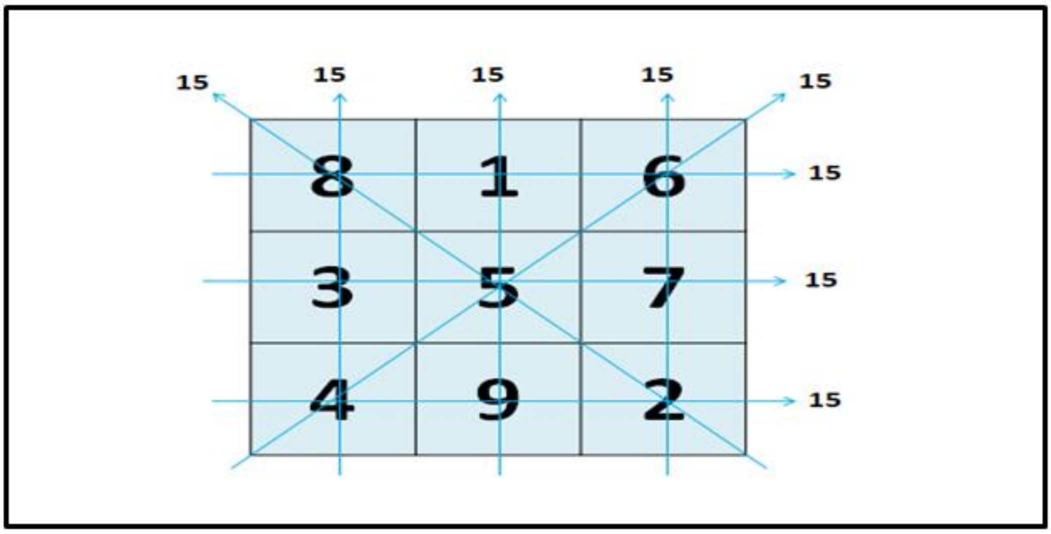
Vale ressaltar que a dificuldade na resolução desses tipos de questões, principalmente no Enem, está em interpretá-las a mesma, uma vez que após identificar como abordar o problema os cálculos são teoricamente simples.

3. EMBASAMENTO TEÓRICO SOBRE A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Desde os primórdios, o homem se preocupa com o processo de contagem, devido à necessidade de manter controle sobre o que possuía. Tal método de contagem se dava de um em um objeto, para tal utilizavam pedras, nós, marcas em ossos, etc. Com tudo, com o passar do tempo houve a necessidade de se contar quantidades cada vez maiores, o que se tornava quase impossível de se contar um a um, sendo assim necessário juntar esses objetos em grupos, surgindo assim outros métodos de contagem. Assim, esse progresso exigiu um novo tipo de contagem que superou a simples enumeração dos objetos (ROSA, 1998, p. 03).

A Análise Combinatória é a parte da matemática que se preocupa com a contagem de agrupamento de um determinado conjunto sobre certas condições. Não se sabe ao certo quando surgiu o primeiro problema envolvendo tal objeto de conhecimento, uma vez que alguns autores divergem de seu surgimento. Para Morgado et al. (2006, p. 02), por exemplo, o primeiro problema relacionado ao tema diz respeito ao desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$. Ainda, de acordo com Morgado et al. (2006) podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Já para Wieleitner (1928, p. 183 - 184) o problema mais antigo relacionado à Análise Combinatória está relacionado com a resolução de quadrados mágicos. A figura 1 mostra o referido quadrado.

Figura 1 – Quadrado Mágico



Fonte: Próprio autor

Na aritmética temos dois princípios que são considerados à base para resolução de vários problemas, são eles: o princípio da adição e o princípio da multiplicação. Tais princípios também têm papel importante para a Análise Combinatória sendo considerados como base fundamental. Biggs (1979) diz que tais princípios são considerados como pedra fundamental da combinatória.

O princípio da adição diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividir isso em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Já o princípio da multiplicação diz que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e para cada uma destas decisões, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, x.y.

3.1 PRINCÍPIO ADITIVO

O princípio da adição diz que, se uma decisão A_1 pode ser tomada de x_1 maneiras e uma decisão A_2 pode ser tomada de x_2 maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A_1 ou A_2, simultaneamente, é $x_1 + x_2$.

Morgado et al. (2006) diz que:

"Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, tal que A contém p elementos e B contém q elementos, então, $A \cup B$ tem $p + q$ elementos."

Na formulação de conjuntos: Se A_1 e A_2 são dois conjuntos disjuntos, com x_1 e x_2 elementos, respectivamente, então $A_1 \cup A_2$ possui $x_1 + x_2$ elementos.

Tal princípio pode ser generalizado para o caso de ter que tomar mais de duas decisões:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x_1 maneiras, uma decisão d_2 pode ser tomada de x_2 maneiras e uma decisão d_n pode ser tomada de x_n maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 ou d_2 ou...ou d_n simultaneamente, é $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Na formulação de conjuntos: Se A_1, A_2, ... e A_n são n conjuntos disjuntos, com x_1, x_2, ...e x_n elementos, respectivamente, então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$ possui $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ elementos.

Exemplo: Suponha que na disciplina de análise combinatória existem três listas de exercícios. A 1.ª contém 15 exercícios, a 2.ª contém 18 exercícios e a 3.ª contém 14 exercícios. De quantas maneiras um estudante pode escolher um exercício para resolver?

O estudante tem 15 opções para escolher um exercício da primeira lista, 18 opções para escolher um exercício da segunda lista e 14 opções para escolher um exercício da terceira lista. Portanto, pelo princípio aditivo, o aluno tem:

15 + 18 + 14 = 47 maneiras de escolher um exercício para resolver.

3.2 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO OU PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)

Utilizamos o Princípio Fundamental da contagem quando queremos encontrar o número de possibilidades de ocorrência de um evento, onde o mesmo é constituído por n etapas, sendo as mesmas sucessivas e independentes.

Definição sobre o Princípio Fundamental da Contagem

> O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modo de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1e D_2 é $x.y$. (LIMA et al., 2006, p. 85)

Na formulação de conjuntos: Se A_1 e A_2 são dois conjuntos disjuntos, com x_1 e x_2 elementos, respectivamente, então $A \times B$ possui $x_1 \cdot x_2$ elementos.

Assim como no princípio aditivo, também podemos generalizar o princípio multiplicativo para o caso de ter que tomarmos mais de duas decisões.

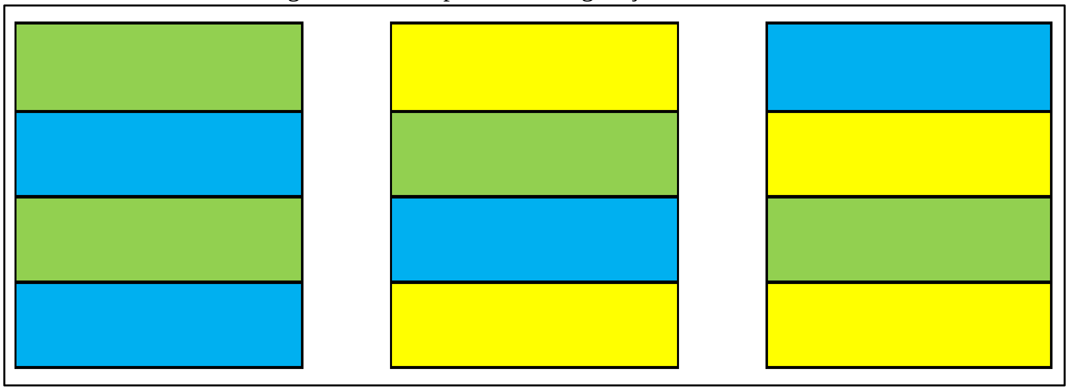
Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x_1 maneiras e se, em seguida, uma decisão d_2 puder ser tomada de x_2 maneiras e se, em seguida, uma decisão d_n puder ser tomada de x_n maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1, d_2, ...,d_n é $x_1 . x_2 \dots x_n$.

Na formulação de conjuntos: Se A_1, A_2,...,A_n são n conjuntos disjuntos, com $x_1, x_2 \ldots x_n$ elementos, respectivamente, então $A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ possui $x_1 . x_2 \ldots x_n$ elementos.

Exemplo: Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, verde e azul, não devendo listras adjacentes terem a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?

Inicialmente, vamos observar algumas possíveis configurações após colorir a bandeira conforme o enunciado.

Figura 2 – Exemplos de configurações da bandeira



Fonte: Próprio autor

Observamos que as bandeiras acima foram coloridas conforme a restrição de que listas adjacentes não podem ter cores iguais.

De maneira geral a primeira lista pode ser colorida de 3 modos, a segunda lista de 2 modos (não se pode usar a cor da primeira lista), a terceira lista de 2 modos (não se pode usar a cor da segunda lista) e por fim a quarta lista também pode ser colorida de 2 modos (não se pode usar a cor da terceira lista).

Assim o total de maneiras de colorir a bandeira conforme a restrição dada é:

$$3 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 24 \text{ maneiras.}$$

Como mencionado anteriormente, sabemos que a análise combinatória se preocupa com a formação e contagem de agrupamento de elementos de determinado conjunto conforme algum critério pré-estabelecido de formação. Tais agrupamentos podem ser divididos em arranjos, permutações e combinações, os quais podem ser formados por elementos distintos ou repetidos.

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) auxilia-nos nos mais variados problemas que envolva contagem, contudo existem problemas que tal técnica torna-se complexa e cansativa de ser realizada. Para tanto, com base no P.F.C., foram desenvolvidas outras formas de agrupamentos que facilitam os cálculos desses problemas.

Ao agrupamento formado por todos os elementos do conjunto, diferindo dois agrupamentos apenas pela ordem dos elementos, chamamos de permutação. Ao agrupamento em que o número de objetos de cada grupo é menor que o total, e um elemento aparece uma só vez em cada grupo, e dois agrupamentos diferem pela natureza ou pela ordem dos elementos que neles figuram, chamamos arranjo simples e quando o agrupamento formado difere apenas pela natureza de pelo menos um elemento temos uma combinação simples. Já ao agrupamento formado por todos os elementos do conjunto, diferindo dois agrupamentos apenas pela ordem dos elementos, chamamos permutação.

3.3 PERMUTAÇÃO

A permutação serve para determinar o número de maneiras existentes de ordenar determinados elementos de um conjunto finito. Ao fazermos uma permutação, estamos trocando de lugar determinados elementos do conjunto, considerando a ordenação dos mesmos.

Na permutação, o número de objetos a serem permutados é igual ao número de posições. Temos dois tipos de permutação: permutação simples e permutação com repetição (composta).

3.3.1 PERMUTAÇÃO SIMPLES

As permutações simples consistem em agrupar, ordenadamente, elementos distintos de um conjunto.

Consideremos a seguinte situação:

Sabendo que anagrama é a troca de posições das letras de uma palavra. Quantos anagramas podemos formar com a palavra BOLA?

Para a primeira escolha temos 4 possibilidades (B, O, L, A), após essa escolha temos 3 possibilidades para a segunda letra, 2 possibilidades para a terceira letra e finalmente uma possibilidade para a quarta letra. Assim pelo PFC temos 4.3.2.1 = 24 anagramas.

Alguns anagramas da palavra BOLA são BALO, LOBA, OBLA, etc. cada um desses anagramas corresponde a uma permutação simples das letras da palavra BOLA. Podemos observar que de um anagrama para outro há apenas a troca de posição das letras, sendo que as letras são as mesmas.

Segundo Barroso (2010, p. 308), dado um conjunto com n elementos, chama-se permutação simples dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos.

Indica-se por P_n o número de permutações simples de n elementos.

O cálculo do número de permutações de um conjunto com n elementos é dado por:

$$P_n = n!$$

3.3.2 PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Segundo Silva e Filho (2008, p. 511), um conjunto foi escrito com n elementos. Um dos elementos foi repetido α, outro elemento foi repetido β vezes e assim por diante, até um elemento repetido γ vezes.

O número de permutações que se pode obter com os elementos é:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{n}}^{(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)} = \frac{\mathrm{n}!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!}$$

Consideremos o seguinte exemplo:

Quantas permutações existem da palavra OVO?

Vamos determinar todas as permutações possíveis da palavra OVO, para tanto vamos colorir as letras para diferenciá-las.

OVO, OVO, VOO, VOO, OOV, OOV

Podemos observar que temos um total de seis permutações (P_3), porém, algumas se repetem, como, por exemplo, OVO e OVO. Nesse caso temos que retirar essas repetições, para tanto devemos dividir o total de permutações (P_3) por P_2 que é o número de vezes que a letra O se repete, logo teremos:

$$P_n = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3.2.1}{2.1} = 3$$

Assim temos que o número de permutações da palavra OVO é 3.

3.3.3 PERMUTAÇÃO CIRCULAR

A permutação circular é um caso de permutação em que os elementos ficam dispostos em um ciclo. Nesse tipo de permutação, o que importa é a ordem em que um elemento está em relação ao outro e não suas posições absolutas, ou seja, ao girar os elementos, não são criadas novas permutações.

Segundo Bezerra (2018, p. 48):

Chama-se Permutação Circular de n objetos distintos quaisquer disposição desses n objetos em torno de um círculo, colocados em lugares igualmente espaçados.

Duas permutações circulares são ditas indistinguíveis quando uma pode ser obtida da outra por meio de uma rotação. Permutações circulares indistinguíveis são contadas como uma só.

Consideremos a seguinte situação:

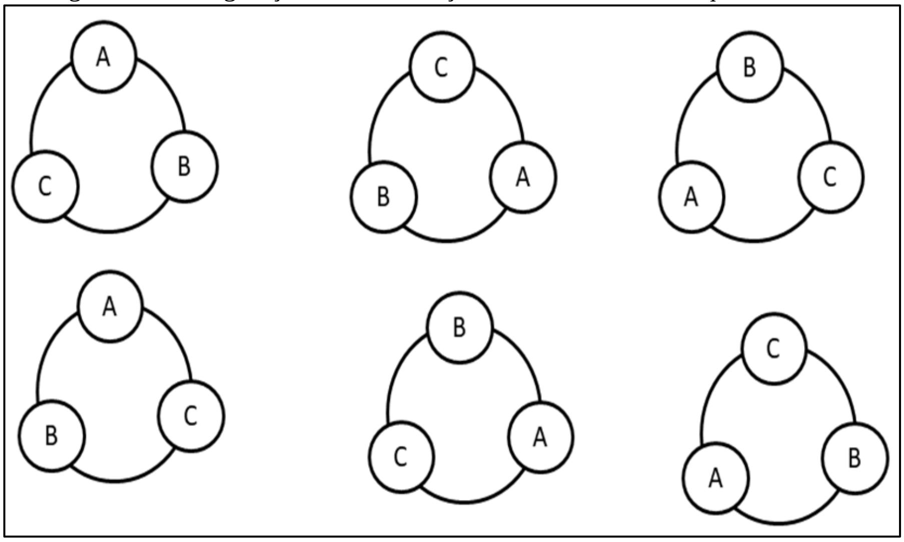
De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se consideramos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?

Para responder essa pergunta vamos partir de um problema, teoricamente, mais simples.

De quantas maneiras podemos dispor três crianças em um brinquedo de formato circular que contém 3 lugares equiespaçados um dos outros?

Sejam as crianças denominadas por A, B e C, podemos ter as seguintes configurações abaixo:

Figura 3 – Configuração de três crianças em torno de um brinquedo circular



Fonte: Próprio do autor

Notamos que temos seis possíveis posições para as crianças em questão, no caso 3! = 6, porém, observamos que as três posições da primeira linha equivalem a somente uma, uma vez que cada uma pode ser obtida por meio de uma rotação da outra, o mesmo vale para as três posições da linha seguinte. Assim sendo, contamos três vezes cada possibilidade, logo o número de possibilidades correto é:

$$\frac{3!}{3} = \frac{3.2.1}{3} = (3-1)! = 2! = 2\,possíbilidades$$

Dessa maneira, a quantidade de modos de colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, é dada por:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

3.4 ARRANJO

3.4.1 ARRANJO SIMPLES

Ao escolhermos certa quantidade de elementos de um determinado conjunto e ordena-los de diferentes maneiras, sendo que a ordem e a troca de posições desses elementos gerarem novas configurações, dizemos que estamos diante de um arranjo.

Dessa maneira temos que:

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $A_{n,p}$ o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

Tomamos como exemplo a seguinte situação:

Consideremos o conjunto N = {1, 2, 3, 4} quantos são os agrupamentos desses elementos de 3 em 3?

Podemos listar todos os agrupamentos pedidos: 123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431 e 432. Temos, portanto, um total de 24 agrupamentos, onde cada um desses números é um arranjo diferente dos 4 elementos do conjunto inicial, em grupos de 3 elementos.

Como citado anteriormente, nesse exemplo, percebemos que o arranjo leva em consideração a natureza e a ordem dos elementos. Basta observar que, no exemplo acima, todos os arranjos são constituídos pelos mesmos elementos do conjunto N, porém formam números distintos, como, por exemplo, 123 e 132.

Existem situações em que não será possível listar todos os arranjos, nessas situações utilizaremos a fórmula para a contagem desses arranjos, independentemente da quantidade de elementos do conjunto.

Segundo Dante (2016, p. 211), arranjo simples de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ são agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com p dos n elementos dados.

Indica-se por $A_{n,p}$ ou A_n^p o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2).\ldots.9n-p-1)$$

ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo da aplicação da fórmula:

Numa competição de programação, participam 20 programadores. A premiação é feita aos dois primeiros colocados. De quantas maneiras a premiação pode ocorrer?

Primeiramente observamos que precisamos escolher dois programadores entre os 20, sendo que nesse caso a ordem importa, pois, teremos o campeão e o vice-campeão. Portanto, estamos diante de um problema de arranjo simples.

Aplicando a fórmula teremos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{10,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{20.19.18!}{18!} = 20.19 = 380$$

Logo temos 380 maneiras, entre os 20 programadores, para escolher o 1º e 2º colocado.

3.4.2 ARRANJO COM REPETIÇÃO

Arranjo com repetição, ou arranjo completo, são todos os reagrupamentos ordenados que podemos formar com k elementos de um conjunto com n elementos, sendo que um elemento de n pode se repetir mais de uma vez. Tais agrupamentos estão presentes em nosso cotidiano, seja em uma senha do banco, nas placas dos automóveis, nas senhas de redes sociais, dentre outras.

Assim como fizemos para o arranjo simples, também podemos calcular a quantidade de arranjos com repetição. Dependendo da situação proposta fica inviável fazer todos os possíveis arranjos, para tanto nos utilizamos de fórmula para encontrar tal quantidade.

Consideremos a seguinte situação a seguir:

João quer colocar uma senha em seu whatsApp, sabendo que essa senha é composta por três dígitos numéricos e duas letras do alfabeto brasileiro, nessa respectiva ordem, quantas possibilidades João tem para escolher sua senha?

Sabendo que nosso sistema decimal é composto por 10 algarismos e nosso alfabeto é formado por 26 letras e que não há restrição de repetição de elementos. Temos:

Para o 1º dígito temos 10 possibilidades;

Para o 2º dígito temos 10 possibilidades;

Para o 3º dígito temos 10 possibilidades;

Para a 1º letra temos 26 possibilidades;

Para a 2º letra temos 26 possibilidades.

Conforme o esquema abaixo

Tabela 1 – Número de possibilidades para cada elemento

10 possibilidades	10 possibilidades	10 possibilidades	26 possibilidades	26 possibilidades
1º dígito	2º dígito	3º dígito	1ª letra	2ª letra

Fonte: Próprio autor

Portanto, temos um total de $10x10x10x26x26 = 10^3x26^2 = 1000x676 = 676.000$

Logo João têm 676. 000 possibilidades de escolha para a senha de seu whatsApp.

Segundo Hazzan (2013, p. 15):

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m\}}$. Chamamos arranjo com repetição dos m elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (sequencia de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos.

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m\}}$ e indiquemos

O número de arranjo com repetição, ou arranjo completo, desse conjunto tomado r em r, em que cada elemento pode ser contado mais de uma vez é dado por:

$$A_{R_{(n,r)}} = n^r$$

Onde:

A_R = quantidade de arranjos com repetição

n = quantidades de elementos do conjunto

r = quantidades de elementos que serão escolhidos.

3.5 COMBINAÇÃO

A combinação, na Análise Combinatória, é o processo matemático que se preocupa com a contagem dos subconjuntos diferentes, escolhidos de um conjunto maior, sem se preocupar com a ordem dos elementos. Assim, podemos definir a combinação como:

Tomamos um conjunto C com n elementos, seja p um número tal que $p \leq n$.

A combinação de n elementos tomados p a p é a quantidade de subconjuntos distintos formados ao escolher p elementos do conjunto C.

3.5.1 COMBINAÇÃO SIMPLES

Segundo Silva e Filho (2008, p. 507), chama-se combinação simples todos os agrupamentos simples de p elementos que podemos formar com n elementos distintos, sendo $p \leq n$. Cada um desses agrupamentos se diferencia do outro apenas pela natureza de seus elementos.

Analisemos a seguinte situação problema:

Considere o conjunto formado pelas letras da palavra VELA. Quantos subconjuntos com 3 elementos podem ser formados?

Já vimos anteriormente que a quantidade de agrupamentos ordenados é dada por:

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4.3.2.1!}{1!} = 4.3.2 = 24$$

Esses agrupamentos são: VEL, VEA, VLE, VLA, VAE, VAL, EVL, EVA, ELV, ELA, EAL, EAV, LVE, LVA, LEV, LEA, LAE, LAV, AVE, AVL, AEV, AEL, ALV, ALE.

Porém, pensando em termos de conjunto, o conjunto formado pelas letras VEL, VLE, EVL, ELV, LVE e LEV é o mesmo, pois, ao permutar as letras VEL o conjunto permanece com os mesmos elementos, dessa forma devemos tirar essa repetição. Logo devemos dividir o total pelas permutações dessas letras, ficando com:

$$\frac{24}{3!} = \frac{24}{3.2.1} = 4$$

Assim, temos que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra VELA é 4.

$$\{VEL\}, \{VEA\}, \{VLA\}, \{ELA\}$$

Como vimos, com p elementos distintos, podemos obter $p!$ permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter p! arranjos distintos dos n elementos tomados p a p.

Então, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos $(A_{n,p})$ e o número de permutações $(p!)$.

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} . \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Assim:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n,p}} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{p}!\,(\mathrm{n}-\mathrm{p})!}, \text{com } \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{p} \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < \mathrm{p} \leq \mathrm{n}$$

De maneira geral temos:

Dado um conjunto de n elementos, chama-se combinação simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjuntos) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

3.5.2 COMBINAÇÃO COMPLETA OU COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

A Combinação Completa ou Combinação com Repetição é um tipo de agrupamento, não ordenado, da análise combinatória em que há ou não a repetição de elemento, ou seja, é o número de maneiras de escolhermos p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados. Representamos a Combinação Completa por CR_n^p.

Segundo Bezerra (2018, p. 72), Chama-se Combinação Completa ou Combinação com repetição, de classe p de n objetos, a toda escolha ordenada de p objetos, distintos ou não, dentre n objetos distintos dados.

Consideremos a situação problema a seguir:

Jhenifer foi ao supermercado comprar dois refrigerantes para seu aniversário. Sabendo que no supermercado há quatro tipos de refrigerante, Fanta, Coca, Guaraná e Pepsi, de quantas maneiras ela pode comprar os dois refrigerantes?

Note que se trata de combinação, uma vez que a ordem da compra não importa, ou seja, comprar, por exemplo, Coca e Pepsi é a mesma coisa que comprar Pepsi e Coca. Além disso, ela pode comprar os dois refrigerantes do mesmo sabor, logo estamos diante de uma combinação com repetição.

Sendo assim temos uma combinação com repetição de 4 elementos tomados 2 a 2.

