



UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional

Thainanny Alves Santos Borges

ALUGUEL OU FINANCIAMENTO IMOBILIÁRIO: uma abordagem com matemática financeira.

**Teófilo Otoni
2024**

Thainanny Alves Santos Borges

ALUGUEL OU FINANCIAMENTO IMOBILIÁRIO: UMA ABORDAGEM COM MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Vale do Jequitinhonha e Mucuri – Campus Mucuri, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edileno de Almeida Santos

Teófilo Otoni
2024

Catálogo na fonte - Sisbi/UFVJM

AB732 Borges, Thainanny Alves Santos
2024 ALUGUEL OU FINANCIAMENTO IMOBILIÁRIO: uma abordagem com
matemática financeira [manuscrito] / Thainanny Alves Santos
Borges. -- Teófilo Otoni, 2024.
44 p. : il.

Orientadora: Prof.^a Edileno de Almeida Santos.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) --
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teófilo Otoni, 2024.

1. Aluguel. 2. Financiamento. 3. Matemática Financeira. 4.
Capitalização. I. Santos, Edileno de Almeida. II.
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.
III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFVJM com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Este produto é resultado do trabalho conjunto entre o bibliotecário Rodrigo Martins Cruz/CRB6-
2886
e a equipe do setor Portal/Diretoria de Comunicação Social da UFVJM

Thainanny Alves Santos Borges

**ALUGUEL OU FINANCIAMENTO IMOBILIÁRIO: UMA ABORDAGEM COM
MATEMÁTICA FINANCEIRA**

Dissertação apresentada do Programa de pós-graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Edileno de Almeida Santos

Data de aprovação: 20/03/2024

Documento assinado digitalmente
 **ANTONIO CARLOS TELAU**
Data: 08/06/2024 15:41:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Msc. Antônio Carlos Telau – UFVJM

Documento assinado digitalmente
 **RAFAEL LUCAS DE ARRUDA**
Data: 11/06/2024 17:00:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rafael Lucas de Arruda – UFMS

Documento assinado digitalmente
 **EDILENO DE ALMEIDA SANTOS**
Data: 07/06/2024 11:47:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Edileno de Almeida Santos – UFVJM

Teófilo Otoni - MG

Dedico este trabalho à minha família, que me apoiou e me motivou em cada momento de estudo e dedicação que tive nessa caminhada. Ao meu senhor e salvador Jesus Cristo, que me concedeu esta benção e vitória, a Deus presto toda honra, toda glória e todo louvor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me capacitar e me preparar todos os dias para não desistir de viver a vida em plenitude.

Aos meus pais que me deram a vida.

Ao meu esposo que sempre apoiou e acreditou,

Ao professor Dr. Edileno de Almeida Santos pela orientação, amizade e principalmente pela paciência, sem a qual seria muito mais difícil executar este trabalho.

Aos meus colegas de turma em especial à Claudiane, se não fosse seu apoio eu não teria chegado até aqui muitas vezes acreditou em mim mais que eu mesma.

A todo corpo docente do programa na Universidade Federal do Vale do Jequitinhonha e Mucuri que dedicou todo apoio, inclusive no ensino remoto durante a pandemia.

A diretora da Escola Estadual de Itaobim, Geosiane Mendes Machado que me deu total apoio durante o processo, assim como a diretora do Centro Educacional Crescer Feliz, Alexa Soraya.

Aos examinadores Antônio Carlos Telau, Deborah Farago Jardim, Rafael Lucas De Arruda, Lázaro Santos Gil.

À CAPES:

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001.

"A mente que se abre a uma nova ideia, jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein

RESUMO

A dissertação de mestrado aborda a questão crucial de escolher entre aluguel ou financiamento imobiliário, utilizando uma abordagem fundamentada em Matemática Financeira. Inicialmente, são apresentados os principais conceitos dessa disciplina, seguidos por uma análise detalhada do fluxo de dinheiro em uma capitalização. Em seguida, são explorados os três sistemas de amortização, fornecendo as ferramentas necessárias para a tomada de decisão racional com base em uma estrutura financeira pré-estabelecida. Além disso, são desenvolvidas fórmulas específicas para comparações e análises de cenários financeiros, permitindo uma avaliação ponderada das opções entre aluguel e financiamento imobiliário. Este estudo contribui para uma melhor compreensão das implicações financeiras envolvidas na escolha entre alugar e financiar um imóvel, fornecendo insights valiosos para indivíduos e instituições envolvidas no mercado imobiliário.

Palavras-chave: Aluguel; Financiamento; Capitalização; Amortização; Financeiro;

ABSTRACT

The master's dissertation addresses the crucial issue of choosing between renting or real estate financing, using an approach grounded in Financial Mathematics. Initially, the main concepts of this discipline are presented, followed by a detailed analysis of cash flow in capitalization. Next, the three amortization systems are explored, providing the necessary tools for rational decision-making based on a pre-established financial structure. Additionally, specific formulas are developed for comparisons and analyses of financial scenarios, allowing for a weighted evaluation of options between renting and real estate financing. This study contributes to a better understanding of the financial implications involved in the choice between renting and financing a property, providing valuable insights for individuals and institutions involved in the real estate market.

Keywords: Rent; Financing; Capitalization; Amortization; Financial.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráfico comparativo com capitalização simples e capitalização composta. Fonte: A autora.....	15
Figura 2: Esquema de pagamento. Fonte: A autora.....	18
Figura 3: Esquema de sequências uniforme de pagamentos. Fonte: Bootebook	19
Figura 4: Esquema de sequências de pagamento do exemplo IV. Fonte: Bootebook	20
Figura 5: Esquema de sequências de pagamento do exemplo V. Fonte: Bootebook	21
Figura 6 - Dados iniciais financiamento. Fonte: Site da Caixa Econômica Federal...	37
Figura 7 - Informações sobre o financiamento. Fonte: Site da Caixa Econômica Federal	37
Figura 8 - Opções de pagamento. Fonte: Site da Caixa Econômica Federal.....	38
Figura 9 - Taxa de rendimento da Nubank. Fonte: Site da nubank.	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: comparativo com capitalização simples e capitalização composta. Fonte: A autora.	14
Tabela 2: Capitalização. Fonte: A autora	17
Tabela 3: Pagamento anual no sistema PRICE do exemplo VII. Fonte: A autora.....	27
Tabela 4: Pagamento anual no sistema SAC exemplo IX. Fonte: A autora	29
Tabela 5: Dados de um financiamento imobiliário. Fonte: Bootebook.....	32
Tabela 6: Composição da resposta no exemplo XI. Fonte: A autora	32
Tabela 7: Valores do IGP-M dos últimos 10 anos. Fonte: Dados de mercado.....	38
Tabela 8 - Dados gerais. Fonte. A autora.	39
Tabela 9 - Valor presente do financiamento. Fonte: A autora.	39
Tabela 10: Valor presente do aluguel. Fonte: A autora.	40
Tabela 11: Vantagem do aluguel. Fonte: A autora.	40
Tabela 12: Vantagem do financiamento. Fonte: A autora	40
Tabela 13: Análise final. Fonte: A autora.	40

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CONSIDERAÇÕES INICIAIS	12
1. CONCEITOS BÁSICOS	13
1.1 - REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTA	14
1.2 - REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA	15
1.3 - FÓRMULA DAS TAXAS EQUIVALENTES	16
2. VALOR ATUAL E VALOR FUTURO	16
2.1 - SEQUÊNCIA UNIFORME DE PAGAMENTOS	19
2.2 - MONTANTE DE UMA SEQUÊNCIA UNIFORME DE PAGAMENTOS	21
2.3 - RICHARD PRICE E A SEQUÊNCIA UNIFORME DE CAPITAIS	22
2.4 - VALOR ATUAL DE UMA SEQUÊNCIA UNIFORME DE PAGAMENTOS	22
3. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO	23
3.1 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO (SAA)	23
3.2 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO PRICE (OU FRANÇÊS)	25
3.2.1 - Teorema do Saldo Devedor (PRICE)	27
3.2.2 - Soma das Prestações no Sistema PRICE	28
3.3 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE	28
3.3.1 - Teorema do Saldo Devedor (SAC)	30
3.3.2 - Soma das Prestações no Sistema SAC	31
4. FÓRMULAS DE COMPARAÇÃO	33
4.1 - PROGRESSÃO ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA	33
4.2 - VALOR ATUAL DE UMA SEQUÊNCIA DE ALUGUÉIS	34
4.3 - VALOR ATUAL DOS PAGAMENTOS SAC	34
4.4 - PRICE vs SAC	35
5. ALUGAR OU FINANCIAR, EIS A QUESTÃO!	36
CONCLUSÃO	42
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44

INTRODUÇÃO

No cenário contemporâneo, onde as decisões financeiras desempenham um papel crucial na vida das pessoas e no desenvolvimento econômico, a escolha entre aluguel ou financiamento imobiliário tornou-se uma questão de grande relevância. Em um contexto onde a moradia é uma necessidade básica e um investimento significativo, compreender as implicações financeiras e as nuances envolvidas nessa decisão é fundamental para indivíduos, famílias e instituições financeiras.

