



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**

NATANAEL CHARLES BRITO FREITAS

**PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA:  
FUNDAMENTO TEÓRICO E APLICAÇÕES NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

FORTALEZA- CEARÁ

2013

NATANAEL CHARLES BRITO FREITAS

**PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA: FUNDAMENTO  
TEÓRICO E APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia (CCT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Lincoln  
Aguiar Ellery

Fortaleza-Ceará  
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

**Universidade Estadual do Ceará**

**Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho**

**Bibliotecário (a) Leila Cavalcante Sátiro – CRB-3 / 544**

F886p Freitas, Natanael Charles Brito.

Princípio da Indução Matemática: Fundamento Teórico e Aplicações na Educação Básica / Natanael Charles Brito Freitas. — 2013.

CD-ROM 97f. : il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.

“CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm)”.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery.

1. Princípio de indução matemática. 2. Aplicações. 3. Educação básica. I. Título.

CDD: 510

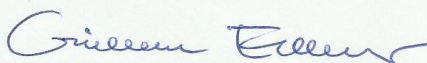
NATANAEL CHARLES BRITO FREITAS

**PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA: FUNDAMENTO TEÓRICO E  
APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

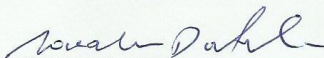
Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia (CCT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 27 / 08 / 2013.

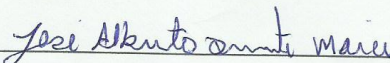
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery (Orientador)  
Universidade Estadual do Ceará – UECE/PROFMAT



Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes  
Universidade Estadual do Ceará – UECE/PROFMAT



Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia  
Universidade Federal do Ceará - UFC

“O Princípio de Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização”

**Elon Lages Lima**

## RESUMO

Essa dissertação trata dos princípios de indução matemática destacando seu fundamento teórico e suas aplicações no contexto da educação básica. Assim, este trabalho apresenta a base teórica do método indução e algumas de suas aplicações na comprovação de fatos algébricos, geométricos, aritméticos e em situações práticas da vida, no contexto dos números naturais. Nesse intuito, fez-se uma pesquisa de teoremas importantes versando sobre os números naturais, estudados na educação básica, e de suas respectivas demonstrações por indução matemática, objetivando disponibilizar a todos os professores e alunos do ensino fundamental e médio. Deste modo, os principais resultados são teoremas importantes que ocupam um lugar de destaque na matemática do ensino básico, validados pelo método de indução. O material apresentado nesta pesquisa permite concluir que o princípio da indução é um importante método de comprovação de resultados matemáticos, tendo diversas aplicações. No início deste trabalho é feita uma pequena abordagem sobre os números naturais e suas propriedades.

*Palavras-chave:* Princípios de indução matemática; Método de indução; Aplicações; Educação básica.

## **ABSTRACT**

This dissertation deals with the principles of mathematical induction highlighting its theoretical foundation and its applications in the context of basic education. Thus, this paper presents the theoretical basis of the induction method and some of its applications in proving facts algebraic, geometric, arithmetic and practical situations of life, in the context of natural numbers. To that end, it was a survey done of important theorems about natural numbers, studied in basic education and its related statements by mathematical induction, aiming to make available to all teachers and students of primary and secondary education. Thus, the main results are theorems that occupy an important place in mathematics teaching, basic and validated by the induction method. The material found in this study allows us to conclude that the principle of induction is an important method of proving mathematical results, and various applications. Earlier, this work is done on a small approach to the natural numbers and their properties.

**Keywords:** Principles of mathematical induction, induction method; Applications; basic education.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me ajudar a superar todos os desafios.

A meus amigos e familiares, que souberam entender minha ausência e me apoiaram durante todo o curso.

A meu companheiro de estudo Cledinardo, por toda ajuda e apoio prestado. Aprendemos muito um com o outro.

Ao professor Guilherme Ellery, por sua dedicação na coordenação do curso e por suas orientações no período de elaboração da dissertação.

A todos os professores do curso, por toda colaboração e apoio prestados.

Aos meus colegas do curso, por toda amizade e ajuda. Sucesso a todos.

A Universidade Estadual do Ceará, pela oportunidade de fazer o mestrado em suas instalações.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq, pelo apoio financeiro como bolsista.



**LISTA DE FIGURAS**

<b>Figura 1:</b> Giuseppe Peano .....	16
<b>Figura 2:</b> Efeito dominó .....	34
<b>Figura 3:</b> Isaac Newton .....	49
<b>Figura 4:</b> Jacques Bernoulli .....	54
<b>Figura 5:</b> Abraham de Moivre.....	67
<b>Figura 6:</b> Jakob Steiner .....	70
<b>Figura 7:</b> Polígono convexo de $n+1$ lados .....	71
<b>Figura 8:</b> Leonhard Euler .....	73
<b>Figura 9:</b> Superfície poliédrica limitada convexa .....	74
<b>Figura 10:</b> Pierre de Fermat .....	78
<b>Figura 11:</b> Leonardo Fibonacci .....	80
<b>Figura 12:</b> Brasil - 40 Selos Postais .....	84
<b>Figura 13:</b> Torre de Hanói .....	85
<b>Figura 14:</b> Bilhete de Loteria .....	87
<b>Figura 15:</b> Moedas de Ouro .....	89

## Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	9
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>2. NÚMEROS NATURAIS</b> .....	14
2.1. Contexto histórico: Da Intuição à Abstração.....	14
2.2. Caracterização dos Números Naturais .....	16
2.2.1. Axiomas de Peano.....	16
2.3. Propriedades dos Números Naturais.....	18
2.3.1. Adição em $\mathbb{N}$ .....	18
2.3.2. Multiplicação em $\mathbb{N}$ .....	19
2.3.3. Ordem .....	20
<b>3. PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA</b> .....	26
3.1. Métodos de Validação .....	26
3.2. Indução Empírica .....	28
3.2.1. Conjectura de Fermat .....	29
3.2.2. Conjectura de Goldbach.....	30
3.3. Axioma da Indução .....	31
3.4. Primeiro Princípio da Indução .....	32
3.4.1. Prova Indutiva.....	35
3.4.2. Funções com domínio $\mathbb{N}$ .....	37
3.4.3. Algumas definições dadas por recorrência .....	38
3.5. Primeiro Princípio da Indução generalizado .....	39
3.6. Segundo Princípio da Indução.....	40
3.7. Segundo Princípio de Indução generalizado .....	42
<b>4. APLICAÇÕES DA INDUÇÃO MATEMÁTICA</b> .....	43
4.1. Aplicações algébricas.....	43
4.1.1. Progressões Aritméticas e Geométricas .....	43
4.1.2. Teoremas Binomiais.....	49
4.1.3. Desigualdades algébricas .....	54
4.1.4. Somatórios .....	56
4.1.5. Propriedades do Determinante de uma matriz.....	63
4.1.6. Outras aplicações.....	66
4.2. Aplicações geométricas .....	69
4.2.1. Pizza De Steiner .....	69

4.2.2.	Diagonais de um polígono convexo .....	70
4.2.3.	Soma dos ângulos internos de um polígono convexo .....	72
4.2.4.	Relação de Euler .....	73
4.3.	Aplicações aritméticas .....	76
4.3.1.	Teorema Fundamental da Aritmética .....	76
4.3.2.	Pequeno Teorema de Fermat .....	77
4.3.3.	Algoritmo de Euclides .....	78
4.3.4.	Princípio de Dirichlet (ou Princípio das gavetas) .....	79
4.3.5.	Propriedades na sequência de Fibonacci .....	80
4.4.	Aplicações no Mundo Material .....	84
4.4.1.	O problema da franquia postal .....	84
4.4.2.	Torre de Hanói e o Fim do Mundo .....	85
4.4.3.	O problema da loteria .....	87
4.4.4.	O Problema da moeda falsa .....	89
4.4.5.	Os coelhos de Fibonacci .....	90
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	92
	<b>ANEXO:</b> Equivalência entre os princípios de Boa Ordem e Indução Matemática .....	97

# 1. INTRODUÇÃO

Esta pesquisa aborda os princípios de indução, seu fundamento teórico e suas diversas aplicações na matemática estudada na educação básica.

Na matemática, as proposições podem ser comprovadas pelo uso de vários métodos. Aplicando-os, podemos provar que uma determinada propriedade é verdadeira ou não, verificando se ela constitui, de fato, um teorema. Na história do desenvolvimento matemático, vemos que nem sempre foi assim. Segundo Lázaro (2003, p.243), foi a partir da obra de Euclides, Os elementos, que passou-se a exigir a demonstração para os resultados matemáticos.

Não há dúvidas de que as demonstrações possuem um caráter essencial na matemática. Neste contexto, este trabalho propõe o uso do método da indução matemática, como um dos métodos de demonstração, para validar teoremas e proposições matemáticas envolvendo números naturais, estudados na educação básica.

Um dos resultados centrais desta pesquisa é o teorema conhecido como Princípio de Indução Matemática, destacando, com particular interesse, suas diversas aplicações na matemática estudada no ensino básico.

Veremos que este teorema é muito útil para comprovar fórmulas e proposições dadas a priori e para confirmar conjecturas feitas sobre subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$ .

Para desenvolvimento da teoria abordada nesta pesquisa, optamos pelo método axiomático dedutivo que consiste em partir de verdades inquestionáveis (axiomas de Peano) e utilizando argumentações lógicas, deduzir novas verdades.

Atualmente, nas escolas de ensino médio, em sua maioria, as demonstrações são postas de lado e os resultados matemáticos são apresentados como verdades absolutas. Isto se dá, dentre outros motivos, pela dificuldade apresentada pelos alunos e pelo tipo de demonstração utilizada pelos professores. Nesse contexto, o método de indução se encaixa perfeitamente, tendo em vista ser uma ferramenta muito simples, e muito útil para provar propriedades feitas sobre números naturais. Podendo, assim, despertar nos alunos o interesse pelas demonstrações.

Este trabalho trata de fundamentar o método de indução, fornecer uma lista de propriedades matemáticas provadas a partir dele. Disponibilizando esta pesquisa não só para estudantes universitários, mas também para estudantes do ensino médio e professores

da educação básica. Deste modo, pretendo contribuir para a melhora do ensino da matemática na educação básica.

Esta dissertação está estruturada em cinco partes. A primeira é a introdutória e traz informações gerais da pesquisa. A segunda faz um estudo dos números naturais, apresentando e demonstrando algumas de suas propriedades. O destaque desta seção são os axiomas de Giuseppe Peano (1858 – 1932) nos quais se fundamentam a caracterização dos números naturais e os princípios de indução.

Em seguida, no capítulo 3, são enunciados os princípios de indução e suas respectivas demonstrações, intercaladas no texto são apresentadas algumas aplicações, entre as quais se destacam a prova indutiva e as definições recorrentes.

O capítulo 4 é parte central desta pesquisa, pois apresenta uma série de aplicações algébricas, geométricas e aritméticas do método indutivo. A última seção deste capítulo ainda contém cinco problemas, particularmente interessantes, onde mais uma vez, o princípio da indução matemática é útil para solucioná-los. Todas estas aplicações podem, perfeitamente, ser abordadas na educação básica.

A última parte é dedicada às considerações finais e conclusivas resultantes da pesquisa realizada.

Considerando sempre o rigor intrínseco à Matemática, procurou-se manter uma ordem apropriada dos tópicos abordados.

## 2. NÚMEROS NATURAIS

Neste capítulo é apresentado um estudo dos números naturais, abordando sua caracterização e sua evolução de noção intuitiva para ente abstrato. Na última seção, está descrita uma relação de propriedades dos números naturais.

### 2.1. Contexto histórico: Da Intuição à Abstração

Os números constituem um dos principais objetos de estudo da matemática e são encontrados nos seus diversos segmentos.

Segundo Lima (2006, p.25), os textos tradicionais afirmam que:

*“Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma contagem e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se medição e o resultado é um número real”*

Esta definição tradicional de número nos mostra, exatamente, para que servem e por quais motivos foram criados os números. Eles são entes abstratos que nos permitem contar e medir.

As noções primitivas de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana e, em todas as etapas de sua evolução, encontra-se o sentido de número.

Por meio de uma série de situações, o homem completou sua ideia restrita de número natural com a prática da operação de contar. Segundo Boyer (1974, p.166) “[...] nossos mais antigos antepassados a princípio só contavam até dois, qualquer outro conjunto, além desse nível era dado como “muitos” .

Pode-se dizer que a operação de contagem se realiza fazendo corresponder cada objeto de uma coleção (conjunto), a um número da sucessão natural: 1,2,3,4, ... .

Com o passar do tempo a ideia de número tornou-se amplamente vivida pelo homem e ele sentiu a necessidade de exprimi-lo de algum modo, inicialmente por meio de expressões, gestos, palavras, símbolos ou sinais. Os dedos da mão poderiam ser usados para indicar um conjunto de um, dois, três, quatro ou cinco objetos. Para fazer uma correspondência com os elementos de um conjunto maior podiam ser usados montes de pedra.

À medida que a civilização se desenvolveu, a humanidade adotou os números naturais como modelo abstrato de contagem.

Dentre todos os números adotados pelo homem, os naturais foram os primeiros a ser criados, inicialmente com o intuito de contar. Entretanto, sua evolução de uma noção intuitiva para um conceito mais elaborado foi muito lenta.

Uma vez adotado, o número se desliga do objeto que ele representava originalmente, a relação entre os dois é esquecida e o número passa a ser um ente abstrato, sendo indicado por um símbolo ou por seu nome, quando possível.

As necessidades provocadas por um sistema mais evoluído e cada vez mais complexo conduziram, através dos séculos, a formalização e sistematização do conjunto dos números naturais.

Considera-se que os números naturais são 1, 2, 3, 4, 5, ... . A totalidade desses números constitui o conjunto N que será chamado de conjunto dos números naturais. Usando notação de conjuntos, tem-se:

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \} .$$

Comparar conjuntos de objetos com a sequência 1, 2, 3, 4, ... torna mais preciso o processo de contar; logo, esse processo pressupõe o conhecimento dessa sequência numérica.

Apesar de sua importância, o conjunto N não é suficiente para o estudo de toda a matemática e não atende à todas as necessidades práticas da vida cotidiana. No entanto, é a partir de N e de suas propriedades que podemos construir os principais conjuntos numéricos usados na educação básica.

Praticamente, todos os livros adotados nas instituições de educação básica no Brasil consideram o número 0 (zero) como o primeiro número natural. Trata-se de uma questão de preferência do autor, definida previamente, de acordo com a teoria que se pretende desenvolver.

Nesta pesquisa, optou-se por adotar o conjunto N como sendo

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \} .$$

Deve-se ter em mente que o símbolo 0 foi usado, inicialmente, pelos maias e pelos hindus, difundido pelos árabes e adotado no ocidente, não como um número mas como um algarismo, com a única função de preencher uma casa decimal vazia.

A noção primitiva de número evoluiu ao ponto de termos um sistema de numeração que nos permite, por meio do uso dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, chamados algarismos, representar todos os números naturais.

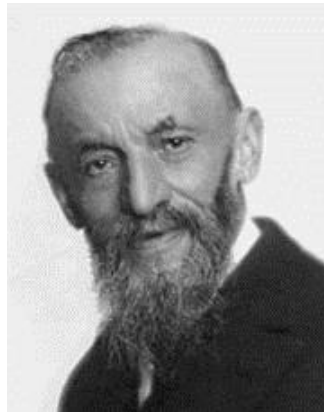
A criação de um símbolo para representar o “nada” constitui um fato ousado na evolução do pensamento. Essa criação é relativamente recente e foi devida a exigências da numeração escrita.

No conjunto  $\mathbb{N}$  valem dois princípios fundamentais: o *Princípio da Boa Ordem* e o *Princípio da Indução Matemática*. Estes são apresentados adiante e é provado, no anexo desta pesquisa, que eles são equivalentes.

## 2.2. Caracterização dos Números Naturais

Nesta seção, é apresentada uma breve abordagem sobre a caracterização dos números naturais. Trata-se da teoria axiomática dos números naturais, onde “números naturais” e “sucessor” são noções primitivas e os axiomas são os de Peano.

### 2.2.1. Axiomas de Peano



**Figura 1:** Giuseppe Peano

**Giuseppe Peano** nasceu no dia 27 de agosto de 1858 em Piemont, Itália e morreu em 20 de abril de 1932 em Turim, Itália. Em 1889 publicou os seus axiomas. Deve-se a Peano a constatação de que toda a teoria dos números naturais pode ser desenvolvida a partir de quatro fatos básicos, denominados Axiomas de Peano.



A partir destes princípios, é possível descrever, de forma precisa e concisa, todos os números naturais. Deste modo, os quatro axiomas elaborados por Giuseppe Peano permitem a construção axiomática de  $\mathbb{N}$ .

Os elementos do conjunto  $\mathbb{N}$  são denominados números naturais. A caracterização de  $\mathbb{N}$  é feita, essencialmente, a partir da noção primitiva de *sucessor*. De modo intuitivo, dados  $n, n' \in \mathbb{N}$ , dizer que  $n'$  é sucessor de  $n$  significa dizer que  $n'$  vem logo depois de  $n$ , não havendo nenhum número natural entre eles.

O termo primitivo *sucessor* não está definido. Porém, seu uso é disciplinado pelos seguintes princípios:

$P_1$  – Todo número natural tem um único sucessor;

$P_2$  – Números naturais distintos têm sucessores distintos, ou equivalentemente, números naturais que têm o mesmo sucessor são iguais;

$P_3$  – Existe um único número, chamado um e indicado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;

$P_4$  – Sendo  $X$  um conjunto contendo números naturais tal que:  $1 \in X$  e o sucessor de todo elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ . Então  $X = \mathbb{N}$ .

Estes princípios, são denominados axiomas de Peano. Eles são os pilares de toda a teoria dos números naturais, pois a partir deles se pode provar todas as propriedades de  $\mathbb{N}$ .

Outra forma, muito interessante, de enunciar os axiomas de Peano é feita pelo autor Elon Lages Lima (Revista Eureka, N° 3, de 1998). Nela é definida uma função sucessor  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que apresenta as seguintes características:

A – Existe uma função  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , que associa a cada  $n \in \mathbb{N}$  um elemento  $s(n) \in \mathbb{N}$ , chamado sucessor de  $n$ .

B – A função  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é injetiva.

