UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

BINGO MATEMÁTICO E O JOGO DE NIM:

Metodologias e desenvolvimento do raciocínio lógico em matemática

Expedito Nascimento Passos Filho

Teófilo Otoni

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

BINGO MATEMÁTICO E O JOGO DE NIM:

Metodologias e desenvolvimento do raciocínio lógico em matemática

Expedito Nascimento Passos Filho

Orientador(a):

Alex Sander de Moura

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos exigidos para a conclusão do curso.

Teófilo Otoni

2023

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Baltazar José Filho – CRB-6/2775

P289b Passos Filho, Expedito Nascimento.
Bingo matemático e o jogo de NIM: metodologias e desenvolvimento do raciocínio lógico em matemática / Expedito Nascimento Passos Filho. - - Teófilo Otoni, 2023.
97 p. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional - PROFMAT) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2023.

Orientador: Prof°. Dr. Alex Sander de Moura.

1. Bingo Matemático. 2. Jogo do NIM. 3. Sequência didática. 4. Ensino aprendizagem em matemática. I. Título. II. Passos Filho, Expedito Nascimento. III. Moura, Alex Sander de. IV. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

CDD 372.7

BINGO MATEMÁTICO E O JOGO DE NIM:
Metodologias e desenvolvimento do raciocínio lógico em matemática

Expedito Nascimento Passos Filho

Orientador(a):
Alex Sander de Moura

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos exigidos para a conclusão do curso.

APROVADO em ____ / ____ / ________.

Documento assinado digitalmente
GERALDO MOREIRA DA ROCHA FILHO
Data: 18/08/2023 18:14:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Geraldo Moreira da Rocha Filho – UFVJM

Documento assinado digitalmente
RIEDSON BAPTISTA
Data: 18/08/2023 12:29:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Riedson Baptista – DMA/UFES

Documento assinado digitalmente
ALEX SANDER DE MOURA
Data: 16/08/2023 09:54:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alex Sander de Moura – UFVJM

Dedico este trabalho, primeiramente a Deus. Aos meus pais Expedito Nascimento Passos (in memoriam) e Benilde pela educação, carinho e amor dedicados aos filhos, especialmente a minha mãe que sempre esteve comigo em todos os momentos, apoiando e ajudando a trilhar os caminhos; principalmente por me ensinar a buscar a sabedoria para alcançar o sucesso.

Os meus irmãos: Rosilene, Janete, Railton, Gildásio, Carlos Roberto, Luiz Carlos(in memoriam) , Elias (in memoriam) e a todos os outros irmãos de consideração.

As meus sobrinhos: Laize, Debora, Aline, Giane, Eduardo, Alan, Carlos Roberto Júnior, Leonardo, Gabriele, Wende, Bianca, Ana Caroline, Ana Beatriz, Renan e Alex, pelo respeito e carinho.

As tias: Deide e Rosália.

Aos meus primos(a): Ronaldo, Clézia, Cleide e Rosangela.

A minha esposa Mirian por ser o sol iluminando o meu caminho e minha vida, a minha filha Emanuelly e o meu filho Gael por proporcionarem tantas alegrias e serem a luz para meu Sucesso.

AGRADECIMENTO

Ao Professor e orientador Alex Sander de Moura pelo autodomínio e pelas sugestões que tornaram a realização deste trabalho mais simples e radiante.

A todos os professores do programa: Fábio, Werversson, Edileno, Nolmar, Anderson Luiz, Elson, André, Faissal, Alexandrino, Samuel em especial ao professor Antônio Carlos Telau por ser um amigo de sempre, e também a Geraldo, Silvia e Deborah que apontaram a direção e o caminhos para elaboração do projeto de pesquisa.

Aos amigos: Adalto, Almir Cabral, Flávio Crespo, Renato Soares, Nílson Pereira e os novos amigos que fiz no decorrer do curso de mestrado: Paulo, Anderson, Antônio, André, Humberto, Thainanny e em especial aos companheiros(a) de estudo: Claudiane, Marcelo e Dionatam pela amizade, parceria, desacertos e alegrias durante o curso.

A todos os colegas das Escolas: "Escola estadual Antônio Batista da Mota" e "Escola Estadual Stella Matutina",Principalmente às Diretoras Jane, Cassilane e o diretor Adenir, pela compreensão e por adequarem, muitas vezes, os horários do turno aos meus dias de ausência.

Recebam minha eterna gratidão a todos que contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

"Sem esforço, não há ganho".

"Não deixe para amanhã o que você pode fazer hoje".

Dito Popular.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma sequência didática tendo como instrumento pedagógico o Bingo matemático e o Jogo do NIM, e visa contribuir com a prática em sala de aula nas aulas de matemática, sendo o professor um mediador dessa proposta, onde o aluno consiga absorver e desenvolver o que estar sendo proposto para ele em relação dos conteúdos além de adquirir autonomia, confiança, atitudes cooperativas, solidarias, e aprender a lidar com o seu lado emocional.

Para isto realizou-se um estudo teórico a respeito da importância e contribuição dos jogos para o ensino aprendizagem, também foi feita uma abordagem a respeito dos números naturais desenvolvendo os conceitos fundamentais que são utilizados nos jogos. Por fim foi elaborada uma sequência de catorze atividades que podem ser desenvolvidas no ensino básico.

Sete destas atividades refere-se ao Bingo Matemático e as outras sete refere-se ao Jogo do NIM. Adotando o jogo como instrumento pedagógico contribui tanto para o aluno quanto para o professor, pois através deste é possível avaliar as melhores opções, recuar quando for necessário, mudar a rota e pensar em estratégias que levarão ao sucesso. O jogo nos permiti avaliar a melhor estratégia de uma forma simples e prazerosa.

Palavras-chave: Bingo Matemático, Jogo do NIM, Sequência didática, Ensino aprendizagem em Matemática.

ABSTRACT

In this paper we present of a didactic sequence having as a pedagogical instrument the mathematical Bingo and the NIM Game, and it aims to contribute with the practice in the classroom in the mathematics classes, the teacher being a mediator of this proposal, where the student is able to absorb and develop what is being proposed to him in relation to the contents, in addition to acquiring autonomy, confidence, cooperative attitudes, solidarity, and learning to deal with his emotional side.

For this, a theoretical research was carried out regarding the importance and contribution of games for teaching and learning, an approach was also made regarding natural numbers, developing the fundamental concepts that are used in games. As result, a sequence of fourteen activities that can be developed in basic education was elaborated.

Seven of these activities refer to mathematical Bingo, the other seven refer to the Game of NIM. Adopting the game as a pedagogical tool contributes to both students and teacher, because through it could be possible to evaluate the best options, step back when necessary, change the route and think of strategies that will lead to success. The game allowed us to find out the best strategy in a simple and pleasant way.

Keywords: Mathematical bingo, NIM game, Didactic sequence, Teaching and learning in mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

Dr. - Doutor.

Me. - Mestre.

MSc. - Master of Science.

PhD. - Doctor of Philosophy.

LISTA DE SIGLAS

MEC - Ministério da Educação.

UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora

ENQ. - Exame Nacional de Qualificação.

PROFMAT. - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BINGOT. - Bingo Tabuada.

BINGOE. - Bingo Equação.

J_1. - Jogador 1.

J_2. - Jogador2.

EV. - Usando a estratégia vencedora.

PR. - Número de palitos retirados.

$n(P)$. - Número de possibilidades que pode ocorrer.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\neq$ - Diferente.

$\notin$ - Não pertence.

$\in$ - Pertence.

$\Rightarrow$ - Implica.

$\Leftrightarrow$ - Equivalência.

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais.

$\leqslant$ - Menor ou igual.

$\geqslant$ - Maior ou igual

$\subset$ - Está contido.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.

Quero fazer um relato de como foi todo o processo para chegar ao entendimento de que as simples atividades, que tanto me auxiliaram como aluno, tornaram-se objeto do trabalho em questão.

Iniciei o curso de licenciatura em Matemática no ano 1999 na Universidade Federal do Espírito Santo – UFES (no campos de São Mateus). Matemática era a matéria com a qual eu mais me identificava enquanto aluno da educação básica, pois sempre tive muito sucesso com os números e raciocínio lógico. Ao longo do curso foram vários desafios enfrentados em termos de aprender a estudar e de como estudar, tive a oportunidade de conhecer e conviver com vários colegas os quais tornaram essa trajetória de curso mais tranquila e prazerosa. Enquanto era aluno do curso de licenciatura em Matemática tive a oportunidade de participar de vários eventos dos quais os alunos da Universidade Federal do Espírito Santo - UFES eram convidados a participar. Um desses eventos foi a bienal de Matemática onde eram ministrados vários minicursos e um desses cursos que merece destaque foi o de inteligência artificial.

Em uma das mostras deste evento fui apresentado ao jogo de NIM, este jogo consiste em retirar palitos previamente organizados em fileiras ou em grupos, a quantidade de palitos é definida pelos próprios jogadores, O perdedor é aquele que retirar o último palito da mesa. Em algumas variações deste jogo também acontece de quem retirar o último palito seja o vencedor, isso varia de acordo as regras preestabelecidas pelos competidores.

Desde a minha infância o jogo era algo muito presente e frequente em minha vida, a minha família tinha e tem apreço por um bom jogo de raciocínio lógico, então frequentemente estávamos reunidos praticando algum. Portanto como um bom jogador aquele jogo ali apresentado e aparentemente bem simples me chamou muito atenção.

Ainda durante o período do curso de licenciatura tive a oportunidade lecionar Matemática em uma escola pública, tudo muito novo e desafiador, mas estava muito empolgado, pois aquela era a oportunidade de colocar em prática o que eu vinha aprendendo durante o curso.

Ensinar Matemática para alunos da educação básica não é uma tarefa fácil, pois manter a atenção destes, possibilitar com que eles aprendam e tenham gosto pelo conteúdo é desafiador. Precisava então de algo a mais, surgiu-me a ideia de colocar em prática o jogo do NIM levando em conta a necessidade de cativar os alunos e assim despertar o interesse deles.

No ano de 2004 concluí o curso de licenciatura em Matemática e essa prática do jogo do NIM se tornou comum em todas as escolas que trabalhei, aplicando esta alternativa didática nas turmas que lecionava. Durante todo esse período como professor de Matemática sempre tive muito apreço pela educação e como apreciador da disciplina de Matemática tinha vontade de fazer mestrado. Decidi então, ingressar no ”Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT” pela Universidade Federal do Vale do Jequitinhonha – UFVJM. Ingressei no mestrado no ano de 2017 cursei quase todas as matérias, mas não obtive êxito no exame nacional de qualificação (ENQ). No ano seguinte tentei ingressar novamente, mas não fui aprovado. Em 2019 e 2020 o PROFMAT não foi ofertado, mas em 2021 realizei novamente o exame de acesso e fui aprovado.

Neste período me via em dois mundos, aluno do mestrado em Matemática pela (UFVJM) e professor de Matemática da educação básica no município de Nanuque – MG, me deparando novamente com uma situação desafiadora. Ao longo do ano letivo de 2022 por conta de uma superlotação de sala foi necessário fazer uma divisão de turmas. Feita a divisão uma das turmas passou a ser minha, encontrei muita resistência por parte dos alunos, pois os alunos tinham convívio e muito carinho pela professora anterior. Foi um desafio constante ganhar a confiança dos alunos, manter um ambiente tranquilo e com aprendizagem satisfatória. Foram muitas reclamações partidas dos educandos, pois estes não estavam nada satisfeitos de não estarem estudando com sua antiga professora.

Eu precisava conquistar os alunos, obter a confiança e parceria deles. Ao longo dos meus anos em sala de aula e experiencia profissional já tinha passado outras vezes por momentos parecidos com estes, e sempre que isso acontecia eu tinha como prática usar alguns jogos que despertavam o interesse desses estudantes, como, por exemplo, o xadrez. É notório o quanto os jogos contribuem para o enriquecimento das aulas, por meio deles os alunos se mostram mais interessados em participar.

O jogo na escola apresenta benefício a toda criança, um desenvolvimento completo do corpo e da mente por inteiro. Por isso, na atividade lúdica, o que importa não é apenas o produto da atividade que dela resulta, mas a própria ação, momentos de fantasia que são transformados em realidade, momentos de percepção, de conhecimentos, momentos de vida.

Usando mais uma vez dessa minha experiência, recorri aos jogos. Iniciei então com o jogo do NIM, para trabalhar as e pela primeira vez vi empolgação nos olhos deles, senti que algo havia mudado e que aquele era o caminho que eu deveria percorrer. Durante as aulas pude desenvolver várias estratégias em relação ao jogo, como as disputas entre aluno e aluno, aluno e professor. Os alunos estavam mais participativos, sentir então a necessidade de propor algo a mais para eles, desenvolvi o Bingo Matemático, levando em conta a dificuldade que estes apresentavam nas quatro operações.

Desta forma, usando o bingo normal, mas ao invés de cantar a pedra 15, por exemplo, fazia: eu cantava 3 vezes 5, quando saia a pedra 4, eu cantava 20 dividido por 5 e assim por diante, era empolgante ver a participação deles. A turma que antes não estava satisfeita com as minhas aulas, já se mostrava empenhada, tinha concentração nos exercícios propostos, estava mais atenta durante explicação do conteúdo e isso tudo era reflexo da metodologia adotada através do o jogo do NIM e o Bingo Matemático.

Eram frequentes os comentários na escola, os colegas relatava que os alunos estavam ansiosos esperando a minha aula. Percebi que a minha própria prática pedagógico era um objeto de estudo.

> A reflexão sobre a prática não resolve tudo, a experiência refletida não resolve tudo. São necessárias estratégias, procedimentos, modos de fazer, além de uma sólida cultura geral, que ajudam a melhor realizar o trabalho e melhorar a capacidade reflexiva sobre o que e como mudar (LIBÂNEO; OLIVEIRA; TOSCHI, 2005).

Posso dizer que recorrer aos jogos em sala de aula foi sem dúvida uma estratégia vencedora. Isso tudo me motivou como professor e, como aluno, me trouxe a possibilidade de dissertar sobre o jogo do NIM e o Bingo Matemático como um recurso metodológico no ensino aprendizagem da Matemática e assim contribuir para uma educação de qualidade de maneira lúdica, prazerosa e eficaz.

O trabalho está organizado em cinco capítulos: introdução, revisão de literatura, referencial teórico, metodologia e conclusão.

O primeiro apresenta um relato pessoal da minha trajetória no âmbito educacional.

O segundo faz uma abordagem da construção dos números naturais usando os axiomas de Peano, utilizando essa matemática pura para a explicação dos algoritmos das operações básicas no ensino fundamental.

O terceiro capítulo fala sobre o uso dos jogos no processo de ensino aprendizagem.

O quarto capítulo são amostras de alguns jogos que podem ser aplicados por professores durante as suas aulas.

O quinto capítulo faz uma reflexão sobre a prática educacional centrada no educando e expectativa de que esse trabalho possa ser replicado por outros profissionais no ambiente escolar.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Introdução dos Números Naturais

Neste capítulo faremos uma abordagem sobre o contexto dos números naturais com base nos axiomas de Peano, e propriedades que fundamentam esse assunto afim de compreendermos o princípio das operações básicas e de como estas podem ser colocadas em prática na elaboração de material pedagógico. A principal referência desse capítulo é (HEFEZ, 2011). Usaremos também outros autores que citaremos quando necessário. Além disso, todas as tabelas nesse trabalho foram elaboradas no Látex pelo próprio Autor.

Segundo (IFRAH, 1989) a origem dos números surgiu a partir da necessidade de o homem quantificar objetos há mais de 30 mil anos. Neste período era utilizado vários artifícios para fazerem essas representações de quantidade como, por exemplo: pedras, traços marcados em árvores, ossos de animais, nós em cordas entre outros. Ao longo do tempo essas representações foram sendo aperfeiçoadas, pois, as pessoas passaram a conviver em grupos maiores portanto cada grupo desenvolvia seu próprio método de representar quantidades, isso deixa claro que os números não foram criados por uma só pessoa e sim por várias tribos que sentiam a necessidade de representar os objetos, criações, mercadorias e várias outras coisas.

Segundo (SANTOS; VALE, 2006) os hindus inventaram um sistema de numeração, por volta do século VI, sendo difundido pela Europa Ocidental provavelmente através dos árabes. Esse sistema hindo-arábico são os algarismos que utilizamos hoje.

Segundo (PIRES, 2004) Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, matemático árabe, descreveu em seu livro adição e subtração, de acordo com o cálculo hindu a possibilidade de representar qualquer número utilizando apenas 10 símbolos, chamados de algarismos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0).

Segundo (LIMA et al., 1997) do ponto de vista do ensino básico, não tem cabimento expor a Matemática sob forma axiomática, mas é necessário que o professor saiba que ela pode ser organizada sob a forma axiomática.

Praticamente todos os livros de matemática usados nas escolas brasileiras consideram 0 (zero) como o primeiro número natural (consequentemente 1 é o segundo, 2 é o terceiro, e assim por diante). A opção por adotar 0 (zero) ou 1 (um) como ponto de partida é uma questão de conveniência, aqui vamos adotar o 1 como ponto de partida.

Os números naturais podem ser demonstrados como consequência dos axiomas de Peano. Um engenhoso processo, chamado sistema de numeração decimal, permite representar todos os números naturais com o auxílio dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Além disso, os primeiros números naturais têm nomes: o sucessor do número um chama-se dois, o sucessor de dois chama-se três, etc.

2.2 Axioma de Peano

O matemático italiano Giuseppe Peano constatou que se podia elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, que atualmente são conhecidos como os axiomas de Peano, são eles:

Axioma 2.2.1. Axiomas de Peano:

I) Todo número natural tem um único sucessor;

Esse axioma nos diz que se n é um número natural, então $n+1$ é o sucessor de n.

II) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

Esse axioma nos diz que, se n e m são números naturais, e m difere de n, então $n+1$ difere de $m+1$.

III) Existe um único número natural, chamado de um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

Esse axioma nos diz que, se n é um número natural, então $n+1$ difere de 1. O número 1 não é sucessor de nenhum número natural, assim representa o ponto de partida, isto é, $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$.

IV) Seja X um conjunto de números naturais com $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, todo sucessor de X pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Este último é chamado de axioma da indução, uma ferramenta matemática muito útil na demonstração de diversos resultados sobre números naturais.

A seguir vamos introduzir Transitividade, Tricotomia e Monotonicidade, que são as operações ordem nos números naturais.

2.3 Operações nos naturais

Dados $m,n \in \mathbb{N}$, diz-se que m é menor do que n, e escreve-se $m < n$, quando existe algum $p \in \mathbb{N}$, tal que $n = m + p$. Isto quer dizer que n é sucessor do sucessor ... do sucessor de m.

A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades:

1. Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$;

   Demonstração: Se $m < n$ e $n < p$, então $n = m + q, p = n + r$, logo $p = (m+q) + r = m + (q + r)$, portanto $m < p$.

2. Tricotomia: Dados $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$;

   Demonstração: Se tivéssemos $m < n$ e $m = n$, então seria $m = m + p$, donde $m + 1 = m + p + 1$ e, cortando m, concluiríamos que $1 = p + 1$, um absurdo, pois 1 não é sucessor de p. Portanto, $m < n$ (e analogamente, $n < m$) é incompatível com $m = n$.

   Do mesmo modo, se tivéssemos $m < n$ e $n < m$, então teríamos $n = m + p$ e $m = n + q$, do que resultaria $n = n + q + p$, logo $n + 1 = n + q + p + 1$ e, cortando n, concluiríamos que $1 = q + p + 1$, um absurdo.

3. Monotonicidade: Dados $n, m \in \mathbb{N}$ são tais que $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $m \cdot p < n \cdot p$.

   Demonstração: Se $m < n$ significa $n = m + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$, logo $n + p = (m+q) + p$ e daí $m + p < n + p$. Analogamente, quanto a multiplicação, $n = m + q$ implica $n \cdot p = m \cdot p + q \cdot p$ então $n \cdot p > m \cdot p$.

2.3.1 Princípio da boa Ordenação

O princípio da boa ordem é equivalente ao princípio de indução, dessa forma, não existe um número natural entre um número natural e seu sucessor, e o número 1 é o menor elemento dos números naturais.

O princípio da boa ordenação desempenha um papel muito importante em muitas demonstrações, que em geral, são feitas por redução ao absurdo.

O método de redução ao absurdo é um método de prova matemática para validar se uma proposição do tipo: $P \Rightarrow Q$ é verdadeira. Consiste no seguinte argumento: supomos que Q é falsa e provamos que então P também o é. Como? Em geral, derivando uma "contradição"ou um "absurdo", isto é, algo incompatível com a veracidade assumida de P. (TAVARES; GERALDO, 2017).