A Matemática Financeira emerge como uma ferramenta essencial para analisar e avaliar os aspectos monetários relacionados à escolha entre alugar e financiar um imóvel. Ao fornecer uma estrutura teórica e ferramentas analíticas, a Matemática Financeira permite uma análise sistemática das opções disponíveis, levando em consideração fatores como taxas de juros, prazos, custos iniciais e fluxos de caixa futuros.

Esta dissertação visa explorar a fundo essa questão, adotando uma abordagem baseada em Matemática Financeira para examinar as implicações financeiras da escolha entre aluguel e financiamento imobiliário. Através de uma revisão abrangente dos principais conceitos e métodos da Matemática Financeira, esta pesquisa busca fornecer uma compreensão mais profunda das complexidades envolvidas nessa decisão crucial.

Além disso, este estudo pretende contribuir para a literatura existente, oferecendo insights valiosos e análises críticas que podem auxiliar indivíduos, famílias e profissionais do mercado imobiliário na tomada de decisões informadas e estratégicas.

Ao abordar essa questão sob uma perspectiva multidisciplinar, combinando os princípios da Matemática Financeira com as realidades práticas do mercado imobiliário, esta pesquisa busca preencher uma lacuna importante na literatura acadêmica e fornece uma base sólida para futuras investigações nessa área.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Matemática Financeira é de extrema importância no campo das aplicações da Matemática, orientando decisões que levem a uma gestão financeira mais eficiente, tanto a nível pessoal quanto empresarial.

No entanto, apesar de sua relevância, a Matemática Financeira costuma ser abordada de forma superficial no ensino básico. Conforme apontado por Morgado (2014), muitos alunos, mesmo após doze anos de educação matemática básica, têm dificuldade em fazer escolhas racionais entre pagar à vista ou a prazo e, mais ainda, lidar com questões imobiliárias. O uso do raciocínio lógico para resolver problemas práticos é uma das metas fundamentais do estudo da Matemática, sendo objetivo da Matemática Financeira a solução de diversos dilemas econômicos.

No ensino fundamental, a introdução à Matemática Financeira (geralmente no 9º ano) tende a focar no regime de capitalização simples, devido à sua simplicidade de cálculo. No entanto, essa abordagem limitada prejudica o desenvolvimento do aluno, já que a maioria das transações financeiras é baseada no regime de juros compostos. Quando ambos os regimes são ensinados, não há uma exploração aprofundada do assunto.

Tópicos essenciais para o estudo da Matemática Financeira, como funções exponenciais, propriedades dos logaritmos, progressões aritméticas e geométricas, são geralmente abordados apenas no primeiro e/ou segundo ano do ensino médio. Este período representa uma oportunidade para uma abordagem mais abrangente, permitindo que os alunos ampliem seus conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental e enfrentem problemas mais complexos, aplicando a Matemática à realidade.

Há referências bibliográficas relevantes, de apoio aos professores que buscam um bom domínio dos conteúdos ensinados no ensino médio. Destaco aqui a obra *“Fundamentos de matemática elementar – Vol. 11”* dos autores Gelson Iezzi, Samuel Hazzan e David Degenzajn. Uma outra referência, principalmente se estudarmos fórmulas mais específicas, é a Plataforma Bootebook (www.bootebook.com), desenvolvida pelo Professor Edileno de Almeida Santos, acessada em Fevereiro de 2024. A plataforma será a mais utilizada ao longo de toda essa abordagem.

1. CONCEITOS BÁSICOS

A Matemática Financeira se concentra primariamente na variação do capital ao longo do tempo. Diversas situações do nosso dia a dia, tais como investimentos, empréstimos, descontos bancários, financiamentos e análise de investimentos, são exploradas nesse significativo campo da Matemática, cujo propósito principal é a tomada de decisões. Conforme destacado por Boggiss, Gaspar, Heringer e Mendonça (2013, p.17), o objetivo da Matemática Financeira é "a análise de operações financeiras envolvendo fluxos de entrada e saída de dinheiro, ocorrendo em momentos diferentes".

De acordo com Tosi (2009) sobre a matemática Financeira:

"A Matemática Financeira é o ramo da matemática que se ocupa do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. Tem seu campo de atuação em atividades financeiras, como as de empréstimo, financiamento, aplicação e investimento, e seu principal objetivo é fornecer instrumentos matemáticos (fórmulas, tabelas, gráficos, diagramas) que permitam a análise e a comparação dessas atividades e a tomada de decisão quanto a elas". (TOSSI, 2009, p.11)

A operação básica da Matemática Financeira é o empréstimo. Alguém, o credor, que possui um capital C (o capital inicial, também chamado de principal), empresta-o para outrem por um determinado período de tempo. Após esse tempo, o credor recebe de volta o seu capital C acrescido de uma remuneração J , como pagamento pelo seu empréstimo. Esse valor J é o juro. O valor total recebido pelo credor é chamado de montante e geralmente será indicado por M :

$$M = C + J$$

A taxa de juros referente ao período total do empréstimo é a razão

$$i = \frac{J}{C}$$

Equivalentemente:

$$J = C \cdot i$$

1.1 - REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTA

Suponhamos a aplicação de um capital de R\$10.000,00, a uma taxa de juros de 5% ao mês, durante três meses. Baseando-nos no regime de capitalização adotado (simples ou composto), vamos calcular os juros e o montante, resultantes desta aplicação.

Tabela 1: comparativo com capitalização simples e capitalização composta. Fonte: A autora.

Regime de Capitalização Simples	Regime de Capitalização Composta
A taxa de Juros incide, a cada período, sobre o capital inicial (C_0) $C_0 = 10000$	A taxa de juros incide, a cada período, sobre o valor acumulado no período anterior. $C_0 = 10000$
Mês 1 = $10000 + 5\% \text{ de } 10000$ $M_1 = 10000 + 500 = 10500$ Mês 2 = $10500 + 5\% \text{ de } 10000$ $M_2 = 10500 + 500 = 11000$ Mês 3 = $11000 + 5\% \text{ de } 10000$ $M_3 = 11000 + 500 = 11500$	Mês 1 = $10000 + 5\% \text{ de } 10000$ $M_1 = 10000 + 500 = 10500$ Mês 2 = $10500 + 5\% \text{ de } 10500$ $M_2 = 10500 + 525 = 11025$ Mês 3 = $11025 + 5\% \text{ de } 11025$ $M_3 = 11025 + 551,25 = 11576,25$
Sendo assim, o valor final (V_f) é igual a R\$11500,00 e com isso o juro nesse regime de capitalização é de R\$1500,00.	Sendo assim, o valor final (V_f) é igual a R\$11576,25 e com isso o juro nesse regime de capitalização é de R\$1576,25

Observe que em apenas três meses de aplicação existe uma diferença de R\$76,25 do regime composto em relação ao regime simples. Sendo o regime composto aquele utilizado na ampla maioria de situações reais, como apontado pelo professor Augusto Morgado, deve-se ter muito cuidado ao se ensinar juros simples, no sentido de induzir o aluno a acreditar que tal regime ocorre normalmente em situações práticas.

Vejamos a comparação das duas capitalizações através do gráfico abaixo:

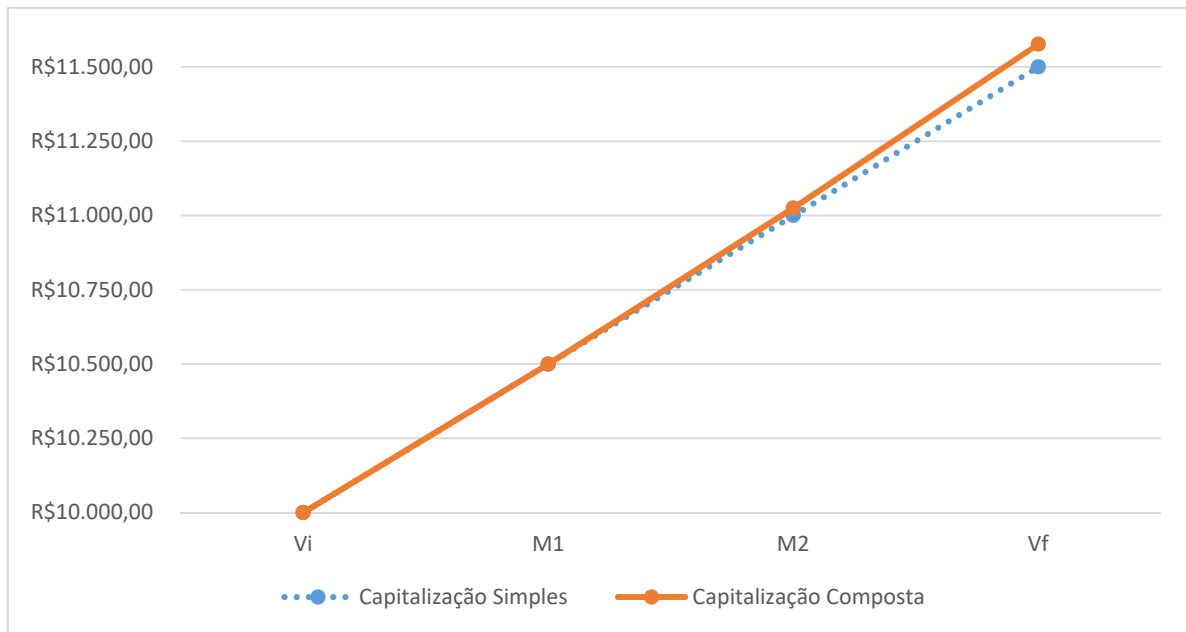


Figura 1 - Gráfico comparativo com capitalização simples e capitalização composta. Fonte: A autora.