Listando todas as possíveis soluções temos:

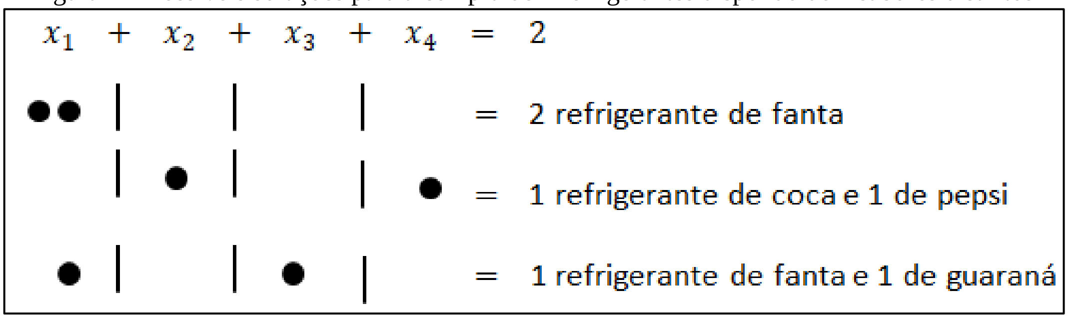
{coca, coca}, {coca, fanta}, {coca, pepsi}, {coca, guaraná}, {fanta, fanta}, {fanta, guaraná}, {fanta, pepsi}, {guaraná, guaraná}, {guaraná, pepsi}, {pepsi, pepsi}.

Portanto, temos um total de 10 possibilidades para Jhenifer comprar os dois refrigerantes.

Outra maneira de pensar nesse mesmo problema seria encontrar valores que satisfaça a seguinte equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, onde x_1 é a quantidade de refrigerante de fanta, x_2 é a quantidade de refrigerante de coca, x_3 é a quantidade de refrigerante de guaraná e x_4 é a quantidade de refrigerante de pepsi. Como os x_i são quantidades, temos que $0 \leq x_i \leq 2$.

Vejamos algumas possíveis soluções para a equação:

Figura 4 – Possíveis soluções para a compra de 2 refrigerantes dispondo de 4 sabores distintos



Fonte: Próprio autor

Conforme a figura 4, podemos verificar que a situação de comprar 2 refrigerantes entre 4 possíveis sabores se resume em organizar, em fila, 2 bolas idênticas separadas por 3 traços, também idênticos, assim temos 5 elementos (2 bolas e 3 traços) para permutar. Logo, o número de organizar tais elementos é dado por:

$$P_{2+3}^{2,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = C_5^2$$

Portanto,

$$\mathrm{CR}_{4,2} = \mathrm{C}_{5,2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!}\frac{5.4.3!}{2.1.3!} = \frac{20}{2} = 10$$

De modo geral, dado um conjunto com n elementos tomados de p a p, a combinação completa ou combinação com repetição é calculada por:

$$\mathrm{CR}_{n,\mathrm{p}} = P_{p+n+1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = C_{n+p-1}^{p}$$

Assim, conclui-se que $\mathrm{CR}_{n,\mathrm{p}} = C_{n+p-1}^{p}$

3.6 O PRINCÍPIO DE DIRICHLET (PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS)

Além da contagem de elementos de conjuntos, a Análise Combinatória também se preocupa em determinar a existência ou não de determinados conjuntos, sendo que esses conjuntos precisam satisfazer a determinadas propriedades. E para resolver esses problemas, a Análise Combinatória lança mão de uma ferramenta bastante simples, porém, poderosa na resolução desses problemas que aparentemente são bastante complexos. Tal ferramenta é o Princípio de Dirichlet.

Morgado (1991, p. 81), diz que se n objetos forem colocados em no máximo, $n-1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Em 1834, o matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), criador do conceito moderno de função, ao demonstrar o teorema da aproximação racional de um número real, fez uso pela primeira vez do princípio da casa dos pombos. Tal princípio pode ser enunciado conforme abaixo:

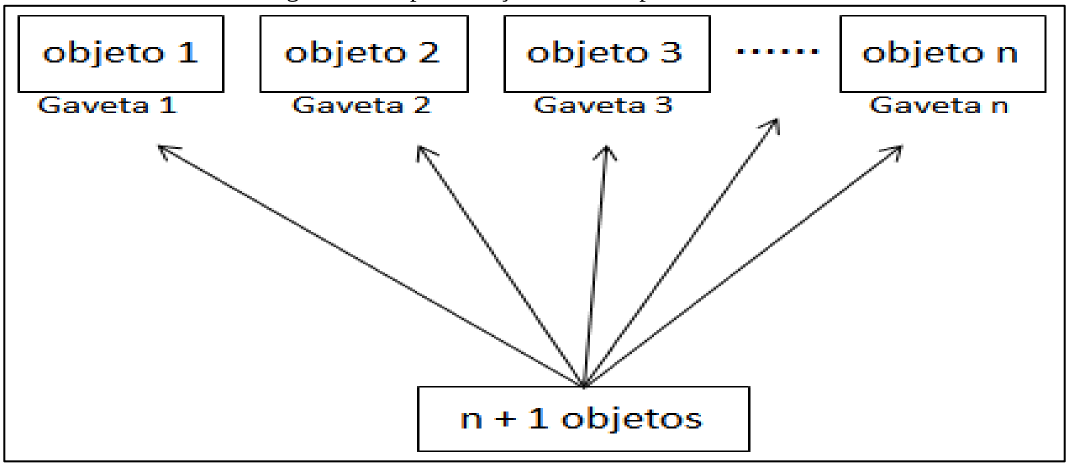
"Seja dada uma casa de pombos com n buracos e suponha que haja m pombos querendo ocupá-los. Se m > n, então algum buraco deverá ser ocupado por mais de um pombo".

Tal enunciado se tornou no seguinte teorema (princípio de Dirichlet).

"Se quisermos guardar G + 1 objetos em G gavetas, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto."

A ilustração abaixo retrata tal teorema:

Figura 5 – Representação do Princípio de Dirichlet



Fonte: Próprio autor

Podemos observar, na figura 5, que alocando um objeto em cada gaveta, conseguimos alocar n objetos, porém temos n + 1 objetos, logo precisamos alocar o objeto restante em uma das n gavetas, concluindo assim que em alguma gaveta haverá mais de um objeto.

Outra maneira de enunciar tal teorema em forma de função é:

"Se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva."

Sabendo que uma função é dita injetiva quando dados dois elementos, x_1 e x_2, pertencentes ao conjunto domínio, com $x_1 \neq x_2$, as imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são sempre distintas, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Tal demonstração pode ser feita como se segue abaixo:

Suponhamos, sem perda de generalização, que temos $n + 1$ elementos no conjunto A e n elementos no conjunto B, sendo o conjunto A o domínio e o conjunto B o contradomínio. Suponhamos ainda que para cada elemento y do conjunto B temos uma casa no conjunto A que contém todos os elementos x do conjunto A, tal que f(x) = y. Como o conjunto A possui $n + 1$ elementos e o conjunto B possui n elementos, o princípio de Dirichlet nos garante que uma das casas contém dois ou mais elementos x do conjunto A. Assim concluímos que uma função de A em B não pode ser injetiva.

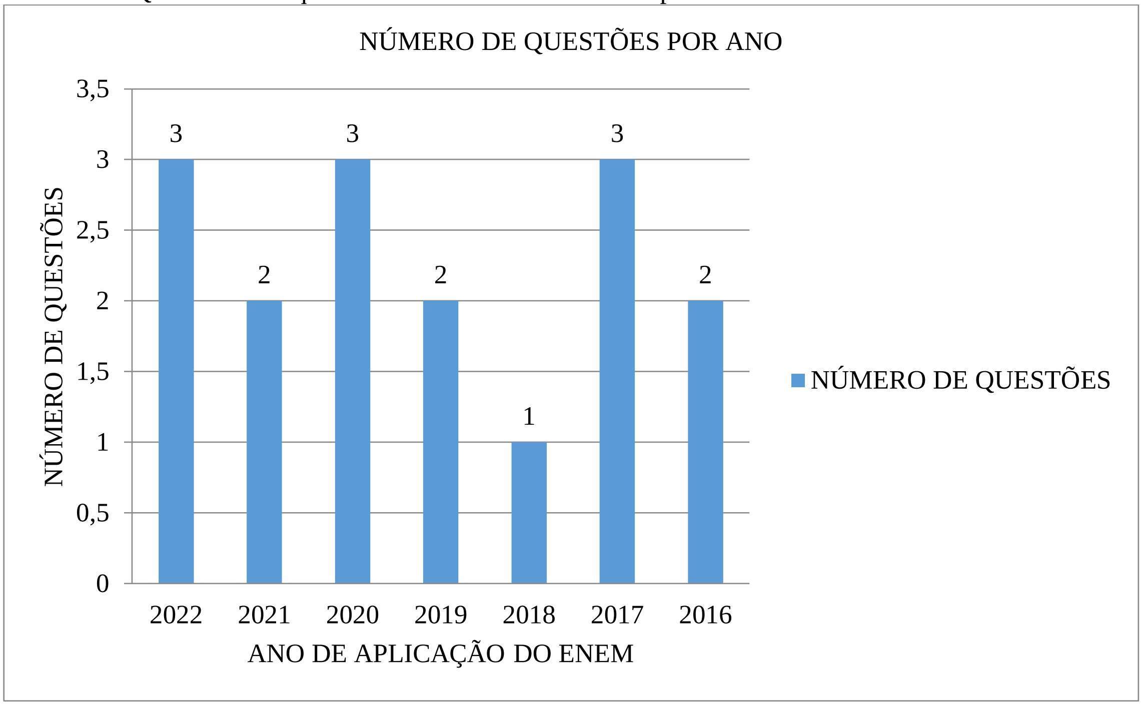
4 DISCUSSÃO DOS DADOS COLETADOS DO ENEM DOS ANOS DE 2016 A 2022 EM RELAÇÃO AO DESEMPENHO DOS ALUNOS NO MUNICÍPIO DE MAZAGÃO - AP

4.1 NÚMEROS DE QUESTÕES E OBJETOS DO CONHECIMENTO ABORDADO

A Análise Combinatória é um tema que sempre está presente nos exames da área da matemática. No Exame Nacional do Ensino Médio não é diferente, sendo uma das habilidades presentes na Matriz de Referência do ENEM (H2 - identificar padrões numéricos ou princípio da contagem) pode abordar os mais variados tipos de contagem.

No gráfico 1 está representado o número de questões do referido conteúdo, desde 2016 até 2022.

Gráfico 1 – Quantidade de questões de Análise combinatória por ano



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Fazendo uma análise mais detalhada dessas questões presentes no ENEM, podemos verificar, analisando a tabela 2, que apesar de o conteúdo análise combinatória ser bastante amplo, grande parte das questões se concentraram apenas no Princípio

Multiplicativo e na Combinação Simples, sendo que os demais métodos de contagens representam uma pequena parte das questões.

Tabela 2 – Objeto do conhecimento abordado em cada questão do ENEM de 2016 à 2022

Ano	Questões	Princípio		Permutação			Arranjo		combinação		Princípio de Dirichlet
		multiplicativo	aditivo	simples	com repetição	circular	simples	com repetição	simples	completa	
2016	147								X		
	168	X			X						
2017	143									X	
	160	X									
	177	X									
2018	165	X							X		
2019	156	X							X		
	171	X							X		
2020	141		X								
	158	X			X						
	163	X		X	X						
2021	138	X		X							
	179	X							X		
2022	155								X		
	142	X	X						X		
	140								X		

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Outro fator importante a ser analisado é que a maioria das questões que envolvem mais de um tipo de contagem utiliza o Princípio Multiplicativo, ou seja, tal método de contagem é de suma importância para a resolução de questões envolvendo contagem.

Também é importante perceber que muitas questões, em suas resoluções, envolvem mais de um tipo de contagem. Dessa forma é de suma importância conhecer todos os tipos, bem como saber aplicá-las em cada situação específica.

4.2 ANÁLISE E COMENTÁRIOS DAS RESPOSTAS DOS DISCENTES

Nesse tópico, serão apresentadas todas as questões, referentes à análise combinatória, presentes na prova do ENEM compreendidas nos anos de 2016 a 2022. Também serão apresentadas possíveis soluções para as mesmas, bem como, em algumas questões, serão apresentados alguns raciocínios que podem ter levado o aluno ao erro na referida questão.

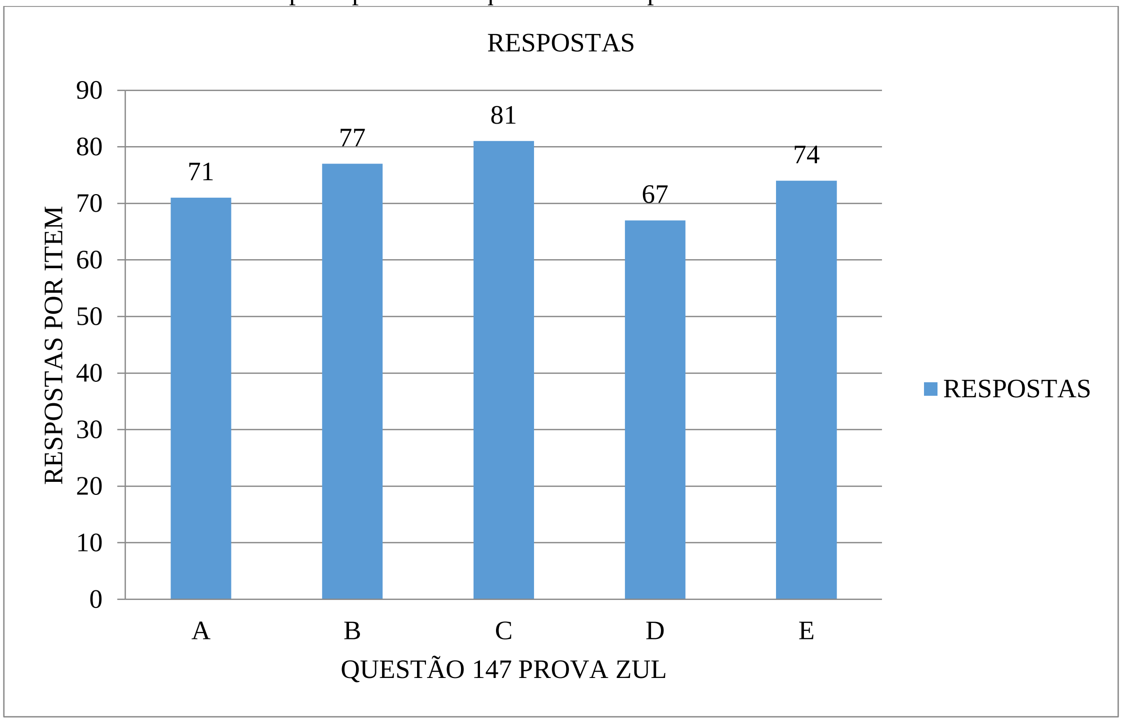
4.2.1 ENEM 2016

QUESTÃO 147

O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2!\,.\,8!} - \frac{4!}{2!\,.2!}$ b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$ c) $\frac{10!}{2!\,.\,8!} - 2$ d) $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$ e) $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

Gráfico 2 – Número de resposta por item da questão 147 da prova azul de 2016



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Possível solução:

Podemos calcular a quantidade total de dupla que podem ser formadas com os 10 jogadores, ou seja, escolher 2 dentre os 10 possíveis, como a ordem de escolha não importa estamos diante de uma combinação, assim temos $C_{10,2}$ e desse total retiramos as duplas formadas só por canhotos, o que pode ser feito de $C_{4,2}$.

Assim, o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição é:

$$C_{10,\,2} - C_{4,\,2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} - \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{10!}{2!\,8!} - \frac{4!}{2!\,2!}$$

Nessa questão, segundo o gráfico 2, podemos observar que apenas 71 alunos (19,18%) conseguiram acertar a questão de um total de 370 alunos. Ainda podemos verificar que 77 discentes (20,81%) optaram pelo item B, item esse que se diferencia da opção A apenas pela ordem dos elementos escolhidos, ou seja, a questão trata de combinação, haja vista que escolher uma dupla, por exemplo, João e Carlos é o mesmo que escolher Carlos e João. Assim, uma possível interpretação errada da questão foi:

$$A_{10,\,2} - A_{4,\,2} = \frac{10!}{(10-2)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$$

QUESTÃO 168

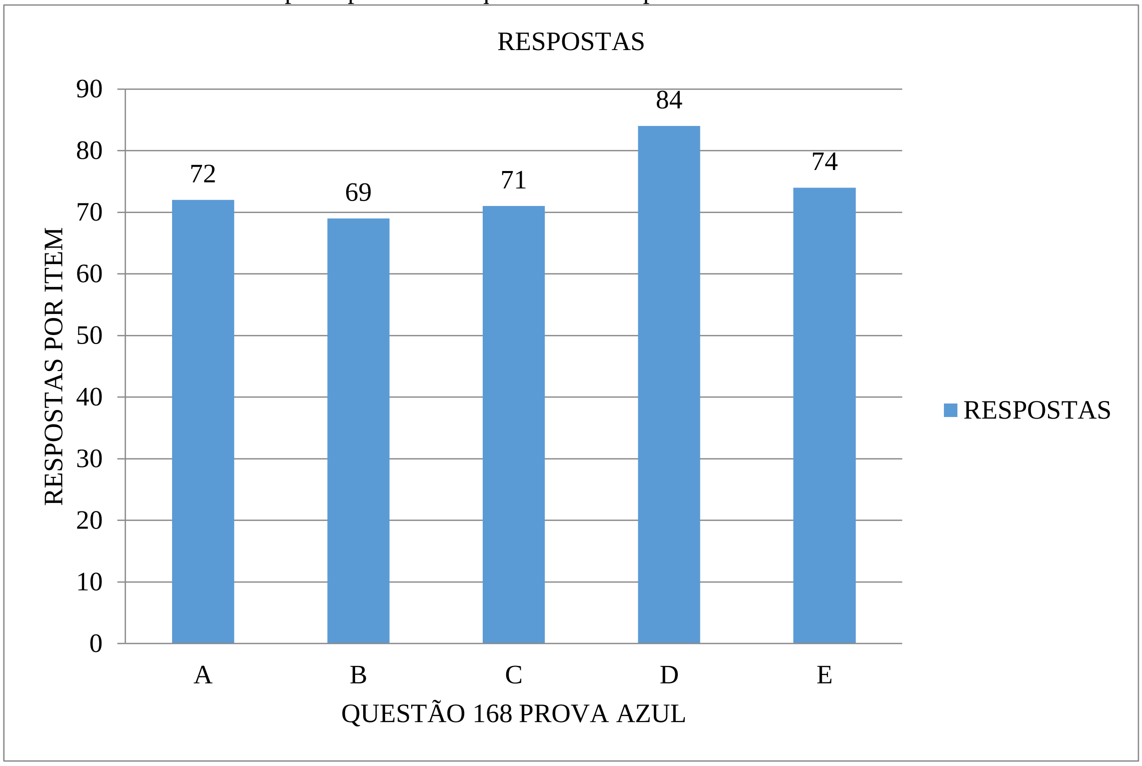
Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

a) $10^2.26^2$ b) $10^2.52^2$ c) $10^2.52^2.\frac{4!}{2!}$ d) $10^2.26^2.\frac{4!}{2!.2!}$ e) $10^2.52^2.\frac{4!}{2!.2!}$

Gráfico 3 - Número de resposta por item da questão 168 da prova azul de 2016



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Possível solução:

A senha é composta de 4 caracteres, dos quais 2 são algarismos (10 possibilidades) e 2 dois são letras (26 possibilidades). Porém, como letras maiúsculas diferem de minúsculas temos um total de 52 letras (26 maiúsculas e 26 minúsculas):

Tabela 3 – Possibilidade para as letras e algarismos

LETRA	LETRA	ALGARISMO	ALGARISMO
52 POSSIBILIDADES	52 POSSIBILIDADES	10 POSSIBILIDADES	10 POSSIBILIDADES

Fonte: Próprio autor

Assim temos:

$$52.52.10.10 = 52^2.10^2$$

Porém, podemos observar que as letras e os algarismos podem permutar entre si, logo teremos:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!}$$

Dessa forma, o número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

$$10^2.52^2.\frac{4!}{2!\,2!}$$

Na referida questão acima, analisando o gráfico 3, podemos verificar que apenas 74 discentes (20%) responderam corretamente à questão marcando o item E. Observa-se que 22,70% dos alunos optaram pelo item D, nesse caso, um possível equívoco que podem ter levado ao erro da questão foi na interpretação da questão o qual, possa ser que não observaram que letras maiúsculas diferem de letras minúsculas levando a seguinte resolução:

Tabela 4 - Possibilidade para as letras e algarismos desconsiderando letras maiúsculas de minúsculas

LETRA	LETRA	ALGARISMO	ALGARISMO
26 possibilidades	26 possibilidades	10 possibilidades	10 possibilidades

Fonte: Próprio autor

$$26.26.10.10 = 26.10^2$$

Sendo que após fazer a permutação com repetição chegaram a:

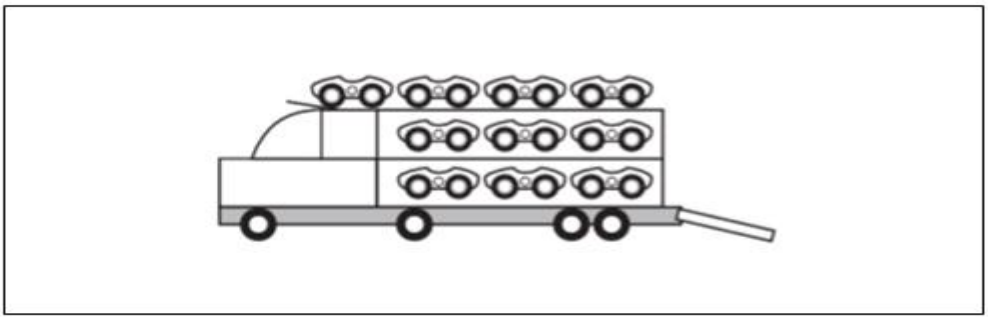
$$10^2.26^2.\frac{4!}{2!\,2!}$$

4.2.2 ENEM 2017

<u>QUESTÃO 143</u>

Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura 6.

Figura 6 – Caminhão-cegonha com 10 carrinhos

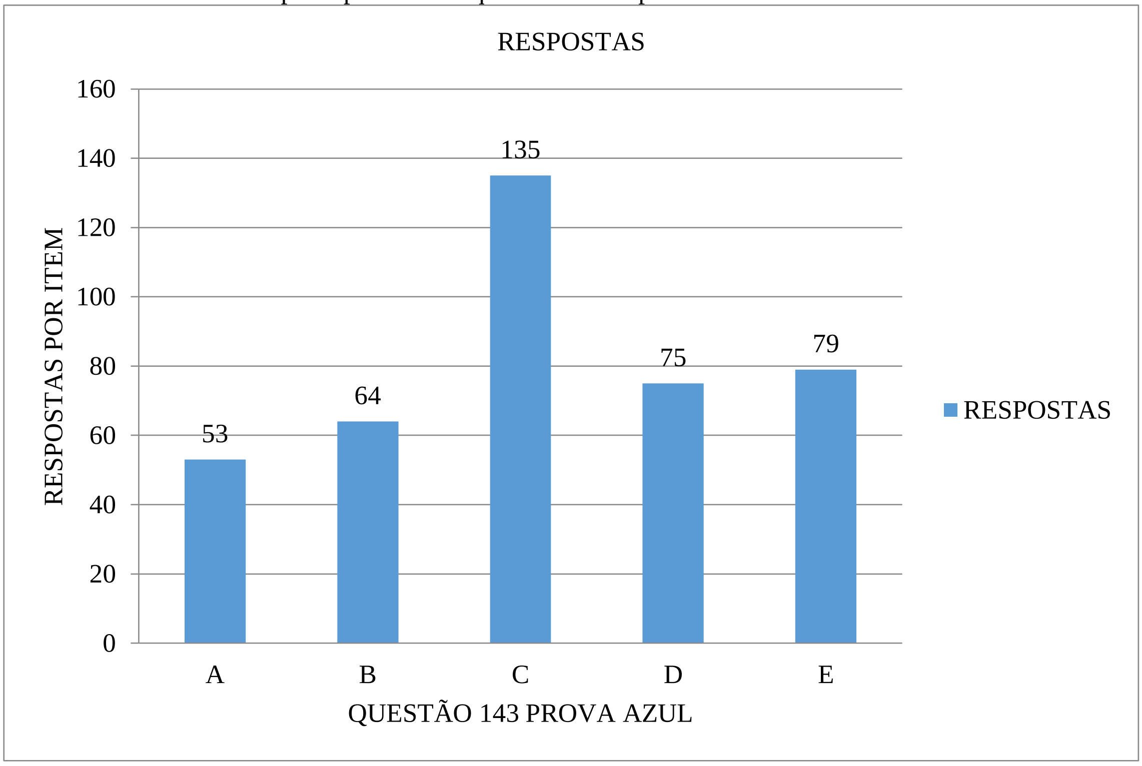


Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

A) $\mathbf{C_{6,4}}$ B) $\mathbf{C_{9,3}}$ C) $\mathbf{C_{10,4}}$ D) 6^4 E) $4^{\mathbf{6}}$

Gráfico 4 - Número de resposta por item da questão 143 da prova azul de 2017



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

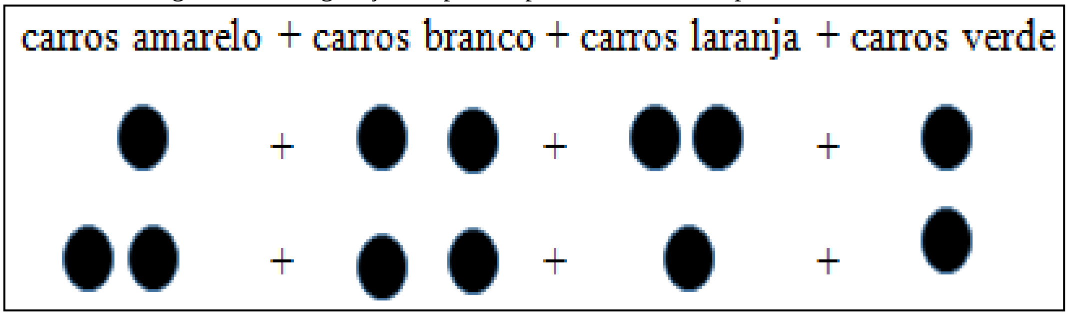
<u>Uma possível solução:</u>

De imediato, temos que ter pelo menos um carrinho pintado de cada cor. Como temos 4 cores (amarelo, branco, laranja e verde) pintando cada um com essas cores, nos sobram 6 carrinhos a serem pintados, os quais podem ser pintados de qualquer cor, ou seja:

$$\text{carros amarelo} + \text{carros branco} + \text{carros laranja} + \text{carros verde} = 6$$

Veremos algumas possibilidades:

Figura 7 – configuração de pintura para 6 carrinhos dispondo de 4 cores



Fonte: Próprio autor

No primeiro caso temos 1 carro amarelo, 2 carros brancos, 2 carros laranjas e 1 carro verde, ambos separados por 3 sinais de +.

