



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LEDEGELSON MOURA DE SOUZA

**UMA INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS POR MEIO DE
PLANILHA ELETRÔNICA: Raízes de funções e interpolação polinomial no Ensino
Médio**

MACAPÁ -AP
2024

LEDEGELSON MOURA DE SOUZA

**UMA INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS POR MEIO DE
PLANILHA ELETRÔNICA:** Raízes de funções e interpolação polinomial no Ensino
Médio

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática, como
requisito para a obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Simone de Almeida
Delphim Leal.

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Alexandre
Santana Oliveira.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB-2 / 1569

S729i Ledegelson Moura de Souza.

UMA INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS POR MEIO DE PLANILHA ELETRÔNICA: Raízes de funções e interpolação polinomial no Ensino Médio / Ledegelson Moura de Souza. - Macapá, 2024.

1 recurso eletrônico. 87 folhas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá. Coordenação do Curso de Pós-graduação Profissional em Matemática - PROFMAT. Macapá, 2024.

Orientador: Simone de Almeida Delphim Leal.

Coorientador: Carlos Alexandre Santana Oliveira.

Modo de acesso: World Wide Web.

Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Métodos iterativos . 2. Planilha eletrônica. 3. Zeros de funções. I. Simone de Almeida Delphim Leal, orientadora. II. Oliveira, Carlos Alexandre Santana. III. Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

CDD 23. ed. – 519.4

SOUZA, Ledegelson Moura de. UMA INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS POR MEIO DE PLANILHA ELETRÔNICA: Raízes de funções e interpolação polinomial no Ensino Médio. Orientadora: Simone de Almeida Delphim Leal. 2024. 87 f. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT. Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2024.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós Graduação de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de LEDEGELSON MOURA DE SOUZA, intitulada: “UMA INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS POR MEIO DE PLANILHA ELETRÔNICA: Raízes de funções e interpolação polinomial no Ensino Médio”, após terem inquerido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Macapá-AP, 21 de março de 2024.

Documento assinado digitalmente
 **SIMONE DE ALMEIDA DELPHIM LEAL**
Data: 30/03/2024 17:29:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Simone de Almeida Delphim Leal
Presidente da Banca Examinadora (PROFMAT/UNIFAP)

Documento assinado digitalmente
 **MARCIO ALDO LOBATO BAHIA**
Data: 25/03/2024 12:54:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcio Aldo Lobato Bahia
Membro da Banca Examinadora (PROFMAT/UNIFAP)

Documento assinado digitalmente
 **ELIVALDO SERRAO CUSTODIO**
Data: 25/03/2024 12:14:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Elivaldo Serrão Custódio
Membro da Banca Examinadora (PROFMAT/UNIFAP)

Documento assinado digitalmente
 **CARLOS ALEXANDRE SANTANA OLIVEIRA**
Data: 24/03/2024 15:19:28-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira
Membro da Banca Examinadora (IFAP)

*Dedico este trabalho em memória de meu querido e eterno primo Zaquel Moura Pacheco,
que partiu deste mundo e aguardo, um dia, nosso reencontro.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao arquiteto do universo, Deus, por ter me sustentado durante esses meus 13658 dias (36 anos) aqui na terra.

À minha esposa por todo apoio nessa valiosa empreitada. Com certeza ela foi peça importante nesse processo.

A meus pais, Jaziel Trindade de Souza e Dileuza Moura da Luz Souza por todo apoio nos estudos e, sobretudo, por todos os ensinamentos que me proporcionaram.

Aos amigos por todo apoio.

À chefia da UEAP pela compressão e apoio. Com certeza tem participação nessa jornada.

Aos meus professores do mestrado, em especial à minha orientadora Simone de Almeida Delphim Leal pela compreensão e apoio à produção dessa dissertação. Sou eternamente grato.

Ao meu coorientador, que tem uma enorme contribuição na minha graduação e pelo fato dele ser peça de suma importância na produção deste trabalho. Sou imensamente grato.

RESUMO

Este trabalho aborda, através do auxílio de planilha eletrônica, os principais métodos iterativos utilizados para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial que podem ser utilizados pelo professor em sala de aula. Assim, optou-se, naturalmente, por fazer primeiro um embasamento teórico dos métodos diretos e posteriormente uma explanação dos métodos iterativos e logo em seguida o uso desses associados à planilha eletrônica. Também, com o intuito de enriquecer mais essa pesquisa e testar sua efetividade, foi feita uma aplicação com uma turma de 36 alunos do curso de rede de computadores (integrado) do Instituto Federal do Amapá, e ao final do trabalho foi posto o que se pôde auferir da aplicação supracitada. O trabalho também destaca que no contexto do ensino médio, o ensino de matemática desempenha um papel crucial no desenvolvimento cognitivo e na formação intelectual dos alunos. É essencial proporcionar aos estudantes uma base sólida em conceitos matemáticos e suas aplicações práticas. Nesse sentido, os métodos numéricos para o cálculo de zero de funções e interpolação polinomial emergem como ferramentas poderosas, proporcionando uma compreensão mais profunda e aplicada da matemática. Esta dissertação explora a viabilidade e os benefícios de introduzir tais métodos no currículo do ensino médio.

Palavras-chave: métodos iterativos, planilha eletrônica, zeros de funções, interpolação polinomial, ensino médio .

ABSTRACT

His work addresses, with the aid of spreadsheet, the main iterative methods used for calculating function zeros and polynomial interpolation that can be used by the teacher in the classroom. Thus, it was naturally chosen to first provide a theoretical basis for the direct methods and subsequently an explanation of the iterative methods and then the use of these associated with the spreadsheet. Also, aiming to enrich this research further and test its effectiveness, an application was made with a class of 36 students from the Computer Network course (integrated) at the Federal Institute of Amapá, and at the end of the work, what could be inferred from the aforementioned application was presented. The paper also highlights that in the context of high school education, the teaching of mathematics plays a crucial role in the cognitive development and intellectual formation of students. It is essential to provide students with a solid foundation in mathematical concepts and their practical applications. In this sense, numerical methods for calculating function zeros and polynomial interpolation emerge as powerful tools, providing a deeper and more applied understanding of mathematics. This dissertation explores the feasibility and benefits of introducing such methods into the high school curriculum.

Keywords: Iterative methods, spreadsheet, function zeros, polynomial interpolation, high school.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 2.1 – Gráfico da função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com zero em x_0 | 18 |
| Figura 2.2 – Representação gráfica da função linear $f(x) = x$ | 19 |
| Figura 2.3 – Representação gráfica da função $f(x) = 2x + 4$ | 20 |
| Figura 2.4 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$ | 22 |
| Figura 2.5 – Representação gráfica da função $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$ | 23 |
| Figura 2.6 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ | 24 |
| Figura 2.7 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ | 25 |
| Figura 2.8 – Representação gráfica da função $f(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x + 5)$ | 26 |
| Figura 2.9 – Ciclo trigonométrico. | 27 |
| Figura 2.10 – Representação gráfica da função seno. | 27 |
| Figura 2.11 – Função seno com domínio em $[0, 2\pi]$ | 28 |
| Figura 2.12 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ | 29 |
| Figura 2.13 – Representação gráfica da função cosseno no ciclo trigonométrico. | 30 |
| Figura 2.14 – Gráfico das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \operatorname{cos} x$ | 30 |
| Figura 2.15 – Gráfico da função f no intervalo (a, b) | 33 |
| Figura 2.16 – Gráfico de $f'(x) = 3x^2 - 3$ | 34 |
| Figura 2.17 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ | 36 |
| Figura 2.18 – Interpretação geométrica do Método de Newton. | 38 |
| Figura 2.19 – Raiz da função $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$ fornecida através de software. | 41 |
| Figura 2.20 – Interpretação gráfica do polinômio $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ no ponto 2,5. | 47 |
| Figura 3.1 – Organização dos dados que serão utilizados no método da bisseção. | 48 |
| Figura 3.2 – Método da bisseção com o auxílio de planilha. | 49 |
| Figura 3.3 – Localização da raiz de f | 50 |
| Figura 3.4 – Método da bisseção com auxílio de planilha eletrônica. | 51 |
| Figura 3.5 – Localização das raízes da função $h(x) = \log_{x-3}(x^2 - 5x - 6)$ | 52 |
| Figura 3.6 – Método da falsa posição com auxílio de planilha eletrônica. | 53 |
| Figura 3.7 – Método da falsa posição com auxílio de planilha eletrônica. | 54 |
| Figura 3.8 – Localização do intervalo que contém ao mesmo uma raiz de $g(x)$ | 54 |
| Figura 3.9 – Método da falsa posição com o auxílio de software. | 55 |
| Figura 3.10 – Método Newton com uso de software. | 56 |
| Figura 3.11 – Método de Newton com o auxílio de planilha eletrônica. | 56 |
| Figura 3.12 – Representação gráfica de $f'(x)$ e $f(x)$ | 57 |
| Figura 3.13 – Localização da raiz da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$ | 57 |
| Figura 3.14 – Método de Newton através de planilha eletrônica. | 58 |
| Figura 3.15 – Método da secante com auxílio de software. | 59 |
| Figura 3.16 – Método da Secante com o auxílio de planilha eletrônica. | 59 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.17–Localização da raiz da função $m(x) = 3^x - 2$ | 60 |
| Figura 3.18–Método da Secante através de planilha eletrônica. | 60 |
| Figura 3.19–Polinômio interpolador de Lagrange com uso de planilha eletrônica. . . | 62 |
| Figura 3.20–Polinômio interpolador de Newton com a utilização de planilha eletrônica. | 63 |
| Figura 3.21–Polinômio interpolador de Newton com auxílio de planilha eletrônica. . | 64 |
| Figura 4.1 – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá -IFAP- Campus Macapá. | 67 |
| Figura 4.2 – Turma de Redes de Computadores (integrado) – 2º ano/IFAP/MACAPÁ-AP. | 68 |
| Figura 4.3 – Explicação sobre métodos iterativos (método da falsa posição). | 69 |
| Figura 4.4 – Laboratório de informática– Oficina sobre métodos iterativos através de planilha eletrônica. | 69 |
| Figura 4.5 – Discente calculando o zero de uma função através do uso de planilha eletrônica. | 70 |
| Figura 4.6 – Explicação sobre o método de Newton. | 71 |
| Figura 4.7 – Apresentação do algoritmo do método de Newton para o cálculo de zero de funções. | 71 |
| Figura 4.8 – Interpolação polinomial – Método de Lagrange. | 71 |
| Figura 4.9 – Discente fazendo o exercício sobre interpolação polinomial – método de Lagrange, com o uso de planilha eletrônica. | 72 |
| Figura 5.1 – Uso de planilha eletrônica em problemas matemáticos | 73 |
| Figura 5.2 – Importância do uso de planilhas eletrônicas na resolução de problemas matemáticos | 74 |
| Figura 5.3 – Conhecimento de métodos iterativos para o cálculo de zero de funções e interpolação polinomial. | 74 |
| Figura 5.4 – Compreensão sobre a teoria por trás dos métodos numéricos. | 75 |
| Figura 5.5 – Escolha do método mais interessante para o cálculo de zero de funções. | 76 |
| Figura 5.6 – Análise do uso da planilha eletrônica e dos métodos numéricos para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial. | 76 |
| Figura 5.7 – Resultado sobre se a planilha eletrônica facilitou o entendimento e a aplicação dos métodos apresentados. | 77 |
| Figura 5.8 – Dificuldades na utilização dos métodos numéricos através de planilha eletrônica. | 78 |
| Figura 5.9 – Percepção dos alunos sobre a relação entre os métodos numéricos e conceitos matemáticos vistos no ensino médio. | 78 |
| Figura 5.10–Habilidade em resolver problemas matemáticas utilizando métodos numéricos pós experiência. | 79 |
| Figura 5.11–Intenção de explorar mais sobre métodos numéricos e sua aplicação em outras áreas do conhecimento. | 80 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 2.1 – Localização de pelo menos uma raiz de f | 33 |
| Tabela 2.2 – Método da bisseção. | 35 |
| Tabela 2.3 – Método da falsa posição. | 37 |
| Tabela 2.4 – Método de Newton. | 39 |
| Tabela 2.5 – Método da secante. | 41 |
| Tabela 2.6 – Relação entre temperatura e calor específico. | 42 |
| Tabela 4.1 – Descrição dos equipamentos dos laboratórios de informática – IFAP - Campus Macapá. | 68 |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 1.1 | O problema | 15 |
| 1.2 | Meta e objetivos | 16 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 18 |
| 2.1 | Zeros de funções reais | 18 |
| 2.1.1 | Métodos diretos para os zeros de uma função | 19 |
| 2.1.1.1 | Função linear | 19 |
| 2.1.1.2 | Função Afim | 20 |
| 2.1.1.3 | Função quadrática | 20 |
| 2.1.1.4 | Função polinomial | 22 |
| 2.1.1.5 | Função exponencial | 23 |
| 2.1.1.6 | Função Logarítmica | 25 |
| 2.1.1.7 | Função Trigonométrica | 26 |
| 2.1.2 | Métodos numéricos para os zeros de uma função | 32 |
| 2.1.2.1 | Método da bisseção | 34 |
| 2.1.2.2 | Método da falsa posição | 36 |
| 2.1.2.3 | Método de Newton | 37 |
| 2.1.2.4 | Método da secante | 39 |
| 2.1.2.5 | Comparação entre os métodos | 41 |
| 2.2 | Interpolação | 42 |
| 2.2.1 | Interpolação Polinomial | 43 |
| 2.2.1.1 | Interpolação linear | 43 |
| 2.2.1.2 | Interpolação Quadrática | 43 |
| 2.2.2 | Método de Lagrange | 44 |
| 2.2.3 | Método de Newton | 45 |
| 2.2.4 | Comparação entre os métodos de Newton e de Lagrange | 47 |
| 3 | O CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES E INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL COM O AUXÍLIO DE PLANILHA ELETRÔNICA | 48 |
| 3.1 | Método da Bisseção e Planilha Eletrônica | 48 |
| 3.2 | Método da Falsa Posição e Planilha Eletrônica | 51 |
| 3.3 | Método de Newton e Planilha Eletônica | 55 |
| 3.4 | Método da Secante e Planilha Eletrônica | 58 |
| 3.5 | Polinômio Interpolador de Lagrange e Planilha Eletrônica | 61 |
| 3.6 | Polinômio Interpolador de Newton e Planilha Eletrônica | 62 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 4 | METODOLOGIA | 65 |
| 4.1 | Caracterização da Pesquisa | 66 |
| 4.2 | Local e Participantes da Pesquisa | 66 |
| 4.3 | Coleta de informações | 68 |
| 5 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 73 |
| 6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 82 |
| | REFERÊNCIAS | 83 |
| | APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PARTICIPAN- TES DA OFICINA | 85 |

1 INTRODUÇÃO

É inegável a importância da pesquisa científica por diversas razões. Uma delas está em seu bojo, a saber: a promoção do acesso ao conhecimento que a partir daí podem ser geradas mudanças práticas que contribuem de forma substancial na vida em sociedade.

A busca por métodos eficientes no campo da Matemática Aplicada é uma constante na evolução do conhecimento científico. Nesse contexto, a presente dissertação se propõe a explorar e analisar os Métodos Numéricos para o Cálculo de Zeros de Funções e Interpolação Polinomial, destacando sua relevância e aplicabilidade no contexto educacional do ensino médio. O foco principal será a implementação prática desses métodos por meio de planilhas eletrônicas, visando facilitar a compreensão e o aprendizado dos alunos do Instituto Federal do Amapá (IFAP).

Ao integrar conceitos teóricos e práticos, a pesquisa busca não apenas apresentar os fundamentos desses métodos, mas também demonstrar como sua aplicação pode ser acessível e estimulante para os estudantes. A escolha de utilizar planilhas eletrônicas como ferramenta pedagógica visa aproximar os alunos do ambiente computacional, proporcionando uma abordagem que conecta teoria e prática de forma integrada.

Dessa maneira, a dissertação visa contribuir para o desenvolvimento do ensino de Matemática, promovendo uma aprendizagem mais dinâmica e envolvente. Ao explorar a aplicação de Métodos Numéricos em um contexto tangível, espera-se despertar o interesse dos alunos para a importância e utilidade dessas ferramentas na resolução de problemas do mundo real, preparando-os para desafios mais complexos no campo da ciência e tecnologia.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento orientador para a educação básica no Brasil, definindo o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos têm o direito de desenvolver ao longo de sua trajetória escolar. Os métodos numéricos, por outro lado, são técnicas matemáticas utilizadas para resolver problemas complexos que podem não ter soluções analíticas diretas. Apesar de a BNCC não se aprofundar em métodos específicos, ela fornece diretrizes gerais para as disciplinas da matemática, incluindo conceitos que podem estar relacionados aos métodos numéricos. Isso fica claro quando se pensa em duas habilidades para os alunos previstas na BNCC e que podem ser encontradas nos métodos numéricos ao associá-los, por exemplo, a planilhas eletrônicas. São elas: o pensamento algébrico, computacional e entre outros. Sobre o pensamento algébrico, a BNCC diz que,

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependên-

cia entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2018).

Por outro lado,

Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática (BRASIL, 2018).

Fazendo uma breve leitura na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.398/96), pode-se concluir que um dos escopos centrais do ensino médio, além da consolidação e do aprofundamento dos conhecimentos durante o nível fundamental, com o intuito de garantir a continuidade de estudos, é a de preparar o aluno para o mercado de trabalho; para o exercício da cidadania; formá-lo eticamente; desenvolver sua autonomia intelectual e, por fim, ajudá-lo a compreender os processos produtivos. Com base nisso, pode-se dizer que o atual cenário da escola, a fim de que possa alcançar os pontos principais elencados acima, não pode mais ficar limitada apenas à educação disciplinar de natureza enciclopédica. Assim, ele carece de novos horizontes que possam externar de forma fiel os caminhos a serem seguidos, a fim de que se possa chegar ao que foi pré-estabelecido. Dessa maneira, a proposta desse trabalho (Métodos Numérico para o Cálculo de Zeros de Funções e interpolação polinomial: Uma Abordagem para o Ensino Médio) é uma trilha nesse sentido.

Por outra lado, sabe-se que para trabalhar os métodos numéricos é comum utilizarmos ferramentas tecnológicas, seja calculadora ou computador. Assim, os problemas abordados no capítulo 4 serão solucionados através de planilhas eletrônicas, mediante fórmulas recursivas. O uso de planilhas eletrônicas é uma forma de programar recursivamente o método numérico e obter em pouco tempo a solução do problema.

Destaca-se que esta dissertação, de forma alguma, tem como foco mecanizar o aluno, no sentido de fazer com que ele forneça resultados sem saber quais os caminhos que os geraram, mas sim fornecer ao professor ferramentas que possibilite a melhora do processo de ensino aprendizagem de cada discente.

O cálculo numérico aproximado está a assumir importância cada vez maior nos tempos atuais, com o desenvolvimento dos computadores eletrônicos e suas aplicações à vida das sociedades modernas, às investigações espaciais, etc., tendo conduzido a criação de um novo ramo da matemática (SILVA, 1975). Segundo Pires (2014), são duas as principais situações que nos levam à utilização de métodos numéricos para a busca de uma solução

de um problema: a complexidade do procedimento matemático para a obtenção da solução ou quantidade de informações a serem manipuladas na resolução.

O método numérico está presente no currículo das ciências exatas. Dessa forma, ele é visto nas engenharias, física, matemática, química, ciência da computação entre outras. Apesar de sua relevância, ele não é aproveitado na educação básica, mesmo sendo uma ferramenta que, quando utilizada de forma adequada, pode trazer um ganho substancial no aprimoramento dos conhecimentos dos discentes, principalmente no que se refere aos métodos diretos (fornecem solução exata) que, de modo geral, aos alunos não é de fácil compreensão. Nessa linha, os alunos poderão vislumbrar a matemática como ferramenta para entender a tecnologia e esta como ferramenta para entender àquela.

Em consequência disso, faremos uma fundamentação teórica a respeito dos métodos diretos e indiretos, destacando as etapas de resolução de problemas sobre ambos os métodos.

Também faremos uma identificação da metodologia, mostrando de que forma ocorreu esse trabalho.

Por fim, no capítulo 4 será trabalhada a resolução de problemas do ensino médio (zero de funções e interpolação polinomial) com o auxílio de planilhas eletrônicas, destacando que os exercícios abordados foram construídos com base nos vistos no ensino médio.

1.1 O problema

O uso de ferramentas tecnológicas, por ocasião das aulas de matemática, pode ser marcante no desempenho dos alunos, já que proporciona uma outra maneira de se ver a matemática além da lousa ou dos livros didáticos. Além disso, traz dinâmica às aulas que podem ser maçantes e, não raras as vezes, desestimulantes, haja vista a abstração carregada no bojo da matemática.

A matemática nem sempre encanta e, associá-la ao uso de tecnologias é uma forma de possibilitar que o aluno a veja no ensino sob uma nova perspectiva, e isso, pode despertar o interesse. Corroborando o que foi dito, Miguel (2004) afirma que a finalidade do ensino de matemática é fazer o estudante compreender e se apropriar da própria matemática concebida como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmos e etc.

No entanto, não podemos esquecer que um número considerável de escolas públicas brasileiras não possui laboratório de informática e quando possui, os computadores são lentos e desprovidos de software relacionados ao ensino de matemática. Apesar disso, as planilhas eletrônicas, por exemplo, mesmo sendo um recurso que não foram pensados no propósito educativo, também podem ser utilizadas como recurso tecnológico úteis à aprendizagem matemática. Planilhas oferecem uma gama de possibilidades e permitem explorar, por exemplo, sequência numérica, juros simples e composto, raízes de equações, etc. Além do mais, com base em trabalhos já feitos, é uma ótima ferramenta de aprendizagem quando o assunto é método numérico.

Pesquisas apontam que as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo que envolve funções são reconhecidas tanto pelos professores como pelos pesquisadores na área de Ensino da Matemática (STOPPE, 2019). Para (PACHECO; ANDREIS, 2018), essas dificuldades podem estar ligadas

ao professor (metodologias e práticas pedagógicas), ao aluno (desinteresse pela disciplina), à escola (por não apresentar projetos que estimulem o aprendizado do aluno ou porque as condições físicas são insuficientes) ou à família (por não dar suporte e/ou não ter condições de ajudar o aluno).

Esse mesmo autor menciona que

as dificuldades de aprendizagem em Matemática podem estar relacionadas a impressões negativas oriundas das primeiras experiências do aluno com a disciplina, à falta de incentivo no ambiente familiar, à forma de abordagem do professor, a problemas cognitivos, a não entender os significados, à falta de estudo, entre outros fatores (PACHECO et al., 2018).

Nessa ocasião, “o professor deve ter a possibilidade de propor aos alunos um contexto enriquecido de situações que eles possam explorar, fazer representações, fazer abstrações, realizar o processo de modelagem matemática, entre outras possibilidades.” (TORRES; TORRES, 2019).