C – Existe um único elemento 1 no conjunto  $\mathbb{N}$  tal que  $1 \neq s(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

D – Se um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{N}$  é tal que  $1 \in X$  e  $s(X) \subset X$  (isto é,  $n \in X$  implica  $s(n) \in X$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ), então  $X = \mathbb{N}$ .

Usando a notação  $s(n)$  para indicar o sucessor de um número natural  $n$ , tem-se então  $2 = s(1)$ ,  $3 = s(2)$ ,  $4 = s(3)$ ,  $s(4) = 5$ , e assim por diante. Desta forma, a igualdade  $s(1) = 2$  indica que o símbolo 2 é usado para indicar o sucessor de 1. A mesma ideia se aplica às demais igualdades.

Deste modo, indica-se a sequência dos números naturais como segue:

$$1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \xrightarrow{s} 5 \xrightarrow{s} 6 \xrightarrow{s} \dots$$

Assim, aplicando sucessivas vezes o procedimento de tomar o sucessor  $s(n)$ , obtém-se todos os números naturais.

Segundo LIMA (1998)

“o axioma da indução é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural  $n$  pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número”

Depois de definir a operação de adição para os naturais é adotado  $n+1$  em vez de  $s(n)$ .

## 2.3. Propriedades dos Números Naturais

Nesta seção, são apresentadas algumas das propriedades dos números naturais.

Entre os números naturais define-se duas operações fundamentais: a *adição*, que aos números  $n, p \in \mathbb{N}$  faz corresponder a *soma*  $n + p$  e a *multiplicação* que lhes associa ao produto  $n.p$ .

### 2.3.1. Adição em $\mathbb{N}$

De forma intuitiva, a soma  $n + p$  é o número que encontra-se ao efetuar a operação de tomar o sucessor de  $n$  por  $p$  vezes seguidas. Em particular, tem-se que  $n+1$  é o sucessor de  $n$ .

Fixado  $n$ , a soma  $n+1$  está definida, pois trata-se do sucessor de  $n$ . Supondo definida a soma  $n+p$  e considerando a igualdade  $n+(p+1) = (n+p) + 1$ , define-se a soma  $n + (p+1)$ , isto é, a soma de  $n$  com o sucessor de  $p$ .

De fato, pela igualdade  $n+(p+1) = (n+p) + 1$ , vemos que para obter a soma  $n + (p+1)$  basta tomar o sucessor  $(n+p) + 1$  de  $n+p$ . Pelo quarto axioma de Peano (axioma da Indução) a soma está definida para quaisquer  $n,p \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 1.** Se  $m,n \in \mathbb{N}$  então a soma  $m + n \in \mathbb{N}$ .

### Demonstração

Fixado um  $m \in \mathbb{N}$  arbitrário, considera-se o conjunto

$$X = \{ n \in \mathbb{N}; m+n \in \mathbb{N} \}.$$

Prova-se que  $X = \mathbb{N}$ , usando o quarto axioma de Peano ( $P_4$ ), mostrando assim, que  $m+n \in \mathbb{N}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Com efeito, sabe-se que  $1 \in X$ , pois,  $m+1$  é o sucessor de  $m$ , e pelo axioma de Peano  $m+1$  é um número natural.

Admitindo que  $n \in X$ , ou seja,  $m+n \in \mathbb{N}$ , prova-se que  $(n+1) \in X$ , isto é, que  $m+(n+1) \in \mathbb{N}$ .

De fato, usando a hipótese de indução, tem-se que:

$$m+(n+1) = m + n + 1 = (m+n) + 1$$

Pelo que foi admitido acima,  $m+n \in \mathbb{N}$ , e como  $(m+n) + 1$  é o seu sucessor, temos que  $(m+n) + 1 \in \mathbb{N}$ , mostrando que  $(n+1) \in X$ .

Logo, pelo quarto axioma de Peano ( $P_4$ ),  $X = \mathbb{N}$  e  $m+n \in \mathbb{N}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Isto nos mostra que o conjunto dos números naturais é fechado em relação a adição.

### 2.3.2. Multiplicação em $\mathbb{N}$

A multiplicação de números naturais pode ser definida de modo análogo à adição. Fixado um número natural  $n$  qualquer, a multiplicação por  $p$  é definida da seguinte forma:

$$(1) n.1 = n \quad \text{e} \quad (2) n.(p+1) = n.p + p.$$

Na definição acima tem-se, pela igualdade (1), que o produto do número  $n$  por 1, ou seja,  $n.1$  está bem definido. Pela igualdade (2), estando definido o produto  $n.p$ , podemos obter o produto  $n.(p+1)$  por recorrência. Para isto, basta efetuar a soma  $np + p$ .

Pelo quarto axioma de Peano ( $P_4$ ) podemos garantir que a multiplicação está definida para quaisquer  $n, p \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 2.** Se  $m, n \in \mathbb{N}$  então o produto  $m \cdot n$  é um elemento de  $\mathbb{N}$ .

### Demonstração

Fixado um  $m \in \mathbb{N}$  arbitrário, considera-se o conjunto

$$X = \{ n \in \mathbb{N}; m.n \in \mathbb{N} \}.$$

Prova-se que  $X = \mathbb{N}$ , usando o quarto axioma de Peano ( $P_4$ ), mostrando assim, que  $m.n \in \mathbb{N}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Com efeito, sabe-se que  $1 \in X$ , pois, por definição  $m.1 = m \in \mathbb{N}$ .

Admitindo que  $n \in X$ , ou seja,  $m.n \in \mathbb{N}$ , prova-se que  $(n+1) \in X$ , isto é, que  $m.(n+1) \in \mathbb{N}$ .

De fato, usando a hipótese de indução, tem-se que:

$$m.(n+1) = mn + n.$$

Sendo  $mn+n$  uma soma de dois números naturais tem-se, pela proposição 1, que  $m.(n+1) \in \mathbb{N}$ , mostrando, deste modo, que  $(n+1) \in X$ .

Logo, pelo quarto axioma de Peano,  $X = \mathbb{N}$  e  $m.n \in \mathbb{N}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Isto mostra que o conjunto dos números naturais também é fechado em relação a multiplicação.

### 2.3.3. Ordem

A adição de números naturais permite introduzir uma relação de ordem em  $\mathbb{N}$ . Dados dois números naturais  $m$  e  $n$  diremos que  $m$  é menor do que  $n$ , e escreve-se  $m < n$ , para indicar que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + p$ . Pode-se, ainda, afirmar, de forma equivalente, que  $n$  é maior do que  $m$  e escrever  $n > m$ . Por definição, tem-se que  $m < m + p$  para quaisquer  $m, p \in \mathbb{N}$ . Em particular,  $m < m+1$ .

Indica-se que  $m$  é menor que ou igual a  $n$  escrevendo  $m \leq n$  ou, equivalentemente, que  $n$  é maior que ou igual a  $m$  escrevendo  $n \geq m$ .

**Proposição 3.** Para todo número natural  $n \neq 1$  temos  $n > 1$ .

### Demonstração

De fato, pelo terceiro axioma de Peano ( $P_3$ ), se  $n \neq 1$  então  $n$  é sucessor de algum número natural  $m$ , ou seja,  $n = m + 1 = 1 + m$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ , logo  $n > 1$ . Portanto 1 é o menor dos números naturais.

A relação de ordem dos números naturais tem algumas propriedades básicas. Apresenta-se algumas delas a seguir.

**Proposição 4.** (Transitividade) Se  $m < n$  e  $n < p$ , então  $m < p$ .

### Demonstração

Se  $m < n$  e  $n < p$  então  $n = m + p$  e  $p = n + q$  para alguns  $p, q \in \mathbb{N}$ , logo  $p = (m + p) + q = m + (p + q)$ , portanto  $m < p$ .

Outra importante propriedade de relação de ordem é que, dados dois números naturais  $m$  e  $n$  diferentes, então  $m > n$  ou  $m < n$ .

Dois números naturais  $m$  e  $n$  serão ditos *comparáveis* quando  $m = n$ ,  $m < n$  ou  $m > n$ .

**Proposição 5.** (Comparabilidade) Todo número natural  $n$  é comparável com qualquer número natural.

### Demonstração

A prova é feita a partir do quarto axioma de Peano ( $P_4$ ), para isto, considera-se o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é comparável}\}.$$

O número  $1 \in X$  pois 1 é comparável, uma vez que pela proposição 3 tem-se que  $1 < n$  para todo  $n \neq 1$ .

Supõe-se que o número  $n \in X$ , ou seja, que  $n$  é comparável com todos os números naturais. Mostra-se a partir daí que  $n+1$  também é comparável, mostrando que  $(n+1) \in X$ .

De fato, seja  $m \in \mathbb{N}$ , tomado arbitrariamente. Por hipótese de indução, tem-se que  $m = n$ ,  $m < n$  ou  $n < m$ . Estuda-se cada possibilidade:

Se  $m < n$  então  $m < n + 1$  por transitividade, pois sabe-se que  $n < n + 1$ .

Se  $m = n$  segue imediatamente quem  $m < n + 1$ .

Se  $n < m$  então  $m = n + p$ . Neste caso, há duas possibilidades. Ou  $p = 1$ , donde se tem  $m = n + 1$ , ou então  $p > 1$ , logo  $p = 1 + p'$ , e daí  $m = (n+1) + p'$  e pode-se concluir que  $n + 1 < m$ .

Em qualquer hipótese, vemos que  $n+1$  é comparável com qualquer número natural  $m$ . Pelo axioma da indução fica provado que  $\mathbb{X} = \mathbb{N}$  e, a partir daí pode-se concluir que todo número natural  $n$  é comparável com qualquer número natural  $m$ .

**Proposição 6.** (Tricotomia) Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , qualquer das afirmações  $m < n$ ,  $m = n$ ,  $m > n$  exclui as outras.

### Demonstração

Se  $m < n$  e  $m = n$ , então  $n = m + p$  e  $m = n$  o que implicaria em  $m = m + p$ , donde  $m + 1 = m + p + 1$  e daí  $1 = p + 1$ , um absurdo, pois 1 não é sucessor de nenhum número natural, em particular não é sucessor de  $p$ . Portanto  $m < n$  ( e analogamente  $m > n$  ) é incompatível com  $m = n$ .

Por outro lado se  $m < n$  e  $m > n$  tem-se  $n = m + p$  e  $m = n + q$ , donde obtém-se  $n = n + q + p$ , e daí  $n + 1 = n + q + p + 1$ , o que implica  $1 = (q + p) + 1$ , um absurdo.

A propriedade a seguir nos diz que  $n$  e  $n+1$  são consecutivos.

**Proposição 7.** Não existe número natural entre  $n$  e  $n + 1$ .

### Demonstração

A prova será feita por redução ao absurdo. Supondo que fosse possível ter  $n < p < n+1$ , então  $p = n + k$  e  $n+1 = p + r$ , logo  $n+1 = n + k + r$ , e daí obtém-se  $1 = k + r$ . Por definição, isto significaria que  $k < 1$ , o que é absurdo, pois  $k > 1$  para todo  $k \neq 1$ .

Esta proposição mostra que todo número natural diferente de 1 é sucessor de algum outro número.

Algumas demonstrações aplicadas acima, bem como algumas definições, foram obtidos do texto: O Princípio da Indução (Revista Eureka N° 3, de 1998), do autor Elon Lages Lima.

**Proposição 8.** Dados  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , verifica-se que  $m < n$  se, e somente se,

$$m + p < n + p.$$

### Demonstração

Deve-se mostrar quem  $m < n$  é equivalente a  $m + p < n + p$ .

Por definição, quando  $m < n$  tem-se  $n = m + k$ , o que implica  $n + p = (m + k) + p$ . Isto equivale a  $n + p = (m+p) + k$  e conseqüentemente  $m + p < n+p$ .

Reciprocamente, supõe-se que  $m + p < n + p$ . Pela proposição 6 (Tricotomia) existem apenas três possibilidades para a relação entre  $m$  e  $n$ . (1ª Relação)  $m=n$ . Então  $m + p = n + p$  o que é uma contradição. (2ª Relação)  $m > n$ . Implica em  $m + p > n + p$ , o que é absurdo, pois foi assumido que  $m + p < n + p$ . (3ª Relação)  $m < n$ . Pela tricotomia, resta apenas esta relação.

**Proposição 9.** Dados  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $m < n$  é equivalente a  $m \cdot p < n \cdot p$ .

### Demonstração

Supondo que  $m < n$ , tem-se que  $n = m + k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ , o que acarreta  $n \cdot p = p \cdot n = p \cdot (m + k) = pm + pk$ , logo  $mp < np$ .

Por outro lado, admitindo que  $m \cdot p < n \cdot p$ , novamente pela tricotomia, tem-se que  $m=n$ ,  $m>n$  ou  $m<n$ . Se  $m=n$  então  $mp = np$ , absurdo. Se  $m>n$ , então  $mp>np$  o que é uma contradição. A relação  $m<n$  é a única que resta, isto encerra a demonstração.

**Proposição 10.** Dados  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , temos que  $m = n$  se, e somente se,  $m + p = n + p$ .

### Demonstração

Deve-se mostrar quem  $m = n$  é equivalente a  $m + p = n + p$ .

Por definição, quando  $m = n$  tem-se  $m + p = n + p$ , pois a adição é uma operação bem definida em  $\mathbb{N}$ .

Reciprocamente, vamos supor que  $m + p = n + p$ . Pela proposição 6 (Tricotomia) existem apenas três possibilidades para a relação entre  $m$  e  $n$ . (1ª Relação)  $m>n$ . Então  $m + p > n + p$ , uma contradição. (2ª Relação)  $m<n$ . Implica  $m + p < n + p$ , o que é absurdo,

pois assumimos que  $m + p = n + p$ . (3ª Relação)  $m=n$ . Pela tricotomia, esta é única relação que resta.

**Proposição 11.** Dados  $m,n,p \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $m = n$  é equivalente a  $m.p = n.p$ .

### Demonstração

Supondo que  $m = n$ , tem-se que  $mp = np$ , pois a multiplicação é uma operação bem definida em  $\mathbb{N}$ .

Por outro lado, admitindo que  $m.p = n.p$ , novamente pela tricotomia, tem-se que  $m=n$ ,  $m>n$  ou  $m<n$ . Se  $m>n$  então  $mp>np$ , absurdo. Se  $m<n$ , teremos que  $mp<np$  o que é uma contradição. A relação  $m=n$  é a única que resta, isto encerra a demonstração.

Dado um conjunto  $A \subset \mathbb{N}$ , diz-se que  $a$  é o menor elemento de  $A$ , se  $a \leq n$ , para todo  $n \in A$ . É fácil ver que o menor elemento de  $A \subset \mathbb{N}$  é único, afinal se forem  $a$  e  $b$ , ambos elementos mínimos de  $A$ , então  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , o que leva a concluir que  $a=b$ .

Daqui em diante, dado  $n \in \mathbb{N}$  é usada a notação  $I_n$  para indicar o conjunto dos números naturais  $p$  tais que  $1 \leq p \leq n$ . Assim  $I_1 = \{1\}$ ,  $I_2 = \{1,2\}$ ,  $I_3 = \{1,2,3\}$ ,  $I_4 = \{1,2,3,4\}$  e assim por diante.

**Proposição 12.**(Princípio da Boa Ordenação) Todo subconjunto não-vazio  $A \subset \mathbb{N}$  possui um menor elemento.

### Demonstração

Pode-se admitir que  $1 \notin A$ , pois nesse caso  $1$  já seria o menor elemento de  $A$ . O menor elemento de  $A$  cuja existência precisa-se provar, deverá ser da forma  $n + 1$ . Deve-se, pois, encontrar um número natural  $n$  tal que  $(n + 1) \in A$  e, além disso, todos os demais elementos de  $A$  são maiores do que  $n$ , logo maiores do que  $1,2,3, \dots, n$ . Noutras palavras, procura-se um número natural  $n$  tal que  $I_n \subset \mathbb{N} - A$  e  $n+1 \in A$ . Com esse objetivo, considera-se o conjunto

$$X = \{ n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A \}.$$

Portanto,  $X$  é o conjunto dos números naturais  $n$  tais que todos os elementos de  $A$  são maiores do que  $n$ . Como estamos supondo que  $1 \notin A$ , já sabemos que  $1 \in X$ . Por outro lado, como  $A$  não é vazio, nem todos os números naturais pertencem a  $X$ , ou seja, temos  $X \neq \mathbb{N}$ . Pelo quarto axioma de Peano ( $P_4$ ), ver-se que o conjunto  $X$  não é indutivo, isto é, existe algum  $n \in X$  tal que  $n+1 \notin X$ . Isto significa que todos os elementos de  $A$  são maiores que  $n$  mas, nem todos são maiores do que  $n + 1$ . Como não há números naturais entre  $n$  e  $n + 1$ , concluímos que  $n+1$  pertence a  $A$  e é o menor elemento de  $A$ .



Esta demonstração foi reproduzida do texto: O Princípio da Indução (Revista Eureka N°3, de 1998), do autor Elon Lages Lima.

O Princípio da Boa Ordenação pode ser usado na demonstração de muitos resultados matemáticos, substituindo, inclusive, o método da Indução, que será apresentado a seguir.

### 3. PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo é dedicado ao uso do quarto axioma de Peano (Axioma da Indução) para a validação de resultados matemáticos que envolvem o conjunto dos números naturais e seus subconjuntos infinitos.

O resultado central deste capítulo é o teorema conhecido com Princípio de Indução Matemática ou Princípio de Indução Finita, que nada mais é do que uma reformulação do Axioma de Indução.

Veremos que este teorema é utilizado para demonstrar fórmulas e proposições, dadas a priori, referentes a números naturais.

Esse teorema, em geral, não é visto no Ensino Médio, mas poderia ser abordado, já que é uma importante ferramenta para validar propriedades matemáticas. Os estudantes da educação básica, que participam do Programa de Iniciação Científica da OBMEP, têm tido acesso a este tópico.

#### 3.1. Métodos de Validação

Os resultados matemáticos podem ser validados por meio de vários métodos de demonstração. Aplicando-os, pode-se demonstrar que uma proposição matemática constitui, de fato, um resultado válido. A seguir é apresentado um destes resultados.

Considera-se a afirmação: “todos os números primos (números naturais com exatamente dois divisores) são ímpares, exceto o número 2”

Esta afirmação sobre os números primos é uma das mais simples proposições da matemática. Sua condição de ser uma afirmação verdadeira decorre da própria definição de número primo. No entanto, para ser aceita como um teorema, precisa estar acompanhada de uma prova.