No segundo caso temos 2 carros amarelos, 2 carros brancos, 1 carro laranja e 1 carro verde, também ambos separados por 3 sinais de +.

Então, de acordo com os dois exemplos, nosso problema será uma permutação com repetição, permutação de 9 elementos sendo que se repetem 6 bolinhas e 3 sinais de mais.

$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{3!\ 6!} = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = C_{9,3}$$

Observando o gráfico 4, percebemos que apenas 64 (15,76%) dos discentes acertaram a questão, e que 135 (33,25%) pensaram em se tratar de uma combinação simples, optando pelo item C, ou seja, aplicaram a fórmula da combinação simples. Como são 10 carrinhos e 4 cores, ficamos com:

$$C_{10,3}$$

QUESTÃO 160

O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan “Juntos num só ritmo”, com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

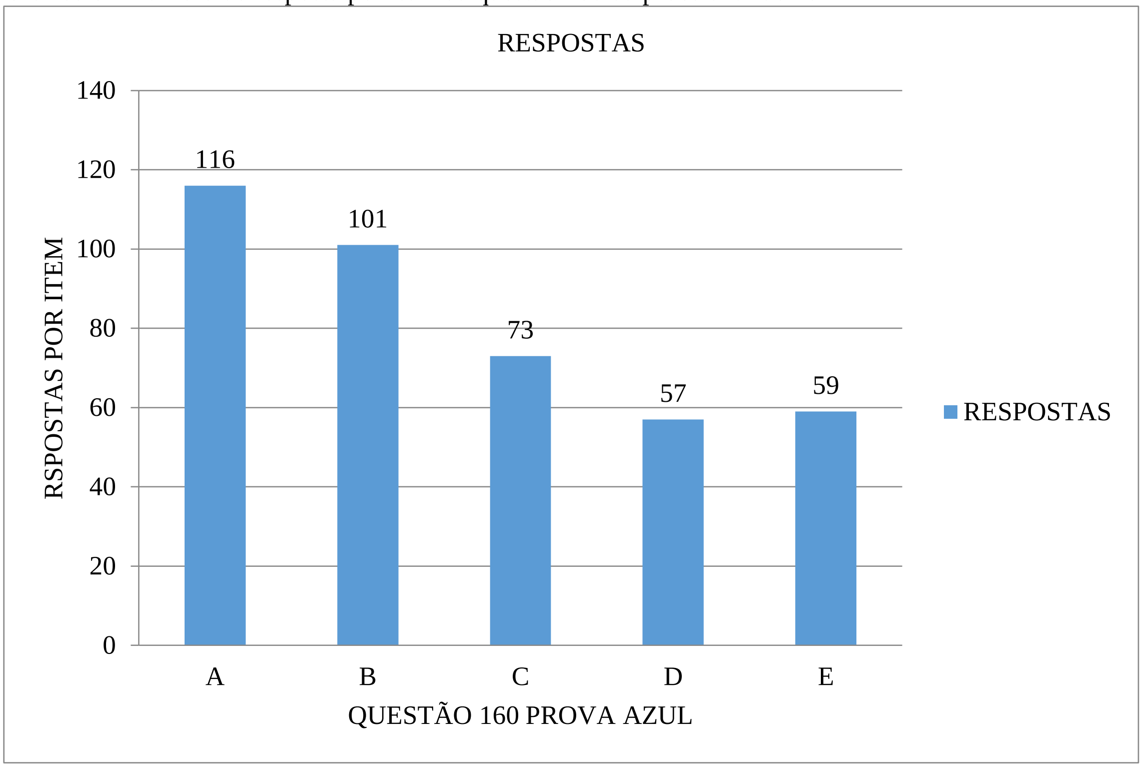
Figura 8 – Imagem da logomarca da copa do mundo de 2014

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15 b) 30 c) 108 d) 360 e) 972

Gráfico 5 - Número de resposta por item da questão 160 da prova azul de 2017



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Uma possível solução:

Consideremos a figura 8 onde estão marcadas todas as regiões a serem pintadas.

Figura 9 - Imagem da logomarca da copa do mundo de 2014 indicando as áreas a serem pintadas

Fonte: http://angloresolve.plurall.net/press/question/2216912

- Para a região A temos 4 possibilidades (qualquer uma das 4 cores)
- Para a região C temos 3 possibilidades (não pode ser a cor da região A)
- Para a região B temos 3 possibilidades (não pode ser a cor da região C)
- Para a região C temos 3 possibilidades (não pode ser a cor da região A)
- Para a região D temos 3 possibilidades (não pode ser a cor da região C)
- Para a região E temos 3 possibilidades (não pode ser a cor da região D)
- Para a região F temos 3 possibilidades (não pode ser a cor da região D)

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos um total de:

4.3.3.3.3.3=972 possibilidades

Verificamos, após a resolução da questão, que a mesma era relativamente fácil, a qual envolvia apenas o princípio multiplicativo. Contudo, analisando o gráfico 5, podemos observar que apenas 59 alunos, 14,53% do total, gabaritaram a questão. Também podemos identificar que 28,57% dos estudantes optaram pelo item A.

Uma possível interpretação desses 116 alunos que marcaram o item A possa ser que entenderam a questão como uma combinação de quantidade de regiões a serem pintadas e número de cores a serem utilizadas, ou seja:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\;2!} = \frac{6.5.4!}{4!\,2!} = \frac{30}{2} = 15$$

QUESTÃO 177

Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Tabela 5 – Possibilidade de formato para as senhas

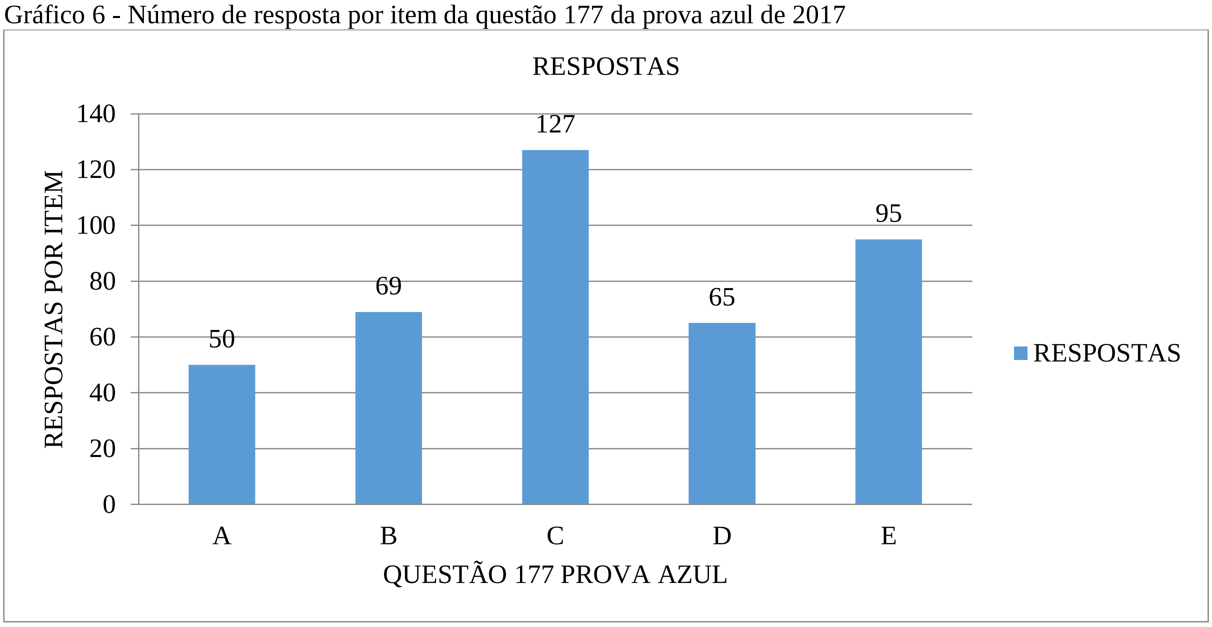
Opção	FORMATO
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

a) I b) II c) III d) IV e) V

Gráfico 6 - Número de resposta por item da questão 177 da prova azul de 2017



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

<u>Uma possível solução</u>

Primeiramente, observamos que a senha é composta apenas por letras e dígitos, sendo 26 letras e 10 dígitos. E que o formato de senha atenda um número maior que o esperado de clientes, no caso um milhão, mas não ultrapasse o dobro esperado de clientes, no caso dois milhões.

Tabela 6 – Possibilidade de formato para as senhas e total de senhas

OPÇÃO	FORMATO	TOTAL
I	LDDDDD	$26.10.10.10.10.10 = 26.10^5 = 2.600.000$
II	DDDDDD	$10.10.10.10.10.10 = 10^6 = 1.000.000$
III	LLDDDD	$26.26.10.10.10.10 = 26^2.10^4 = 6.760.000$
IV	DDDDD	$10.10.10.10.10 = 10^5 = 100.000$
V	LLLDD	$26.26.26.10.10 = 26^3.10^2 = 1.757.600$

Fonte: Próprio autor

Observando a tabela 6 verificamos que a única opção que obedece às exigências pedidas é a opção V.

De acordo com o Gráfico 6, que consta as respostas dos discentes, verificamos que uma grande parte dos estudantes escolheu a opção “C”. Ainda, de acordo com a tabela 6, podemos inferir que realmente o maior número de senha que podemos formar consta na referida opção, porém, talvez, os estudantes não se atentaram para a restrição “mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes”. Como a quantidade de cliente esperado é de aproximado um milhão, verificamos que a opção “C” ultrapassa e muito esse valor.

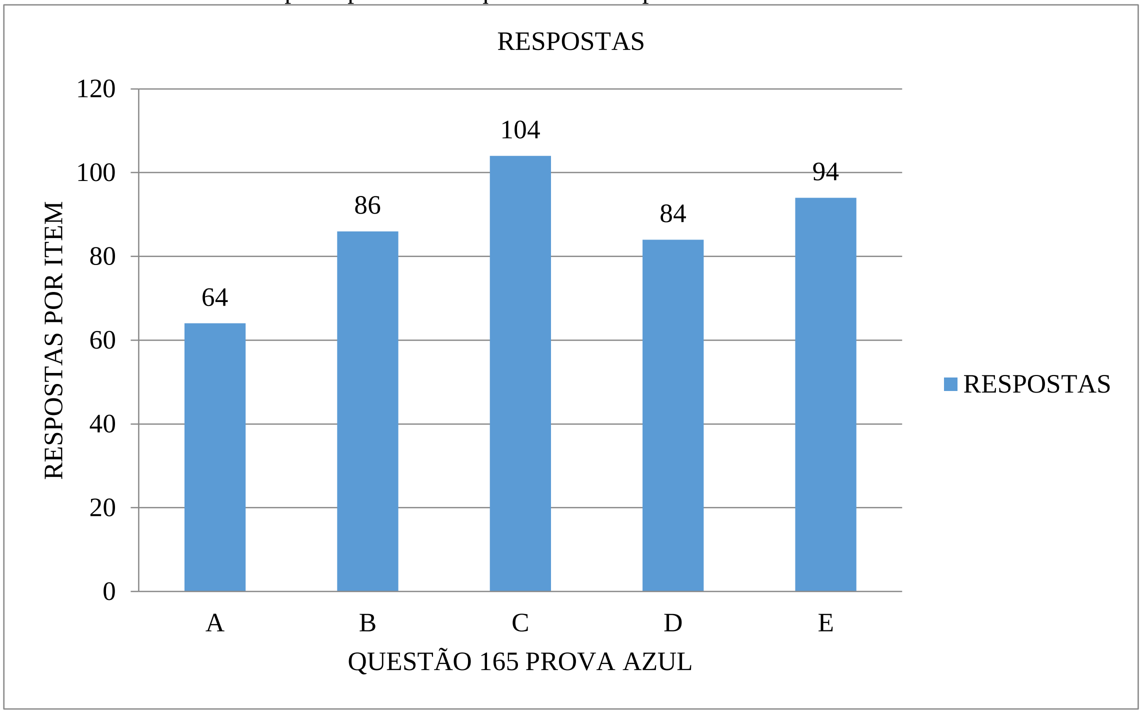
4.2.3 ENEM 2018

<u>QUESTÃO 165</u>

O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia. Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante. Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

a) A_{10}^{4} b) C_{10}^{4} c) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$ d) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$ e) $C_4^2 \times C_6^2$

Gráfico 7 - Número de resposta por item da questão 165 da prova azul de 2018



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Uma possível solução

De início verificamos que a questão se trata de uma combinação, pois, temos a seguinte informação: “A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante”.

Temos dois estandes onde em cada um terá um carro compacto e uma caminhonete, assim serão utilizados 2 carros compactos e duas caminhonetes. Como temos 4 carros compactos podemos escolher dois deles fazendo C_4^2 e como temos 6 caminhonetes e precisamos escolher duas podemos fazer C_4^2.

Escolhidos os dois carros eles podem ficar tanto no estande 1 como no estande 2, assim temos $2.C_{4,2}$. Podemos seguir o mesmo raciocínio para as caminhonetes, logo temos $2.C_{6,2}$. Dessa forma, a expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é: $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$

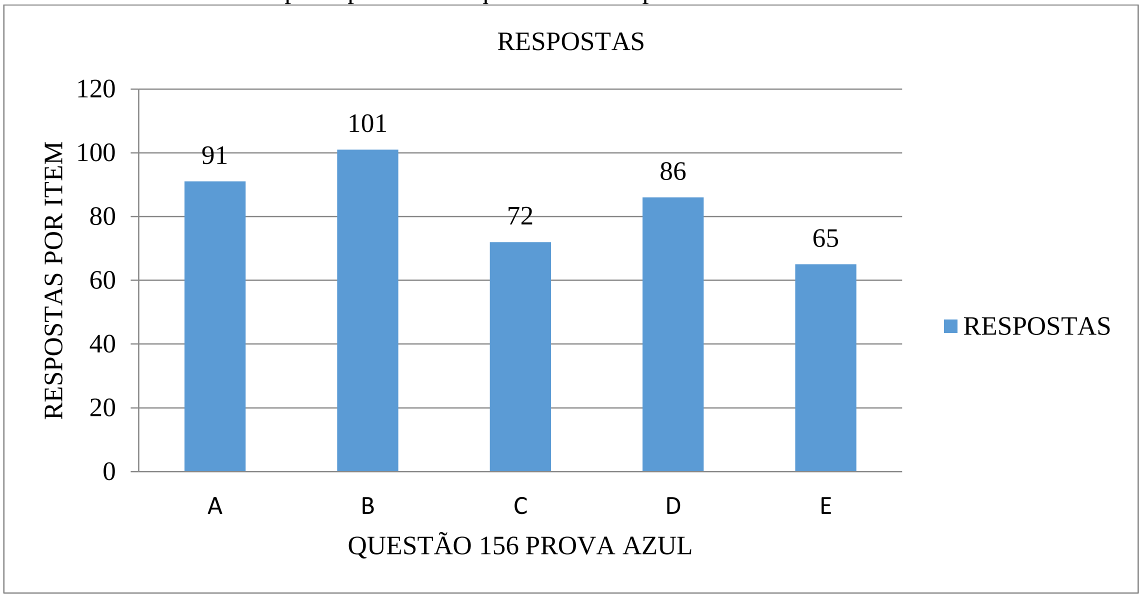
4.2.4 ENEM 2019

QUESTÃO 156

Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

a) 69 b) 70 c) 90 d) 104 e) 105

Gráfico 8 - Número de resposta por item da questão 156 da prova azul de 2019



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Uma possível solução

Iremos usar a ideia de subtração, ou seja, iremos calcular todas as combinações possíveis, sem se importar com a restrição de não ter uma dupla com dois canhotos, e desse total retirar as combinações onde aparece uma dupla com dois canhotos.

- Cálculo da primeira parte (todas as combinações possíveis)

Temos 8 amigos para formar a primeira dupla; $C_{8,2}$;

Como já foram utilizados 2 amigos na primeira dupla, para segunda dupla temos apenas 6 amigos $C_{6,2}$. Para a terceira dupla temos 4 amigos $C_{4,2}$ e finalmente para a quarta dupla temos 2 amigos $C_{2,2}$. Assim, pelo PFC o número de possibilidades de formarmos 4 duplas com amigos é dado por:

$$C_{8,2} \times C_{6,2} \times C_{4,2} \times C_{2,2}$$

Porém, as duplas podem permutar entre si, assim temos um total de:

$$\frac{C_{8,2} \times C_{6,2} \times C_{4,2} \times C_{2,2}}{4!} = 105$$

- Cálculo da segunda parte (total de combinação com uma dupla de canhoto)

Fixando a dupla de canhotos temos:

Para a segunda dupla temos 6 amigos para escolher 2, ou seja, $C_{6,2}$.

Para a terceira temos $C_{4,2}$ e para a quarta temos $C_{2,2}$.

Então temos um total de:

$$C_{6,2} \times C_{4,2} \times C_{2,2}$$

Como essas duplas podem permutar entre si ficamos com:

$$\frac{C_{6,2} \times C_{4,2} \times C_{2,2}}{3!} = 15$$

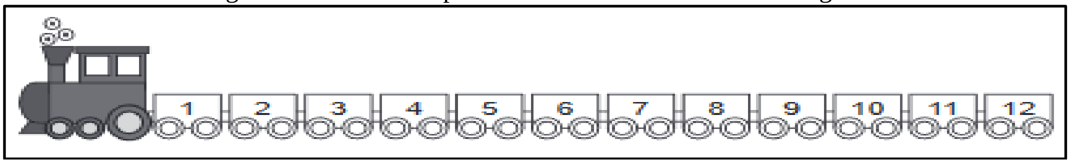
Portanto, o total de maneiras diferentes que podem ser formadas essas quatro duplas é:

$$105 - 15 = 90$$

QUESTÃO 171

Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.

Figura 10 – Trem composto de uma locomotiva e doze vagões



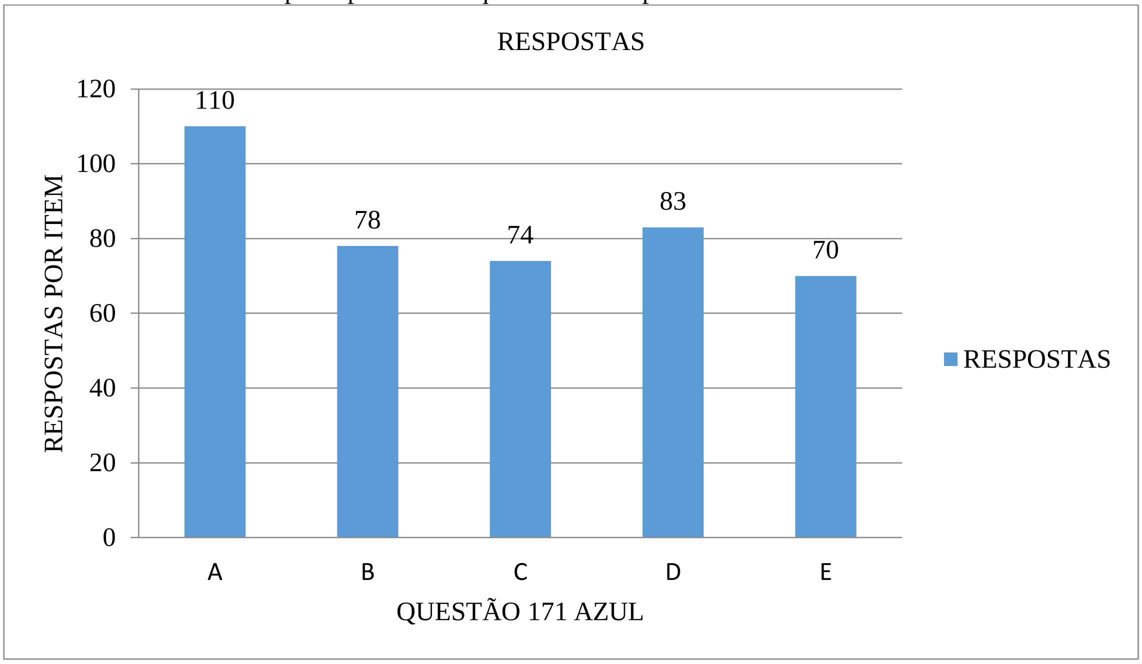
Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por:

a) $C_{12}^{4} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$ b) $C_{12}^{4} + C_{8}^{3} + C_{5}^{3} + C_{2}^{2}$ c) $C_{12}^{4} \times 2 \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{2}$

d) $C_{12}^{4} + 2 \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$ e) $C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$

Gráfico 9 - Número de resposta por item da questão 171 da prova azul de 2019



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

<u>Uma possível solução</u>

Temos 12 vagões, dos quais 4 serão pintados de vermelhos, 3 serão pintados de azul, 3 de verde e 2 de amarelo.

Os 4 que serão pintados de amarelos podemos escolher entre os 12 possíveis C_{12}^{4}.

Para a escolha dos 3 que serão pintados de azul temos 8 possibilidades de escolha C_{8}^{3}.

Para os 3 de que serão pintados de verde temos 5 possibilidades C_{5}^{3};

E para os 2 que serão pintados de amarelos temos duas possibilidades de escolha C_{2}^{2}.

Logo a quantidade de trens que podem ser montados é dada por:

$$C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$$

Nessa questão, com base no gráfico 9, percebemos que um possível erro cometido por 110 alunos (26,5%) refere-se à questão de que os vagões pintados não foram retirados para, após isso, se efetuar os demais cálculos, chegando em $C_{12}^{4} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$.