Pesando no exposto acima, ou seja, nas dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem de conteúdos relacionados a funções pertinente oferecer uma ferramenta (neste caso alguns métodos numéricos) ao professor para que este contribua de forma mais significativa no processo de ensino aprendizagem dos alunos. No mais, possibilitar ao aluno, com o auxílio da tecnologia (calculadora ou planilha eletrônica), maior facilidade de resolução de problemas que seriam complexos caso fossem resolvidos pelos métodos diretos (fornecem soluções exatas) e buscar, assim, o aprimoramento de suas habilidades cognitivas.

1.2 Meta e objetivos

A meta da pesquisa é propor a possibilidades de se trabalhar no ensino médio os métodos iterativos para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial, isto mediante a utilização de planilhas eletrônicas. Assim, a pesquisa foi desenvolvida com o objetivo geral de verificar quais efeitos as intervenções educativas em relação ao proposto acima podem proporcionar aos estudantes do 2º ano do ensino médio. A seguir, são apresentados os objetivos:

- Dar ao professor a possibilidade de uma nova abordagem na resolução de problemas, possibilitando-lhe, assim, um avanço em relação ao paradigma do modelo tradicional de ensino ;

- Proporcionar aos alunos do ensino médio a possibilidade de resolver problemas com auxílio de planilhas eletrônicas ;
- Investigar os principais métodos numéricos que se relacionam com o zero de uma função e polinômios, conteúdos estudados no ensino médio;
- Possibilitar que o aluno desenvolva o pensamento algébrico, o computacional e o lógico.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir, será feita a abordagem dos principais tópicos relacionados à pesquisa. Por questão de finalidade, a explanação não será feita de forma aprofundada. Dessa forma, alguns conceitos serão omitidos, ficando, assim, a cargo do leitor uma pesquisa na literatura para mais detalhes. Por outro lado, fazer uma explanação que não esteja relacionada apenas aos conceitos de zeros de funções ou interpolação polinomial, é substancial não só para o desenvolvimento e entendimento do que será tratado aqui, mas, sobretudo, para a posterior aplicabilidade deste trabalho.

2.1 Zeros de funções reais

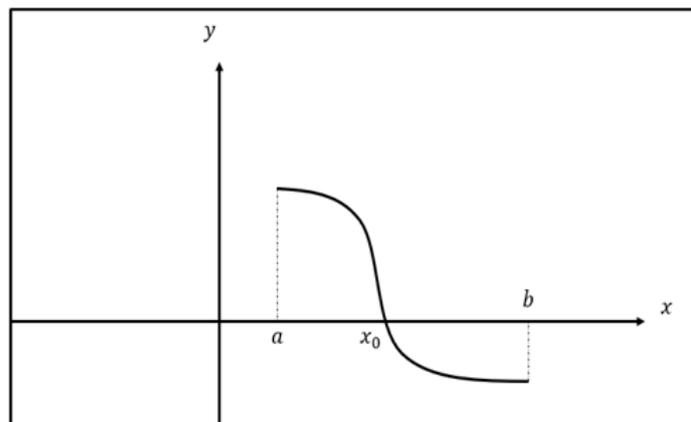
Encontrar zeros de funções permite solucionar problemas que aparecem nas diversas áreas do conhecimento, seja na engenharia, na física ou na química. Basicamente esses problemas surgem e a solução deles se baseia na resolução de uma equação.

Dependendo da natureza do problema, a equação que o modela pode ser bastante simples, como é o caso das equações do primeiro e do segundo grau. Em outros casos a equação que representa o problema pode ser complexa e de difícil solução. Vejamos a definição abaixo.

Definição 2.1. *Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chama-se zero de f a todo $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Graficamente, o(s) zero(s) de uma função correspondem às abcissas dos pontos em que o gráfico corta o eixo x . A Figura 2.1 mostra que a função f se anula no ponto x_0 .

Figura 2.1 – Gráfico da função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com zero em x_0 .



Fonte: Própria do autor.

A seguir, trataremos dos métodos diretos empregados na obtenção dos zeros reais das principais funções estudadas no ensino médio.

2.1.1 Métodos diretos para os zeros de uma função

Um método é dito direto quando é possível, através dele, encontrar a solução exata de um dado problema realizando-se um número finito de operações aritméticas. Perceba que isso indica que para chegarmos à solução exata da raiz de uma função, por exemplo, é preciso recorrer ao modelo analítico. No entanto, nem sempre é possível se chegar à raiz de uma dada função utilizando o modelo analítico e, neste caso, deve-se usar os métodos indiretos ou iterativos.

Vale destacar que as funções consideradas no decorrer deste trabalho serão direcionadas para o cálculo de suas raízes. Assim, de modo geral, o método direto permite a obtenção das raízes exatas de uma dada função. As técnicas conhecidas calculam os zeros das funções afim e quadrática, de algumas funções polinomiais, além, é claro, das funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. As funções apresentadas a seguir referem-se a essas técnicas.

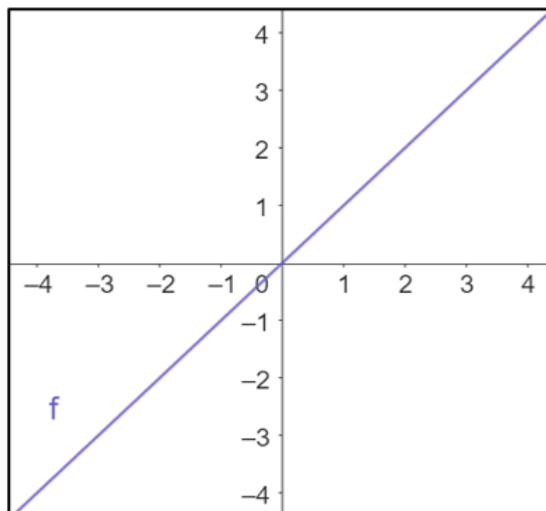
2.1.1.1 Função linear

A função da forma $f(x) = ax$ é chamada de função linear. Quanto se trata de problemas que envolvam proporcionalidade, ela é o modelo matemático a ser utilizado. Sem mais detalhes, pois o que nos interessa, neste momento, é apenas a caracterização de uma função linear, assim vamos a ela. Segundo Iezzi e Murakami (2013, p.98), uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de função linear quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

$$f(x) = ax \quad (2.1)$$

Graficamente, a função linear é uma reta que passa pela origem (ver Figura 2.2).

Figura 2.2 – Representação gráfica da função linear $f(x) = x$.



Fonte: Própria do autor.

2.1.1.2 Função Afim

Segundo Iezzi e Murakami (2013, p.100), uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de função afim quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa-se o elemento $ax + b \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ e b são números reais dados, ou seja,

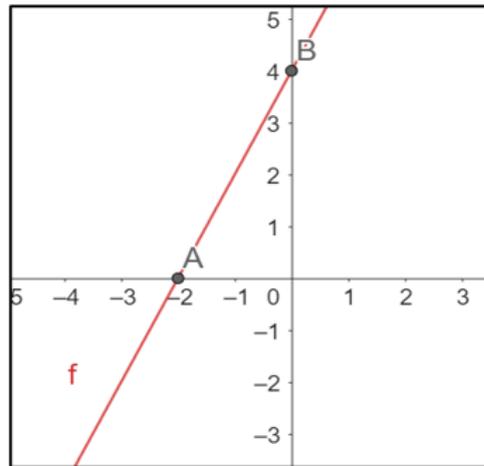
$$f(x) = ax + b. \quad (2.2)$$

Note que, para $b = 0$, a função afim $f(x) = ax + b$ se transforma na função linear $f(x) = ax$. Assim, podemos afirmar que a função linear é uma particularidade da função afim.

O processo para se chegar ao zero de uma função afim é simples, já que basta tomar $f(x) = 0$ e obter $x = -\frac{b}{a}$. Por exemplo, o zero da função dada por $f(x) = 2x + 4$ é $x = -2$.

Graficamente, a função afim é representada por uma reta que passa pelos pontos $(-\frac{b}{a}, 0)$ e $(0, b)$. A Figura 2.3 representa o gráfico da função $f(x) = 2x + 4$, cujo zero é $x = -2$.

Figura 2.3 – Representação gráfica da função $f(x) = 2x + 4$.



Fonte: Própria do autor.

2.1.1.3 Função quadrática

Definição 2.2. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c , com $a \neq 0$, tais que $f(x) = x^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$.

A solução para os zeros reais da função é dada pela seguinte fórmula:

$$f(x) = 0 \Rightarrow a^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \quad (2.3)$$

Na obtenção dos zeros da equação do segundo grau, apresentada em 2.3, devemos proceder da seguinte maneira:

- Igualar a zero a função: $a^2 + bx + c = 0$
- Isolar o valor de c : $a^2 + bx = -c$
- Completar quadrados: $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} = -c$
- Isolar x para obter o valor desejado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$

Além da fórmula aqui descrita, a equação $x^2 + bx + c = 0$ pode ser resolvida por fatoração e fórmula de Bhaskara, sendo esta última a mais empregada na educação básica. Por exemplo, os zeros da função quadrática $f(x) = x^2 + 2x - 3$ são:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.1. *Determine o(s) valor(es) reais de x , afim de que tenhamos $f(x) = 0$, onde $f(x) = x^2 - 2x + 1$.*

Solução: Podemos, facilmente, empregar o método direto, ou seja, o passo a passo justamente ensinado ao aluno na educação básica para resolver este problema. Assim, completando quadrados, temos:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Também podemos obter os zeros da função empregando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, com $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$. Assim,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1.$$

Exemplo 2.2. *Determine os possíveis zeros da função $f(x) = x^2 - 3x - 5$.*

Solução: Pelo método direto, temos

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Por vezes uma equação quadrática que forneça uma solução que envolva números irracionais $\sqrt{29}$ pode causar estranheza ao aluno e até mesmo confusão, pois ele não consegue ter, de forma direta, um valor exato para aquela solução. Sousa (2013), em que pese, compactua com a mesma ideia:

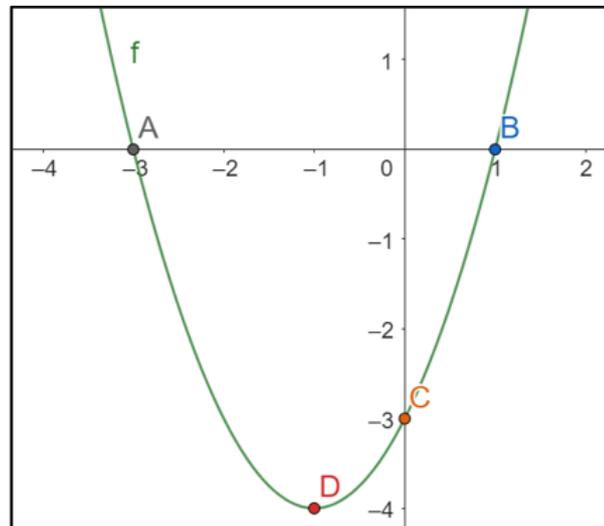
“Apesar da definição simples, o cálculo da raiz quadrada de n pode causar um desconforto nos adolescentes quando x não for um número racional. Ainda mais quando se trata de dar uma solução a um problema prático da vida real do qual se espera como resposta um número natural (ou uma fração dele) (SOUSA, 2013, p.1).

Nessa linha, com o uso de métodos iterativos esse tipo de problema pode ser sanado, pois fornece valores que estejam mais próximos à realidade do aluno e com isso podem trazer significado à sua aprendizagem e consequente desperta-lhe a curiosidade e interesse.

Graficamente, a função quadrática $f(x) = x^2 + bx + c$ é representada por uma parábola. Na construção da parábola leva-se em consideração os pontos $(0, c)$, $(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0)$ e $Vértice(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$. O vértice representa o ponto de máximo ou mínimo da função.

A Figura 2.4 representa o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$. O ponto D é o vértice, nos pontos A e B estão localizados as raízes e o ponto C , indica onde o gráfico de f corta o eixo y .

Figura 2.4 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



Fonte: Própria do autor.

2.1.1.4 Função polinomial

Lima et al. (2016) dizem que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando for da forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \quad (2.4)$$

onde a_0, \dots, a_n são números reais. Se $a_n \neq 0$, então dizemos que a função polinomial $f(x)$ tem grau n .

O zero da função polinomial pode ser obtido pelo método direto de Briot-Ruffini, levando à forma fatorada (JARLETTI, 2018, p. 26):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n) = 0, \quad (2.5)$$

em que r_i , com $i = 1, \dots, n$, são as raízes da equação polinomial.

Vale ressaltar que nem sempre é possível fatorar um polinômio de grau maior ou igual a 3, ou seja, não há métodos diretos que possibilitem sempre a obtenção das raízes como ocorre quando o polinômio é de grau menor ou igual a 2.

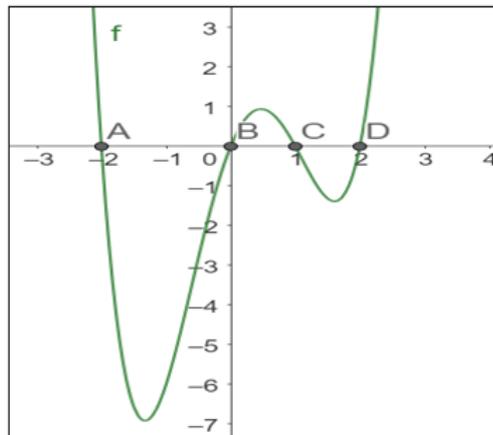
Exemplo 2.3. Obter os zeros da função polinomial $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$ por fatoração.

Solução: Por fatoração, temos:

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

com raízes iguais a -2 , 0 , 1 e 2 . A Figura 2.5 representa o gráfico da função $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$, onde os pontos A , B , C e D indicam a localização das raízes.

Figura 2.5 – Representação gráfica da função $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$.



Fonte: Própria do autor.

2.1.1.5 Função exponencial

Vamos agora apresentar algumas noções básicas de função exponencial, que possam nos interessar mais adiante. Vejamos a definição.

Definição 2.3. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base a (BONJORNO; JÚNIOR; CÂMARA, 2020, p. 69).

A partir da definição acima, podemos concluir que:

- (i) Se $a < 0$, logo $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo x real. Por exemplo, tomando $a = -3$ e $x = 1/4$, teríamos $(-3)^{1/4} = \sqrt[4]{-3}$ que não está definida para todo x real.
- (ii) Se $a = 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função constante: $f(x) = 1^x$, então $f(x) = 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
- (iii) Se $a = 0$ e $x \leq 0$, a^x não está definida nos reais.
- (iv) Se $a = 0$ e $x > 0$, então f é uma função constante igual a 0.

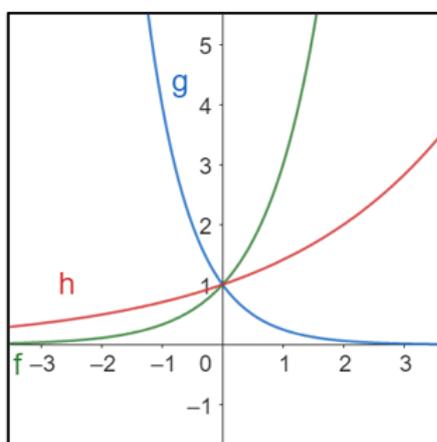
Relacionado à função exponencial, estão as seguintes propriedades da potenciação:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2. $a^1 = a$.
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$.
4. $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

A propriedade 1 indica que no produto de potências de mesma base, deve-se preservar a base e somar os expoentes, enquanto a propriedade 2 é uma consequência da definição. As propriedades 3 e 4 são úteis na resolução de inequações exponenciais. A propriedade 3 indica que sempre que a base for maior que 1, deve-se preservar o sinal da desigualdade em relação aos expoentes e a propriedade 4, indica que devemos trocar o sinal da desigualdade em relação aos expoentes sempre que a base estiver entre 0 e 1.

A função exponencial não apresenta zero, visto que seu gráfico não corta o eixo das abscissas. Por exemplo, as funções $f(x) = 3^x$, $g(x) = (1/4)^x$ e $h(x) = (\sqrt{2})^x$ estão representadas no gráfico abaixo e nele é possível perceber a inexistência de zeros das funções.

Figura 2.6 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.



Fonte: Própria do autor.

Entretanto, quando a função exponencial vier acompanhada de outras funções a equação resultante pode apresentar zeros. Nesse caso, a equação exponencial se baseia nos seguintes casos:

- (i) Todos os termos apresentam a mesma base;
- (ii) As bases são diferentes.

O exemplo a seguir mostra a solução por método direto da equação exponencial que apresenta bases iguais (i). No caso em que as bases são diferentes (ii), a solução envolve logaritmos, conteúdo abordado na próxima seção.

Exemplo 2.4. Vamos obter o zero da função exponencial $f(x) = 5^{3x-1} - 625$.

Solução: Os termos apresentam a mesma base, então:

$$f(x) = 5^{3x-1} - 625 \Leftrightarrow 5^{3x-1} - 625 = 0 \Leftrightarrow 5^{3x-1} = 625 \Leftrightarrow 5^{3x-1} = 5^4.$$

Igualando os expoentes, obtemos:

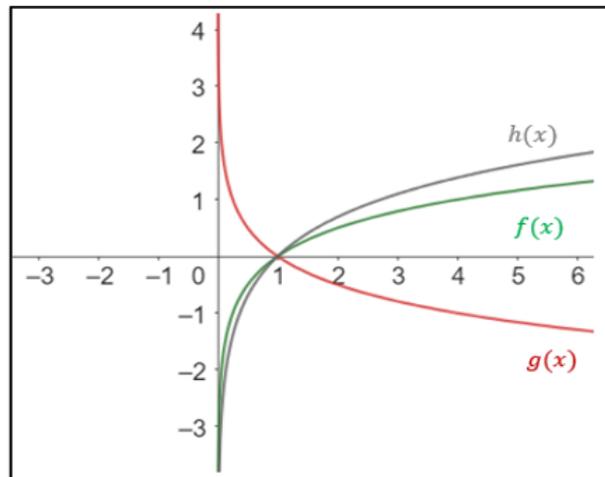
$$3x - 1 = 4 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

2.1.1.6 Função Logarítmica

Definição 2.4. Dado um número real a ($a > 0 \neq 1$), chamamos função logarítmica de base a a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ em que associa a cada x o número real $\log_a x$ (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 80).

Por exemplo, as funções $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ e $h(x) = \ln x$ são logarítmicas e seus gráficos estão representados na Figura a 2.7. A Figura 2.7 indica que os zeros das funções ocorrem no ponto $x = 1$ e ainda, que a função $g(x)$ é decrescente (base entre 0 e 1) e as funções $f(x)$ e $h(x)$, crescentes (base maior que 1).

Figura 2.7 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.



Fonte: Própria do autor.

Quanto ao(s) zero(s) de uma função logarítmica, podemos determiná-lo(s) com o emprego de propriedades de logaritmos ou pela relação inversa com funções exponenciais (JARLETTI, 2018, p. 29). Por exemplo, a função $f(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x + 5)$ apresenta logaritmos de mesma base. Assim,

$$\ln(2x + 1) - \ln(x + 5) = 0$$

\Leftrightarrow

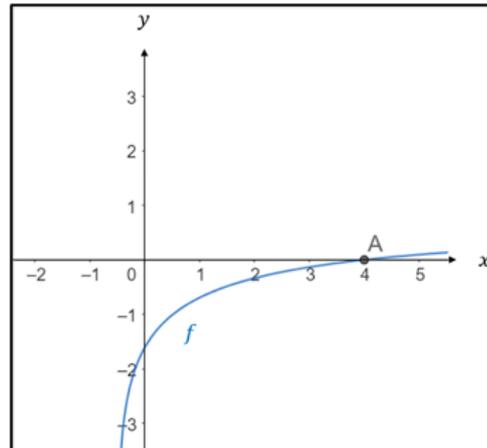
$$2x + 1 - (x + 5) = 2x + 1 - x - 5 = x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = 4.$$

A representação gráfica consta na figura a seguir. O ponto A representa o zero da função.

Figura 2.8 – Representação gráfica da função $f(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x + 5)$.



Fonte: Própria do autor.

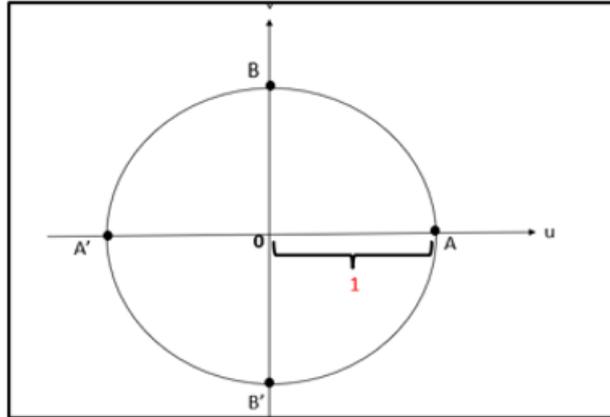
2.1.1.7 Função Trigonométrica

A termo de informação, as funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, presentes no dia a dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise. (LIMA et al., 2016).

Antes de adentrarmos nos conceitos das funções seno e cosseno, precisamos, primeiramente, definir o que é o círculo trigonométrico. Assim, Iezzi e Murakami (2013), definem círculo trigonométrico da seguinte forma:

Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal $u0v$. considere-mos a circunferência de centro 0 e raio $r = 1$ notemos que o comprimento dessa circunferência é 2π , pois $r = 1$. Vamos agora definir uma aplicação de \mathbb{R} sobre λ , isto é, vamos associar a cada número real x um único ponto P da circunferência λ do seguinte modo: 1º) se $x = 0$, então P coincide com A ; 2º) se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x , no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso; 3º) se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é P . A circunferência λ acima definida, com origem em A , é chamada de ciclo ou circunferência trigonométrica (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p.88-89).

Figura 2.9 – Ciclo trigonométrico.



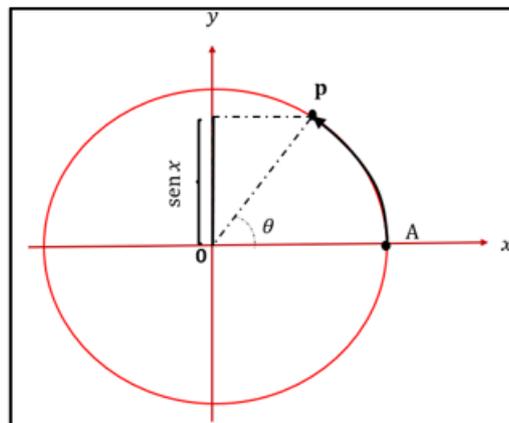
Fonte: Própria do autor.

Agora que já foi definido o que é ciclo trigonométrico, vamos para as definições das funções seno e cosseno.

Definição 2.5. Chama-se função seno e indica-se por $y = \text{sen}x$ ou $f(x) = \text{sen}x$ a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada arco de medida x o número real $y = \text{sen}x$.