Todo subconjunto não-vazio com $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Isto significa que existe um elemento $m_0 \in X$ que é menor do que todos os outros elementos de X.

Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é indutivo quando $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$, ou seja , quando X contém o sucessor de cada um de seus elementos. O princípio da indução afirma que se um conjunto indutivo X contém o número 1, então X contém todos os números naturais.

Vamos usar o princípio da boa ordenação para provar que se um conjunto indutivo X contém o número a, então X contém todos os números naturais maiores do que a.

Suponhamos, por absurdo, que existam números naturais maiores do que a que não pertencem ao conjunto indutivo X. Seja b o menor desses. Como $b > a$, podemos escrever $b = c + 1$, onde, pela definição de b, tem-se necessariamente $c \in X$. Mas, como X é indutivo, isto obriga que $b = c + 1 \in X$, o que é uma contradição.

A seguir vamos introduzir a adição e a multiplicação, que são as operações fundamentais definidas nos números naturais.

2.3.2 Adição e Multiplicação

A operação de adição, nos números naturais, é definida a partir da ideia de sucessor. Se n é um número natural, então $n+1$ é o sucessor de n.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, a soma $m+n$ é o número natural que se obtém a partir de m aplicando-se n vezes seguidas a operação de tomar o sucessor.

Definimos também a igualdade $m + (n+1) = (m+n) + 1$.

Quanto à multiplicação, se $m, p, n \in \mathbb{N}$, temos por definição $m \cdot 1 = m$ e $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \cdot 1$. Quando $p \neq 1$, $n \cdot p$ é a soma de p parcelas iguais a n.

Quaisquer que sejam os naturais a, b, c e d, tem-se:

Propriedades da Adição

Para demonstrar as propriedades da adição usaremos o princípio da indução (Axioma *IV* de Peano).

PAA) Associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$, para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$;

Fixamos, arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $m + (n + p) = (m + n) + p$ é verdadeira quando $p = 1$, por definição.

Supondo verdadeira para $p \in \mathbb{N}$, mostraremos que é verdade para $p+1$. Temos:

$m + [n + (p+1)] = m + [(n+p)+1] = [m + (n+p)] + 1 = [(m+n)+p] + 1 = (m+n) + (p+1)$.

Segue-se então que a lei associativa $m + (n+p) = (m+n) + p$ é para válida para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$.

PAC) Comutatividade: $m + n = n + m$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$;

Usaremos duas vezes o princípio da indução. Primeiro consideramos o caso em que $n = 1$. A igualdade de $m + 1 = 1 + m$ é obviamente verdadeira quando $m = 1$.

Supondo-a válida para um certo valor de m, tem-se a hipótese de indução $m+1=1+m$. Somando 1 a ambos os membros desta igualdade e usando a associatividade, temos $(m+1)+1=(1+m)+1=1+(m+1)$.

Segue-se que $m+1=1+m$ para todo $m\in\mathbb{N}$.

Admitamos agora que $m+n=n+m$ seja válido para um certo n e mostraremos que isto é válido para $n+1$. Com efeito, temos

$m+n=n+m\Rightarrow(m+n)+1=(n+m)+1\Rightarrow m+(n+1)=(n+m)+1=1+(n+m)=(1+n)+m=(n+1)+m.$

Segue-se que $m+n=n+m$ para quaisquer $m,n\in\mathbb{N}$.

$PAL)$ Lei do corte: Para quaisquer m,n e $p\in\mathbb{N}$, se $m+p=n+p$, então $m=n$.

Se $p=1$, então $m+1=n+1\Rightarrow m=n$ (Axioma II, de Peano). Supondo válida para um certo p, mostraremos que se pode também cortar $p+1$. Admitamos que se tenha $m+(p+1)=n+(p+1)$. Pela associatividade, temos $(m+p)+1=(n+p)+1\Rightarrow m+p=n+p\Rightarrow m=n$.

Propriedades da Multiplicação:

Após cada propriedade, demonstraremos e novamente usaremos a indução.

$PMD)$ **A multiplicação é distributiva com relação à adição**: $m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p$, para quaisquer $m,n\in\mathbb{N}$;

Fixamos, arbitrariamente $m,n\in\mathbb{N}$, e fazemos indução sobre p.

Para $p=1$, $m(n+1)=m\cdot n+m\cdot 1$ é verdadeira, por definição. Supondo verdadeira para $p\in\mathbb{N}$, mostraremos que é verdade para $p+1$. Temos:

$m[n+(p+1)]=m[(n+p)+1]=m(n+p)+m\cdot 1=m\cdot n+m\cdot p+m\cdot 1=m\cdot n+(m\cdot p+m)=m\cdot n+[m(p+1)]$.

$PMC)$ **Comutatividade**: $m\cdot n=n\cdot m$, para quaisquer $m,n\in\mathbb{N}$;

Tomando $m\in\mathbb{N}$, faremos indução sobre n.

Sabemos que $m\cdot n=n\cdot m$ é verdadeira quando $n=1$, por definição.

Supondo verdadeira para $n\in\mathbb{N}$, mostraremos que é verdade para $n+1$. Temos: $m(n+1)=(m\cdot n)+m=(n\cdot m)+m=(n+1)m$.

$PMA)$ **Associatividade** $(m\cdot n)\cdot p=m\cdot(n\cdot p)$, para quaisquer m,n e $p\in\mathbb{N}$; Fixamos $m,n\in\mathbb{N}$ e faremos indução sobre p.

Sabemos que $(m\cdot n)p=m(n\cdot p)$ é verdadeira quando $p=1$, por definição.

Supondo verdadeira para $p \in \mathbb{N}$, mostraremos que é verdade para $p+1$. Temos: $(m \cdot n)(p+1) = (m \cdot n)p + (m \cdot n)1 = m(n \cdot p) + m \cdot n = m[(n \cdot p) + n] = m[n(p+1)]$.

$PML)$ **Lei do corte**: $m \cdot p = n \cdot p$, então $m = n$, para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$; Fixamos $m, n \in \mathbb{N}$ e faremos indução sobre p.

Para $p = 1$, temos que $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$

Supondo que para $p \in \mathbb{N}$, $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$ é verdadeira, mostraremos que é verdade para $p+1$. Temos:

$m(p+1) = n(p+1) \Rightarrow m \cdot p + m = n \cdot p + n$. Por hipótese, $m \cdot p = n \cdot p$. Pela lei do corte da adição, temos $m = n$

$PMM)$ **Monotonicidade**: Se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Se $m < n$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k \Rightarrow n \cdot p = m \cdot p + k \cdot p \Rightarrow n \cdot p > m \cdot p$, com $p \in \mathbb{N}$.

2.3.3 Divisibilidade

No Bingo Tabuada e jogo do Nim, são trabalhadas as operações de multiplicação e divisibilidade que são propostas na sequência didática para o ensino fundamental.

A relação da divisibilidade entre dois números naturais nem sempre é possível, mas quando não existir essa relação entre dois números naturais, clamaremos de divisão euclidiana que introduziremos logo após as demonstrações das propriedades da divisibilidade.

Dados a e b números naturais, dizemos que a divide b, e representamos por $a \mid b$, se existe um número natural c tal que $b = ac$.

Dizemos também que a não divide b, se não existe um c tal que $b = ac$.

Propriedades da divisibilidade

Vamos fazer as demonstrações após cada propriedade.

Propriedades:

Quaisquer que sejam os naturais a, b, c e d, tem-se:

$PD_1)$ $a \mid 0,\ 1 \mid a$ e $a \mid a$, se $a \neq 0$;

Decorre das igualdades $0 = 0 \cdot a$, $a = a \cdot 1$ e $a = 1 \cdot a$.

$PD_2)$ Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$;

Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. E se $c \mid d$, existe um número natural n tal que $d = c \cdot n$. Segue-se que $b \cdot d(a \cdot c)(m \cdot n)$. Logo, $a \cdot c \mid b \cdot d$.

PD_3) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$;

Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. E se $b \mid c$, existe um número natural n tal que $c = b \cdot n$. Segue-se que $c = (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$. Logo, $a \mid c$.

PD_4) Se $a \mid b$ e $b \mid a$, então $a = b$;

Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. E se $b \mid a$, existe um número natural n tal que $a = b \cdot n$. Segue-se que $a = (a \cdot m) \cdot n = a(m \cdot n)$. Logo, $m \cdot n = 1$. Pelo exemplo 2 , concluímos que $m = n = 1$, donde $a = b$.

PD_5) Se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então $a \leqslant b$;

Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. Como $b \neq 0$, temos que $c \neq 0$, logo $c \geq 1$ e, consequentemente $a \leqslant a \cdot c = b$.

PD_6) Se $a \mid b$ e se $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy)$, para todos (x e y) $\in \mathbb{N}$.

Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. E se $a \mid c$, existe um número natural n tal que $c = a \cdot n$. Logo, $xb + yc = x(am) + y(an) = (xm + yn)a$. Daí, $a \mid (bx + cy)$.

2.3.4 Divisão Euclidiana

Em uma das versões do jogo do Nim, a divisão Euclidiana é uma ferramenta poderosa para a estratégia vencedora. O teorema 2.3.1 que iremos enunciar e demonstrar a seguir é de grande importância para vencer o jogo.

Dados a e b números naturais, se a não divide b, existe um método para efetuar a operação de divisão obtendo-se um resto, e esse processo termina quando o resto é menor do que a. Por exemplo, na divisão de 1504 por 3, encontramos 501 e resto 1, então escrevemos $1504 = 501 \cdot 3 + 1$.

Isso pode ser enunciado de forma geral na forma do teorema abaixo:

Teorema 2.3.1. Dados dois números naturais a e $b, a \neq 0$, sempre existem únicos q e r também naturais, tais que $b = a \cdot q + r$ e $0 \leqslant r < a$.(LIMA et al., 1997).

Demonstração:

Primeiro provaremos a existência.

Consideremos $a \in \mathbb{N}$, com $a > 0$ e tomaremos o conjunto dos números naturais particionado da seguinte forma:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,...,a-1\} \cup \{a,a+1,a+2,...,2a-1\} \cup \{2a,2a+1,2a+2,...,3a-1\} \cup ... \cup \{qa,qa+1,qa+2,...,(q+1)a-1\} \cup ...$

Escolhendo um número natural b qualquer, ele estará em apenas um desses subconjuntos. $b \in \{qa,qa+1,qa+2,...,(q+1)a-1\}$ para algum $q \in \mathbb{N}$, ou seja, $qa \leqslant b < (q+1)a$.

Tomando $b = qa+r$, temos $qa \leqslant qa+r < qa+a$. Subtraindo qa, obtemos $0 \leqslant r < a$.

Provamos que, dados $a,b \in \mathbb{N}$, existem $q,r \in \mathbb{N}$ tais que $b = qa+r$, com $0 \leqslant r < a$. Provando a unicidade.

Suponha que $b = qa+r = q_1a+r_1$, onde $q,q_1,r,r_1 \in \mathbb{N}, 0 \leqslant r \leqslant r_1 < a$.

Assim, obtemos $(q-q_1)a = (r_1-r)$. Daí $0 \leq r_1 - r < a$, e como $r_1 - r$ é múltiplo de a, então $r_1 - r = 0 \Rightarrow r_1 = r$.

2.3.5 Sistema de Numeração Decimal

Desenvolvemos até aqui as operações básicas dos números naturais que são fundamentais para o desenvolvimento dos jogos: Bingo Tabuada e o jogo do Nim. Além disso, no jogo do Nim, para uma estratégia vencedora, precisamos do sistema de numeração na base 10 e de base 2. Assim, faremos abordagem do sistema decimal e outras mais usadas.

Os números naturais foram representados ao longo do tempo de várias maneiras distintas, até chegar no moderno sistema de numeração decimal, que segundo (LIMA et al., 1997), nasceu na índia, por volta do século V da era cristã. Durante muito tempo na Europa usou-se o sistema de numeração romano, havendo uma resistência ao uso do sistema hindu-arábico, até que no século XVI este ganhou supremacia e começou a ser adotado oficialmente, graças aos islâmicos, principalmente pelo trabalho do matemático Abu Já far Muhammad ibn Musa al-hwarizmi (783 – 850), conforme destaca Lopes e Morey (2019).

> Al-Khwarizmi, além de descrever o sistema de posição decimal em seu tratado Aritmético, também demonstrou os métodos para se calcular com números naturais, método este desenvolvido na índia no século V. A notável ideia indiana foi a forma de expressar, por um único símbolo, uma quantidade infinita de números. Cada símbolo em separado teria um valor e na composição de números maiores que 10, o valor do símbolo depende da ordem em que ele se encontra, isto é, na primeira ordem ela expressa unidades, na segunda ordem ela expressa dezenas, na terceira ordem ela expressa centenas e assim por diante (MOREY, 2019).

O sistema indo-arábico é chamado de decimal, pois sua base é constituída de dez símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, chamados de algarismos. Este sistema é também posicional, pois cada algarismo, além de seu valor absoluto possui um peso relacionado com sua posição. Esse peso é uma potência de 10 que varia da direita para a esquerda segundo as potências $10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000$, e assim sucessivamente.

Por exemplo, o número 1234, no sistema decimal é representado por $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$. Esta é o que chamamos de expansão decimal do número.

Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda, e a cada três ordens forma uma classe.

Tabela 2.1: Classe e ordem.

Classe das unidades	**Classe da Milhar**	**Classe do Milhão**
Unidades de 1ª ordem	Unidades de milhar de 4ª ordem	Unidades de milhão de 7ª ordem
Dezenas de 2ª ordem	Dezenas de milhar de 5ª ordem	Dezenas de milhão de 8ª ordem
Centenas de 3ª ordem	Centenas de milhar de 6ª ordem	Centenas de milhão de 9ª ordem

Os sistemas de numeração posicionais foram aprimorados do teorema 2.3.2 que iremos enunciar e demonstrar a seguir, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

De modo geral, qualquer número natural N pode ser escrito como uma soma de potências de base 10. A saber

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n^- 1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0$, com $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant 9$.

Teorema 2.3.2. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, \cdots, c_n$, menores do que b, univocamente determinados, tais que $a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \cdots + c_n 10^n$. (LIMA et al., 1997).

Demonstração:

Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre a. Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$.

Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que: $a = bq + r$, com $r < b$.

Como $q < a$ (verifique), pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e $d_0, d_1, \cdots, d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo j, tais que:

$q = d_0 + d_1 b + \cdots + d_{n'} \cdot b^{n'}$.

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que $a = bq + r = b(d_0 + d_1 b + \cdots + d_{n'} \cdot b^{n'}) + r$, donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r$, $n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, \cdots, n$.

A unicidade segue-se facilmente das unicidades acima estabelecidas.

A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b. Quando $b = 10$, essa expansão é chamada expansão decimal, e quando $b = 2$, ela toma o nome de expansão binária.

A demonstração do Teorema também nos fornece um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente á base b.

Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$a = bq_0 + r_0, r_0 < b$;

$q_0 = bq_1 + r_1, r_1 < b$;

$q_1 = bq_2 + r_2, r_2 < b$;

$q_2 = bq_3 + r_3, r_3 < b$;

$q_3 = bq_4 + r_4, r_4 < b$;

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 > \cdots$, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e, portanto, de $q_{n-1} = bq_n + r_n$, decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots$, e, portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \cdots$.

Temos, então, que. $a = r_0 + r_1 b + \cdots + r_n b^n$.

A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os números naturais. Para tanto, escolha um conjunto S de b símbolos $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_{b-1}\}$, com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b-1$. Um número natural a na base b se escreve da forma $x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0$, com $x_0, \cdots, x_n \in S$, e n variando, dependendo de a, representando o número $x_0 + x_1 b + \cdots + x_n b^n$.

No sistema decimal, isto é, de base $b = 10$, usa-se $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Se $b \leqslant 10$, utilizam-se os símbolos $0, 1, \cdots, b-1$. Se $b > 10$, costuma-se usar os símbolos de 0 a 9, acrescentando novos símbolos para $10, \cdots, b-1$.

No sistema de base $b = 2$, temos que S $=\{0,1\}$, e todo número natural é representado por uma sequência de 0 e 1. Por exemplo, o número 10 (na base 2) representa o número 2 (na base 10). Temos também que 100 = $2^2, 101 = 1 + 2^2, 111 = 1 + 2 + 2^2, 1101 = 1 + 2^2 + 2^3 = 13$.

O sistema na base 2 é habitualmente utilizado nos computadores.

No sistema de base b = 3, temos que S = $\{0,1,2\}$, e todo número natural é representado por uma sequência de 0, 1 e 2. Por exemplo, o número 10 (na base 3) representa o número 3 (na base 10). Temos também que:

$$100 = 3^2 = 9, 101 = 1 + 3^2 = 10, 111 = 1 + 3 + 3^2 = 13, 1101 = 1 + 3^2 + 3^3 = 37.$$

No sistema de base $b = 5$, temos que S = $\{0,1,2,3,4\}$, e todo número natural é representado por uma sequência de 0, 1, 2, 3 e 4. Por exemplo, o número 10 (na base 5) representa o número 5 (na base 10). Temos também que:

$$100 = 5^2 = 25, 101 = 1 + 5^2 = 26, 111 = 1 + 5 + 5^2 = 31, 1101 = 1 + 5^2 + 5^3 = 151.$$

2.4 Números naturais do ensino fundamental

O desenvolvimento da temática dos números implica pela necessidade de quantificar objetos, criar pensamento critico e ser capaz de argumentar sobre determinadas situações que envolvam quantificar.

No ensino fundamental anos iniciais geralmente faz se primeiro uma abordagem sobre a importância dos números e onde estes são aplicados no dia a dia. Portanto são abordadas situações envolvendo números no cotidiano como, por exemplo, no relógio, nos dias da semana, meses do ano, idade e quantidades de objetos, todas essas situações evidenciam a importância do contexto numérico. A partir disso, também no contexto dos números, os alunos precisam desenvolver habilidades como, aproximação, conceitos de antecessor e sucessor, ordem numérica, além de resolver cálculos que envolvam as operações básicas de matemática.

Segundo a BNCC Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), com relação ao ensino fundamental anos finais, a expectativa é que os alunos resolvam problemas envolvendo os números naturais, pois esse conjunto é geralmente introduzido no 6.º ano e nas outras séries são feitas uma pequena revisão para a introdução dos números inteiros, racionais, irracionais e reais. Contudo, o desenvolvimento é de forma menos formal, sendo que a álgebra quase sempre é introduzida no 7.º ano no estudo de equações e dos números racionais.

Nessa seção mostraremos exemplos práticos das operações básicas com os números naturais e com um olhar na prática pedagógica vivenciada pelos alunos e professores. Assim, teremos como base o livro do autor (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2002), vamos também considerar as propriedades da seção anterior e adotaremos o zero como ponto de partida, como já citado, que quase sempre no ensino fundamental os números naturais começam com o zero ao invés de um (1), pois é uma questão de escolha de cada autor.

A sequência dos números naturais.

Iniciando pelo zero, para obter o sucessor, somamos uma unidade $(0 + 1 = 1)$, continuando sempre desse modo temos:

$0, 0 + 1, 1 + 1, 2 + 1, \dots = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...$

Dessa forma temos uma relação de ordem: $0 < 1 < 2 < 3 < ... < 100 < ...$ Assim podemos afirmar que esses números estão posicionados na ordem crescente.

No sistema de numeração decimal e posicional, dependendo da posição que ocupa no número, o mesmo símbolo pode representar valores diferentes, como exemplo, 121 = 100 + 20 + 1, 121 tem o algarismo 1 com valor opcional de cem (100) e o outro 1 de um (1).

2.4.1 Adição

Nas tabelas: 2.2, 2.3 e 2.4 a seguir abordaremos duas maneiras diferentes de resolver o mesmo problema. Em uma fizemos da maneira usual e na outra decomposição dos números relacionando com a mesma posição ou na expansão decimal.

1) Um aluno tem R$ 94 reais e ganha do seu tio R$ 123 reais. Quanto reais ele tem agora?

Tabela 2.2: Adição de números naturais

Método 1	Expansão decimal
123+94= 100+20+3+90+4	somando, 3+4 = 7 e 90 + 20 = 110
123+94 = 100 + 110 +7	como 110 = 100 +10
123+94 = 100+100+10+7	somando, 100 +100 =200
123+94 = 100 + 10 + 7	temos, 123 + 94 = 200 + 10 + 7
123 + 94 = 217	daí o resultado, 123 + 94 = 217
Método 2	**Explicação da forma usual**
c d u	Como 9 dezenas + 2 dezenas = 11 dezenas,
1 2 3 parcela	transformando, 11 dezena = 1 centena +1 dezena,daí
+ 9 4 parcela	somando 1 centena + 1 centena = 2 centenas,portanto
2 1 7 total	123+94 = 2 centenas + 1 dezena + 7 unidades = 217.