4.2.5 ENEM 2020

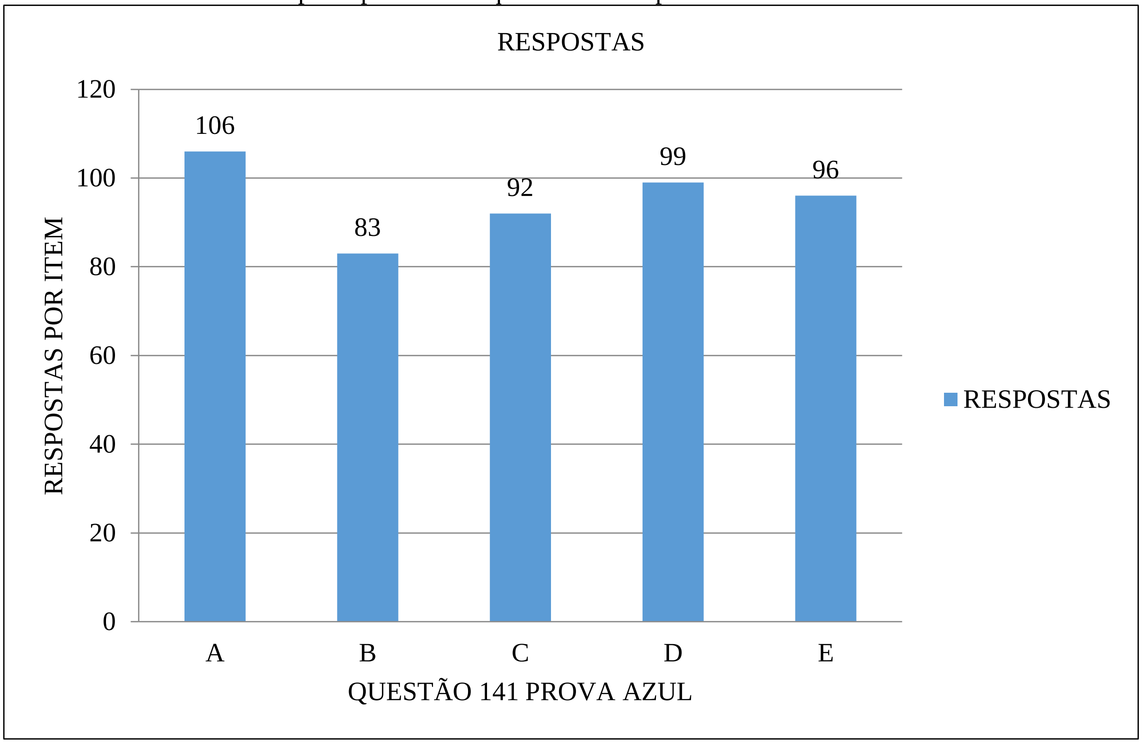
QUESTÃO 141

Um hotel de 3 andares está sendo construído. Cada andar terá 100 quartos. Os quartos serão numerados de 100 a 399 e cada um terá seu número afixado à porta. Cada número será composto por peças individuais, cada uma simbolizando um único algarismo.

Qual a quantidade mínima de peças, simbolizando o algarismo 2, necessárias para identificar o número de todos os quartos?

a) 160 b) 157 c) 130 d)120 e) 60

Gráfico 10 - Número de resposta por item da questão 141 da prova azul de 2020



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Uma possível solução

A questão quer saber quantas vezes o algarismo 2 aparece de 100 a 399. Podemos perceber que todos os quartos serão numerados com números contendo 3 dígitos, dessa maneira vamos calcular a quantidade de vezes que aparece o algarismo 2, nesse intervalo, em três etapas.

1.ª etapa: quantas vezes o algarismo 2 aparece na casa das centenas:

Temos que o algarismo 2 aparece na casa das centenas nos números que vão de 200 até 299, ou seja, 100 vezes.

2ª etapa: quantas vezes o algarismo 2 aparece na casa das dezenas:

Temos que o algarismo 2 aparece na casa das dezenas nos seguintes intervalos:

120, 121, ..., 128, 129 = 10 vezes

220, 221, .., 228, 229 = 10 vezes

320, 321, ..., 328, 329 = 10 vezes

Portanto, na casa das dezenas o algarismo 2 aparece 10 + 10 + 10 = 30 vezes.

3ª etapa: quantas vezes o algarismo 2 aparece na casa das unidades:

Temos que o algarismo 2 aparece na casa das dezenas nos seguintes intervalos:

102, 112, ..., 182, 192 = 10 vezes

202, 212, ..., 282, 292 = 10 vezes

302, 312, ..., 382, 392 = 10 vezes

Portanto, na casa das unidades o algarismo 2 aparece 10 + 10 + 10 = 30 vezes.

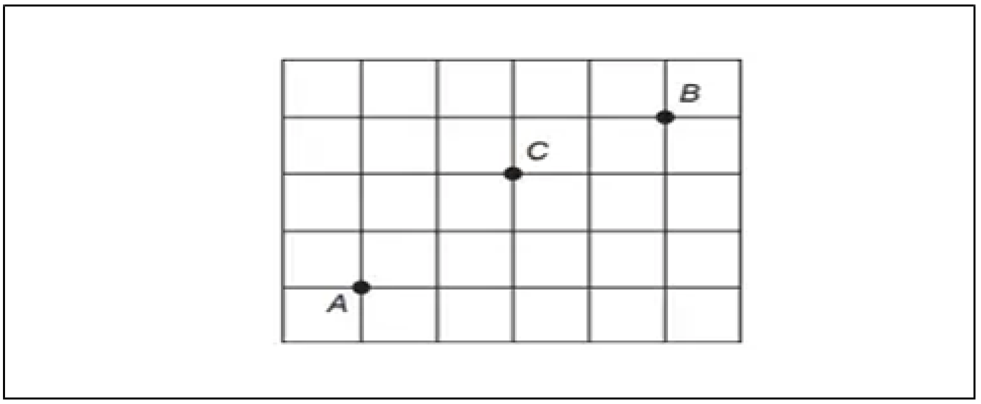
Sendo assim, concluímos que a quantidade mínima de peças, simbolizando o algarismo 2, necessárias para identificar o número de todos os quartos são:

$$100 + 30 + 30 = 160 \text{ peças.}$$

QUESTÃO 158

Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.

Figura 11 – Quadriculado com a localização das casas de André, Bernardo e Carlos



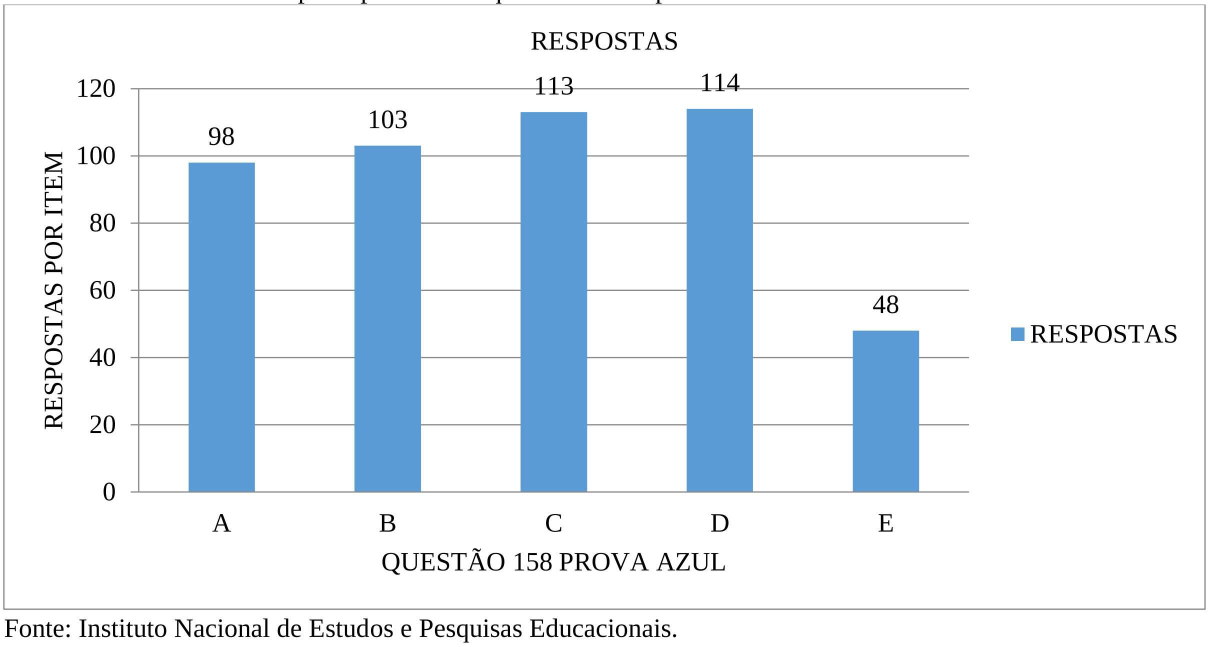
Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

a) 4 b) 14 c) 17 d) 35 e) 48

Gráfico 11 - Número de resposta por item da questão 158 da prova azul de 2020



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

<u>Uma possível solução</u>

Iremos fazer a resolução por parte. Primeiramente, iremos calcular todos os caminhos possíveis de André ir até a casa de Bernardo.

Podemos verificar que, para ir da casa de André até à casa de Bernardo, é preciso fazer 7 deslocamentos, sendo 4 deslocamentos para a direita (→) e 3 deslocamentos para cima (↑), ou seja, temos uma permutação de 9 elementos onde se repete 5 para a direita e 4 para cima. Logo, para ir da casa de André até a casa de Bernardo, basta calcularmos:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\ 3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3.2.1} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$$

Como André não pode passar pela casa de Carlos, vamos calcular todos os possíveis caminhos passando pela casa de Carlos e subtrair de todos os caminhos possíveis, já calculados acima.

Para o cálculo de A até B passando por C, vamos calcular em duas etapas:

Etapa 1: de A até C

Utilizando o mesmo raciocínio acima temos:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4.3.2!}{2!\,2.1} = \frac{4.3}{2.1} = 6$$

Etapa 1: de C até B

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!\ 1!} = \frac{3.2!}{2!\,1} = \frac{3}{1} = 3$$

Dessa forma, para ir da casa de André até a casa de Bernardo, passando pela cada de Carlos, é:

$$P_3^{2,1}.P_3^{2,1} = 6.3 = 18$$

Assim, o número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é:

$$35 - 18 = 17$$

QUESTÃO 163

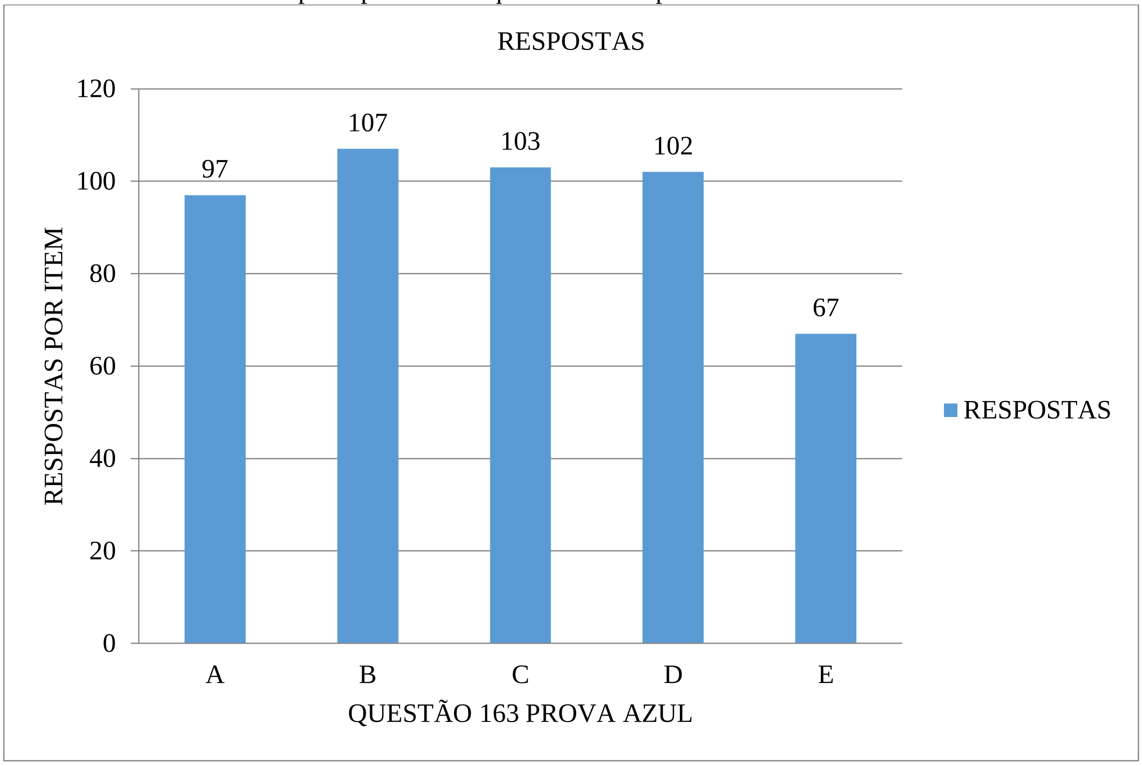
Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”.

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por:

a) $9!$ b) $4!.5!$ c) $2 \times 4!.5!$ d) $\frac{9!}{2!}$ e) $\frac{4!.5!}{2}$

Gráfico 12 - Número de resposta por item da questão 163 da prova azul de 2020



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Uma possível solução

De imediato, verificamos que a frase “I AM POTTER” possui 4 vogais (A, E, I, O) e 5 consoantes (M, P, T, T, R), logo para podermos intercalar as consoantes com as vogais, devemos começar a sequência com uma consoante, conforme o exemplo abaixo:

M A P E T I T O R

Então, nossas sequências serão conforme a tabela 7:

Tabela 7 – Intercalação de consoantes e vogais

consoante	vogal	consoante	vogal	consoante	vogal	consoante	vogal	consoante

Fonte: próprio autor

Assim, precisamos permutar as vogais e as consoantes:

Permutação das consoantes:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!}$$

Permutação das vogais:

$$P_4 = 4!$$

Logo, o número de anagramas formados é dado por:

$$P_4 \,.\; P_5^2 = 4!\,.\frac{5!}{2!} = \frac{4!.\,5!}{2!}$$

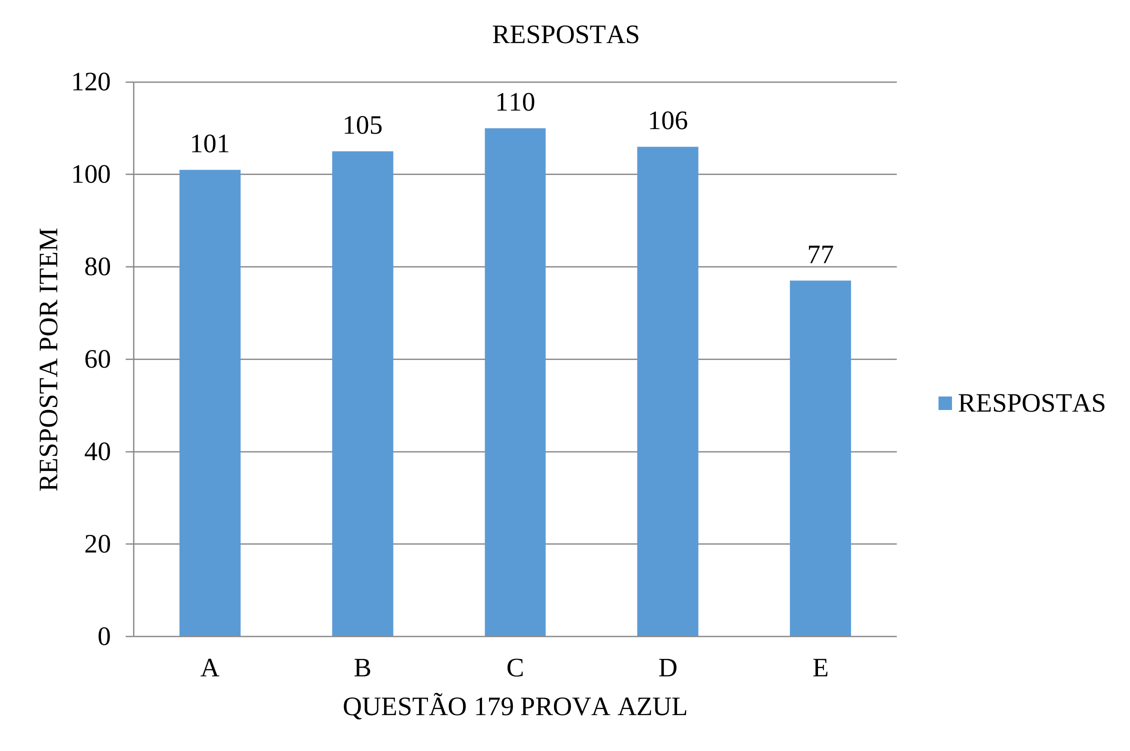
4.2.6 ENEM 2021

<u>QUESTÃO 179</u>

Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão:

a) $\frac{6!}{4!2!}.\frac{15!}{10!5!}$ b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$ c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$ d) $\frac{6!}{2!}.\frac{15!}{5!}$ e) $\frac{21!}{7!14!}$

Gráfico 13 - Número de resposta por item da questão 179 da prova azul de 2021



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

<u>Uma possível solução</u>

De início, verificamos que a ordem com que escolhemos os 2 tipos de tecidos e as 5 pedras ornamentais não influencia no resultado, portanto, estamos trabalhando com combinação.

- Formas de escolher os 2 tipos de tecidos entre os 6 disponíveis:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!}$$

- Formas de escolher os 5 tipos de tecidos entre os 15 disponíveis:

$$C_{15,5} = \frac{15!}{5!\,(15-5)!} = \frac{15!}{5!\,10!}$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $\frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{15!}{5!10!}$ tipos de fantasias.

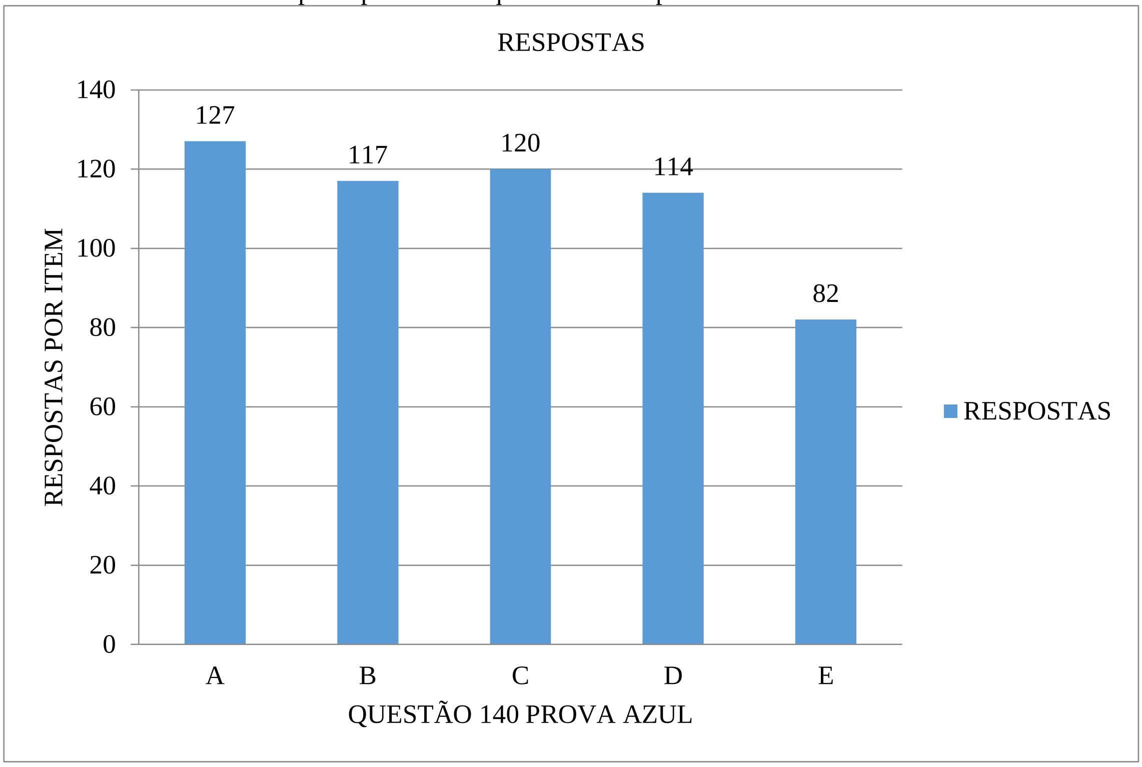
4.2.7 ENEM 2022

<u>QUESTÃO 140</u>

Foram convidadas 32 equipes para um torneio de futebol, que foram divididas em 8 grupos com 4 equipes, sendo que, dentro de um grupo, cada equipe disputa uma única partida contra cada uma das demais equipes de seu grupo. A primeira e a segunda colocadas de cada grupo seguem para realizar as 8 partidas da próxima fase do torneio, chamada oitavas de final. Os vencedores das partidas das oitavas de final seguem para jogar as 4 partidas das quartas de final. Os vencedores das quartas de final disputam as 2 partidas das semifinais, e os vencedores avançam para a grande final, que define a campeã do torneio. Pelas regras do torneio, cada equipe deve ter um período de descanso de, no mínimo, 3 dias entre dois jogos por ela disputados, ou seja, se um time disputar uma partida, por exemplo, num domingo, só poderá disputar a partida seguinte a partir da quinta-feira da mesma semana. O número mínimo de dias necessários para a realização desse torneio é:

a) 22 b) 25 c) 28 d) 48 e) 64

Gráfico 14 - Número de resposta por item da questão 140 da prova azul de 2022



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Uma possível solução

Vamos fazer uma análise da quantidade de jogos da primeira fase, em apenas um grupo. Como os demais grupos podem jogar no mesmo dia, esse raciocínio servirá para os demais.

Seja, por exemplo, um dos grupos formado pelos times A, B, C e D. Como todos jogam entre si, podemos ter a seguinte configuração conforme a tabela 8:

Tabela 8 – Possibilidade de jogos para um grupo com quatro times

DIAS	JOGOS	
1º DIA	A X B	C X D
2º DIA	A X C	B X D
3º DIA	A X D	B X C

Fonte: Próprio autor

Podemos observar que, analisando a tabela 8, para realizarmos todos os jogos da primeira fase, de um grupo (o mesmo ocorre nos demais grupos), precisamos de 3 dias. Como os times precisam descansar por no mínimo 3 dias para a primeira fase, serão precisos 3 x 3 = 9 dias.

Na segunda fase, oitavas de finais, teremos 16 times, sendo 8 jogos, precisando apenas de um dia para realização dos mesmos. Nas quartas de finais teremos 8 times e 4 jogos, novamente para esses 4 jogos será preciso apenas 1 dia. Na semifinal teremos 4 times e dois jogos, necessitando de 1 dia para a realização deles e, por fim, teremos a final com dois times e 1 jogo, o qual será realizado em um único dia. Dessa forma, teremos:

1ª fase: 3 dias

Oitavas de finais: 1 dia

Quartas de finais: 1 dia

Semifinais: 1 dia

Final: 1 dia

Totalizando 7 dias, como devemos ter um descanso de pelo menos 3 dias entre uma partida e outra ficamos com:

Tabela 9 – Número total de dias referente a cada fase

1ª fase	descanso	oitavas	descanso	quartas	descanso	semi	descanso	final
9 dias	3 dias	1 dia	3 dias	1 dia	3 dias	1 dia	3 dias	1 dia

Fonte: Próprio autor

Assim, de acordo com a tabela 9, o número mínimo de dias necessários para a realização desse torneio é:

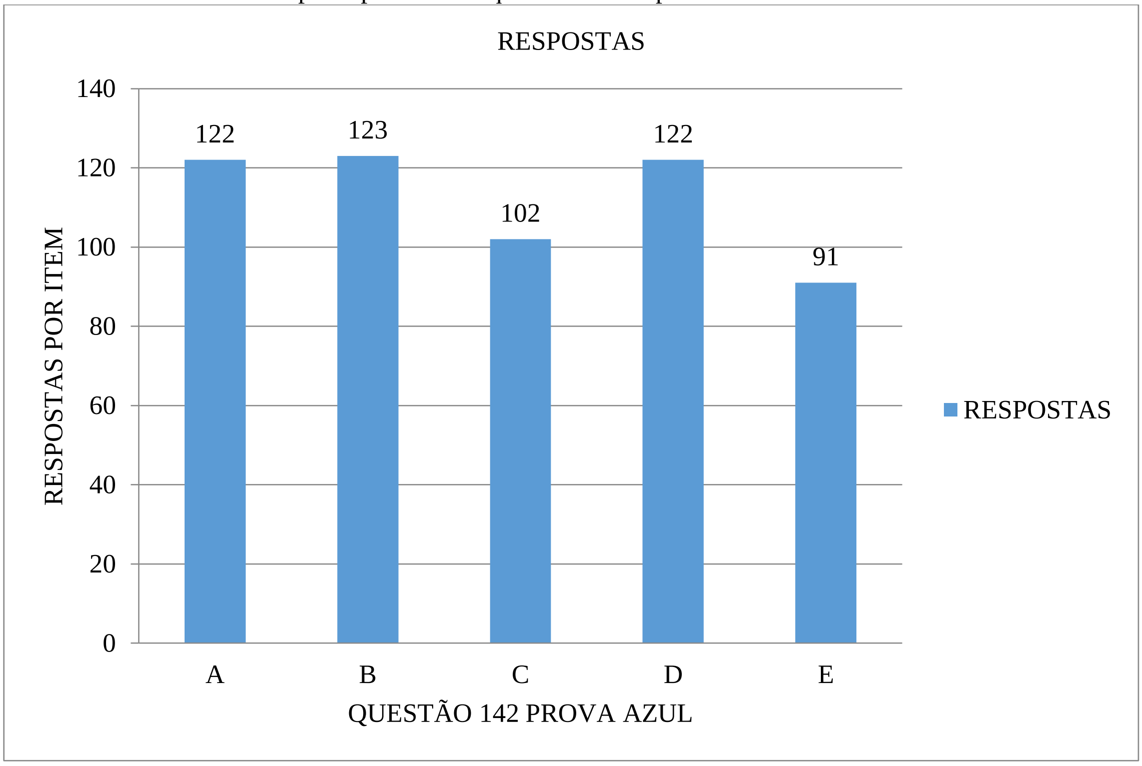
$$9 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 = 25 \text{ dias}$$

<u>QUESTÃO 142</u>

Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis. Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é:

a) 8 b) 9 c) 11 d) 18 e) 24

Gráfico 15 - Número de resposta por item da questão 142 da prova azul de 2022



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

<u>Uma possível solução:</u>

Temos:

- 7 modelos de carros;

- 2 tipos de motores
- 3 opcionais (podendo escolher um, dois, três ou nenhum).