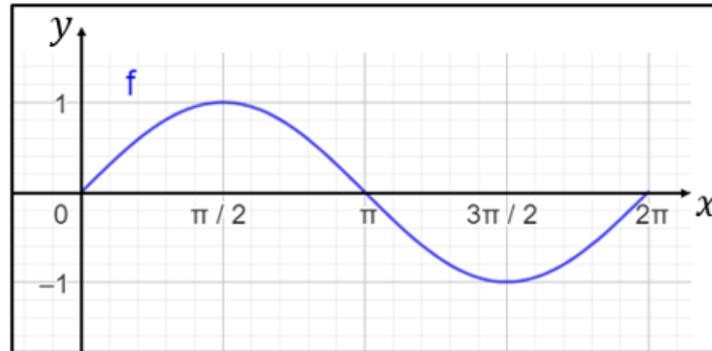
Graficamente,

Figura 2.10 – Representação gráfica da função seno.



Fonte: Própria do autor.

A Figura 2.11 mostra a representação da função seno no plano cartesiano, com domínio em $[0, 2\pi]$.

Figura 2.11 – Função seno com domínio em $[0, 2\pi]$.

Fonte: Própria do autor.

A função $f(x) = \text{sen}x$ tem como imagem o 0 quando x assume o valor de $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Dadas as funções representadas nos exemplos 2.5, 2.6 e 2.7, vamos encontrar suas raízes. Vejamos:

Exemplo 2.5. $f(x) = 2\text{sen}x$

Solução: Igualando a função $f(x) = 2\text{sen}x$ a zero, temos:

$$2\text{sen}x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.6. $g(x) = 1 + \text{sen}x$

Solução: Escrevendo $g(x) = 0$, tem-se:

$$1 + \text{sen}x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = -1 \Leftrightarrow \text{sen}^{-1}(-1) = x.$$

Note que a função $\text{sen}(x)$ assume -1 em $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma,

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.7. $h(x) = -1 + \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

Solução: Igualando a função a zero, temos:

$$0 = -1 + \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen}^{-1}(1) = 3x + \frac{\pi}{4}.$$

Note que o $\operatorname{sen}x$ é 1 quando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim temos,

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

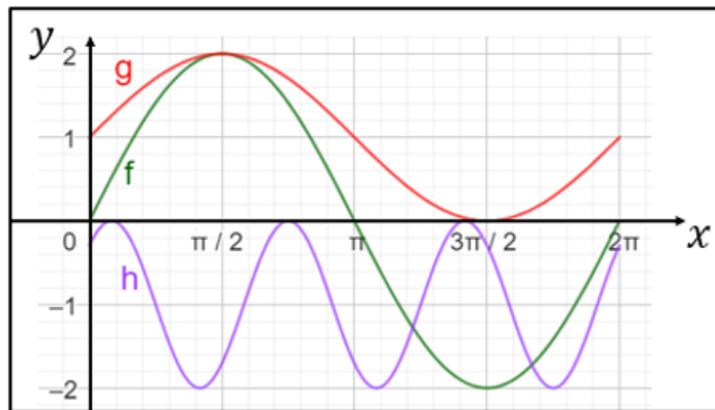
$$\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3},$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

As funções representadas nos exemplos 2.5, 2.6 e 2.7, constam no gráfico a seguir.

Figura 2.12 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

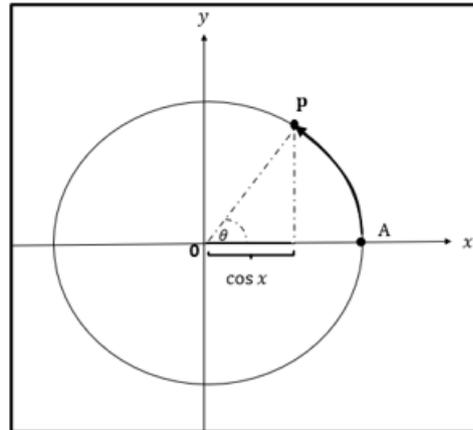


Fonte: Própria do autor.

Definição 2.6. Chama-se função $\operatorname{cos}x$ e indica-se por $y = \operatorname{cos}x$ ou $f(x) = \operatorname{cos}x$ a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada arco de medida x o número real $y = \operatorname{cos}x$.

Graficamente, a representação no ciclo trigonométrico da função $f(x) = \operatorname{cos}x$ é evidenciada na figura a seguir.

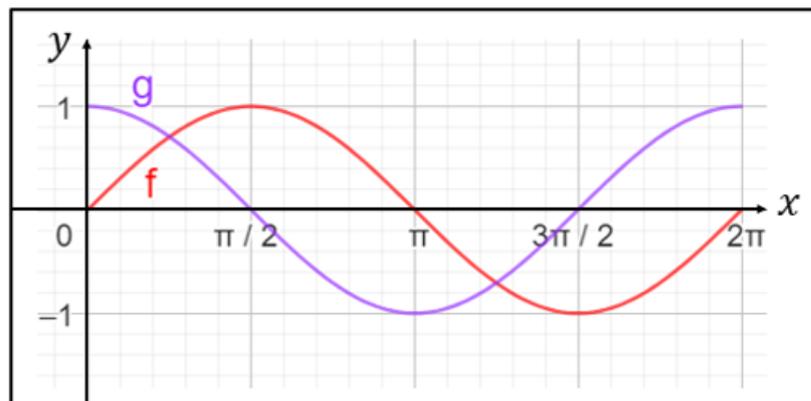
Figura 2.13 – Representação gráfica da função cosseno no ciclo trigonométrico.



Fonte: Própria do autor.

Abaixo está a representação gráfica no primeiro e quarto quadrante das funções seno e cosseno (Ver Figura 2.14).

Figura 2.14 – Gráfico das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{cos } x$.



Fonte: Própria do autor.

A função $f(x) = \text{cos } x$ tem como imagem o 0 quando x assume o valor de $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. Dessa forma, os zeros da função $\text{cos}(x)$ ocorrem nos pontos em que x é um múltiplo ímpar de $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Dadas as funções representadas nos exemplos 2.8, 2.9 e 2.10, vamos encontrar suas raízes.

Exemplo 2.8. $f(x) = \text{cos}(2x)$.

Solução: Igualando a zero a função, obtemos:

$$\text{cos}(2x) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\cos^{-1}(0) = 2x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4},$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.9. $g(x) = \cos(x + 2\pi)$.

Solução: De modo análogo ao exemplo anterior, temos,

$$\cos(x + 2\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cos^{-1}(0) = x + 2\pi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x + 2\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2k\pi - 3\pi}{2},$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.10. $h(x) = -\cos(x)$.

Solução: O zero da função é dado por:

$$-\cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cos^{-1}(0) = x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2},$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

2.1.2 Métodos numéricos para os zeros de uma função

O método numérico constitui um conjunto de técnicas que podem ser empregadas para se obter a solução aproximada de um dado problema. A grande façanha, a grosso modo, sobre método numérico é que ele nos permite empregar técnicas numéricas na resolução de problemas, mesmo quando a solução analítica não é tão simples de ser obtida. Por exemplo, a raiz de uma equação pode ser obtida, sem muitas dificuldades, utilizando métodos numéricos, no entanto, nem sempre poderemos encontrar uma solução analítica para ela.

Dessa forma, os métodos numéricos nos permitem resolver desde os problemas mais simples até os mais complexos. Nessa linha, a termo de conhecimento, a integral da função $f(x) = e^{x^2}$, pelo que me consta, não possui solução analítica até então, no entanto, pode-se chegar, através de métodos numéricos, a uma primitiva aproximada para a integral da função em questão.

Na matemática é comum modelarmos um problema antes de obtermos a sua solução numérica. Para chegarmos à solução do problema é crucial a utilização de recurso tecnológico. Sperandio, Mendes e Silva (2006), dizem que:

feita a modelagem matemática, a fase seguinte consiste na resolução do modelo matemático. Mostrar se ele tem solução ou não e se a sua solução é única ou não entrega a fase de resolução. Feito ou admitido isso, resolver um modelo matemático numericamente significa obter uma solução, mesmo que aproximada, mesmo que exclusivamente por processos numéricos. A área da matemática que trata da concepção de processos numéricos e estuda sua exequibilidade para encontrar aproximações à solução do modelo matemático denomina-se Análise Numérica. Foi com o surgimento do computador na década de 40 que a importância da análise numérica começou a ser notada, uma vez que, por meio do processamento eletrônico de dados, as técnicas numéricas se tornaram viáveis.

Os métodos numéricos, empregados na obtenção de zeros de funções, se dividem em duas etapas. A saber:

- (i) Localização ou isolamento das raízes;
- (ii) Refinamento, cuja finalidade é obter uma aproximação para a raiz que atenda uma precisão pré-estabelecida, nesse caso um dado ϵ (épsilon).

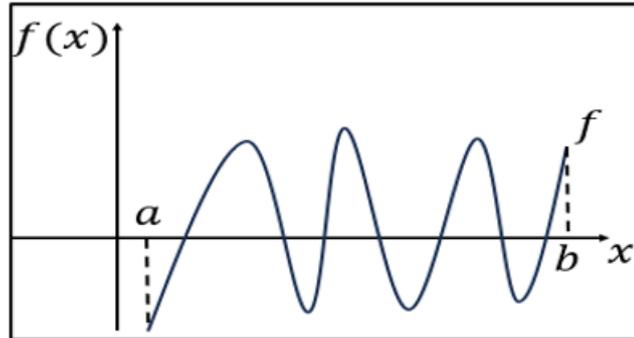
Teorema 2.1. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$ (SOBRAL et al., 2021).*

Teorema 2.2. *Sob a hipótese do Teorema 2.1, se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em (a, b) , então este intervalo contém uma única raiz ou zero de $f(x)$ (PIRES, 2014, p. 25-26).*

O Teorema 2.1 nos permite concluir que, se os sinais de f forem contrários nos extremos do intervalo (a, b) , então o gráfico de f corta o eixo das abscissas pelo menos

uma vez nesse intervalo (Ver Figura 2.15). Já o Teorema 2.2, analisa a taxa de variação da função no intervalo (a, b) . Se a taxa de variação for positiva(negativa) a função será crescente (decrecente), o que nos garante que o gráfico de f corta o eixo das abscissas uma única vez.

Figura 2.15 – Gráfico da função f no intervalo (a, b)



Fonte: Própria do autor.

Exemplo 2.11. *Determine um intervalo onde $f(x) = x^3 - 3x + 1$ contenha uma única raiz.*

Solução: Para determinar o que se pede, vamos primeiramente construir uma tabela e por inspeção, iremos observar os sinais de f em cada ponto.

Tabela 2.1 – Localização de pelo menos uma raiz de f .

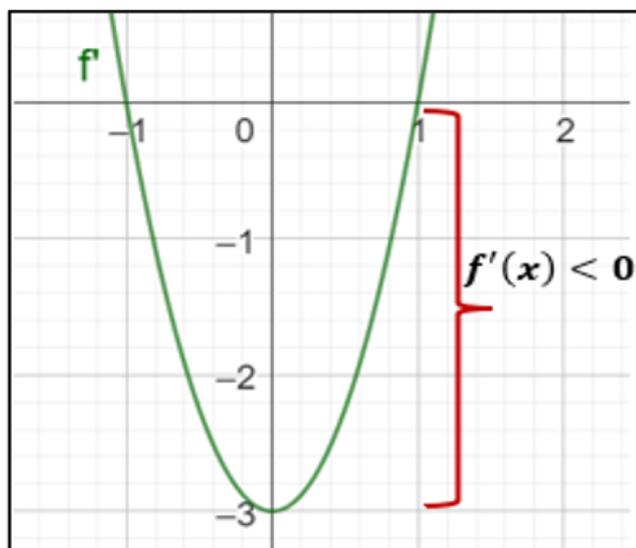
| | | |
|--------------------------|---|----|
| x | 0 | 1 |
| $f(x)$ | 1 | -1 |
| Sinal de $f(x)$ no ponto | + | - |

Fonte: Própria do autor.

Com base no Teorema 2.1 e na Tabela 2.1, $f(x)$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $(0, 1)$, pois os sinais de $f(0)$ e $f(1)$ são opostos. Para verificarmos a unicidade da raiz devemos recorrer ao Teorema 2.2. Calculando a derivada da função, temos:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = x(x^2 - 1).$$

Em $(0, 1)$, $f'(x) < 0$ (Ver Figura 2.17) e $f(x)$ é crescente. Logo, existe uma única raiz em $(0, 1)$.

Figura 2.16 – Gráfico de $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Fonte: Própria do autor.

2.1.2.1 Método da bissecção

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Conforme o Teorema 2.1, pode-se garantir que existe ao menos um zero dessa função em (a, b) . Assim, o método da bissecção, também conhecido como o método do meio intervalo (MMI), destina-se, a grosso modo, a encontrar uma aproximação da raiz da função dada, com uma precisão pré-estabelecida, construindo intervalos menores que o intervalo original, desde que os critérios supra citados sejam atendidos. O procedimento deve ser repetido caso não atendida a precisão fornecida. Cunha e Casto (2010) dizem que:

Para determinar uma aproximação para o zero de uma função, satisfeitas as condições requeridas, o método da bissecção opera reduzindo a amplitude do intervalo que contém o zero até obter um intervalo $[a, b]$ de tamanho menor que ϵ , ou seja, tal que $b - a < \epsilon$, em que ϵ é uma precisão prefixada.

Através do algoritmo isso fica mais claro:

- (i) Intervalo inicial $[a, b]$ e precisão ϵ .
- (ii) Se $b - a < \epsilon$, escolhamos qualquer valor que pertença a $[a, b]$.
- (iii) Se $b - a \geq \epsilon$, tomemos $m = \frac{a+b}{2}$ para cada iteração.
- (iv) Se $f(a)f(b) < 0$, troca-se b por m . Se $f(m)f(b) < 0$, troca-se a por m .
- (v) Volte para o passo (ii).

O método da bissecção é bastante robusto e sempre converge para uma solução, desde que as condições iniciais sejam adequadas. No entanto, ele pode ser relativamente lento em comparação com alguns métodos mais avançados, como o método de Newton, especialmente em problemas nos quais a função possui derivadas contínuas e é bem comportada.

O seguinte exemplo nos permite compreender adequadamente o método aqui estabelecido.

Exemplo 2.12. *Vamos determinar uma raiz aproximada e com precisão $\epsilon = 10^{-1}$ para a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ vista no exemplo 2.11.*

Solução: Como foi visto anteriormente, a função $f(x)$ possui apenas uma raiz no intervalo $(0, 1)$, dessa forma o método da bissecção já pode ser aplicado. Assim, os dados necessários ao método foram organizados em uma tabela (vide Tabela 2.1), a fim de que se chegasse à raiz desejada. Abaixo está a descrição de alguns passos com base na ideia do algoritmo da bissecção:

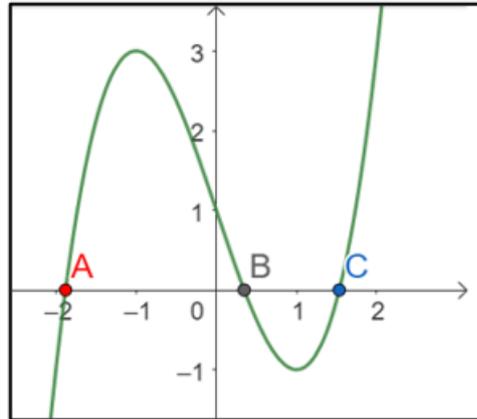
1. Em **B2** e **C2** foram inseridos, respectivamente, os valores extremos do intervalo dado: 0 e 1.
2. Foi calculado a média m entre os valores 0 e 1 e inserida em **D2**.
3. Obteve-se $f(0), f(1)$ e $f((0+1)/2) = f(0,5)$ (Vide **E2**, **F2** e **G2**). Como $f(1) \cdot f(0,5) < 0$, repetiu-se o 0 (**B3**) e trocou-se 1 pela média do intervalo “0,5”, conforme **C3**.
4. Nas demais linhas e respectivas colunas o processo foi feito exatamente com base nos critérios acima, até que fosse atingida a precisão desejada, conforme **H6**.

Tabela 2.2 – Método da bissecção.

| ... | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|----------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|---------------------|
| 1 | Iteração | a | b | m | $f(a)$ | $f(b)$ | $f(m)$ | $b - a$ |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0,5 | + | - | - | $1 > \epsilon$ |
| 3 | 2 | 0 | 0,5 | 0,25 | + | - | + | $0,5 > \epsilon$ |
| 4 | 3 | 0,25 | 0,5 | 0,375 | + | - | - | $0,25 > \epsilon$ |
| 5 | 4 | 0,25 | 0,375 | 0,3125 | + | - | + | $0,125 > \epsilon$ |
| 6 | 5 | 0,3125 | 0,375 | 0,3438 | + | - | + | $0,0625 < \epsilon$ |

Fonte: Própria do autor.

O gráfico a seguir, indica que $f(x)$ se anula para quaisquer um dos pontos A , B ou C . Dessa forma, esses pontos são ditos raízes ou zeros desta função.

Figura 2.17 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Fonte: Própria do autor.

Para se determinar o número de iterações k necessárias no método da bisseção, a fim de que se alcance a precisão almejada ϵ , deve-se proceder com o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
 \frac{b-a}{2^{k-1}} &< \epsilon \\
 \Leftrightarrow \\
 \frac{b-a}{\epsilon} &< 2^{k-1} \\
 \Leftrightarrow \\
 \log \left[\frac{b-a}{\epsilon} \right] &< \log 2^{k-1} \\
 \Leftrightarrow \\
 \frac{\log \left[\frac{b-a}{\epsilon} \right]}{\log 2} &< k-1 \\
 \Leftrightarrow \\
 k &> \frac{\log \left[\frac{b-a}{\epsilon} \right]}{\log 2} + 1.
 \end{aligned}$$

Assim, basta tomar o menor k inteiro que atenda a desigualdade acima.

2.1.2.2 Método da falsa posição

O método da falsa posição se difere do método da bisseção pela forma como ele atualiza a raiz, pois nele é usada a média ponderada em vez de a aritmética. Outra questão é que método da falsa posição considera maior aproximação para a raiz se comparado ao método da bisseção. Vejamos a fórmula utilizada para o método da falsa posição:

$$\bar{x} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (2.6)$$

Para uma melhor compreensão do método, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.13. Calcule, utilizando o método da falsa posição, uma aproximação para raiz do polinômio $f(x) = x^3 - 9x + 5$, com precisão $\epsilon = 10^{-2}$, sabendo-se que ela está no intervalo $[0, 5, -1]$.

Solução: Usando a equação 2.6, temos:

$$\bar{x}_1 = \frac{0,5 \cdot (-3) - 1 \cdot 0,625}{-3 - 0,625} = 0,5862$$

e

$$\bar{x}_2 = \frac{0,5 \cdot (-0,0744) - (0,5862 \cdot 0,625)}{(-0,0744) - (0,625)} = 0,5770$$

A solução aproximada para a raiz é 0,5770. Os parâmetros utilizados na obtenção do valor aproximado da raiz, pelo método da falsa posição, constam na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Método da falsa posição.

| ... | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----|-----------|-----|--------|-----------|--------|---------|--------------|---------------------|
| 1 | Iterações | a | b | \bar{x} | $f(a)$ | $f(b)$ | $f(\bar{x})$ | $ f(\bar{x}) $ |
| 2 | 1 | 0,5 | 1 | 0,5862 | 0,625 | -3 | -0,0744 | 0,0744 > ϵ |
| 3 | 2 | 0,5 | 0,5862 | 0,5770 | 0,625 | -0,0744 | -0,0011 | 0,0011 < ϵ |

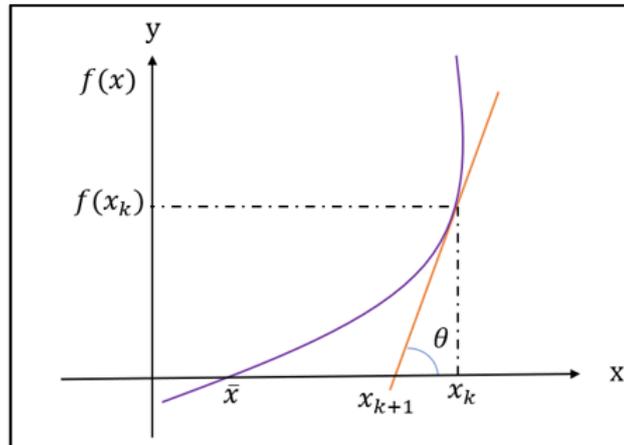
Fonte: Própria do autor.

2.1.2.3 Método de Newton

Também conhecido como o método das tangentes. O método de Newton é um método clássico aplicado em problemas da engenharia para resolver sistemas de equações não lineares (SILVEIRA, 2023). Esse método busca acelerar, com o uso da função derivada, o processo de encontrar uma aproximação para uma raiz. Destaca-se que a derivada não é estudada no ensino médio, no entanto, muitos trabalhos reforçam que suas aplicações são acessíveis a essa modalidade de ensino (ÁVILA, 2006; ARAÚJO et al., 2016; NEVES, 2016; RAMOS, 2022).

A Figura 2.18 representa o método de Newton utilizado para aproximar a raiz da função f , a partir da derivada no ponto x_k . Nela é possível notar que à medida que o valor de k aumenta, x_k se aproxima de \bar{x} .

Figura 2.18 – Interpretação geométrica do Método de Newton.



Fonte: Própria do autor.

Teorema 2.3. *Seja x uma raiz da equação $f(x)$, isolada em um intervalo I centrado em x e seja g uma função de iteração para a equação $f(x)$. Se*

(i) *g e sua derivada, g' , são contínuas em I ;*

(ii) *$|g'| \leq M, \forall x \in I$*

(iii) *$x_0 \in I$*

então a sequência $x_k, k \in \mathbb{N}$, gerada pelo processo iterativo, converge para $x_{k+1} = g(x_k)$. Converge para \bar{x} . Seja a aproximação \tilde{x} escolhida em $I_k, |\bar{x} - \tilde{x}| < \epsilon$.

Para esclarecermos o método, considere a Figura 2.18 e note que:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \\ &\Leftrightarrow \\ f'(x_k) &= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \end{aligned}$$

Daí, conclui-se que o método de Newton é dado por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (2.7)$$

com $f'(x_k) \neq 0$ e k inteiro.

O Método de Newton necessita:

- De uma aproximação inicial x_0 da raiz;
- Uma precisão que atenda $|x_k - x_{k+1}| < \epsilon_1$ ou $|f(x_{k+1})| < \epsilon_2$.

Exemplo 2.14. Use o método de Newton para obter uma aproximação da raiz da função $f(x) = x^2 - 2$, com precisão $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, sabendo que ela tem uma raiz em $(1, 2)$. Use o valor inicial $x_0 = 1$.

Solução: Temos que:

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x.$$

Pela regra 2.7,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}.$$

A Tabela 2.4 mostra o processo iterativo e o valor aproximado da raiz, 1,41422.