Na Matemática, para que um resultado seja validado não é suficiente que um milhão ou mais de exemplos o comprovem. A condição de ser uma proposição verdadeira, só é obtida quando tem-se uma prova formal para esta proposição.

Na história do desenvolvimento matemático, nem sempre foi assim. Os antigos matemáticos egípcios não tinham preocupação em provar as proposições matemáticas.

Dois papiros importantes da época, o de Moscou e o de Rhind, que registram o conhecimento matemático da época, não contêm qualquer prova ou demonstração.

De acordo com Coutinho (2003, p.243), foi a partir da obra de Euclides, Os elementos, que os matemáticos passaram a exigir a demonstração para as proposições matemáticas.

Sabe-se que não é possível provar tudo, isto é, não se pode demonstrar e comprovar tudo. Há que partir de um grupo de ideias, que são os princípios básicos, os postulados ou axiomas. Em geometria, o ponto, a reta e o plano são noções primitivas e a afirmativa de que por dois pontos passa uma única reta é um axioma adotado, por exemplo.

Para empregar as noções primitivas de forma adequada, é necessário dispor de vários princípios que disciplinem seu uso. Estes princípios são os axiomas ou postulados. Assim como as noções primitivas são admitidas sem definição, os postulados são propriedades aceitas sem demonstração.

Todas as demais noções devem ser definidas e todas as demais proposições devem ser demonstradas a partir destas noções básicas estabelecidas.

As proposições a serem demonstradas são os teoremas e suas consequências imediatas são os corolários. As vezes, na demonstração de um teorema, precisamos de uma proposição auxiliar que é denominada lema.

Dependendo da apresentação da teoria, uma determinada proposição pode ser adotada como axioma ou provada como teorema a partir de outros postulados.

Prova ou demonstração na Matemática, é uma lista de proposições, construída de forma ordenada, e na qual cada componente tem sua justificativa lógica. A demonstração começa com uma proposição ou algumas proposições, que constituem a hipótese, e termina com a prova do teorema.

Na Matemática, destacam-se os seguintes métodos de validação: a prova por implicação direta, por contraposição, por redução ao absurdo e por indução matemática (ou indução finita).

A prova por indução é uma aplicação do Princípio da Indução Matemática, a qual será estudada em capítulo específico. Os demais tipos não serão abordados, tendo em vista as finalidades deste trabalho.

### 3.2. Indução Empírica

A Indução Empírica das ciências naturais procede de uma série de observações particulares de um fenômeno, selecionadas adequadamente, para estabelecer Leis gerais, que devem abranger todas as possibilidades deste fenômeno. O grau de certeza com que se estabelece essa Lei depende do número de observações particulares desse fenômeno.

A validade de um teorema matemático é estabelecida de forma diferente. Verificar que uma propriedade vale para um grande número de casos particulares não permite concluir que a propriedade vale em geral, para todos os casos.

Uma prática muito comum entre alunos da Educação Básica é a verificação de resultados testados em vários casos particulares e, a partir daí, concluir que ele vale sempre, isto é, vale em geral. Adotar esse procedimento como uma demonstração é arriscado, pois pode conduzir a muitos enganos.

A *indução vulgar* (generalização de uma propriedade após verificação de que ela é válida em alguns casos particulares) pode levar a sérios enganos em Matemática.

Existe uma série de afirmações que são verdadeiras para muitos números naturais, mas, a partir de um certo número natural, deixam de ser.

Por exemplo, a RPM 09 (Revista do Professor de Matemática) traz na página 33 o seguinte:

A sentença abaixo, sobre os números naturais, é verdadeira para 1, 2, 3 e muitos outros números naturais, mas será que ela vale sempre?

“ $991n^2 + 1$  não é um quadrado perfeito”

Pode-se verificar que, de fato,  $991n^2 + 1$  não é um quadrado perfeito para muitos números naturais  $n$ , como  $n = 1, 2, \dots, 100$ . Pode-se fazer, ainda, muitas outras tentativas e ver que a proposição é válida para um número muito grande de casos particulares. Mas, será que é válida sempre? A resposta é não. Na verdade, o primeiro número natural para o qual  $991n^2 + 1$  é um quadrado perfeito tem 29 dígitos e é

12 055 735 790 331 359 447 442 538 767

Ainda na RPM 09 encontramos a seguinte afirmação, conhecida como trinômio de Euler:

“ $n^2 + n + 41$  sempre resulta em número primo”. Verdadeiro ou falso?

Temos, por exemplo, para  $n = 1, 2, 3$  os valores 43, 47, 53.

Embora, isso seja verdade para  $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ , para  $n = 40$  temos que  $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41$  que não é um número primo. Daí, a afirmação não vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De modo semelhante, a expressão  $q(n) = n^2 - 79n + 1601$  fornece números primos para  $n$  natural variando de 1 a 79, mas para  $n = 80$  tem-se  $q(80) = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681$ , que não é um número primo, pois é divisível por 41.

O perigo de fazer generalizações apressadas a respeito de proposições referentes a números naturais fica, mais ainda, evidenciado nas seguintes conjecturas.

### 3.2.1. Conjectura de Fermat

Considerando a relação  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , definida para  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que:

$$n = 0 \Rightarrow F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$

$$n = 1 \Rightarrow F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 2 \Rightarrow F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$n = 3 \Rightarrow F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$n = 4 \Rightarrow F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$$

Os números  $F_0, F_1, F_2, F_3$  e  $F_4$  encontrados são todos números primos. Fermat (1601 – 1665) acreditou que esta expressão apresentava um número primo, para todo valor natural atribuído a  $n$ . Esta indução é falsa, pois Euler (1707-1783) mostrou que para  $n = 5$  resulta  $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$  e que, portanto, não é primo. Na verdade, hoje se sabe que  $2^{2^n} + 1$  não é primo para  $n$  entre 5 e 17.

### 3.2.2. Conjectura de Goldbach

Esta é uma famosa conjectura encontrada em uma carta dirigida a Euler em 1742, por Goldbach.

“Todo inteiro par, maior do que 2, é soma de dois primos”

A conjectura de Goldbach pode ser expressada como segue: “Dado um número na forma  $2n + 2$  qualquer ( $n \in \mathbb{N}$ ), existem dois primos  $p$  e  $q$  tais que  $p + q = 2n + 2$ .”

Pode-se verificar facilmente que a conjectura é válida para  $n = 1, 2, 3$ . De fato:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad 2n + 2 = 4 = 2 + 2, \text{ onde } p = q = 2.$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad 2n + 2 = 6 = 3 + 3, \text{ onde } p = q = 3.$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad 2n + 2 = 8 = 3 + 5, \text{ onde } p = 3 \text{ e } q = 5.$$

Depois de fazer muitas e muitas tentativas, não se encontra um número  $n$  para o qual a afirmação é falsa.

De fato, até os dias de hoje, não é conhecido um número que a tornasse falsa. Porém, como foi dito, isto não é suficiente para garantir sua validade.

Deste modo, a conjectura de Goldbach permanece uma questão aberta para todos os matemáticos, uma vez que, ainda não se encontrou uma prova para ela.

A Indução Empírica, foi ironicamente batizada, pelo filósofo e matemático Bertrand Russel, como “Indução Galinácea”. A história que justifica este nome é apresentada a seguir e foi retirada do texto *Elementos de Aritmética – A. Hefez*, pag. 10, parágrafo 3 (três).

*Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.*

Deste modo, ver-se que só se pode aceitar a validade de uma proposição para todo  $n \in \mathbb{N}$ , quando isto for previamente demonstrado, pois embora verdadeiro para um número muito grande de exemplos, um resultado ainda pode ser falso.

A confirmação de uma Lei geral, em qualquer número finito de casos, por maior que seja o valor adotado, não é aceita como uma demonstração a rigor da matemática, pois como afirma SIMMONS (1997), “existe um enorme abismo entre provavelmente verdadeira e absolutamente certa”.

Nota-se, portanto, a necessidade de dispor de um método que permita avaliar uma indução vulgar como verdadeira ou falsa. Um método que permita generalizar, para todos os números naturais, uma proposição dada.

### 3.3. Axioma da Indução

Dentre os axiomas de Giuseppe Peano, vistos no capítulo anterior, nota-se que o quarto axioma ( $P_4$ ) é, claramente, mais elaborado que os demais. Pode-se reescrever este axioma da seguinte forma:

Seja  $S$  um subconjunto não – vazio de  $\mathbb{N}$  ( $S \subset \mathbb{N}$ ) que satisfaz às duas condições:

(1)  $1 \in S$ ;

(2) Para todo número natural  $n$ ,  $n \in S$  implica em  $(n + 1) \in S$ .

Nestas condições,  $S$  é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais, isto é,  $S = \mathbb{N}$ .

Conforme este axioma da indução, o único subconjunto de  $\mathbb{N}$  que satisfaz às condições (1) e (2) é o próprio  $\mathbb{N}$ .

A ideia deste axioma é a de que todos os números naturais podem ser obtidos a partir de 1 através de repetidas aplicações da operação tomar o sucessor.

A importância do axioma da indução na teoria dos números naturais e, mais geralmente, em toda matemática, resulta do fato que ele pode ser visto como um método de demonstração para proposições referentes aos números naturais.

O método de demonstração, inspirado no axioma da indução, é denominado *Princípio da Indução Matemática* ou *Princípio da Indução Finita*, conforme é apresentado neste capítulo.

A Indução Matemática é usada, essencialmente, para estabelecer verdades matemáticas válidas em subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$ . Desta forma, não consiste em mostrar que determinada sentença aberta é verdadeira para um grande número de casos, mas, trata-se de mostrar que tal sentença é verdadeira para todo número natural  $n \geq a$ , onde  $a \in \mathbb{N}$ .

### 3.4. Primeiro Princípio da Indução

O processo de ir, passo a passo, de  $n$  a  $n+1$ , em que se baseia a sucessão infinita dos números naturais, forma a base do Princípio de Indução Matemática.

Seja  $P$  uma propriedade referente aos números naturais, sua indicação é feita por  $P(n)$ . Um número natural  $n$  pode ou não gozar da propriedade  $P$ . Se o número natural  $n_1$  goza da propriedade  $P$  então  $P(n_1)$  é verdadeira, caso contrário diz-se que  $P(n_1)$  é falsa para  $n_1$ .

Toda propriedade  $P$  que se refira a números naturais define um subconjunto  $X \subset \mathbb{N}$ , a saber, o conjunto dos números naturais que gozam da propriedade  $P$ . (E reciprocamente, todo conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  define uma propriedade referente a números naturais, a saber, a propriedade de pertencer a  $X$ ). Assim, “propriedade” e “conjunto” são conceitos equivalentes.

Supondo que seja dada uma sentença matemática  $P(n)$  que dependa de uma variável natural  $n$ , podendo ser verdadeira ou falsa de acordo com o valor de  $n$ . Estas sentenças serão ditas *sentenças abertas* definidas sobre  $\mathbb{N}$ .

Sejam  $P(n)$  uma sentença aberta sobre os números naturais e  $V$  um subconjunto de  $\mathbb{N}$  definido por

$$V = \{ n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira} \}$$

Para provar que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$  basta mostrar que  $V = \mathbb{N}$ .

Isto pode ser feito pelo axioma da indução. Daí, basta mostrar que 1 pertence a  $V$  e que se  $n \in V$  então  $n+1 \in V$ .

Prova-se, desta forma, o seguinte teorema.



**Teorema 1.** (Primeiro Princípio da Indução)

Seja  $P(n)$  uma sentença aberta em  $n$ . Se  $P(n)$  satisfaz às condições:

(i)  $P(1)$  é verdadeira;

(ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se  $P(n)$  é verdadeira, então  $P(n+1)$  é verdadeira.

Então a proposição  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração**

Para ver que o Princípio da Indução é verdadeiro serão adotados, como hipótese, os axiomas de Peano.

Dada uma propriedade  $P$  cumprindo as condições (i) e (ii), o conjunto  $X$  dos números naturais  $n$  para os quais a proposição  $P(n)$  é verdadeira, isto é:

$$X = \{ n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira} \}.$$

Pela condição (i),  $P(1)$  é verdadeira e, portanto,  $1 \in X$ . Pela condição (ii), para todo número natural  $n$ , se  $n \in X$ , então  $n+1 \in X$ . Logo, o conjunto  $X$  satisfaz às condições (1) e (2) do axioma da indução e, portanto,  $X = \mathbb{N}$ , isto é, a proposição  $P(n)$  é verdadeira para todo número natural.

Este Teorema é geralmente conhecido como *Princípio da Indução Matemática* ou *Princípio da Indução Finita*, a demonstração de um resultado usando este teorema chama-se “demonstração por indução matemática” ou “demonstração por indução sobre  $n$ ”.

Segundo Krerley e Adan (2012)

Uma grande vantagem do princípio da Indução Matemática é poder provar que uma quantidade infinita de afirmações são verdadeiras, simplesmente verificando que uma quantidade finita destas afirmações são verdadeiras.

A verificação de que  $P(1)$  é verdadeira é passo base da indução matemática e a prova de que a validade de  $P(n)$  implica na validade  $P(n+1)$  é o passo indutivo. Note que, na estrutura lógica deste teorema, uma das hipóteses é uma implicação. Trata-se, portanto, de uma implicação dentro de outra.

A hipótese (ii) do Teorema1 não exige em absoluto que  $P(n)$  seja verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ , podendo ser falsa para um ou mais valores de  $n$ . O que a hipótese (ii) exige

é que sempre que  $P(n)$  é verdadeira, então  $P(n+1)$  também seja; não exigindo nada quando  $P(n)$  é falsa.

Para entender por que as duas condições do princípio da indução são suficientes, pode-se pensar no efeito dominó. Esta prática traduz a ideia central por trás do Princípio da Indução Matemática.



**Figura 2:** Efeito dominó

Considerando um modelo ideal de enfileiramento de dominós, onde eles estão em número infinito. Supondo ainda que estão, entre si, a uma distância tal que se um deles cai, derruba o seguinte. Nestas condições se:

- (a) A primeira peça é derrubada na direção das demais.
- (b) Toda peça ao cair, derruba a peça seguinte.

então, pode-se concluir que todos os dominós da fila serão derrubados.

Portanto, para  $n \in \mathbb{N}$  tão grande quanto se considere, é possível afirmar que a  $n$ -ésima peça será derrubada.

Supondo, por absurdo que, o dominó da posição  $n > 1$  fica em pé, teríamos que o dominó anterior a este, o da posição  $n-1$ , também ficaria em pé, pela condição (b). Procedendo assim, por  $n$  vezes pode-se concluir que a primeira peça não caiu, o que contraria a condição (a).

Repara-se que as duas condições são igualmente necessárias, uma vez que se apenas a primeira for aplicada, nada nos garante que os demais dominós seriam

derrubados e se apenas a segunda for aplicada nada garante a queda dos dominós teria início.

Duas aplicações do Princípio da Indução se destacam: Prova por Indução e a Definição Recursiva. Estas aplicações serão abordadas a seguir.

### 3.4.1. Prova Indutiva

A Prova Indutiva ou Prova por Indução é um método de demonstração baseado no Princípio da Indução Matemática. Foi utilizado pela primeira vez, de forma explícita, por Francesco Maurolicus (1494 – 1575) ao provar a identidade  $1 + 3 + \dots + (2n+1) = n^2$ .

A prova por indução tornou-se popular em 1665, quando Blaise Pascal (1623 – 1662) utilizou-se da indução matemática em uma das demonstrações das propriedades de seu triângulo (Triângulo de Pascal).

**Exemplo 1.** Prove que, para todo número natural  $n \geq 1$ , o número  $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$  é inteiro e ímpar.

#### Demonstração

A afirmação é verdadeira para  $n=1$ , pois:

$$a_1 = \frac{4^1 - 1}{3} = 1, \text{ que é ímpar.}$$

Por hipótese,  $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$  é ímpar. Daí, pode-se escrever:

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1} - 1}{3} = \frac{4 \cdot 4^n - 1}{3} = \frac{4 \cdot 4^n - 1 + 4 - 4}{3} = \frac{4 \cdot 4^n + 3 - 4}{3} = \frac{4 \cdot 4^n - 4}{3} + \frac{3}{3} =$$

$$\frac{4 \cdot (4^n - 1)}{3} + \frac{3}{3} = 4 \cdot a_n + 1 .$$

Como  $a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 1$ , pode-se concluir que  $a_{n+1}$  é inteiro e ímpar.

Pelo princípio da indução matemática, fica provado que  $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$  é inteiro e

ímpar para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 2.** Mostrar que  $1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Demonstração

Considera-se a sentença aberta:

$$P(n): 1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1$$

Nota-se que  $P(1)$  é verdadeira, pois

$$1.1! = 1 = (1+1)! - 1.$$

Supõe-se que  $P(n)$  é verdadeira, ou seja, que

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Prova-se que  $P(n+1)$  é do mesmo modo verdadeira. De fato:

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! + (n+1).(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! = (n+1)!.(n+2) - 1 = (n+2)! - 1.$$

Mostrando, assim, que  $P(n+1)$  é de fato verdadeira. O princípio da indução nos garante que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 3.** A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

### Demonstração

Seja  $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$  a soma dos cubos de três números consecutivos.

Considere a proposição  $P(n)$  definida por:

$$P(n): n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ divisível por } 9.$$

Tem-se que  $P(1)$  é verdadeira, uma vez que

$$1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

Supõe-se que  $P(n)$  é verdadeira, ou seja, que

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ divisível por } 9$$

Deve-se mostrar que  $P(n+1)$  também é verdadeira. Com efeito:

$$\begin{aligned} [n+1]^3 + [(n+1)+1]^3 + [(n+1)+2]^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 \\ &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9.(n^2 + 3n + 3) \end{aligned}$$

Como, por hipótese de indução,  $(n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3$  é divisível por 9 e  $9.(n^2 + 3n + 3)$  é múltiplo de 9, tem-se que:

$$[n+1]^3 + [(n+1)+1]^3 + [(n+1)+2]^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9.(n^2 + 3n + 3)$$

é divisível por 9.

Como a validade de  $P(n)$  implica na validade de  $P(n+1)$ , temos que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3.4.2. Funções com domínio $\mathbb{N}$

Outra aplicação do Princípio da Indução é a definição de funções  $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$  que têm como domínio o conjunto dos números naturais.