Como a quantidade de modelos tem que ser maior que 1000, dessa maneira, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$modelos\,.\,motores\,.\,opcionais\,.\,cor\ > 1000$$

Notamos que, em relação aos opcionais, podemos combinar eles, ficando com:

$$C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,3} + C_{3,0} = 3 + 3 + 1 + 1 = 8$$

Portanto,

$$modelos\,.\,motores\,.\,opcionais\,.\,cor\ > 1000$$

$$7\,.\,2\,.\,8\,.\,nº\ cores\ > 1000$$

$$nº\ cores\ > \frac{1000}{112} \cong 8{,}92$$

Assim sendo, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é 9.

QUESTÃO 155

Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã. De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

a) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!}$

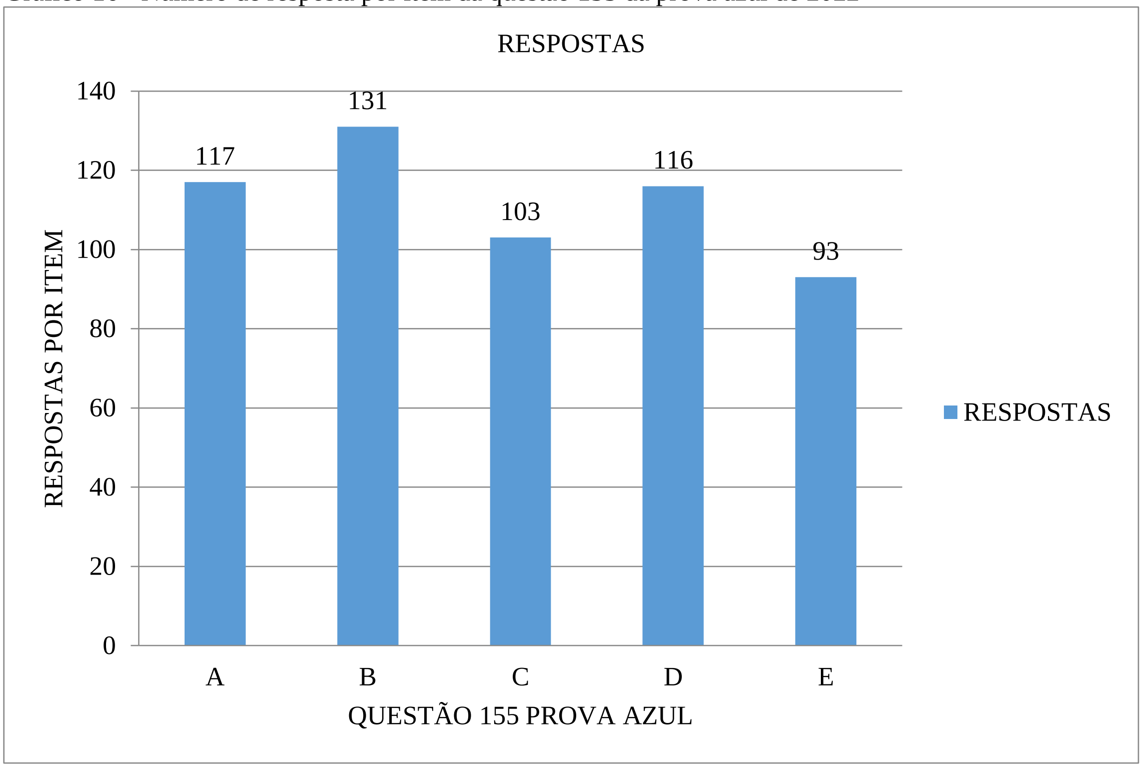
b) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!2!}$

c) $9 \times \frac{4!}{(4-2)!2!}$

d) $9 \times \frac{2!}{(2-2)!2!}$

e) $9 \times (\frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1)$

Gráfico 16 - Número de resposta por item da questão 155 da prova azul de 2022



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

<u>Uma possível solução</u>

Como os apartamentos que a pessoa pretende comprar, em pelo menos um, receba sol pela manhã, já descartamos os apartamentos que terminam em 7 ou 8, pois ambos só recebem sol pela tarde.

Assim, ficamos somente com 6 apartamentos para escolhermos 2. Como a ordem não importa, ou seja, escolher o apartamento de final 2 e depois o de final 3 é o mesmo que escolher o apartamento de final 3 e depois o de final 2, logo estamos tratando de combinação, sendo assim ficamos com:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!}$$

Porém, o cálculo acima é somente para um andar. Como temos 9 andares, o número de maneiras diferentes que essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas é:

$$9 \times \frac{6!}{2!\,(6-2)!}$$

Com base nos gráficos, que mostram o número de respostas por item em cada questão, podemos inferir que o índice de acertos, a respeito do conteúdo Análise Combinatória, foi consideravelmente baixo, com média de 21,33% nos sete anos analisados. Além disso, percebe-se que os educandos têm mais afinidade com questões em que é trabalhado apenas um tipo de método de contagem, em especial, o princípio multiplicativo ou a permutação simples. Contudo, 56,25% das questões analisadas intercalam mais de um tipo de método de contagem em sua resolução.

Outro fator importante, que sugere as respostas dos discentes, diz respeito à questão do reconhecimento de quando se usar os tipos de método de contagem, arranjo ou combinação, ou seja, percebe-se que os mesmos sabem desenvolver tais métodos, porém, não conseguem identificar em qual situação aplicá-los.

Dessa forma, com base nas análises apresentadas, pensou-se em uma proposta de intervenção voltada no sentido de colaborar no entendimento do conteúdo, dando ênfase na parte em que o aluno apresenta mais dificuldades com relação ao objeto de estudo e fortalecendo seus pontos fortes. Vale ressaltar que tal intervenção serviu como reforço para os educandos que iriam prestar o ENEM em 2023.

5 INTERVENÇÃO NAS TURMAS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO DA ESCOLA ESTADUAL DE TEMPO INTEGRAL DOM PEDRO I

5.1 APRESENTAÇÃO DA ESCOLA

A Escola Dom Pedro I, local escolhido para a intervenção, está localizada no município de Mazagão, a 35 km da capital, foi criada pelo Decreto n° 03/72-GAB, de 2 de março de 1972, por determinação do Governador do Território Federal do Amapá, Gen. Ivanhoé Gonçalves Martins, com o nome de Ginásio Dom Pedro I.

No dia 2 de março de 1972 iniciaram-se as primeiras turmas com suas atividades em salas cedidas na Escola Estadual Doutor Murilo Braga, com uma clientela de 121 alunos, tendo como seu primeiro diretor, o Professor José Odair da Fonseca Benjamim, e como secretário o Senhor Luiz Alberto Costa Guedes.

A regularização da escola veio com o Parecer n° 43/76-CE/CETA, de 16 de setembro de 1976 e o Ensino de 1° e 2° Graus foi reconhecido pela Resolução n° 114/00-CEE, de 26 de setembro de 2000.

O município de Mazagão, onde a referida escola está localizada, conta com uma população de 21.918 habitantes, segundo dados do IBGE de 2022, com um predomínio de população masculina em torno de 58%.

Possui como potencial econômico a agricultura de subsistência, o comércio, produção oleira e o funcionalismo público. A clientela é oriunda na sua maioria da classe de baixa renda salarial e desempregada. As famílias vivem com renda abaixo de três salários mínimos e revelam uma heterogeneidade no perfil socioeconômico.

A referida escola conta atualmente com 12 salas de aulas, sala de secretaria, sala de coordenação, sala dos professores, uma sala de educação especial, uma quadra poliesportiva, uma copa. Até 2020, a escola atendia o Ensino Fundamental 2 (6.º ao 9.º ano), o Ensino Médio e a Educação de Jovens e Adultos (EJA). A partir de 2022, com a implantação da Escola de Tempo Integral – ETI- a mesma passou a fornecer somente o Ensino Médio e a educação de Jovens e Adultos, atendendo um total de 693 discentes, sendo 435 do Ensino Médio e 258 da educação de Jovens e Adultos.

5.2 DESCRIÇÃO DA INTERVENÇÃO

A seguinte intervenção, referente ao conteúdo, Análise Combinatória, ocorreu no período de 06/11/2023 à 10/11/2023 e foi realizado na escola Estadual Dom Pedro I, com 30 alunos de uma turma do terceiro ano do ensino médio, sendo que a turma foi dividida em cinco grupos com seis alunos cada, a ação foi composta de três momentos, os quais estão descritos abaixo.

Tal intervenção, além de ter como objetivo a apresentação do conteúdo Análise Combinatória, também serviu como preparo para os mesmos no sentido de prestarem a prova do ENEM.

1º MOMENTO: AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Essa etapa foi realizada no dia 06/11/2023, sendo aplicada uma avaliação diagnóstica que envolveu os seguintes objetos de estudos: o princípio fundamental da contagem, arranjo e combinação, com o intuito de verificar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos objetos do conhecimento citado, bem como suas dificuldades para que, a partir dessas, traçar estratégias no sentido de sanar/amenizar tais deficiências.

Tal instrumento avaliativo foi aplicado uma vez que o mesmo fornece informações relevantes sobre o grau de entendimento dos envolvidos acerca do conteúdo estudado.

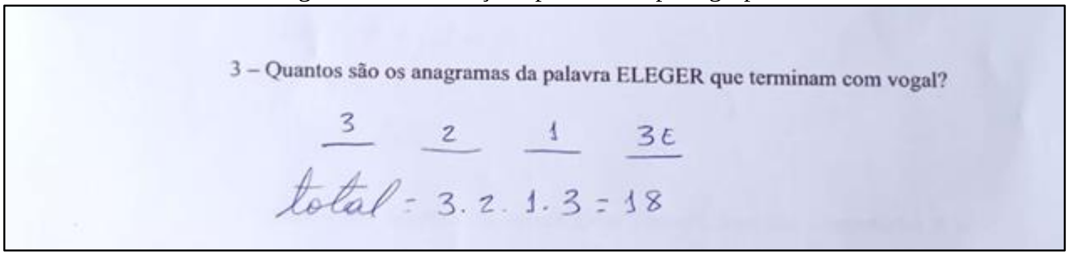
Nessa linha de pensamento, Ferreira (2009, p. 33) cita que a avaliação diagnóstica tem como objetivo:

- Conhecer o aluno, sua bagagem cognitiva e/ou suas habilidades;
- Identificar possíveis dificuldades de aprendizagem;
- Verificar o que o aluno aprendeu ou não aprendeu, identificando causas de não aprendizagem;
- Caracterizar o aluno quanto a interesses ou necessidades;
- Replanejar o trabalho.

Para esse primeiro momento, foi trabalhado um questionário contendo sete questões (em anexo) sobre os conteúdos citados anteriormente. Tais questões foram adaptadas das provas anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio, do livro

Conexões: Matemática e suas Tecnologias e do livro da coleção Fundamentos de Matemática elementar, volume 5 - Combinatória e probabilidade - as quais constam, em anexo, no fim desse trabalho.

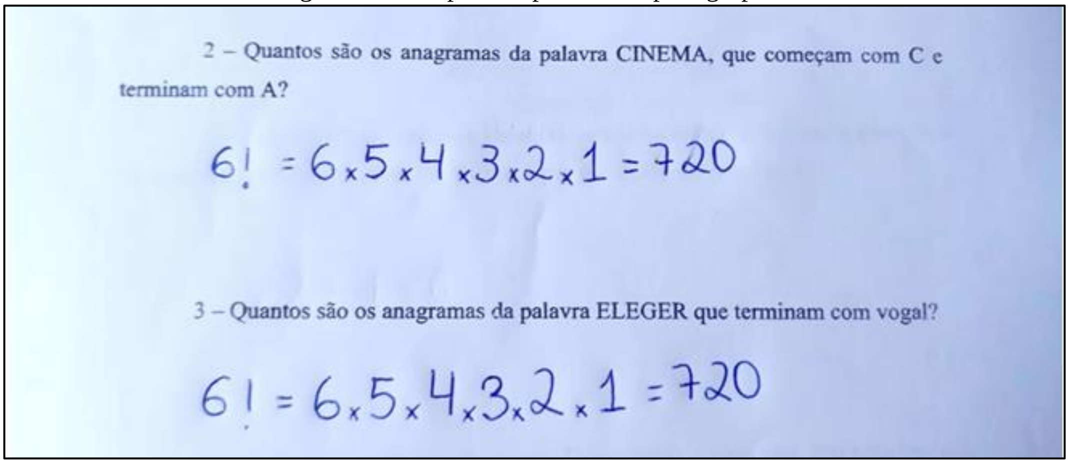
Figura 12 – Resolução apresentada pelo grupo C



Fonte: Próprio autor

Na figura 12, observou-se que o grupo não possui domínio em questões que envolvem permutação com elementos repetidos. Sendo que o mesmo considerou três opções para a última letra (3 letras e) e permutou a demais.

Figura 13 – Respostas apresentada pelo grupo D



Fonte: próprio autor

Analisando a figura 13, notou-se que o grupo não diferencia os tipos de permutações (com e sem elementos repetidos).

O resultado desse primeiro momento foi primordial para que se pudessem traçar estratégias voltadas para as resoluções dos problemas de Análise Combinatória, uma vez detectadas as dificuldades em determinado objeto do conhecimento.

2º MOMENTO: CONCEITUANDO OS OBJETOS DE CONHECIMENTO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Depois de concluída a etapa anterior e feita a análise dos dados referente às soluções dos problemas apresentados, iniciou-se a segunda etapa da intervenção. Essa etapa foi desenvolvida em três dias, 07/11/2023, 08/11/2023 e 09/11/2023, sendo que cada dia teve duração de três aulas de 50 minutos cada.

No primeiro dia, foram trabalhados conceitos sobre o Princípio fundamental da contagem, no segundo dia trabalharam-se os conceitos a respeito dos tipos de permutações e arranjos e, no terceiro e último dia desse segundo momento, foram introduzidos os conceitos dos tipos de combinação. Cada um dos três dias iniciou-se com a apresentação de questões relacionadas ao conteúdo a ser trabalhado, sendo que, em grupos, com auxílio do professor, os alunos debateram possíveis soluções e apresentaram as mesmas para os demais colegas. A partir das apresentações dos grupos, foram construindo-se os conceitos dos conteúdos trabalhados na aula e, após a definição dos conceitos, foram propostas outras soluções com base nos conceitos apresentados anteriormente.

1º DIA: O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A referida aula teve como objetivo a inserção dos conceitos relacionados ao Princípio Fundamental da Contagem. Para tanto, foram propostos problemas com o intuito de verificar as diferentes possibilidades de resoluções, ou seja, as possíveis representações dos alunos na listagem dos agrupamentos, sem que os mesmos tenham o conceito formal do conteúdo.

Para a introdução do conteúdo, foram trabalhados dois problemas, a saber:

1 – ADAPTADO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 09”

Uma moça possui 5 blusas, 2 sapatos e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa, um sapato e uma saia?

Figura 14 – Solução apresentada pelo grupo E

1 – Uma moça possui 5 blusas, 2 sapatos e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa, um sapato e uma saia?

$5 \times 2 \times 6 = 60$

Fonte: próprio autor

2 – ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 114. ANO 2020"

O professor de matemática, da turma 311, passou um questionário contendo 6 questões, sendo que em cada questão o aluno tinha que marcar, no cartão resposta, a opção certo ou errado, conforme a imagem abaixo.

	QUESTÕES					
	1	2	3	4	5	6
CERTO	●	●	○	●	○	○
ERRADO	○	○	●	○	●	●

De quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

Figura 15 – Resolução apresentada pelo grupo C

2 – O professor de matemática, da turma 311, passou um questionário contendo 6 questões, sendo que em cada questão o aluno tinha que marcar no cartão resposta a opção certo ou errado, conforme a imagem abaixo.

	QUESTÕES					
	1	2	3	4	5	6
CERTO	●	●	○	●	○	○
ERRADO	○	○	●	○	●	●

De quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

$12 \times 6 = 72$

Fonte: próprio autor

Analisando as figuras 14 e 15, percebeu-se que os alunos têm dificuldade em aplicar o Princípio Fundamental da Contagem em questões contextualizadas.

2º DIA: PERMUTAÇÃO E ARRANJO

Nesse segundo dia de aula, foram trabalhados os conceitos de permutação, com e sem repetição, e também os conceitos de arranjo com e sem repetição. Para tanto, como na aula anterior, foram inicialmente propostas situações-problemas que levassem o discente a desenvolver variadas maneiras de resoluções.

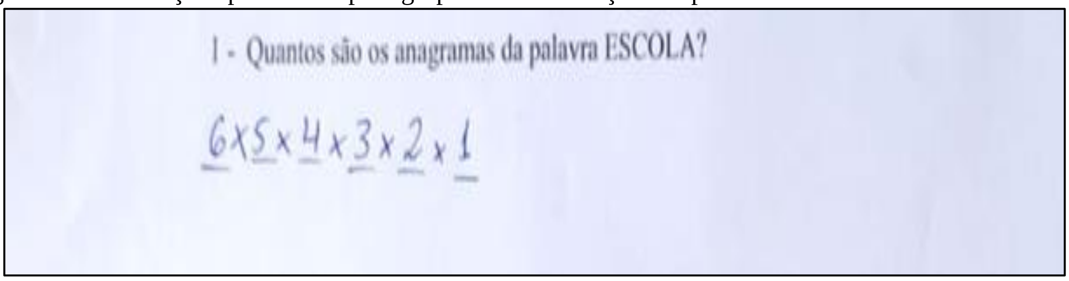
Novamente, em um primeiro momento, os alunos se reuniram em grupo para debater possíveis estratégias de resoluções para as questões apresentadas. Após terminarem suas resoluções, um integrante do grupo apresentava para os demais a estratégia utilizada. Num segundo momento, foi verificado se tais estratégias eram válidas e, em seguida, os alunos eram direcionados a como "atacar" de forma correta o problema para depois inserir o conceito de tal conteúdo.

Os problemas e algumas soluções propostas pelos grupos seguem abaixo:

1 - ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 115. ANO 2020" (PERMUTAÇÃO SIMPLES)

Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?

Figura 16 – Resolução apresentada pelo grupo D – Permutação Simples



Fonte: próprio autor

2 – ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 115. ANO 2020" (PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO)

O professor de matemática passou um trabalho em trio para fazer em casa. Ana, Beto e Cláudia resolveram fazer juntos. Decidiram que iriam fazer o trabalho na casa de Cláudia. Representando a casa de Ana por A, a do Beto por B e a da Cláudia por C, quantos são os possíveis caminhos que Ana pode fazer para ir da sua casa até a casa de Cláudia, passando pela casa de Beto, sabendo que Ana sempre anda para baixo ou para a direita?

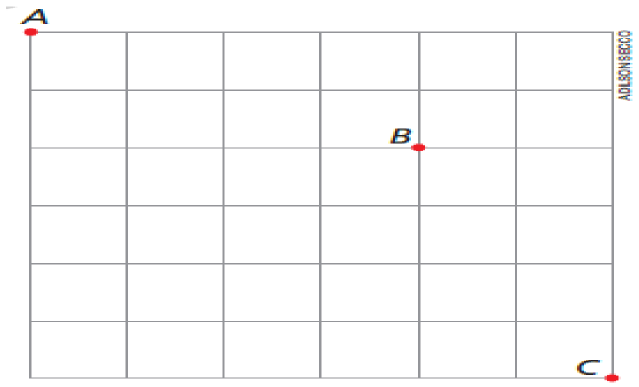
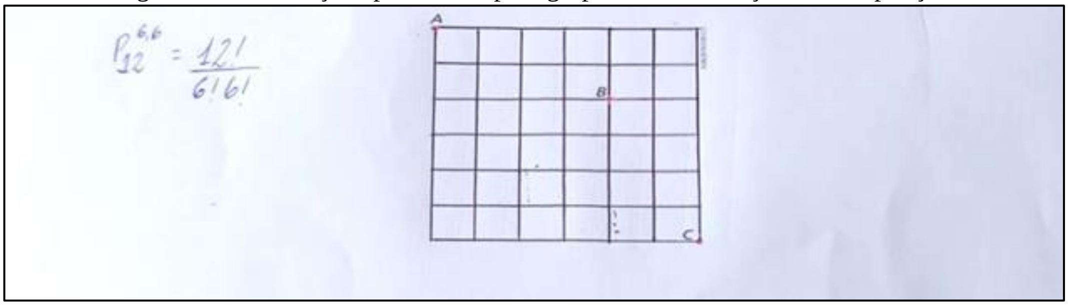
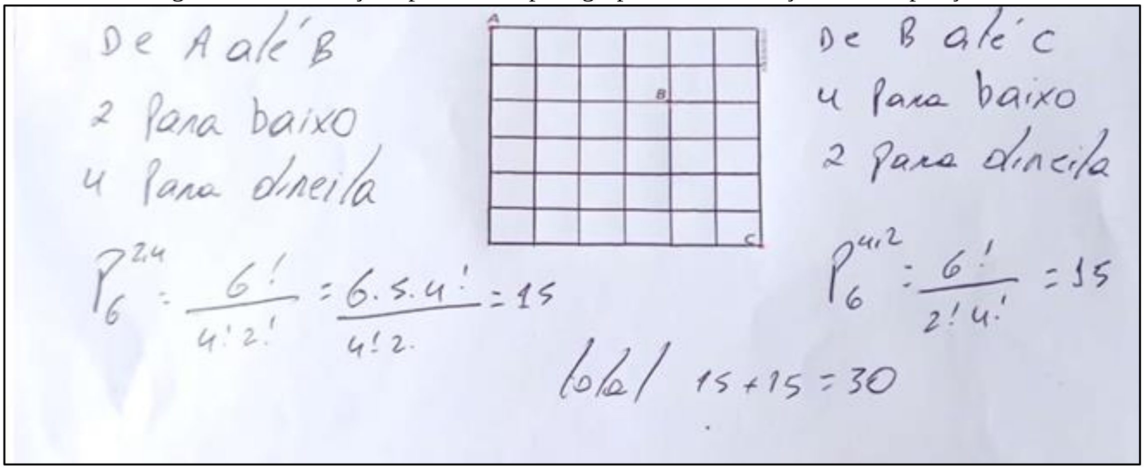


Figura 17 – Resolução apresentada pelo grupo B – Permutação com Repetição



Fonte: Próprio autor

Figura 18 – Resolução apresentada pelo grupo C – Permutação com Repetição



Fonte: Próprio autor

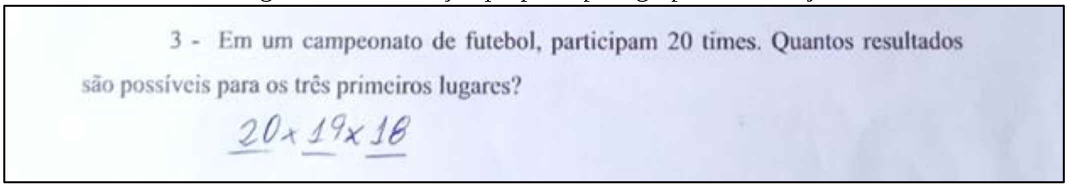
Na solução do grupo B, figura 17, observa-se que o mesmo pensou em se tratar de uma permutação onde há repetição de 6 elementos para a direita e também 6 elementos repetidos para baixo, sem se preocupar com a condição de obrigatoriamente passar pela casa de Beto levando o grupo errar a questão.