Tabela 2.4 – Método de Newton.

| k | x_k | $ x_k - x_{k+1} $ | $ f(x_{k+1}) $ |
|-----|---------|-------------------|----------------------|
| 0 | 1 | ... | $0,25 > \epsilon$ |
| 1 | 1,5 | 0,5 | $0,00695 > \epsilon$ |
| 2 | 1,41667 | 0,08333 | $0,00002 < \epsilon$ |
| 3 | 1,41422 | 0,00245 | |

Fonte: Própria do autor.

2.1.2.4 Método da secante

Consiste em aproximar a derivada da função $f(x_k)$, que ocorre no método de Newton, da seguinte forma:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \quad (2.8)$$

Note que, de acordo com a fórmula 2.8, a inclinação da reta foi modificada em relação ao método de Newton. Dessa forma, substituindo $f'(x_k)$ no Método de Newton, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} &= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} &= x_k - x_{k+1} \\ &\Leftrightarrow \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ &\Leftrightarrow \\ x_{k+1} &= \frac{x_k \cdot (f(x_k) - f(x_{k-1})) - f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k \cdot f(x_k) - x_k \cdot f(x_{k-1}) - x_k \cdot f(x_k) + x_{k-1} \cdot f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

ou seja,

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k) \cdot x_{k-1} - x_k \cdot f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \quad (2.9)$$

A equação 2.9 é o método da secante.

Diferente do Método de Newton, que necessita de apenas uma aproximação inicial, o Método da Secante necessita de duas (x_0 e x_1). A precisão é estabelecida da seguinte maneira:

$$|x_k - x_{k-1}| < \epsilon_1$$

ou

$$|f(x_k)| < \epsilon_2.$$

Exemplo 2.15. *Determine, através do método da secante, uma raiz \bar{x} em $[0, 5, \quad 1]$ para a função $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, com precisão $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$. Considere as aproximações $x_0 = 0, 5$ e $x_1 = 0, 6$ nos cálculos.*

Solução: Utilizando a equação 2.9,

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k) \cdot x_{k-1} - x_k \cdot f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

para $k = 1$, temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{f(x_1) \cdot x_0 - x_1 \cdot f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\ &\Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{(-0, 2840)(0, 5) - (0, 6)(-0, 3750)}{(-0, 2840) - (-0, 3750)} = 0, 9121. \end{aligned}$$

Para $k = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{f(x_2) \cdot x_1 - x_2 \cdot f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \\ &\Leftrightarrow \\ x_3 &= \frac{(0, 2588)(0, 6) - (0, 9121)(-0, 2840)}{(0, 2588) - (-0, 2840)} = 0, 7633. \end{aligned}$$

Para $k = 3$, encontramos:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{f(x_3) \cdot x_2 - x_3 \cdot f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \\ &\Leftrightarrow \\ x_4 &= \frac{(-0, 0553)(0, 9121) - (0, 7633)(0, 2588)}{(-0, 0553) - (0, 3588)} = 0, 7895. \end{aligned}$$

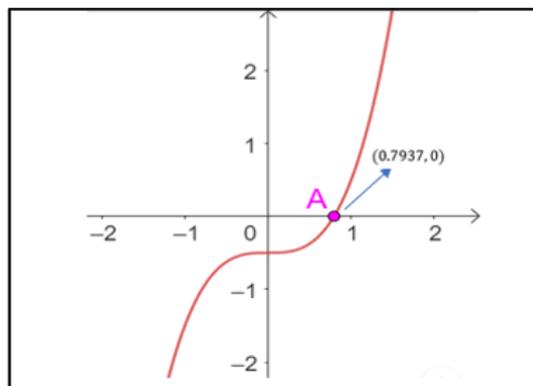
Dessa forma, a raiz que atende os critérios estabelecidos é $x_4 = 0, 7895$. A seguir, constam em uma tabela os valores obtidos em cada iteração. Vejamos:

Tabela 2.5 – Método da secante.

| k | x_k | $f(x_k)$ | $ f(x_k) $ | $ x_k - x_{k-1} $ |
|-----|--------|----------|------------|---------------------|
| 0 | 0,5 | -0,3750 | 0,3750 | ... |
| 1 | 0,6 | -0,2840 | 0,2840 | 0,1 > ϵ |
| 2 | 0,9121 | 0,2588 | 0,2588 | 0,3121 > ϵ |
| 3 | 0,7633 | -0,0553 | 0,0553 | 0,1488 > ϵ |
| 4 | 0,7895 | -0,0079 | 0,0079 | 0,0262 > ϵ |

Fonte: Própria do autor.

Figura 2.19 – Raiz da função $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$ fornecida através de software.



Fonte: Própria do autor.

Na Figura 2.19 pode-se auferir a eficácia do método numérico, já que este forneceu um valor para a raiz bem próximo ao dado pelo software. Só lembrando que a base foram dois teoremas respectivamente usados implicitamente aqui: a localização de pelo menos uma raiz em um dado intervalo e unicidade da raiz. No mais, se prosseguíssemos com o método, ou seja, tomando k cada vez maior, mais nos aproximaríamos da raiz exata da função.

2.1.2.5 Comparação entre os métodos

Analisando os diferentes métodos iterativos empregados até aqui, pode-se dizer que o método da bisseção é o de mais simples compreensão, pois basta considerar, a cada iteração, divisões do intervalo que contém a raiz, obtendo, assim, a metade do intervalo anterior. Mas, como foi possível perceber, o método da bisseção utiliza várias iterações para se chegar à raiz aproximada de acordo com a precisão estabelecida, o que pode ser um tanto dispendioso se comparado ao da falsa posição que, apesar de ser semelhante ao da bisseção, realiza menos iterações. Já o método da secante, segundo (SOBRAL et al., 2021), diferencia-se dos dois anteriores, pois, em vez de determinar intervalos em cada iteração, determina o próximo termo de uma sequência que converge para a solução. Como podemos observar, no método de Newton se utiliza apenas um valor inicial que a

partir dele podemos determinar uma aproximação para a raiz desejada. Por outro lado, o método da secante, precisa de dois valores iniciais. Em ambos os métodos, sugere-se que os valores iniciais não estejam distantes da raiz, por isso que os teoremas empregados para a verificação do intervalo que contém ao menos uma raiz ou, se o caso, uma única raiz, são tão importantes. Sobral et al. (2021) diz que:

“Apesar de que o método de Newton precisa apenas de um valor inicial é importante que este valor não esteja muito distante da solução, logo para implementação do método de Newton, também é importante a verificação do intervalo que contém uma raiz da função, todavia, em todos os métodos utiliza-se o fato de que as imagens da função nos extremos do intervalo analisado devem obter valores opostos, conforme estudado no teorema de Bolzano. O método de Newton demonstra ser muito eficaz quando aplicado em funções polinomiais, entretanto, necessita-se calcular $f'(p_n)$ para cada iteração realizada. No entanto, este fato pode não ser uma tarefa fácil quando aplicado a funções como trigonométricas e logarítmicas as quais não foram mencionadas nesta pesquisa. Para fazer as comparações entre os métodos numéricos alguns fatores como garantia de convergência, rapidez de convergência e esforço computacional devem ser levados em consideração. O método da bissecção realiza as divisões dos intervalos de forma simples, requerendo menor esforço computacional comparando-se aos demais métodos estudados, porém, este método, assim como o método da falsa posição necessita verificar a cada iteração o intervalo que contém a raiz, este é um dos fatores que garante a aproximação para a raiz, mas demanda maior esforço computacional”.

2.2 Interpolação

Aqui abordaremos problemas envolvendo interpolação. Basicamente, o problema de interpolação consiste em encontrar alguma função de modo que tenhamos $f(x_i) = y_i$, com $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$. A função f será denotada como função interpoladora dos pontos dados. A Tabela 2.6 relaciona calor específico da água e temperatura:

Tabela 2.6 – Relação entre temperatura e calor específico.

| | | | | |
|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|
| Temperatura ($^{\circ}C$) | 25 | 35 | 45 | 50 |
| Calor específico | 0,9985 | 0,9981 | 0,9984 | 0,9987 |

Fonte: Própria do autor.

Agora suponhamos que se queira calcular:

- A temperatura da água para um calor específico de 0,9983;
- O calor específico da água a uma temperatura de $31,5^{\circ}C$.

A interpolação nos ajuda a resolver esse tipo de problema e será tratada na seção a seguir.

2.2.1 Interpolação Polinomial

Interpolar uma função $f(x)$ baseia-se em aproximá-la por um polinômio $p(x)$, cujo grau é menor ou igual a n , de modo que:

$$f(x) = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (2.10)$$

A interpolação polinomial é um caso particular do problema geral de interpolação, no qual a família de funções é constituída de polinômios. A escolha de polinômios como funções interpoladoras é natural por diversos motivos, entre eles: se p é um polinômio de grau n , o valor $p(x)$ para um x real é calculado através de $(n+1)$ operações de multiplicação e $(n+1)$ operações de adição (JUSTO et al., 2020).

2.2.1.1 Interpolação linear

Utiliza dois pontos da tabela de valores, $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, e a aproximação ocorre através da seguinte expressão:

$$f(x) \approx P(x) = a_0 + a_1 x. \quad (2.11)$$

Exemplo 2.16. *Encontre $P_1(x)$ que interpole os pontos da tabela abaixo:*

| | | |
|----------|----|----|
| i | 0 | 1 |
| x_i | 2 | 3 |
| $f(x_i)$ | 11 | 15 |

Solução: Podemos escrever:

$$\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) \\ P_1(x_1) = f(x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(2) = f(2) \\ P_1(3) = f(3) \end{cases}$$

Em que se obtém o sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 = 11(I) \\ a_0 + 3a_1 = 15(II) \end{cases}$$

Subtraindo I de II , obtemos $a_1 = 4$ e, conseqüentemente, $a_0 = 3$. Logo, o polinômio interpolador procurado é $P_1(x) = 3 + 4x$.

2.2.1.2 Interpolação Quadrática

Utiliza três pontos da tabela de valores e o polinômio interpolador é dado por:

$$f(x) \approx P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (2.12)$$

Exemplo 2.17. Vamos obter $P_2(x)$ que interpole os pontos da tabela abaixo.

| | | | |
|----------|----|---|----|
| i | 0 | 1 | 2 |
| x_i | 0 | 1 | 2 |
| $f(x_i)$ | -1 | 4 | 13 |

Solução: Sabemos que:

$$\begin{cases} P_2(x_0) = f(x_0) \\ P_2(x_1) = f(x_1) \\ P_2(x_2) = f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_2(0) = f(0) \\ P_2(1) = f(1) \\ P_2(2) = f(2) \end{cases}$$

Através dos dados acima pode-se obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 + a_1(0) + a_2(0^2) = -1 \\ a_0 + a_1(1) + a_2(1^2) = 4 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2^2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 5(I) \\ 2a_1 + 4a_2 = 14(II) \end{cases}$$

Multiplicando I por -2 e subtraindo o sistema obtido de II , obtém-se:

$$2a_2 = 4 \Leftrightarrow a_2 = 2$$

e assim conclui-se que $a_1 = 3$. Deste modo, o polinômio interpolador procurado é $P_2(x) = -1 + 3x + 2x^2$.

2.2.2 Método de Lagrange

O polinômio de Lagrange é definido da seguinte forma (RUGGIERO; LOPES, 1997):

Definição 2.7. Sejam $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, (n+1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, com $k \in \mathbb{R}$ e $i = 0, 1, \dots, n$. Seja $P_n(x)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola f em $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Podemos representar $P_n(x)$ como:

$$P_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + \dots + f(x_n)L_n(x). \quad (2.13)$$

Onde,

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} \\ &\vdots \\ L_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

Pelo que vimos na definição 2.7, o método de Lagrange, a depender do número de pontos que queremos interpolar, pode ser um tanto laborioso, no entanto, um aspecto importante do método é que seu entendimento é fácil. Feito isso, vamos para uma aplicação.

Exemplo 2.18. Use o polinômio de Lagrange para interpolar o conjunto de dados da tabela abaixo.

| | | | |
|----------|----|---|----|
| i | 0 | 1 | 2 |
| x_i | 1 | 2 | 3 |
| $f(x_i)$ | -1 | 3 | 11 |

Solução: Como temos três pontos, o polinômio terá no máximo grau dois. Daí, pelo algoritmo de Lagrange, temos:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Fazendo as devidas substituições, temos:

$$L_0(x) = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(2 - 1)(2 - 3)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{2}$$

Assim,

$$P_2(x) = -\frac{(x - 2)(x - 3)}{2} - 3(x - 1)(x - 3) + 11\frac{(x - 1)(x - 2)}{2}$$

ou seja, o polinômio interpolador de Lagrange procurado é:

$$P_2(x) = 2x^2 - 2x - 1.$$

2.2.3 Método de Newton

O polinômio interpolador de Newton é dado por:

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}), \quad (2.14)$$

sendo que d_i , com $i = 0, 1, 2, \dots, n$, são as diferenças divididas calculadas por:

- Ordem 0: $d_0 = f[x_0] = f(x_0)$

- Ordem 1: $d_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
- Ordem 2: $d_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
- Ordem n : $d_n = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

Exemplo 2.19. Dada a tabela:

| | | | | |
|----------|---|---|----|----|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| x_i | 1 | 3 | 4 | 5 |
| $f(x_i)$ | 0 | 6 | 24 | 60 |

Determine:

- A tabela de diferença divididas;
- O polinômio de Newton que interpola os pontos da tabela;
- O valor estimado de $f(2, 5)$.

Solução: (a) A tabela de diferenças divididas é:

| x | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3 |
|-----|---------|--|--|---|
| 1 | 0 | $f[x_0, x_1] = \frac{6-0}{3-1} = 3$ | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{18-3}{4-1} = 5$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{9-5}{5-1} = 1$ |
| 3 | 6 | $f[x_1, x_2] = \frac{24-6}{4-3} = 18$ | $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{36-18}{5-3} = 9$ | |
| 4 | 24 | $f[x_2, x_3] = \frac{60-24}{5-4} = 36$ | | |
| 5 | 60 | | | |

Assim, devemos tomar $d_0 = 0$, $d_1 = 3$, $d_2 = 5$ e $d_3 = 1$.

(b) O polinômio de Newton é da forma:

$$P_3(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_3(x) = 3(x - 1) + 5(x - 1)(x - 3) + (x - 1)(x - 3)(x - 4)$$

$$\Leftrightarrow$$

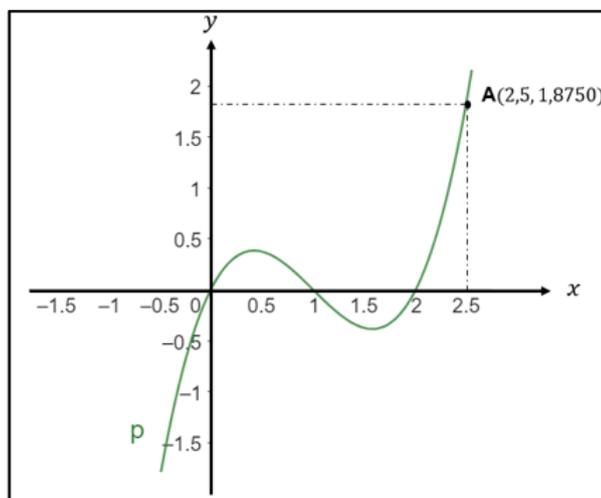
$$P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

(c) O valor aproximado para $f(2, 5)$ a partir do polinômio $P_3(x)$ é:

$$f(2, 5) \approx P_3(2, 5) = 2, 5^3 - 3 \cdot 2, 5^2 + 2 \cdot 2, 5 = 1, 875.$$

Na Figura 2.20 consta a representação gráfica do polinômio de Newton que interpola os pontos da tabela e ainda, o valor estimado de $f(2, 5)$.

Figura 2.20 – Interpretação gráfica do polinômio $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ no ponto 2,5.



Fonte: Própria do autor.

2.2.4 Comparação entre os métodos de Newton e de Lagrange

O polinômio interpolador de Newton e o polinômio interpolador de Lagrange são duas abordagens diferentes para encontrar um polinômio que passe por um conjunto dado de pontos. Ambos os métodos são utilizados para interpolação, que é o processo de encontrar uma função que se ajusta exatamente a um conjunto de pontos dados. Vimos que o polinômio interpolador de Newton usa diferenças divididas na sua construção, o que o torna numericamente eficiente, por outro lado, o polinômio interpolador de Lagrange pode ser mais intuitivo conceitualmente, no entanto, se comparado ao de Newton, é numericamente menos estável, principalmente quando muitos pontos são envolvidos. Vejamos o que BARROSO et al. (2018) dizem sobre tais métodos:

“o número de operações efetuadas quando se usa a fórmula de Newton é inferior ao número da fórmula de Lagrange. Entretanto, se no problema a ser resolvido existem, para um mesmo conjunto de x , várias funções y , nas quais devem ser feitas interpolações, e vantajoso o emprego da fórmula de Lagrange, pois a tabela de diferenças e produtos, uma vez construída, seria usada tantas vezes quantas fossem as interpolações, bastando para isso substituir-se os valores de y ”.

3 O CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES E INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL COM O AUXÍLIO DE PLANILHA ELETRÔNICA

Neste capítulo será feita uma abordagem dos métodos iterativos visto até aqui, no entanto, com o uso de planilhas eletrônicas.

Os problemas que constam a seguir, foram adaptados de livros didáticos de matemática do ensino médio, os quais estão em consonância com as normas atuais da BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Quanto aos demais problemas, optou-se pela reutilização de alguns exemplos já vistos nesse trabalho. Ao considerar os exemplos já feitos anteriormente no trabalho, possibilitará que o leitor compare os resultados anteriores como os novos obtidos através da planilha eletrônica, o que traz simplicidade e facilita na compreensibilidade do que está sendo abordado.

3.1 Método da Bissecção e Planilha Eletrônica

Problema 3.1. Considerando a função polinomial $f(x) = x^3 - 9x + 5$, vista no exemplo 2.13. Vamos calcular, com o auxílio de uma planilha eletrônica, uma aproximação para uma de suas raízes no intervalo $(0,5, 1)$. Considere a precisão $\epsilon = 0,01$.

Solução: Utilizando planilha eletrônica, a seu critério, siga as orientações a seguir:

1. Identifique as colunas: utilizaremos as células indicadas na Figura 3.1 como referência:

Figura 3.1 – Organização dos dados que serão utilizados no método da bissecção.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---------------------|------|------|------|-------|-------|
| 4 | k | a | b | $m = \frac{a+b}{2}$ | f(a) | f(b) | f(m) | b - a | Para? |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |

Fonte: Própria do autor.

2. Especificando os conteúdos das células;
 - A** – Esta coluna conterá os números de repetições.
 - B5** – Digite o limite inferior do intervalo, no caso 0,5.
 - C5** – Digite o limite superior do intervalo (1).
 - D5** – Ponto médio do intervalo. Digite: $= (B5 + C5)/2$ e pressione a tecla ENTER.
 - E5** – Valor de $f(a)$. Digite: $= (B5)^3 - 9 * (B5) + 5$ e pressione a tecla ENTER.
 - F5** – Valor de $f(b)$. Digite: $= (C5)^3 - 9 * (C5) + 5$ e pressione a tecla ENTER.
 - G5** – Valor de $f(m)$. Digite: $= (D5)^3 - 9 * (D5) + 5$ e pressione a tecla ENTER.
 - H5** – Valor de $|b - a|$. Digite: $= ABS(B5 - C5)$ e pressione a tecla ENTER.

I5 – Digite: = $SE(H5 > 0,01; "n\tilde{a}o"; "sim")$ e pressione a tecla ENTER. Copie essa fórmula para a célula imediatamente abaixo.

A6 – Digite: = $SE(E5 * G5 < 0; B5; D5)$.

B6 – Digite: = $SE(F5 * G5 < 0; C5; D5)$. Após isso, copie para as células **A6**, **B6**, ..., **I6** as fórmulas das células **A5**, **B5**, ..., **H5**. Finalmente, com as células **A6**, **B6**, ..., **I6** selecionadas, arraste o curso do mouse para o canto inferior direito da célula **I6** e após aparecer o símbolo “+”, pressione-o com o curso esquerdo do mouse e arraste para baixo até que na coluna I apareça a frase “sim”. A Figura 3.2 mostra o resultado obtido após o processo descrito.

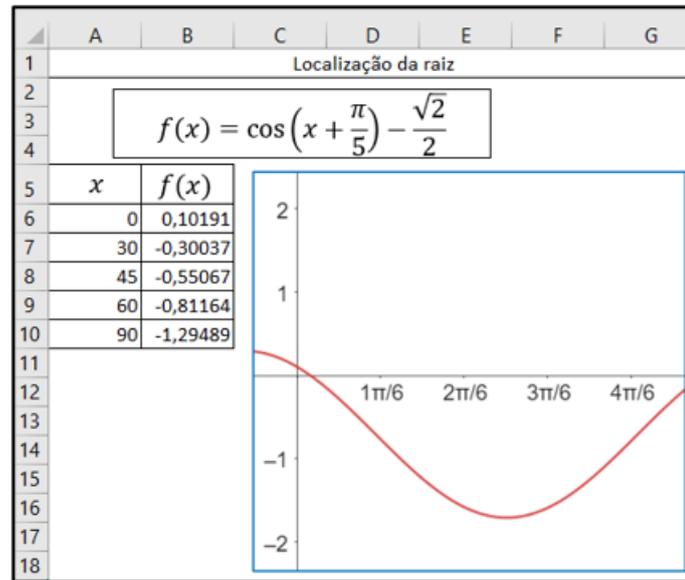
Figura 3.2 – Método da bisseção com o auxílio de planilha.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|-----------------------|--------|-------------------|---------------------|--------------------------------------|---------|---------|-----------|-------------|
| 2 | $f(x) = x^3 - 9x + 5$ | | $\epsilon = 0.01$ | | Intervalo que contém a raiz (0.5, 1) | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| | k | a | b | $m = \frac{a+b}{2}$ | $f(a)$ | $f(b)$ | $f(m)$ | $ b - a $ | Para? |
| 5 | 1 | 0,5000 | 1,0000 | 0,7500 | 0,6250 | -3,0000 | -1,3281 | 0,5000 | n\tilde{a}o |
| 6 | 2 | 0,5000 | 0,7500 | 0,6250 | 0,6250 | -1,3281 | -0,3809 | 0,2500 | n\tilde{a}o |
| 7 | 3 | 0,5000 | 0,6250 | 0,5625 | 0,6250 | -0,3809 | 0,1155 | 0,1250 | n\tilde{a}o |
| 8 | 4 | 0,5625 | 0,6250 | 0,5938 | 0,1155 | -0,3809 | -0,1344 | 0,0625 | n\tilde{a}o |
| 9 | 5 | 0,5625 | 0,5938 | 0,5781 | 0,1155 | -0,1344 | -0,0099 | 0,0313 | n\tilde{a}o |
| 10 | 6 | 0,5625 | 0,5781 | 0,5703 | 0,1155 | -0,0099 | 0,0527 | 0,0156 | n\tilde{a}o |
| 11 | 7 | 0,5703 | 0,5781 | 0,5742 | 0,0527 | -0,0099 | 0,0214 | 0,0078 | sim |

Fonte: Própria do autor.