Conforme com a tabela 2.2 e denotando os números o 123 e 94 de parcelas e o número 217 de soma. Para descrever o processo do algoritmo usual para a adição acima, iniciamos pela coluna da unidade, onde somamos as unidades 4 + 3 = 7. Em seguida, somamos os algarismos da coluna das dezenas, 2 + 9 = 11, deixando 1 na coluna da dezena e colocamos o 1 na coluna das centenas, e usamos a expressão sobe 1, somamos 1 + 1 = 2. Obtendo o resultado de 217.

Na maioria das vezes, o professor do Ensino básico ensina aos seus alunos da maneira descrita, que é um processo usual, porém é um processo mecânico. Veremos porque que esse processo funciona e quais as justificativas desse algoritmo.

A explicação dos procedimentos anterior, que ao fazer a soma dos algarismos da dezena é necessário fazer uma transformação de 2 dezena + 9 dezenas = 11 dezenas = 1 centenas + 1 dezenas, obtendo o resultado 123 + 94 = 217, que é a soma de (1 + 1) centena + 1 dezenas + (3 + 4) unidades, como mostra no método 2 na tabela 2.2, usando a expansão decimal dos números.

2.4.2 Subtração

2) Um aluno tem R$ 217 reais e gastou R$ 94 reais em compras. Quanto reais ele tem agora?

Tabela 2.3: Subtração de números naturais

Método 1	Expansão decimal
$217-94=200+10+7-90-4$ $217-94=100+100+10-90+3$ $217-94=100+11\cdot 10-9\cdot 10+3$ $217-94=100+10\cdot(11-9)+3$ $217-94=100+20+1$ $217-94=123$	subtraindo, 7 - 4 = 3 somando, 100 + 10 = 110 transformando, $110=11\cdot 10$ e $90=9\cdot 10$ subtraindo, $10\cdot(11-9)=10\cdot 2=20$ somando, $100+20+3=123$ a diferença, $217-94=123$
Método 2	Explicação da forma usual
c d u 217 minuendo -94 subtraendo 123 diferença	217 = 2 centenas + 1 dezena + 7 unidades, como 2 centenas = 1centenas + 10 dezena, 11 dezenas - 9 dezenas = 2 dezenas, daí, 217-94 = 1 centenas + 2 dezenas + 3 unidades, ou seja, 100 + 20 + 3 = 123

Conforme a tabela 2.3 e chamando número o 217 de minuendo, 94 de subtraendo e o 123 de diferença. A descrição da resolução pelo algoritmo usual é a seguinte: iniciando pela coluna das unidades, devemos tirar 4 de 7, ficando 3 unidades nesta posição. Em seguida, vamos para a coluna das dezenas, temos agora que tirar 9 de 1, o que é impossível no conjunto dos números naturais. Assim, tomamos 1 emprestado de 2, que está na ordem das centenas. Fazemos 11 - 9 = 2 e por fim, temos 1 - 0 = 1, O resultado é 123. A explicação dos procedimentos anterior é que foi necessário fazer uma transformação de 2 centenas para 1 centena e 10 dezenas, obtendo do número 217, 1 centena +11 dezenas+ 7 unidades, dessa forma sendo possível retirar 9 dezena de 11 dezenas, como mostra na tabela usando a expansão decimal dos números.

Nas tabelas 2.2 e 2.3, note que a adição é a operação inversa da subtração, mas é importante ressaltar que a Adição e fechada nos naturais, mas na subtração, quando subtraindo um número natural de outro, nem sempre é um número natural.

2.4.3 Multiplicação

No ensino fundamental, a ideia de multiplicação é apresentada da soma de parcelas iguais ou através de organização de retângulos, ou por combinações, ou por proporcionalidade. Vamos exemplificar a primeira delas que dá também ideias das outras. Assim, $5+5+5+5+5+5+5+5 = 5 \cdot 8 = 40$, onde o número 5 é o fator que repete, o fator 8 é a quantidade de repetição da soma do número 5 e 40 é o produto.

3) Um jogador ganha por mês R$ 12 345 reais, durante um ano. Quanto reais ele ganhou durante esse período?

Tabela 2.4: Multiplicação de números naturais

Método 1	Expansão decimal
dm um c d u	transformando, 12 unidades=10 dezenas + 2 unidades
1 2 3 4 5 fator	multiplicando,$12345 \cdot 2 = 24690$ unidades
X 10 + 2 fator	multiplicando, $12345 \cdot 10 = 123450$ unidades
2 4 6 9 0	somando, 24690+123450 = 148140 unidades
1 2 3 4 5 0 +	
1 4 8 1 4 0 produto	
Método 2	**Forma usual**
dm um c d u	
1 2 3 4 5 fator	multiplicando, $2 \cdot 12345 = 24690$ unidades
X 12 fator	multiplicando, $1 \cdot 12345 = 12345$ dezenas
2 4 6 9 0	transformando, 12345 dezenas em 123450 unidades
1 2 3 4 5 +	somando, 123450+ 24690 = 148140
1 4 8 1 4 0 produto	o produto de $12345 \cdot 12 = 148140$

No método 2, essa forma é a usual, mas para ele ser compreendido pelo aluno, o professor deve explique que 12 = 1 dezena + 2 unidades = 10 unidades + 2 unidades. Assim $12345 \cdot 1$ dezena = 12 345 dezenas e no número 24 690 o algarismo que corresponde a dezena é o 9, desta forma as 5 dezenas é somado com as 9 dezenas, sendo que o zero corresponde o algarismo das unidades ou o professor usar o método 1.

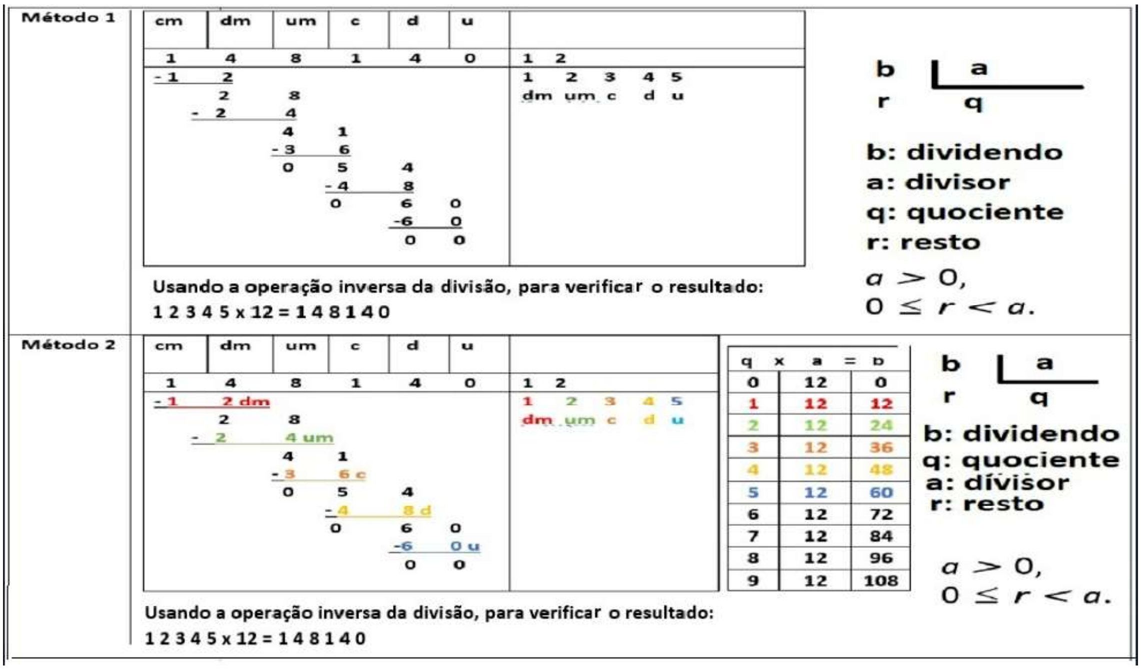
2.4.4 Divisão

A seguir apresentaremos a operação de divisão euclidiana que no ensino fundamental é conhecida por Relação Fundamental da Divisão, o seu algoritmo envolve adição, subtração e multiplicação. Na figura 2.1 a seguir abordaremos duas maneiras para resolver operações com divisão, em uma utilizaremos o método tradicional e na outra vamos usar a operação inversa da divisão, por tanto para exemplificar teremos como base a tabuada de multiplicação do divisor.

No ensino fundamental, a ideia de dividir é repartir em partes iguais e também a ideia de medida, ou seja, quantas vezes uma quantidade cabe na outra. Neste algoritmo, usaremos letras para representar números, o Teorema 2.3.1. no ensino fundamental é o mesmo que o Algoritmo da divisão.

Dados dois números naturais a e b, $a \neq 0$, sempre existem únicos q e r também naturais, tais que $b = a \cdot q + r$ e $0 \leqslant r < a$.

4) Um jogador reparte em partes iguais uma quantia de R$ 148 140 reais, para seus 12 sobrinhos. Quanto reais cada um vai ganhar?



Fonte: Próprio Autor.
Figura 2.1: Algoritmo da Divisão.

Para explicar o algoritmo da divisão, dividiremos 148 140 por 12. Representaremos no algoritmo 1 centena de milhar por *cm*, 4 dezenas de milhar por *dm*, 8 unidades de milhar *um*, 1 centena por *c*, 4 dezenas por *d* e zero unidade por *u*, como mostra na figura

2.1.

Temos 1 centena de milhar, que divididas por 12, dá 0 centena de milhar e sobra 1 centena de milhar, que transformamos em 10 dezenas de milhar e somamos com as 4 dezenas de milhar já existentes, resultando em 14 dezenas de milhar, que divididas por 12 resulta em 1 dezena de milhar, e sobram 2 dezenas de milhar, que transformando em 20 unidades de milhar, que somadas com as 8 unidades de milhar existentes, ficam 28 unidades de milhar, que divididas por 12, dá 2 unidades de milhar e sobram 4 unidades de milhar, que transformamos 40 centenas e somamos com a 1 centena já existentes, que divididas por 12, dá 3 dezenas e sobra 5 centenas, que transformamos em 50 dezenas e somamos com as 4 dezenas já existentes, resultando em 54 dezenas, que divididas por 12 resulta em 4 dezenas, sobram 6 dezenas, que transformando em 60 unidades, que divididas por 12, dá 5 unidades. Então, encontramos o quociente $q = 12345$ e o resto igual a $r = 0$. Logo temos uma divisão exata da forma: 1 4 8 1 4 0 = 12 · 1 2 3 4 5.

Analisando o método 1 e o método 2, que têm a mesma forma de resolver o algoritmo, mas no método 2 tem a tabuada de 12, dessa forma o aluno do 6.º ano ao fazer as divisões preliminares não exatas, ele observa que o resto tem que está entre $0 \leqslant r < 12$ e também observará os três possíveis dividendos na tabuada, de acordo a figura, tendo que dividir 28 por 12, daí os possíveis dividendos são: $b = 12 = 12 \cdot 1$, $b = 24 = 12 \cdot 2$ e $b = 12 \cdot 3 = 36$ e que $12 < 24 < 28 < 36$, a partir disso, o aluno decidira o valor correto do quociente que é $q = 2$ e fazendo a subtração de 28 – 24 = 4 e continuando repetindo esse processo até terminar a divisão, entende o algoritmo.

2.4.5 Potenciação

O conceito de potenciação, de acordo com alguns estudiosos é bastante antigo, surgiu por volta do século V a.C., a partir da necessidade de escrever números muito grandes obtido por produto de fatores iguais, sendo que está presente em situações de cálculo numéricos, algébricos e geométricos.

No ensino fundamental, a ideia de potenciação é apresentada por produtos de fatores iguais ou através de organização de quadradinhos em um quadrado e através de organização de cubinhos em um cubo, e assim por diante. Como exemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$, onde o número 5 é o fator que repete, sendo chamado de base, o 3 é o expoente que é a quantidade que o número 5 que repete e $5^3 = 125$ que é a potência.

É comum os alunos do ensino fundamental, ao confortar com uma operação de multiplicação ele somar os fatores em vez de multiplicar, do mesmo modo, quando tem a potência 5^3, ele multiplica $5 \cdot 3$ em vez de multiplicar $5 \cdot 5 \cdot 5$. Visto isso, a intervenção do professor se torna crucial para relacionar e comparar essas operações. Assim o aluno ao exercitar entenderá que a multiplicação e a potenciação são operações distintas. Além disso, é importante entender que a multiplicação é uma operação gerada da adição, da soma de parcelas iguais, e que a potenciação é gerada da multiplicação, de fatores iguais.

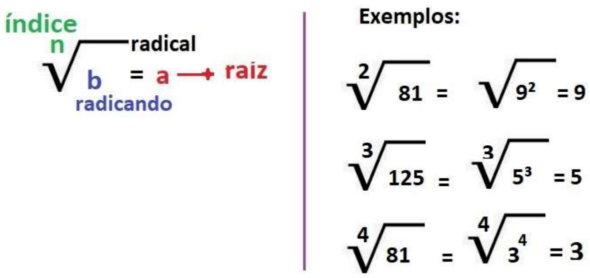
Na tabela 2.5 vamos relatar alguns casos relevantes da potenciação e usaremos letras para representar números para exemplificar, como é feito no ensino fundamental e explicaremos quando for o caso.

Tabela 2.5: Potenciação

Para $a, n \in \mathbb{N}$	Exemplos	Explicações importantes
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$	$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ $a = 4$ e $n = 3$	$4^3 = (4 \cdot 4) \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$ $4 \cdot 4 = 16$
$a^0 = 1$ com $a \neq 0$	$4^0 = 4 \div 4 = 1$ $a = 4$ e $n = 0$	o aluno precisa entender que $4^0 = 1$, pois $4^0 = 4 \div 4 = 1$.
$a^1 = a$	$4^1 = 4$ $a = 4$ e $n = 1$	É razoável $4^1 = 4$, pois o fator 4 aparece apenas uma vez.
$1^n = 1$	$a = 1$ e $n = 100$, $1^{100} = 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$	O aluno precisa entender que o número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Outro caso relevante são os quadrados perfeitos, sendo importante para que o aluno compreenda as raízes quadradas exatas e também que note a existência de outros números que não são naturais. Temos: $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9, \ldots$

2.4.6 Radiciação



Fonte: Próprio Autor.
Figura 2.2: Raízes Enésimas

A radiciação é uma operação matemática inversa à potenciação. Geralmente é ensinada nos 6.º e 7.º ano do ensino fundamental anos finais, a raiz quadrada exatas e algumas vezes a raiz cúbica exata . No 8.º ano é ensinado os números reais e 9.º ano, são ensinadas as propriedades de potenciação e radiciação e as demais considerações relevantes do conteúdo.

No ensino fundamental, a ideia de raiz quadrada é procurar um número natural que multiplicado por ele mesmo é igual ao radicando. Como exemplo, temos, $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, assim $\sqrt{25} = 5$, onde o número 25 é o radicando, $\sqrt{}$ é o radical de índice 2 e 5 é o resultado. Na raiz cúbica, o índice do radical é igual a $n = 3$. Na tabela 2.6 vamos usar recorrência para facilitar o entendimento do aluno.

Tabela 2.6: Raiz quadrada e raiz cúbica, usando a operação inversa.

Potenciação	Radiciação	Potenciação	Radiciação
Quadrado perfeito	Raiz quadrada	cubo	Raiz cúbica
$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$	$\sqrt{0} = 0$	$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$	$\sqrt[3]{0} = 0$
$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
E assim por diante	E assim por diante	E assim por diante	E assim por diante

É importante notar que nem toda raiz quadrada de número natural é um número natural, como exemplo, Temos que: $1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$, logo as raízes $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ não são números naturais, sendo que 2 é o sucessor 1. Diante disso, a radiciação não é uma operação fechada nos números naturais.

2.4.7 Números Naturais e os Jogos

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), durante o ensino fundamental, o aluno deve ampliar e construir significados para os números naturais. Até então isso parece ser uma tarefa fácil, mas existem diversas situações em sala de aula que nos leva a pensar que essa ampliação e significado dos números não foi bem compreendida pelos alunos.

É comum nos depararmos com grandes quantidades de alunos que desconhecem o que é um número natural ou de que maneira podemos encontrar representações destes, no dia a dia.

> Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente desses números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. Provavelmente isso ocorre em função de uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e das operações e a pouca ênfase que tradicionalmente é dada a este assunto. (BRASIL, 1998a, p.95).

Ao preparar uma aula o professor deve levar em conta todo contexto da sua sala de aula, a realidade dos alunos, os seus conhecimentos prévios, pois o fato de preparar uma aula lúdica com utilização de jogos não garantirá que a aula tenha sucesso ou faça sentido para os alunos. É preciso que todos os momentos da aula sejam importantes e que o aluno se sinta pertencente naquele momento.

> [...] o fator mais importante de que depende a aprendizagem de um aluno é aquilo que ele já sabe, ou seja, aquilo que está incorporado na sua estrutura cognitiva. Para Ausubel, a aprendizagem significativa, como incorporação substantiva, não meramente memorística de um novo conhecimento numa estrutura cognitiva prévia, está em oposição à aprendizagem em sala de aula pode localizar-se ao longo de duas dimensões independentes, que são dois contínuos, o contínuo aprendizagem mecânica - aprendizagem significativa e o contínuo aprendizagem por recepção - aprendizagem por descoberta. (VALADARES et al., 2000, p.4)

.

Se faz necessário levar em consideração a vivência do aluno os conhecimentos prévios que estes possuem, mesmo que a maneira aprendida tenha sido por repetição e não por atividades dinâmicas. É preciso permitir ao aluno que ele use esse conhecimento e garantir que o amplie.

> Os conhecimentos prévios podem ser considerados como produto das concepções do mundo da criança, formuladas a partir das interações que ela estabelece com o meio de forma sensorial, afetiva e cognitiva, ou ainda, como resultado de crenças culturais e que, na grande maioria das vezes, são de difícil substituição por um novo conhecimento. (TEIXEIRA; SOBRAL, 2010).

Sabemos que no contexto escolar a Matemática é um dos carros chefes do grande número de reprovações, e isso se deve ao fato desta matéria ser temida por grande parte dos alunos. Sabemos que em muitas escolas o conteúdo de Matemática muitas vezes é desenvolvido de forma mecânica e como isso acaba fazendo com que os alunos não tenham interesse pelo que está sendo ensinado. Para ter uma aprendizagem significativa é preciso fazer sentido.

> A aprendizagem significativa processa-se quando o material novo, ideias e informações que apresentam uma estrutura lógica, interage com conceitos relevantes e inclusivos claros e disponíveis na estrutura cognitiva, sendo por eles assimilados, contribuindo para sua diferenciação, elaboração e estabilidade. (MOREIRA; BUCHWEITZ, 1982).

Valorizar e manter o diálogo com os alunos em relação ao seu cotidiano é importante. Oferecer atividades que eles relacionem com o seu dia a dia é fundamental. É impossível pensar a humanidade sem a Matemática, pois sabemos que o conceito de números está presente em quase toda atividade humana. Dominar os conceitos básicos matemáticos são importante para construir outros conhecimentos mais complexos. Em relação aos números naturais muitas vezes o aluno vem das séries iniciais, porém sem o conhecimento aritmético adequado das operações básicas.

> [...] em nossos dias, a utilização, com compreensão, das operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) tornou-se um dos objetivos principais de qualquer Educação Matemática Básica. É preciso ter em mente a importância de desenvolver a compreensão do sentido e a utilização das operações na resolução dos diversos problemas do cotidiano, o que é mais importante do que o simples domínio de algoritmos. (SILVA; SANTANA, 2018)

Quando os alunos entenderem o processo aritmético das operações básicas, eles compreenderão também os conceitos matemáticos e consequentemente terão mais facilidade com operações mais complexas.

> Somar, subtrair, multiplicar e dividir depende de um raciocínio lógico matemático que não se desenvolve pela prática rotineira da explicação e exposição de um conteúdo pelo professor e a atenção do aluno para a demonstração feita na lousa. (BRITO, 2001).

A atividade lúdica por meio dos jogos pode ser uma grande aliada do professor, para trabalhar o raciocínio lógico e dar significado ao que está sendo proposto em sala de aula. Por meio dos jogos o professor terá a oportunidade de observar os conhecimentos prévios dos alunos assim como o desenvolvimento do seu raciocínio lógico. O jogo também possibilitará a convivência e afetividade entre os alunos.