No gráfico podemos perceber que as duas funções se interceptam no ponto de abscissa $n = 1$, ou seja, no primeiro mês, logo em seguida a capitalização composta ultrapassa a simples.

- Capitalização simples > Capitalização composta, se $0 < n < 1$;
- Capitalização simples = Capitalização composta, se $n = 1$;
- Capitalização simples < Capitalização composto, se $n > 1$.

Isso explica o fato de algumas operações financeiras de curto prazo (menores que um período) serem realizadas no regime de juros simples, pois a capitalização é maior no intervalo $0 < n < 1$.

1.2 - REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

No regime de capitalização composta, começamos com um capital (C_0) aplicado a uma taxa de juros i (decimal) por uma unidade de tempo. A cada período o valor do montante é acrescido de i do seu valor, ou seja, o montante muda pelo fator $(1 + i)$.

$$C_1 = C_0 \cdot (1 + i)$$

$$C_2 = C_1 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2$$

$$C_3 = C_2 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^3$$

...

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

Acima, n é o número de períodos. Equivalentemente, podemos dizer que a sequência de montantes

$$(C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$$

é uma progressão geométrica de razão $q = (1 + i)$.

1.3 - FÓRMULA DAS TAXAS EQUIVALENTES

Se a taxa de juros relativa a um período de tempo é igual a i_1 , então a taxa de juros relativamente a m períodos de tempo é a taxa i_2 dada pela fórmula:

$$1 + i_2 = (1 + i_1)^m,$$

ou seja,

$$i_2 = (1 + i_1)^m - 1.$$

Equivalente:

$$i_1 = (\sqrt[m]{1 + i_2}) - 1.$$

Exemplo I

Vamos determinar a taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês.

$$i_2 = \text{taxa anual}; i_1 = 0,12; m = 12$$

$$1 + i_2 = (1 + 0,12)^{12}$$

$$i_2 = 1,12^{12} - 1$$

$$i_2 \cong 2,90$$

Ou seja, a taxa anual nesta aplicação é de aproximadamente 290%. Este é um erro muito comum, as pessoas acreditam que juros de 12% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 12\% = 144\%$.

2. VALOR ATUAL E VALOR FUTURO

O valor de uma quantia em dinheiro depende do tempo (bem sabemos disso devido ao efeito da inflação). As compras que podemos realizar com 100 reais hoje no supermercado seriam muito mais valiosas um tempo atrás. E, provavelmente, serão bem mais modestas no futuro. Ou seja, 100 reais hoje devem valer menos do

que os mesmos 100 reais no ano passado, mas, provavelmente, são mais valiosos em relação ao ano que vem.

Para que o dinheiro não perca valor, ele deve ser **capitalizado**, ou seja, ser submetido a um processo de crescimento ao longo do tempo por meio da aplicação de juros ou rendimentos sobre o valor inicial. Esse processo de capitalização é comum em investimentos financeiros, onde o dinheiro investido gera retorno ao longo do tempo. Existem dois principais tipos de capitalização:

- **Capitalização Simples:** Nesse caso, os juros são calculados apenas sobre o valor inicial investido durante todo o período do investimento.
- **Capitalização Composta:** Aqui, os juros são calculados não apenas sobre o valor inicial, mas também sobre os juros acumulados ao longo do tempo. Isso resulta em um crescimento exponencial do investimento ao longo do tempo. Em suma, trabalharemos com esse tipo de capitalização, exceto se mencionado com um adjetivo subsequente.

Se a taxa de capitalização (taxa de juros) for de 10% ao ano, os 100 reais de hoje tem o mesmo valor (nessa capitalização) de 110 reais no ano que vem.

Tabela 2: Capitalização. Fonte: A autora

Um ano antes $\div (1 + 10\%)$	Valor Atual	Um ano depois $\times (1 + 10\%)$
$100 \div 1,1 \cong 90,91$	100	$100 \times 1,1 \cong 110,00$

Consideremos uma capitalização $(C_0, C_1, C_2, \dots)$ sob taxa de juros i . Se o valor atual é VA , então, depois de n períodos em relação ao valor presente VA , o valor futuro VF será:

$$VF = VA \times (1 + i)^n$$

Essa relação caracteriza a equivalência de capitais temporalmente distanciados por n período. Por outro lado duas ou mais quantias só podem ser comparadas se levadas à mesma data. Temos então:

$$VA = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

Exemplo II

(PROFMAT - ENQ 2019/2) Você tem dinheiro aplicado à taxa de 10% ao mês. Suponha que, com esse dinheiro, deseja comprar um bem e você tem duas opções de pagamento:

- (I) À vista no valor de R\$3.500,00.
- (II) Em 2 prestações mensais fixas de R\$2.000,00, vencendo a primeira um mês após a compra.

Qual das opções é a mais vantajosa financeiramente?

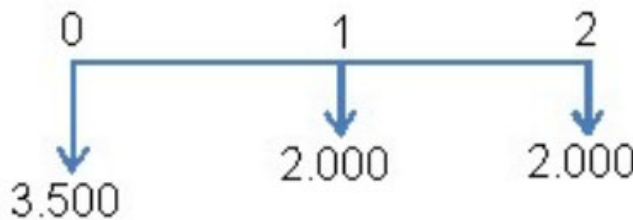


Figura 2: Esquema de pagamento. Fonte: A autora.

Considerando a opção (I) como um pagamento de R\$3.500, 00 na data zero, basta levar (descapitalizar) as duas prestações de R\$2.000, 00 da opção (II) à mesma data (data zero), somá-las e verificar a opção mais vantajosa.

Considerando a taxa de 10% ao mês, vamos calcular o valor atual das duas prestações na opção (II).

$$VA = \frac{2000}{(1 + 0,1)^1} + \frac{2000}{(1 + 0,1)^2} = 1818,18 + 1652,89 = 3471,07$$

Logo, o valor atual da opção (II) é menor que o valor atual da opção (I), sendo assim a opção mais vantajosa é em 2 prestações.

Observação: É importante ressaltar que o problema foi analisado do ponto de vista Matemático. Outros fatores podem influenciar uma tomada de decisão de caráter financeiro:

- A pessoa pode não ter recursos no dia da compra (data zero) e pode estar necessitando do bem a ser comprado, emergencialmente;
- Uma empresa pode financiar a compra de um equipamento e pagar as prestações com o lucro proveniente do uso do próprio equipamento comprado;

Exemplo III.

(ENEM 2019 - Caderno 7 AZUL, Questão 150) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês.

O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R\$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R\$ 204,02.

Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

- a) 398,02 b) 400,00 c) 401,94 d) 404,00 e) 406,02

Considerando a taxa de 1% ao mês, vamos calcular o valor atual das duas prestações.

$$VA = \frac{202}{(1 + 0,01)^1} + \frac{204,02}{(1 + 0,01)^2} = 200 + 200 = 400,00$$

Sendo assim, o valor à vista que deve constar na nota fiscal é de R\$400,00, alternativa b).

2.1 - SEQUÊNCIA UNIFORME DE PAGAMENTOS

Consideremos um valor financiado V que deve ser pago em prestações iguais de valor R nas datas 1, 2, 3, ..., n e suponhamos que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo.

Chamamos essa sequência de sequência uniforme de pagamentos. Veja a figura a seguir, em que os pagamentos são representados por R .



Figura 3: Esquema de sequências uniforme de pagamentos. Fonte: Bootebook

Então a fórmula que relaciona o valor atual com a prestação, taxa de juros e números de prestações é dada por:

$$V = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

$$V = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

$$V = R \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Exemplo IV.

Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro. O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R\$ 1400,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor do empréstimo, sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% a.m.?

O empréstimo deve ser pago em 12 prestações mensais uniformes, sem entrada, conforme mostra a figura a seguir:

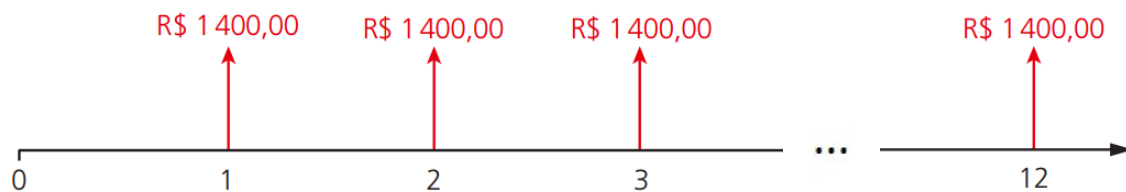


Figura 4: Esquema de seqüências de pagamento do exemplo IV. Fonte: Bootebook

Assim, temos $R = 1400,00$, $n = 12$ e $i = 0,03$.