No geral para se definir uma função  $f: X \rightarrow Y$  é preciso que seja dada uma regra permita relacionar a cada elemento de  $X$  um único elemento de  $Y$ .

Entretanto, no caso particular em que o domínio da função é o conjunto  $\mathbb{N}$ , para se definir uma função  $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$  não é preciso definir de uma só vez como obter  $f(n)$  a partir de  $n$ . Basta que se saiba:

(1) O valor de  $f(1)$ ;

(2) Uma regra que permita calcular  $f(n+1)$  a partir de  $f(n)$ .

Estes dois fatos permitem obter todos os valores de  $f(n)$ . (Diz-se que a função  $f$  foi definida por recorrência ou recursivamente). De fato, se  $X$  é o conjunto de todos os números naturais para os quais se pode determinar  $f(n)$ . Pelo dado (1) o valor de  $f(1)$  é conhecido, logo  $1$  pertence a  $X$ . Já pelo dado (2) o fato de conhecer  $f(n)$  acarreta em conhecer  $f(n+1)$ , isto é,  $n \in X$  implicam  $n+1 \in X$ . Portanto pelo axioma da indução  $X = \mathbb{N}$ , o que significa que é possível obter o valor de  $f(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma função  $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$  cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais chama-se uma sequência ou um sucessão dos elementos de  $Y$ . A notação usada para tal sequência é  $(y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n, \dots)$ , onde se usa  $y_n$  em vez de  $f(n)$  para indicar o valor da função  $f$  em  $n \in \mathbb{N}$ .

Do modo semelhante, para definir uma expressão  $E_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , basta definir  $E_1$  e fornecer uma relação que permita obter  $E_{n+1}$  a partir de  $E_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De fato, para verificar que  $E_n$  está definida para todo  $n \in \mathbb{N}$ , considera-se a sentença aberta

$P(n): E_n$  está definida

e prova-se, por indução matemática, que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Pela construção de  $E_n$  tem-se que:

(i)  $P(1)$  é verdadeira, pois  $E_1$  está bem definido.

(ii) Se  $P(n)$  é verdadeira, então  $P(n+1)$  é verdadeira, pois sempre que  $E_n$  fica definido  $E_{n+1}$  também fica.

Logo, pelo princípio da indução,  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Nesse caso, diz-se que  $E_n$  foi definido por *recorrência*.

### 3.4.3. Algumas definições dadas por recorrência

Entre os vários tópicos em matemática que podem ser definidos por recorrência estão os somatórios, as potências de expoente natural e o fatorial.

#### **Definição 1.** Somatórios

Seja  $(a_n)$  uma sequência de números reais. Para dar sentido às somas

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

é suficiente definir  $S_n$  por recorrência.

Pondo  $S_1 = a_1$  e dado  $S_n$ , define-se  $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ .

Pode-se indicar a soma  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  usando o símbolo  $\sum_{i=1}^n a_i$ .

Um conceito que se define naturalmente por recorrência é o fatorial de um número natural.

#### **Definição 2.** Fatorial

Define-se o fatorial  $n!$  de um número natural  $n$  por:

$$1! = 1 \text{ e } (n+1)! = (n+1).n!$$

Outro conceito que pode ser definindo recorrentemente é a potência de expoente natural.

### Definição 3. Potência de Expoente Natural

Seja  $a$  um número real. Dado um  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se definir a potência  $a^n$  por recorrência.

Seja  $a^1 = a$ . Supondo  $a^n$  definido em  $\mathbb{N}$ , defina  $a^{n+1} = a^n \cdot a$ .

### 3.5. Primeiro Princípio da Indução generalizado

Pode ocorrer que uma determinada proposição seja verdadeira apenas a partir de um determinado  $r \in \mathbb{N}$ , mas não necessariamente para valores menores do que  $r$ . Estes casos podem ser demonstrados pelo Princípio da Indução generalizado.

#### Teorema 2

Sejam  $r$  um número natural e  $P(n)$  uma proposição referente a cada número natural  $n \geq r$  e que satisfaz às duas condições seguintes:

- (1)  $P(r)$  é verdadeira;
- (2) para todo  $n \geq r$ , se  $P(n)$  é verdadeira, então  $P(n+1)$  também é verdadeira.

Nestas condições,  $P(n)$  é verdadeira para todo número natural  $n \geq r$ .

#### Demonstração

Seja  $X$  o conjunto de todos os números naturais  $n$  para os quais a proposição  $P(r+n-1)$  é verdadeira, isto é:

$$X = \{ n \in \mathbb{N}; P(r+n-1) \text{ é verdadeira} \}$$

Pela condição (1),  $P(r) = P(r+1-1)$  é verdadeira, isto é,  $1 \in X$ . E, pela condição (2), se  $P(r+n-1)$  é verdadeira, então

$$P((r+n-1)+1) = P(r+(n+1)-1)$$

também é verdadeira, isto é, se  $n \in X$ , então  $n+1 \in X$ . Logo, pelo Axioma da Indução,  $X$  é o conjunto dos números naturais:  $X = \mathbb{N}$ , isto é, a proposição  $P(r+n-1)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, a proposição  $P(n)$  é verdadeira para todo número natural  $n \geq r$ .

No teorema 2, é feita uma generalização do Primeiro Princípio de Indução Matemática. Isto permite aplicá-lo em situações em que uma proposição vale para todos os números naturais a partir de um determinado valor.

#### Aplicação 1. Demonstrar a proposição:

$$P(n): 2^n < n!, \text{ para todo natural } n \geq 4.$$

### Demonstração

(1)  $P(4)$  é verdadeira, visto que  $2^4 = 16 < 24 = 4!$

(2) Supõe-se que a proposição  $P(n)$  é verdadeira, isto é, que:

$$P(n): 2^n < n! , \text{ para } n \geq 4.$$

Então, por ser  $2 < n+1$  para  $n \geq 4$ , tem-se:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < n! \cdot (n+1) \text{ que equivale a } 2^{n+1} < (n+1)! .$$

isto é, a proposição  $P(n+1)$  é verdadeira. Logo pelo Teorema 2, a  $P(n)$  é válida para todo número natural  $n \geq 4$ .

Observa-se que a proposição  $P(n)$  é falsa para  $n = 1, 2, 3$ , pois, tem-se:

$$2^1 = 2 > 1 = 1! , 2^2 = 4 > 2 = 2! , 2^3 = 8 > 6 = 3!$$

### 3.6. Segundo Princípio da Indução

Em determinadas situações, ao fazer uma demonstração por indução, na passagem de  $n$  para  $n+1$ , sente-se a necessidade de admitir que a proposição é válida não apenas para  $n$  mas para todos os números naturais menores do que ou iguais a  $n$ . A justificativa de um raciocínio deste tipo se encontra no Segundo Princípio da Indução, conforme é apresentado a seguir:

**Proposição 1.** (Segundo Princípio da Indução) Seja  $X$  um subconjunto de  $N$  que satisfaz a condição:

(1) Dado  $n \in N$  qualquer, se todos os números naturais menores do que  $n$  pertencem a  $X$ , então  $n \in X$ .

Nesta condição, o conjunto  $X$  coincide com  $N$ , isto é,  $X = N$ .

### Demonstração

De fato, supondo, por absurdo, que  $X \neq N$ , isto é, que  $N - X \neq \emptyset$ . Pelo Princípio da Boa Ordenação  $N - X$  tem um elemento mínimo. Seja  $n$  o menor elemento de  $N - X$ , ou



seja, o menor número natural que não pertença a  $X$ . Isto quer dizer que todos os números menores do que  $n$  pertencem a  $X$ . Mas, então pela afirmação (1),  $n \in X$ , uma contradição. Assim sendo  $N - X = \emptyset$ , isto é  $X = N$ .

Se um conjunto  $X \subset N$  satisfaz condição (1), para que um número natural  $n$  não pertença a  $X$  é preciso que exista algum número natural  $r < n$  tal que  $r \notin X$ . Em particular, se  $n=1$  então a hipótese  $1 \notin X$  não pode ser cumprida, pois não existe número natural menor do que 1. Noutras palavras, a condição (1) contém implicitamente a afirmação de que  $1 \in X$ . Deste modo ao usar o Segundo Princípio de Indução, não é preciso afirmar que 1 pertence a  $X$ .

O Segundo Princípio da Indução pode ser reescrito, na linguagem de proposição, do seguinte modo:

**Teorema 3.** (Segundo Princípio da Indução) Seja  $P(n)$  uma propriedade referente a números naturais que satisfaz a condição:

(1) Dado um  $n \in N$  qualquer, se  $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n)$  são verdadeiras, então  $P(n+1)$  é verdadeira.

Então  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in N$ .

### Demonstração

Seja  $X = \{n \in N; P(n) \text{ é verdadeira}\}$ . De acordo com condição (1), se  $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n)$  são verdadeiras, isto é, se  $1, 2, 3, \dots, n \in X$ , então  $P(n+1)$  é verdadeira, isto é,  $(n+1) \in X$ . Pela Proposição 1, demonstrado acima, podemos concluir que  $X = N$ . Logo,  $P(n)$  vale para todos os números naturais.

No primeiro princípio de indução, dado um número natural  $k$  qualquer, tentamos provar que  $P(k+1)$  é verdadeira baseado, apenas, na hipótese de que  $p(k)$  é verdadeira. Já no segundo princípio de indução, prova-se que  $P(k+1)$  é verdadeira baseado no fato de que as proposições  $P(1), P(2), P(3), \dots, P(k)$  são todas verdadeiras, ou seja, em vez de assumir que apenas  $P(k)$  é verdadeira, pode-se assumir que  $P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdadeiros. Isto dá mais apoio e consistência a demonstração.

### 3.7. Segundo Princípio de Indução generalizado

Para concluir a fundamentação teórica do princípio da indução matemática, é enunciado, e demonstrado, o segundo princípio de indução na forma generalizada.

**Teorema 4.** (Segundo Princípio da Indução generalizado) Seja  $r$  um número natural fixo e seja  $P(n)$  uma propriedade referente a cada número natural  $n \geq r$  e que satisfaz as condições:

(1)  $P(r)$  é verdadeira;

(2) Para todo número natural  $k > r$ , se  $P(n)$  é verdadeira para todo o número natural  $n$  tal que  $r \leq n < k$ , então  $P(k)$  é verdadeira.

Então  $P(n)$  é verdadeira para todo número natural  $n \geq r$ .

#### Demonstração

Seja  $X$  o conjunto de todos os números naturais  $n \geq r$  para os quais a proposição  $P(n)$  é falsa, isto é:

$$X = \{ n \in \mathbb{N}; n \geq r \text{ e } P(n) \text{ é falsa} \}.$$

Supõe-se, por absurdo, que  $X$  não é vazio. Então pelo Princípio da Boa Ordenação o conjunto  $X$  tem um elemento mínimo. Seja  $m$  o menor elemento de  $X$ .

Pela condição (1),  $r \notin X$ , de modo que  $m > r$ , e portanto  $P(n)$  é verdadeira para todo  $r \leq n < m$ . Assim sendo, pela condição (2),  $P(m)$  também é verdadeira e  $m \notin X$ , o que é uma contradição, pois  $m \in X$ . Logo, o conjunto  $X$  é vazio, e a proposição  $P(n)$  é verdadeira para todo número natural  $n \geq r$ .

## 4. APLICAÇÕES DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

O Princípio de Indução Matemática tem diversas aplicações na matemática estudada na educação básica. Algumas destas aplicações são teoremas importantes e bastante conhecidos. Este capítulo apresenta algumas delas, bem como alguns resultados e proposições encontrados em diversos conteúdos estudados nesse segmento educacional.

### 4.1. Aplicações algébricas

#### 4.1.1. Progressões Aritméticas e Geométricas

##### **Aplicação 1** (Expressão do Termo Geral de uma P.A.)

Numa P.A. em que o primeiro termo é  $a_1$  e a razão é  $r$ , o  $n$ -ésimo termo é dado pela expressão

$$a_n = a_1 + (n-1).r .$$

##### **Demonstração**

A prova será feita por indução sobre  $n$ . Fixemos  $a_1, r \in \mathbb{R}$ .

(1) Para  $n = 1$  a expressão é verdadeira, pois  $a_1 = a_1 + (1-1).r$  .

(2) Admite-se, como hipótese de indução, que a expressão é verdadeira para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Deve-se mostrar que para  $n+1$  a fórmula continua válida. De fato, por definição de P.A., tem-se que  $a_{n+1} = a_n + r$ . Deste modo, pela hipótese de indução, pode-se escrever:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1).r + r = a_1 + [(n-1)+1].r = a_1 + [(n+1)-1].r ,$$

mostrando que a expressão é válida para  $n+1$ . Então  $a_n = a_1 + (n-1).r, \forall n \in \mathbb{N}$ .

##### **Aplicação 2** (Soma dos $n$ primeiros termos de uma P.A.)

Outro resultado matemático encontrado na Educação Básica é a expressão da soma dos  $n+1$  primeiros termos de uma PA, onde o primeiro termo é  $a_1$  e a razão é  $r$ . Ela é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}. \quad (1)$$

### Demonstração

A demonstração, mais frequentemente, encontrada desta expressão é feita usando o seguinte artifício algébrico:

Considera-se as igualdades (2) e (3), dadas abaixo:

$$S_n = a_1 + (a_1+r) + (a_1+2r) + \dots + (a_1+(n-1)r) \quad (2)$$

$$S_n = (a_1+(n-1)r) + (a_1+(n-2)r) \dots + (a_1+r) + a_1 \quad (3)$$

Somando, membro a membro, (2) e (3), obtém-se:

$$2.S_n = [2a_1 + (n-1)r] + [2a_1 + (n-1)r] + \dots + [2a_1 + (n-1)r] \quad \Rightarrow$$

$$2.S_n = [2a_1 + (n-1)r].n \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1).r].n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r].r}{2} = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}.$$

No entanto, este resultado matemático pode ser validado pelo Princípio da Indução Matemática, conforme é mostrado a seguir.

Para  $n=1$  a expressão é verdadeira, pois:

$$S_1 = \frac{(a_1 + a_1).1}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1.$$

Supondo que a expressão é válida para  $n \in \mathbb{N}$ , isto é, que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

prova-se que a igualdade (1) vale também para  $n+1$ . Com efeito, escrevendo:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + a_{n+1} &= \frac{(a_1 + a_n).n}{2} + a_1 + n.r \\ &= \frac{(a_1 + a_n).n + 2a_1 + 2.n.r}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_n + r).n + 2.a_1 + nr}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a_1 + a_{n+1}).n + (a_1 + a_1 + nr)}{2} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1}).n + (a_1 + a_{n+1})}{2} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1}).(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1}).(n+1)}{2}$ . Pelo Princípio da Indução Matemática, pode-

se concluir que a expressão vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Aplicação 3 (Expressão de Termo Geral de uma P.G.)

Na P.G. em que o primeiro termo é  $a_1$  e a razão é  $q$ , o  $n$ -ésimo termo é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

### Demonstração

A prova será feita por indução sobre  $n$ . Fixados  $a_1, q \in \mathbb{R}$ , tem-se que:

(1) Para  $n = 1$  a expressão é verdadeira, pois  $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$ .

(2) Supõe-se, como hipótese de indução, que a expressão é verdadeira para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é, que

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Deve-se mostrar que para  $n+1$  a fórmula continua válida. De fato, por definição de P.G., temos que  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ . E, pela hipótese de indução, pode-se escrever:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1+1} = a_1 \cdot q^n,$$

mostrando que a fórmula é válida para  $n+1$ . Então  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### Aplicação 4 (Soma dos $n$ primeiros termos de uma P.G.)

Numa progressão geométrica  $(a_n)$  de primeiro termo  $a_1$  e razão  $q$ , a soma de seus  $n$  primeiros termos é dada pela expressão:

$$G_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad (1)$$

### Demonstração

Adota-se que  $q \neq 1$ , pois de outro modo, o último membro de (1) não teria significado.

Procedendo por indução sobre  $n$ , tem-se, inicialmente, que igualdade (1) vale para  $n=1$ , visto que  $a_1 = a_1 \cdot \frac{q-1}{q-1} = \frac{a_1(q^1-1)}{q-1}$ .

Admitindo que a igualdade (1) é verdadeira para  $n$ , isto é, que:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}.$$

prova-se que a igualdade (1) vale para  $n+1$ . De fato,

$$\begin{aligned} a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n &= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} + a_1q^n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1) + (q-1)a_1 \cdot q^n}{q-1} = \\ \frac{a_1q^n - a_1 + a_1 \cdot q^{n+1} - a_1 \cdot q^n}{q-1} &= \frac{a_1 \cdot (q^{n+1} - 1)}{q-1} \end{aligned}$$

Este resultado encontrado é precisamente a igualdade (1) para  $n+1$ . Logo, pelo princípio da indução matemática a expressão  $G_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$  vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Aplicação 5 (Progressão aritmético-geométrica)

Uma progressão aritmético-geométrica é uma sequência de números reais  $(a_n)$  tal que  $a_1$  é dado e, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que

$$a_{n+1} = q \cdot a_n + r,$$

onde  $q$  e  $r$  são números reais dados, com  $q \neq 1$  e  $r \neq 0$ .

a) A expressão do termo geral de uma progressão aritmético-geométrica é dada por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q-1}$$

### Demonstração

A prova será feita por indução sobre  $n$ . Fixemos  $q, r \in \mathbb{R}$ , onde  $q \neq 1$  e  $r \neq 0$ .

(1) Para  $n = 1$  a fórmula é verdadeira, pois  $a_1 = a_1 \cdot q^0 + r \cdot \frac{q^0 - 1}{q - 1} = a_1$ .

(2) Supõe-se, como hipótese de indução, que a expressão é verdadeira para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

Mostra-se, então, que para  $n+1$  a fórmula continua válida. De fato, por definição, tem-se que  $a_{n+1} = q \cdot a_n + r$  e daí pode-se escrever:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q \cdot a_n + r = q \cdot \left( a_1 \cdot q^{n-1} + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right) + r \\ &= a_1 \cdot q^n + q \cdot r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + r \\ &= a_1 \cdot q^n + r \cdot \left( q \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + 1 \right) \\ &= a_1 \cdot q^n + r \cdot \left( \frac{q^n - q}{q - 1} + \frac{q - 1}{q - 1} \right) \\ &= a_1 \cdot q^n + r \cdot \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \end{aligned}$$

mostrando que a expressão é válida para  $n+1$ . Então  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Seja  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  a soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmético-geométrica. A expressão que permite calcular  $S_n$  é:

$$S_n = qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1}{1 - q} + r \frac{n - 1}{1 - q}.$$

### Demonstração

De modo análogo, aplica-se indução sobre  $n$ . Fixados  $q, r \in \mathbb{R}$ , onde  $q \neq 1$ .

