



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

ALFREDO LUIZ CHAVES DE OLIVEIRA

**O TEOREMA DE PITÁGORAS: DEMONSTRAÇÕES E
APLICAÇÕES**

FORTALEZA-CEARÁ

2013

ALFREDO LUIZ CHAVES DE OLIVEIRA

**O TEOREMA DE PITÁGORAS: DEMONSTRAÇÕES E
APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Marques Pereira

FORTALEZA-CEARÁ

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará - Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho

Bibliotecário(a) Responsável – Thelma Marylanda Silva de Melo CRB-3 / 623

O48t Oliveira, Alfredo Luiz Chaves
 O Teorema de Pitágoras: Demonstrações e Aplicações / Alfredo
 Luiz Chaves Oliveira. — 2013.
 CD-ROM. 78f. : il. (algumas color.); 4 ¾ pol.

 “CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho
acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)”.

 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de
Ciência e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional, Fortaleza, 2013.

 Área de Concentração: Matemática.
 Orientação: Prof. Dr. João Marques Pereira.

 1. Fundamentação teórica. 2. Teorema de Pitágoras. 3.
Enem. I. Título.

CDD: 371.26

ALFREDO LUIZ CHAVES DE OLIVEIRA

O TEOREMA DE PITÁGORAS: DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

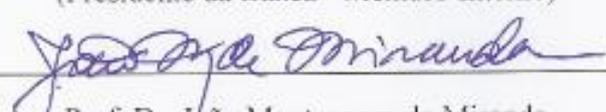
Orientador: Prof. Dr. João Marques Pereira

Aprovada em: 27/08/2013

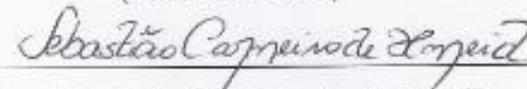
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Marques Pereira (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará-UECE
(Presidente da Banca - Membro Interno)



Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará-UECE
(Membro Interno)



Prof. Dr. Sebastião Carneiro de Almeida
Universidade Federal do Ceará-UFC
(Membro Externo)

RESUMO

Essa dissertação tem como principal objetivo concentrar, em um único texto, a história e o conhecimento de um assunto inicialmente explorado na educação de base das escolas: O Teorema de Pitágoras. A falta do domínio desse assunto gera carências que serão refletidas em deficiência de aprendizagem futura, haja vista que o objeto de estudo em questão, é a base para compreensão de muitos conteúdos matemáticos do Ensino Médio, tais como Trigonometria, Geometria Analítica, Geometria Plana e Espacial ou Volumétrica. Essa falta de intimidade do aluno da educação básica com o Teorema de Pitágoras é tamanha, que o simples enunciado do mesmo já é motivo para dúvidas e incertezas. O trabalho aborda um pequeno relato histórico da vida do personagem que produziu, ou ajudou a produzir, o conhecimento matemático que envolve o Teorema. Nesse relato, é abordado um pouco da vida de Pitágoras, com o objetivo de responder às curiosidades do tipo: Quem foi? Onde viveu? O que fazia? Informações que humanizam a produção desse conhecimento que dispomos hoje, ou seja, saber que tipo de ser humano esteve por trás desse teorema milenar. A outra parte do trabalho tem como objetivo fornecer uma fundamentação teórica, por meio de algumas demonstrações e aplicações do Teorema de Pitágoras, para que essa poderosa ferramenta matemática seja usada com uma melhor proficiência, ajudando de fato à compreensão de assuntos mais complexos. Este texto não é destinado apenas aos alunos da educação de base, como também, não é somente destinado aos professores que exercem o ofício do magistério e não têm a chance de se capacitarem melhor. Este texto é destinado a todos aqueles que, por alguma razão, nunca perderam o fascínio pela rainha das ciências. Na fundamentação teórica do Teorema de Pitágoras houve a preocupação de apresentar questões do ENEM que abordam este conhecimento, objetivando evidenciar que essa teoria pode perfeitamente ser levada para o nosso dia-a-dia, despertando um maior interesse dos alunos que veem a matemática apenas como um conteúdo estritamente científico e chato, ou seja, desconexo da realidade.