Já na figura 18, resolução do grupo C, nota-se que o raciocínio foi feito corretamente, subdividindo a solução em duas etapas, porém cometeram um erro que a maioria dos alunos comete que foi adicionar os resultados das duas etapas em vez de multiplicá-los.

3 - ADAPTADO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 21" (ARRANJO SIMPLES)

Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

Figura 19 – Resolução proposta pelo grupo A - Arranjo

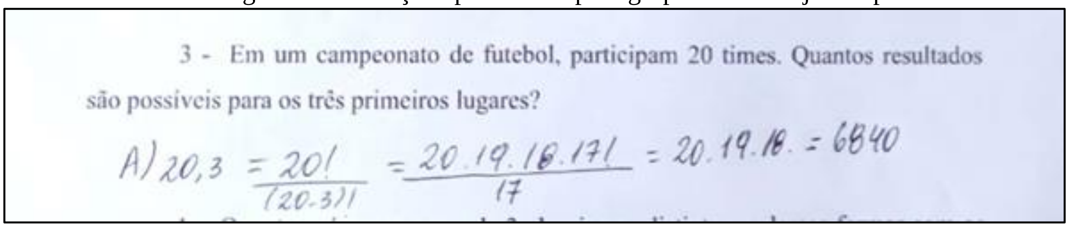


3 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$20 \times 19 \times 18$

Fonte: Próprio autor

Figura 20 – Solução apresentada pelo grupo B – Arranjo Simples



3 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

A) $20,3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20.19.18.17!}{17!} = 20.19.18. = 6840$

Fonte: Próprio autor

Observando as figuras 19 e 20, nota-se que foram apresentadas diferentes soluções para uma mesma questão, ou seja, percebe-se que tanto o grupo A quanto o grupo B conseguiram absorver o que a questão estava solicitando.

3º DIA: COMBINAÇÃO (SIMPLES, COM REPETIÇÃO E CIRCULAR)

Nesse último dia, do segundo momento da intervenção, foram trabalhados os conceitos dos diversos tipos de combinação, assunto esse recorrente nas provas do Enem. Para tanto, inicialmente, para verificar o nível de conhecimento dos estudantes a respeito de tal conteúdo, foram trabalhadas questões adaptadas das provas anteriores do Enem. Como nos dois dias anteriores, a turma foi dividida em grupos onde cada um tentou resolver as questões e em seguida apresentar aos demais grupos para, após um debate, verificar a validade de cada resolução.

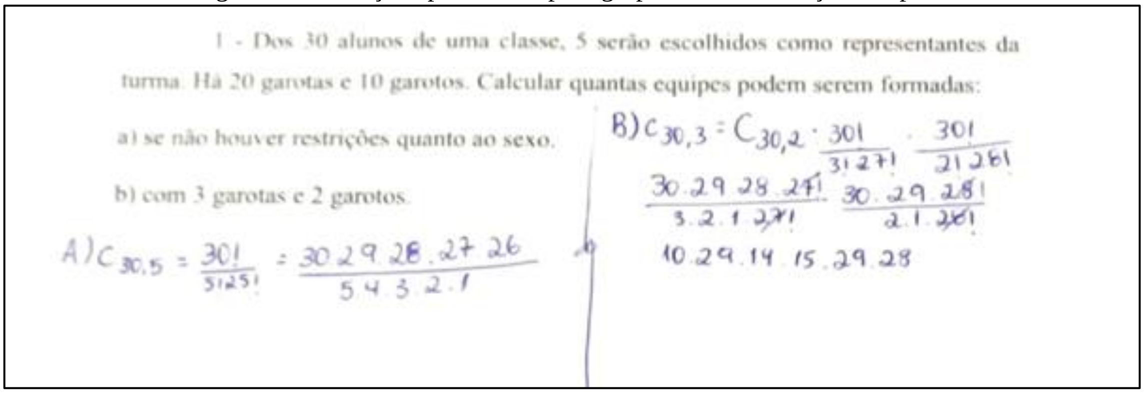
A partir das apresentações e discussões acerca das soluções apresentadas foram sendo construídos os conceitos referentes aos tipos de combinação para que os educandos pudessem compreender tais conceitos e fazer uma relação com a aula anterior a qual foi trabalhado o conteúdo de arranjos, no intuito de fazer uma diferenciação entre esses dois métodos de contagem.

1 - ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 119. ANO 2020" (COMBINAÇÃO SIMPLES)

Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem ser formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo. b) com 3 garotas e 2 garotos.

Figura 21 – Solução apresentada pelo grupo A – Combinação Simples



1 - Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem serem formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo.

b) com 3 garotas e 2 garotos.

A) $C_{30,5} = \frac{30!}{5!25!} = \frac{30.29.28.27.26}{5.4.3.2.1}$

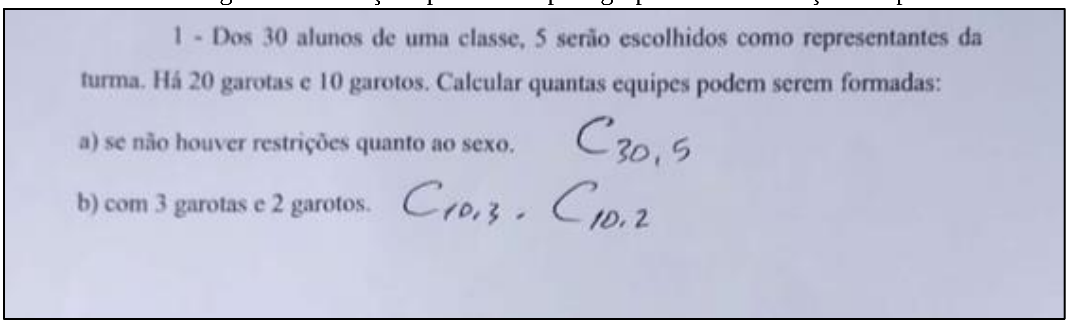
B) $C_{30,3} \cdot C_{30,2} \cdot \frac{30!}{3!27!} \cdot \frac{30!}{2!28!}$

$\frac{30.29.28.27!}{3.2.1.27!} \cdot \frac{30.29.28!}{2.1.28!}$

$10.29.14 \cdot 15.29.28$

Fonte: Próprio autor

Figura 22 - Solução apresentada pelo grupo E – Combinação Simples



1 - Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem serem formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo. $C_{30,5}$

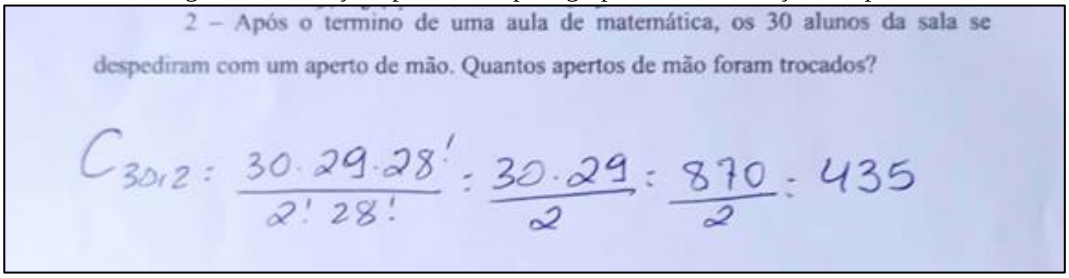
b) com 3 garotas e 2 garotos. $C_{10,3} \cdot C_{10,2}$

Fonte: Próprio autor

2 – ADAPTADO DO LIVRO “CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 115. ANO 2020” (COMBINAÇÃO SIMPLES)

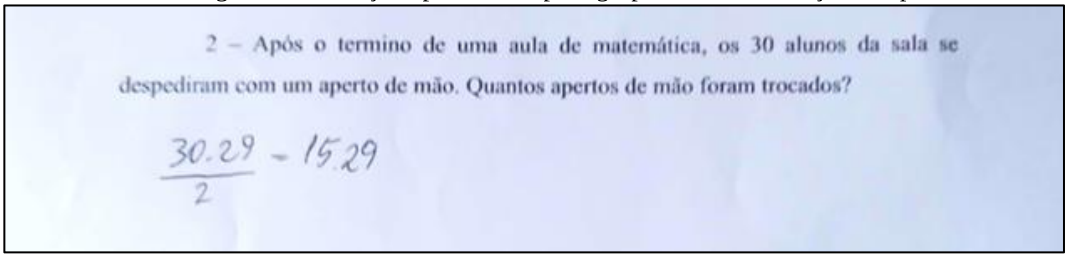
Após o termino de uma aula de matemática, os 30 alunos da sala se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

Figura 23 - Solução apresentada pelo grupo D – Combinação Simples



Fonte: Próprio autor

Figura 24 - Solução apresentada pelo grupo B – Combinação Simples

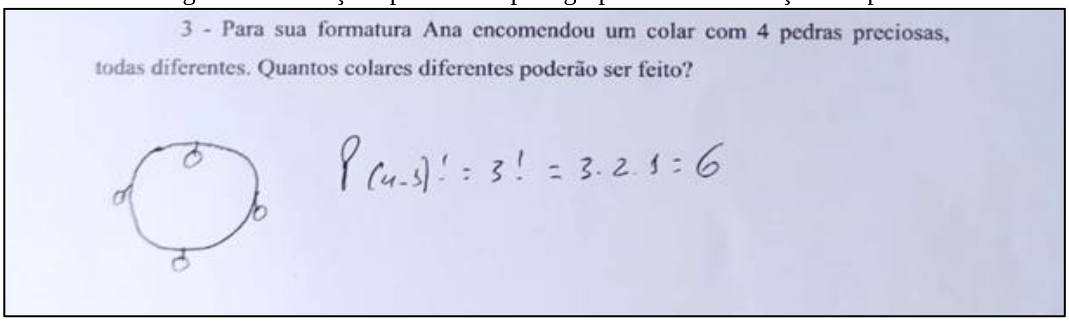


Fonte: Próprio autor

3 - ADAPTADO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 21”

Para sua formatura Ana encomendou um colar com 4 pedras preciosas, todas diferentes. Quantos colares diferentes poderão ser feito? (COMBINAÇÃO CIRCULAR)

Figura 25 - Solução apresentada pelo grupo B – Combinação Simples

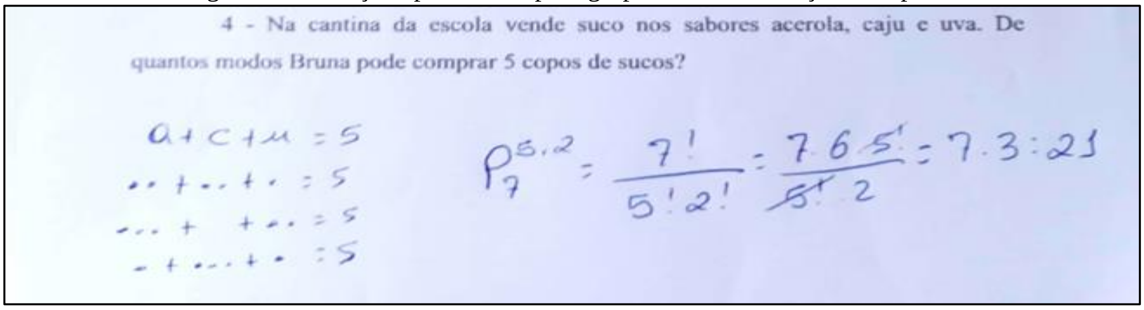


Fonte: Próprio autor

4 - ADAPTADO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 54”

Na cantina da escola vende-se suco nos sabores acerola, caju e uva. De quantos modos Bruna pode comprar 5 copos de sucos? (COMBINAÇÃO COMPLETA)

Figura 26 - Solução apresentada pelo grupo B – Combinação Completa



Fonte: Próprio autor

3º MOMENTO: INVESTIGANDO O APRENDIZADO

Essa última etapa teve como objetivo investigar o progresso dos educandos. Para tanto, foi aplicada uma avaliação formativa, uma vez que a mesma, segundo Afonso (2004), possibilita o acompanhamento da aprendizagem dos estudantes, o qual se apresenta como pertinente ação ao longo do percurso escolar.

SANT'ANNA, 2001, P. 34 descreve que:

> A Avaliação Formativa tem como função informar o aluno e o professor sobre os resultados que estão sendo alcançados durante o desenvolvimento das atividades; melhorar o ensino e a aprendizagem; localizar, apontar, discriminar deficiências, insuficiências, no desenvolvimento do ensino-aprendizagem para eliminá-las; proporcionar feedback de ação.

Portanto, esse terceiro momento teve como foco verificar o aprendizado dos alunos em relação ao que foi desenvolvido nos três dias correspondentes ao segundo momento da intervenção. Dessa forma, foi possível averiguar o quão proveitosas foram as aulas relacionadas aos conteúdos ministrados.

A seguir, algumas soluções propostas pelos grupos, onde as mesmas serão discutidas no próximo tópico.

1 - QUESTÃO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 13”

Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras um homem pode ir do ponto A até a reta BC? (PFC)

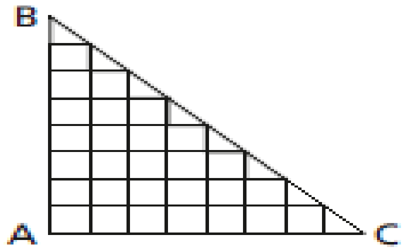
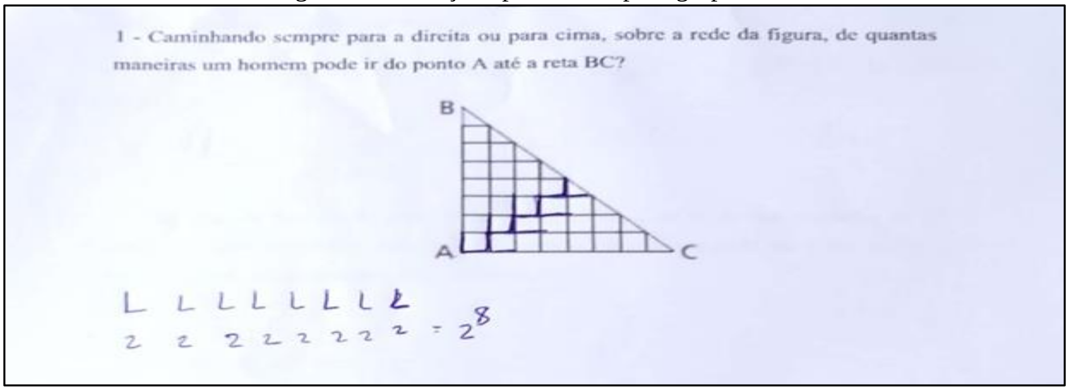


Figura 27 - Solução apresentada pelo grupo A – P.F.C.

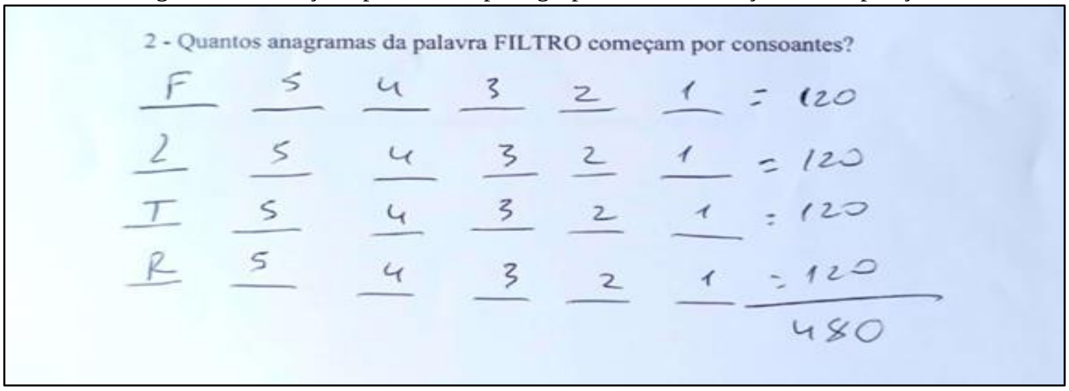


Fonte: Próprio autor

2 - QUESTÃO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 27”

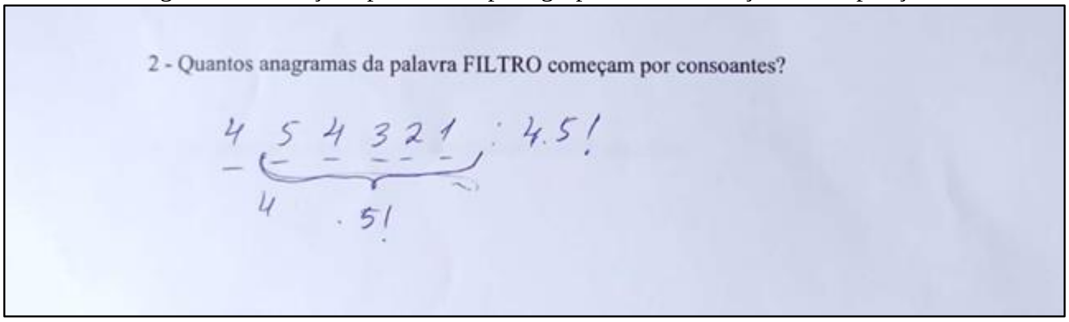
Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes? (PERMUTAÇÃO SEM REPETIÇÃO)

Figura 28 - Solução apresentada pelo grupo D – Permutação sem repetição



Fonte: Próprio autor

Figura 29 - Solução apresentada pelo grupo C – Permutação sem repetição

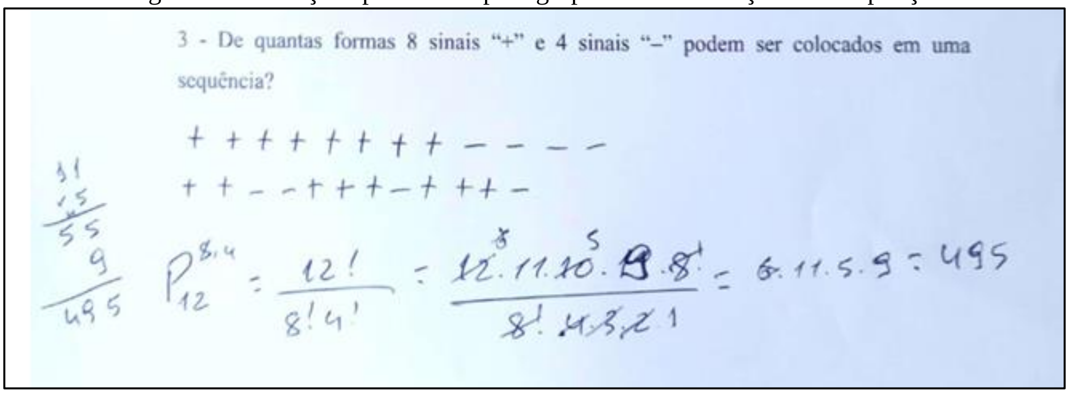


Fonte: Próprio autor

3 - QUESTÃO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 48”

De quantas formas 8 sinais “+” e 4 sinais “–” podem ser colocados em uma sequência? (PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO)

Figura 30 - Solução apresentada pelo grupo B – Permutação Com repetição

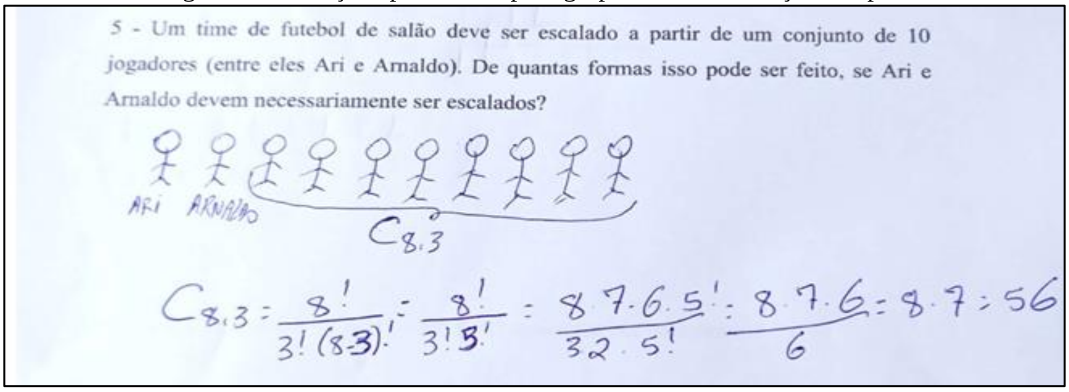


Fonte: Próprio autor

5 - QUESTÃO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 39”

Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados? (COMBINAÇÃO SIMPLES)

Figura 31 - Solução apresentada pelo grupo B – Combinação Simples


5 - Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados?

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8.7.6.5!}{3.2.5!} = \frac{8.7.6}{6} = 8.7 = 56$$

Fonte: Próprio autor

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS COLETADOS

Durante a Avaliação Diagnóstica, conforme apêndice A, foi constatado que 80% dos discentes compreendem o Princípio Fundamental da Contagem, porém, quando o mesmo é empregado em questões contextualizadas, os discentes têm dificuldades em aplicar, o qual pode ser verificado na questão 1 do referido Apêndice. Outro fator observado durante a Avaliação Diagnóstica foi sobre os alunos não diferenciarem os tipos de permutações (simples e com repetição), fato esse comprovado quando comparado as questões 2 e 3. Nas questões 3 e 5, permutação com repetição, notou-se que houve 100% de erros.

Na questão 6, combinação simples, percebeu-se que apenas um grupo (20%) acertou a questão, os demais cometeram alguns erros como, em vez de multiplicar, somaram, não reduziram o total após alguns pintados, etc. E por fim, os mesmos também não conseguem diferenciar a combinação circular.

Porém, notou-se que os alunos sabem aplicar corretamente as técnicas de resoluções dos métodos de contagem, precisando apenas identificar qual método aplicar em cada situação específica.

Nesse sentido, essa primeira fase da intervenção serviu para auxiliar na próxima fase, na qual foram trabalhados, separadamente, os vários tipos de métodos de contagem, onde se buscou sanar os erros observados na Avaliação Diagnóstica, bem como potencializar os acertos.

Em relação à segunda fase da intervenção, conforme os apêndices D, F e H, ficou nítido o desempenho dos alunos em relação às dificuldades observadas na Avaliação Diagnósticas, uma vez que houve mais de 80% de acerto, ou seja, percebeu-se que os alunos, mesmo próximo do ENEM, ainda não tinham tido contato com o referido conteúdo, fato esse comprovado ao se verificar o guia de aprendizagem da referida escola.

Porém, ainda conforme os apêndices D, F e H, nota-se que, se trabalhado corretamente tais objetos de conhecimentos, a chance de acertos em questões do ENEM relacionadas a esses conteúdos aumenta consideravelmente. Assim sendo, uma possível forma de se trabalhar tal conteúdo, conforme aplicada no segundo momento da intervenção, é partir de situações onde ao resolver o problema o próprio aluno comece a construir conceitos relacionados ao método de contagem aplicado e não simplesmente mostrar a fórmula pronta e aplicá-la.

Já na Avaliação Formativa, buscou-se avaliar o nível de aprendizado adquirido ao longo das aulas, o qual, segundo o apêndice J, observou-se que foi positivo, haja vista que o índice de acertos nas questões propostas foi alto. Outro fator bastante positivo nessa avaliação foram as diversas formas de resolução apresentadas pelos grupos para uma mesma questão.