Substituindo na fórmula, temos

$$V = 1400 \cdot \frac{(1,03)^{12} - 1}{(1,03)^{12} \cdot 0,03}$$

$$V = 13935,61$$

Portanto, o valor emprestado pelo banco foi de R\$13935,61.

Observe que esse valor é inferior ao valor pago de $12 \cdot 1400 = 16800$, erro este que muitas pessoas cometem ao resolver esse tipo de exercício.

Exemplo V.

Um automóvel 0 km é vendido à vista por R\$ 32 000,00 ou a prazo com 20% de entrada mais 24 prestações mensais iguais. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos do financiamento for de 1,8% a.m.?

O automóvel será pago com uma entrada e mais 24 prestações mensais uniformes, conforme mostra a figura a seguir:

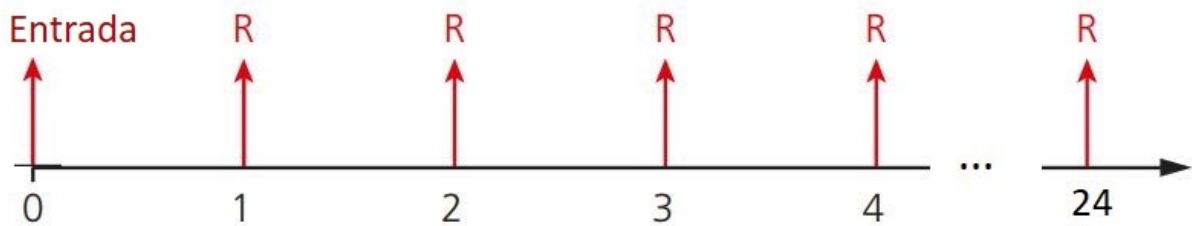


Figura 5: Esquema de seqüências de pagamento do exemplo V. Fonte: Bootebook

Assim, temos $V = 80\%$ de $32.000 = 25.600,00$, $n = 24$ e $i = 0,018$.

$$25600 = R \cdot \frac{(1,018)^{24} - 1}{(1,018)^{24} \cdot 0,018}$$

$$25600 = R \cdot 19,349532$$

$$R = \frac{25600}{19,349532} = 1323,03$$

Assim, cada prestação mensal deve valer R\$ 1323,03.

2.2 - MONTANTE DE UMA SEQUÊNCIA UNIFORME DE PAGAMENTOS

Consideremos n pagamentos (ou depósitos) mensais iguais a R , realizados nas datas $1, 2, 3, \dots, n$, com taxa mensal de rendimento i . Vamos denotar por M_1 o montante final do primeiro pagamento, M_2 o montante do segundo, ..., M_n o montante do último pagamento, todos na data n . Então uma fórmula para o montante final total,

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n,$$

é

$$M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemplo VI.

Uma pessoa deposita mensalmente R\$ 600,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Qual será seu montante no instante imediatamente após o 30º depósito?

Temos $R = 600$, $n = 30$, $i = 0,015$

Portanto:

$$M = 600 \cdot \frac{(1,015)^{30} - 1}{0,015}$$

$$M = 22525,21$$

Assim, no instante imediatamente após o 30º depósito, o montante valerá R\$ 22 523,21.

2.3 - RICHARD PRICE E A SEQUÊNCIA UNIFORME DE CAPITALS

Richard Price foi um influente filósofo, teólogo e especialista em finanças e seguros do século XVIII. Ele foi um dos pioneiros no uso de problemas financeiros envolvendo sequências uniformes de capitais, como o cálculo de financiamentos em prestações iguais e o montante auferido por uma sucessão de depósitos iguais a juros compostos. Price ficou conhecido por suas contribuições no campo da estatística e atuária, especialmente por suas tabelas de mortalidade de Northampton, que foram fundamentais para o cálculo de seguros e aposentadorias.

Em sua obra "Observações sobre pagamentos reversíveis", publicada em 1771, Price elaborou tabelas para o cálculo de juros compostos e explicou conceitos como financiamento por sequência uniforme de pagamentos e montante gerado por depósitos em sequência uniforme. Essas contribuições foram cruciais para o desenvolvimento do campo financeiro e atuarial. Além disso, Price foi reconhecido por suas ideias políticas e filosóficas, tendo sido convidado pelo Congresso da Filadélfia para exercer a função de conselheiro na área financeira. No entanto, suas posições controversas em relação à religião e política o tornaram alvo de críticas e ataques, especialmente por parte da sociedade conservadora britânica. Price faleceu em 1791, aos 68 anos, deixando um legado significativo tanto no campo das finanças quanto no debate político e filosófico de sua época.

2.4 - VALOR ATUAL DE UMA SEQUÊNCIA UNIFORME DE PAGAMENTOS

Consideremos n pagamentos (ou depósitos) mensais iguais a R , realizados nas datas $1, 2, 3, 4, \dots, n$ com taxa mensal de rendimento i . Vamos denotar por A_1 o valor atual do primeiro pagamento, A_2 o valor atual do segundo, ..., A_n o valor atual do último pagamento, todos na data 0. Então uma fórmula para o valor atual total,

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

é

$$A = \frac{M}{(1+i)^n} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

3. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

3.1 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO (SAA)

O Sistema de Amortização Americano (SAA) é uma modalidade de financiamento comum em empréstimos hipotecários nos Estados Unidos e em alguns outros países. Nesse sistema, os pagamentos mensais consistem apenas nos juros do empréstimo, enquanto o valor principal não é amortizado ao longo do período do empréstimo. Isso significa que os pagamentos são menores em comparação com outros sistemas de amortização, como o Sistema de Amortização Constante (SAC) ou o Sistema Price, onde os pagamentos incluem tanto os juros quanto a amortização do principal.

Uma característica importante do SAA é que, ao final do período do empréstimo, o valor principal ainda está integralmente pendente de pagamento. Portanto, o contratante precisa estar preparado para fazer um pagamento único e significativo, conhecido como pagamento do principal, ao final do contrato. Esse pagamento pode ser feito através de uma variedade de meios, como a venda do imóvel, refinanciamento do empréstimo ou uso de fundos próprios.

Apesar de oferecer pagamentos mensais menores durante a vigência do empréstimo, o SAA pode representar um risco financeiro para o contratante, especialmente se não houver um plano claro para quitar o valor principal no final do contrato. É importante que os contratantes compreendam completamente os termos e as condições do SAA antes de optarem por esse tipo de financiamento, garantindo que estejam preparados para lidar com o pagamento do principal ao final do período do empréstimo.

Exemplo VII

Você possui duas opções para adquirir uma máquina de valor inicial $D = 57\,000$ reais para sua empresa, em Sistema de Amortização Americano:

- (I) Pelo Banco A, em SAA com pagamento no final, após 13 meses e à taxa de 0,81% ao mês;
- (II) Pelo Banco B, em SAA com pagamento periódico, em 14 meses e à taxa de 0,92% ao mês.

Considerando que seu dinheiro está investido em uma aplicação financeira à taxa de 14% ao ano, qual é o melhor financiamento para você?

Para analisarmos cada uma das duas alternativas, faremos a conversão da taxa de rendimento da aplicação financeira para mensal. Utilizando a fórmula de equivalência de taxas, temos

$$\begin{aligned}
 1 + i_2 &= (1 + i_1)^m \\
 i_2 &= 0,14; i_1 = \text{taxa mensal}; m = 12; \\
 1,14 &= (1 + i_1)^{12} \\
 i_1 &= \sqrt[12]{1,14} - 1 \\
 i_1 &= 0,01098 = 1,098\%
 \end{aligned}$$

No caso da opção (I) a dívida se extingue com um pagamento único após 13 meses, considerando a taxa de juros de 0,81% ao mês do financiamento. Sob a capitalização da aplicação de 1,1% ao mês, faremos o valor atual do único pagamento da opção (I).

Começaremos calculando o valor final (VF) da dívida de 57 000 após os 13 meses utilizando a fórmula de valor futuro.

$$\begin{aligned}
 VA &= 57000; i = 0,0081; n = 13 \\
 VF &= 57000 \times (1 + 0,0081)^{13} \\
 VF &= 63302,64
 \end{aligned}$$

Agora, para encontrar o Valor Atual (VA) desse pagamento único, utilizamos a fórmula do Valor Atual (VA) em relação ao Valor Futuro (VF), nesse caso usaremos a taxa de 1,1% da aplicação.

$$\begin{aligned}
 VA &= \frac{63302,64}{1,01098^{13}} \\
 VA &= 54925,80
 \end{aligned}$$

Já no caso da opção (II) são realizados 13 pagamentos de mesmo valor $0,92\% \cdot 57000$ nos primeiros 13 meses e um último pagamento de $57000 + 0,92\% \cdot 57000$ no 14º mês.

Para encontrar o valor atual dos pagamentos da opção (II), precisamos calcular o valor presente de cada pagamento considerando a taxa de juros de 1,098% ao mês da aplicação.

No intuito de facilitar a compreensão, dividiremos em três passos:

a. Vamos calcular o valor presente dos 13 pagamentos periódicos de $0,92\% \cdot 57000$; O valor de cada parcela é dado por $0,92\% \cdot 57000 = 524,40$ reais.