(1) Para  $n = 1$  a expressão é verdadeira, pois:

$$S_1 = qr \frac{q^0 - 1}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^1 - 1}{1 - q} + r \frac{1 - 1}{1 - q} = a_1.$$

(2) Supõe-se, como hipótese de indução, que a expressão é verdadeira para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é, que

$$S_n = qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1}{1-q} + r \frac{n-1}{1-q}.$$

Mostra-se, então, que para  $n+1$  a expressão continua verdadeira. Com efeito, por definição, tem-se que:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Assim, é possível desenvolver como segue:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

$$\begin{aligned} &= \left( qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1}{1-q} + r \frac{n-1}{1-q} \right) + \left( a_1 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \right) \\ &= qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} + r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} - a_1 \frac{q^n - 1}{1-q} + a_1 \cdot q^n + r \frac{n-1}{1-q} \\ &= qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} + r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} - a_1 \frac{q^n - 1}{1-q} + a_1 \cdot q^n + r \frac{n-1}{1-q} + r \cdot \frac{1}{1-q} - r \cdot \frac{1}{1-q} \\ &= r \cdot \left( q \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} + \frac{q^n - 1}{q-1} - \frac{1}{1-q} \right) - a_1 \cdot \left( \frac{q^n - 1}{1-q} - q^n \right) + r \cdot \left( \frac{n-1}{1-q} + \frac{1}{1-q} \right) \\ &= r \cdot \left( \frac{q^n - q + (1-q) \cdot (1-q^n) - (1-q)}{(1-q)^2} \right) - a_1 \cdot \left( \frac{q^n - 1 - (1-q) \cdot q^n}{1-q} \right) + r \cdot \left( \frac{n-1+1}{1-q} \right) \\ &= r \cdot \left( \frac{q^n - q + 1 - q^n - q + q^{n+1} - 1 + q}{(1-q)^2} \right) - a_1 \cdot \left( \frac{q^n - 1 - q^n + q^{n+1}}{1-q} \right) + r \cdot \frac{n}{1-q} \\ &= r \cdot \left( \frac{-q + q^{n+1}}{(1-q)^2} \right) - a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n}{1-q} \\ &= r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n}{1-q} \end{aligned}$$

mostrando que a fórmula é válida para  $n+1$ . Deste modo, a expressão

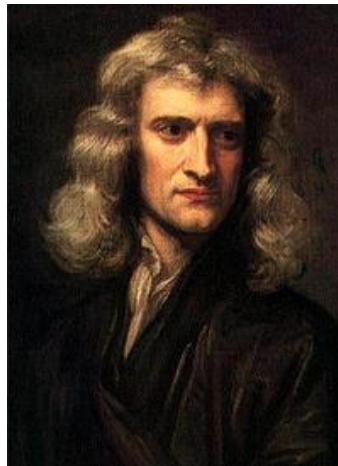
$$S_n = qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1}{1-q} + r \frac{n-1}{1-q},$$

é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



### 4.1.2. Teoremas Binomiais

#### Aplicação 1 (Binômio de Newton)



**Figura 3:** Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 de janeiro de 1643 — Londres, 31 de março de 1727) foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático.

Os números naturais definidos por  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ , onde  $n, p \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq p$ , são denominados *coeficientes binomiais*. Prova-se que:

a) Para dois números  $n, p \in \mathbb{N}$  quaisquer, com  $n \geq p$  tem-se que

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{Relação de Stifel})$$

b)  $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p$ , para  $n \geq 0$  e  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . (Binômio de Newton)

#### Demonstrações

a ) Para dois números  $n, p \in \mathbb{N}$  quaisquer, onde  $n \geq p$  verifica-se que

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{Relação de Stifel}).$$

A demonstração da proposição acima é feita por recursos puramente algébricos, utilizando a definição de coeficiente binomial  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

Desenvolvendo o 2º membro da relação de Stifel, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{n-p} \right) \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \cdot \frac{n}{p(n-p)} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} \\
 &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}
 \end{aligned}$$

que é o 1º membro da igualdade.

**b)** O desenvolvimento do binômio de Newton  $(a+b)^n$  é dado pela expressão  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ , para  $n \geq 0$  e  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

### Demonstração

Procede-se por indução sobre  $n \in \mathbb{N}$ .

O caso  $n=0$  é claramente válido, pois  $(a+b)^0 = 1$  para todo  $(a+b) \neq 0$ . Por isto, toma-se como base da indução o caso  $n=1$ , onde temos:

$$(a+b)^1 = 1.a + 1.b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$$

Isto mostra que o teorema é verdadeiro quando  $n=1$ .

Supondo que o teorema é verdadeiro para  $n=k \in \mathbb{N}$ , isto é, que

$$(a+b)^k = \binom{k}{0} a^k b^0 + \binom{k}{1} a^{k-1} b^1 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k} a^0 b^k$$

pode-se escrever que:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b) \cdot (a+b)^k$$

$$= (a+b) \cdot \left[ \binom{k}{0} a^k b^0 + \binom{k}{1} a^{k-1} b^1 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k} a^0 b^k \right] \quad (\text{hipótese})$$

$$= a \cdot \left[ \binom{k}{0} a^k b^0 + \binom{k}{1} a^{k-1} b^1 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k} a^0 b^k \right] +$$

$$b \cdot \left[ \binom{k}{0} a^k b^0 + \binom{k}{1} a^{k-1} b^1 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k} a^0 b^k \right]$$

$$= \left[ \binom{k}{0} a^{k+1} b^0 + \binom{k}{1} a^k b^1 + \binom{k}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} a^1 b^k \right] +$$

$$\left[ \binom{k}{0} a^k b^1 + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^3 + \dots + \binom{k}{k-1} a^1 b^k + \binom{k}{k} a^0 b^{k+1} \right] =$$

$$\binom{k}{0} a^{k+1} b^0 + \left[ \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] a^k b^1 + \left[ \binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] a^{k-1} b^2 + \dots + \left[ \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] a^1 b^k + \binom{k}{k} a^0 b^{k+1}$$

(agrupados os termos semelhantes)

$$= \binom{k}{0} a^{k+1} b^0 + \binom{k+1}{1} a^k b^1 + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k} a^1 b^k + \binom{k}{k} a^0 b^{k+1}$$

(relação de Stifel)

$$= \binom{k+1}{0} a^{k+1} b^0 + \binom{k+1}{1} a^k b^1 + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k} a^1 b^k + \binom{k+1}{k+1} a^0 b^{k+1}$$

Por definição,  $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$  e  $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$ , e, daí é válido escrever:

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} b^0 + \binom{k+1}{1} a^k b^1 + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k} a^1 b^k + \binom{k+1}{k+1} a^0 b^{k+1},$$

provando que o teorema é verdadeiro para  $n = k+1$ .

Pelo Princípio da Indução Matemática, tem-se que a expressão acima é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$  ( e  $p$  arbitrário).

O resultado acima é conhecido como *teorema binomial*, frequentemente atribuído a Newton.

### Corolário (Teorema das Linhas)

Para  $n \geq 0$ , temos que

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k,$$

ou seja, a soma dos elementos da linha  $k$  do triângulo de Pascal é igual a  $2^k$ .

### Demonstração

Basta tomar  $a = b = 1$  e aplicar a fórmula  $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ . De fato:

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} = (1 + 1)^k = 2^k.$$

### Aplicação 2 (Teorema das Colunas)

Para  $n \geq 0$ , verifica-se que  $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$ .

### Demonstração

Fixado um  $k$  arbitrário, procede-se por indução sobre  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $0 \leq k \leq n$ .

Inicialmente, considera-se a sentença aberta:

$$P(n): \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

Verifica-se que  $P(0)$  e  $P(1)$  são verdadeiras, pois:

Para  $n = 0$ , tem-se  $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$ . Por outro lado, para  $n = 1$  tem-se

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = 1 + 1 + k = 2 + k = \binom{k+2}{1} = \binom{k+2}{k+1}.$$

Como hipótese de indução, supõe-se que  $P(n)$  é válida para  $n = 0, 1, 2, \dots, p$ , e a partir daí, prova-se que  $P(n)$  é verdadeira para  $n = p+1$ . Com efeito, é válido escrever:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{k+p}{k} + \binom{k+p+1}{k} = \binom{k+p+1}{k+1} + \binom{k+p+1}{k} = \binom{k+p+2}{k+1}$$

Portanto,  $P(n)$  é válida para  $n = p+1$ . O resultado segue pelo Princípio da Indução Matemática.

### Aplicação 3 (Teorema das Diagonais)

Para todo  $n \geq 0$ , verifica-se que

$$S_n = \sum_{i=0}^n \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}.$$

### Demonstração

Deve-se provar que a sentença aberta:

$$P(n): \binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{n} \text{ vale para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Inicialmente, nota-se que  $P(0)$  e  $P(1)$  são verdadeiras. De fato:

Para  $n = 0$ , tem-se  $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$ . Por outro lado, para  $n = 1$  tem-se

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} = 1 + k + 1 = k + 2 = \binom{k+2}{2}.$$

Supondo que  $P(n)$  é válida para  $n = 0, 1, 2, \dots, p$ , prova-se que  $P(n)$  continua verdadeira para  $n = p+1$ . Com efeito,

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+n}{n} + \binom{k+n+1}{n+1} = \binom{k+n+1}{n} + \binom{k+n+1}{n+1} = \binom{k+n+2}{n+1}$$

Portanto,  $P(n)$  é válida para  $n = p+1$ . O resultado segue pelo Princípio da Indução Matemática.

#### 4.1.3. Desigualdades algébricas



**Figura 4:** Jacques Bernoulli (Basileia, 27 de Dezembro de 1654 — Basileia, 16 de Agosto de 1705), foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal

#### Aplicação 1 (Desigualdade de Bernoulli)

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\forall x \in \mathbb{R}$ , com  $x \geq -1$ , verifica-se a desigualdade

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

#### Demonstração

Seja  $P(n)$ :  $(1+x)^n \geq 1+nx$ . Tem-se que:

**(1)**  $P(1)$  é verdadeira, visto que, para  $n=1$ , tem-se:

$$(1+x)^1 = 1+x \geq 1+x = 1 + 1 \cdot x$$

**(2)** Supõe-se, como hipótese de indução, que  $P(k)$  é verdadeira, isto é, que  $(1+x)^k \geq 1 + kx$ .

Deve-se provar que  $P(k+1)$  é verdadeira. De fato,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x) \cdot (1+x)^k \geq (1+x) \cdot (1+kx) = 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

pois  $kx^2 \geq 0$ . Portanto,  $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$ , mostrando que  $P(k+1)$  é verdadeira.

Pelo princípio da indução matemática, a desigualdade de Bernoulli está provada.

## Aplicação 2 (Desigualdade Trigonométrica)

Para  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \geq 1$ , verifica-se a seguinte desigualdade

$$|\operatorname{sen}(nx)| \leq n |\operatorname{sen}x|$$

### Demonstração

Seja a proposição:

P(n): se  $n \geq 1$ , então  $|\operatorname{sen}(nx)| \leq n \cdot |\operatorname{sen}x|$ .

Inicialmente, verifica-se que P(1) é válida, pois:

$$|\operatorname{sen}(1 \cdot x)| = |\operatorname{sen}(x)| = 1 \cdot |\operatorname{sen}x|$$

Supondo que P(k) é verdadeira, ou seja, que

$$|\operatorname{sen}(kx)| \leq k \cdot |\operatorname{sen}x|$$

prova-se que P(k+1) também é verdadeira. Para isto escrevamos:

$$|\operatorname{sen}(k+1)x| = |\operatorname{sen}(x+kx)| = |\operatorname{sen}x \cdot \cos kx + \operatorname{sen}kx \cdot \cos x|.$$

Por outro lado, tem-se que:  $|x+y| \leq |x|+|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  e  $|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Então,

$$|\operatorname{sen}(k+1)x| = |\operatorname{sen}x \cdot \cos kx + \operatorname{sen}kx \cdot \cos x| \leq |\operatorname{sen}x \cdot \cos kx| + |\operatorname{sen}kx \cdot \cos x| \leq |\operatorname{sen}x| + |\operatorname{sen}kx|$$

Como, por hipótese,  $|\operatorname{sen}(kx)| \leq k \cdot |\operatorname{sen}x|$ , pode-se escrever:

$$|\operatorname{sen}(k+1)x| \leq |\operatorname{sen}x| + |\operatorname{sen}kx| \leq |\operatorname{sen}x| + k \cdot |\operatorname{sen}x| = (k+1) \cdot |\operatorname{sen}x|$$

Isto mostra que a desigualdade vale para  $n = k+1$ . O resultado segue, por indução matemática.

### Aplicação 3.

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , constata-se que  $\ln n < n$ , onde  $\ln$  denota o logaritmo natural.

### Demonstração

Inicialmente, tem-se que  $\ln x < x$  equivale a  $x < e^x$  para  $x \in \mathbb{R}$  e  $x > 0$ . Deste modo, pode-se provar, apenas, a seguinte proposição.

$$P(n): n < e^n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

Tem-se que  $P(1)$  é verdadeira pois  $1 < e^1 = 2,718 \dots$ .

Supondo que  $P(n)$  é válida, isto é, que  $n < e^n$ , prova-se que  $P(n+1)$  é verdadeira. De fato, como  $e > 2$  e  $n \geq 1$ , pode-se escrever:

$$e-1 > 1 \Rightarrow e-1 > \frac{1}{e^n} \Rightarrow e > 1 + \frac{1}{e^n} \Rightarrow e^{n+1} > e^n + 1.$$

Por hipótese,  $n < e^n$ . Daí  $e^{n+1} > n+1$ .

Logo,  $P(n+1)$  é verdadeira e pode-se concluir que  $P(n)$  é verdadeira para todo número natural  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4.1.4. Somatórios

### Aplicação 1

Para  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n i!$  é um número ímpar.

### Demonstração

A prova será feita por indução sobre  $n$ . Seja  $P(n)$  a sentença aberta:

$$P(n): \sum_{i=1}^n i! \text{ é um número ímpar.}$$



A sentença  $P(1)$  é verdadeira. De fato  $\sum_{i=1}^1 1! = 1! = 1$  é ímpar.

Admitindo que  $P(n)$  é verdadeira para  $n = p$ , isto é, que

$$\sum_{i=1}^p i! \text{ é um número ímpar.}$$

deve-se provar que  $P(n)$  continua verdadeira para  $n = p+1$ . Para isto, é válido escrever que:

$$\sum_{i=1}^{p+1} i! = \sum_{i=1}^p i! + (p+1)! = \sum_{i=1}^p i! + 1.2.3. \dots . (p+1).$$

Por hipótese de indução, tem-se que  $\sum_{i=1}^p i!$  é ímpar. Como  $1.2.3. \dots .(n+1)$  é par

temos que  $\sum_{i=1}^{p+1} i! = \sum_{i=1}^p i! + 1.2.3. \dots . (n+1)$  é ímpar, mostrando que  $P(n+1)$  é verdadeira. Pelo

Princípio da Indução Matemática, tem-se que  $S_n = \sum_{i=1}^n i!$  é um número ímpar é um número ímpar para todo  $n \geq 1$ .

## Aplicação 2

Para  $\alpha \in \text{Re } \alpha \neq 2k\pi$  e  $n \geq 1$  natural, verifica-se que

$$\sum_{i=1}^n \text{sen } i\alpha = \frac{\text{sen } \frac{n\alpha}{2} \cdot \text{sen } \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}}.$$

## Demonstração

Considerar a proposição  $P(n)$  dada por:

$$P(n): \sum_{i=1}^n \text{sen } i\alpha = \frac{\text{sen } \frac{n\alpha}{2}}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}} \cdot \text{sen } \frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

Nota-se que  $P(1)$  é verdadeira, pois,

$$n = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^1 \operatorname{sen} i\alpha = \operatorname{sen} 1 \cdot \alpha = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{1 \cdot \alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{(1+1)\alpha}{2}$$

Supondo que P(n) é verdadeira, ou seja, que

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{sen} i\alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

deve-se mostrar que P(n+1) é válida. Para isto, vamos escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{sen} i\alpha &= \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} i\alpha + \operatorname{sen} (n+1)\alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2} + \operatorname{sen} (n+1)\alpha \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2} + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \alpha \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{sen} u \cdot \cos v = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} (u+v) + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} (u-v)$ , então pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{sen} i\alpha &= \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[ \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} + 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+2)\alpha}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{(-n)\alpha}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[ \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} + 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+2)\alpha}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[ \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} + \left( \operatorname{sen} \frac{(n+2)\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{(n+2)\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Mostrando que  $P(n+1)$  é, de fato, verdadeira. O princípio da Indução Matemática permite concluir que a proposição  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Aplicação 3

Para  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq 2k\pi$  e  $n \geq 1$ ,  $\sum_{i=1}^n \cos i\alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}$

### Demonstração

Seja  $P(n)$  a sentença aberta definida por

$$P(n): \sum_{i=1}^n \cos i\alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

Tem-se que  $P(1)$  é verdadeira, pois,

$$n = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^1 \cos i\alpha = \cos 1 \cdot \alpha = \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{1 \cdot \alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(1+1)\alpha}{2}$$

Admitindo que  $P(n)$  é verdadeira, ou seja, que

$$\sum_{i=1}^n \cos i\alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

deve-se mostrar que P(n+1) é válida. Para isto, escreve-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \cos(i\alpha) &= \sum_{i=1}^n \cos(i\alpha) + \cos(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + \cos(n+1)\alpha \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + \cos \frac{(2n+2)\alpha}{2} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(2n+2)\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \left( \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(2n+2)\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{sen} u \cdot \cos v = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(u+v) + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(u-v)$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \cos i\alpha &= \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \left( \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(2n+2)\alpha}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \left( 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(2n+2)\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\alpha}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{(-\alpha)}{2} \right) + 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{(2n+3)\alpha}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{-(2n+1)\alpha}{2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[ \left( \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) + \left( \operatorname{sen} \frac{(2n+3)\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\alpha}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[ \operatorname{sen} \frac{(2n+3)\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right]$$

Por outro lado,  $\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{u-v}{2} \cdot \cos \frac{u+v}{2}$ . Logo, pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \cos i\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[ \operatorname{sen} \frac{(2n+3)\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[ 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(n+2)\alpha}{2} \right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{(n+2)\alpha}{2}$$

Mostrando que  $P(n+1)$  é, de fato, verdadeira. O princípio da Indução Matemática permite concluir que a proposição  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Aplicação 4

Para todo  $n \geq 1$ ,  $1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p = \sum_{k=1}^n k^p$  é um polinômio de grau  $p+1$  em  $n$ .