Assim sendo, conforme o exposto, verificou-se que quando trabalhado, a Análise Combinatória, a partir de situações problemas onde o aluno utiliza-se de seus conhecimentos prévios para tentar solucionar o problema e, somente, após isso, construir os conceitos dos métodos de contagem, é uma alternativa viável para o entendimento do conteúdo, pois, os alunos não somente decoram as fórmulas, mas sim, compreendem de onde elas surgem e, porque são aplicadas em situações especificas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É notório que entrar no ensino superior é a perspectiva de, praticamente, qualquer estudante que conclui o Ensino Médio, porém, está cada vez mais difícil realizar tal objetivo, pois a cada ano o nível de competitividade está aumentando.

Neste sentido, sendo o ENEM a porta principal para o educando ingressar no ensino superior e devido o mesmo ser bastante concorrido, onde um erro pode fazer toda a diferença na hora de conseguir a tão almejada vaga, o referido trabalho buscou averiguar quais fatores contribuíram para que os alunos do município de Mazagão, localizado no estado do Amapá, levassem consigo para o ENEM, lacunas referentes ao conteúdo Análise Combinatória e quais impactos negativos tais lacunas acarretaram.

No decorrer do trabalho, especialmente no tópico 4.2 – Análise e comentários das respostas dos discentes, ficaram claro que tais deficiências prejudicaram bastantes os discentes na prova do ENEM, uma vez que de 2016 a 2022, conforme os gráficos apesentados, a porcentagem de acertos foi relativamente baixa.

O trabalho também buscou auxiliar o professor no sentido de preparar melhor seus alunos para a prova do ENEM, uma vez que o mesmo buscou identificar os principais métodos de contagem mais presentes na referida prova, bem como de que forma os mesmos são abordados.

Outro fator relevante que o presente trabalho abordou diz respeito aos principais erros cometidos pelos alunos em questões de contagem, para tanto, após análises do tópico 4.2, foi feita uma intervenção em uma das escolas do referido município a fim de averiguar tais erros. Sendo que os mesmos foram debatidos no item 6 – Análise e discussão dos dados coletados.

Em síntese, este estudo procurou mostrar a importância do conteúdo Análise Combinatória, em especial nas provas do ENEM, identificar que fatores acarretaram o baixo desempenho dos alunos no referido conteúdo em relação ao período de 2006 a 2022, mostrar os principais erros cometidos pelos alunos em Análise Combinatória, bem como verificar os métodos de contagem mais presentes na prova do ENEM e como os mesmos são trabalhados na referida prova.

REFERÊNCIAS

AFONSO, Almerindo Janela. Resgatando a avaliação formativa como instrumento de emancipação. In:ESTEBAN, Maria Teresa. (Org). Avaliação: uma prática em busca de novos sentidos.Rio de Janeiro: DP&A, 2004

APRILE, Maria Rita e BARONE, Rosa Elisa Mirra. Educação superior: políticas públicas para inclusão social. Revista @mbienteeducação, v. 2, n.1, p. 39-55, jan./jul. 2009. Disponível em: http://flacso.redelivre.org.br/files/2012/07/149.pdf . Acesso em 08 dez. 2023.

BARROSO, J.M Conexão coma a Matemática. São Paulo: Moderna, 2010

BEZERRA, Nazaré. Análise combinatória e probabilidade. Belém: EditAedi, 2018. Disponível em: http://livroaberto.ufpa.br/jspui/handle/prefix/480. Acesso em: 20 de dez. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. Portaria MEC nº 438, de 28 de maio de 1998. Institui o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes_p0178-0181_c.pdf>. Acesso em: 08 dez. 2023.

Brasil. Presidência da República. Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei n. 9 394, de 20 de dezembro de 1996). Brasília, DF, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 07 agosto 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: MEC, 1999. 364 p.

Conexões: matemática e suas tecnologias: manual do professor / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. - 1. ed. - São Paulo: Moderna, 2020.

Dante, L. R. Matemática : contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. - 3. ed. - São Paulo : Ática, 2016.

ESTEVES, I. Investigando os fatores que influenciam no raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8a série do ensino fundamental. São Paulo, 2000, 194 p.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

FERREIRA, Naura Syria Carapeto. Gestão e Organização Escolar. IESDE Brasil, 2009.

FILHO, B.B.; SILVA, J. Matemática e contexto. São Paulo: FTD, 2008.

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade/ Samuel Hazzan – 8. Ed. – São Paulo: Atual 2013.

LIMA, E.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio:** volume 2. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. P. 308. (coleção do Professor de Matemática)

LUZ, Jackeline Nascimento Noronha da; VELOSO, Tereza Christina Mertens Aguiar. Sistema de Seleção Unificada (SISU): refletindo sobre o processo de Seleção. **Revista Educação e Fronteiras On-Line**, Dourados-MS, v. 4, n. 10, p. 68-83, jan.-abr, 2014.
MORGADO, A. C. de O. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

WIELEITNER, H. História de La Matemática. [S.l.]: Editorial Labor, 1928.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). I. **Nota técnica:** ANDIFES. 2009. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=6100-resultados-notatecnica-pdf&Itemid= 30192>. Acesso em: 07 agosto 2023.

ROA, R. , NAVARRO-PELAYO, V.; Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

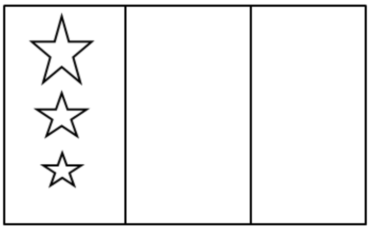
ROSA, M. VI ENEM. Anais. Desmistificando a Análise Combinatória. São Leopoldo - RS, 1998.

SANT'ANNA, Ilza Martins. Por que avaliar? Como avaliar? Critérios e instrumentos. 7. ed. Vozes: Petrópolis, 2001.

APÊNDICE A - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1 – ADAPTADO DO ENEM 2017 – (P.F.C.)

O comitê organizador dos jogos internos 2023 da escola Estadual Dom Pedro I criou a uma competição, cujo objetivo era descobrir de quantas maneiras diferentes os alunos podiam pintar a bandeira do município dispondo das cores vermelho, amarelo e branco, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



2 – ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 113. ANO 2020" (PERMUTAÇÃO SIMPLES)

Quantos são os anagramas da palavra CINEMA, que começam com C e terminam com A?

3 – ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 114. ANO 2020" (PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO)

Quantos são os anagramas da palavra ELEGER que terminam com vogal?

4 - ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 118. ANO 2020" (ARRANJO SIMPLES)

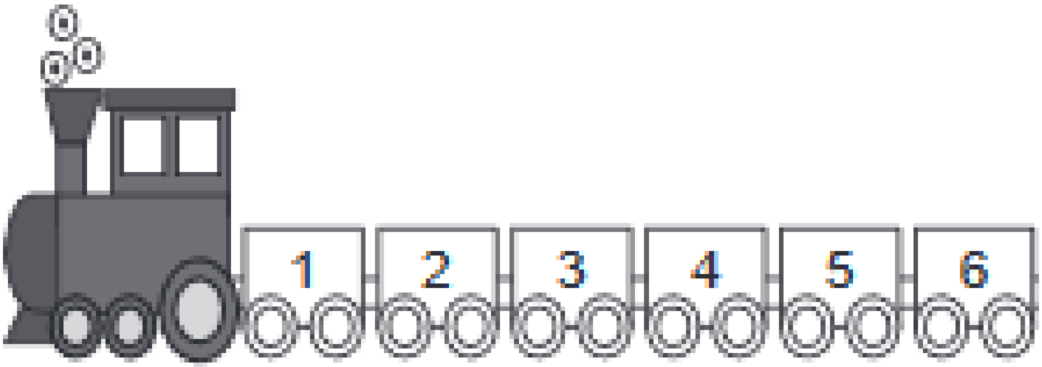
O professor de matemática resolveu passar um filme para a turma do 3º ano do ensino médio. Ana, Bruna e Carla, ao chegar à sala para assistir ao filme, encontraram as 5 primeiras carteiras da primeira fileira vazias. De quantas maneiras elas podem se sentar nessas 5 carteiras?

5 - ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 123. ANO 2020" (ARRANJO COM REPETIÇÃO)

Quantos são os anagramas da palavra PAPAGAIO?

6 - ADAPTADO ENEM 2019 – COMBINAÇÃO SIMPLES

Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 6 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 6. Dos 6 vagões, 3 são pintados na cor vermelha, 2 na cor azul, 1 na cor verde. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 6 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é:

7 - ADAPTADO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 35" (COMBINAÇÃO CIRCULAR)

Nos jogos internos da escola Dom Pedro I uma das competições é o campeonato de UNO, onde 4 competidores disputam quem vence. Sabendo que tal competição é realizada numa mesa de formato circular, de quantas formas os 4 competidores podem se sentar ao redor dessa mesa?

RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE DIAGNÓSTICA FEITA PELOS GRUPOS

GRUPO 1

10

ATIVIDADE

1 – O comitê organizador dos jogos internos 2023 da escola Estadual Dom Pedro I criou a uma competição, cujo objetivo era descobrir de quantas maneiras diferentes os alunos podiam pintar a bandeira do município dispondo das cores vermelho, amarelo e branco, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

A	B	C
3	2	2

A: 3.2.2.2=24

B: 2

C: 2

A×B×C = 24.2.2

A×B×C = 96

2 – Quantos são os anagramas da palavra CINEMA, que começam com C e terminam com A?

C	4	3	2	1	A

= 24

3 – Quantos são os anagramas da palavra ELEGER que terminam com vogal?

3 2 1 3E

total = 3. 2. 1. 3 = 18

4 - O professor de matemática resolveu passar um filme para a turma do 3º ano do ensino médio. Ana, Bruna e Carla ao chegar à sala, para assistir o filme, encontrou as 5 primeira carteiras da primeira fileira vazias. De quantas maneiras elas podem se sentar nessas 5 carteiras?

5×3 = 15

5 - Quantos são os anagramas da palavra PAPAGAIO?

3A × 2P × 1G × 1I × 10

3 × 2 × 1 × 1 × 1 = 6

6 - Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 6 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 6. Dos 6 vagões, 3 são pintados na cor vermelha, 2 na cor azul, 1 na cor verde. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 6 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é:

6 × 3 + 2 × 1

18 + 2

20

7 - Nos jogos internos da escola Dom Pedro I uma das competições é o campeonato de UNO, onde 4 competidores disputam quem vence. Sabendo que tal competição é realizada numa mesa de formato circular, de quantas formas os 4 competidores podem se sentar ao redor dessa mesa?

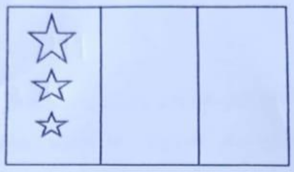
4 . 3 . 2 . 1 : 24

GRUPO 2

ATIVIDADE

1 – O comitê organizador dos jogos internos 2023 da escola Estadual Dom Pedro I criou a uma competição, cujo objetivo era descobrir de quantas maneiras diferentes os alunos podiam pintar a bandeira do município dispondo das cores vermelho, amarelo e branco, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

$3 \times 3 = 9$



2 – Quantos são os anagramas da palavra CINEMA, que começam com C e terminam com A?

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

3 – Quantos são os anagramas da palavra ELEGER que terminam com vogal?

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

4 - O professor de matemática resolveu passar um filme para a turma do 3º ano do ensino médio. Ana, Bruna e Carla ao chegar à sala, para assistir o filme, encontrou as 5 primeira carteiras da primeira fileira vazias. De quantas maneiras elas podem se sentar nessas 5 carteiras?

$3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras

5 - Quantos são os anagramas da palavra PAPAGAIO?

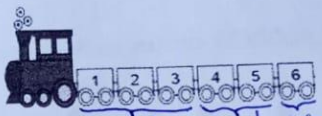
$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$56 \times 30 \times 12 \times 2$

1680×24

40320

6 - Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 6 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 6. Dos 6 vagões, 3 são pintados na cor vermelha, 2 na cor azul, 1 na cor verde. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 6 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



vermelho azul verde

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é:

$3 \times 2 \times 1 = 6$

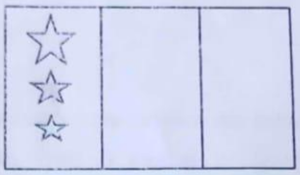
7 - Nos jogos internos da escola Dom Pedro I uma das competições é o campeonato de UNO, onde 4 competidores disputam quem vence. Sabendo que tal competição é realizada numa mesa de formato circular, de quantas formas os 4 competidores podem se sentar ao redor dessa mesa?

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras

GRUPO 3

ATIVIDADE

1 – O comitê organizador dos jogos internos 2023 da escola Estadual Dom Pedro I criou a uma competição, cujo objetivo era descobrir de quantas maneiras diferentes os alunos podiam pintar a bandeira do município dispondo das cores vermelho, amarelo e branco, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



São 6 regiões e 3 cores
$6 \times 3 = 18$

2 – Quantos são os anagramas da palavra CINEMA, que começam com C e terminam com A?

C 4 3 2 1 A
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

3 – Quantos são os anagramas da palavra ELEGER que terminam com vogal?

5 4 3 2 1 E
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

4 - O professor de matemática resolveu passar um filme para a turma do 3° ano do ensino médio. Ana, Bruna e Carla ao chegar à sala, para assistir o filme, encontrou as 5 primeira carteiras da primeira fileira vazias. De quantas maneiras elas podem se sentar nessas 5 carteiras?

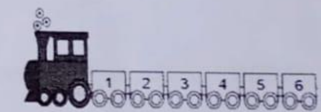
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

5 - Quantos são os anagramas da palavra PAPAGAIO?

2P
3A
1G
1O

$2 \times 3 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$

6 - Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 6 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 6. Dos 6 vagões, 3 são pintados na cor vermelha, 2 na cor azul, 1 na cor verde. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 6 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.

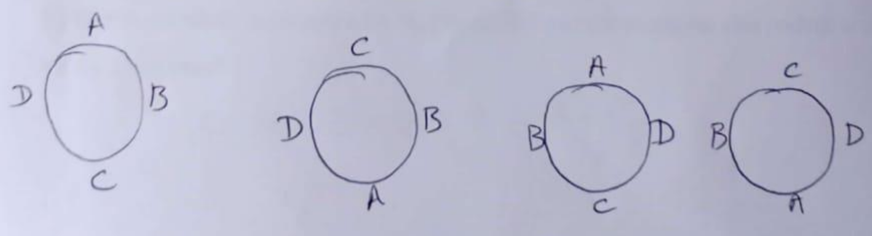


De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é:

V	V	V	A	A	V
1	2	3	4	5	6

$C_{6,3} + C_{3,2} + C_{1,1}$

7 - Nos jogos internos da escola Dom Pedro I uma das competições é o campeonato de UNO, onde 4 competidores disputam quem vence. Sabendo que tal competição é realizada numa mesa de formato circular, de quantas formas os 4 competidores podem se sentar ao redor dessa mesa?



$4 \times 2 = 8$ pois as posições A e C podem trocar de lugar com as B e D.

GRUPO 4

10

ATIVIDADE

1 – O comitê organizador dos jogos internos 2023 da escola Estadual Dom Pedro I criou a uma competição, cujo objetivo era descobrir de quantas maneiras diferentes os alunos podiam pintar a bandeira do município dispondo das cores vermelho, amarelo e branco, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

3P 2P 2P

$3 \times 2 \times 2 = 12$ Possibilidades

2 – Quantos são os anagramas da palavra CINEMA, que começam com C e terminam com A?

INEMA
INEAM
INAEM
IANEM
AINEM

$\left.\begin{matrix}\text{INEMA}\\ \text{INEAM}\\ \text{INAEM}\\ \text{IANEM}\\ \text{AINEM}\end{matrix}\right\}$ 6 Possições para letra A como são 4 letras

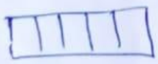
$6 \times 4 = 24$

3 – Quantos são os anagramas da palavra ELEGER que terminam com vogal?

LGRE GLRE RGLE
LRGE GRLE RLGE

6 anagramas que terminam com E

4 - O professor de matemática resolveu passar um filme para a turma do 3º ano do ensino médio. Ana, Bruna e Carla ao chegar à sala, para assistir o filme, encontrou as 5 primeira carteiras da primeira fileira vazias. De quantas maneiras elas podem se sentar nessas 5 carteiras?



Ana 5 maneiras
Bruna 5 maneiras
Carla 5 maneiras

$5 \times 5 \times 5 = 125$

5 - Quantos são os anagramas da palavra PAPAGAIO?

8 posições para a letra O. Como são 8 letras
$8 \times 8 = 64$

6 - Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 6 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 6. Dos 6 vagões, 3 são pintados na cor vermelha, 2 na cor azul, 1 na cor verde. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 6 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é:

$C_{6,3} + C_{3,2} + C_{1,1}$

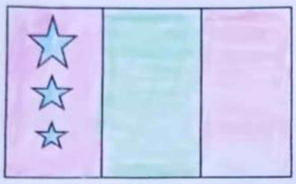
7 - Nos jogos internos da escola Dom Pedro I uma das competições é o campeonato de UNO, onde 4 competidores disputam quem vence. Sabendo que tal competição é realizada numa mesa de formato circular, de quantas formas os 4 competidores podem se sentar ao redor dessa mesa?

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

GRUPO 5

ATIVIDADE

1 – O comitê organizador dos jogos internos 2023 da escola Estadual Dom Pedro I criou a uma competição, cujo objetivo era descobrir de quantas maneiras diferentes os alunos podiam pintar a bandeira do município dispondo das cores vermelho, amarelo e branco, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

2 – Quantos são os anagramas da palavra CINEMA, que começam com C e terminam com A?

C 5 4 3 2 1 = 120
5 4 3 2 1 A = 120
240

3 – Quantos são os anagramas da palavra ELEGER que terminam com vogal?

5 4 3 2 1 E = 120
5 4 3 2 1 E = 120
5 4 3 2 1 E = 120
360

4 - O professor de matemática resolveu passar um filme para a turma do 3º ano do ensino médio. Ana, Bruna e Carla ao chegar à sala, para assistir o filme, encontrou as 5 primeira carteiras da primeira fileira vazias. De quantas maneiras elas podem se sentar nessas 5 carteiras?

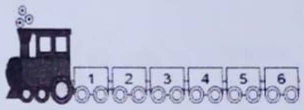
Ana 5 possibilidades
Bruna 4 possibilidades
Carla 3 possibilidades

Total: 5 + 4 + 3 = 12

5 - Quantos são os anagramas da palavra PAPAGAIO?

8 7 6 5 4 3 2 1.

6 - Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 6 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 6. Dos 6 vagões, 3 são pintados na cor vermelha, 2 na cor azul, 1 na cor verde. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 6 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é:

Verm Verm Verm Az Az Verde

$C_{6,3} \times C_{6,2} \times C_{6,1}$

7 - Nos jogos internos da escola Dom Pedro I uma das competições é o campeonato de UNO, onde 4 competidores disputam quem vence. Sabendo que tal competição é realizada numa mesa de formato circular, de quantas formas os 4 competidores podem se sentar ao redor dessa mesa?

4 Possib.

1 Possib. 3 Possib.

2 Possib.

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

APÊNDICE B – CONCEITUANDO OS TIPOS DE CONTAGEM

ATIVIDADES SOBRE PFC

1 – ADAPTADO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 09”

Uma moça possui 5 blusas, 2 sapatos e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa, um sapato e uma saia?

2 – ADAPTADO DO LIVRO “CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 114. ANO 2020”

O professor de matemática, da turma 311, passou um questionário contendo 6 questões, sendo que em cada questão o aluno tinha que marcar no cartão resposta a opção certo ou errado, conforme a imagem abaixo.

	QUESTÕES					
	1	2	3	4	5	6
CERTO	●	●	○	●	○	○
ERRADO	○	○	●	○	●	●

De quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

3 - ADAPTADO DO LIVRO “FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 12”

Quantos números telefônicos com 8 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

4 - ADAPTADO DO LIVRO “CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 109. ANO 2020”

Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:

a) podem ser repetidos.

b) não podem ser repetidos.

RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE SOBRE P.F.C. FEITA PELOS GRUPOS

GRUPO 1

ATIVIDADE

1 – Uma moça possui 5 blusas, 2 sapatos e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa, um sapato e uma saia?

5
x 2
10
x 6
60

2 – O professor de matemática, da turma 311, passou um questionário contendo 6 questões, sendo que em cada questão o aluno tinha que marcar no cartão resposta a opção certo ou errado, conforme a imagem abaixo.

	QUESTÕES					
	1	2	3	4	5	6
CERTO	●	●	O	●	O	O
ERRADO	O	O	●	O	●	●

De quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

12x6 = 72

3 - Quantos números telefônicos com 8 digitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

10x 10x 10 x 10 x 10x 10 x 10x 10

4 - Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:

a) podem ser repetidos.

5 6 6
C D U
30x6 = 180

b) não podem ser repetidos.

5 5 4
C D U
25 x 4 = 100

GRUPO 2

ATIVIDADE

1 – Uma moça possui 5 blusas, 2 sapatos e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa, um sapato e uma saia?

$2 \times 6 \times 5 = 60$

2 – O professor de matemática, da turma 311, passou um questionário contendo 6 questões, sendo que em cada questão o aluno tinha que marcar no cartão resposta a opção certo ou errado, conforme a imagem abaixo.

	QUESTÕES					
	1	2	3	4	5	6
CERTO	●	●	○	●	○	○
ERRADO	○	○	●	○	●	●

De quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

$2 \times 6 = 12$

3 - Quantos números telefônicos com 8 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \cdot 10 = 100\ 000.000$

4 - Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:

a) podem ser repetidos.

$6 \times 6 \times 6 = 216$

b) não podem ser repetidos.

$6 \times 5 \times 4 = 120$

GRUPO 3

ATIVIDADE

1 – Uma moça possui 5 blusas, 2 sapatos e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa, um sapato e uma saia?

PELO P.F.C

$5 \times 2 \times 6 = 60$ FORMAS

2 – O professor de matemática, da turma 311, passou um questionário contendo 6 questões, sendo que em cada questão o aluno tinha que marcar no cartão resposta a opção certo ou errado, conforme a imagem abaixo.

	QUESTÕES					
	1	2	3	4	5	6
CERTO	●	●	○	●	○	○
ERRADO	○	○	●	○	●	●

De quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

CADA QUESTÃO TEM DUAS OPCÕES, COMO SÃO 6 QUESTÕES

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$

3 - Quantos números telefônicos com 8 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

SÃO 10 DIGITOS (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

$\underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10} : 10^8$

4 - Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:

a) podem ser repetidos.

$\underline{5}\ \underline{6}\ \underline{6}$

$5 . 6^2 =$

$5 . 36 = 180$

b) não podem ser repetidos.

$\underline{5}\ \underline{5}\ \underline{4}$

$5 \times 5 \times 4 = 100$

GRUPO 4

ATIVIDADE

1 – Uma moça possui 5 blusas, 2 sapatos e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa, um sapato e uma saia?

5 BLUSAS
2 SAPATOS
6 SAIAS

$5 \cdot 2 \cdot 6$

$10 \cdot 6$

60

2 – O professor de matemática, da turma 311, passou um questionário contendo 6 questões, sendo que em cada questão o aluno tinha que marcar no cartão resposta a opção certo ou errado, conforme a imagem abaixo.

	QUESTÕES					
	1	2	3	4	5	6
CERTO	●	●	○	●	○	○
ERRADO	○	○	●	○	●	●
	2P	2P	2P	2P	2P	2P

De quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 : 2^6 :$

3 - Quantos números telefônicos com 8 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

$\underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10} = 10^8$

4 - Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:

a) podem ser repetidos.

$\underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6} = 6^3$

b) não podem ser repetidos.

$\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}$

GRUPO 5

12

ATIVIDADE

1 – Uma moça possui 5 blusas, 2 sapatos e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa, um sapato e uma saia?

$5 \times 2 \times 6 = 60$

2 – O professor de matemática, da turma 311, passou um questionário contendo 6 questões, sendo que em cada questão o aluno tinha que marcar no cartão resposta a opção certo ou errado, conforme a imagem abaixo.

	QUESTÕES					
	1	2	3	4	5	6
CERTO	●	●	○	●	○	○
ERRADO	○	○	●	○	●	●

De quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

3 - Quantos números telefônicos com 8 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

10 9 8 7 6 5 4 3

4 - Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:

a) podem ser repetidos.