> O jogo veio a ganhar um valor crescente na década de 1960, com o aparecimento de museus, com concepções mais dinâmicas; onde nesses espaços, as crianças podem tocar e manipular os brinquedos. Este processo de valorização do jogo chegou ao Brasil no início da década de 1980, com o aumento da produção científica a respeito de jogos e o aparecimento das 'brinquedotecas'.(BRITO, 2001).

Com o uso dos jogos, Bingo e o jogo do Nim, na disciplina de matemática, os alunos podem se tornar mais confiantes, sendo mais críticos, motivados e participativos, entender melhor o conceito dos números naturais podendo desenvolver um conhecimento amplo de adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação e radiciação de forma prazerosa entendendo todo o processo e consequentemente conseguindo fazer cálculos mentais com mais facilidade.

3 REFERENCIAL TEÓRICO.

O embasamento teórico aqui presente tem como grande objetivo usar o jogo como principal aliado em sala de aula tornando o aluno o agente transformador do seu conhecimento capaz de propor ideias, criar estratégias e soluções para situações que ocorram no ambiente escolar. O professor por sua vez terá o importante papel de se tornar mediador para que tais ideias possam ser colocadas em prática e alcançarem êxito.

Por muitos e muitos anos no âmbito escolar sabemos que os alunos eram meros receptores dentro da sala de aula, pois havia fala só por parte do docente e o aluno tinha apenas o papel de escutar e fazer as ações sem questionar ou propor alguma situação. Sabemos também que ainda nos dias de hoje infelizmente ainda existem muitos docentes que exercem a sua prática desta maneira, onde o educando nada mais é do que um receptor de suas palavras, para não dizer um robô que apenas executam os comandos dados por estes, e esse fato acaba gerando frustrações de ambas as partes, pois o professor não consegue colocar em prática o que planejou nem os alunos se mostram interessados por aprender.

Muitos profissionais por medo de inovar ou por acomodação não aperfeiçoaram as suas práticas em sala de aula, é válido ressaltar a grande importância da aula expositiva, mas essa por si só não consegue suprir as necessidades dos alunos, pois estes educandos estão cercados de informações, dominam muito bem a tecnologia e é muito difícil competir com uma ferramenta tão atrativa, o que acaba dificultando o trabalho do docente e fazendo com que este profissional não consiga despertar e manter o interesse dos alunos pelo que está sendo trabalhado. Os tempos são outros, os recursos tecnológicos estão cada vez mais avançados e precisamos cada vez mais nos aperfeiçoarmos para atingir de maneira satisfatória os objetivos traçados em sala de aula.

As dificuldades em termos de aprendizagem se tornam ainda mais preocupante em torno do ensino da Matemática, pois é muito comum encontrarmos uma grande maioria dos alunos que não gostem da matéria e isso se deve ao fato de acharem o conteúdo muito difícil e assim não entender. Isso leva a importância de buscarmos ferramentas para nos auxiliarem neste desafio.

> “A matemática tem suas complexidades, mas não é apenas isso que gera dificuldades ao aprendê-la, em muitos casos a forma como ela é ensinada pode gerar dificuldades de aprendizado. Ensinar Matemática não é só ensinar como se reproduz, e sim embasar de onde vêm determinadas propriedades, qual a importância de cada propriedade no nosso cotidiano.”(BANHEZA et al., 2019, p.15).

É sabido a grande dificuldade que professores encontram para despertar e manter a atenção dos alunos, principalmente na aprendizagem da Matemática, portanto torna-se necessário buscar alternativas e aprimorar as práticas no cenário educacional. A utilização de jogos como forma de ensino e aprendizagem vem cada vez mais ganhando cenário e reafirmando a grande importância de utilizarmos o lúdico na nossa prática docente, tornando nosso trabalho mais prazeroso, significativo e assim desenvolvendo o raciocínio lógico e cognitivo dos alunos.

> “Para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pode ser importante fazer uso de atividades que desenvolvam, nos alunos, habilidades matemáticas, tais como a memória, a lógica, o cálculo mental, a percepção visual, a reflexão. O uso de jogos é uma possibilidade para o desenvolvimento destas habilidades [...]”.
> (BRAZ et al., 2018, p.15).

O jogo é algo primitivo do ser humano, por todos os ambientes estes estão espalhados e com o grande avanço da tecnologia não é espanto nenhum nos depararmos com uma criança portando algum equipamento eletrônico e praticando algum jogo, pois estes estão disponíveis por todas as telas, cada vez mais interessantes e acessíveis a todos os públicos e por muitas vezes no ambiente escolar tal situação nos tira do foco, pois há uma grande quantidade de alunos desinteressados, passivos e presos dentro das mídias digitais praticando algum game . E isso faz o docente querer competir com tal situação o que a cada dia se torna mais difícil, pois como competir com algo tão atrativo e interessante? Isso tudo reflete a uma pergunta: por que competir se podemos usar isso a nosso favor?

> Os jogos educativos sobre tudo, aqueles com fins pedagógicos, revelam a sua importância em situações de ensino-aprendizagem ao aumentar a construção do conhecimento, introduzindo propriedades do lúdico, do prazer, da capacidade de iniciação e ação ativa e motivadora, possibilitando o acesso da criança a vários tipos de conhecimentos e habilidades. Para tal, o jogo deve propiciar diversão, prazer e até mesmo desprazer, quando escolhido voluntariamente, ensinando algo que complete o indivíduo no seu saber, nos seus conhecimentos e na sua percepção do mundo. O jogo favorece o desenvolvimento da linguagem, criatividade e o raciocínio dedutivo (MOURA; VIAMONTE, 2006, p.16).

Os jogos educacionais demonstram ter alta capacidade para divertir e entreter as pessoas ao mesmo tempo em que incentivam o aprendizado por meio de ambientes interativos e dinâmicos (HSIAO, 2007, p.16). Portanto são capazes de despertar o interesse dos alunos, mesmo aqueles que se encontram de maneira apática provocando nestes sentimentos como motivação, confiança, curiosidade e entusiasmo.

> [...] os jogos podem ser empregados em uma variedade de propósitos dentro do contexto de aprendizado. Um dos usos básicos e muito importantes é a possibilidade de construir-se a autoconfiança. Outro é o incremento da motivação [...] um método eficaz que possibilita uma prática significativa daquilo que está sendo aprendido. Até mesmo o mais simplório dos jogos pode ser empregado para proporcionar informações factuais e praticar habilidades, conferindo destreza e competências.(SILVEIRA; BARONE, 1998, p.16).

O jogo é uma atividade típica do homem. O homem inventa jogos e se diverte com eles. Constitui uma atividade possuidora de uma meta a ser alcançada pelos participantes, que quase sempre participam por prazer, ao invés de focar a competição e a vitória como ponto essencial. É regido por regras pré-estabelecidas, ou até mesmo, improvisado e cujo fator motivacional é o entretenimento, seja este conseguido por meio da cooperação ou mesmo da disputa entre os jogadores .(SANTOS; VALE, 2006, p.16).

> [...] os jogos contribuem para melhorias nas situações de ensino aprendizagem, minimizam bloqueios, estimulam e despertam o interesse dos alunos pela matemática como um todo e ainda auxiliam na construção do conhecimento. [...] os jogos podem contribuir como instrumento motivador de aprendizagem. (VIEIRA; SANTOS, 2012, p.16).

Segundo (HUIZINGA, 1971), não há como negar a dimensão educativa dos jogos, uma vez que propiciam o desenvolvimento de várias habilidades no aluno como a atenção, a concentração, o raciocínio lógico, dentre tantas outras. (CITESEER,) afirma que o jogo possui duas funções na educação: a função lúdica, uma vez que propicia diversão, e a função educativa, pois ensina qualquer coisa que complete o aluno em seu saber, seus conhecimentos e sua apreensão do mundo.

Segundo (SOLER, 2003), a função educativa do jogo é utilizada como guiador de uma participação positiva em nossa sociedade que se encontra, hoje em dia, nas mais diversas formas, para alcançar o desenvolvimento da aprendizagem, principalmente no caso dos jogos cooperativos de uma maneira simples e divertida. A nova forma de cooperação tenta criar e adquirir uma nova cultura, que será transformada em aprendizagem, sendo assim um jogo educativo.

Os Parâmetros curriculares nacionais - PCN (1998) destacam os benefícios que a utilização dos jogos pode trazer à sala de aula.

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propicia a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas o que estimula o planejamento das ações, possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural no decorrer da ação sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998b, p.46).

3.1 Jogos no contexto escolar.

As dificuldades e problemas que afetam o sistema de ensino em geral e particularmente nas séries da educação básica não são recentes e têm sido diagnosticados há muitos anos, levando diferentes grupos de estudiosos e pesquisadores a refletirem sobre suas causas e consequências.

As propostas que tem sido formulada para o encaminhamento de possíveis soluções indicam a orientação de se desenvolver uma educação voltada para a participação dos indivíduos. Desta forma, devem estar capacitados e compreender os avanços tecnológicos atuais e atuar de modo fundamentado, consciente e responsável diante de suas possibilidades de interferência nos grupos sociais em que convivem.

A importância e o prestígio que os professores atribuem ao ensino prático devem-se à popularização, nas últimas décadas, das ideias progressistas ou desenvolvimentalistas no pensamento educacional no que descendem de Rousseu, Pestalozzi, Spencer, Huxley, Dewey, entre outros (SILVA, 2014). A ideia central é que qualquer que seja o método de ensino-aprendizagem escolhido, ele deve mobilizar a atividade do aprendiz, em lugar da sua passividade.

Os métodos ativos de ensino-aprendizagem são entendidos como se defendessem a ideia de que os estudantes aprendem melhor por experiência direta, ou seja, na prática do dia a dia. Nesse sentido, podemos pensar que o núcleo dos métodos ativos, como as atividades práticas, são estratégias facilitadoras da aprendizagem dos alunos.

Um exemplo disso são as atividades práticas e lúdicas por meio de jogos, pois essas cumprem esse papel de mobilizar o envolvimento do aprendiz. Essas atividades apresentam, muitas vezes, vantagens claras sobre o ensino aprendizagem de qualidade, uma vez que não requerem a simples manipulação, repetitiva e irrefletida, de objetos concretos, mas de ideias e representações, com o propósito de comunicar outras ideias e percepções.

A riqueza desse tipo de atividade está em propiciar ao estudante a oportunidade, e ele precisa estar consciente disso, de trabalhar com coisas e objetos como se fossem outras coisas e objetos, num exercício de simbolização ou representação. As atividades por meio dos jogos despertam o aluno para novas formas de aprendizado e suas relações pessoais com os demais alunos.

O jogo permite também o surgimento da afetividade cujo território é o dos sentimentos, das paixões, das emoções, por onde transitam medos, sofrimentos, interesses e alegrias. Uma relação educativa que pressupõe o conhecimento de sentimentos próprios e alheios que requerem do educador uma atenção mais profunda e um interesse em querer conhecer mais e conviver com o aluno; o envolvimento afetivo, como também o cognitivo de todo o processo de criatividade que envolve o sujeito-ser-criança (ALMEIDA, 2009).

Embora seja praticamente consensual seu potencial para uma aprendizagem significativa, observa-se que o trabalho como os jogos é uma proposta discutida na literatura de maneira bastante diversa quanto ao significado que essas atividades podem assumir em diferentes contextos e em aspectos.

A análise do papel das atividades lúdicas desenvolvidas amplamente nas últimas décadas revela que há uma variedade significativa de possibilidades e tendências de uso dessa estratégia no âmbito escolar, de modo que essas atividades possam ser concebidas, desde situações que focalizam a mera descontração do ambiente, até situações que privilegiam as condições para os alunos refletirem e reverem suas ideias a respeito da aquisição do ensino aprendizado e conceitos abordados, podendo assim atingir um nível de aprendizado que lhes permita efetuar uma reestruturação de seus conhecimentos seja no ambiente escolar ou na sociedade.

Quando se pensa em um ensino aprendizagem de qualidade, temos que saber alinhar os métodos tradicionais e as metodologias ativas, pois sabemos que para o sucesso de um dependemos da eficácia do outro. Temos que ter a consciência de sermos dinâmicos e reflexivos buscar sempre expandir o nosso conhecimento e aperfeiçoar nossas práticas em sala de aula, assim o professor deve ser o mediador do aprendizado dando todas as instruções e suporte necessário para os alunos, ou seja, aproximando estes cada vez mais da realidade da escola.

O primeiro passo a ser feito é criar um ambiente que desperte o interesse dos alunos, através do lúdico podemos não só proporcionar aos estudantes um momento de prazer, mas também uma aprendizagem rica contribuindo para a construção e autonomia de um novo cidadão.

O jogo não representa apenas as experiências vividas, mas prepara o indivíduo para o que está por vir, exercitando habilidades e estimulando o convívio social. Por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações, mas aprendem a lidar com símbolos e pensar por analogia. Os significados das coisas passam a ser imaginados, contextualizado, tornando-se parte da cultura escolar para que se obtenha uma aprendizagem satisfatória e contextualizada. “Eu jogo do jeito que vivo e vivo do jeito que jogo” (BROTTO, 2013).

Diante de todas as colocações se dá a importância de o profissional usar os jogos como um recurso em suas aulas, pensar e repensar em todas as estratégias que possam ser adotadas enquanto docente, quais tipos de jogos são adequados ao seu nível de alunos respeitando sempre as individualidades e tempos de cada educando se desenvolver. Portanto será trabalhado aqui duas propostas de jogos sendo elas o Bingo Matemático e o jogo do NIM como forma de contribuir para o aperfeiçoamento dos alunos em conceitos básicos de multiplicação e divisão.

3.2 Jogo do Nim

De acordo com a classificação de (KISHIMOTO, 1996), (GRANDO et al., 2000a) e (FREITAS et al., 2019), o jogo do NIM se enquadra nas categorias “jogo educativo”, pois auxilia de maneira mais prazerosa no ensino e aprendizagem dos alunos e "jogos de estratégia" devido o jogador, neste caso o aluno, precisar elaborar uma estratégia para vencer, dependendo somente das ações do jogador.

De acordo (NASCIMENTO, 2016), espera-se que, quando bem utilizado pelo professor, o NIM estimule os estudantes a realizar cálculos mentais, ou até mesmo a contagem antecipada com a tentativa de prever futuras jogadas de seu adversário, levando-o a vencer o jogo. Como se trata de um jogo é importante ressaltar o que destacam (RODRIGUES; SILVA, 2004) e (SILVA; LACERDA; CLEOPHAS, 2017), de que se devem diversificar os materiais utilizados, pois alguns alunos podem apresentar apatia frente a uma determinada maneira de jogar e diversificar o jogo é um fator importante para que todos possam ser atendidos.

Variantes do Jogo do Nim.

Este jogo é bem simples e acessível a todas as pessoas e em qualquer lugar, ele pode ser jogado com n objetos, sejam eles palitinhos de picolé, palitinhos de fósforo, palitinhos de churrasco, tampinhas de garrafas, lápis, caneta, traços na lousa da sala, em fim basta usar a criatividade.

O jogo consiste em jogadas alternadas entre dois jogadores, os objetos serão dispostos sobre uma mesa ou em um caderno fazendo traço na folha de papel representando os palitos, ou até mesmo no quadro branco, sendo organizados em grupos ou enfileirados de conforme o critério de cada modalidade do jogo, nessas variantes, no caso se a partida for realizada com palitos, quem retirar o último objeto, poderá ser o derrotado ou o vitorioso, dependendo da regra da variante.

Existe uma estratégia vencedora para algumas dessa variantes, se ambos os jogadores conhecem esta estratégia, ganhará o jogo quem estiver em vantagem. É importante pensar estrategicamente para não dar chance para seu adversário.

Segundo (HEFEZ, 2011), jogo do NIM trata-se de um antigo jogo chinês de palitos jogado por duas pessoas. Este jogo foi objeto, em 1901, de um artigo científico na prestigiosa revista Annals of Mathematics, de autoria de C.L. Bouton, mostrando que há uma estratégia vencedora, se adotada na maioria dos casos pelo jogador que inicia o jogo. Há várias versões deste jogo, cada uma com uma estratégia própria.

Variante 1 - Dispõe-se sobre uma mesa um certo número N de palitos. Estipula-se que cada jogador, na sua vez, possa retirar, no mínimo, 1 palito e, no máximo, um número preestabelecido de n palitos, com $n > 1$. Supõe-se, ainda, que nem N nem $N-1$ não sejam múltiplos de $n+1$. Perde o jogador que retirar o último palito. A estratégia para que o primeiro jogador ganhe sempre é descrita a seguir.

Seja q o quociente e r o resto da Divisão Euclidiana de N por $n+1$. Por hipótese, tem-se que $r > 1$. Divida mentalmente os palitos em q grupos de $n+1$ palitos mais um grupo com $r-1$ palitos, restando ainda um palito.

O jogador que começa retira esses $r-1$ palitos. O segundo jogador, ao retirar de 1 a n palitos, deixará o primeiro jogador na situação confortável de retirar o que sobra no primeiro grupo de $n+1$ palitos.

Isto se repete para cada grupo de $n+1$ palitos, fazendo que, no final, sobre 1 palito na vez do segundo jogador, provocando a sua derrota.

Variante 2 — Da mesma forma que a variante anterior, segundo (HEFEZ, 2011), dispõe-se sobre uma mesa um certo número N de palitos e estipula-se que cada jogador, na sua vez, possa retirar, no mínimo, 1 palito e, no máximo, um número n pré-fixado de palitos, com $n > 1$. Supõe-se, ainda, que N e não sejam múltiplos de $n+1$. Ganha o jogador que retirar o último palito. Vamos descrever a nova estratégia para que o primeiro jogador ganhe sempre.

Seja q o quociente e r o resto da Divisão Euclidiana de N por $n+1$. Por hipótese, tem-se que $1 \leq r \leq n$. Divida mentalmente os palitos em q grupos de $n+1$ palitos mais, um grupo com r palitos. O jogador que começa retira os r palitos. O segundo jogador, ao retirar de 1 a n palitos, deixará o primeiro jogador na situação confortável de retirar o que sobra no primeiro grupo de $n+1$ palitos. Isto se repete para cada grupo de $n+1$ palitos, fazendo sempre com que, depois do segundo jogador realizar a sua jogada, sobre no grupo um número tal de palitos que possam ser retirados de uma só vez pelo primeiro jogador, levando-o à vitória.

Variante 3 - Este jogo consiste de N palitos separados em três grupos com números distintos de elementos e colocados na tabela, no qual dois jogadores se alternam retirando, cada um na sua vez, um número não nulo qualquer de palitos de apenas um dos grupos, podendo retirar inclusive todos os palitos do grupo escolhido. Ganha o jogo quem retirar o último palito .

Cada estado do jogo pode ser representado por uma linha de números, representando o número de palitos em cada grupo, ordenados previamente como Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3, começando com uma configuração inicial (n_1, n_2, n_3), onde $n_1 + n_2 + n_3 = N$.

Vantagens do jogo do NIM como recurso pedagógico em sala de aula

Em vários momentos do contexto social escolar para muitos o jogo é visto como uma forma de entreter os alunos e assim fazer com que eles fiquem atentos. Mas estudos apontam a grande variedade de benefícios para o ensino aprendizagem quando adotamos atividades do tipo lúdicas no caso jogos em sala de aula. A própria ação em si do jogo já é capaz de criar momentos de fantasia que são transformados em realidade, momentos de percepção, de conhecimentos, momentos de vida.

> As crianças ficam mais motivadas a usar a inteligência, pois querem jogar bem; sendo assim, esforçam-se para superar obstáculos, tanto cognitivos quanto emocionais. Estando mais motivadas durante o jogo, ficam também mais ativas mentalmente (KISHIMOTO, 1996, p.96).

É importante frisar que toda e qualquer atividade inserida no contexto escolar é preciso ser planejada, avaliar as possíveis maneiras de serem aplicadas, ter flexibilidade quanto a sua aplicação visando a reformulação da atividade e assim o seu aperfeiçoamento. De acordo (MIORIM, 2009, p.9) “o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico”. Segundo os autores, “[...] nenhum material é válido por si só. [...]. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da Matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina”. Por tanto aliado a prática do jogo deve se ter um bom planejamento para que de fato o resultado seja refletido dentro da sala de aula em termos de aprendizagem.

O jogo do NIM é uma grande opção para ser adotado em sala de aula por se tratar de um jogo que requer raciocínio lógico para organizar suas ações, concentração e estratégias para executar as jogadas já pensando no próximo movimento e assim antecipar as jogadas do adversário. A partir dele também podemos trabalhar conceitos de adição e multiplicação, e suas operações inversas, dessa forma, usando a divisão Euclidiana que envolve às quatro operações básica e para fazer uma jogada, é uma boa estratégia pensar nos quociente e no resto da divisão da quantidade desses objetos. Daí retirar a quantidade adequada em cada jogada, conforme as regras do jogo.