Utilizando a fórmula do valor atual vamos calcular o valor atual dos pagamentos considerando a taxa de juros mensal da conta de 1,098%.

$$VA = \sum_{k=1}^{13} \frac{524,40}{(1 + 0,01098)^n} = 6320,78$$

b. Em seguida, vamos calcular o valor presente do último pagamento de $57000 + 0,92\% \cdot 57000$ no 14º mês.

O valor desse pagamento é dado por $0,92\% \cdot 57000 + 57000 = 57524,40$ reais.

Utilizando a fórmula do valor atual vamos calcular o valor atual desse último pagamento.

$$VA = \frac{57524,40}{1,01098^{14}} = 49369,21$$

c. Somando o valor presente dos pagamentos e o valor presente do último pagamento, obtemos o valor atual total dos pagamentos da opção (II):

$$VA = 6320,78 + 49369,21 = 55689,99$$

Nesse caso, a melhor opção é a (I).

3.2 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO PRICE (OU FRANÇÊS)

O Sistema de Amortização Price é uma das formas mais comuns de pagamento de empréstimos e financiamentos. Ele é amplamente utilizado em diversos tipos de transações financeiras, como financiamento imobiliário e empréstimos pessoais. No sistema Price, as prestações são constantes ao longo do período de pagamento, o que significa que o contratante paga o mesmo valor todos os meses. Essas prestações

consistem em uma parcela de amortização do principal, que reduz o saldo devedor, e uma parcela de juros, que é calculada com base no saldo devedor remanescente.

Uma das principais vantagens do Sistema de Amortização Price é a previsibilidade das prestações. Como o valor das parcelas é fixo, o contratante pode planejar seu orçamento com maior facilidade, uma vez que sabe exatamente quanto irá pagar em cada mês. Além disso, esse sistema é mais simples de ser compreendido em comparação com outros métodos de amortização, o que facilita a comunicação entre as partes envolvidas na transação financeira, como contratante, instituições financeiras e reguladores.

No entanto, é importante destacar que, ao longo do tempo, a composição das parcelas no Sistema Price faz com que a parte referente à amortização do principal aumente progressivamente, enquanto a parte referente aos juros diminui. Isso significa que, no início do contrato, a maior parte do valor da prestação é destinada ao pagamento dos juros, e apenas uma pequena parte é utilizada para amortizar o saldo devedor. Conforme o tempo passa, essa proporção se inverte, e mais dinheiro é direcionado para a redução do principal. Isso pode afetar o custo total do financiamento e o tempo necessário para quitação do empréstimo.

No Sistema PRICE, os pagamentos são todos iguais, digamos P . Se a taxa de juros praticada é i a dívida atual VA deve ser igual à soma dos valores atuais, na data focal 0, dos pagamentos P . Então podemos utilizar a fórmula do valor atual de uma sequência uniforme de n pagamentos:

$$VA = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i},$$

que implica

$$P = VA \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}.$$

Exemplo VII

No Sistema PRICE, vamos determinar o valor da parcela para uma dívida de R\$1617,00, à taxa $i = 10\%$ ao ano, e o pagamento feito em 4 parcelas iguais.

Neste exemplo temos: $VA = 1617$; $i = 10\% a.a.$; $n = 4$.

Sendo assim,

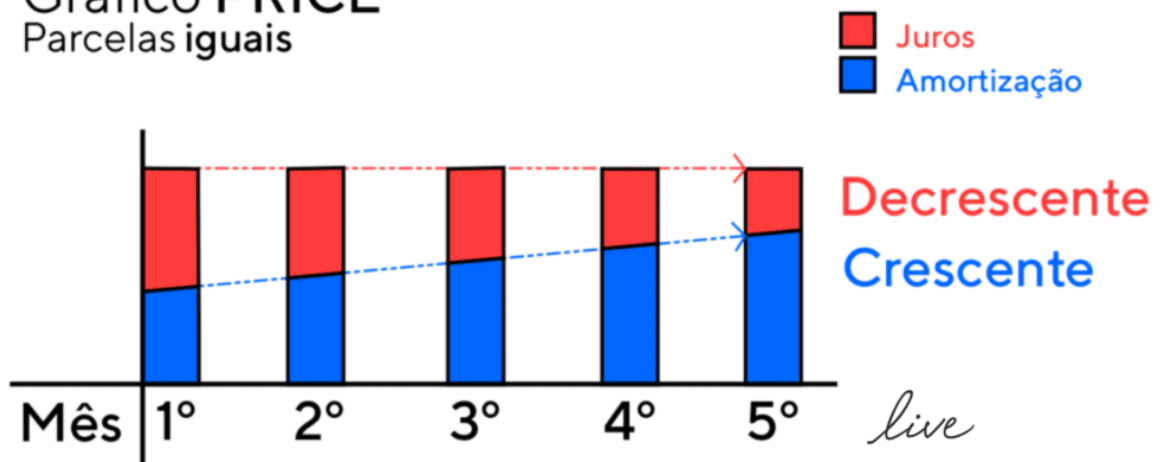
$$P = 1617 \cdot \frac{(1+0,1)^4 \cdot 0,1}{(1+0,1)^4 - 1} = 510,12$$

Então o valor da parcela será de R\$510,12. Acompanhe a tabela

Tabela 3: Pagamento anual no sistema PRICE do exemplo VII. Fonte: A autora

Período (Ano)	Saldo devedor	Parcela	Juros	Amortização
0	1617,00			
1	1268,58	510,12	161,70	$510,12 - 161,70 = 348,42$
2	885,32	510,12	126,86	$510,12 - 126,86 = 383,26$
3	463,73	510,12	88,53	$510,12 - 88,53 = 421,59$
4	0	510,12	46,37	$510,12 - 46,37 = 463,75$
Totais		2040,40	423,46	1617,00

Gráfico PRICE Parcelas iguais



3.2.1 - Teorema do Saldo Devedor (PRICE)

No Sistema PRICE, seja uma dívida atual VA amortizada em n pagamentos P à taxa de juros i . Sendo S_k o saldo a pagar da dívida no período k temos

$$\begin{aligned}
 S_k &= VA \cdot \left(\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \right) \\
 &= P \cdot \left(\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n \cdot i} \right)
 \end{aligned}$$

3.2.2 - Soma das Prestações no Sistema PRICE

No Sistema PRICE, o valor da prestação é constante:

$$P = \frac{VA \cdot (1 + i)^n \cdot i}{(1 + i)^n - 1},$$

sendo VA o valor atual, i a taxa e n o número de períodos. Portanto, o total pago até a última prestação é

$$Total\ pago = n \times P.$$

Exemplo VIII

Suponha que você tenha feito um empréstimo no valor de R\$18100,00. Será adotado o Sistema PRICE, à taxa de 1,60% ao mês. Então as 17 prestações serão constantes. Qual será o valor de cada uma dessas parcelas?

Aqui, temos $VA = 18100$; $i = 1,6\% = 0,016$; $n = 17$.

$$P = \frac{18100 \cdot (1,016)^{17} \cdot 0,016}{(1,016)^{17} - 1} = 1224,51$$

Sendo assim, ao final somando todas as parcelas pagas, o total pago será de

$$Total\ pago = 17 \times 1224,51 = 20816,59$$

3.3 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE.

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é um método utilizado para amortização de empréstimos e financiamentos, sendo uma alternativa ao Sistema de Amortização Price. No SAC, as prestações são decrescentes ao longo do tempo, ou seja, o valor pago pelo contratante diminui a cada período. Essa redução ocorre porque a amortização do principal permanece constante em cada período, enquanto os juros são calculados sobre o saldo devedor remanescente, que diminui a cada pagamento.

Uma das vantagens do SAC é que ele permite uma maior redução do saldo devedor nos estágios iniciais do contrato, o que pode resultar em uma economia de juros ao longo do tempo. Além disso, como as prestações diminuem gradualmente, o contratante pode se beneficiar de uma maior folga no orçamento ao longo do tempo, conforme o valor das parcelas se torna menor.

No entanto, uma desvantagem do SAC é que as prestações mais altas no início do contrato podem representar um desafio financeiro para alguns contratantes, especialmente se eles não estiverem preparados para lidar com pagamentos mais elevados. Além disso, como as prestações são decrescentes, o custo total do financiamento pode ser maior em comparação com outros sistemas de amortização, como o Sistema Price. Assim, a escolha entre SAC e outros métodos de amortização depende das necessidades e capacidades financeiras do contratante.

Neste caso, as amortizações são todas iguais, digamos Q . O pagamento em cada período é igual a soma da amortização com juros correspondentes. A dívida atual VA deve ser igual a soma das amortizações. Então

$$VA = n \times Q$$

que implica

$$Q = \frac{VA}{n}$$

Exemplo IX

No SAC, vamos determinar o valor da parcela para uma dívida de R\$1457,00, à uma taxa $i = 10\%$ ao ano, e o pagamento feito em 4 parcelas iguais.