Problema 3.2. Ache uma aproximação para um dos zeros da função $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$, onde $x \in (0, 2\pi)$, com uma precisão $\epsilon = 0,001$. (Adaptado de GARCIA e SOUZA (2016, p. 42)).

Solução: Primeiramente, com base no Teorema 2.1, vamos achar, através do auxílio de uma planilha eletrônica, um intervalo que contenha pelo menos uma raiz. Para se chegar no resultado fornecido pela Figura 3.4, abra uma planilha eletrônica de sua preferência, faça os seguintes passos:

Figura 3.3 – Localização da raiz de f .

Fonte: Própria do autor.

A5 – Digite: x e pressione a tecla ENTER.

B5 – Digite: $f(x)$ e pressione a tecla ENTER.

A6 – Digite: 0 e pressione a tecla ENTER.

B6 – Digite: $= \text{COS}(\text{RADIANOS}(\text{A6} + 180/5)) - \text{RAIZ}(2)/2$ e pressione a tecla ENTER.

A7 – Digite: 30 e pressione a tecla ENTER.

A8 – Digite: 45 e pressione a tecla ENTER.

A10 – Digite: 90 e pressione a tecla ENTER.

Agora selecione **A6** e **B6** e araste até a linha 10.

Perceba que os valores de x foram selecionados levando em consideração os ângulos mais conhecidos. Assim, analisando os valores fornecidos no intervalo **B6:B10**, pode-se dizer que, de acordo com o Teorema 2.1, existe pelo menos uma raiz no intervalo $(0, \pi/6)$ (vide Figura 3.3). Dessa forma, iremos utilizar esse intervalo para determinar uma aproximação para essa raiz. Ademais, siga os passos adiante para que você chegue no resultado fornecido pela Figura 3.4.

A – Esta coluna, a partir da linha 4, conterà o número de iterações.

B4 – Digite o limite inferior do intervalo, (0).

C4 – Digite o limite superior do intervalo (30).

D4 – Ponto médio do intervalo. Digite: $= (B4 + C4)/2$ e pressione a tecla ENTER;

E4 – Valor de $f(a)$. Digite: $= \text{COS}(\text{RADIANOS}(B4 + 180/5)) - \text{RAIZ}(2)/2$ e pressione a tecla ENTER.

F4 – Valor de $f(b)$. Digite: $= \text{COS}(\text{RADIANOS}(C4 + 180/5)) - \text{RAIZ}(2)/2$ e pressione a tecla ENTER.

G4 – Valor de $f(m)$. Digite: $= \text{COS}(\text{RADIANOS}(D4 + 180/5)) - \text{RAIZ}(2)/2$ e pressione a tecla ENTER.

H4 – Valor de $|b - a|$. Digite: $= \text{ABS}(C4 - B4)$ e pressione a tecla ENTER.

I4 – Digite: $= \text{SE}(H4 > 0,01; \text{"não"}; \text{"sim"})$ e pressione a tecla ENTER. Copie essa fórmula para a célula imediatamente abaixo.

A5 – Digite: $= \text{SE}(E4 * G4 < 0; B4; D4)$.

B5 – Digite: $= \text{SE}(F4 * G4 < 0; C4; D4)$. Após isso, copie para o intervalo **D5:I5** as fórmulas das células **D4:I4**, respectivamente. Finalmente, com as células do intervalo **A5:I5** selecionadas, arraste o curso do mouse para o canto inferior direito da célula **I5** e após aparecer o símbolo “+”, pressione-o com o curso esquerdo do mouse e arraste para baixo até que na coluna I aparece a frase “sim”.

Figura 3.4 – Método da bissecção com auxílio de planilha eletrônica.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|--|--------|-------------------|---------------------|---|---------|---------|---------|-------|
| 1 | MÉTODO DA BISSECÇÃO | | | | | | | | |
| 2 | $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\epsilon = 0.01$ | | Intervalo que contém a raiz $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ | | | | |
| | k | a | b | $m = \frac{a+b}{2}$ | f(a) | f(b) | f(m) | b - a | Para? |
| 4 | 1 | 0,0000 | 30,0000 | 15,0000 | 0,1019 | -0,3004 | -0,0778 | 30,0000 | não |
| 5 | 2 | 0,0000 | 15,0000 | 7,5000 | 0,1019 | -0,0778 | 0,0183 | 15,0000 | não |
| 6 | 3 | 7,5000 | 15,0000 | 11,2500 | 0,0183 | -0,0778 | -0,0283 | 7,5000 | não |
| 7 | 4 | 7,5000 | 11,2500 | 9,3750 | 0,0183 | -0,0283 | -0,0046 | 3,7500 | não |
| 8 | 5 | 7,5000 | 9,3750 | 8,4375 | 0,0183 | -0,0046 | 0,0069 | 1,8750 | não |
| 9 | 6 | 8,4375 | 9,3750 | 8,9063 | 0,0069 | -0,0046 | 0,0012 | 0,9375 | não |
| 10 | 7 | 8,9063 | 9,3750 | 9,1406 | 0,0012 | -0,0046 | -0,0017 | 0,4688 | não |
| 11 | 8 | 8,9063 | 9,1406 | 9,0234 | 0,0012 | -0,0017 | -0,0003 | 0,2344 | não |
| 12 | 9 | 8,9063 | 9,0234 | 8,9648 | 0,0012 | -0,0003 | 0,0004 | 0,1172 | não |
| 13 | 10 | 8,9648 | 9,0234 | 8,9941 | 0,0004 | -0,0003 | 0,0001 | 0,0586 | não |
| 14 | 11 | 8,9941 | 9,0234 | 9,0088 | 0,0001 | -0,0003 | -0,0001 | 0,0293 | não |
| 15 | 12 | 8,9941 | 9,0088 | 9,0015 | 0,0001 | -0,0001 | 0,0000 | 0,0146 | não |
| 16 | 13 | 8,9941 | 9,0015 | 8,9978 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0073 | sim |

Fonte: Própria do autor.

3.2 Método da Falsa Posição e Planilha Eletrônica

Problema 3.3. Encontre uma raiz aproximada da função $h(x) = \log_{x-3}(x^2 - 5x - 6)$, considerando a precisão $\epsilon = 0,0001$. (Adaptado de ANDRADE (2020, p. 130)).

Solução: Evidentemente, precisamos encontrar um intervalo que contenha uma raiz. No entanto, temos que nos atentar à condição de existência do logaritmo. Pela definição 2.4 de logaritmo, vimos que:

$$\log_a b = c$$

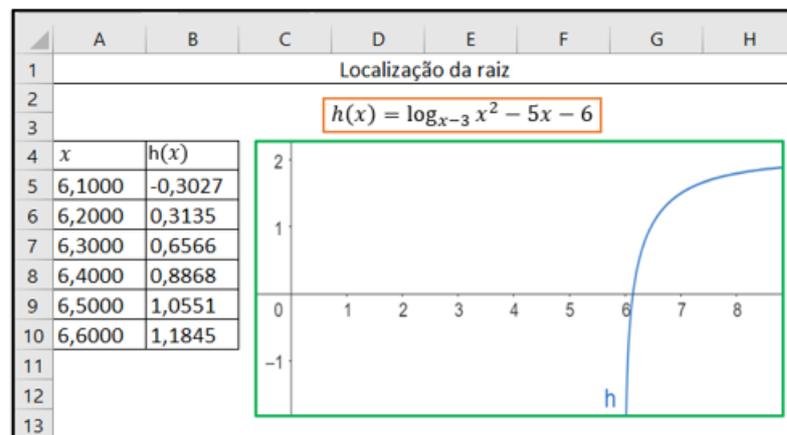
só existe se $a > 0, b > 0$ e $a \neq 1$. Dessa maneira, vamos analisar o logaritmando e a base.

- (i) Logaritmando: $x^2 - 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 6$.

$$(ii) \text{ Base: } \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Portanto, neste caso, só existe $\log_{x-3}(x^2 - 5x - 6)$ se considerarmos a intersecção das duas soluções, ou seja, $x > 6$. Daí, vamos tomar valores maiores do que 6, a fim de que tenhamos um intervalo que contenha a raiz de $h(x)$. Como utilizaremos uma planilha eletrônica, logo isso não será tão difícil. Siga as orientações mais adiante para obter os dados constantes na tabela da Figura 3.5.

Figura 3.5 – Localização das raízes da função $h(x) = \log_{x-3}(x^2 - 5x - 6)$.



Fonte: Própria do autor.

A4 – Digite x e pressione a tecla ENTER.

A5 – Digite: 6,1 e pressione a tecla ENTER

A6 – Digite: 6,2 e pressione a tecla ENTER. Após isso, selecione as células **A5** e **A6** e arraste o cursor do mouse ao canto inferior da célula **A6** até aparecer “+”. Agora pressione o botão esquerdo do mouse e arraste para baixo, até a célula **A10** e solte. Veja que foi criada uma sequência.

B4 – Digite: $h(x)$ e pressione a tecla ENTER.

B5 – Digite: $= \text{LOG}(A5 - 3; A5^2 - 5 * A5 - 6)$ e pressione a tecla ENTER. Após isso, selecione e arraste o cursor do mouse ao canto inferior dela até aparecer “+”. Agora pressione o botão esquerdo do mouse e arraste para baixo, até a célula **B10** e solte.

Podemos concluir que no intervalo (6,1, 6,2) contém pelo menos uma raiz. Usaremos este intervalo para resolvermos o problema proposto.

Utilize a tabela da Figura 3.6 como base e siga as instruções abaixo:

Figura 3.6 – Método da falsa posição com auxílio de planilha eletrônica.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|-----|-----|-----|--------|--------|---|--------|------------|----------|-------|
| 5 | k | a | b | $h(a)$ | $h(b)$ | $x = \frac{ah(b) - bh(a)}{h(b) - h(a)}$ | $h(x)$ | $h(a)h(x)$ | $ h(x) $ | Para? |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |

Fonte: Própria do autor.

A – Esta coluna conterá os números de repetições.

B5 – Digite o limite inferior do intervalo, no caso 6,1.

C5 – Digite o limite superior do intervalo, no caso 6,2.

D5 – Valor de $f(a)$. Digite: $= LOG(B5^2 - 5 * B5 - 6; B5 - 3)$ e pressione a tecla ENTER.

E5 – Valor de $f(b)$. Digite: $= LOG(C5^2 - 5 * C5 - 6; C5 - 3)$ e pressione a tecla ENTER ou selecione a célula D5 e com o curso esquerdo do mouse pressionado no símbolo “+” do canto inferior esquerdo da célula, arraste para a célula **E5** e solte.

F5 – Média ponderada do intervalo. Digite: $= (B5 * E5 - C5 * D5) / (E5 - D5)$ e pressione a tecla ENTER.

G5 – Valor de $h(x)$. Digite: $= LOG(F5^2 - 5 * F5 - 6; F5 - 3)$ e pressione a tecla ENTER.

H5 – Valor de $h(a) * h(x)$. Digite: $= D5 * G5$ e pressione a tecla ENTER.

I5 – Valor de $h(b) * h(x)$. Digite: $= E5 * G5$ e pressione a tecla ENTER.

J5 – Digite: $= ABS(G5)$ e pressione a tecla ENTER.

K5 – Digite: $= SE(I5 > 0,0001; "não"; "sim")$ e pressione a tecla ENTER.

A6 – Digite: $= SE(H5 < 0; B5; F5)$ e pressione a tecla ENTER.

B6 – Digite: $= SE(I5 < 0; C5; F5)$ e pressione a tecla ENTER.

Após todos os passos acima, copie para as células **D6**, **B6**, ..., **K6** as fórmulas das células **D5**, **B5**, ..., **K5**, respectivamente. Finalmente, selecione as células do intervalo **A6:K6** e mova o cursor ao canto inferior direito da célula **K6** até que aparece o símbolo “+”. Após isso, deixe pressionado o lado esquerdo do mouse em cima de “+” e arraste para baixo até que na coluna **K** apareça a palavra “sim” e solte. A Figura 3.7 mostra o resultado que deverá ser encontrado.

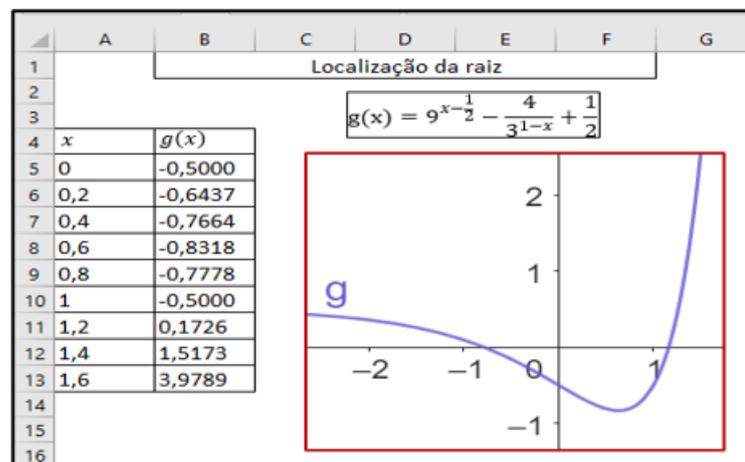
Figura 3.7 – Método da falsa posição com auxílio de planilha eletrônica.

| MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|---------|--------|---|--------|-----------|-----------|--------|-------|
| $h(x) = \log_{x-3} x^2 - 5x - 6$ $\epsilon = 0,0001$ Intervalo que contém a raiz (6,1, 6,2) | | | | | | | | | | |
| k | a | b | h(a) | h(b) | $x = \frac{a \cdot h(b) - b \cdot h(a)}{h(b) - h(a)}$ | h(x) | h(a)*h(x) | h(b)*h(x) | h(x) | Para? |
| 1 | 6,1000 | 6,2000 | -0,3027 | 0,3135 | 6,1491 | 0,0558 | -0,0169 | 0,0175 | 0,0558 | não |
| 2 | 6,1000 | 6,1491 | -0,3027 | 0,0558 | 6,1415 | 0,0090 | -0,0027 | 0,0005 | 0,0090 | não |
| 3 | 6,1000 | 6,1415 | -0,3027 | 0,0090 | 6,1403 | 0,0014 | -0,0004 | 0,0000 | 0,0014 | não |
| 4 | 6,1000 | 6,1403 | -0,3027 | 0,0014 | 6,1401 | 0,0002 | -0,0001 | 0,0000 | 0,0002 | não |
| 5 | 6,1000 | 6,1401 | -0,3027 | 0,0002 | 6,1401 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | sim |

Fonte: Própria do autor.

Problema 3.4. Ache uma aproximação para a raiz da função $g(x) = 9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} + \frac{1}{2}$, com precisão $\epsilon = 10^{-2}$. (Adaptado de BONJORNO, JÚNIOR e CÂMARA (2020, p. 71)).

Solução: Primeiramente, com base no Teorema 2.1, vamos achar um intervalo que contém pelo menos uma raiz de $g(x)$. Siga as orientações abaixo para se chegar no resultado fornecido pela Figura 3.8.

Figura 3.8 – Localização do intervalo que contém ao mesmo uma raiz de $g(x)$.

Fonte: Própria do autor.

A4 – Digite: 0 e pressione a tecla ENTER.

A5 – Digite: 0,2 e pressione a tecla ENTER.

Após o passo anterior, selecione as células **A4** e **A5** e arraste para baixo até a linha 13 e solte. Perceba que foi criada uma sequência.

B5 – Digite: $=9^{(B5 - 1/2)} - 4/(3^{2(1 - B5)}) + 1/2$ e pressione a tecla ENTER.

Agora selecione a célula **B5** e arraste para baixo até a linha 13 e solte. Com base no Teorema 2.1, podemos concluir que $g(x)$ tem pelo menos uma raiz em $(1, 1,2)$. Assim, iremos usar, inicialmente, esses intervalos para resolver o que se pede no problema em tela. Siga as orientações adiante para chegar no resultado fornecido pela Figura 3.9.

Figura 3.9 – Método da falsa posição com o auxílio de software.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|--|----------|---------------------|-------------|--------------------------------------|---|-------------|------------------|------------------|---------------|-------|
| 1 | MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO | | | | | | | | | | |
| 2 | $g(x) = 9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} + \frac{1}{2}$ | | $\epsilon = 0,0001$ | | Intervalo que contém a raiz (1, 1,2) | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | <i>k</i> | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>g(a)</i> | <i>g(b)</i> | $x = \frac{a * g(b) - b * g(a)}{g(b) - g(a)}$ | <i>g(x)</i> | <i>g(a)*g(x)</i> | <i>g(b)*g(x)</i> | <i> g(x) </i> | Para? |
| 5 | 1 | 1,0000 | 1,2000 | -0,5000 | 0,1726 | 1,1487 | -0,0507 | 0,0253 | -0,0088 | 0,0507 | não |
| 6 | 2 | 1,1487 | 1,2000 | -0,0507 | 0,1726 | 1,1603 | -0,0035 | 0,0002 | -0,0006 | 0,0035 | não |
| 7 | 3 | 1,1603 | 1,2000 | -0,0035 | 0,1726 | 1,1611 | -0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | não |
| 8 | 4 | 1,1611 | 1,2000 | -0,0002 | 0,1726 | 1,1612 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | sim |

Fonte: Própria do autor.

A – Esta coluna conterà os números de repetições.

B5 – Digite: 1 e pressione a tecla ENTER.

C5 – Digite: 1,2 e pressione a tecla ENTER.

D5 – Valor de $g(a)$. Digite: $= 9^{(B5 - 1/2)} - 4/(3^{(1 - B5)}) + 1/2$ e pressione a tecla ENTER.

E5 – Valor de $g(b)$. Digite $= 9^{(C5 - 1/2)} - 4/(3^{(1 - C5)}) + 1/2$ e pressione a tecla ENTER ou copie a fórmula da célula **D5** e cole na **E5**.

F5 – Média ponderada do intervalo. Digite: $= (B5 * E5 - C5 * D5)/(E5 - D5)$ e pressione a tecla ENTER.

G5 – Valor de $g(x)$. Digite: $= 9^{(F5 - 1/2)} - 4/(3^{(1 - F5)}) + 1/2$ e pressione a tecla ENTER.

H5 – Valor de $g(a)g(x)$. Digite: $= D5 * G5$ e pressione a tecla ENTER.

I5 – Valor de $g(b) * g(x)$. Digite: $= E5 * G5$ e pressione a tecla ENTER.

J5 – Digite: $= ABS(G5)$ e pressione a tecla ENTER.

K5 – Digite: $= SE(I5 > 0,0001; "não"; "sim")$ e pressione a tecla ENTER.

B6 – Digite: $= SE(H5 < 0; B5; F5)$ e pressione a tecla ENTER.

C6 – Digite: $= SE(I5 < 0; C5; F5)$ e pressione a tecla ENTER.

Após todos os passos acima, copie para as células **D6:K6** as fórmulas das células **D5:K5**, respectivamente. Finalmente, selecione as células do intervalo **A6:K6** e mova o cursor ao canto inferior direito da célula **K6** até que aparece o símbolo “+”. Após isso, deixe pressionado o lado esquerdo do mouse em cima de “+” e arraste para baixo até que na coluna **K** apareça a palavra “sim” e solte.

3.3 Método de Newton e Planilha Eletônica

Problema 3.5. Vamos calcular uma solução, através do método de Newton, para a função $f(x) = x - \cos(x)$, que contém uma raiz em $(0,1)$ e tomando como base a precisão $\epsilon = 0,001$, o valor inicia $x_0 = 0,5$ e $f'(x) = 1 + \sin(x)$.

Solução: Com base na Figura 3.10 , abra um aplicativo de sua preferência e realize os passos descritos a seguir:

Figura 3.10 – Método Newton com uso de software.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|-----|-------|--------|---------|----------------|-------|
| 5 | k | x_k | $f(x)$ | $f'(x)$ | $ f(x_{k+1}) $ | Para? |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |

Fonte: Própria do autor.

A – Esta coluna conterà as repetições.

B6 – Digite o valor inicial dado, no caso 0,5.

C6 – insira: $= (B5 - \text{COS}(B5))$ e aperte a tecla ENTER.

D6 – Digite: $= (1 + \text{SEN}(B6))$ e pressione a tecla ENTER.

B7 – Digite: $= B6 - (B6 - \text{COS}(B6))/(1 + \text{SEN}(B6))$ e pressione a tecla ENTER.

E7 – Digite: $= \text{ABS}(C8)$.

F7 – Digite: $= \text{SE}(E7 > 0,001; \text{"não"}; \text{"sim"})$

Após isso, selecione as células **C6** e **D6** e copie, respectivamente, suas fórmulas para as células **C7** e **D7**.

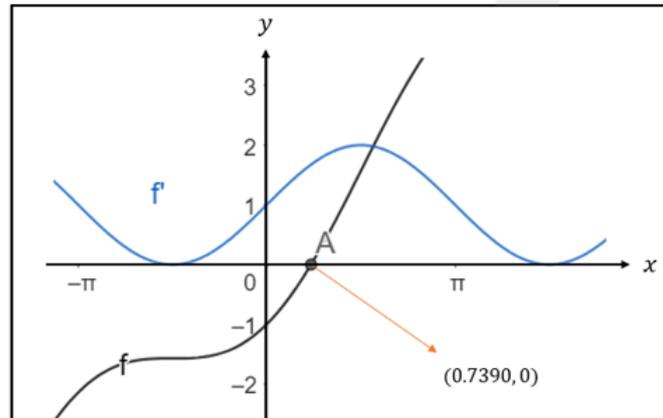
Finalmente, selecione o intervalo de células **B7:F7** e copie essas fórmulas para as células subjacentes até que na coluna “**F**” apareça a palavra “sim”. A Figura 3.11 mostra o resultado fornecido.

Figura 3.11 – Método de Newton com o auxílio de planilha eletrônica.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|--|----------------|-------|
| 1 | MÉTODO DE NEWTON | | | | | |
| 2 | $f(x) = x - \cos x$ | aproximação $\epsilon = 0,001$ | intervalo que contém a raiz (0,1) | $x_0 = 0,5$ | | |
| 3 | $f'(x) = 1 + \text{sen } x$ | | | $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | k | x_k | $f(x)$ | $f'(x)$ | $ f(x_{k+1}) $ | Para? |
| 6 | 0 | 0,5000 | -0,3776 | 1,4794 | | |
| 7 | 1 | 0,7552 | 0,0271 | 1,6855 | 0,0271 | não |
| 8 | 2 | 0,7391 | 0,0001 | 1,6737 | 0,0001 | sim |

Fonte: Própria do autor.