3.3 Jogo do Bingo na Educação

Os jogos de azar são aqueles em que a perda ou o ganho dependem mais da sorte do que do cálculo, ou somente da sorte. Estes jogos estão muito ligados às probabilidades. Alguns dos seus exemplos são: a roleta, o bingo, jogos de baralhos de cartas, o totoloto, etc. (DAVID, 2008).

No jogo do bingo é colocada bolas enumeradas dentre de um globo onde cada jogador recebe uma cartela para preencher de acordo as bolas que serão retidas deste globo, sairá vencedor do bingo o jogador que conseguir preencher toda cartela, este por sua vez ao completar toda cartela deverá gritar “bingo” e se dirigir ao chefe da mesa, assim o jogo será parado para fazer a conferência da cartela. Geralmente esse tipo de jogo ocorre em festas juninas ou gincanas escolares.

> No Brasil existem muitas polêmicas acerca das casas de bingo, casos de propinas e lavagem de dinheiro, e vários processos judiciais impedem e readmitem o funcionamento de casas especializadas nesse jogo. O jogo, porém, continua muito popular durante as festividades juninas, arrecadações beneficentes e também entre amigos (BRASIL, 1998b).

A História do Bingo

O bingo é um jogo muito conhecido popularmente, mas não é de hoje que essa prática existe. "O bingo é um jogo de sorte, surgiu na Genova Itália, quando surgiu a necessidade de substituição dos membros da câmara e do senado. Para isso, colocava-se o nome das pessoas que seriam sorteadas em uma caixa opaca e fazia o sorteio. Isso era necessário para evitar acusações de favoritismo e com base nisto, no ano de 1530 surgiu uma espécie de loteria realizada aos sábados chamada "Lo Giuoco del Lotto D'Itália" "

A palavra "bingo" é de origem inglesa, originou-se do Loto ou Lotto italiano (uma loteria que surgiu em 1530). Em meados de 1800 este tipo de loteria se propagou rapidamente por toda a Europa e muitos desdobramentos do jogo foram criados. Existem várias histórias de como haveria surgido o nome bingo. Uma delas menciona que o nome bingo surgiu no final do século 19 em Gales, onde mineiros, que praticamente não tinham dinheiro nem para comer, apostavam em cartões rústicos, marcando os números sorteados com feijões (bean, em inglês, cuja pronúncia é "bin"). Quem ganhava, levava todos os feijões dos cartões dos demais mineiros. Ou seja, o vitorioso poderia levar um saco cheio de feijões para casa. Daí a expressão "bean go", para sugerir que o feijão ia para o vencedor.

Outra versão para o surgimento do nome diz respeito a sua chegada na América do Norte em aproximadamente 1929, onde se popularizou como "beano". As ferramentas do jogo consistiam em feijões secos, um carimbo de borracha com números e alguns cartões. Um vendedor de brinquedos de Nova Iorque chamado Edwin Lowe, observou o jogo onde os jogadores exclamavam "beano!" se eles completassem uma linha de seus cartões. Edwin Lowe, o iniciador do jogo "Lowes Bingo", procurou os serviços de um professor de matemática da Universidade Da Columbia, Carl Leffler, para ampliar a quantidade de combinações. Em 1930, o professor Leffler criou 6.000 cartões de bingo com grupos de números não repetidos.

No Brasil, não se tem um registro histórico bem definido. O jogo apareceu nos moldes dos jogos de tabuleiros, também conhecido como loto. No início da década de 1990, a Lei Zico instituiu o bingo como jogo oficial, inspirado nos modelos espanhóis do jogo. Os bingos estabelecidos no Brasil seguem o modelo da maior parte dos bingos do mundo, que distribuem prêmios também para os participantes que completam, antes dos outros, uma das linhas horizontais ou uma das colunas verticais, geralmente compostas de cinco números. (DAVID, 2008).

Durantes anos o bingo foi ganhando novos formatos, passou por várias adaptações e hoje é muito comum nos depararmos com a prática desse jogo em vários ambientes, visto os benefícios que este pode nos proporcionar, tais como: prazer, emoção, sorte, socialização, entre outros. Voltando essa prática para um contexto de aprendizagem em sala de aula, usamos o bingo como uma estratégia metodológica afim de trabalharmos conceitos básicos de matemática, como por exemplo podemos adotar o bingo matemático com objetivo de desenvolver o raciocínio lógico matemático e operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, aguçando assim o conhecimento dos alunos.

> O jogo oferece o estímulo e o ambiente propícios que favorecem o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira, lúdica e prazerosa e participativa, de relacionar-se com o conteúdo escolar, levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos. Utilizar jogos como instrumento pedagógico não se restringe a trabalhar com jogos prontos, nos quais as regras e os procedimentos já estão determinados; mas, principalmente, estimular a criação, pelos alunos, de jogos relacionados com os temas discutidos no contexto da sala de aula. (GRANDO et al., 2000b).

Os parâmetros curriculares nos dizem que a Matemática deve estar em consonância com as rápidas transformações que ocorrem no mundo, portanto é preciso preparar os alunos para a vida além da representação de dados, classificar ou identificar símbolos. Mais uma vez fica claro a importância de considerar a realidade do aluno e darmos atenção aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem.

Desta forma os jogos se configuram em uma ótima ferramenta para propor problemas, principalmente quando os alunos participam da construção desses jogos, pois assim eles terão oportunidade de participar de todo processo desde a elaboração do problema até a resolução do mesmo.

> Ao observarmos o comportamento de uma criança em situações de brincadeira e/ou jogo, percebe-se o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas. (GRANDO et al., 2000b).

É importante ressaltar que nenhuma aula será bem-sucedida se antes não forem analisadas todas as situações que envolvem o contexto da sala de aula e a realidade da turma. Muito pelo contrário, uma aula mal preparada pode prejudicar ainda mais o ensino e comprometer a aprendizagem. É preciso sempre prezar pelo bom planejamento na execução de todas as ações.

3.4 PREMIAÇÕES: Incentivo X Condicionamento

Todos nós gostamos de ser parabenizados por nossos êxitos e nossas práticas bem-sucedidas. Isso nos motiva a queremos ser sempre melhores. Quando esses reconhecimentos se tornam prêmios ou recompensas o nosso entusiasmo aumenta ainda mais.

Em sala de aula sabemos o quanto é difícil despertar e manter o interesse da turma, pois existe uma grande quantidade de alunos sem perspectivas e foco no ensino aprendizagem. Sabendo disso é comum que alguns professores utilizem práticas lúdicas por meio de jogos e durante a execução destas, acabam premiando os alunos que tiveram mais sucesso na realização da proposta da aula. A utilização dos prêmios por muitas vezes é necessária, pois mesmo se tratando de jogos, ainda assim tem alunos que se sentem desmotivados a participar das atividades em sala de aula, a premiação nesse momento faz com que o aluno tenha pelo menos a motivação de querer ganhar o prêmio.

Mas mesmo usando todos os recursos que temos em mãos, por muitas vezes vem os questionamentos se essas "recompensas" ajudam no desenvolvimento do ensino aprendizagem dos alunos ou os deixam condicionados a participarem de determinada proposta de aula somente se houver premiações. Cabe ao professor utilizar estratégias para melhorar o desempenho, que sejam estimulados, premiados e que desenvolvam as habilidades necessárias para poderem formular suas próprias estratégias para vencer e aprender. O professor deve tornar seus objetivos bem claros para a turma e sempre avaliar o processo de aprendizagem de seus alunos para continuar traçando suas metas de ensino.

Benefícios e Malefícios das Premiações em Sala de Aula.

A motivação leva a um objetivo claro que é o de despertar o interesse dos alunos, melhorar o comportamento e consequentemente aumentar o rendimento em sala de aula em relação ao conteúdo.

> "motivação é tudo aquilo que impulsiona a pessoa a agir de determinada forma, ou pelo menos, que dá origem a uma propensão, a um comportamento específico". (CHIAVENATO, 1985).

Alguns professores nas suas práticas em sala de aula, acreditam que recompensar seus alunos em atividades do tipo jogo como, por exemplo, premiar o vencedor de um bingo matemático ou o vencedor de um bingo da tabuada, ajudará o aluno a se empenhar mais na realização da atividade. Já outros professores acreditam que premiar alunos nesse tipo de atividade, pode deixá-los condicionados a participar da atividade somente se forem ganhar algum prêmio.

Para Lepper e Greene (1978 *aput* (GUIMARÃES, 2001)), (DECI; RYAN, 1985), (KOHN, 1994), (CAMERON; PIERCE, 1994), as premiações podem ter efeitos surpresos, ocultos e inesperados; e todos sugerem cautela quanto ao seu uso. Em contrapartida, para Wheldall e Merret (1984 *aput* (WILLIAMS; BURDEN, 1997)) as recompensas ou reforços externos são considerados meios eficazes para motivar os alunos. Para (SKINNER, 1971) quando um dado comportamento é seguido por uma dada consequência apresenta maior probabilidade de repetir-se.(DECI; RYAN, 1985), Lepper e Greene (1978 *apud* (WILLIAMS; BURDEN, 1997)), sugerem ainda que o uso de recompensas passe uma mensagem de que a atividade é impertinente ou "chata" e que requer algo extra como, por exemplo, premiações em geral.

(SKINNER; KELLY; HEINE, 1974) afirma que recompensar respostas corretas melhora a aprendizagem. Para ele isso é mais eficaz que querer controlar ou aplicar punição quando algo deixa de ser feito, uma vez que as recompensas são dirigidas para um bom comportamento. Essa teoria de Skinner é de imediata aceitação, pois na prática a recompensa é dada visando o reforço da ação, igual quando um pai elogia um filho por ter dado a resposta correta, ou seja, quando o filho faz algo desejado pelo pai, este recebe um prêmio, uma recompensa, é algo positivo. Da mesma forma pode ser feito em sala de aula entre professor e aluno.

Diante dos fatos é possível verificar que as recompensas podem ser positivas e vistas como forma de motivar e aguçar o interesse dos alunos, ou seja, os alunos se sentem mais entusiasmados quando se tem premiações. Por outro lado, as premiações podem prejudicar quando o professor não avalia o nível de desempenho de sua turma, pois sabemos que existem alunos que já se sentem motivados e empenhados a participar das atividades e nesse caso a recompensa pode desviar a sua atenção e redirecionar somente para o desejo de ganhar o prêmio e consequentemente prejudicará o seu rendimento enquanto aluno.

É possível verificar que qualquer que seja a escolha feita pelo professor, se vai ou não premiar os alunos por seu desempenho é preciso fazer uma leitura da turma afim de verificar se essa prática vai contribuir ou prejudicar o desempenho de seus alunos, visto que temos o lado positivo e negativo sobre o uso de recompensas nas aulas , sejam estas aulas por meio de jogos ou não.

4 METODOLOGIA.

O método apresentado aqui tem como proposta de trabalho com 7 atividades usando a tabuada e Bingo matemático e 7 usando o jogo do NIM que podem ser desenvolvidas em sala de aula com os educandos.

As atividades foram elaboradas visando atender turmas do ensino fundamental anos finais, porém mediante a simplicidade das atividades nada impedi de serem aplicadas em qualquer turma da educação básica. Objetivando sempre resultados a serem alcançado a curto e longo prazo respeitando a individualidade e o tempo de desenvolvimento de cada aluno.

Origem da tabuada e a sua importância para o contexto escolar.

No ambiente escolar usamos a tabuada como forma de facilitar cálculos e chegarmos ao resultado de forma mais rápida.

De acordo com Ramos (2009):

As palavras tabuada e tabela têm uma origem e um significado comuns: "tábua", um lugar no qual registrar (sic) relações numéricas, a fim de que seja possível consultá-las quando necessário – provavelmente, as primeiras 127 tabelas foram criadas antes mesmo do papel, sendo os registros feitos em placas de madeira ou papiros. (p. 89). (RAMOS; CUMAN, 2009).

Ainda segundo consta os registros na Grécia antiga, usavam-se tábuas de argila ou pedra para fazer cálculos. Elas funcionavam como gabaritos para tornar mais rápidas as transações comerciais. Pitágoras, filósofo e matemático grego do século VI a.C., criou uma tabela que permite efetuar as operações de multiplicação da tabuada tradicional.

Em sala de aula esta é uma grande facilitadora para o ensino aprendizagem em Matemática e é comum vermos grande parte dos alunos com a tabuada na ponta da língua ou algum tipo de jogo envolvendo competições em torno desse instrumento. O que não se pode negar é que de fato o aluno que domina as quatro operações tem mais facilidade para resolver questões propostas em torno do conteúdo de Matemática.

Usar estratégias para inserir a tabuada no ambiente da sala de aula é muito importante para o desenvolvimento dos educandos, é possível verificar isso como por exemplos, em jogos do tipo Bingo de tabuada, estes estimulam os alunos a calcularem os resultados e ao mesmo tempo deixarem gravados na memória o resultado das multiplicações.

Neste capítulo será apresentada uma sequência de 14 atividades tendo como instrumento pedagógico o jogo do NIM, Bingo Matemático e a tabuada, desenvolvendo as operações básica e a equações com as operações inversas. As atividades foram elaboradas visando a grande dificuldade que os alunos têm em torno dos conceitos básicos de Matemática.

4.1 Atividades do Bingo Matemático

Orientações para as atividades: Disponha os alunos em círculo ou de uma maneira que eles se sintam a vontade na sala de aula, dessa forma, o professor se colocará como um facilitador da atividade.

Nesse momento será feito um diagnóstico da turma referente às operações básicas no intuito de verificar o nível de dificuldade que eles possuem no conteúdo a ser trabalhado. Assim, o docente pode falar um pouco da importância da tabuada e os benefícios que ela traz para o desenvolvimento do ensino aprendizagem dos alunos.

Podem ser feitas perguntas aleatórias para os alunos, afim de verificar quais alunos tem domínio das operações e assim instigar e despertar o interesse da turma.

4.1.1 Atividade: Tabela contendo operações de multiplicação.

Objetivo: Aprimorar a tabuada de multiplicação.

Tabela 4.1: Roteiro de atividades 1: Tabuada de Multiplicação.

Atividade	**Descrição**	**Previsão de duração**
Conversa inicial	Apresentação e orientações.	10 minutos
Tabuada de multiplicação	completar e memorizar	40 minutos

Será disponibilizada para os alunos uma folha contendo operações de multiplicação.Eles deverão completa-las fazendo os cálculos através de somas sucessivas ou outro método prático.

Em seguida diante das operações completadas os alunos irão se aprimorar dos resultados, estudando os cálculos ou mesmo refazendo as operações, fazendo perguntas para si mesmo, absorvendo os resultados, pois está será utilizada com intuito da aprendizagem e preparação para o Bingo tabuada. Assim o aluno deve conseguir interiorizá-la com o tempo através do conhecimento de como se dá a sua construção, desta forma, terá habilidade e agilidade para resolver os problemas matemáticos.

Nessa tabela 4.2 o aluno completará a tabuada de Multiplicação de 1 a 10.

A tabela 4.3 é para cada aluno resolver a multiplicação da linha pela coluna. Esta tabuada é formada por 10 colunas e 10 linhas – linha x coluna.

Tabela 4.2: Tabuada 1: Multiplicação de 1 a 10.

1x1=		2x1=		3x1=		4x1=		5x1=	
1x2=		2x2=		3x2=		4x2=		5x2=	
1x3=		2x3=		3x3=		4x3=		5x3=	
1x4=		2x4=		3x4=		4x4=		5x4=	
1x5=		2x5=		3x5=		4x5=		5x5=	
1x6=		2x6=		3x6=		4x6=		5x6=	
1x7=		2x7=		3x7=		4x7=		5x7=	
1x8=		2x8=		3x8=		4x8=		5x8=	
1x9=		2x9=		3x9=		4x9=		5x9=	
1x10=		2x10=		3x10=		4x10=		5x10=	
6x1=		7x1=		8x1=		9x1=		10x1=	
6x2=		7x2=		8x2=		9x2=		10x2=	
6x3=		7x3=		8x3=		9x3=		10x3=	
6x4=		7x4=		8x4=		9x4=		10x4=	
6x5=		7x5=		8x5=		9x5=		10x5=	
6x6=		7x6=		8x6=		9x6=		10x6=	
6x7=		7x7=		8x7=		9x7=		10x7=	
6x8=		7x8=		8x8=		9x8=		10x8=	
6x9=		7x9=		8x9=		9x9=		10x9=	
6x10=		7x10=		8x10=		9x10=		10x10=	

Tabela 4.3: Tabuada - linha x coluna: Multiplicação de 1 a 10

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

4.1.2 Atividade: Tabuada em dupla e Torneio de Tabuada.

Objetivo: Aprimorar as operações básicas de multiplicação e preparar o aluno para o Bingo Tabuada.

Tabela 4.4: Roteiro de atividades 2: Torneio Tabuada

Atividade	Descrição	Previsão de duração
Conversa inicial	Apresentação e orientações.	10 minutos
Torneio Tabuada	Multiplicação da tabuada tradicional	40 minutos

1.º momento: apresentação e orientação da atividade.

Desenvolvimento do 2.º momento.

Nesta atividade os alunos irão se organizar em duplas para tomarem a tabuada um do outro. Depois de algum tempo fazendo o que foi proposto, o professor pode sugerir que eles continuem fazendo as perguntas, mas que agora definam um tempo limite para a pergunta ser respondida e assim se sentirem confiantes para desenvolverem as próximas etapas das atividades.

É importante ressaltar que caso o professor perceba que alguns alunos permanecem com muita dificuldade e se sintam desconfortáveis com a ideia do tempo, essa sugestão pode ser descartada para não causar nenhum bloqueio neles.

O objetivo da atividade é que ela seja desenvolvida de maneira prazerosa.

3.º momento: Nesta etapa será feito um torneio de tabuada com os alunos.

É importante que todas as regras do torneio sejam passadas para os alunos antes de as etapas serem executadas. Além disso, este torneio tabuada é uma preparação do aluno para o BINGOT, Bingo tabuada.

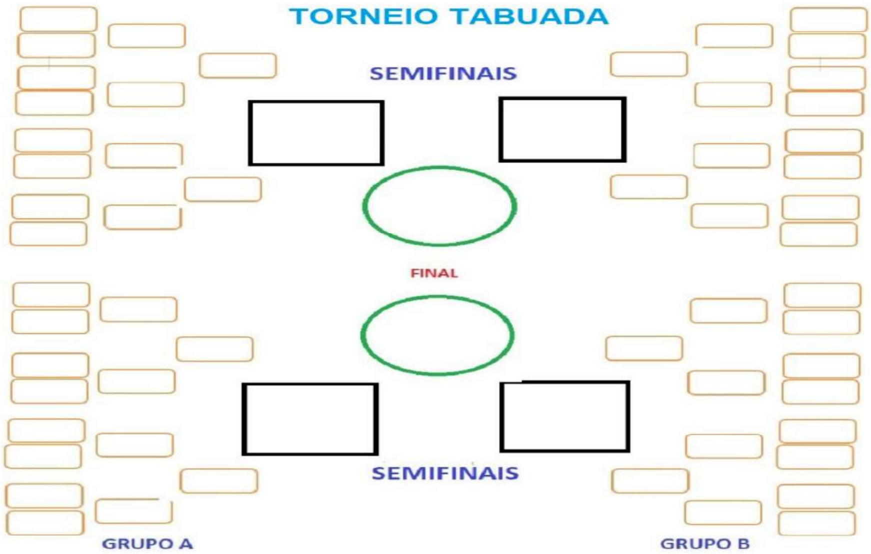
O torneio funcionará da seguinte forma: os alunos serão chamados de dois em dois na frente da sala, o professor terá em cada uma das mãos um papel contendo uma operação para ser respondida pelos alunos.

Ambos receberão operações aleatórias, este vai verificar de qual operação se trata e no próprio papel anotará o resultado da operação e em seguida entregará para o professor, e este vai verificar qual aluno acertou a resposta, pois o aluno que respondeu corretamente e no melhor tempo será classificado para a próxima etapa. .

Lembrando caso os dois alunos tenham acertado o resultado, classificará o aluno que tenha entregue o papel primeiro. É importante lembrar que todas as regras do torneio devem ser passadas para os alunos antes de as competições serem iniciadas. Além disso, o leitor pode acessar o site imprimir a Tabela do torneio.

A Figura 4.1 é uma Tabela para o torneio Tabuada. Grupo A x Grupo B

https://drive.google.com/file/d/1rSXPf4zNyjiZbfXwxmLBYDur8ANbWC5y/view?usp=share$_l$ink



Fonte: Próprio Autor.
Figura 4.1: Torneio tabuada.