Sendo assim, temos

$$Q = \frac{1457}{4} = 364.25$$

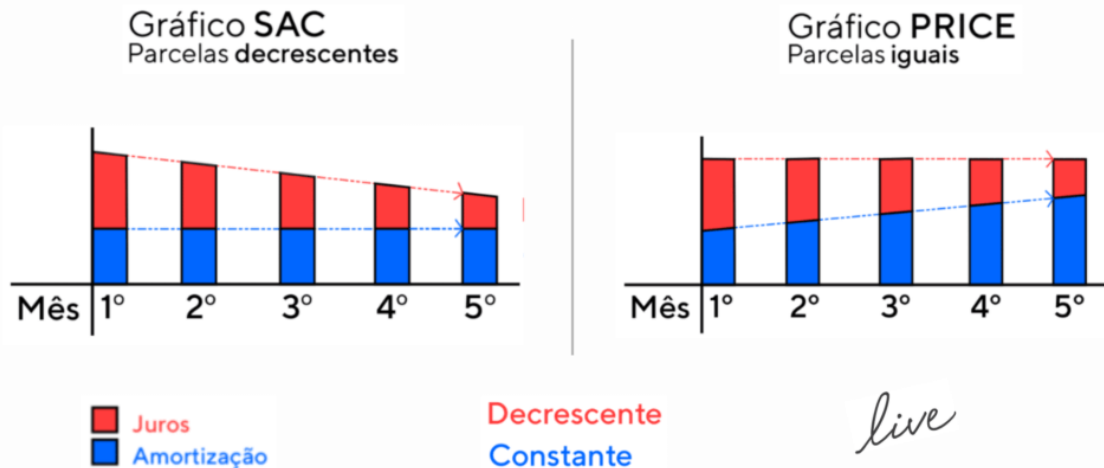
Então o valor da amortização será de R\$364,25. Acompanhe a tabela

Tabela 4: Pagamento anual no sistema SAC exemplo IX. Fonte: A autora

Período (Ano)	Saldo devedor	Juros	Amortização	Pagamento
0	1457,00			
1	1092,75	145,70	364,25	364,25 + 145,70 = 509,95
2	728,50	109,28	364,25	364,25 + 109,28 = 473,53
3	364,25	72,85	364,25	364,25 + 72,85 = 437,10
4	-	36,43	364,25	364,25 + 36,43 = 400,68

Totais		364,26	1457,00	1821,26
--------	--	--------	---------	---------

Diferenças entre a tabela SAC e a Tabela PRICE



3.3.1 - Teorema do Saldo Devedor (SAC)

No Sistema SAC, seja uma dívida atual VA amortizada em n pagamentos $P_1, P_2, \dots, P_n$, à taxa de juros i , com amortização constante Q . Sendo S_k o saldo a pagar da dívida no período k , temos

$$S_k = \frac{VA \cdot (n - k)}{n} = Q \cdot (n - k) = VA - kQ$$

Exemplo X

Maria deseja financiar um carro no valor de R\$ 75 000,00 pelo Sistema SAC em 57 meses, com uma taxa de juros de 1,33% ao mês. Determine o valor da primeira prestação, da última prestação e o valor total pago ao final do financiamento.

Neste financiamento, temos $VA = 75\,000$; $n = 57$; $i = 1,33\% = 0,0133$.

Então o valor da amortização mensal será $Q = \frac{VA}{n} = \frac{75000}{57} = 1315,79$

Tanto no Sistema PRICE quando no Sistema SAC, em cada período, o valor da prestação é igual à soma do valor da amortização com o valor dos juros

$$P_1 = \text{primeira parcela}$$

$$P_1 = 1315,79 + 0,0133 \cdot 75000 = 2313,29$$

Para determinar o valor da última prestação, usaremos o Teorema do saldo devedor:

$$S_{56} = \frac{75000 \cdot 1}{57} = 1315,79$$

Então, a última parcela será

$$P_{57} = \text{última parcela}$$

$$P_{57} = 1315,79 + 0,0133 \cdot 1315,79 = 1333,29$$

Para determinar o valor total pago ao final do financiamento, utilizaremos a fórmula geral para o valor da parcela, realizando uma somatória para k variando de 1 a 57,

$$\begin{aligned} \text{Total pago} &= \sum_{k=1}^{57} (Q + i \cdot S_{k-1}). \\ \sum_{k=1}^{57} \left(1315,79 + 0,0133 \cdot \frac{75000 \cdot (57 - (k - 1))}{57} \right) &= 103927,50 \end{aligned}$$

Assim, temos que o valor total pago por esse financiamento foi de R\$103 927,50.

3.3.2 - Soma das Prestações no Sistema SAC

No Sistema SAC, seja uma dívida atual VA amortizada em n pagamentos $P_1, \dots, P_n$, à taxa de juros i , com amortização constante $Q = \frac{VA}{n}$. Sendo S_k o saldo a pagar da dívida no período k , temos

$$S_k = \frac{VA \cdot (n - k)}{n}$$

Deste modo,

$$P_k = Q + J_k = \frac{VA}{n} - i \cdot S_{k-1},$$

Portanto, a fórmula para a soma das prestações pode ser obtido a partir da fórmula da soma dos termos de uma P. A.

$$\sum_{k=1}^n P_k = VA \cdot \left(1 + \frac{i \cdot (n + 1)}{2} \right)$$

Exemplo XI

Vamos analisar a simulação do financiamento de um imóvel feito no site de um banco.

Tabela 5: Dados de um financiamento imobiliário. Fonte: Bootebook

Financiamento Imobiliário	
Valor do imóvel	R\$125 000,00
Entrada	R\$46 000,00
Prestações	270
Sistema de amortização	SAC
Taxa de juro	0,62% a.m.

Considerando o valor da entrada, temos então $VA = 125000 - 46000 = 79000$

Então o valor da amortização mensal é $Q = \frac{VA}{n} = \frac{79000}{270} = 292,59$

Acompanhe a tabela com o valor das três primeiras parcelas.

Tabela 6: Composição da resposta no exemplo XI. Fonte: A autora

Período (Ano)	Saldo devedor	Juros	Amortização	Pagamento
0	79 000			
1	78 707,41	489,80	292,59	292,59 + 489,80 = 782,39
2	78 414,82	487,99	292,59	292,59 + 487,99 = 780,58
3	78 122,53	486,17	292,59	292,59 + 486,17 = 778,76

Considerando a última parcela, vamos determinar o valor pago utilizando a fórmula da soma das prestações.

$$\sum_{k=1}^n P_k = 79000 \cdot \left(1 + \frac{0,0062 \cdot (270 + 1)}{2} \right) = 145367,90$$

Agora, vamos calcular utilizando o sistema PRICE.

$$Prestação = \frac{79000 \cdot (1 + 0,0062)^{270} \cdot 0,0062}{(1 + 0,0062)^{270} - 1} = 603,55$$

Então, o valor total pago é dado por

$$Total\ pago = n \times P.$$

$$Total\ pago = 270 \cdot 603,55 = 162958,50$$

Observe que mudando apenas o sistema de amortização o valor aumentou R\$17 590,60.

4. FÓRMULAS DE COMPARAÇÃO

4.1 - PROGRESSÃO ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA

Seja $q > 0$ um número real tal que $q \neq 1$. Consideremos a sequência a seguir:

$$q, 2q^2, 3q^3, \dots, n \cdot q^n, \dots$$

Essa sucessão recebe o nome de progressão aritmético-geométrica.

Em nossos estudos comparativos de planos financeiros, será útil ter em mãos a fórmula a ser demonstrada nesse tópico.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot q^k &= q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + n \cdot q^n \\ &= \frac{n \cdot q^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^2}. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} S &= q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + n \cdot q^n \\ q \cdot S &= q^2 + 2q^3 + \dots + (n-1) \cdot q^n + n \cdot q^{n+1}, \end{aligned}$$

de modo que

$$(q-1)S = q \cdot S - S = n \cdot q^{n+1} - \underbrace{(q + q^2 + \dots + q^n)}_{\text{progressão geométrica}}.$$

Pela fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica (PG), temos

$$q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (q-1)S &= n \cdot q^{n+1} - \frac{q^{n+1} - q}{q-1} \\ S &= \frac{n \cdot q^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^2} \end{aligned}$$

4.2 - VALOR ATUAL DE UMA SEQUÊNCIA DE ALUGUÉIS

Suponhamos que você pague L reais de aluguel mensalmente (ao final do mês). A cada ano, a taxa de reajuste no aluguel é constante:

$$ja = \text{taxa } \mathbf{anual} \text{ de reajuste do aluguel.}$$

Por outro lado, seu dinheiro está investido em uma aplicação à taxa de rendimento

$$jb = \text{taxa } \mathbf{mensal} \text{ de rendimento da aplicação.}$$

Seja jc a taxa abstrata definida por

$$jc = \frac{1 + ja}{(1 + jb)^{12}} - 1.$$

O valor atual dos pagamentos dos alugueis durante n anos, considerando a data focal 0 e a taxa da aplicação, é dado pelo teorema.

$$VA = \frac{L \cdot ((1 + jb)^{12} - 1) \cdot ((1 + jc)^n - 1)}{(1 + jb)^{12} \cdot jc \cdot jb}$$

4.3 - VALOR ATUAL DOS PAGAMENTOS SAC

Vamos supor um financiamento de um valor VA no sistema SAC, à taxa i por n períodos. Então a prestação no k – ésimo período é dada por.

$$P_k = R - Q \cdot i \cdot k$$

Declarando as variáveis, temos

- R : valor fixado no desenvolvimento da fórmula.
- Q : valor da amortização.