#### Demonstração

A prova será feita por indução sobre  $p$ .

(1) Para  $p = 1$  o teorema é verdadeiro. De fato,

$$\sum_{k=1}^n k^1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \text{ é um polinômio de 2 em } n.$$

(2) Admite-se que  $\sum_{k=1}^n k^m$  é um polinômio de grau  $m+1$  em  $n$ , para todo  $m = 1, 2, 3, \dots, p$ .

Deve-se mostrar que o mesmo vale para  $m + 1$ , ou seja, mostrar que  $\sum_{k=1}^n k^{m+1}$  é um polinômio de grau  $m+2$  em  $n$ .

Seja  $(k+1)^{m+2} = k^{m+2} + (m+2) \cdot k^{m+1} + P(k)$ , onde  $P(k)$  é um polinômio de grau  $m$  em  $k$ , tem-se que:

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{m+2} = \sum_{k=1}^n k^{m+2} + (m+2) \sum_{k=1}^n k^{m+1} + F(n).$$

onde  $F(n)$  é um polinômio de grau  $m+1$  em  $n$ , por hipótese de indução.

Eliminando os termos comuns dos primeiros somatórios, obtém-se:

$$(n+1)^{m+2} = 1 + (m+2) \sum_{k=1}^n k^{m+1} + F(n).$$

e, conseqüentemente,

$$\sum_{k=1}^n k^{m+1} = \frac{(n+1)^{m+2} - 1 - F(n)}{m+2},$$

é um polinômio de grau  $m+2$  em  $n$ .

**Corolário.** Se  $F$  é um polinômio de grau  $p$  então  $\sum_{k=1}^n F(k)$  é um polinômio de grau  $p+1$  em  $n$ .

### Aplicação 5 (Soma Telescópica)

Verifica-se por indução que

$$\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1.$$

#### Demonstração

A prova será feita por indução sobre  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $n=1$ , tem-se que

$$\sum_{k=1}^1 (x_{k+1} - x_k) = x_2 - x_1$$

Supondo que a igualdade vale para  $n$ , isto é, que

$$\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$$

deve-se mostrar que ela vale para  $n+1$ . Com efeito,

$$\sum_{k=1}^{n+1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) + (x_{(n+1)+1} - x_{(n+1)}) = (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_1) = x_{n+2} - x_1$$

O resultado segue por indução matemática.

#### 4.1.5. Propriedades do Determinante de uma matriz

Esta seção apresenta, e demonstra por indução matemática, dois resultados importantes referentes ao determinante de uma matriz quadrada de ordem  $n \geq 1$ , partindo da hipótese de que matrizes quadradas e determinantes são noções conhecidas.

Adota-se a notação  $|A|$  para indicar o determinante da matriz quadrada  $A$ .

#### Aplicação 1 (Determinante da Matriz Transposta)

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Para  $n \geq 1$ , verifica-se que  $|A| = |A^t|$ , onde  $A^t$  é a matriz transposta da matriz  $A$ .

O seguinte teorema é um resultado necessário, pois será usado durante a demonstração.

### Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz  $M$ , de ordem  $n \geq 2$ , é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Este resultado é, aqui, admitido sem demonstração.

### Demonstração (da Aplicação 1)

Seja  $P(n)$  a proposição: se  $n \geq 1$  e  $A$  é uma matriz de ordem  $n$ , então  $|A| = |A^t|$ .

$$n = 1 \Rightarrow |A| = a_{11} = |A^t|$$

$n = 2 \Rightarrow$  Mostra-se que  $|A| = |A^t|$ , como segue

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A^t| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Admite-se que a proposição  $P(n)$  é verdadeira para  $n = 1, 2, 3, \dots, k-1$ . Deve-se mostrar que  $P(n)$  continua verdadeira para  $n=k$ , isto é, que  $|A| = |A^t|$ , onde  $A$  é uma matriz de ordem  $k$ .

Seja  $B = A^t$ . Se  $A_{ij}$  é o menor complementar de  $a_{ij}$  da matriz  $A$ , então  $A_{ij}^t = B_{ji}$  é o menor complementar  $b_{ji}$  de  $B$ . Desenvolvendo  $|A|$  segundo os elementos da primeira linha, obtém-se:

$$|A| = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + \dots + (-1)^{1+k} a_{1k} \cdot |A_{1k}| \quad (\text{Laplace})$$

Desenvolvendo  $|B|$  segundo os elementos da primeira coluna, tem-se:

$$|B| = b_{11} \cdot |B_{11}| - b_{21} \cdot |B_{21}| + \dots + (-1)^{k+1} b_{k1} \cdot |B_{k1}| \quad (\text{Laplace})$$



Como  $B = A^t$ ,  $b_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, \dots, k$ . Pela hipótese de indução,  $|A_{ij}| = |B_{ji}|$  para todo  $i, j = 1, \dots, k$  (os menores são matrizes de ordem  $k-1$ ). Assim,  $|A| = |B|$ .

Logo,  $P(k)$  é verdadeira e conclui-se que  $P(n)$  é verdadeira  $\forall n \geq 1$ .

Esta demonstração foi obtida do Livro Manual de Indução Matemática. Autor: Luís Lopes. Publicado em 1999.

### Aplicação 2 (Troca de Filas Paralelas)

Seja  $M$  uma matriz de ordem  $n \geq 2$ . Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas), obtém-se uma nova matriz  $M'$  tal que  $|M'| = |M|$ .

### Demonstração

Procede-se por indução finita sobre a ordem  $n$  da matriz.

(1) Para  $n = 2$  a propriedade é verdadeira. De fato:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |M| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Trocando as linhas de posição, tem-se que:

$$M' = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow |M'| = -\det M.$$

Trocando as colunas de posição, segue que:

$$M' = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow |M'| = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = |M|.$$

(2) Admitindo que a propriedade é verdadeira para matrizes de ordem  $n$ . Prova-se que ela é válida para matrizes de ordem  $n+1$ .

Toma-se a linha  $i$ , considerando que ela não é nenhuma das duas linhas que foram permutadas.

Desenvolvendo  $|M|$  e  $|M'|$  por essa linha, tem-se:

$$\det M = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \cdot A_{ij} \quad \text{e} \quad \det M' = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \cdot A'_{ij}.$$

Como cada cofator  $A'_{ij}$  é obtido de  $A_{ij}$  trocando de posição duas linhas e, por hipótese de indução,  $D'_{ij} = -D_{ij}$  para todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ , é válido que  $A'_{ij} = -A_{ij}$ ,  $\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ . Portanto,  $|M'| = |M|$ .

Trocando de posição duas colunas, a demonstração seria feita de modo análogo.

#### 4.1.6. Outras aplicações

##### Aplicação 1 (Teorema de De Moivre)

Dados  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Sendo  $i^2 = -1$ , verifica-se que:

$$z = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad z^n = [r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)]^n = r^n \cdot (\cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha)$$

##### Demonstração:

Sabe-se que  $z = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$  é um número complexo de módulo  $r$  e argumento principal  $\alpha$ . Como se pode ver o teorema de Moivre é uma relação que permite obter as potências, de expoente natural, de um número complexo.

A prova será feita por indução sobre  $n$ , para isto observa-se que:

**(1)** O teorema é válido para  $n = 1, 2$ , pois:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad z^1 = [r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)]^1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) = r^1 \cdot (\cos 1 \cdot \alpha + i \cdot \sin 1 \cdot \alpha)$$

$$\begin{aligned} n = 2 \quad \Rightarrow \quad z^2 &= [r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)]^2 = r^2 \cdot (\cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + i^2 \cdot \sin^2 \alpha) \\ &= r^2 \cdot [(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + i \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha] \\ &= r^2 \cdot (\cos 2\alpha + i \cdot \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

**(2)** Supõe-se que para  $n = k$  a fórmula é verdadeira:

$$Z^k = r^k \cdot (\cos k\alpha + i \cdot \sin k\alpha)$$

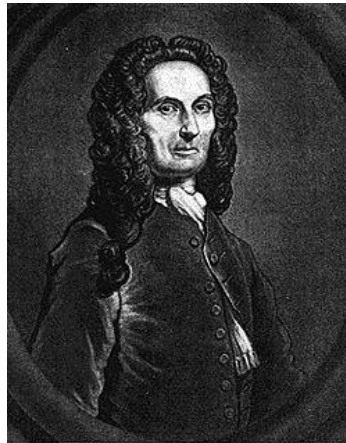
Deve-se mostrar que para  $n = K+1$  a fórmula continua verdadeira, isto é,

$$Z^{k+1} = r^{k+1} \cdot [\cos (k+1)\alpha + i \cdot \operatorname{sen} (k+1)\alpha ]$$

Desenvolvendo  $Z^{k+1}$  e usando a hipótese de indução, tem-se:

$$\begin{aligned} Z^{k+1} &= Z^k \cdot Z = r^k \cdot (\cos k\alpha + i \cdot \operatorname{sen} k\alpha) \cdot r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) \\ &= r^{k+1} \cdot (\cos k\alpha \cdot \cos \alpha + i \cdot \cos k\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha + i \cdot \operatorname{sen} k\alpha \cdot \cos \alpha + i^2 \cdot \operatorname{sen} k\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha) \\ &= r^{k+1} \cdot [ (\cos k\alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} k\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha) + i \cdot (\cos k\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} k\alpha \cdot \cos \alpha) ] \\ &= r^{k+1} \cdot [\cos (k+1)\alpha + i \cdot \operatorname{sen} (k+1)\alpha ] \end{aligned}$$

Portanto,  $Z^{k+1} = r^{k+1} \cdot [\cos (k+1)\alpha + i \cdot \operatorname{sen} (k+1)\alpha ]$ , ou seja, a fórmula de Moivre vale para  $k+1$ . Pelo princípio da indução finita, tem-se que o teorema vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



**Figura 5:** Abraham de Moivre (Champagne, França, 26 de Maio de 1667 —Londres, Reino Unido, 27 de Novembro de 1754) foi um matemático francês famoso pela *fórmula de Moivre*.

## Aplicação 2

Dado um polinômio  $f(x)$  de grau  $m$ , verifica-se que  $f(x)$  tem no máximo  $m$  raízes em  $\mathbb{C}$  (conjunto dos números complexos).

### Demonstração

A prova é feita por indução sobre  $m = \operatorname{gr} (f(x))$ .

(1) Para  $m = 0$ ,  $f(x) = a_0 \neq 0$  não tem raízes em  $\mathbb{C}$  e o resultado é válido.

(2) Supõe-se o teorema verdadeiro para todo polinômio de grau  $m$  e prova-se que ele é verdadeiro para um polinômio  $f(x)$ , tal que  $\operatorname{gr} (f(x)) = m+1$ .

Se  $f(x)$  não tiver raízes em  $C$ , então o teorema ficará provado. Por outro lado, se  $f(x)$  tiver uma raiz  $\alpha$  em  $C$  então:

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$$

onde  $\text{gr}(q(x)) = m$ . Nota-se que, por hipótese de indução, o polinômio  $q(x)$  tem no máximo  $m$  raízes em  $C$ .

Por outro lado, tem-se que:

$$\beta \in C \text{ é raiz de } f(x) \iff 0 = f(\beta) = (\beta - \alpha) \cdot q(\beta)$$

donde tira-se que  $\beta$  é raiz de  $q(x)$  ou  $\beta = \alpha$ . Logo,  $f(x)$  tem no máximo  $n+1$  raízes em  $C$  e o resultado segue por indução matemática.

### Aplicação 3

Se  $A$  é um conjunto finito com  $n$  elementos, então  $P(A)$ , conjunto das partes de  $A$ , tem  $2^n$  elementos.

### Demonstração

Aqui, o número de elementos de  $P(A)$  será indicado por  $|P(A)|$ .

**(1)** A proposição é verdadeira para  $n = 0$ , pois neste caso  $A = \emptyset$  e  $P(A) = \{\emptyset\}$  tem  $1 = 2^0$  elementos.

Do mesmo modo, quando  $n = 1$ ,  $A = \{a\}$  e  $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$  tem  $2 = 2^1$  elementos. Mostrando que proposição vale para  $n = 1$ .

**(2)** Para a hipótese de indução, admite-se que para qualquer conjunto  $A$  com  $k$  elementos vale a igualdade  $|P(A)| = 2^k$ .

Prova-se que o mesmo vale para um conjunto  $A'$  com  $k + 1$  elementos, ou seja,  $|P(A')| = 2^{k+1}$ .

Admitindo, sem perda de generalidade, que  $A' = A \cup \{b\}$ , de modo que,  $b$  é um elemento que está em  $A'$  mas não está em  $A$ , então  $P(A')$  é formado por todos os subconjuntos de  $A$  (que são  $2^k$ ), mais a reunião de cada um desses subconjuntos com  $\{b\}$  (que são outros  $2^k$  conjuntos).

Logo,  $|P(A')| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$  subconjuntos.

Tem-se, pelo princípio da indução, que a afirmação é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## 4.2. Aplicações geométricas

Nesta seção encontram-se alguns resultados geométricos: Pizza de Steiner, fórmula para o cálculo da soma dos ângulos internos e do número de diagonais de um polígono convexo, todos demonstrados pelo uso do princípio de indução, sendo o último deles a famosa relação de Euler para poliedros.

### 4.2.1. Pizza De Steiner

O maior número de partes em que se pode dividir o plano com  $n$  retas é

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

#### Demonstração

Pensando o plano como sendo uma grande pizza, tem-se uma explicação para o nome da proposição.

Prova-se este resultado por indução matemática sobre  $n \in \mathbb{N}$ .

Para  $n=1$ , ou seja, com apenas uma reta obtém-se duas partes. Portanto, a fórmula está correta, pois

$$P(1) = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2$$

Supõe-se que a fórmula vale para  $n$ , isto é, que  $n$  retas dividem o plano em

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ partes.}$$

Deve-se fazer mais uma reta de modo a ter o maior número de partes. Para que isto ocorra a  $(n+1)$  – ésima reta deve intersectar cada uma das  $n$  primeiras retas em pontos que não são de intersecção de duas retas, ou seja, em  $n$  pontos distintos. Deste modo, a

$(n+1)$  –ésima reta produz  $n+1$  novas partes, pois os  $n$  pontos distintos dividem essa reta em  $n+1$  segmentos e cada segmento divide uma região (ou parte) em duas, gerando  $n+1$  novas regiões (ou partes), daí

$$\begin{aligned}
 p(n+1) &= p(n) + (n+1) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) \\
 &= \frac{n(n+1) + 2 + 2(n+1)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2) + 2}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.
 \end{aligned}$$

Mostrando que a fórmula vale também para  $n+1$ . Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática,  $p(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$  vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



**Figura 6:** Jakob Steiner (Utzenstorf, 18 de março de 1796 — Berna, 1 de abril de 1863) foi um matemático suíço que trabalhou principalmente na área de geometria.

#### 4.2.2. Diagonais de um polígono convexo

O número de diagonais de um polígono convexo de  $n$  lados é  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$  para todo  $n \geq 3$ .

#### Demonstração

Sendo  $P(n): d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ , tem-se que:

(1)  $P(3)$  é verdadeira, pois

$$n = 3 \Rightarrow d_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$$

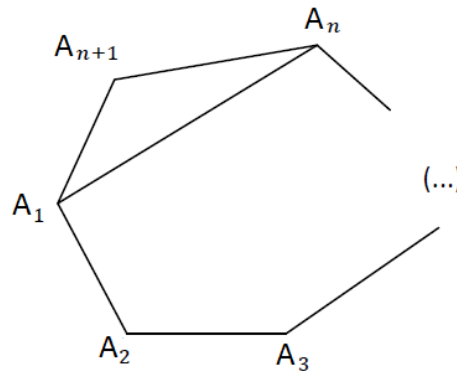
o que faz sentido, pois um triângulo não tem diagonais.

(2) Admite-se que  $P(n)$  é verdadeira para  $n \geq 3$  lados, isto é,  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ .

Prova-se que a sentença  $P(n+1)$  vale, ou seja, que

$$d_{(n+1)} = \frac{(n+1)[(n+1)-3]}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Considerando um polígono convexo de  $n+1$  lados  $A_1A_2A_3\dots A_nA_{n+1}$  e tomando a diagonal  $A_1A_n$ , este polígono fica dividido em dois polígonos:  $A_1A_2A_3\dots A_n$  e o triângulo  $A_1A_nA_{n+1}$  (Figura 8).



**Figura 7:** Polígono convexo de  $n+1$  lados

Ao fazer isto, nota-se que:

- 1) Todas as diagonais de  $A_1A_2A_3\dots A_n$  são diagonais de  $A_1A_2A_3\dots A_nA_{n+1}$ .
- 2) Um lado de  $A_1A_2A_3\dots A_n$  torna-se diagonal de  $A_1A_2A_3\dots A_nA_{n+1}$ .
- 3) Do vértice  $A_{n+1}$  partem  $(n+1)-3 = n-2$  novas diagonais.

Deste modo, pode-se escrever:

$$d_{n+1} = d_n + 1 + (n-2) = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Isto mostra que a fórmula  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$  vale  $n+1$ . Portanto, pelo primeiro princípio da indução (generalizado), ela verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 3$ .

#### 4.2.3. Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados é  $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$ .