4.1.3 Atividade: Bingo Tabuada nível 1.

Objetivo: Colocar em prática o conhecimento adquirido no torneio tabuada.

Tabela 4.5: Roteiro de atividades 3: Bingo Tabuada nível 1.

Atividade	Descrição	Previsão de duração
Conversa inicial	Apresentação e orientações.	10 minutos
Bingo tabuada	cartelas elaboradas - multiplicação	40 minutos

Desenvolvimento: Os alunos receberão cartelas de bingo elaboradas de acordo as operações que constam na tabuada tradicional do 1 ao 9. O BINGOT (Bingo Tabuada) foi pensado estrategicamente para trabalhar as operações de multiplicação, nele consta uma tabela organizada em três linhas e seis colunas com os resultados das operações distribuídos aleatoriamente.

O professor deverá explicar que este bingo é nível 1 e neste momento não é permitido recorrer a qualquer equipamento que facilite o resultado das operações, tais como: calculadora ou tabuada. Necessariamente neste bingo o professor fala a operação, o aluno responde e o docente confirma se está certo ou não, por isso se trata de nível 1. Assim poderá corrigir, caso alguém tenha marcado errado ou não tenha marcado.

Após passar as regras iniciará o bingo, caso haja alguma operação que os alunos não saibam o resultado estes podem fazer os cálculos no caderno para obter a resposta.

O intuito do jogo é aguçar o conhecimento dos alunos.

É interessante colocar alguns incentivos como, por exemplo: o aluno que completar uma linha inteira do bingo ganhe um pequeno brinde que pode ser borracha, lápis ou caneta e quem preencher a cartela inteira ganha um caderno.

Mas isso é uma sugestão, pois fica a critério do professor se vai colocar algum brinde no jogo ou se vai fazer somente para verificação da aprendizagem.

A Tabela 4.6 contém 41 números que são os resultados das operações de multiplicação da tabuada.

As cartelas de Bingo nas Tabelas: 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11, são exemplos das cartelas, além disso, o leitor pode acessar o site no endereço da próxima linha, para imprimir as 40 cartelas distintas, para aplicar o BINGOT, na sala de aula.

- https://drive.google.com/file/d/1ff2VoKzrqBFVKVWkTa73zEwpGcqcWa2C/view?usp=share$_l$ink.

Tabela 4.6: Os números são os resultados das operações de multiplicação da tabuada: Quantidade: 41

LETRAS	**NÚMEROS**	**QUANTIDADE**
B	1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7	7
I	8, 9, 10, 12, 14, 15 e 16	7
N	18, 20, 21, 24, 25, 27 e 28	7
G	30, 32, 35, 36, 40, 42 e 45	7
O	48, 49, 50, 54, 56, 60 e 63	7
T	64, 70, 72, 80, 81 e 90	6

Tabela 4.7: Cartela BINGOT: 1

LETRA	**B**	**I**	**N**	**G**	**O**	**T**
Linha 1	1	8	20	45	60	90
Linha 2	4	10	24	42	48	80
Linha 3	5	12	28	30	56	70

Tabela 4.8: Cartela BINGOT: 2

LETRA	B	I	N	G	O	T
Linha 1	1	8	21	45	63	81
Linha 2	3	9	24	32	49	80
Linha 3	5	12	28	35	56	72

Tabela 4.9: Cartela BINGOT: 3

LETRA	B	I	N	G	O	T
Linha 1	2	8	25	45	60	72
Linha 2	3	10	24	36	56	90
Linha 3	7	15	28	40	54	64

Tabela 4.10: Cartela BINGOT: 4

LETRA	B	I	N	G	O	T
Linha 1	5	14	20	45	60	72
Linha 2	1	9	24	32	54	90
Linha 3	7	15	27	35	63	80

Tabela 4.11: Cartela BINGOT: 5

LETRA	B	I	N	G	O	T
Linha 1	6	8	20	45	63	64
Linha 2	4	16	25	42	48	81
Linha 3	5	12	21	30	50	70

Tabela 4.12: Operações de multiplicações para cantar.

LETRA	B	I	N	G	O	T
Linha 1	1x1	2X4	3X6	5X6	6X8	8X8
Linha 2	1X2	3X3	4X5	4X8	7X7	7X10
Linha 3	1X3	2X5	3X7	5X7	5X10	8X9
Linha 4	2X2	3X4	4X6	6X6	6X9	8X10
Linha 5	1X5	2X7	5X5	5X8	7X8	9X9
Linha 6	2X3	3X5	4X7	7X6	6X10	9X10
Linha 7	1X7	4X4	3X9	5X9	7X9	—

4.1.4 Atividade: Bingo Tabuada nível 2

Objetivo: Colocar em prática o conhecimento adquirido no desenvolvimento da tabuada. Para realizar essa atividade podem ser usadas as cartelas da atividade 4.1.3.

Tabela 4.13: Roteiro de atividades 4: Bingo Tabuada nível 2.

Atividade	**Descrição**	**Previsão de duração**
Conversa inicial	Apresentação e orientações.	10 minutos
Bingo Tabuada nível 2	Cartelas elaboradas - multiplicação	40 minutos

Desenvolvimento:

Os alunos receberão cartelas de bingo elaboradas de acordo as operações que constam na tabuada tradicional do 1 ao 9. O BINGOT (Bingo Tabuada) foi pensado estrategicamente para trabalhar as operações de multiplicação, nele consta uma tabela organizada em três linhas e seis colunas com os resultados das operações distribuídos aleatoriamente.

O professor deverá explicar as regras do bingo nível 2, sendo que neste momento não é permitido recorrer a qualquer equipamento que facilite o resultado das operações, tais como: celular, calculadora e tabuada. Necessariamente no Bingo Tabuada nível 2, o professor fará a pergunta da operação e anotará as operações no quadro branco, os alunos irão marcar de acordo o conhecimento adquirido o número sorteado da resolução da operação. Além disso, não terá uma confirmação do professor, de qual foi o número sorteado.

Após passar as regras, iniciará o bingo, caso haja alguma operação que os alunos não saibam o resultado estes podem fazer os cálculos no caderno para obter a resposta. Além disso, as operações serão registradas no quadro e poderá ser consultada a qualquer momento. O intuito do jogo é aguçar o conhecimento dos alunos.

4.1.5 Atividade: Bingo Equação nível 1.

Objetivo: Colocar em prática o conhecimento adquirido no desenvolvimento das operações de equações.

Tabela 4.14: Roteiro de atividades 5: Bingo Equação nível 1

Atividade	**Descrição**	**Previsão de duração**
Conversa inicial	Apresentação e orientações.	10 minutos
Bingo Equação nível 1	Cartelas elaboradas - Equações	40 minutos

Desenvolvimento:

Os alunos receberão as cartelas de bingo elaboradas de acordo as equações que constam o resultado do valor de x, da mesma forma, do Bingot.

O BINGOE (Bingo Equação) foi pensado para trabalhar as operações de equações, nele consta uma tabela organizada em três linhas e seis colunas com os resultados das operações distribuídos aleatoriamente.

Necessariamente neste bingo o professor fala a equação e o aluno responde o valor de x que é a solução da equação, e o docente confirma se está certo ou não, por isso se trata de nível 1, assim caso alguém tenha marcado errado ou não tenha marcado, terá a oportunidade de fazer a correção.

Após passar as regras iniciará o bingo, caso tenham alguma equação que os alunos não saibam o resultado estes podem fazer os cálculos no caderno para obter a resposta. O intuito do jogo é aguçar o conhecimento dos alunos.

Na linha seguinte, encontram as operações do Bingo Tabuada e do Bingo Equação das tabelas: 4.12 e 4.15. para aplicar o BINGOT ou BINGOE, na sala de aula.

https://drive.google.com/file/d/1NTBT738KF6pxES3ePZPMRM6JGMLP1bLr/view?usp=share$_l$ink

Tabela 4.15: Equações que serão utilizadas no Bingo.

B	**I**	**N**	**G**	**O**	**E**
$5x = 5$	$x \div 4 = 2$	$x + 2 = 20$	$10x = 300$	$x - 8 = 40$	$x = 8^2$
$2x = 4$	$x \div 3 = 3$	$x + 5 = 25$	$5x = 125$	$x - 9 = 40$	$x = 10 \cdot 7$
$2x = 6$	$x \div 5 = 2$	$x + 1 = 22$	$2x = 70$	$x - 10 = 40$	$x = 9 \cdot 8$
$2x = 8$	$x \div 3 = 4$	$x + 6 = 30$	$2x = 72$	$x - 24 = 30$	$2x = 160$
$3x = 15$	$x \div 7 = 2$	$x + 4 = 29$	$3x = 120$	$x - 6 = 50$	$x = 9^2$
$5x = 30$	$x \div 3 = 5$	$x + 10 = 37$	$2x = 84$	$x - 10 = 50$	$3x = 270$
$5x = 35$	$x \div 4 = 4$	$x + 9 = 37$	$4x = 180$	$x - 33 = 30$	—

A tabela 4.16 contém números das resoluções das equações para ser utilizados no Bingo Equação, a quantidade é de 41 números.

As cartelas de Bingo das tabelas: 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21, são exemplos das cartelas, além disso, o leitor pode acessar no endereço o site na próxima linha, para imprimir as 40 cartelas distintas para aplicar o Bingo Equação, na sala de aula.

https://drive.google.com/file/d/14rygCEkWScS3zmb6DSdg173CPekV-nlI/view?usp=share()link

Tabela 4.16: Números para o Bingo Equação: Quantidades:41

LETRAS	NÚMEROS	QUANTIDADE
B	1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7	7
I	8, 9, 10, 12, 14, 15 e 16	7
N	18, 20, 21, 24, 25, 27 e 28	7
G	30, 32, 35, 36, 40, 42 e 45	7
O	48, 49, 50, 54, 56, 60 e 63	7
E	64, 70, 72, 80, 81 e 90	6

Tabela 4.17: Cartela do BINGOE: 1

LETRA	**B**	**I**	**N**	**G**	**O**	**E**
Linha 1	2	9	20	30	60	90
Linha 2	3	15	25	42	48	80
Linha 3	6	12	27	35	56	70

Tabela 4.18: Cartela do BINGOE: 2

LETRA	**B**	**I**	**N**	**G**	**O**	**E**
Linha 1	2	8	21	45	63	90
Linha 2	3	9	25	32	49	81
Linha 3	7	12	28	35	56	70

Tabela 4.19: Cartela do BINGOE: 3

LETRA	**B**	**I**	**N**	**G**	**O**	**E**
Linha 1	2	8	25	45	60	72
Linha 2	3	10	24	42	56	81
Linha 3	7	15	28	40	50	60

Tabela 4.20: Cartela do BINGOE: 4

LETRA	**B**	**I**	**N**	**G**	**O**	**E**
Linha 1	3	14	28	45	54	90
Linha 2	1	8	21	30	50	72
Linha 3	2	15	27	35	63	80

Tabela 4.21: Cartela do BINGOE: 5

LETRA	B	I	N	G	O	E
Linha 1	6	8	24	40	63	64
Linha 2	7	16	25	42	54	81
Linha 3	5	12	21	30	50	90

4.1.6 Atividade: Bingo Matemático nível 1.

Objetivo: Colocar em prática o conhecimento adquirido entorno das operações básicas.

Tabela 4.22: Roteiro de atividades 6: Bingo Matemático nível 1.

Atividade	Descrição	Previsão de duração
Conversa inicial	Apresentação e orientações.	10 minutos
Bingo Matemático	Cartela de bingo tradicional	40 minutos

Desenvolvimento:

Neste jogo os alunos receberão uma cartela de bingo tradicional, ou seja, a que usamos no bingo comum com pedras de 1 a 75. O intuito dessa atividade é trabalhar às quatro operações em simultâneo, verificar o desenvolvimento da turma e aprimorar ainda mais a aprendizagem. Portanto o nível de dificuldade vai variar entre fácil e difícil dependendo do nível de conhecimento da turma, pois sabemos que cada aluno possui suas individualidades e tempo de aprendizagem.

Primeiramente deve-se passar as regras da atividade, os alunos devem ser orientados a não fazer prática de nenhum equipamento que facilite o resultado, qualquer que seja a dúvida pode ser tirada fazendo o cálculo no caderno. Para essa atividade o docente vai precisar de cartelas de bingo e pedras enumeradas de 1 a 75.

Após serem passadas todas as regras o professor dará início a execução da atividade, Como dito anteriormente, nesse jogo vamos trabalhar com as quatro operações, portanto a metodologia para execução do bingo será um pouco diferente, pois o professor não vai cantar o número que sair na pedra. Será adotado a seguinte estratégia: 3 vezes 3, 20 dividido por 4, 50 menos 9, assim os alunos terão que fazer os cálculos e verificar se algum dos números da cartela é a resposta de alguma operação que foi cantada. Fica a critério do professor intensificar o nível das perguntas, de acordo com o nível de conhecimento dos alunos.

B	I	N	G	O
5	17	40	46	66
1	27	35	54	69
10	29	BINGO MATEMÁTICO	56	72
15	22	33	60	64
13	19	42	48	63

Fonte: Próprio Autor.
Figura 4.2: Cartela para o Bingo Matemático nível 1.

4.1.7 Atividade: Bingo Matemático nível 2.

Objetivo: Colocar em prática o conhecimento adquirido sobre as quatro operações.

Tabela 4.23: Roteiro de atividades 7: Bingo Matemático nível 2.

Atividade	Descrição	Previsão de duração
Conversa inicial	Apresentação e orientações.	5 minutos
Bingo Equação nível 2	Usando cartela tradicional de bingo.	45 minutos

Desenvolvimento:

Neste jogo os alunos receberão uma cartela de bingo tradicional como na Figura 4.2, ou seja, a que usamos no bingo comum com pedras de 1 a 75.

O intuito dessa atividade é trabalhar a resolução de equações e operações em simultâneo, e assim verificar o desenvolvimento da turma para aprimorar ainda mais a aprendizagem. Portanto, o nível de dificuldade vai variar entre fácil e difícil isso vai dependendo do nível de conhecimento da turma, pois sabemos que cada aluno possui suas individualidades e tempo de aprendizagem.

Primeiramente deve-se passar as regras da atividade, os alunos devem ser orientados a não fazer pratica de nenhum equipamento que facilite o resultado, qualquer que seja a dúvida pode ser tirada fazendo o cálculo no caderno. Para essa atividade o docente vai precisar de cartelas de bingo e pedras enumeradas de 1 a 75.

Após serem passadas todas as regras o professor dará início a execução da atividade, como dito anteriormente nesse jogo vamos trabalhar a resolução de equações e operações portanto a metodologia para execução do bingo, neste o professor não vai cantar o número que sair na pedra, será adotada uma estratégia diferente, por exemplo: $3x = 15$, $x + 10 = 21$, $x \div 2 = 20$ e $x + 4 = 40$, assim os alunos terão que resolver a equação e verificar se algum dos números da cartela é valor de X.

Além disso, o professor pode cantar qualquer operação, fica a critério do professor intensificar o nível das perguntas, isso depende do nível de conhecimento do alunos.

4.2 Estratégia vencedora do jogo de NIM.

Variante 1 - Perde o jogo quem retirar o último palito.

Regra do jogo: cada jogador, na sua vez, pode retirar, no mínimo, 1 palito e, no máximo, 3 palitos, ou seja, $1 \leqslant n \leqslant 3$..

(HEFEZ, 2011) sugeriu um experimento com $N = 23$ e $n = 3$, porém para exemplificar melhor, vamos considerar $N = 11$ e $n = 3$ e definiremos algumas siglas ou abreviações para representarem nas Tabelas: 4.24, 4.25, 4.27 e 4.28.

Definimos: J_1: Jogador 1 e J_2: Jogador 2;

EV: Usando a estratégia vencedora e PR: Número de palitos retirados;

$n(P)$: Número de possibilidades que podem ocorrer e $n(P) = n, EV$: números de possibilidades de usar a estratégia vencedora, com $1 \leq n \leq 3$.

Para iniciar o jogo, sugerimos que seja feita uma disputa de par ou ímpar entre os jogadores. Assim, quem ganhar começa o jogo, suponhamos que o J_1 ganhou o par ou ímpar.

Na Tabela 4.24, iniciando a partida o jogador 1, retirando 2 palitos, deixando exatamente 9 palitos para o jogador 2, que por sua vez pode deixar ou 6 ou 7 ou 8 palitos para o jogador 1. Assim o jogador 1, usando a estratégia vencedora, retornando a jogada para o jogador 2, deixando apenas 5 palitos, que só poderá deixar ou 4 ou 3 ou 2 e dessa forma, o jogado 1 usando a estratégia vencedora, deixando exatamente 1 palito para o seu adversário, que retira o último palito perdendo o jogo.

Tabela 4.24: Variante 1 do jogo do NIM.

Jogadas	**1ª Jogada**		**2ª Jogada**		**3ª Jogada**	
Jogador	PR	J_1	PR	J_2	PR	J_1
Inicio	$n(P) = 1$, EV	IIII IIII III	$n(P) = 3$	IIII IIII I	$n(P) = 3$, EV	
Fim			1	IIII IIII	3	IIII I
Fim	2	IIII IIII I	2	IIII III	2	IIII I
Fim			3	IIII II	1	IIII I
Jogadas	**4ª Jogada**		**5ª Jogada**		**6ª Jogada**	
Jogador	PR	J_2	PR	J_1	PR	J_2
Inicio	$n(P) = 3$	IIII I	$n(P) = 3$, EV		$n(P) = 1$	
Fim	1	IIII	3	I	1	Perde
Fim	2	III	2	I		
Fim	3	II	1	I		

Assim, para a 6ª jogada, resta somente 1 palito, então J_2 retira o último palito e perde o jogo, como J_1 usou a estratégia vencedora, venceu o jogo.

Variante 2 - Ganha o jogo quem retirar o último palito

Com o mesmo raciocínio e regra que usamos na variante 1, vamos considerar $N = 11$ e $n = 3$ e usaremos as mesmas siglas anteriores para representar na tabela 4.25.

Tabela 4.25: Variante 2 do jogo do NIM.

Jogadas	**1ª Jogada**		**2ª Jogada**		**3ª Jogada**	
Jogador	PR	J_1	PR	J_2	PR	J_1
Inicio	$n(P) = 1$	IIII IIII III	$n(P) = 3$	IIII IIII	$n(P) = 3$	
Fim			1	IIII III	3	IIII
Fim			2	IIII II	2	IIII
Fim	3	IIII IIII	3	IIII I	1	IIII
Jogadas	**4ªJogada**		**5ª Jogada**			
Jogador	PR	J_2	PR	J_1		
Inicio	$n(P) = 3$	IIII	$n(P) = 3$			
Fim	1	III	3	Ganha		
Fim	2	II	2	Ganha		
Fim	3	I	1	Ganha		

Usando o mesmo critério da disputa do par ou ímpar entre os jogadores para iniciar o jogo, novamente o J_1 o inicia o jogo. Lembrando agora, nesse jogo, quem retirá o último palito ganha. Vamos descrever a nova estratégia para que o primeiro jogador ganhe sempre.

Na tabela 4.25, jogador 1 começa retirando 3 palitos. O jogador 2, ao retirar de 1 a 3 palitos deixará o jogador 1 na situação confortável de retirar o que sobra de 4 palitos. Isto se repete, fazendo sempre com que, depois do jogador 2, ao realizar a sua jogada, retirando de 1 a 3 palitos que possam ser retirados de uma só vez pelo jogador 1, levando-o a vencer. Além disso, a divisão euclidiana é fundamental para a estratégia vencedora, note que o jogador 1, sempre deixa um número de palitos múltiplo de 4 para o jogador 2.

Variante 3 - Ganha o jogo quem retirar o último palito

Dispõe-se numa tabela 4.27, palitos separados em três grupos, de 3, 4 e 5 palitos, respectivamente (pode-se generalizar o jogo com um número arbitrário de grupos e com número arbitrário de palitos em cada grupo).

Definimos a soma NIM, na base 2, igual a 0, se a quantidade de "1" nas classe correspondente for par, e igual a 1 se essa quantidade de "1" for ímpar. Se o jogador estiver com a chave 0000 é uma estratégia vencedora. Assim o outro jogador de qualquer forma que retirar os palitos não estabelece uma estratégia vencedora.

Além disso, o jogador que iniciar a partida usando a estratégia vencedora e seguindo certas regras, sempre vencerá.