Deste modo, sob uma capitalização de taxa de rendimento r por período (na mesma unidade de período do financiamento), o valor atual das prestações é obtido fazendo a diferença entre o valor atual de uma sequência de pagamentos constantes R e o valor atual da sequência de pagamentos variáveis $Q \cdot i \cdot k$. Fazendo

$$q = \frac{1}{1 + r},$$

temos o valor presente das prestações do financiamento, ao ser considerada uma capitalização com taxa de rendimento r ,

$$VP = R \cdot \left(\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n \cdot r} \right) - Q \cdot i \cdot \left(\frac{n \cdot q^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^2} \right)$$

4.4 – PRICE vs SAC

Vamos analisar duas opções para financiar um imóvel de R\$ 435 000,00 com uma entrada de 20% mais parcelas mensais à taxa efetiva de juros de 8% ao ano durante 20 anos:

(1) Sistema PRICE;

(2) Sistema SAC.

Considere que seu dinheiro está investido em uma aplicação à taxa de rendimento de 15% ao ano.

No Sistema PRICE, teremos 240 prestações de valor constante

$$P = \frac{VA \cdot (1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1},$$

$$VA = 435000 - 0,2 \cdot 435000 = 348000$$

$$i = \text{taxa de juros do financiamento} = \sqrt[12]{1,08} - 1 = 0,00643403$$

$$r = \text{taxa da aplicação do dinheiro (poupança, tesouro direito, caixinha nubank, etc)}$$

$$n = 240$$

$$P = \frac{348000 \cdot (1,00643403)^{240} \cdot 0,00643403}{(1,00643403)^{240} - 1} = 2850,64$$

Portanto, o valor da prestação no Sistema PRICE é aproximadamente R\$ 2850,64.

Agora vamos calcular o valor presente da sequência de pagamentos P do sistema PRICE à taxa de rendimento do financiamento, durante 20 anos.

$$VP_1 = P \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n \cdot r},$$

$$r = \text{taxa de rendimento mensal da aplicação} = \sqrt[12]{1,15} - 1 = 0,011714917$$

$$VP_1 = 2850,64 \cdot \frac{(1,011714917)^{240} - 1}{(1,011714917)^{240} \cdot 0,011714917} = 228466,42$$

Portanto, o valor presente da sequência de pagamentos do Sistema PRICE à taxa de rendimento da aplicação durante 20 anos é aproximadamente R\$ 228.466,42.

No sistema SAC, teremos 240 amortizações de valor constante.

$$Q = \frac{348000}{240} = 1450,00$$

Agora vamos calcular o valor presente da sequência de 240 prestações no sistema SAC considerando a taxa de rendimento da aplicação, durante 20 anos.

$$VP_2 = R \cdot \left(\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n \cdot r} \right) - Q \cdot i \cdot \left(\frac{n \cdot q^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^2} \right)$$

$$i = 0,00643403$$

$$R = Q \times (1 + i \times (n + 1)) = 1450 \times (1 + 0,00643403 \times 241) = 3698,37$$

$$r = 0,01171491$$

$$q = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1,01171491} = 0,988421;$$

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$VP_2 = 243513,52$$

Portanto, o valor presente da sequência de 240 prestações variáveis do Sistema SAC à taxa de rendimento da aplicação durante 20 anos é de R\$ 243.513,52.

Assim, como o valor presente dos pagamentos no Sistema PRICE é menor que no Sistema SAC, a melhor opção é o Sistema PRICE.

5. ALUGAR OU FINANCIAR, EIS A QUESTÃO!

A fim de comparar o melhor cenário, foi feita uma pesquisa de mercado com a corretora Keila Simone da KS Corretoria, localizada na cidade de Itaobim - MG.

O imóvel que utilizaremos é uma casa registrada no bairro Beira da Praia com 3 quartos, sala, cozinha, área de serviço, varanda e garagem. Este imóvel está avaliado no valor de R\$250000,00 e o seu aluguel atual está no valor de R\$1412,00.

Após esse orçamento, foi feita uma simulação habitacional no site da Caixa Econômica Federal, como segue nas imagens abaixo:

1

Dados iniciais

Informe qual é a sua opção de financiamento ou do empréstimo Real Fácil CAIXA e o valor desejado.

Está é uma simulação para aquisição de imóvel residencial (novo ou usado) ou para obtenção de empréstimo com garantia do seu imóvel (Real Fácil CAIXA) destinado a pessoas físicas.

Este financiamento ou empréstimo Real Fácil CAIXA é para uma pessoa:

Física

Jurídica

Qual tipo de financiamento ou empréstimo Real Fácil CAIXA você deseja?

Residencial

Selecione a opção de Financiamento/Empréstimo

Aquisição de Imóvel Novo

Valor aproximado do imóvel?

250.000,00

Em qual cidade está localizado o imóvel?

MG

ITAOBIM

☐ Possui imóvel nesta cidade

☐ Portabilidade de Crédito Imobiliário

Figura 6 - Dados iniciais financiamento. Fonte: Site da Caixa Econômica Federal

Programa Minha Casa, Minha Vida - Recursos FGTS - Imóvel vinculado a Empreendimento	
Valor do imóvel	R\$ 250.000,00
Prazo máximo	420 meses
Prazo escolhido	420 meses
Cota máxima do financiamento	80%
Valor da entrada	R\$ 50.000,00
Valor do financiamento	R\$ 200.000,00
Sistema de amortização / indexador: SAC / TR - Sistema de Amortização Constante	
SAC/TR	
Comparar Cenários	

Figura 7 - Informações sobre o financiamento. Fonte: Site da Caixa Econômica Federal

Opções de pagamento - CAIXA RESIDENCIAL HABITACIONAL	
Composição da 1ª prestação	Opção Básica
1ª Prestação	R\$ 1.812,60
Amortização	R\$ 476,19
Juros	R\$ 1.276,66
Seguro MIP - Morte ou Invalidez Permanente	R\$ 17,00
Seguro DFI - Danos Físico do Imóvel	R\$ 17,75
Taxa de Administração	R\$ 25,00
Detalhamentos dos Juros	Opção Básica
Juros Nominais	7,66% a.a.
Juros Efetivos	7,93% a.a.

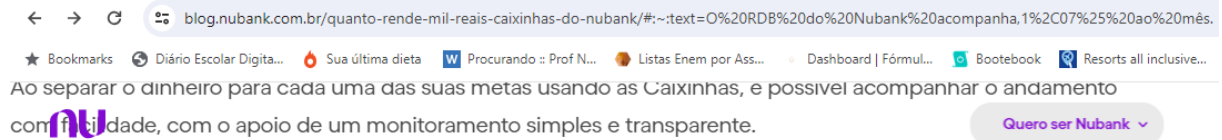
Figura 8 - Opções de pagamento. Fonte: Site da Caixa Econômica Federal

Para definir a taxa anual de reajuste do aluguel usaremos uma média dos últimos 10 anos do IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado). Índice de inflação brasileiro que mede a variação de preços de bens e serviços em um determinado período, comumente utilizado como referência para reajustes de contratos de aluguel e tarifas públicas. O IGP-M é calculado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas (FGV) e é composto por três outros índices: o Índice de Preços ao Produtor Amplo (IPA), o Índice de Preços ao Consumidor (IPC) e o Índice Nacional de Custo da Construção (INCC).

Tabela 7: Valores do IGP-M dos últimos 10 anos. Fonte: Dados de mercado.

IGP-M	
2014	3,67%
2015	10,54%
2016	7,19%
2017	- 0,53%
2018	7,55%
2019	7,32%
2020	23,14%
2021	17,79%
2022	5,46%
2023	- 3,18%
Média	7,895%

Já a taxa mensal de rendimento da aplicação, usaremos o rendimento da caixinha do Nubank, segue



Quanto rende mil reais nas Caixinhas do Nubank com RDB?

O RDB do Nubank acompanha 100% do CDI, uma taxa muito próxima da taxa Selic, que está em 13,75%, em maio de 2023. Por isso, a rentabilidade dessa Caixinha é de 13,65% ao ano. Isso significa que, em média, a Caixinha com RDB tem um rendimento de 1,07% ao mês.

Figura 9 - Taxa de rendimento da Nubank. Fonte: Site da nubank.

Em posse de todos os dados da simulação e com uso de uma planilha no Excel encontraremos os valores necessários para chegarmos a uma conclusão da melhor escolha para este cenário.

Tabela 8: Dados gerais. Fonte: A autora.

ALUGAR OU FINANCIAR					
VA	i	m	rNUanual	rNUMensal	P(k)
Valor financiado	Taxa de juros praticada pelo banco (CAIXA)	Tempo total para a dívida ser quitada (em meses)	Taxa de rendimento da uma conta NUBank anual (a.a.)	Taxa de rendimento da uma conta NUBank mensal (a.m.)	Valor total pago no financiamento até o enésimo período
R\$ 200.000,00	0,6380%	420	13,65%	1,07198304%	R\$ 468.583,44

Tabela 9 Valor presente do financiamento. Fonte: A autora.