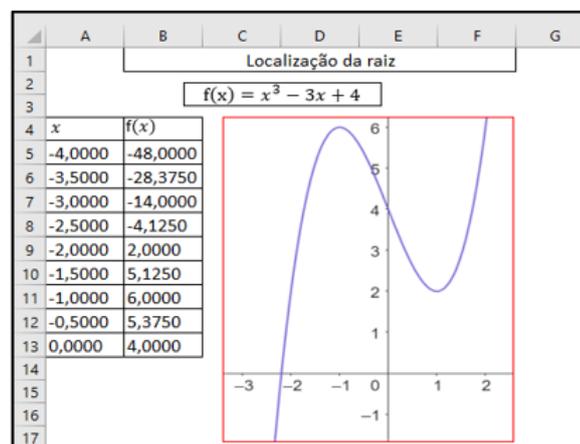
O Figura 3.12 nos fornece o gráfico da derivada e a localização da raiz de f , caso esta fosse calculada pelo método direto.

Figura 3.12 – Representação gráfica de $f'(x)$ e $f(x)$.

Fonte: Própria do autor.

Problema 3.6. Encontre, através do método da de Newton, uma aproximação para uma das raízes da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$, com precisão $\epsilon = 10^{-3}$, no intervalo $(-2, 5, -2)$.

Solução: Com base no Teorema 2.1, vamos procurar um intervalo que contenha pelo menos uma raiz de $f(x)$. Siga as instruções abaixo para que se obtenha o resultado conforme o da Figura 3.13.

Figura 3.13 – Localização da raiz da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Fonte: Própria do autor.

A4 – Digite: x e pressione a tecla ENTER.

B4 – Digite: $f(x)$ e pressione a tecla ENTER.

A5 – Digite: -4 e pressione a tecla ENTER.

A6 – Digite: $-3, 5$ e pressione a tecla ENTER. Após isso, selecione as células **A5** e **A6** e arraste para baixo até célula **A13** e depois solte. Percebe que foi criada uma sequência.

B5 – Digite: $= (A5^3) - 3 * A5 + 4$ e pressione a tecla ENTER. Após isso, selecione B5 e araste para baixo até a célula **B13** e solte.

Finalmente, podemos concluir que existe pelo menos uma raiz em $(-2,5, -2)$, já que $f(-2,5)f(-2) < 0$. Dessa maneira, vamos usar a média aritmética desse intervalo $(-2,5, -2)$ para solucionar o problema proposto.

Siga as etapas adiante para chegar no resultado fornecido na tabela da Figura 3.14.

Figura 3.14 – Método de Newton através de planilha eletrônica.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|-----------------------|--|----------|--|----------------|-------|
| 1 | MÉTODO DE NEWTON | | | | | |
| 2 | $f(x) = x^3 - 3x + 4$ | intervalo que contém a raiz $(-2,5, -2)$ | | | $x_0 = -2,25$ | |
| 3 | $f'(x) = 3x^2 - 3$ | aproximação $\varepsilon = 0,0001$ | | $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | k | x_k | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ | $ f(x_{k+1}) $ | Para? |
| 6 | 0 | -2,2500 | -0,6406 | 12,1875 | | |
| 7 | 1 | -2,1974 | -0,0185 | 11,4862 | 0,0185 | não |
| 8 | 2 | -2,1958 | 0,0000 | 11,4649 | 0,0000 | sim |

Fonte: Própria do autor.

Primeiramente, em uma planilha eletrônica, digite as informações constantes na linha 5 em suas respectivas células.

B6 – Digite: $-2,5$ e pressione a tecla ENTER.

C6 – Digite: $= B6^3 - 3 * B6 + 4$ e pressione a tecla ENTER.

D6 – Digite: $= 3 * B6^2 - 3$ e pressione a tecla ENTER.

B7 – Digite: $= B6 - (C6/D6)$ e pressione a tecla ENTER.

E7 – Digite: $= ABS(B7^3 - 3 * B7 + 4)$ e pressione a tecla ENTER.

F7 – Digite: $= SE(E7 > 0,0001; "não"; "sim")$ e pressione a tecla ENTER.

Finalmente, selecione o intervalo **B8:F8** e arraste o cursor do mouse ao canto inferior direito da célula **F8** até aparecer “+” e com o lado esquerdo do mouse pressionado arraste para baixo até que na coluna **F** aparece a palavra sim. O valor constante na célula **B8** é a raiz desejada.

3.4 Método da Secante e Planilha Eletrônica

Problema 3.7. Determine uma aproximação da raiz da função $f(x) = \log_4 x - \frac{1}{8}$ que está no intervalo $(0,5, 1,3)$. Utilize $\epsilon = 0,001$, $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 0,7$.

Solução: Com base na Figura 3.15, realize os passos a seguir:

Figura 3.15 – Método da secante com auxílio de software.

| | A | B | C | D | E |
|---|-----|-------|----------------------------------|------------|-------|
| 5 | k | x_k | $f(x) = -\frac{1}{8} + \log_4 x$ | $ f(x_k) $ | Para? |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |

Fonte: Própria do autor.

A – Esta coluna conterá os valores de k utilizado para cada iteração.

B6 – Digite a primeira aproximação (0,5).

C6 – Digite: $= -1/8 + LOG(B6; 4)$ e pressione a tecla ENTER.

D6 – Digite: $= ABS(C6)$ e pressione a tecla ENTER.

E6 – Digite: $= SE(D6 > 0,001; "não"; "sim")$ e pressione a tecla ENTER.

B7 – Dite a segunda aproximação (0,7).

Após isso, copie as das células **C6**, **D6** e **E6** para as células subjacente. Finalmente, selecione as células **B7**, ..., **E7** e araste para as subjacentes até na coluna “**E**” aparece a palavra “sim”. A Figura 3.16 mostra o resultado esperado.

Figura 3.16 – Método da Secante com o auxílio de planilha eletrônica.

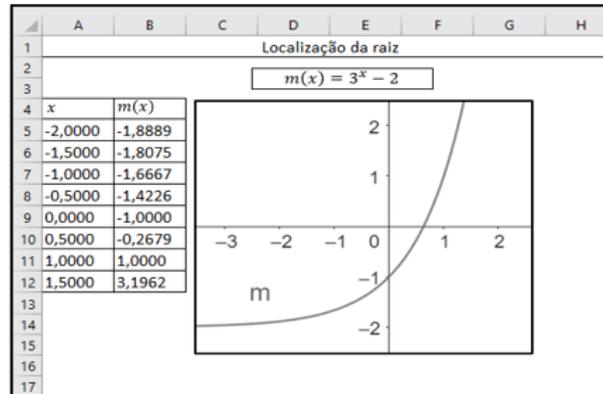
| | A | B | C | D | E |
|----|---|-----------------------------------|----------------------------------|------------|-------|
| 1 | MÉTODO DA SECANTE | | | | |
| 2 | $f(x) = -\frac{1}{8} + \log_4 x$ | aproximação $\varepsilon = 0,001$ | contém uma raiz em (0,5, 1,3) | | |
| 3 | $x_{k+1} = \frac{(x_{k-1})f(x_k) - (x_k)f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ | | $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 0,7$ | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | k | x_k | $f(x) = -\frac{1}{8} + \log_4 x$ | $ f(x_k) $ | Para? |
| 6 | 0 | 0,5000 | -0,6250 | 0,6250 | não |
| 7 | 1 | 0,7000 | -0,3823 | 0,3823 | não |
| 8 | 2 | 1,0150 | -0,1143 | 0,1143 | não |
| 9 | 3 | 1,1493 | -0,0246 | 0,0246 | não |
| 10 | 4 | 1,1862 | -0,0018 | 0,0018 | não |
| 11 | 5 | 1,1892 | 0,0000 | 0,0000 | sim |

Fonte: Própria do autor.

Problema 3.8. Dada a função exponencial $m(x) = 3^x - 2$, calcule uma aproximação para sua raiz, com precisão 0,0001. (Adaptado de BONJORNO, JÚNIOR e CÂMARA (2020, p. 69)).

Solução: Primeiramente localizaremos o intervalo que contenha a raiz de $m(x)$. Siga as orientações para se chegar no resultado fornecido pela Figura 3.17:

Figura 3.17 – Localização da raiz da função $m(x) = 3^x - 2$.



Fonte: Própria do autor.

A4 – Digite: x e pressione a tecla ENTER.

A5 – Digite: -2 e pressione a tecla ENTER.

A6 – Digite: $-1,5$ e pressione a tecla ENTER. Após isso, selecione as células **A5** e **A6** e arraste até a linha 12 e solte.

B4 – Digite: $m(x)$ e pressione a tecla ENTER.

B5 – Digite: $= 3^{A5} - 2$ e pressione a tecla ENTER.

Após o passo da célula **B5**, selecione esta célula e arraste até a célula **B12** e solte. Percebe que para $m(0,5)m(1) < 0$, logo o intervalo possui, pelo Teorema 2.1, ao menos uma raiz. Dessa forma, vamos usar $(0,5, 1)$ para achar a resposta do problema, onde $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1$.

Siga as etapas mais a frente para chegar nos dados apresentados na tabela da Figura 3.18.

Figura 3.18 – Método da Secante através de planilha eletrônica.

| k | x_k | $m(x_k) = 3^{x_k} - 2$ | $ m(x_k) $ | Para? |
|---|--------|------------------------|------------|-------|
| 0 | 0,5000 | -0,2679 | 0,2679 | não |
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | não |
| 2 | 0,6057 | -0,0548 | 0,0548 | não |
| 3 | 0,6261 | -0,0105 | 0,0105 | não |
| 4 | 0,6310 | 0,0001 | 0,0001 | não |
| 5 | 0,6309 | 0,0000 | 0,0000 | sim |

Fonte: Própria do autor.

Abra uma planilha eletrônica de sua preferência e por questões de informação e direcionamento, digite, em suas respectivas células, os dados apresentados na linha 5 da Figura 3.18. Agora siga as próximas etapas:

B6 – Digite 0,5 e pressione a tecla ENTER.

B7 – Digite 1 e pressione a tecla ENTER.

C6 – Digite: $= 3^{\wedge}B6 - 2$ e pressione a tecla ENTER. Em seguinte, clique nesta célula e copie a fórmula para a célula **C7** e pressione a tecla ENTER.

D6 – Digite: $= ABS(C6)$ e pressione a tecla ENTER.

E6 – Digite: $= SE(D6 > 0,0001; "não"; "sim")$ e pressione a tecla ENTER.

Finalmente, selecione as células **B7** e **C7** e leve o curso até o canto inferior esquerdo da célula **C7** até que aparece (+). Após, com o curso do mouse esquerdo pressionado, arraste para baixo até que na coluna E apareça a palavra “sim”. O resultado fornecido na célula **B11** é a aproximação que procurávamos.

3.5 Polinômio Interpolador de Lagrange e Planilha Eletrônica

Problema 3.9. *Vamos resolver o exemplo 2.12 com o auxílio de uma planilha eletrônica.*

Solução: Com o aplicativo de sua preferência, após abrir a planilha, siga as instruções abaixo:

1. Identificando as colunas: usaremos as células da tabela abaixo como referência:

| | | | | |
|---|----------|----|---|----|
| | A | B | C | D |
| 2 | x_i | 1 | 2 | 3 |
| 3 | $f(x_i)$ | -1 | 3 | 11 |

2. Especificando os conteúdos das células:

B2 – Digite: 1. Esta célula conterà o valor de x_0 .

C2 – Digite: 2. Esta célula conterà o valor de x_1 .

D2 – Digite: 3. Esta célula conterà o valor de x_2 .

B3 – Digite: -1. Esta célula conterà o valor de $f(x_0)$.

C3 – Digite: 3. Esta célula conterà o valor de $f(x_1)$.

D3 – Digite: 11. Esta célula conterà o valor de $f(x_2)$.

B5 – Digite: $= (C2 * D2) / ((B2 - C2) * (B2 - D2))$ e pressione a tecla ENTER.

C5 – Digite: $= (-C2 - D2) / ((B2 - C2) * (B2 - D2))$ e pressione a tecla ENTER.

D5 – Digite: $= 1 / ((B2 - C2) * (B2 - D2))$ e pressione a tecla ENTER.

B6 – Digite: $= (B2 * D2) / ((C2 - B2) * (C2 - D2))$ e pressione a tecla ENTER.

C6 – Digite: $= (-B2 - D2) / ((C2 - B2) * (C2 - D2))$ e pressione a tecla ENTER.

D6 – Digite: $= 1 / ((C2 - B2) * (C2 - D2))$ e pressione a tecla ENTER.

B7 – Digite: $= (B2 * C2) / ((D2 - B2) * (D2 - C2))$ e pressione a tecla ENTER.

C7 – Digite: $= (-B2 - C2)/(D2 - B2) * (D2 - C2)$ e pressione a tecla ENTER.

D7 – Digite: $= 1/((D2 - B2) * (D2 - C2))$ e pressione a tecla ENTER.

B8 – Digite: $= B5 * B3 + B6 * C3 + B7 * D3$ e pressione a tecla ENTER.

C8 – Digite: $= C5 * B3 + C6 * C3 + C7 * D3$ e pressione a tecla ENTER.

D8 – Digite: $= D5 * B3 + D6 * C3 + D7 * D3$ e pressione a tecla ENTER.

Os valores obtidos constam na planilha da Figura 3.19.

Figura 3.19 – Polinômio interpolador de Lagrange com uso de planilha eletrônica.

| | A | B | C | D |
|----|--|-----------------------|------------------|----------------------|
| 1 | POLINÔMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE | | | |
| 2 | x_i | 1 | 2 | 3 |
| 3 | $f(x_i)$ | -1 | 3 | 11 |
| 4 | | coeficiente constante | coeficiente de x | coeficiente de x^2 |
| 5 | $L_0(x)$ | 3 | -2,5 | 0,5 |
| 6 | $L_1(x)$ | -3 | 4 | -1 |
| 7 | $L_2(x)$ | 1 | -1,5 | 0,5 |
| 8 | $p_2(x)$ | -1 | -2 | 2 |
| 9 | | | | |
| 10 | Asssim, o polinômio procurado é $p_2(x) = 2x^2 - 2x - 1$ | | | |

Fonte: Própria do autor.

3.6 Polinômio Interpolador de Newton e Planilha Eletrônica

Problema 3.10. *Vamos obter, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o polinômio interpolador de Newton obtido no exemplo 2.13.*

Solução: Vamos para a descrição dos passos que devem ser seguidos em uma planilha eletrônica para se chegar no resultado almejado, conforme Figura 3.20.

A2 – Esta célula conterà os pontos x_0, x_1, \dots, x_3 .

B2 – Esta célula conterà os pontos $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_3)$.

A10 – Digite: $= A3$ e pressione a tecla ENTER.

A12 – Digite: $= A4$ e pressione a tecla ENTER.

A14 – Digite: $= A5$ e pressione a tecla ENTER.

A16 – Digite: $= A6$ e pressione a tecla ENTER.

B10 – Digite: $= B3$ e pressione a tecla ENTER.

B12 – Digite: $= B4$ e pressione a tecla ENTER.

B14 – Digite: $= B5$ e pressione a tecla ENTER.

B16 – Digite: $= B6$ e pressione a tecla ENTER.

C11 – Digite: $= (B12 - B10)/(A12 - A10)$ e pressione a tecla ENTER.

C13 – Digite: $= (B14 - B12)/(A14 - A12)$ e pressione a tecla ENTER.

- C15** – Digite: $= (B16 - B14)/(A16 - A14)$ e pressione a tecla ENTER.
D12 – Digite: $= (C13 - C11)/(A14 - A10)$ e pressione a tecla ENTER.
D14 – Digite: $= (C15 - C13)/(A16 - A12)$ e pressione a tecla ENTER.
E13 – Digite: $= (D14 - D12)/(A16 - A10)$ e pressione a tecla ENTER.

Figura 3.20 – Polinômio interpolador de Newton com a utilização de planilha eletrônica.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|---|----------|---------|---------|---------|---|---|
| 1 | POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON | | | | | | |
| 2 | x_i | $f(x_i)$ | | | | | |
| 3 | 1 | 0 | | | | | |
| 4 | 3 | 6 | | | | | |
| 5 | 4 | 24 | | | | | |
| 6 | 5 | 60 | | | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | Tabela de diferenças divididas | | | | | | |
| 9 | x_i | ordem 0 | ordem 1 | ordem 2 | ordem 3 | | |
| 10 | 1 | 0 | | | | | |
| 11 | | | 3 | | | | |
| 12 | 3 | 6 | | 5 | | | |
| 13 | | | 18 | | 1 | | |
| 14 | 4 | 24 | | 9 | | | |
| 15 | | | 36 | | | | |
| 16 | 5 | 60 | | | | | |
| 17 | $P_3(x) = 0 + 3(x - 1) + 5(x - 1)(x - 3) + (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ | | | | | | |

Fonte: Própria do autor.

Problema 3.11. Sabendo que $p_4(x)$ é um polinômio interpolador de Newton que interpola os pontos da tabela abaixo, calcule $p_4(3)$. (Adaptado de NETO (2016, p. 138)).

Solução: Primeiramente vamos determinar o polinômio interpolador de Newton. Siga as etapas adiante para se chegar no resultado fornecido pela tabela da Figura 3.21.

A3:A7 – Este intervalo conterà os pontos x_0, x_1, \dots, x_4 , respectivamente.

B3:B7 – Este intervalo conterà os pontos $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_4)$, respectivamente.

A10 – Digite: $= A3$ e pressione a tecla ENTER.

A12 – Digite: $= A4$ e pressione a tecla ENTER.

A14 – Digite: $= A5$ e pressione a tecla ENTER.

A16 – Digite: $= A6$ e pressione a tecla ENTER.

A18 – Digite: $= A7$ e pressione a tecla ENTER.

B10 – Digite: $= B3$ e pressione a tecla ENTER.

B12 – Digite: $= B4$ e pressione a tecla ENTER.

B14 – Digite: $= B5$ e pressione a tecla ENTER.

B16 – Digite: $= B6$ e pressione a tecla ENTER.

B18 – Digite: $= B7$ e pressione a tecla ENTER.

C11 – Digite: $= (B12 - B10)/(A12 - A10)$ e pressione a tecla ENTER.

C13 – Digite: $= (B14 - B12)/(A14 - A12)$ e pressione a tecla ENTER.

C15 – Digite: $= (B16 - B14)/(A16 - A14)$ e pressione a tecla ENTER.

D12 – Digite: $= (C13 - C11)/(A14 - A10)$ e pressione a tecla ENTER.

D14 – Digite: $= (C15 - C13)/(A16 - A12)$ e pressione a tecla ENTER.

E13 – Digite: $= (D14 - D12)/(A16 - A10)$ e pressione a tecla ENTER.

E15 – Digite: $= (D16 - D14)/(A18 - A12)$ e pressione a tecla ENTER.

E17 – Digite: $= (E15 - E13)/(A18 - A10)$ e pressione a tecla ENTER.

D3: Digite: 3 e pressione a tecla ENTER.

E3 – Esta célula conterá o valor de $P_4(3) := B10 + C11 * (D3 - A3) + D12 * (D3 - A3) * (D3 - A4) + E13 * (D3 - A3) * (D3 - A4) * (D3 - A5) + F14 * (D3 - A3) * (D3 - A4) * (D3 - A5) * (D3 - A6)$ e pressione a tecla ENTER. Perceba que o valor encontrado nesta célula foi 1, conforme consta na Figura 3.21.

Figura 3.21 – Polinômio interpolador de Newton com auxílio de planilha eletrônica.

| POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON | | | | | | | | | |
|----------------------------------|--|----------|---------|---------|-------------|-----------|--|--|--|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | x_i | $f(x_i)$ | | x | $P_4(x)$ | | | | |
| 3 | 1 | 12 | | 3 | 1 | | | | |
| 4 | 2 | 2 | | | | | | | |
| 5 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 6 | 4 | -6 | | | | | | | |
| 7 | 5 | 4 | | | | | | | |
| Tabela de diferenças divididas | | | | | | | | | |
| 9 | x_i | ordem 0 | ordem 1 | ordem 2 | ordem 3 | ordem 4 | | | |
| 10 | 1 | 12 | | | | | | | |
| 11 | | | -10 | | | | | | |
| 12 | 2 | 2 | | 4,5 | | | | | |
| 13 | | | -1 | | -2,5 | | | | |
| 14 | 3 | 1 | | -3 | | 1,5833333 | | | |
| 15 | | | -7 | | 3,833333333 | | | | |
| 16 | 4 | -6 | | 8,5 | | | | | |
| 17 | | | 10 | | | | | | |
| 18 | 5 | 4 | | | | | | | |
| 19 | $P_4(x) = 12 - 10(x - 1) + \frac{9}{2}(x - 1)(x - 2) - \frac{5}{2}(x - 1)(x - 2)(x - 3) + \frac{19}{12}(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | |

Fonte: Própria do autor.

É evidente que se o problema proposto fosse feito através do método direto e sem o uso de um software adequado, como uma planilha eletrônica, ele se tornaria muito trabalhoso, mesmo se fosse utilizada uma calculadora. Dessa forma, fica claro a facilidade que as planilhas eletrônicas trazem para a solução desse tipo de problema.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, abordaremos a metodologia empregada na pesquisa, apresentando os meios e as técnicas utilizadas para alcançar os objetivos declarados.

Primeiramente, procederemos com a caracterização da pesquisa em relação à sua natureza, abordagem e tratamento das informações. Essa etapa é essencial para uma investigação apropriada do problema e para a adequada estruturação do processo de pesquisa.

Cabe salientar que este estudo propõe uma abordagem inovadora para o ensino médio, centrada na aplicação de métodos numéricos para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial, utilizando planilhas eletrônicas como ferramenta pedagógica. A metodologia adotada compreende uma revisão teórica dos métodos numéricos indiretos mais relevantes para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial em conjunto com a utilização de planilhas eletrônicas. Buscou-se também fazer uma breve explanação de como esse conteúdo é abordado no ensino médio. O estudo apresenta casos de ensino pré-existent, identificando lacunas e oportunidades de melhoria. Fez parte da metodologia uma pesquisa de campo realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá – IFAP, com uma turma de redes de computadores do segundo ano do ensino médio, para verificar o nível de eficiência, eficácia e aceitação da ferramenta que este trabalho se propõe a oferecer.

Sabe-se que a educação, em todas as suas facetas, é um desafio para o elenco que está envolvido e muitas vezes precisa ser tratada de forma mais detalhada e criteriosa. Assim, pensando nessas dificuldades e desafios enfrentados pelos educadores e educandos, que este trabalho se propôs criar uma ferramenta que possa ser utilizada, no intuito de melhorar o ambiente de ensino aprendizagem dos alunos.

A implementação efetiva deste trabalho em sala de aula pressupões e envolve a criação de material didático, incluindo planilhas eletrônicas interativas e exercícios em consonância dos que já vêm abordados no ensino médio. Além disso, as atividades formuladas são projetadas para promover a participação ativa dos alunos, proporcionando uma compreensão prática e intuitiva dos conceitos abordados. Por outro lado, destaca-se que a compreensão da teoria utilizada no desenvolvimento dos cálculos a partir de planilhas eletrônicas, por parte do professor, é essencial para que essa proposta pedagógica de aula seja efetivada.