A técnica de divisões sucessivas é utilizada para conversão de números natural do sistema decimal para o sistema binário. Esta técnica consiste em dividir o número original pela base 2. O resto da divisão será um dígito e o resultado da divisão é novamente dividido por 2. Esta última etapa se repete até que o resultado da divisão seja zero. Inicialmente vamos representar os números 1, 2, 3, 4 e 5 da base 10 e converter para a base 2, foram feitas divisões sucessivas por 2, conforme apresenta na tabela 4.26, ao somar dois ou mais desses na Soma NIM, se a soma for 0000 é posição segura.

Tabela 4.26: Números na base 10 e na base 2.

Números de palitos	**Base 10**	**Base 2**
1 - I	$1 = 1 \cdot 2^0$	0001
2 - II	$2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	0010
3 - III	$3 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	0011
4 - IIII	$4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	0100
5 - IIIII	$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	0101

Tabela 4.27: Caso 1: Variante 3 do jogo do NIM.

jogada			**1ª jogada**		**2ª jogada**	
Jogador	Início	Base 2	J_1, EV	Base 2	J_2	Base 2
Grupo 1	IIIII	0101	IIIII	0101	IIIII	0101
Grupo 2	IIII	0100	IIII	0100	IIII	0100
Grupo 3	III	0011	I	0001		
Soma		0010		0000		0001
jogada	**3ª jogada**		**4ª jogada**		**5ª jogada**	
jogador	J_1, EV	Base 2	J_2	Base 2	J_1	Base 2
Grupo 1	IIII	0100	IIII	0100	III	0011
Grupo 2	IIII	0100	III	0011	III	0011
Grupo 3						
Soma		0000		0111		0000
jogada	**6ªjogada**		**7ªjogada**		**8ª jogada**	
jogador	J_2	Base 2	J_1, EV	Base 2	J_2	Base 2
Grupo 1	III	0011	II	0010	II	0010
Grupo 2	II	0010	II	0010	I	0001
Grupo 3						
Soma		0001		0000		0011
jogada	**9ª jogada**		**10ª jogada**		**11ª jogada**	
jogador	J_1, EV	Base 2	J_2	Base 2	J_1, EV	Base 2
Grupo 1	I	0001	I	0001	Vazia	
Grupo 2	I	0001			Vazia	
Grupo 3						
Soma		0000		0001	Ganha	0000

A cada jogada, escreve-se o número de palitos de cada grupo na base 2, colocando-os um em cada linha, de modo que os algarismos das unidades se correspondam. Como mostra a tabela 4.27, no início da partida. Somando os três números na soma NIM, obtemos o número 0010, que chamaremos, a cada etapa, de chave do jogo. O primeiro jogador poderá, então, com uma jogada, tornar todos os algarismos da chave 0000, retirando dois palitos do grupo 3.

Agora, qualquer jogada que o segundo jogador efetue transformará numa chave com, pelo menos, um algarismo igual a 1, o que, mediante uma jogada conveniente, poderá ser recolocado na situação de ter todos os algarismos 0000. Uma situação em que todos os algarismos da chave são 0000 será chamada de posição segura, enquanto que, quando pelo menos um dos algarismos da chave é 1, será uma posição insegura. Pode-se mostrar que, de uma posição segura, qualquer que seja a jogada, só se pode chegar a uma posição insegura. Mostra-se também que, de uma posição insegura, pode-se, com uma jogada conveniente, sempre retornar a uma posição segura. Como 0000 é uma posição segura, ganhará o jogo quem sempre se mantiver em posições seguras.

Desta forma, em cada jogada mostraremos na tabela 4.27 se a posição é segura ou insegura, de acordo a Soma NIM. Observando a tabela 4.27 na 11ª jogada restando apana um palito no 1.º grupo, então o J_1 retira esse último palito e vence o jogo.

É importante notar que na configuração dos grupos: (Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3), quando fica (4, 4,vazia), pode reduzindo para (3, 3, vazia), (2, 2, vazia) e (1, 1, vazia) que na Soma NIM resulta em 0000 que é uma posição segura. A palavra “vazia” significa que não tem nenhum palito no grupo ou na Tabela aparece em branco.

Tabela 4.28: Caso 2: Variante 3 do jogo do NIM.

jogada			**1ª jogada**		**2ª jogada**	
Jogador	Início	Base 2	J_1, EV	Base 2	J_2	Base 2
Grupo 1	IIIII	0101	IIIII	0101	II	0010
Grupo 2	IIII	0100	IIII	0100	IIII	0100
Grupo 3	III	0011	I	0001	I	0001
Soma		0010		0000		0111
jogada	**3ª jogada**		**4ª jogada**		**5ª jogada**	
jogador	J_1, EV	Base 2	J_2	Base 2	J_1	Base 2
Grupo 1	II	0010	II	0010		0000
Grupo 2	III	0011	I	0001	I	0001
Grupo 3	I	0001	I	0001	I	0001
Soma		0000		0010		0000
jogada	**6ª jogada**		**7ª jogada**			
jogador	J_2	Base 2	J_1, EV	Base 2		
Grupo 1		0000	vazia			
Grupo 2	I	0001	vazia			
Grupo 3		0000	vazia			
Soma		0001	Ganha	0000		

De acordo com a tabela 4.28 na 7ª jogada restando apanas um palito no Grupo 1, então o J_1 retira esse último palito e vence o jogo.

É importante notar que na configuração dos grupos: (Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3), quando fica (3, 2, 1), pode ser reduzindo para (2, 2, vazia) e (1, 1, vazia) que na Soma NIM resulta em 0000 que é uma posição segura. Além disso, as outras possibilidades de retiradas do J_2, sempre retorna para os casos 1 ou o caso 2 ou são óbvias para o J_1 vencer.

A diferença entre as variantes 3 e 4, e somente em relação da retirada do último palito.

Na variante 3, quem retirá o ganha ultimo palito, e na variante 4, perde quem retirá o último palito e o restante das regras continua as mesmas.

Variante 4 - Perde o jogo quem retirar o último palito.

Para essa variante, na atividade 4.3.4, não temos uma estratégia vencedora, tendo os palitos separados em três grupos, de 3, 5 e 7 palitos, respectivamente (não podemos generalizar o jogo com um número arbitrário de grupos e com número arbitrário de palitos em cada grupo).

É possível usar a soma NIM até certas configurações: (1, 2, 3) e (2,2, vazia), como na estratégia vencedora da variante 3. Porém, a partir dessas configurações, para cada retirada, deve pensar logicamente, realizando a jogada para deixar o último palito para o adversário.

Estratégia vencedora da Variante 5

Existem duas estratégias vencedoras nessa variante, o jogador que iniciar a partida deve tirar palitos nos grupos de mesma paridade e seguindo certas regras, sempre vencerá.

Regras do jogo: **Variante 5**

Regra 1: cada jogador, na sua vez, deve retirar uma quantidade ímpar de palitos, em apenas dois grupos. Os palitos dos outros grupos devem ser repetidos na linha correspondente, e do grupo da escolha, deve deixar os palitos restantes, se ainda houver, sendo que é permitido retirar quantos palitos em uma quantidade ímpar em cada grupo que desejar, mas somente em dois grupos que foram escolhidos.

Regra 2: ganha o jogador que retirar o último palito.

Regra 3: caso restar somente um dos grupos, então é permitido que o jogador retire os palitos em apenas um grupo, sendo uma quantidade ímpar desse grupo restante.

Primeira estratégia vencedora, na Tabela 4.29, o jogador 1 começa o jogo, retirando todos os palitos dos grupos 2 e 4, que contém números ímpares de palitos.

Na 2ª jogada, o jogador 2 está em desvantagem, retirando um palito dos grupos 1 e 3, deixando um número ímpar de palitos em cada grupo. Assim, na 3ª o jogador 1 retira esses palitos de uma só vez e ganha o jogo.

Tabela 4.29: Variante 5 - 1ª Estratégia vencedora

Jogadas	Jogador	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Início	Nome	IIIIII	IIIII	IIII	III
1ªJogada	J_1	IIIIII		IIII	
2ªJogada	J_2	IIIII		III	
3ªJogada	J_1	Ganha		Ganha	

A segunda estratégia vencedora, na Tabela 4.30, o jogador 1 começa o jogo, retirando palitos dos grupos 1 e 3, de forma que fique apenas um palito em cada desses grupo, ficando números ímpares de palitos em todos os grupos.

Na 2ª jogada, o jogador 2 está em desvantagem, retirando um palito dos grupos 2 e 3.

Assim, na 3ª jogada, o jogador 1 retira os palitos dos grupos 1 e 4, deixando só o grupo 2 com 4 palitos, na 4ª jogada, o jogador 2, retira 1 palito deixando 3 palitos para o jogador 1, que por sua vez, na 5ª jogada, retira esses palitos de uma só vez ganhando o jogo.

Tabela 4.30: Variante 5 - 2ª Estratégia vencedora

Jogadas	Jogador	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Início	Nome	IIIIII	IIIII	IIII	III
1ªJogada	J_1	I	IIIII	I	III
2ªJogada	J_2	I	IIII		III
3ªJogada	J_1		IIII		
4ªJogada	J_2		III		
5ªJogada	J_1		Ganha		

Estratégia vencedora da Variante 6

As regras 1 e 3, são as mesmas da variante 5, e a regra 2: perde o jogo quem retirar o último palito.

Vamos descrever uma das estratégias vencedoras, o jogador 1, que iniciar a partida está em desvantagem, sendo que qualquer jogada que executar o jogador 2 pode retornar para estratégia vencedora, seguindo certas regras, o jogador 2 sempre vencerá.

Na Tabela 4.31, o jogador 1 começa o jogo retirando todos os palitos do grupo 3, e no grupo 4, retirando três palitos. Nos grupos 1 e 2, permanece os mesmo palitos.

Na 2ª jogada, o jogador 2 está em vantagem, retirando um palito do grupo 4 e cinco palitos do grupo 2, no grupo 1 repete os palitos.

Na 3ª jogada, o jogador 1 retira um palito nos grupos 1 e 2.

Na 4ª jogada, o jogador 2 está em vantagem, retirando cinco palitos no grupo 1, deixando um palito restante para o jogador 1 retirar e perder o jogo, na 5ª jogada.

Tabela 4.31: Variante 6 - Estratégia vencedora

Jogadas	Jogador	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Início	Nome	IIIIIII	IIIIII	IIIII	IIII
1ªJogada	J_1	IIIIIII	IIIIII		I
2ªJogada	J_2	IIIIIII	I		
3ªJogada	J_1	IIIIII			
4ªJogada	J_2	I			
5ªJogada	J_1	Perde			

É importante notar que existem mais de três estratégias vencedoras nessa variante, o jogador que iniciar a partida está em desvantagem, o jogador 2 seguindo certas regras, sempre vencerá.

4.3 Atividades do jogo do NIM

Nestas atividades vamos trabalhar a sequência didática elaborada de acordo com o material pedagógico, JOGO DO NIM, este jogo pode ser aplicado de diversas maneiras em sala de aula e traz vários benefícios em termos de ensino aprendizagem como, por exemplo: concentração, raciocínio lógico, trabalha o critério de divisibilidade e os múltiplos, dentre outros.

A aplicação se dá de maneira fácil e acessível a qualquer ambiente e o uso desses materiais de acordo a criatividade do professor.

Como já foi dito antes, as atividades propostas nessa subseção foram elaboradas para alunos do ensino fundamental, mas nada impede de serem aplicadas em qualquer turma da educação básica, levando em conta a simplicidade de sua prática.

Para algumas das sugestões de jogo da sequência será traçada a estratégia vencedora que é uma proposta de trabalho.

4.3.1 Atividade: Torneio jogo do NIM - Variante 1.

Objetivo:

Trabalhar a adição, multiplicação, divisão Euclidiana, desenvolver a concentração e raciocínio lógico.

Tabela 4.32: Roteiro de atividades 8: Variante 1 - jogo do NIM - Quem retirar o último palito perde.

Atividade	**Descrição**	**Previsão de duração**
Conversa inicial	1.º momento – Atividade e orientações.	10 minutos
Variante 1.	2.º momento – Torneio jogo do NIM.	40 minutos

Regras do jogo: **Variante 1**

Regra 1: cada jogador, na sua vez pode retirar no 1 palito, no mínimo e no máximo 3 palitos, ou seja, $1 \leqslant n \leqslant 3$.

Regra 2: perde o jogador que retirar o último palito.

Observação: sendo que n é o número de palitos que o jogador pode retirar em cada jogada e N é o total de palitos do jogo. Considere $N = 17$ palitos para esse jogo.

Desenvolvimento

Neste jogo os alunos formarão duplas entre si para fazer a primeira rodada do torneio, em cima de uma mesa ou até mesmo no caderno com desenhos dos palitos, serão dispostos palitos enfileirados. A quantidade de palito $N = 17$, como mostra na figura 4.3. Nessa variante 1, perde o jogo do NIM quem pega o último objeto, portanto é fundamental desenvolver boas técnicas e se concentrar em cada movimento realizado, não só no seu próprio movimento. Assim o aluno desenvolverá uma boa estratégia.

Os vencedores da primeira rodada farão novamente duplas para a próxima e assim por diante, de acordo a figura 4.4, até que tenha o ganhador de cada grupo que disputará a final do torneio, e daí sairá o campeão.

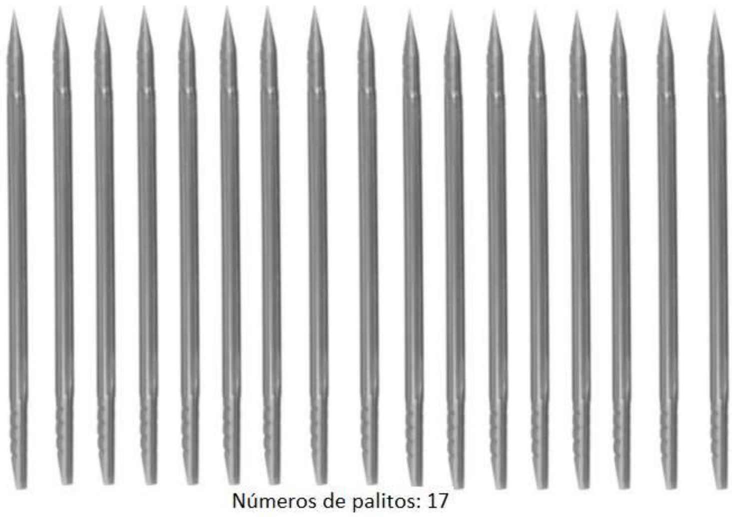
A partir da (2.º) rodada é interessante que essas disputas sejam feitas de uma a uma, em um local visível para toda a turma.

Além disso, o leitor pode acessar os endereço dos sites nas próximas linhas, para imprimir as folhas necessárias para o torneio.

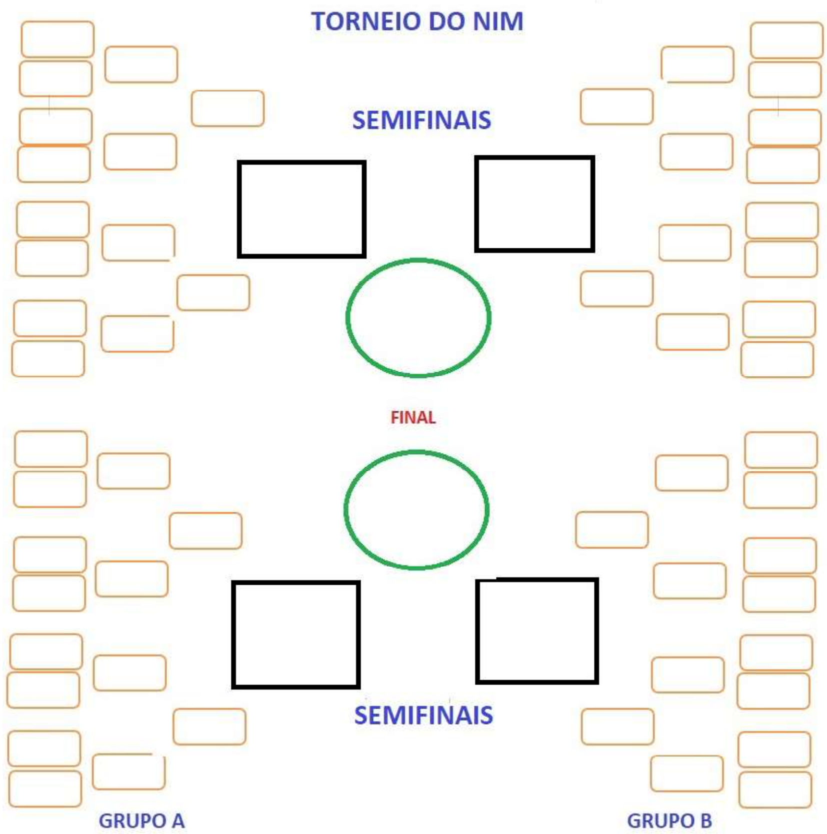
https://drive.google.com/file/d/1PXmfA5-u0EH0AcTLgxhCv-dmWgXsanZr/view?usp=share()link

https://drive.google.com/file/d/1iL0eQxHRdHxQQ96s8kG6zuQyNS97RUkH/view?usp=share()link

Palitos e Tabela para disputa do jogo do NIM.



Fonte: Próprio Autor.
Figura 4.3: Palitos - Variante 1



Fonte: Próprio Autor.
Figura 4.4: Torneio 1: jogo do NIM.

4.3.2 Atividade: Torneio jogo do NIM - Variante 2.

Objetivo: Trabalhar as operações básicas, desenvolver a concentração e raciocínio lógico.

Tabela 4.33: Roteiro de atividades 9: Variante 2 - jogo do NIM - Ganha quem retirar o último palito.

Atividade	Descrição	Previsão de duração
Conversa inicial	1.º momento – Atividade e orientações.	5 minutos
Variante 2	2.º momento – Torneio-2: jogo do NIM .	45 minutos

Regras do jogo: **Variante 2**

Regra 1: cada jogador, na sua vez, possa retirar no mínimo, 1 palito e no máximo 3 palitos, ou seja, $1 \leqslant n \leqslant 3$.

Regra 2: Ganha o jogador que retirar o último palito.

Desenvolvimento: Nessa atividade os alunos formarão duplas da mesma forma e com o mesmo procedimento da atividade anterior. Também utilizarão as mesmas figuras: a figura 4.3 e a figura 4.4. Nessa variante 2, ganha o jogo do NIM quem retirar o último palito. As outras regras e procedimento ficam inalteradas e desenvolverão da mesma forma que a atividade anterior. Além disso, o leitor pode acessar o endereço do site na próxima linha, para imprimir as folhas necessárias para o torneio.

- https://drive.google.com/file/d/1koQsKv1NnPXD1GvJtbB36aJ8FZd3Q6JY/view?usp=share()link

4.3.3 Atividade: Torneio do jogo do NIM - Variante 3.

Objetivo: Trabalhar as operações básicas, sistema de numeração decimal e binária, desenvolver a concentração e raciocínio lógico.

Tabela 4.34: Roteiro de atividades 10: Torneio jogo do NIM - Quem retirar o último palito ganha.

Atividade	Descrição	Previsão de duração
Conversa inicial	1.º momento – Atividade e orientações.	5 minutos
Variante 3	2.º momento – Torneio jogo do NIM.	45 minutos

Desenvolvimento: Neste jogo os alunos também formarão duplas entre eles para fazer a primeira rodada do torneio, mas os palitos formaram pequenos grupos com três colunas, sendo $N = 12$ o número total de palitos e no grupo 1 com $n_1 = 5$, no grupo 2 com $n_2 = 4$ e grupo 3 com $n_3 = 3$.

Na tabela 4.35 os alunos poderão retirar a quantidade de palitos que quiserem em cada jogada, mas somente em uma coluna. Além disso, terão que representar os palitos que restarem na linha correspondente a sua jogada. Por exemplo: se for a 1.ª jogada e escolher o grupo 2, assim ele deve repetir os palitos dos grupo 1, e do grupo 3 e deixando os palitos restantes do grupo 2, se ainda restar palitos,o jogador ponderá retirar quantos palitos quiser, mas somente nesse grupo 2 que foi escolhido.

As regras do jogo continuam as mesmas, ganha quem retirar o último objeto, portanto é fundamental desenvolver boas estratégias. Por exemplo: Na Soma NIM, usa-se o sistema de numeração decimal e binária ou alguma estratégia prática deste jogo.

Os vencedores da primeira rodada farão novamente duplas para a próxima jogada e assim por diante até que restem os dois melhores e daí sairá o campeão. Além disso, o leitor pode acessar o endereço no site na próxima linha, para imprimir as folhas necessárias para o torneio.

ttps://drive.google.com/file/d/1kmI2vyO5AUimr6qSOiFRg4LjfOMwY69m/view?usp=share()link

Tabela 4.35: Variante 3 - Jogo do NIM.