##### **Demonstração**

Considera-se a proposição  $P(n)$ :  $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$ . Tem-se que:

**(1)** A proposição  $P(3)$  é verdadeira. De fato,

$$S_3 = 180^\circ = (3-2) \cdot 180^\circ \quad (\text{soma dos ângulos de um triângulo}).$$

**(2)** Admitindo que  $P(n)$  é verdadeira para  $n \geq 3$  lados, isto é, que  $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$

prova-se que  $P(n+1)$  é verdadeira, o que significa provar que:

$$S_{n+1} = [(n+1)-2] \cdot 180^\circ = (n-1) \cdot 180^\circ.$$

Com efeito, tomando a diagonal  $A_1A_n$  no polígono convexo  $A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$  de  $n+1$  lados, este fica dividido em dois polígonos:  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  de  $n$  lados e o triângulo  $A_1A_nA_{n+1}$  (Figura 7). Para  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  vale a hipótese de indução, daí, é válido escrever que:

$$S_{n+1} = S_n + 180^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ + 180^\circ = 180^\circ \cdot (n-2+1) = 180^\circ \cdot (n-1) = (n-1) \cdot 180^\circ.$$

Isto mostra que a fórmula dada é válida para  $n+1$ . Pelo Primeiro Princípio da indução (generalizado), temos que a fórmula  $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$  é válida para todo número natural  $n \geq 3$ .



#### 4.2.4. Relação de Euler



**Figura 8:** Leonhard Euler (Basileia, 15 de abril de 1707 — São Petersburgo, 18 de setembro de 1783) foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã.

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

em que  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces do poliedro.

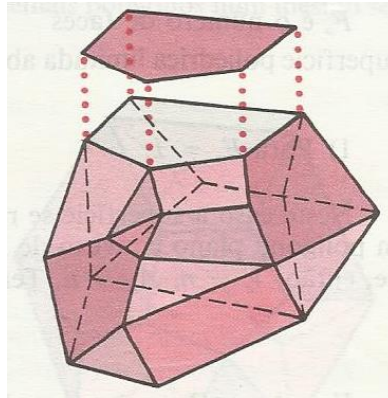
#### **Demonstração**

Antes da demonstração, precisa-se definir superfície poliédrica limitada convexa.

Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos tais que:

- I) dois polígonos não estão em um mesmo plano;
- II) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
- III) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
- IV) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas abertas. As que não têm contorno são chamadas fechadas.



**Figura 9:** Superfície poliédrica limitada convexa.

a) Por indução finita referente ao número de faces, será provado, em *caráter preliminar*, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, vale a relação:

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

onde  $V_a$  é o número de vértices,  $A_a$  é o número de arestas e  $F_a$  é o número de faces da superfície poliédrica limitada aberta.

1) Para  $F_a = 1$ .

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de  $n$  lados e, então,  $V_a = A_a = n$ . Tem-se:

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad V_a - A_a + F_a = 1.$$

Logo, a relação está verificada para  $F_a = 1$ .

2) Admitindo que a relação vale para uma superfície de  $F'$  faces (que possui  $V'$  vértices e  $A'$  arestas), prova-se que também vale para uma superfície de  $F'+1$  faces (que possui  $F_a = F'+1$  faces,  $V_a$  vértices e  $A_a$  arestas).

Por hipótese, para a superfície de  $F'$  faces,  $A'$  arestas e  $V'$  vértices vale:

$$V' - A' + F' = 1.$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) um face de  $p$  lados e considerando que  $q < p$  desses lados coincidem com as arestas, já existentes, da borda, obtemos uma nova superfície com  $F_a$  faces,  $A_a =$  arestas e  $V_a$  vértices tais que:

$$F_a = F' + 1$$

$$A_a = A' + p - q \quad (q \text{ arestas coincidiram})$$

$$V_a = V' + p - (q+1) \quad (q \text{ arestas coincidindo, } q+1 \text{ v\u00e9rtices coincidem})$$

Formando a express\u00e3o  $V_a - A_a + F_a$  e substituindo os valores acima, vem:

$$\begin{aligned} V_a - A_a + F_a &= V' + p - (q+1) - (A' + p - q) + F' + 1 \\ &= V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 \\ &= V' - A' + F'. \end{aligned}$$

Com  $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$  prova-se que essa express\u00e3o n\u00e3o se altera se for acrescentada uma face \u00e0 superf\u00edcie.

Como, por hip\u00f3tese,  $V' - A' + F' = 1$ , vem que

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

o que prova a rela\u00e7\u00e3o preliminar.

b) Tomando a superf\u00edcie de qualquer poliedro convexo ou qualquer superf\u00edcie limitada convexa fechada (com  $V$  v\u00e9rtices,  $A$  arestas e  $F$  faces), retira-se uma face, ficando, ent\u00e3o, com uma superf\u00edcie aberta ( com  $V_a$  v\u00e9rtices,  $A_a$  arestas e  $F_a$  faces) para a qual n\u00e3o vale a rela\u00e7\u00e3o

$$V_a - A_a + F_a = 1.$$

Como  $V_a = V$ ,  $A_a = A$  e  $F_a = F - 1$ , vem  $V - A + (F-1) = 1$ , ou seja:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Esta demonstra\u00e7\u00e3o foi obtida da cole\u00e7\u00e3o Fundamentos de Matem\u00e1tica Elementar, Vol.10 ( geometria espacial ) de Osvaldo Dolce e Jos\u00e9 Nicolau Pompeo.

### 4.3. Aplicações aritméticas

Esta seção apresenta teoremas e proposições aritméticas, que, assim como os demais resultados presentes neste capítulo, são demonstradas pelo método indutivo, tendo como primeira aplicação um resultado central na aritmética, o teorema fundamental da aritmética.

#### 4.3.1. Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

##### Demonstração

A prova deste teorema será feita pelo segundo princípio da indução matemática.

Se  $n = 2$ , o resultado é trivial. Supõe-se que o teorema é verdadeiro para todo número natural maior que 2 e menor do que  $n \in \mathbb{N}$  e prova-se sua validade para  $n$ .

Se  $n$  for primo, nada tem-se a demonstrar. Por outro lado, se  $n$  for composto existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $n = n_1 \cdot n_2$ , e por definição,  $1 < n_1 < n$  e  $1 < n_2 < n$ . Pela hipótese de indução, existem números primos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  e  $q_1, q_2, \dots, q_s$  tais que  $n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$  e  $n_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ . Portanto,

$$n = n_1 \cdot n_2 = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r) \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$$

o que prova o produto de números primos.

Vamos, agora, a prova de que  $n$  se escreve de modo único (a menos da ordem de seus fatores). Supõe-se que  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ , onde os  $p_i$  e  $q_j$  são números primos. Como  $p_1 | q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ , tem-se que  $p_1 = q_j$  para algum  $1 \leq j \leq s$ , que após um ordenamento de  $q_1, q_2, \dots, q_s$  podemos supor que seja  $q_1$ . Isto implica que:

$$p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_2 \cdot \dots \cdot q_s.$$

Por hipótese de indução, segue que  $r = s$  e os  $p_i$  e  $p_j$  são iguais aos pares, pois  $p_2 \cdot \dots \cdot p_r < n$ .

### 4.3.2. Pequeno Teorema de Fermat

Dado um número primo  $p$ , tem-se que  $p$  divide o número  $a^p - a$ , para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

Para demonstrar este teorema será utilizado o seguinte lema.

**Lema.** Seja  $p$  um número primo. Os números  $\binom{p}{i}$ , onde  $0 < i < p$ , são todos divisíveis por  $p$ .

#### Prova (Lema)

O Lema é válido para  $i = 1$ , pois  $\binom{p}{1} = p$ . Pode-se, então, supor que  $1 < i < p$ . Neste caso  $i! \mid p(p-1)\dots(p-i+1)$ . Como  $(i!, p) = 1$ , tem-se que

$$i! \mid (p-1)\dots(p-i+1),$$

e daí  $p \mid \binom{p}{i}$ , pois  $\binom{p}{i} = p \cdot \frac{(p-1)\dots(p-i+1)}{i!}$ , seguindo, assim, o resultado.

#### Demonstração

Prova-se, agora, o Pequeno Teorema de Fermat. Para  $a = 1$  o resultado é, trivialmente, válido, pois  $p \mid 1^p - 1 = 0$ .

Supondo que o Teorema vale para um  $a \in \mathbb{N}$  qualquer, isto é, que

$$p \mid a^p - a$$

verifica-se sua validade para  $a+1$ . De fato:

$$(a+1)^p - (a+1) = \left( a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \dots + 1 \right) - (a+1) = a^p - a + \binom{p}{1} a^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1} a$$

Pelo Lema acima e pela hipótese de indução, tem-se que:

$$p \mid (a+1)^p - (a+1)$$

e, pelo Princípio da Indução Matemática, o Teorema é válido para todo  $a \in \mathbb{N}$ .



**Figura 10:** Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, 17 de Agosto de 1601 — Castres, 12 de Janeiro de 1665). Matemático e cientista francês.

O teorema a seguir é conhecido de Euclides, cerca de trezentos anos antes de Cristo. Está enunciado em *Os Elementos*, porém, sem demonstração.

#### 4.3.3. Algoritmo de Euclides

Dados números naturais  $n$  e  $m$ . Existem dois únicos números inteiros não negativos  $q$  e  $r$ , com  $r < m$ , tais que  $n = mq + r$ .

#### **Demonstração**

##### **I – Existência:**

Se  $n < m$ , basta tomar  $q = 0$  e  $r = n$ . Se  $n = m$ , basta tomar  $q = 1$  e  $r = 0$ . Portanto, resta apenas provar a propriedade quando  $n > m$ .

A demonstração será por indução completa sobre  $n$ . Se  $n = 1$ , o resultado é válido, pelas considerações acima, pois  $1 = n \leq m$ .

Supõe-se agora que o resultado seja válido para todo  $i$ , com  $1 \leq i \leq n$ . Seja  $m < n$ , logo  $1 \leq n+1-m \leq n$  e, portanto, pela hipótese de indução, existem  $q'$  e  $r$ , com  $r < m$ , tais que  $n+1 - m = q'.m+r$ ; logo  $n+1 = (q'+1).m+r$ , e o resultado é válido para  $n+1$ , tomando  $q = q'+1$ .

## II – Unicidade:

Se  $n = m$ , só há um jeito de escrever  $n$  da forma  $mq+r$ , com  $r < m$ , que é:  $n=m.1+0$ . Se  $n < m$ , também só há um jeito de escrever  $n$  nessa forma:  $n = 0.q+n$ . O resultado é portanto verdadeiro quando  $n = 1$ , já que, neste caso,  $1 = n \leq m$ .

A prova será também por indução completa sobre  $n$ . Vimos acima que a unicidade está garantida quando  $n = 1$ . Supõe-se o resultado válido para todos os números naturais menores ou iguais a  $n$ .

Supondo, agora, que  $n+1 = q.m + r = q'.m+r'$ , com  $r, r' < m$ , pode-se admitir que  $n+1 > m$ , já que o resultado está garantido quando  $n+1 \leq m$ .

Subtraindo na igualdade acima  $m$ , obtém-se que:

$$n+1 - m = (q-1).m+r = (q'-1).m+r,$$

e, pela hipótese de indução, tem-se que  $q-1 = q'-1$  e  $r = r'$ , daí seguindo a unicidade da escrita de  $n+1$ .

Pelo Teorema da Indução Matemática, o resultado fica estabelecido para todo número natural  $n$ .

Esta demonstração foi obtida no livro: Indução Matemática - Abramo Hefez Obmep (2009) – Iniciação Científica.

### 4.3.4. Princípio de Dirichlet (ou Princípio das gavetas)

Deseja-se guardar  $m$  objetos em  $n$  gavetas. Se  $m > n$ , então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto.

#### Demonstração

A validação deste princípio será feita por indução sobre o número  $n$  de gavetas.

Para  $n = 1$  o resultado é trivial pois, tendo  $m > 1$  objetos e uma só gaveta, tem-se que colocar nesta gaveta mais de um objeto.

Supondo que o teorema é válido para  $n$  gavetas, deve-se mostrar que o teorema vale também para  $n+1$  gavetas, com  $m > n+1$ .

Depois de distribuir os  $m$  objetos nas  $n+1$  gavetas, escolhe-se uma gaveta ao acaso. Se essa gaveta tiver mais de um objeto o resultado fica provado. Se essa gaveta não

tiver objeto, então nas  $n$  demais gavetas estão acomodados  $m > n+1 > n$  objetos, e o resultado também fica provado, pela hipótese de indução pois, teríamos  $m > n$  objetos para distribuir em  $n$  gavetas. Por outro lado, se a gaveta escolhida contiver um objeto, logo, nas  $n$  gavetas restantes, estão distribuídos  $m-1 > n$  objetos, o que, novamente, pela hipótese de indução, implica que uma das  $n$  gavetas possui mais de um objeto.

Deste modo, pelo Princípio da Indução Matemática, o Princípio de Dirichlet fica estabelecido para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , tais que  $m > n$ .

Nesta seção, são abordadas uma série de propriedades relacionadas à sequência de Fibonacci, que é definida a seguir:

#### 4.3.5. Propriedades na sequência de Fibonacci



**Figura 11:** Leonardo Fibonacci (1170 -1250) foi um matemático italiano. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa

A sequência de Fibonacci é definida pela recorrência de segunda ordem

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \in \mathbb{N}$$

onde  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 1$ .

Deste modo a sequência de Fibonacci é 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... .

#### Aplicação 1

A soma  $S_n = \sum_{i=1}^n F_i$  satisfaz a igualdade  $S_n = F_{n+2} - 1$ .



### Demonstração

Sabe-se que  $\sum_{i=1}^n F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ , deste modo deve-se provar a seguinte proposição:

$$P(n): F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Para  $n = 1$  a proposição é válida, pois:

$$F_1 = 1 = F_3 - 1$$

Supõe-se que a proposição vale para  $n$ , isto é, que

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

e prova-se que ela vale para  $n+1$ . De fato:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = (F_{n+2} + F_{n+1}) - 1 = F_{n+3} - 1.$$

Isto mostra que a igualdade é satisfeita para  $n+1$ . Por indução matemática, pode-se concluir que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aplicação 2** Dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 2$ , verifica-se que

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}$$

### Demonstração

Fixado  $n \geq 2$ , aplica-se indução sobre  $m$ . Para  $m=1$ , tem-se:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = F_{n-1} + F_n = F_{n-1} \cdot F_1 + F_n \cdot F_2$$

mostrando que a igualdade vale para  $m=1$ .

Supõe-se que a igualdade seja verdadeira para todo  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $p \leq m$ , isto é, que

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}$$

Prova-se que ela vale para  $m+1$ . De fato,

$$\begin{aligned} F_{n+(m+1)} &= F_{n+m} + F_{n+m-1} = (F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}) + (F_{n-1} \cdot F_{m-1} + F_n \cdot F_m) \\ &= (F_{n-1} \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m-1}) + (F_n \cdot F_{m+1} + F_n \cdot F_m) \\ &= F_{n-1} \cdot (F_m + F_{m-1}) + F_n \cdot (F_m + F_{m+1}) \\ &= F_{n-1} \cdot F_{m+1} + F_n \cdot F_{m+2} \end{aligned}$$

Isto, pelo princípio da indução finita, prova o resultado.

**Aplicação 3.** Dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci são primos entre si, isto é,  $(F_{n+1}, F_n) = 1$ .

A demonstração deste resultado, fara uso do seguinte Lema, onde  $(x,y)$  é adotado para indicar o MDC (Máximo Divisor Comum) dos números reais  $x$  e  $y$ .

**Lema de Euclides.** Sejam  $a, b, n \in \mathbb{N}$  com  $a < na < b$ . Se existe  $(a, b-na)$ , então  $(a,b)$  existe e

$$(a,b) = (a, b-na).$$

**Prova (Lema)**

Considere  $d = (a, b-na)$ . Por definição,  $d|a$  e  $d|b-na$ , logo  $d$  divide  $b = b - na + na$ . Assim,  $d$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ . Tomemos, agora, um número  $c \in \mathbb{N}$ , tal que  $c|a$  e  $c|b$ . Conseqüentemente, tem-se que  $c$  divide  $a$  e  $b-na$ , logo  $c|d$ . Isso prova que  $d = (a,b)$ .

**Demonstração**

Deve-se mostrar que dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci são sempre primos entre si. Isto será feito por indução sobre  $n$ .

Para isso, considera-se a sentença aberta:

$$P(n): (F_{n+1}, F_n) = 1$$

A proposição é válida para  $n = 1$ . De fato,

$$(F_2, F_1) = (1, 1) = 1$$

Admitindo que  $P(n)$  é verdadeira, isto é, que  $(F_{n+1}, F_n) = 1$ , deve-se mostrar que  $(F_{n+2}, F_{n+1}) = 1$ .

De fato, pela hipótese de indução e pelo lema de Euclides, tem-se que:

$$(F_{n+2}, F_{n+1}) = (F_{n+2} - F_{n+1}, F_{n+1}) = (F_n, F_{n+1}) = 1.$$

Pelo princípio da indução matemática,  $(F_{n+1}, F_n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aplicação 4.** Se  $n, m \in \mathbb{N}$  são tais que  $n|m$ , então,  $F_n | F_m$ .

### Demonstração

Para demonstração da proposição acima, usa-se  $m = nk$ . e procede-se por indução sobre que  $k \in \mathbb{N}$ .

Para  $k = 1$ , tem-se que:

$$m = 1 \cdot n = n$$

o que implica  $F_n | F_n$ , o que é óbvio.

Supondo que  $F_n | F_{nk}$  para um  $k \in \mathbb{N}$  qualquer, prova-se que  $F_n | F_{n(k+1)}$ .

Pela Proposição 2 provada acima, tem-se que:

$$F_{n(k+1)} = F_{nk+n} = F_{nk-1} \cdot F_n + F_{nk} \cdot F_{n+1}$$

Como  $F_n | F_{nk-1} \cdot F_n$  e por hipótese de indução,  $F_n | F_{nk} \cdot F_{n+1}$ , é válido que  $F_n | F_{n(k+1)}$ , provando, assim, o resultado.

## 4.4. Aplicações no Mundo Material

Nas seções 4.1, 4.2 e 4.3, ficou constatado que muitas propriedades, identidades e desigualdades algébricas referentes a números naturais podem ser demonstradas por indução. Esta seção mostra como aplicar o princípio da indução matemática na comprovação de resultados do mundo material.

São apresentados a seguir, algumas situações práticas nas quais é possível utilizar o princípio da indução matemática.

### 4.4.1. O problema da franquia postal

Com selos de 5 centavos e/ou 7 centavos, é possível formar qualquer quantia para franquia postal superior ou igual ao valor de 24 centavos.