Por fim, esperasse que este estudo possa contribuir como a matemática do ensino médio, promovendo a aplicação prática de métodos numéricos e a integração de tecnologias educacionais, visando aprimorar a compreensão e o interesse dos alunos pelos temas abordados.

4.1 Caracterização da Pesquisa

A abordagem da pesquisa será qualitativa exploratória, de cunho bibliográfico e de pesquisa de campo e seu foco é desenvolver uma ferramenta, por meio de uma planilha eletrônica, para facilitar o processo de ensino e aprendizagem de determinados conteúdos do ensino médio. Em outras palavras, o objetivo não é avaliar ou medir, mas sim intervir na qualidade do ensino dos alunos em relação ao cálculo de zero de funções e interpolação polinomial. Conforme destacado por Rodrigues, Oliveira e Santos (2021),

a pesquisa qualitativa emerge de uma investigação sobre uma situação-problema social e histórica, envolvendo a coleta e análise de dados reais e concretos, sem se prender a uma estrutura rígida. O processo de condução da pesquisa constantemente introduz novos elementos desafiadores que podem modificar interpretações iniciais. Portanto, o pesquisador, com base em uma fundamentação geral e inicial, realiza revisões e aprofundamentos contínuos, apoiado em literaturas anteriores, possibilitando o surgimento de novas teorias, sempre guiado pela investigação, indagação e dúvidas.

De acordo com Fontelles et al. (2009), a pesquisa científica é a aplicação prática de procedimentos com o propósito de gerar conhecimentos científicos aplicáveis à resolução de problemas concretos da vida moderna. Isso visa desenvolver um novo conhecimento e integrá-lo aos já existentes. Tecnicamente, a pesquisa adota abordagens qualitativas e quantitativas de natureza aplicada. Assim, abordagem qualitativa lida com valores, crenças, representações, hábitos, atitudes e opiniões. Nesse contexto, o pesquisador participa ativamente, observando e analisando os dados. Já na pesquisa quantitativa, realiza-se um levantamento estatístico dos dados obtidos, aplicando-se após uma intervenção didática.

4.2 Local e Participantes da Pesquisa

A pesquisa foi conduzida durante o período de fevereiro de 2024, envolvendo 36 estudantes, com média de idade de 16 anos, do 2º ano do ensino médio do IFAP (vide Figura 4.1), do curso de Rede de computadores (curso integrado). Por outro lado, optou-se por uma turma de redes de computadores, justamente pensando na facilidade para a realização da oficina, pressupondo a familiaridades dos alunos com a tecnologia. Destaca-se que no IFAP, naquele momento, havia apenas uma turma de rede de computadores do ensino médio (curso integrado) para que a pesquisa fosse aplicada. A instituição está situada na Rodovia BR-210, Km, S/n – Brasil Novo, AP, CEP 68909-398, na cidade de Macapá.

Figura 4.1 – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá -IFAP- Campus Macapá.



Fonte: Própria do autor.

O Instituto oferece uma variedade de cursos, incluindo os técnicos integrados ao ensino médio e subsequentes, cursos superiores de licenciatura, bacharelado e tecnológico, além de pós-graduações *latu sensu* e *strictu sensu*. A instituição dispõe de instalações bem equipadas, como salas de aula confortáveis, diversos laboratórios como o de física, o de biologia e o de química, bem como um laboratório IF Maker. Além disso, há também os laboratórios de informática, sendo que dentre esses foi escolhido o laboratório de informática 1 (ver Figura 4.2), que contém 40 computadores com o Sistema Operacional Windows e acesso à internet. O laboratório também conta com um projetor multimídia e uma lousa, entre outros equipamentos. Além do mais, é bem climatizado. Essa disponibilidade de recursos e o fato de os alunos já terem um certo grau de familiaridade com a área de informática, já que utilizamos planilha eletrônica, foram um dos fatores que contribuí para a escolha do local de realização da pesquisa.

Para um melhor detalhamento dos materiais dos laboratórios de informática, Resolução nº 001/2020 CONSUP/IFAP, de 17 de fevereiro de 2020 (IFAP, 2020), diz que os Laboratórios de Informática do IFAP devem possuir os materiais listados na Tabela 4.1. No entanto, durante a observação no local, foi identificada divergência em relação a alguns desses materiais. Por exemplo, não foi encontrada uma lousa interativa.

Tabela 4.1 – Descrição dos equipamentos dos laboratórios de informática – IFAP - Campus Macapá.

| EQUIPAMENTOS | QUANTIDADE |
|--|------------|
| Computador | 40 |
| Lousa digital | 1 |
| Projeter Wirelles | 1 |
| Suporte de teto para projetor multimídia | 1 |
| Tela de projeção retrátil | 1 |
| Câmera IP Colorida fixa wireless | 1 |
| Controle remoto sem fio para PC | 1 |
| Caixa amplificada | 2 |
| Microfone sem fio auricular | 1 |
| Mesa de som - 6 canais | 1 |
| Armário | 5 |

Fonte: IFAP (2020).

Figura 4.2 – Turma de Redes de Computadores (integrado) – 2º ano/IFAP/MACAPÁ-AP.



Fonte: Própria do autor.

4.3 Coleta de informações

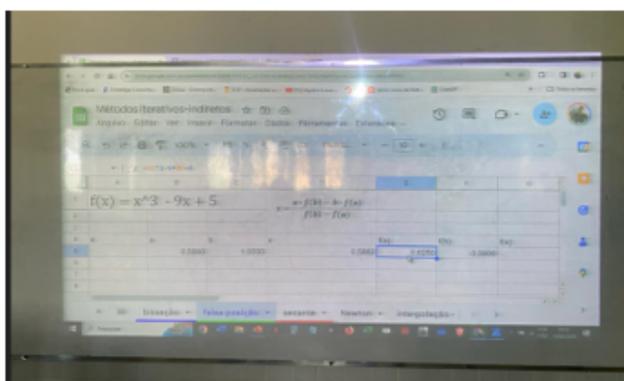
Para que a coleta de dados fosse efetivada, precisou-se da realização de uma oficina que foi dividida em dois encontros de 2h30min cada. Assim, o primeiro encontro ocorreu dia 19 de fevereiro de 2024, das 7h30min às 10h20min e com intervalo de 20 minutos para que os alunos pudessem lanchar. Deste modo, com auxílio de slides (ver Figuras 4.3, 4.4 e 4.5), foi feita uma explanação sucinta dos conceitos das principais funções, mostrando, é claro, os passos para o cálculo dos seus zeros, pois para que a pesquisa fosse aplicada o entendimento do conteúdo em questão seria de suma importância. Por outro lado, como se trata de uma turma de segundo ano do ensino médio, crer-se que eles já estavam a par do que foi tratado ali, pelo menos no que se refere a maioria do que foi abordado. Dessa maneira, tratou-se, na verdade, uma revisão. Também foram introduzidos os conceitos dos métodos iterativos: método da bisseção, método da falsa posição e método da secante,

sempre evidenciado a importância desses métodos na resolução de problemas práticos, exemplificando situações em que métodos numéricos são necessários.

Atividades Propostas:

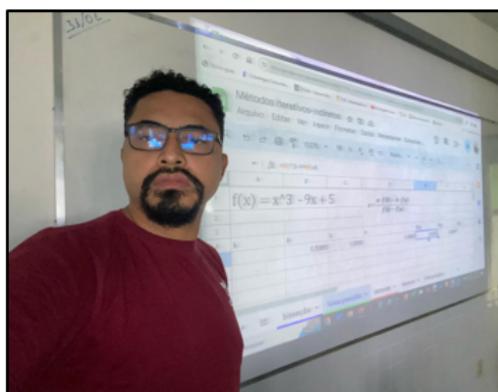
- (i) **(Método da biseção)** - Encontre uma raiz aproximada e com precisão $\epsilon = 10^{-1}$ para a função $x^3 - 3x + 1$, no intervalo $]0, 1[$.
- (ii) **(Método da falsa posição)** - Calcule, utilizando o método da falsa posição, uma aproximação para a raiz do polinômio $f(x) = x^3 - 9x + 5$, com precisão $\epsilon = 10^{-2}$, sabendo-se que ela está no intervalo $[0.5, 1]$.
- (iii) **(Método da Secante)** - Dada a função exponencial $m(x) = 3^x - 2$, calcule uma aproximação para sua raiz, no intervalo $[1/2, 1]$ e com precisão 0,0001.

Figura 4.3 – Explicação sobre métodos iterativos (método da falsa posição).



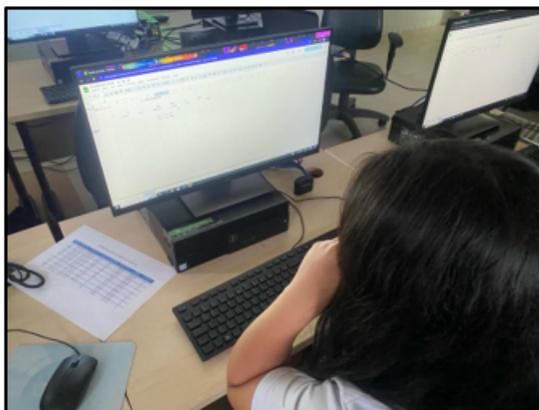
Fonte: Própria do autor.

Figura 4.4 – Laboratório de informática– Oficina sobre métodos iterativos através de planilha eletrônica.



Fonte: Própria do autor.

Figura 4.5 – Discente calculando o zero de uma função através do uso de planilha eletrônica.



Fonte: Própria do autor.

De modo geral, pode-se afirmar com veemência que os alunos tiveram um ótimo desempenho quanto a execução e entendimento das atividades, pois deve-se levar em consideração também o fato de que parte do conteúdo proposto (métodos numéricos) era totalmente novo para a grande maioria. Por outro lado, um ou outro teve um certo grau de dificuldade e precisou de acompanhamento em certos detalhes. No mais, tudo isso estava dentro do esperado.

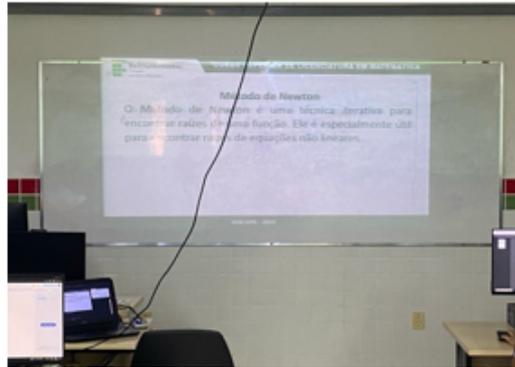
No segundo encontro, realizado dia 26 de fevereiro de 2024, das 7h30min às 10h20min e com um intervalo de 20 minutos, foi dada continuidade a aplicação (Método do Newton para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial – método de Lagrange) (ver Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9). Assim foi feita uma breve explanação do método de Newton para o cálculo de zero de funções e, também, introduziu-se o conceito de interpolação polinomial. Sem perda de tempo, os alunos foram levados logo a utilizar os métodos propostos na planilha eletrônica, possibilitando uma aprendizagem mais dinâmica.

Atividades propostas:

- (i) **(Método de Newton)** - Encontre, através do método de Newton, uma aproximação para uma das raízes da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$, com precisão $\epsilon = 10^{-3}$, no intervalo $(-2.5, -2)$.
- (ii) **(Interpolação Polinomial – Método de Lagrange):** Use o polinômio de Lagrange para interpolar o conjunto de dados da tabela abaixo:

| | | | |
|----------|----|---|----|
| i | 0 | 1 | 2 |
| x_i | 1 | 2 | 3 |
| $f(x_i)$ | -1 | 3 | 11 |

Figura 4.6 – Explicação sobre o método de Newton.



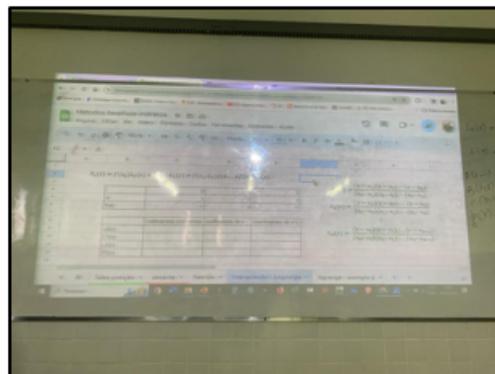
Fonte: Própria do autor.

Figura 4.7 – Apresentação do algoritmo do método de Newton para o cálculo de zero de funções.



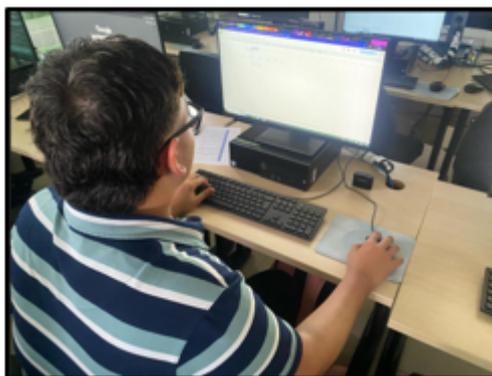
Fonte: Própria do autor.

Figura 4.8 – Interpolação polinomial – Método de Lagrange.



Fonte: Própria do autor.

Figura 4.9 – Discente fazendo o exercício sobre interpolação polinomial – método de Lagrange, com o uso de planilha eletrônica.



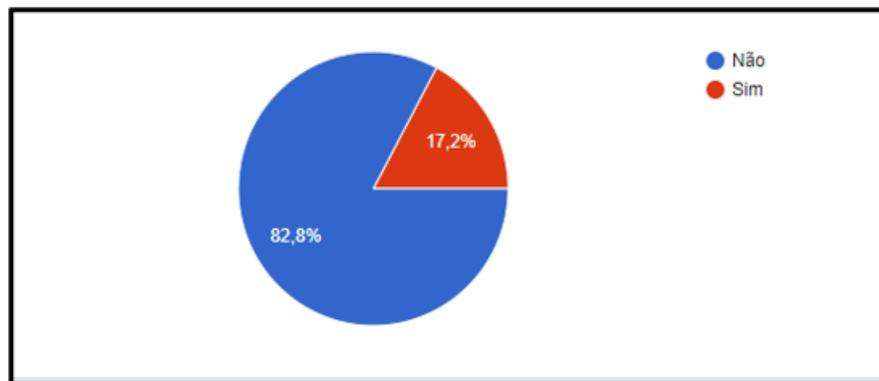
Fonte: Própria do autor.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para que houvesse um *feedback* sobre a aplicação da pesquisa, foi repassado aos alunos um questionário envolvendo os conteúdos ministrados na oficina, bem como os exercícios propostos. Dos 36 alunos da turma, 29 responderam às indagações feitas no questionário. A saber:

1. Você já utilizou planilhas eletrônicas para resolver problemas matemáticos?

Figura 5.1 – Uso de planilha eletrônica em problemas matemáticos

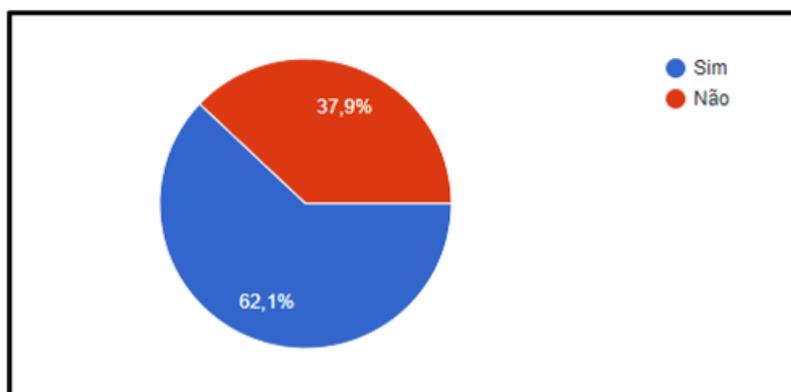


Fonte: Própria do autor.

O gráfico revela uma disparidade significativa no uso de planilhas eletrônicas para resolver problemas matemáticos. O fato de que apenas 17,2% dos respondentes afirmaram ter utilizado planilhas ressalta uma possível subutilização dessa ferramenta poderosa. As planilhas oferecem uma plataforma versátil para resolver uma ampla gama de problemas matemáticos, desde cálculos simples até análises estatísticas complexas. Se mais pessoas explorassem o potencial das planilhas, poderiam se beneficiar de uma maior eficiência e precisão do trabalho matemático, além da organização mais eficaz dos dados. Este resultado destaca a importância de promover a conscientização e o treinamento no uso de planilhas eletrônicas para aprimorar habilidades matemáticas e maximizar a produtividade.

2. Depois dessa experiência, você acha que planilhas eletrônicas são uma maneira adequada de se explorar conceitos matemáticos?

Figura 5.2 – Importância do uso de planilhas eletrônicas na resolução de problemas matemáticos

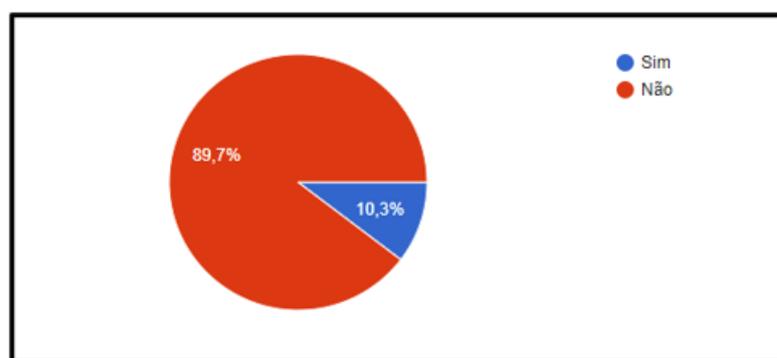


Fonte: Própria do autor.

O gráfico de setor nos mostra que a maioria (62,1%) concordou que o uso de planilhas eletrônicas é uma maneira adequada de se expor conceitos matemáticos e sobre isso pode-se dizer que é algo muito positivo para essa pesquisa, já que isto desenvolve nos alunos o pensamento lógico (já que há manipulação de formas lógicas) e o pensamento computacional que são referenciados pela ABNCC. Por outro lado, temos que ter em mente que se trata de uma turma de rede de computadores, o que, conseqüentemente pode ter interferido na posição dos alunos quanto a essa pergunta. Dessa forma, cabe também pensar nas outras turmas que não tem o contato tão frequente com a tecnologia, de modo que se deve também dar subsídios para que elas desenvolvam o pensamento computacional e lógico. Quanto a isso, este trabalho é uma ferramenta nesse sentido.

3. Você já tinha algum conhecimento sobre métodos numéricos e iterativos para os zeros de funções e interpolação polinomial?

Figura 5.3 – Conhecimento de métodos iterativos para o cálculo de zero de funções e interpolação polinomial.



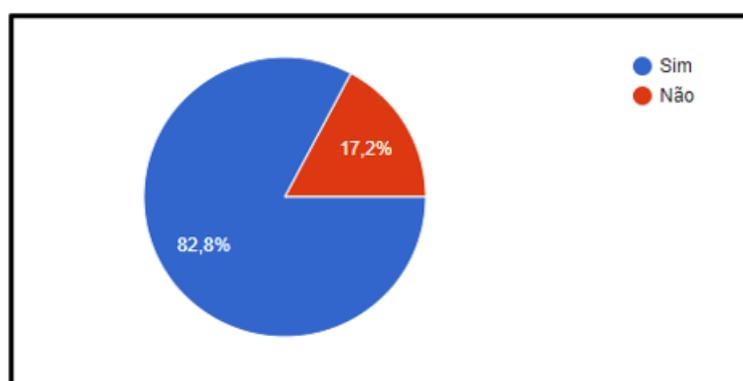
Fonte: Própria do autor.

A pesquisa evidencia que, dos entrevistados, 26 demonstram não ter conhecimento

algum sobre métodos numéricos iterativos para os zeros de funções e interpolação polinomial e que apenas 3 já tinha um certo grau de conhecimento sobre o tema. Quanto a essa pergunta, o resultado mostrado não é estranho, pois os métodos iterativos não fazem parte da grade curricular dos alunos. O que também impossibilita a aplicação dos métodos iterativos em turmas do ensino médio é a pouca literatura disponível para isso. No entanto, sendo otimista, esse trabalho é um dos muitos que virão e que corroborarão para a mudança do paradigma tratado.

4. Você teve alguma dificuldade em compreender a teoria por trás dos métodos numéricos?

Figura 5.4 – Compreensão sobre a teoria por trás dos métodos numéricos.

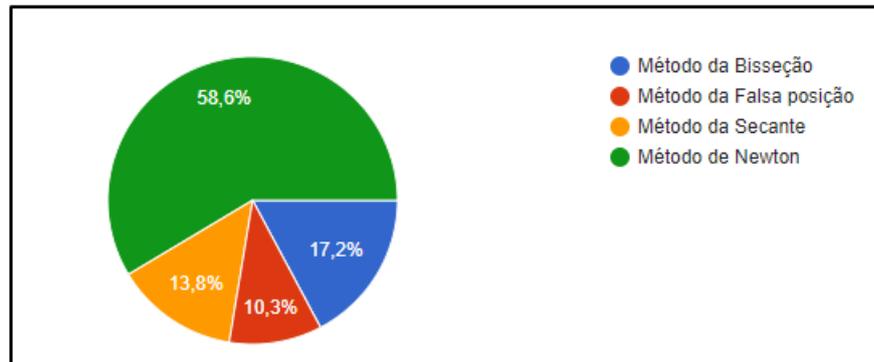


Fonte: Própria do autor.

Compreender a teoria por trás dos métodos numéricos pode ser desafiador para muitos, como evidenciado pelo expressivo 82,8% que relataram dificuldades. Isso destaca a importância de abordagens de ensino mais acessíveis e eficazes para facilitar a compreensão desses conceitos fundamentais. Uma sugestão seria tornar o uso dos métodos iterativos mais expressivos no ambiente escolar para que os alunos possam incorporá-los e internalizá-los. Os exemplos práticos, como os vistos na oficina torna a teoria mais tangível e envolvente, ajudando os alunos a internalizarem melhor os conceitos.

5. Qual dos métodos numéricos abordados na pesquisa você achou mais interessante para o cálculo de zeros de funções?

Figura 5.5 – Escolha do método mais interessante para o cálculo de zero de funções.

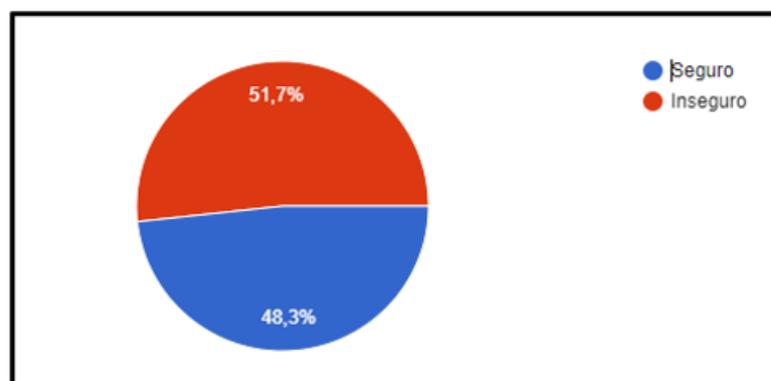


Fonte: Própria do autor.