Jogadas	Jogador	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Início	Nome	IIIII	IIII	III
1ªJogada	J_1			
2ªJogada	J_2			
3ªJogada	J_1			
4ªJogada	J_2			
5ªJogada	J_1			
6ªJogada	J_2			
7ªJogada	J_1			
8ªJogada	J_2			

4.3.4 Atividade: Torneio do jogo do NIM - Variante 4.

Objetivo: Trabalhar critérios de divisão, desenvolver a concentração e raciocínio lógico.

Tabela 4.36: Roteiro de atividades 11: Torneio jogo do NIM - Quem retirar o último palito perde.

Atividade	**Descrição**	**Previsão de duração**
Conversa inicial	1.º momento – Atividade e orientações.	5 minutos
Variante 4	2.º momento – Torneio jogo do NIM.	45 minutos

Regras do jogo: **Variante 4**

Regra 1: cada jogador, na sua vez, pode retirar qualquer quantidade de palitos de apenas um grupo. Os palitos dos outros grupos devem ser repetidos, e do grupo da escolha, deve deixar os palitos restantes, se ainda houver, sendo que ponderá retirar quantos palitos quiser, mas somente no grupo que foi escolhido.

Regra 2: perde o jogador que retirar o último palito.

Desenvolvimento: Neste jogo os alunos também formarão duplas entre eles para fazer a primeira rodada do torneio. Com os palitos formaremos pequenos grupos com três colunas, sendo $N = 15$ o número total de palitos e no grupo 1 com $n_1 = 7$, no grupo 2 com $n_2 = 5$ e grupo 3 com $n_3 = 3$.

Na tabela 4.37 os alunos devem respeitar as regras 1 e regra 2, portanto nessa variante, a estratégia da Soma NIM não é totalmente eficaz. Os vencedores da primeira rodada farão novamente duplas para a próxima jogada e assim por diante até que restem os dois melhores e daí sairá o campeão. Usaremos a figura 4.4 e a tabela 4.37 para a realização do torneio. Além disso, o leitor pode acessar o endereço do site na próxima linha, para imprimir as folhas necessárias para o torneio. https://drive.google.com/file/d/1Kmw5FZXF70WaO39uWJkvKuzcMNA5whZ5

Tabela 4.37: Variante 4 - Jogo do NIM.

Jogadas	Jogador	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Início	Nome	IIIIIII	IIIII	III
1ªJogada	J_1			
2ªJogada	J_2			
3ªJogada	J_1			
4ªJogada	J_2			
5ªJogada	J_1			
6ªJogada	J_2			
7ªJogada	J_1			
8ªJogada	J_2			

4.3.5 Atividade: Torneio do jogo do NIM - Variante 5.

Objetivo: Trabalhar as operações básicas, desenvolver a concentração e raciocínio lógico.

Tabela 4.38: Roteiro de atividades 12: Torneio jogo do NIM - ganha quem retirar o último palito

Atividade	**Descrição**	**Previsão de duração**
Conversa inicial	1.º momento – Atividade e orientações.	5 minutos
Variante 5	2.º momento – Torneio jogo do NIM.	45 minutos

Regras do jogo: **Variante 5**

Regra 1: cada jogador, na sua vez, pode retirar uma quantidade ímpar de palitos, em apenas dois grupos. Os palitos dos outros grupos devem ser repetidos na linha correspondente, e do grupo da escolha, deve deixar os palitos restantes, se ainda houver, sendo que é permitido retirar quantos palitos em uma quantidade ímpar que desejar, mas somente em dois grupos que foram escolhidos.

Regra 2: ganha o jogador que retirar o último palito.

Regra 3: caso restar somente um dos grupos, então é permitido que o jogador retire os palitos em apenas um grupo, sendo uma quantidade ímpar desse grupo restante.

Desenvolvimento: Como nas atividades anteriores, os alunos também formaram duplas entre eles para fazer a primeira rodada do torneio. Além disso, com uma quantidade N de palitos formaremos pequenos grupos com quatro colunas, sendo $N = 18$ o número total de palitos e no grupo 1 com $n_1 = 6$, no grupo 2 com $n_2 = 5$, grupo 3 com $n_3 = 4$ e grupo 4 com $n_3 = 3$. Na tabela 4.39 os alunos devem respeitar as regras 1, regra 2 e regra 3, portanto na variante 5, a estratégia da Soma NIM não é totalmente eficaz. A organização do torneio será da mesma forma das atividades anteriores. Usaremos a figura 4.4 e a tabela 4.39 para a realização do torneio. Além disso, o leitor pode acessar o endereço do site na próxima linha, para imprimir as folhas necessárias para o torneio.

https://drive.google.com/file/d/1xueF09vi3G0hpRLT8JfMqGKxcNojsVOy/view?usp=share$()$link

Tabela 4.39: Variante 5 - Jogo do NIM.

Jogadas	Jogador	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Início	Nome	IIIIII	IIIII	IIII	III
1ªJogada	J_1				
2ªJogada	J_2				
3ªJogada	J_1				
4ªJogada	J_2				
5ªJogada	J_1				
6ªJogada	J_2				
7ªJogada	J_1				
8ªJogada	J_2				

4.3.6 Atividade: Torneio do jogo do NIM - Variante 6.

Objetivo:

Trabalhar as operações básicas, desenvolver a concentração e raciocínio lógico.

Tabela 4.40: Roteiro de atividades 13: Torneio jogo do NIM - perde o jogo quem retirar o último palito

Atividade	**Descrição**	**Previsão de duração**
Conversa inicial	1.º momento – Atividade e orientações.	5 minutos
Variante 6	2.º momento – Torneio jogo do NIM.	45 minutos

Regra 1: cada jogador, na sua vez, pode retirar uma quantidade ímpar de palitos, em apenas um grupo, e os palitos dos outros grupos deve repeti-los, e do grupo da escolha, deve desenhar os palitos restantes, se ainda houver, sendo na linha correspondente, sendo que é permitido retirar quantos palitos em uma quantidade ímpar que desejar, mas somente em um grupo que foi escolhido.

Regra 2: perde o jogador que retirar o último palito.

Desenvolvimento: Como nas atividades anteriores, os alunos também formaram duplas entre eles para fazer a primeira rodada do torneio. Assim, com uma quantidade N de palitos formaremos pequenos grupos com quatro colunas, sendo $N = 22$ o número total de palitos e no grupo 1 com $n_1 = 7$, no grupo 2 com $n_2 = 6$, grupo 3 com $n_3 = 5$ e grupo 4 com $n_3 = 4$.

Na tabela 4.41 os alunos devem respeitar as regras 1 e 2, É importante ressaltar que nessa variante 6, a estratégia da Soma NIM não é totalmente eficaz. Na organização do torneio será da mesma forma das atividades anteriores. Usaremos a figura 4.4 e a tabela 4.41 para a realização do torneio. Além disso, o leitor pode acessar o endereço no site na próxima linha, para imprimir as folhas necessárias para o torneio.

- https://drive.google.com/file/d/1u8mPCadQfvHZIhDZZS4GBV9Cbl8c9ybz/view?usp=share()link

Tabela 4.41: Variante 6 - Jogo do NIM.

Jogadas	Jogador	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Início	Nome	IIIIIII	IIIIII	IIIII	IIII
1ªJogada	J_1				
2ªJogada	J_2				
3ªJogada	J_1				
4ªJogada	J_2				
5ªJogada	J_1				
6ªJogada	J_2				
7ªJogada	J_1				
8ªJogada	J_2				

4.3.7 Atividade: Jogo do NIM no Aplicativo - Variante 3 via Geogebra.

Tabela 4.42: Roteiro de atividades 14: Variante 3 via Geogebra- Quem retirar o último palito ganha.

Atividade	Descrição	Previsão de duração
Conversa inicial	1.º momento – Atividade e orientações.	15 minutos
NIM no celular	https://www.geogebra.org/m/zapye48v	35 minutos

Objetivo: Trabalhar divisão Euclidiana, sistema de numeração decimal e binária, desenvolver a concentração e raciocínio lógico.

O Geogebra é uma plataforma dinâmica de matemática que trabalha conceitos de geometria e álgebra. Neste aplicativo também é possível desenvolver jogos que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem. O Geogebra está disponíveis para o público. Assim, quem desejar, pode criar seus próprios jogos.

Desenvolvimento

Para esta sequência de atividades vamos utilizar uma das variações do jogo do NIM, desenvolvido no Geogebra, este jogo está disponível na plataforma e é de fácil acesso ao público.

O software GeoGebra foi criado para ser utilizado em sala de aula. Seu início ocorreu em 2001 por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg. Atualmente, este é usado em 190 países e traduzido para 155 idiomas. O GeoGebra é um software gratuito e pode ser encontrado facilmente nos sites de busca.

Devido à sua gratuidade, este tem sido aplicado em novas estratégias de ensino e aprendizagem relacionados aos conteúdos Matemáticos: geometria, álgebra, estatística e outros. Dessa maneira, permite a exploração e investigação para construir o conhecimento Matemático.

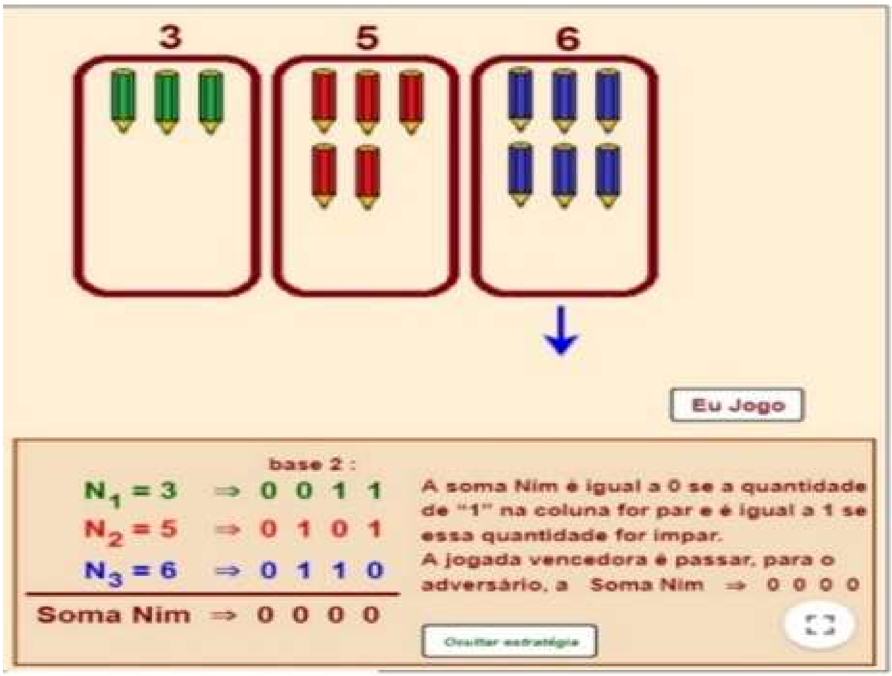
Nesta aula o professor primeiramente vai fazer uma breve apresentação para os alunos no datashow, mostrando como funciona o jogo e apresentando a estratégia vencedora. Em seguida dará início a execução da aula, é importante que o docente faça uma pequena demonstração de como se joga.

Na figura 4.5 na primeira parte estão as regras do jogo e na segunda parte está a estratégia vencedora do jogo.

Além disso, o aluno pode acessar o jogo no celular ou computador.

O autor do jogo, (MANETTA, 2019).

Site: https://www.geogebra.org/m/zapye48v.



Fonte: Marco A. Manetta.
Figura 4.5: jogo do NIM - 3.

5 CONCLUSÃO.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para o enriquecimento do ensino aprendizagem e facilitar a prática adotada em sala de aula pelos professores, pois sabemos que estes encontram muitas dificuldades no dia a dia para ajudar os alunos compreenderem o que está sendo proposto e, ao mesmo tempo, terem prazer pelo que está sendo aprendido, ou seja, que de fato a aprendizagem tenha significado na vida dos alunos.

Considerando o referencial teórico abordado neste trabalho, é possível afirmar que o jogo é um instrumento lúdico que pode ser usado como ferramenta pedagógico em sala de aula. Ele oferece ao professor possibilidades para trabalhar conceitos matemáticos de forma prática e prazerosa sem perder o foco no que se pretende ensinar.

No momento que optamos por uma prática pedagógica centrada no educando, desistindo, assim da concepção do ensino pautado na transmissão de informações, certamente estaremos criando oportunidades para que os alunos possam desenvolver suas capacidades de criar, de argumentar, de pensar, de propor, preparando-se dessa forma, para o mundo, para o trabalho e para a vida.

É valido lembrar que toda atividade desenvolvida no ambiente escolar precisa antes ser planejada e serem avaliadas todas as possibilidades para ela ser um sucesso, uma aula bem preparada tem grandes chances de alcançar o objetivo proposto ou ir além do planejado, como foi o caso dos conteúdos contidos aqui.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, P. N. d. Educação lúdica. são paulo: Loyola, 1994. almeida, anne. **Ludicidade como instrumento pedagógico**, v. 12, 2009.

BANHEZA, K. V. G. et al. Ensinando matemática através da educação não formal por meio jogos matemáticos. **Extensão em Foco**, n. 19, 2019.

BRASIL, M. secretaria de educação fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**, p. 29, 1998.

BRASIL, P. C. N. matemática. **Secretaria da educação fundamental. Brasília: MEC/sef**, 1998.

BRAZ, L. H. C. et al. O jogo e o ensino de matemática: uma experiência de revisão de conceitos aritméticos básicos com alunos do 1º ano do ensino médio. **ForScience**, v. 6, n. 1, 2018.

BRITO, M. d. Contribuições da psicologia educacional à educação matemática. **Psicologia da educação matemática. Florianópolis: Insular**, p. 49–67, 2001.

BROTTO, F. Jogos cooperativos: o jogo e o esporte como um exercício de convivência. são paulo: Palas athena. 2013.

CAMERON, J.; PIERCE, W. D. Reinforcement, reward, and intrinsic motivation: A meta-analysis. **Review of Educational research**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 64, n. 3, p. 363–423, 1994.

CHIAVENATO, I. **Administração–Teoria, Processo e Prática, São Paulo, Ed**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1985.

Scrub tifo no japão: epidemiologia e características clínicas dos casos relatados em 1998. **The American Journal of Tropical Medicine and Hygiene**, v. 67.

DAVID, J. C. Matemática e jogos de bingo: uma aplicação prática da probabilidade e teoria da contagem. **Mestrado profissional em Projeto de Desenvolvimento Educacional. Londrina, PR. Universidade Estadual de Londrina, UEL**, p. 107–112, 2008.

DECI, E. L.; RYAN, R. M. The general causality orientations scale: Self-determination in personality. **Journal of research in personality**, Elsevier, v. 19, n. 2, p. 109–134, 1985.

FREITAS, I. d. O. et al. O jogo do nim e o desempenho escolar em matemática. Universidade Federal do Pampa, 2019.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. A conquista da matemática. Ftd, 2002.

GRANDO, R. C. et al. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. **Campinas SP**, 2000.

GRANDO, R. C. et al. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. **Campinas SP**, 2000.

GUIMARÃES, S. E. Motivação intrínseca, extrínseca e o uso de recompensas em sala de aula. **A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea**, v. 3, p. 37–57, 2001.

HEFEZ, A. **Números Naturais**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2011.

HSIAO, H.-C. A brief review of digital games and learning. In: IEEE. **2007 First IEEE International Workshop on Digital Game and Intelligent Toy Enhanced Learning (DIGITEL'07)**. [S.l.], 2007. p. 124–129.

HUIZINGA, J. **Homo ludens: o jogo como elemento da cultura**. [S.l.]: Editora da Universidade de S. Paulo, Editora Perspectiva, 1971.

IFRAH, G. **Os números**. [S.l.: s.n.], 1989.

KISHIMOTO, T. M. Froebel e a concepção de jogo infantil. **Rev. Fac. Educ**, p. 145–167, 1996.

KOHN, A. The risks of rewards. eric digest. ERIC, 1994.

LIBÂNEO, J. C.; OLIVEIRA, J. F. d.; TOSCHI, M. S. As áreas de atuação da organização e da gestão escolar para melhor aprendizagem dos alunos. ______. **Educação escolar: políticas, estrutura e organização. São Paulo: Cortez**, 2005.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. [S.l.]: SBM, 1997.

MANETTA, M. A. Jogo do nim 3. 2019.

MIORIM, M. Â. M. A escrita de livros didáticos de matemática na década de 1920: o caso de saverio cristofaro. **Zetetike**, v. 17, n. 2, 2009.

MOREIRA, M. A.; BUCHWEITZ, B. Masini, efs aprendizagem significativa: a teoria de david ausubel. **São Paulo: Moraes**, 1982.

MOREY, G. L. de Oliveira Lopes e B. B. **Tratado Aritmético de Al-khwarizmi**. Fortaleza, CE: Seminário Nacional de História da Matemática,8, Anais., 2019.

MOURA, P. C.; VIAMONTE, A. J. Jogos matemáticos como recurso didáctico. **Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa**, 2006.

NASCIMENTO, H. A. d. A utilização do jogo do nim para estimular o cálculo mental. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.

PIRES, M. N. M. **Fundamentos teóricos do pensamento matemático**. [S.l.]: IESDE BRASIL SA, 2004.

RAMOS, H. Â. d. C.; CUMAN, R. K. N. Fatores de risco para prematuridade: pesquisa documental. **Escola Anna Nery**, SciELO Brasil, v. 13, p. 297–304, 2009.

RODRIGUES, H. O.; SILVA, J. R. d. O jogo do nim e os conceitos de mdc e mmc. **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, v. 8, 2004.

SANTOS, C. L.; VALE, F. S. do. Jogos eletrônicos na educação: Um estudo da proposta dos jogos estratégicos. **Monografia) Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão-SE**, 2006.

SILVA, A. C. R. da; LACERDA, P. L. de; CLEOPHAS, M. das G. Jogar e compreender a química: ressignificando um jogo tradicional em didático. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Universidade Federal do Pará, v. 13, n. 28, p. 132–150, 2017.

SILVA, J.; SANTANA, A. Jogos didáticos no ensino de matemática: um mapeamento dos trabalhos publicados nos anais do iv conedu. In: **Congresso Nacional de Educação, V**. [S.l.: s.n.], 2018.

SILVA, M. E. N. L. d. O uso de práticas de pesquisa de campo no ensino de ciências no ensino público. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014.

SILVEIRA, R. S.; BARONE, D. A. C. Jogos educativos computadorizados utilizando a abordagem de algoritmos genéticos. **Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Informática. Curso de Pós-Graduação em Ciências da Computação**, 1998.

SKINNER, B. F. Operant conditioning. **The encyclopedia of education**, Macmillan and Free Press New York, v. 7, p. 29–33, 1971.

SKINNER, R. I.; KELLY, J. M.; HEINE, A. Hysteretic dampers for earthquake-resistant structures. **Earthquake engineering & structural dynamics**, Wiley Online Library, v. 3, n. 3, p. 287–296, 1974.

SOLER, R. **Jogos cooperativos**. [S.l.]: Sprint, 2003.

TAVARES, J. N.; GERALDO, Â. Logarítmos. **Revista de Ciência Elementar**, Casa das Ciências, v. 5, n. 1, 2017.

TEIXEIRA, F. M.; SOBRAL, A. C. M. B. Como novos conhecimentos podem ser construídos a partir dos conhecimentos prévios: um estudo de caso. **Ciência & Educação**, Graduação em Educação para a Ciência, v. 16, n. 03, p. 667–677, 2010.

VALADARES, J. et al. **Teoria da aprendizagem significativa: contributos do III Encontro Internacional sobre aprendizagem significativa**. 2000.

VIEIRA, E. T.; SANTOS, M. J. dos. Desenvolvimento econômico regional–uma revisão histórica e teórica. **Revista Brasileira de Gestão e Desenvolvimento Regional**, v. 8, n. 2, 2012.

WILLIAMS, M.; BURDEN, R. L. **Psychology for language teachers: A social constructivist approach**. [S.l.]: Cambridge university press Cambridge, 1997.

AUTORIZAÇÃO

Autorizo a reprodução e/ou divulgação total ou parcial do presente trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, desde que citada a fonte.

Teófilo Otoni, ____ / ____ / ________.

Documento assinado digitalmente
EXPEDITO NASCIMENTO PASSOS FILHO
Data: 16/08/2023 08:53:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Expedito Nascimento Passos Filho

ditomatematica@gmail.com

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Campus do Mucuri - Rua do Cruzeiro, n. 01 - Jardim São Paulo - CEP 39803-371.

UFVJM