$6 \; 6 \; 6 = 6^3$

b) não podem ser repetidos.

6 5 4

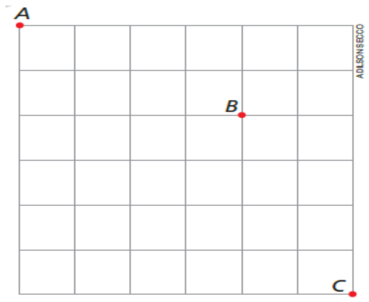
ATIVIDADES SOBRE PERMUTAÇÃO E ARRANJO

1 - ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 115. ANO 2020"

Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?

2 – ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 115. ANO 2020"

O professor de matemática passou um trabalho em trio para fazer em casa. Ana, Beto e Cláudia resolveram fazer juntos. Decidiram que iam faze o trabalho na casa de Cláudia. Representando a casa de Ana por A, a do Beto por B e a da Cláudia por C, quantos são os possíveis caminhos que Ana pode fazer para ir da sua casa até a casa de Cláudia passando pela casa de Beto, sabendo que Ana sempre anda para baixo ou para a direita.



3 - ADAPTADO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 21"

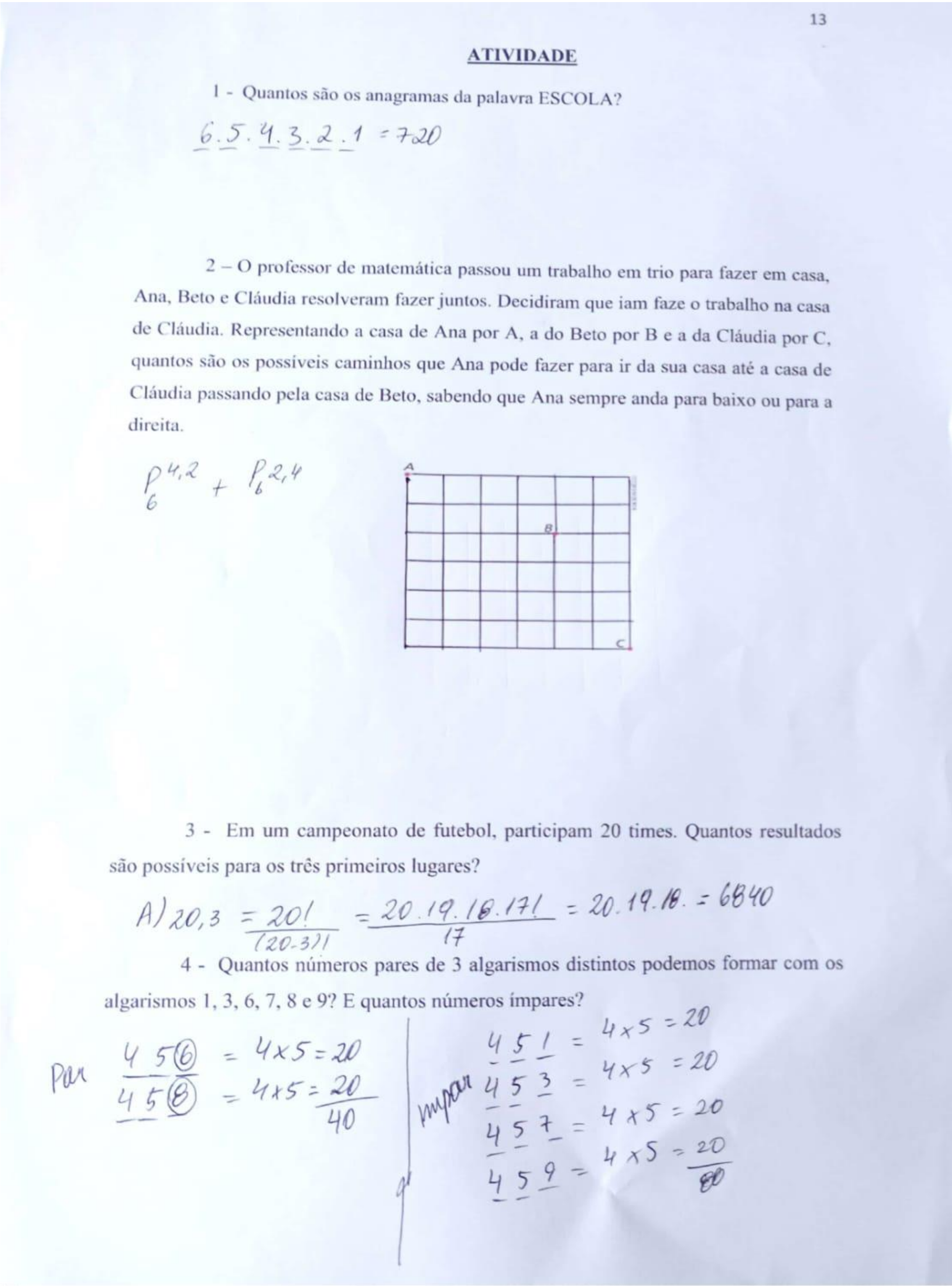
Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

4 – CRIADA PELO PRÓPRIO AUTOR

João ao receber seu cartão do banco precisa cadastrar uma senha com 5 dígitos para poder fazer as transações bancárias. De quantas maneiras João pode escolher sua senha?

RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE SOBRE PERMUTAÇÃO E ARRANJO FEITA PELOS GRUPOS

GRUPO 1



13

ATIVIDADE

1 - Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?

$\underline{6}.\underline{5}.\underline{4}.\underline{3}.\underline{2}.\underline{1} = 720$

2 – O professor de matemática passou um trabalho em trio para fazer em casa, Ana, Beto e Cláudia resolveram fazer juntos. Decidiram que iam faze o trabalho na casa de Cláudia. Representando a casa de Ana por A, a do Beto por B e a da Cláudia por C, quantos são os possíveis caminhos que Ana pode fazer para ir da sua casa até a casa de Cláudia passando pela casa de Beto, sabendo que Ana sempre anda para baixo ou para a direita.

$P_6^{4,2} + P_6^{2,4}$

3 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$A)\, 20,3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20.19.18.17!}{17!} = 20.19.18. = 6840$

4 - Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8 e 9? E quantos números ímpares?

Par
$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{6} = 4\times5 = 20$
$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{8} = 4\times5 = 20$
40

ímpar
$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{1} = 4\times5 = 20$
$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{3} = 4\times5 = 20$
$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{7} = 4\times5 = 20$
$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{9} = 4\times5 = 20$
80

GRUPO 2

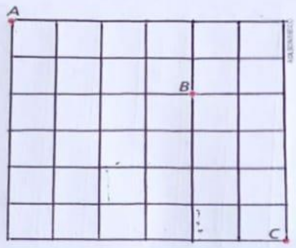
ATIVIDADE

1 - Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?

$\underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1}$

2 – O professor de matemática passou um trabalho em trio para fazer em casa, Ana, Beto e Cláudia resolveram fazer juntos. Decidiram que iam faze o trabalho na casa de Cláudia. Representando a casa de Ana por A, a do Beto por B e a da Cláudia por C, quantos são os possíveis caminhos que Ana pode fazer para ir da sua casa até a casa de Cláudia passando pela casa de Beto, sabendo que Ana sempre anda para baixo ou para a direita.

$P_{12}^{6,6} = \dfrac{12!}{6!6!}$



3 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$\underline{20} \times \underline{19} \times \underline{18}$

4 - Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8 e 9? E quantos números ímpares?

Pares
$5 \times 4 \times 2$

Ímpas
$5 \times 4 \times 4$

GRUPO 3

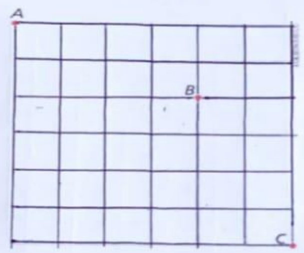
ATIVIDADE

1 - Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?

$6! = 720$

2 – O professor de matemática passou um trabalho em trio para fazer em casa, Ana, Beto e Cláudia resolveram fazer juntos. Decidiram que iam faze o trabalho na casa de Cláudia. Representando a casa de Ana por A, a do Beto por B e a da Cláudia por C, quantos são os possíveis caminhos que Ana pode fazer para ir da sua casa até a casa de Cláudia passando pela casa de Beto, sabendo que Ana sempre anda para baixo ou para a direita.

$\frac{6!}{4!.2!} + \frac{6!}{2!4!} = 15 + 15 = 30$



3 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

1º lugar 20 possibilidades
2º lugar 19 possibilidades
3º lugar 18 possibilidades

$20 \times 19 \times 18$

4 - Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8 e 9? E quantos números ímpares?

Pares: $\underline{5}\ \underline{4}\ \frac{6 \text{ ou } 8}{2} = 5 \times 4 \times 2 = 40$

Ímpar: $\underline{5}\ \underline{4}\ \frac{1, 3, 7, 9}{4} = 5 \times 4 \times 4 = 80$

GRUPO 4

13

ATIVIDADE

1 - Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?

6 LETRAS DIFERENTES ENTÃO BASTA PERMUTAR

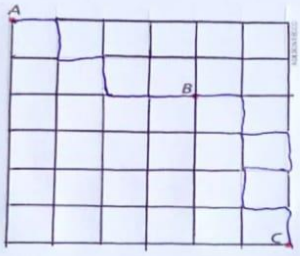
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

2 – O professor de matemática passou um trabalho em trio para fazer em casa, Ana, Beto e Cláudia resolveram fazer juntos. Decidiram que iam faze o trabalho na casa de Cláudia. Representando a casa de Ana por A, a do Beto por B e a da Cláudia por C, quantos são os possíveis caminhos que Ana pode fazer para ir da sua casa até a casa de Cláudia passando pela casa de Beto, sabendo que Ana sempre anda para baixo ou para a direita.

$2 \cdot P_6^{4,2}$

$2 \cdot \frac{6!}{4!2!}$

$2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\, 2} = 30$



3 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$\underset{1^{\circ}}{\underline{20}} \quad \underset{2^{\circ}}{\underline{19}} \quad \underset{3^{\circ}}{\underline{18}}$

4 - Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8 e 9? E quantos números ímpares?

$\underline{5} \quad \underline{4} \quad \underset{\text{Par}}{\underline{2}} = 40 \qquad \underline{5} \quad \underline{4} \quad \underset{\text{ÍMPAR}}{\underline{4}} = 80$

GRUPO 5

13

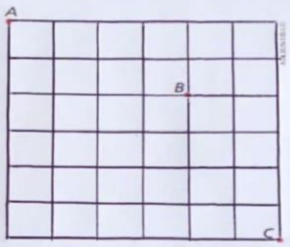
ATIVIDADE

1 - Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?

ESCOLA = 6!

2 – O professor de matemática passou um trabalho em trio para fazer em casa, Ana, Beto e Cláudia resolveram fazer juntos. Decidiram que iam faze o trabalho na casa de Cláudia. Representando a casa de Ana por A, a do Beto por B e a da Cláudia por C, quantos são os possíveis caminhos que Ana pode fazer para ir da sua casa até a casa de Cláudia passando pela casa de Beto, sabendo que Ana sempre anda para baixo ou para a direita.

De A até B
2 para baixo
4 para direita



De B até C
4 para baixo
2 para direita

$P_6^{2,4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6.5.4!}{4!\,2.} = 15$

$P_6^{4,2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$

total 15 + 15 = 30

3 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$A_{20,3} = \frac{20!}{17!} = 6840$

4 - Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8 e 9? E quantos números ímpares?

Par

$\underline{4}\ \ \underline{5}\ \ \underset{6\ ou\ 8}{\underline{2}} = 40$

Impar

$\underline{4}\ \ \underline{5}\ \ \underset{1,3,7\ ou\ 9}{\underline{4}} = 80$

ATIVIDADES SOBRE COMBINAÇÃO

1 - ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 119. ANO 2020"

Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem serem formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo.

b) com 3 garotas e 2 garotos.

2 – ADAPTADO DO LIVRO "CONEXÕES: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – PAG. 115. ANO 2020"

Após o termino de uma aula de matemática, os 30 alunos da sala se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

3 - ADAPTADO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 30"

Para sua formatura Ana encomendou um colar com 4 pedras preciosas, todas diferentes. Quantos colares diferentes poderão ser feito?

4 - ADAPTADO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 54"

Na cantina da escola vende suco nos sabores acerola, caju e uva. De quantos modos Bruna pode comprar 5 copos de sucos?

RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE SOBRE COMBINAÇÃO FEITA PELOS GRUPOS

GRUPO 1

ATIVIDADE

1 - Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem serem formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo.

b) com 3 garotas e 2 garotos.

A) $C_{30,5} = \frac{30!}{5!25!} = \frac{30.29.28.27.26}{5.4.3.2.1}$

B) $C_{30,3} \cdot C_{30,2} \cdot \frac{30!}{3!27!} \cdot \frac{30!}{2!28!}$

$\frac{30.29.28.\cancel{27!}}{3.2.1.\cancel{27!}} \cdot \frac{30.29.\cancel{28!}}{2.1.\cancel{28!}}$

$10.29.14 \cdot 15.29.28$

2 – Após o termino de uma aula de matemática, os 30 alunos da sala se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

$C_{30,2} = \frac{30!}{2!28!} = \frac{30.29}{2} = 435$

3 - Para sua formatura Ana encomendou um colar com 4 pedras preciosas, todas diferentes. Quantos colares diferentes poderão ser feito?

$\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 24$

4 - Na cantina da escola vende suco nos sabores acerola, caju e uva. De quantos modos Bruna pode comprar 5 copos de sucos?

...|.|.   5. e 2| = 7 objetos

..|.|..   5. e 2| = 7 objetos

|..|...   5. e 2| = 7 objetos

$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7.6}{2} = 21$

GRUPO 2

14

ATIVIDADE

1 - Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem serem formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo.

b) com 3 garotas e 2 garotos.

a) $C_{30,5}$

B) $C_{20,3} \cdot C_{20,2}$

2 – Após o termino de uma aula de matemática, os 30 alunos da sala se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

$\frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29$

3 - Para sua formatura Ana encomendou um colar com 4 pedras preciosas, todas diferentes. Quantos colares diferentes poderão ser feito?

$4!$

4 - Na cantina da escola vende suco nos sabores acerola, caju e uva. De quantos modos Bruna pode comprar 5 copos de sucos?

$C_{5,3}$

GRUPO 3

ATIVIDADE

1 - Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem serem formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo.

b) com 3 garotas e 2 garotos.

a) $\frac{30.29.28.27.26}{5.4.3.2.1} = 29.7.27.26$

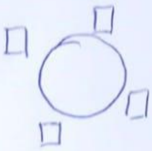
b) $\frac{30.29.28.27}{3!27!} . \frac{30.29.28}{2!28!}$

2 – Após o termino de uma aula de matemática, os 30 alunos da sala se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

$C_{30.2} = \frac{30.29}{2} = 15.29 = 435$

3 - Para sua formatura Ana encomendou um colar com 4 pedras preciosas, todas diferentes. Quantos colares diferentes poderão ser feito?

$3! = 6$



4 - Na cantina da escola vende suco nos sabores acerola, caju e uva. De quantos modos Bruna pode comprar 5 copos de sucos?

$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\cdot6}{2} = 7.3 = 21$

GRUPO 4

ATIVIDADE

1 - Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem serem formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo. $C_{30,5}$

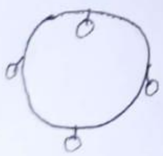
b) com 3 garotas e 2 garotos. $C_{10,3} \cdot C_{10,2}$

2 – Após o termino de uma aula de matemática, os 30 alunos da sala se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

$$C_{30,2} = \frac{30!}{2!(30-2)!} = \frac{30!}{2!\,28!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \cancel{28!}}{2 \cdot \cancel{28!}} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29 = 435$$

15
29
135
30
435

3 - Para sua formatura Ana encomendou um colar com 4 pedras preciosas, todas diferentes. Quantos colares diferentes poderão ser feito?



$$P_{(4-1)}! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

4 - Na cantina da escola vende suco nos sabores acerola, caju e uva. De quantos modos Bruna pode comprar 5 copos de sucos?

acerola caju uva

□□□ + □ + □

□□ + + □□□

□ + □□□ + □

5 □ e 2 +

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!\,2} = \frac{42}{2} = 21$$

GRUPO 5

ATIVIDADE

1 - Dos 30 alunos de uma classe, 5 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem serem formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo.

b) com 3 garotas e 2 garotos.

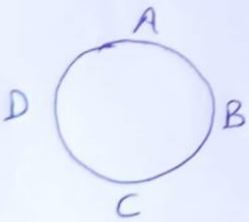
a) $C_{30,5} = \frac{30.29.28.27.26.25}{5!\ 25!} = \frac{30.29.28.27.26}{5.4.3.2.1}$

b) $C_{20,3} = \frac{20.19.18.17!}{3!\ 17!} = \frac{20.19.18}{3.2.1.}$

2 – Após o término de uma aula de matemática, os 30 alunos da sala se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

$C_{30,2} = \frac{30.29.28!}{2!\ 28!} = \frac{30.29}{2} = \frac{870}{2} = 435$

3 - Para sua formatura Ana encomendou um colar com 4 pedras preciosas, todas diferentes. Quantos colares diferentes poderão ser feito?



$(4-1)! = 6$

4 - Na cantina da escola vende suco nos sabores acerola, caju e uva. De quantos modos Bruna pode comprar 5 copos de sucos?

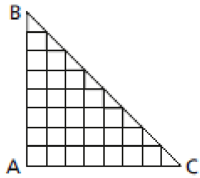
a + c + u = 5
•• + •• + • = 5
••• + + •• = 5
• + ••• + • = 5

$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}.2} = 7.3 = 21$

APÊNDICE C - AVALIAÇÃO FORMATIVA

1 - QUESTÃO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 13"

Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras um homem pode ir do ponto A até a reta BC? (PFC)



2 - QUESTÃO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 27"

Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes? (PERMUTAÇÃO SEM REPETIÇÃO)

3 - QUESTÃO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 48"

De quantas formas 8 sinais "+" e 4 sinais "–" podem ser colocados em uma sequência? (PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO)

4 - QUESTÃO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 21"

Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares? (ARRANJO SIMPLES)

5 - QUESTÃO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 39"

Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados? (COMBINAÇÃO SIMPLES)

6 - QUESTÃO DO LIVRO "FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR – PAG. 30"

De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE FORMATIVA FEITA PELOS GRUPOS

GRUPO 1

15

ATIVIDADE

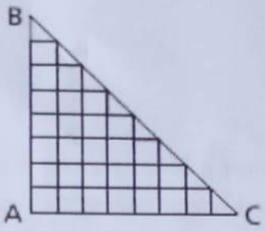
1 - Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras um homem pode ir do ponto A até a reta BC?

$2^8 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$

$4 \times 4 \times 4 \times 4$

64×64

256



2 - Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?

$\underbrace{4\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1}$: $4.5!$

$4 \cdot 5!$

3 - De quantas formas 8 sinais "+" e 4 sinais "–" podem ser colocados em uma sequência?

$P_{12}^{8,4} = \frac{12}{8!4!} = \frac{12.11.10.9.8!}{8!\,12.2} = 11.5.9 = 99.5 = 495$

16

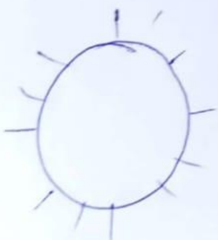
4 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$A_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20.19.18$ ou $\frac{20}{1º}\ \frac{19}{2º}\ \frac{18}{3º}$

5 - Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados?

$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8.3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8.7.6.5!}{6.5!} = 8.7 = 56$

6 - De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?



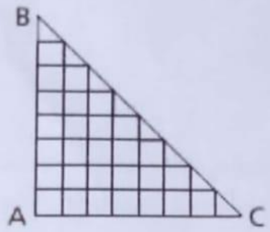
$P_c\ (12-1)! = 11!$

GRUPO 2

ATIVIDADE

1 - Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras um homem pode ir do ponto A até a reta BC?

$P_8^{4,4}$



2 - Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?

$4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 480$

3 - De quantas formas 8 sinais "+" e 4 sinais "–" podem ser colocados em uma sequência?

$P_{12}^{8,4} = \frac{12!}{8!\,4!}$

4 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$$A_{20,3} = \frac{20!}{17!}$$

5 - Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados?

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!}$$

6 - De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

$$(12-1)! = 11!$$

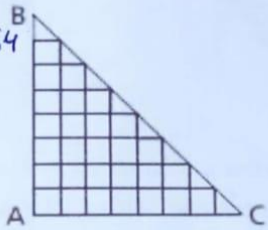
GRUPO 3

15

ATIVIDADE

1 - Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras um homem pode ir do ponto A até a reta BC?

8+8+8+8+8+8+8+8 = 64



2 - Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?

4 consoantes

4 opc cons 5 opc 4 opc 3 opc 2 opc 1 opc = 4 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 480

3 - De quantas formas 8 sinais "+" e 4 sinais "–" podem ser colocados em uma sequência?

$$\frac{12!}{8!\,4!}$$

4 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$\frac{20}{1^{\circ}}$ $\frac{19}{2^{\circ}}$ $\frac{18}{3^{\circ}}$

5 - Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados?

8 jogadores e escolher 3

$\underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$

6 - De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

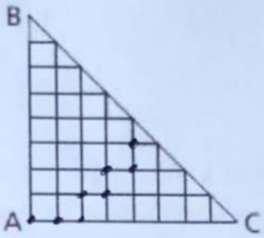
Pc 11!

GRUPO 4

15

ATIVIDADE

1 - Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras um homem pode ir do ponto A até a reta BC?



De cada ponto para outro temos duas escolhas e são 8 pontos.

$2.2.2.2.2.2.2.2 = 256$

2 - Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?

F 5 4 3 2 1 = 120
L 5 4 3 2 1 = 120
T 5 4 3 2 1 = 120
R 5 4 3 2 1 = 120
480

3 - De quantas formas 8 sinais "+" e 4 sinais "–" podem ser colocados em uma sequência?

+ + + + + + + + – – – –
+ + – – + + + – + + + –

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 5 \\ \hline 55 \\ 9 \\ \hline 495 \end{array}$$

$$P_{12}^{8,4} = \frac{12!}{8!4!} = \frac{\cancel{12}.11.\cancel{10}.\cancel{9}.\cancel{8!}}{\cancel{8!}.\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 6.11.5.9 = 495$$

4 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

$$A_{20,3} = \frac{20!}{17!} = \frac{20.19.18.\cancel{17!}}{\cancel{17!}} = 20.19.18 = 6840$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 19 \\ \hline 180 \\ +20 \\ \hline 380 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 380 \\ \times 18 \\ \hline 3040 \\ 380 \\ \hline 6840 \end{array}$$

5 - Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados?

Como Ari e Arnaldo estão no time sobram 8 para escolher 3

$$C_{8,3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8.7.\cancel{6}.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,\cancel{3.2}.1} = 56$$

6 - De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

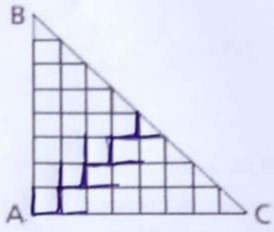
$$(12-1)! = 11!$$

GRUPO 5

15

ATIVIDADE

1 - Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras um homem pode ir do ponto A até a reta BC?



L L L L L L L L

2 2 2 2 2 2 2 2 = 2^8

2 - Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?

$\underset{FLTR}{\underline{4}}$ $\underline{5}$ $\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ = 480

3 - De quantas formas 8 sinais "+" e 4 sinais "–" podem ser colocados em uma sequência?

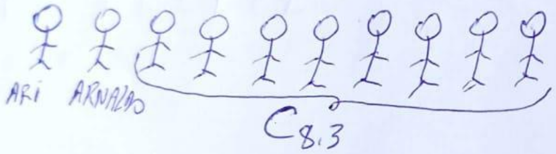
$$P_{12}^{8,4} = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12.11.10.9.8!}{8!\,4!} = \frac{11880}{24} = 495$$

4 - Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

COMO 1º LUGAR É DIFERTE DO 2º E DO 3º USAMOS ARRANJO

$$A_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20.19.18 = 6840$$

5 - Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados?



$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8.7.6.5!}{3.2.5!} = \frac{8.7.6}{6} = 8.7 = 56$$

6 - De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

$$P_C\ (12-1)! = P_C\ 11!$$