VALOR PRESENTE DE UMA SEQUÊNCIA VARIÁVEL DE PAGAMENTOS - VP								
VASAC	m	i	r	q	R	A	VP	VPE
Valor financiado	Tempo total para a dívida ser quitada (em meses)	Taxa de juros efetivos mensal (a.m.) praticada pelo banco (CAIXA)	Taxa de rendimento da uma conta NUBank mensal (a.m.)	$1/(1+r)$		Amortização da dívida no Sistema SAC	Valor presente das prestações do financiamento na data focal 0	Valor atual do gasto com o imóvel (VP + entrada + Taxa de Administração + Seguro)
R\$ 200.000,00	420	0,6380%	1,07198304%	0,989394	1755,159225	R\$ 476,19048	R\$ 136.806,19	R\$ 191.810,93

Tabela 10: Valor presente do aluguel. Fonte: A autora.

VALOR PRESENTE DE UMA SEQUÊNCIA VARIÁVEL DE PAGAMENTOS DE ALUGUEL - VL						
PL	L	n	JB	JA	JC	VL
Percentual de cobrança do aluguel sobre o valor do imóvel	Valor inicial do aluguel	Tempo total que a dívida do financiamento seria quitada (em anos)	Taxa de rendimento da uma conta NUBank mensal (a.m.)	Taxa de reajuste anual (a.a.) do aluguel com base no IGP	Diferença percentual do reajuste do aluguel em relação ao reajuste da NUBank	Valor atual de uma sequência variável de pagamentos de aluguel
0,375%	R\$ 1.420,00	35	1,07198303921%	7,9%	-5,06379%	R\$ 263.217,97

Tabela 11: Vantagem do aluguel. Fonte: A autora.

VANTAGEM DO ALUGUEL VFD				
VPE	VL	D	JB	VFD
Valor atual do gasto com o imóvel (VP + entrada + Taxa de Administração + Seguro)	Valor atual de uma sequência variável de pagamentos de aluguel	Diferença entre o VPE e o VL	Taxa de rendimento da uma conta NUBank mensal (a.m.)	Valor Futuro da diferença entre o VPE eo VL
R\$ 191.810,93	R\$ 263.217,97	R\$ (71.407,04)	1,07198303921%	R\$ (6.290.300,84)

Tabela 12: Vantagem do financiamento. Fonte: A autora

VANTAGEM DO FINANCIAMENTO VFI		
VI	JA	VFVI
Valor do imóvel	Taxa de reajuste anual do aluguel (IGP)	Valor futuro do imóvel na data focal 35 (em anos)
R\$ 250.000,00	7,90%	R\$ 3.572.614,74

Tabela 13: Análise final. Fonte: A autora.

ANÁLISE FINAL: ALUGAR OU FINANCIAR				
VFVI	VFD	VAF	VPF	Neste caso é melhor financiar!
Valor futuro do imóvel na data focal 35 (em anos)	Valor Futuro da diferença entre o VPE e o VL	Diferença entre financiar e alugar na data focal 35 anos no futuro	Valor atual da diferença entre financiar e alugar	
R\$ 3.572.614,74	R\$ (6.290.300,84)	R\$ 9.862.915,59	R\$ 111.963,10	

Para decidir entre comprar ou alugar um imóvel, é preciso levar em conta vários fatores, como a renda, o valor do imóvel, o reajuste do aluguel, a taxa de aluguel da região, os juros do financiamento e o rendimento das aplicações. As fórmulas que usamos neste trabalho servem para qualquer situação, basta adaptá-las ao seu caso. No caso estudado, temos o valor futuro do imóvel maior que o valor futuro da economia, neste caso a melhor opção é escolher o financiamento, uma vez que se fizer a escolha de aluguel estará com um prejuízo de R\$111.963,10 na data 0, levando em consideração o prazo de 35 anos.

Isso se dá pelo fato do valor do aluguel na região estar muito alto, ele representa aproximadamente 0,06% o valor do imóvel. Em outras regiões onde o valor do aluguel não é tão alto, irá compensar viver de aluguel, por isso é sempre necessário fazer o estudo de cada caso de modo individual.

CONCLUSÃO

A partir do momento em que as questões de pesquisa foram delineadas até a organização e apresentação dos dados, este estudo tem o potencial de contribuir de forma significativa para o avanço do conhecimento no campo da matemática financeira, assim como a sua aplicabilidade na vida cotidiana. A inspiração para abordar esse tema surgiu durante uma conversa com o orientador, que destacou diversas áreas de pesquisa a serem exploradas. Esse diálogo despertou uma genuína curiosidade em investigar e aprofundar o entendimento sobre a importância da educação financeira, principalmente por ser um tema latente na vida adulta.

Após realizar várias leituras, definiu-se o objetivo principal do trabalho: alugar ou financiar um imóvel? Para responder essa questão, foi feita uma apresentação rápida dos principais conceitos da Matemática Financeira. Após essa apresentação aprofundou-se um pouco mais nos estudos e cálculos para determinar como os valores se deslocam em uma capitalização. Foi apresentado os três sistemas de amortização, dando maior ênfase para Sistema de Amortização PRICE e Sistema de Amortização Constante.

Em seguida, foram desenvolvidas fórmulas específicas que nos permitiram decisões racionais com base em uma estrutura financeira pré-estabelecida. Essa estrutura foi estabelecida através de uma pesquisa de mercado na cidade de Itaobim –MG e uma simulação no site da Caixa Econômica Federal com o valor de financiamento igual ao valor de venda do imóvel. Diante deste cenário, foi comprovado matematicamente que a melhor decisão é pelo financiamento do imóvel.

A educação financeira surgiu como uma ferramenta vital para capacitar os indivíduos a fazerem escolhas financeiras mais conscientes e responsáveis. Tornou-se evidente que este conhecimento é essencial para enfrentar desafios como endividamento excessivo, falta de planejamento financeiro e desconhecimento sobre investimentos. Essas questões têm um impacto direto na qualidade de vida dos cidadãos e na estabilidade econômica da nação como um todo.

Dessa forma, todos os objetivos estabelecidos foram alcançados, culminando na elaboração de um conjunto de tópicos destinados a difundir o conhecimento financeiro e estimular uma transformação comportamental em relação ao manejo do dinheiro.

É crucial salientar que ainda há um longo caminho a percorrer. A disparidade social e a carência de acesso à educação financeira representam desafios urgentes e que exigem uma abordagem proativa para que todos os cidadãos brasileiros possam desfrutar dos benefícios advindos de uma base sólida em educação financeira, principalmente quando estamos falando de moradia e de valores tão altos.

Diante do exposto, fica evidente que este estudo não apenas lança luz sobre a importância da educação financeira na tomada de decisões cruciais, como também oferece um roteiro claro e embasado para aprimorar a alfabetização financeira da população. Através da análise metódica dos sistemas de amortização e de uma cuidadosa avaliação das opções de financiamento imobiliário, foi possível demonstrar empiricamente os benefícios tangíveis de uma abordagem informada e estratégica em relação às finanças pessoais. No entanto, é essencial ressaltar que este trabalho representa apenas o início de uma jornada mais ampla em direção à promoção da educação financeira e à construção de uma sociedade mais consciente e preparada para lidar com os desafios econômicos do século XXI. Portanto, é fundamental que os esforços em prol da disseminação do conhecimento financeiro continuem, visando alcançar um número cada vez maior de indivíduos e comunidades, e garantindo assim um futuro mais próspero e sustentável para todos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, P. C.P.; LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **A Matemática do Ensino Médio – Volume 2**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006.

IEZZI G.; HAZZAN S.; DEGENSZAJN D. **Fundamentos de matemática elementar – Volume 11**. 2ª edição. São Paulo, SP; Atual, 2013.

CERBASI, G. **Como organizar sua vida Financeira**. Rio de Janeiro: Sextante, 2015

BOOTEBOOK. **BOOK-INSTANCE**: Matemática Financeira. Disponível em: <<https://www.bootebook.com/catalog/book/6362a18a868237c8b1c0df8c>>. Acesso em Fevereiro de 2024.

MORGADO A.; **QUAIS SÃO OS CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA?** Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=MdrpLFmzgbI>>. Acesso em Fevereiro de 2024.

MORGADO A.; **DEVEMOS ENSINAR SÓ JUROS SIMPLES?** Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=gXmstQ3XTDs>>. Acesso em Fevereiro de 2024.

Caixa Econômica Federal – **Simulador**. Disponível em: <<https://www.caixasimulacao.com.br/Simulador-Caixa/>>. Acesso em: Março de 2024.

IGP-M.; Disponível em: <<https://www.dadosdemercado.com.br/indices/igp-m>>. Acesso em: Março de 2024.

NUBANK. **Investimentos**. Disponível em: <<https://blog.nubank.com.br/quanto-rende-mil-reais-caixinhas-do-nubank/>>. Acesso em Março de 2024.