**Figura 12:** Brasil - 40 Selos Postais 1975 A 1979, 1985 2000 2003

### Demonstração

Deve-se provar a proposição  $P(n)$  definida por:

$P(n)$ : se  $n \geq 24$ , então  $n = 7x + 5y$ , com  $x$  e  $y$  inteiros não negativos.

Nota-se que  $P(24)$  é verdadeira, pois:

$$24 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5.$$

Admite-se que a proposição  $P(n)$  é válida para um  $n \geq 24$  qualquer, isto é, que:

$$n = 7x + 5y, \text{ com } x \text{ e } y \text{ inteiros positivos.}$$

Deve-se mostrar que o mesmo vale para  $n+1$ . Para isto, considera-se dois casos:

**Caso 1.**  $y \leq 3$

Neste caso,  $x \geq 2$ , pois caso contrário,  $7x + 5y \leq 22 < 24$ , o que é absurdo. Desta forma, pode-se escrever:

$$n+1 = 7x+5y+1 = 7(x-2) + 5(y+3),$$

pois  $x - 2 \geq 0$ .

**Caso 2.**  $y \geq 4$

Logo,  $y - 4 \geq 0$ . Assim, é válido escrever:

$$n+1=7x+5y+1 = 7(x+3) + 5(y-4),$$

mostrando que  $P(n+1)$  é verdadeira. Pelo princípio da indução, pode-se concluir que a proposição  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq 24$ .

#### 4.4.2. Torre de Hanói e o Fim do Mundo



**Figura 13:**Torre de Hanói

A torre de Hanói é um jogo muito conhecido, podendo ser facilmente confeccionado e utilizado pelos alunos da Educação Básica.

Trata-se de um jogo de  $n$  discos, de raios distintos, com um furo no seu centro e uma estrutura onde ficam três hastes. Os  $n$  discos ficam enfiados em uma das hastes, digamos a primeira, de modo que nenhum disco fique acima de um disco de raio menor.

O jogo consiste em transferir os  $n$  discos de uma haste para outra, deslocando um disco de cada vez, sempre atendendo a regra acima.

Verifica-se que o número mínimo  $M_n$  de movimentos para transferir  $n$  discos satisfaz a relação  $M_n = 2^n - 1$ .

### Demonstração

A prova é realizada por indução sobre  $n$  (número de discos).

(1) Nota-se que a fórmula é válida para  $n = 1, 2$ . De fato:

$$n = 1 \text{ disco} \quad \Rightarrow \quad M_1 = 1 = 2^1 - 1 \quad (\text{Trivial})$$

$$n = 2 \text{ discos} \quad \Rightarrow \quad M_2 = 3 = 2^2 - 1 \quad (\text{Fácil verificação})$$

(2) Supõe-se que a fórmula é verdadeira para  $n = p$ , isto é,

$$M_p = 2^p - 1$$

Mostra-se que para  $n = p + 1$ , a fórmula continua verdadeira, ou seja, que

$$M_{p+1} = 2^{p+1} - 1$$

De fato, supõe-se que a primeira estaca tem  $p+1$  discos. Para transferi-los para a terceira estaca, pode-se fazer da seguinte forma:

1º) Transferir os  $p$  discos superiores para a segunda estaca, o que pode ser feito, no mínimo, com  $M_p = 2^p - 1$  movimentos. (hipótese de indução)

2º) Depois, transfere-se o disco de raio maior para a terceira estaca, com um único movimento.

3º) Por último, leva-se os  $p$  discos da estaca do meio para a terceira estaca. O que levará mais  $M_p = 2^p - 1$  movimentos, no mínimo.

Portanto:

$$M_{p+1} = M_p + 1 + M_p = 2^p - 1 + 1 + 2^p - 1 = 2 \cdot 2^p - 1 = 2^{p+1} - 1. \quad \mathbf{c.q.d.}$$

Pelo princípio da indução matemática, tem-se que o número mínimo de movimentos é dado por  $M_n = 2^n - 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Este jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1882, que na ocasião formulou a seguinte lenda.

*Havia em um templo 3 estacas e  $n$  discos de ouro, de diâmetros diferentes. Inicialmente os discos estavam enfiados na primeira estaca em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. Os sacerdotes se ocupavam em transferi-los para a terceira estaca, usando a segunda como estaca auxiliar. Nesse processo de transferência, se movia apenas um disco de cada vez. Quando todos estivessem enfiados na terceira estaca, o mundo acabaria.*

#### 4.4.3. O problema da loteria

Em uma loteria de  $N$  números há um só prêmio. Um jogador compra  $n$  ( $1 < n < N$ ) bilhetes para uma só extração. O outro compra 1 bilhete em cada  $n$  extrações diferentes. Qual deles tem maior chance de ganhar algum prêmio?



**Figura 14:** Bilhete de Loteria

#### Demonstração

Se todos os  $n$  bilhetes são jogados numa única vez a chance (probabilidade) de ganhar o prêmio numa extração é  $\frac{n}{N}$ .

Para determinar a outra probabilidade usa-se o seguinte procedimento: calcular primeiro a probabilidade de não ganhar. Como o número de casos possíveis é  $N^n$  e o número de casos prováveis é dado por  $(N-1)^n$  a probabilidade de não ganhar em nenhuma das  $n$  extrações é  $\frac{(N-1)^n}{N^n}$ .

Logo, a probabilidade de ganhar um prêmio em uma das  $n$  extrações é dada por:

$$1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}.$$

Agora, o problema se traduz em descobrir a relação entre os números  $\frac{n}{N}$  e

$$1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}.$$

Prova-se, por indução matemática, que  $\frac{n}{N} > 1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}$  ou, equivalentemente,

$$\frac{(N-1)^n}{N^n} > 1 - \frac{n}{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ resolvendo assim o problema.}$$

De fato:

(1) Para  $n = 2$  temos

$$\frac{(N-1)^2}{N^2} = \frac{N^2 - 2N + 1}{N^2} = 1 - \frac{2}{N} + \frac{1}{N^2} > 1 - \frac{2}{N}, \text{ pois, neste caso, } \frac{1}{N^2} > 0.$$

Assim, tem-se que a desigualdade é verdadeira para  $n = 2$ .

(2) Como hipótese de indução, admite-se que a desigualdade é verdadeira quando  $n = k$ :

$$\frac{(N-1)^k}{N^k} > 1 - \frac{k}{N}$$

Mostra-se que para  $n = k+1$  ela continua verdadeira. Com efeito:

$$\begin{aligned} \frac{(N-1)^{k+1}}{N^{k+1}} &= \frac{(N-1)^k}{N^k} \cdot \frac{N-1}{N} > \left(1 - \frac{k}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right) = \left(1 - \frac{k}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{N} - \frac{k}{N} + \frac{k}{N^2} > 1 - \frac{1}{N} - \frac{k}{N} = 1 - \frac{(k+1)}{N}. \quad \mathbf{c.q.d.} \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro jogador, ao comprar  $n$  bilhetes para uma única extração, tem mais chance de ganhar o prêmio da loteria.



#### 4.4.4. O Problema da moeda falsa

*Um rei muito rico possui  $3^n$  moedas de ouro. Porém, uma destas moedas é falsa, sendo seu peso menor que o peso das demais.*



**Figura 15:** Moedas de Ouro

Com uma balança de 2 pratos e sem nenhum peso, verifica-se que é possível encontrar a moeda falsa com apenas  $n$  pesagens.

#### **Demonstração**

Seja a proposição  $P(n)$ , definida por:

$P(n)$ : Dadas  $3^n$  moedas, pode-se encontrar, nas condições dadas, a moeda falsa com apenas  $n$  pesagens.

Nota-se que  $P(1)$  é verdadeira, pois:

Para  $n = 1$ , tem-se  $3^1 = 3$  moedas e com 1 pesagem pode-se identificar a moeda falsa do seguinte modo: escolhem-se duas moedas e coloca-se uma em cada prato da balança, deixando uma de fora. Caso a balança equilibre, a moeda falsa é a que ficou fora. Caso a balança desequilibre, a moeda falsa é do prato que ficar mais alto.

Admite-se que  $P(n)$  é verdadeira, isto é, que: dadas  $3^n$  moedas, podemos encontrar, nas condições dadas, a moeda falsa com apenas  $n$  pesagens.

Deve-se mostrar que  $P(n+1)$  também é verdadeira. Para isto, divide-se as  $3^{n+1}$  moedas em 3 partes de  $3^n$  moedas cada. Escolhendo duas partes para colocar na balança. Se a balança equilibrar, então a moeda falsa está na parte que não foi escolhida. Por outro lado, se a balança desequilibrar, então a moeda falsa é uma das  $3^n$  moedas presentes no prato mais alto. De qualquer modo, com uma pesagem podemos identificar em qual das três partes está a moeda falsa, ficando apenas  $3^n$  para pesquisar.

Por hipótese de indução, tendo  $3^n$  moedas pode-se encontrar a moeda falsa com apenas  $n$  pesagens, totalizando  $n+1$  pesagens. Logo,  $P(n+1)$  também é válida.

Pelo princípio de indução matemática, tem-se que  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4.4.5. Os coelhos de Fibonacci

Um casal de coelhos adultos gera um casal de coelhos por mês, que se tornam adultos dois meses após o nascimento. Supondo que os coelhos são imortais. Começando no mês 0 (zero) com um casal adulto (que terá prole apenas no mês 1). Verifica-se que o número  $F_n$  de casais gerados no mês  $n$  satisfaz a seguinte relação:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

#### Demonstração

A prova é realizada por indução sobre  $n$ .

(1) A fórmula é verdadeira para  $n = 1, 2$ . De fato:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \quad (\text{Fácil Verificação})$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \quad (\text{Fácil Verificação})$$

(2) Como hipótese de indução, supõe-se que para  $n = 1, 2, \dots, k, k+1$ , a fórmula é verdadeira. Espera-se provar que ela é verdadeira para  $n = k+2$ .

Todos os casais que geraram casais de filhotes no mês  $k+1$  geram, novamente, um casal de filhotes no mês  $k+2$ . Além disso, os casais que nasceram no mês  $k$  geram os seus primeiros casais de filhotes no mês  $k+2$ . Portanto, o número  $F_{k+2}$  de casais gerados no mês  $k+2$  é dado por  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ .

Usando essa relação e a hipótese de indução, tem-se:

$$\begin{aligned}
F_{k+2} = F_{k+1} + F_k &= \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] + \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2},
\end{aligned}$$

o que mostra a validade da expressão para o  $(n+1)$  – ésimo termo da sequência de Fibonacci.

Portanto, pelo princípio de indução matemática,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação apresenta como objetivo pesquisar a fundamentação teórica do método indutivo e selecionar resultados matemáticos encontrados na educação básica onde é possível validar, aplicando este método de demonstração. No instante em que foi firmada a opção por este assunto não vislumbrou-se encontrar tantas aplicações interessantes e teoremas importantes, o que para o sucesso da pesquisa acabou ocorrendo.

As aplicações algébricas foram encontradas em maior número. Dentre elas pode-se destacar a expressão do binômio de Newton, a desigualdade de Bernoulli e a primeira fórmula de Moivre, utilizada na potenciação de números complexos, bem como as fórmulas utilizadas no estudo de progressões aritméticas e geométricas.

Um fato geométrico muito curioso foi o “número das partes em que fica dividido um plano por  $n$  retas”, conhecido como pizza de Steiner. Este foi um dos destaques das aplicações geométricas acompanhado da famosa relação de Euler para poliedros. Não deixando de mencionar as fórmulas para o cálculo da soma dos ângulos internos e do número de diagonais de polígonos convexos, estudadas nas séries finais do ensino fundamental.

Quanto a aritmética, foram relacionados teoremas centrais, como o teorema fundamental da aritmética e propriedades relevantes tais como: Pequeno Teorema de Fermat, divisão euclidiana (algoritmo de Euclides) e o princípio das gavetas, seguidas das curiosidades da sequência de Fibonacci.

Outro fato interessante encontrado, foram os problemas práticos solucionados ou comprovados pelo método indutivo, entre os quais se destacaram a da torre de Hanói e dos coelhos de Fibonacci.

Procurou-se evidenciar, neste trabalho, que o princípio da indução é um importante método de comprovação de resultados matemáticos, tendo diversas aplicações na álgebra, aritmética e geometria. Podendo, perfeitamente, ser abordado e aplicado no ensino da matemática da educação básica.

Esta pesquisa permitiu ao autor da dissertação ampliar, seus conhecimentos de álgebra, geometria e aritmética e, sobretudo do princípio de indução matemática, em nível de educação básica. Espera-se que isto venha refletir na prática docente, melhorando a qualidade das aulas que ministra na rede estadual de ensino.

Espera-se que este material possa servir de apoio aos estudantes universitários dos cursos de licenciatura em ciências e, principalmente, professores que atuam no ensino da matemática na educação básica. Boa parte deste material pode ser estudado e reproduzido por alunos do ensino médio, sobretudo alunos em nível olímpico. A maior expectativa é que esta pesquisa torne-se mais um instrumento a favor do ensino da matemática e crescimento profissional dos seus professores.

Para estudo e inserções mais profundas, recomenda-se, dentre outros, a leitura dos livros **Indução Matemática**. 1<sup>a</sup> ed. OBMEP, 2009 e **Manual de indução matemática**, 2<sup>a</sup> ed., Interciência, 1999.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Sebastião Almeida de. **Análise matemática: princípios e aplicações na economia.** 1 ed. Fortaleza: UFC/CAEN, 2007.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** 1 ed. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **Qué es la matemática?: una exposición elemental de sus ideas y métodos.** 3 ed. Madrid: Aguilar, 1962.

COUTINHO, Lázaro. **Matemática e mistério em Baker Street.** 1 ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

FILHO, Edgard de Alencar. **Teoria elementar dos números.** 3 ed. São Paulo: Nobel, 1985.

FILHO, Manoel. **Princípios e filósofos da matemática.** 1 ed. Recife: Oficinas Gráficas do União Cursos, 1977.

GERSTING, Judith L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação.** 4 ed. Havaí: LTC, 2001.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética.** 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção Textos Universitários)

\_\_\_\_\_. **Indução matemática.** 1ª ed. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. (Programa de Iniciação Científica)

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e equações algébricas.** 1ª ed. [S.L.:s.n.], 2012.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória e probabilidade.** 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar: logaritmos.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar**: conjuntos e funções. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: complexos, polinômios e equações. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

\_\_\_\_\_. **Fundamentos de matemática elementar**: trigonometria. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. v.1. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática)

\_\_\_\_\_. **A matemática do ensino médio**. v.2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática)

LOPES, Luís. **Manual de indução matemática**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta**: para computação e informática. 2 ed. Rio Grande do Sul: Sagra Luzzatto, 2005.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

NERI, Cassio; CABRAL, Marco. **Curso de análise real**. 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Instituto de Matemática, 2011.

OLIVEIRA, Krerley; CORCHO, Adán J. **Iniciação a matemática**. 1ª ed. [S.L.:s.n.], 2012.

POMPEO, José Nicolau; DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria espacial. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993.

PROFMAT. **Matemática discreta**. Material disponibilizado no *moodle* durante a disciplina de Matemática Discreta. [S.L.:s.n.], 2011.

PROFMAT. **Aritmética I**. Material disponibilizado no *moodle* durante a disciplina de Aritmética I. [S.L.:s.n.], 2011.



## ANEXO

Neste anexo é demonstrada a equivalência entre o princípio de boa ordem e princípio de indução matemática, válidos para o conjunto  $\mathbb{N}$ , dos números naturais.

**Teorema** (Boa Ordem = Indução) Vale o Princípio da Boa Ordem se, e somente se, vale o Princípio da Indução.

### Demonstração

Supondo válido o Princípio da Boa Ordem. Seja  $A \subset \mathbb{N}$  satisfazendo (I)  $1 \in A$  e (II)  $n \in A$  implica que  $n+1 \in A$ . Suponhamos, por absurdo, que  $A \neq \mathbb{N}$ . Isto significa que existe algum elemento de  $\mathbb{N}$  que não pertence a  $A$  e, portanto, o conjunto  $B = A^c$  é não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordem,  $B$  possui um menor mínimo  $m \in B$ . Com certeza  $m > 1$  pois como  $1 \in A$ ,  $1 \notin B = A^c$ . Assim,  $m-1$  é um natural menor que  $m$ . Pela minimalidade de  $m$ , temos que  $m-1 \notin B$  e, portanto,  $m-1 \in A$ . De (II) concluímos que  $m = (m-1) + 1 \in A$ , o que é absurdo.

Supondo válido o Princípio da Indução. Seja  $B \subset \mathbb{N}$  não vazio. Supõe-se por absurdo que  $B$  não possua elemento mínimo. Em particular,  $1 \notin B$  (senão 1 seria elemento mínimo de  $B$ ). Seja

$$A = \{n \in \mathbb{N}; n < m \ \forall m \in B\}.$$

Tomando inicialmente que  $A \cap B = \emptyset$ . De fato, se  $A \cap B \neq \emptyset$ , então existe  $n \in A \cap B$ . Tendo  $n \in A$  temos também  $n < m$  qualquer que seja  $m \in B$ , em particular, tomando  $m = n \in B$  obtemos  $n < n$  o que é um absurdo. Concluímos que  $A \cap B = \emptyset$ .

Obtém-se a seguir que  $A = \mathbb{N}$ . Isto é suficiente para concluir a demonstração. Neste caso temos  $\emptyset = A \cap B = \mathbb{N} \cap B = B$  contradizendo a hipótese  $B \neq \emptyset$ .

Mostra-se, por indução, que  $A = \mathbb{N}$ . Já sabe-se que  $1 \notin B$  e portanto  $1 < m$  qualquer que seja  $m \in B$ , ou seja,  $1 \in A$ . Tomemos  $n \in A$ . Por definição de  $A$  temos  $n < m$  qualquer que seja  $m \in B$ , logo  $n+1 \leq m$  para todo  $m \in B$ . Se  $n+1 \in B$  então  $n+1$  é um elemento mínimo de  $B$ . Como, por hipótese,  $B$  não possui elemento mínimo, segue que  $n+1 \notin B$  e portanto  $n+1 < m$  para qualquer  $m \in B$ . Pode-se concluir que  $n+1 \in A$  e, pelo Princípio da Indução, que  $A = \mathbb{N}$ .

Esta demonstração foi obtida no livro Curso de Análise Real dos autores Cassio Neri e Marco Cabral – 2ª Edição, 2011.