Observa-se a preferência clara pelo Método de Newton entre os métodos numéricos abordados na pesquisa. Com sua rápida convergência e eficiência, é compreensível que ele tenha se destacado. No entanto, não podemos subestimar a importância dos outros métodos, como a Bissecção, a Secante e a Falsa Posição, que desempenham papéis cruciais em diversas situações, especialmente quando a função não é diferenciável ou quando se busca uma abordagem mais robusta. A diversidade de métodos disponíveis para calcular zeros de funções reflete a riqueza e complexidade da matemática computacional, onde diferentes abordagens podem ser necessárias para diferentes contextos e desafios.

6. Como você se sentiu ao utilizar uma planilha eletrônica para aplicar métodos numéricos no cálculo de zeros de funções e na interpolação polinomial?

Figura 5.6 – Análise do uso da planilha eletrônica e dos métodos numéricos para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial.



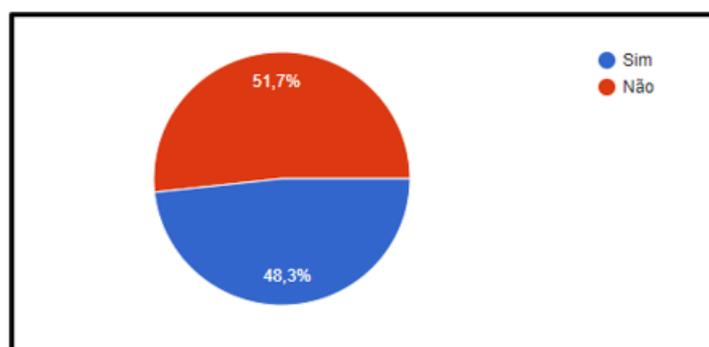
Fonte: Própria do autor.

Percebe-se que uma grande parcela se sentiu segura ao utilizar uma planilha eletrônica para aplicar métodos numéricos no cálculo de zeros de funções e na interpolação polinomial. Isso sugere que a ferramenta proporcionou um ambiente confortável

e confiável para a aplicação desses métodos, o que é essencial para o sucesso na resolução de problemas matemáticos complexos. Por outro lado, pode-se notar que uma proporção significativa (51,7%) se sentiu insegura, mas isso se deve ao fato de que não é de costume da turma o uso de planilha eletrônica para tal finalidade, além de é claro a não familiaridade com o conteúdo métodos iterativos, conforme demonstrado em respostas outras perguntas do questionário. De modo geral, o resultado para esta pergunta está dentro do esperado.

7. Você acredita que a utilização de uma planilha eletrônica facilitou o entendimento e a aplicação dos métodos numéricos apresentados?

Figura 5.7 – Resultado sobre se a planilha eletrônica facilitou o entendimento e a aplicação dos métodos apresentados.

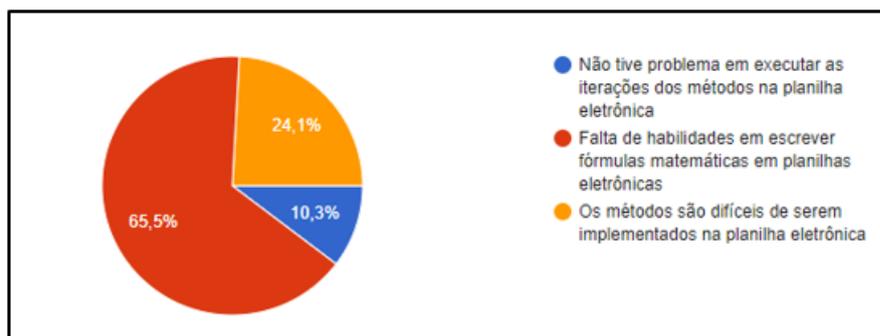


Fonte: Própria do autor.

É gratificante e encorajador ver que quase metade dos respondentes reconhecem que a utilização de uma planilha eletrônica facilitou o entendimento e a aplicação dos métodos numéricos apresentados. Isso demonstra uma disposição para adotar ferramentas modernas e eficientes no processo de aprendizagem. Quanto aqueles que responderam “não” seria valioso explorar mais os motivos por trás dessa percepção. Talvez oferecer sessões de treinamento adicionais ou recursos complementares para auxiliar na compreensão e uso eficaz das planilhas eletrônicas poderia aumentar a aceitação e aproveitamento dessas ferramentas.

8. Qual foi o desafio que você enfrentou durante o processo de aplicação dos métodos numéricos utilizando uma planilha eletrônica?

Figura 5.8 – Dificuldades na utilização dos métodos numéricos através de planilha eletrônica.

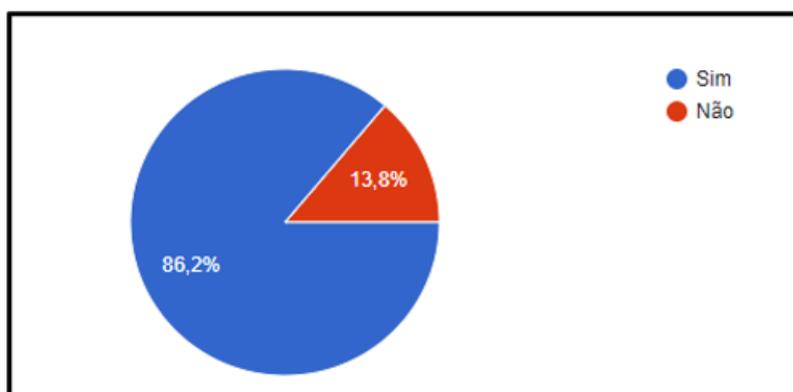


Fonte: Própria do autor.

É evidente que aplicar métodos numéricos utilizando uma planilha eletrônica pode ser um desafio significativo. Embora uma minoria expressiva (10,3%) não encontre problemas em executar iterações desses métodos na planilha, a maioria esmagadora (65,5%) enfrenta dificuldades com a escrita de fórmulas matemáticas. Essa lacuna de habilidades pode ser uma barreira substancial, dificultando a implementação eficaz dos métodos. Além disso, é preocupante que quase um quarto dos entrevistados (24,1%) considere os métodos difíceis de serem implementados na planilha eletrônica. Isso destaca a necessidade urgente de oferecer suporte adicional e recursos educacionais para capacitar os usuários a aproveitar ao máximo essas ferramentas poderosas.

9. Você percebeu a relação entre os métodos numéricos e os conceitos matemáticos estudados no ensino médio?

Figura 5.9 – Percepção dos alunos sobre a relação entre os métodos numéricos e conceitos matemáticos vistos no ensino médio.



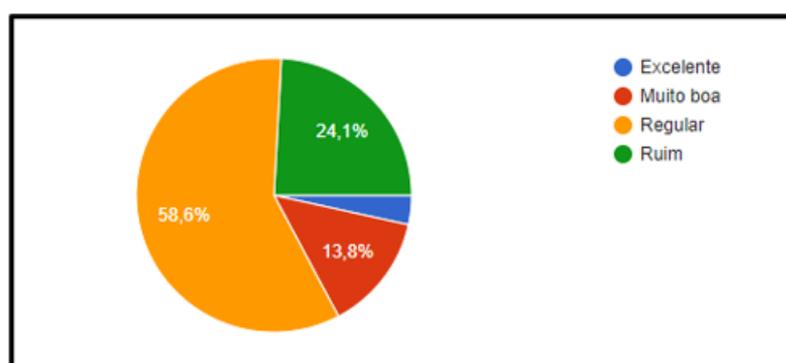
Fonte: Própria do autor.

É fascinante notar como os métodos numéricos não apenas aplicam os conceitos matemáticos do ensino médio, mas também os ampliam e os tornam palpáveis em situações práticas e reais. A conexão entre esses dois domínios da matemática é

crucial para uma compreensão mais profunda e abrangente da disciplina, destacando a relevância e a utilidade dos estudos de matemática desde os primeiros anos escolares até o ensino superior. É encorajador ver que a maioria reconhece essa relação, indicando uma compreensão sólida e uma apreciação pela interconexão entre teoria e aplicação na matemática.

10. Como você avalia sua habilidade em resolver problemas matemáticos utilizando métodos numéricos após essa experiência?

Figura 5.10 – Habilidade em resolver problemas matemáticas utilizando métodos numéricos pós experiência.

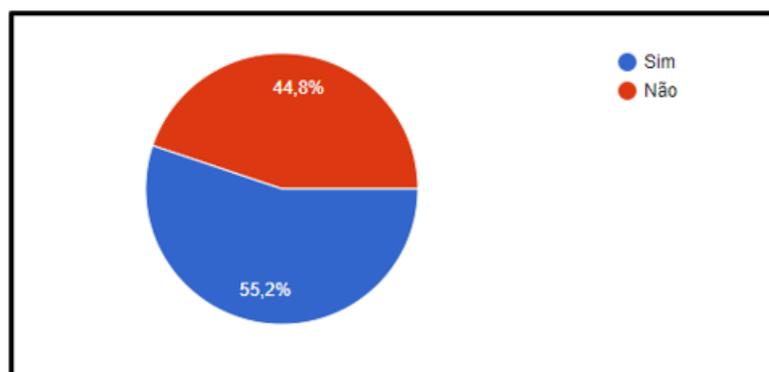


Fonte: Própria do autor.

Considerando a distribuição das respostas, parece que há uma proporção significativa de participantes que se sentem confiantes em suas habilidades, com uma porcentagem substancial avaliando-as como regulares ou melhores. No entanto, a quantidade considerável de respostas indicando dificuldades pode sugerir a necessidade de mais suporte ou recursos para aqueles que se sentem menos confortáveis com métodos numéricos. Seria interessante explorar quais são os desafios específicos enfrentados por aqueles que se classificaram como "ruim" ou "regular" e, a partir daí, desenvolver estratégias de melhoria e apoio adequadas.

11. Você gostaria de explorar mais sobre métodos numéricos e sua aplicação prática em outras áreas do conhecimento?

Figura 5.11 – Intenção de explorar mais sobre métodos numéricos e sua aplicação em outras áreas do conhecimento.



Fonte: Própria do autor.

Nota-se que um pouco mais da metade dos discentes que responderam ao questionário deu um *feedback* positivo em relação a esta pergunta. Quanto a isso, vale destacar que foi disponibilizado para a realização da oficina apenas dois encontros e que se tivesse um pouco mais de tempo de aplicação da pesquisa, o que foi explanado poderia ter sido feito com mais detalhes e entusiasmo, proporcionando um ganho maior para o público alvo e, possivelmente, melhor retorno.

12. **(Subjetiva)** - Quais são as vantagens e desvantagens no uso de métodos numéricos e planilhas eletrônicas para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial em comparação com os métodos que você já estudou no ensino médio?

Respostas de alguns discentes:

Discente 1: Vantagens: há uma certa facilidade de resolver equações com esse método quando você o aprende; **Desvantagem:** difícil de aprender.

Discente 2: Facilidade pra achar as raízes das funções, já a **desvantagem** é a complexidade das fórmulas mesmo com a ajuda das planilhas.

Discente 3: Podemos citar a **vantagem** de ser mais fácil de aprender por ser bem visual, é possível ver o zero de uma função no GeoGebra, após os cálculos feitos na planilha eletrônica. A **desvantagem** é que são sensíveis, um ponto a mais, um parêntese ou algo que mude a função já interfere no resultado. Mas não chega ser um problema em si, só precisamos ter a atenção redobrada.

Discente 4: Vantagens: a usabilidade; **Desvantagens:** nenhuma.

Discente 5: A **vantagem** é que se utiliza de uma área que tem relação com o curso redes de computadores, e a **desvantagem** é que muitos alunos não tiveram contato com esse tipo de tecnologia antes, o que pode prejudicar um pouco o entendimento.

Discente 6: A **vantagem** é que automaticamente os números são postos. A **desvantagem** são as dificuldades nas expressões e execução na planilha.

Discente 7: A **vantagem** é que é mais simples não precisar calcular e a **desvantagem** é que algumas pessoas podem se confundir na hora de fazer algumas fórmulas.

Discente 8: Vantagem: É uma nova forma de observar e aprender as funções, que facilita o entendimento dos telespectadores; **Desvantagem:** Foi o pouco tempo que tivemos, pois, os cálculos e a explicação foram um pouco rápidos demais.

Discente 9: Acredito que talvez seja uma ótima forma de automatizar os cálculos, mas que ainda é complexo de aplicar, pois necessita de um pouco de lógica de programação, então em comparação os métodos normais do ensino médio, essa prática primeiramente deve ser exercitada para ser completamente compreendida e aplicada no método de forma clara e útil num uso posterior.

Discente 10: A facilidade de conseguir usar é muito melhor e com isso aprendemos melhor também.

Discente 11: Achei que o método ficou um pouco confuso, no entanto a planilha facilitou a visualização.

Por fim, quanto a questão subjetiva (12), pode-se dizer que, de modo geral, ela foi bastante positiva, pois as respostas dos discentes refletem uma compreensão variada e uma avaliação equilibrada das vantagens e desvantagens dos métodos numéricos e das planilhas eletrônicas para cálculos de zeros de funções e interpolação polinomial em comparação com os métodos tradicionais do ensino médio.

É positivo notar que vários discentes reconhecem a facilidade e a usabilidade desses métodos, destacando a capacidade de resolver equações e encontrar raízes de forma mais eficiente. Além disso, a ênfase na visualização, especialmente através do GeoGebra e das planilhas eletrônicas, é valorizada como uma vantagem significativa para o entendimento dos conceitos matemáticos.

No entanto, também é encorajador observar que os discentes estão cientes das dificuldades associadas a esses métodos, como a complexidade das fórmulas, a sensibilidade dos cálculos a pequenas alterações e a necessidade de atenção redobrada. Além disso, o reconhecimento da necessidade de familiarização prévia com a tecnologia por parte dos alunos é um ponto relevante, demonstrando uma consideração atenta às diferentes habilidades e experiências dos estudantes.

No geral, as respostas indicam uma abordagem crítica e reflexiva em relação aos métodos numéricos e às planilhas eletrônicas, reconhecendo tanto seus benefícios quanto seus desafios, o que sugere um engajamento positivo com a matéria e um desejo de aprimoramento no aprendizado desses conceitos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações finais desta dissertação revelam a relevância e o alcance das contribuições proporcionadas pela pesquisa. Ao longo do estudo, buscou-se oferecer ao professor uma nova abordagem na resolução de problemas, visando promover um avanço em relação ao paradigma do modelo tradicional de ensino. A ênfase na utilização de planilhas eletrônicas como ferramenta de suporte para os alunos do ensino médio representa uma inovação significativa, ampliando suas possibilidades de aprendizado e aplicação prática dos conhecimentos adquiridos.

Pode-se perceber, com base na realização da oficina no Instituto Federal do Amapá, que a investigação aprofundada dos principais métodos numéricos relacionados ao zero de uma função e interpolação polinomial aliados ao uso de planilha eletrônica, contribuiu e pode contribuir mais ainda para o enriquecimento do repertório teórico e prático dos educandos e educadores, pois essa abordagem não apenas fortalece o embasamento científico do ensino, mas também oferece aos professores ferramentas mais dinâmicas e eficazes para transmitir conceitos complexos de maneira acessível aos estudantes.

Ao propor o desenvolvimento do pensamento algébrico, computacional e lógico nos alunos, a dissertação destaca a importância de cultivar habilidades cognitivas fundamentais. O estímulo à lógica, aliado ao pensamento algébrico, proporciona uma base sólida para o entendimento e a resolução de problemas matemáticos. Além disso, ao envolver a componente computacional, a pesquisa prepara os alunos para o ambiente tecnológico contemporâneo, capacitando-os a utilizar ferramentas digitais de forma crítica e eficiente.

Em suma, pós aplicação ficou mais evidente que os objetivos desta dissertação convergem para a promoção de uma educação mais dinâmica, contextualizada e alinhada às demandas atuais. Ao oferecer novas perspectivas para o ensino de matemática, a pesquisa visa contribuir não apenas para o desenvolvimento acadêmico dos alunos, mas também para a formação de indivíduos capazes de enfrentar desafios complexos em uma sociedade cada vez mais orientada pela tecnologia e pela resolução de problemas. Este trabalho sinaliza, portanto, um passo significativo em direção à melhoria do processo educacional, destacando a importância da inovação e da adaptação constante no campo da educação matemática.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, T. M. **Matemática Interligada: Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica**. São Paulo: Editora Scipione, 2020.
- ARAÚJO, S. X. S. et al. **Uma introdução ao estudo de derivadas no ensino médio**. Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2016.
- ÁVILA, G. **Limites e derivadas no Ensino Médio**. *Revista do Professor de Matemática*, v. 1, p. 60, 2006.
- BARROSO, L. C. et al. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. São Paulo: HARBRA Ltda, 2018.
- BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, G.; CÂMARA, P. **Matemática: Funções e Progressões**. São Paulo: FTD, 2020.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Diário Oficial da República Federativa do Brasil, 2018.
- CUNHA, F. G. M.; CASTO, J. K. d. S. **Cálculo Numérico: Licenciatura em Matemática**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2010.
- FONTELLES, M. J. et al. **Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa**. *Rev. para. med*, 2009.
- GARCIA, J. d. S. R.; SOUZA, J. R. d. **Contato Matemática**. São Paulo: FTD, 2016.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar 1: conjuntos e funções**. São Paulo: Atual, 2013.
- IFAP. **Resolução N°001/2020 CONSUP/IFAP, de 17 de fevereiro de 2020**. *Plano de Curso Técnico de Nível médio em Redes de Computadores na forma integrada*, 2020. Disponível em: <<https://macapa.ifap.edu.br/index.php/publicacoes/item/903-ppc-plano-do-curso-tecnico-em-redes-de-computadores-2020>>. Acesso em: 06 de março de 2023.
- JARLETTI, C. **Cálculo Numérico**. Curitiba: Intersaberes, 2018.
- JUSTO, D. A. R. et al. **Cálculo Numérico: Um livro colaborativo**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.
- LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- MIGUEL, A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- NEVES, P. d. T. S. **Introdução ao ensino do Cálculo e aplicações da derivada no Ensino Médio**. Macapá-AP: UNIFAP, 2016.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. d. S. L. **Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio.** *Revista Principia, João Pessoa*, v. 38, p. 105–119, 2018.

PIRES, A. d. A. **Cálculo Numérico-Prática com Algoritmos e Planilhas.** *São Paulo: Atlas*, 2014.

RAMOS, V. S. **Limites e derivadas no ensino médio: possibilidades de ensino.** Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2022.

RODRIGUES, T. D. d. F. F.; OLIVEIRA, G. S. de; SANTOS, J. A. dos. **As pesquisas qualitativas e quantitativas na educação.** *Revista Prisma*, v. 2, n. 1, p. 154–174, 2021.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997.

SILVA, J. Sebastião e. **Compêndio de Matemática (3 volumes).** *Lisboa: GEP*, 1975.

SILVEIRA, E. R. H. d. **Análise não linear geométrica e material de treliças planas.** Dissertação (B.S. thesis), 2023.

SOBRAL, E. d. S. et al. **Uma abordagem sobre métodos numéricos para determinar as raízes de funções polinomiais para alunos do ensino médio.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.

SOUSA, R. O. d. **Alguns Métodos Interessantes de Extração e Aproximação da Raiz Quadrada.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, 2013.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. e. **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos.** Prentice Hall, 2006.

STOPPE, R. **O estudo de funções no Ensino Básico.** 2019. Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/directbitstream/222b7f65-be36-4e49-8788-01063d1691ce/3000636.pdf>>. Acesso em: 16 de novembro de 2023.

TORRES, J. E. P.; TORRES, L. A. **Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática.** *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle: Colombia*, 2019.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PARTICIPANTES DA OFICINA

Com o objetivo de finalizar a minha dissertação de mestrado necessito da ajuda de vocês, por meio de um questionário que foi feito com o intuito de analisar o uso de planilhas eletrônicas no ensino de métodos numéricos por ocasião das aulas de matemática. O questionário é destinado apenas aos discentes do curso de Redes de Computadores (curso integrado – 2º Ano) do Campus Macapá, dessa forma é de extrema importância que vocês participem da pesquisa, a qual possibilitará minha formação no PROFMAT-UNIFAP. Agradeço a atenção e colaboração!

1. Você já utilizou planilhas eletrônicas para resolver problemas matemáticos?
 - (a) Sim
 - (b) Não

2. Depois dessa experiência, você acha que planilhas eletrônicas são uma maneira adequada de se explorar conceitos matemáticos?
 - (a) Sim
 - (b) Não

3. Você já tinha algum conhecimento sobre métodos numéricos e iterativos para os zeros de funções e interpolação polinomial?
 - (a) Sim
 - (b) Não

4. Você teve alguma dificuldade em compreender a teoria por trás dos métodos numéricos?
 - (a) Sim
 - (b) Não

5. Qual dos métodos numéricos abordados na pesquisa você achou mais interessante para o cálculo de zeros de funções?

- (a) Método da Bisseção
 - (b) Método da Falsa Posição
 - (c) Método da Secante
 - (d) Método de Newton
6. Como você se sentiu ao utilizar uma planilha eletrônica para aplicar métodos numéricos no cálculo de zeros de funções e na interpolação polinomial?
- (a) Seguro
 - (b) Inseguro
7. Você acredita que a utilização de uma planilha eletrônica facilitou o entendimento e a aplicação dos métodos numéricos apresentados?
- (a) Sim
 - (b) Não
8. Qual foi o desafio que você enfrentou durante o processo de aplicação dos métodos numéricos utilizando uma planilha eletrônica?
- (a) Não tive problema em executar as iterações dos métodos na planilha eletrônica.
 - (b) Falta de habilidades em escrever fórmulas matemáticas em planilhas eletrônicas.
 - (c) Os métodos são difíceis de serem implementados na planilha eletrônica.
9. Você percebeu a relação entre os métodos numéricos e os conceitos matemáticos estudados no ensino médio?
- (a) Sim
 - (b) Não
10. Como você avalia sua habilidade em resolver problemas matemáticos utilizando métodos numéricos após essa experiência?
- (a) Excelente
 - (b) Muito Boa

- (c) Regular
 - (d) Ruim
11. Você gostaria de explorar mais sobre métodos numéricos e sua aplicação prática em outras áreas do conhecimento?
- (a) Sim
 - (b) Não
12. Quais são as vantagens e desvantagens no uso de métodos numéricos e planilhas eletrônicas para o cálculo de zeros de funções e interpolação polinomial em comparação com os métodos que você já estudou no ensino médio?