Palavras chave: concentrar, Teorema de Pitágoras, fundamentação teórica, ENEM.

ABSTRACT

This work has as main objective to focus on a single text, history and knowledge of a subject initially explored in basic education, the Pythagorean Theorem. The lack of mastery of this subject generates shortages that will be reflected in future learning disabilities, given that the subject matter in question is the basis for understanding many high school mathematical content, such as Trigonometry, Analytic Geometry, Plane Geometry and Spatial or Volumetric. This lack of intimacy student's basic education in public schools with the Pythagorean Theorem is such that the mere utterance of it is reason for doubt and uncertainty. The paper addresses a small historical account of the life of the character that produced or helped produce, mathematical knowledge which involves Theorem. In this report, we discussed about the life of Pythagoras, in order to answer trivia like: Who was? Where to live? What did he do? Information that humanize the production of this knowledge we have today, ie., what kind of human being was behind this ancient theorem. The other part of the paper aims to provide a theoretical basis, through some demonstrations and applications of the Pythagorean Theorem, that this powerful mathematical tool to be used with better proficiency, actually helping the understanding of more complex issues. This text is not meant only for students of basic education, as well, not only for teachers engaged in the craft of teaching and not have the chance to empower better. This text is aimed at all those who, for some reason, never lost their fascination with the queen of the sciences. In the theoretical foundation of the Pythagorean Theorem were concerned to submit questions ENEM addressing this knowledge, objective evidence that this theory may well be taken to our day-to-day, arousing greater interest of the students who see mathematics as just a content strictly scientific and boring, i.e. disconnected from reality.

Keywords: to focus, Pythagorean Theorem, theoretical, ENEM.

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. João Marques Pereira, meu orientador, pelos ensinamentos dedicados, e pelo incentivo constante ao gosto pela matemática.

Ao prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery, nosso coordenador, pelo esmero e dedicação em coordenar nosso curso de mestrado, e pelo incentivo e apoio constantes.

Ao prof. Dr. João Montenegro de Miranda pela transmissão com maestria dos ensinamentos algébricos.

Aos colegas de mestrado, especialmente Reginaldo, Alexandre e Ludemberg, que compartilharam experiência e sabedoria, ajudando na superação das dificuldades através do grupo de estudo.

Ao prof. Dr. Fábio Castelo Branco pelo apoio estrutural para o bom funcionamento desse projeto inovador, o PROFMAT.

Ao prof. Dr. Elon Lajes Lima, professores do IMPA, SBM, CAPES, que promoveram a oportunidade de estarmos nos qualificando..

Ao prof. Dr. Othon Dantas, pela sua excelente contribuição ao nosso curso.

A todos meus familiares, em especial minha esposa Emanuella Serpa, pela sua compreensão, cooperação e apoio irrestrito. Aos meus filhos Renan Oliveira e Artur Oliveira pela esperança no futuro. Ao meu pai Mauro Oliveira, pelo exemplo de luta e perseverança no decorrer da vida. A minha irmã Neryanne Oliveira, pelo exemplo de superação das dificuldades. A minha segunda mãe Irinéia Gomes pelo carinho dispensado à nossa família.

Ao meu chefe Antônio Machado de Holanda pela facilidade em atender às minhas solicitações de horário no trabalho, pois caso contrário, não teria conseguido a disponibilidade dos importantes sábados presenciais do curso.

In Memoriam: Aos meus entes queridos, meu avô Alfredo Guerreiro, minha mãe Alderi Chaves, minha tia Alnery Chaves, pela ajuda incondicional na minha formação cidadã. Esta conquista também é dedicada a vocês.

A Deus por permitir que eu esteja agradecendo.

SUMÁRIO:

LISTA DE FIGURAS E TABELAS.	10
1. INTRODUÇÃO.	13
2. HISTÓRIA.	15
2.1. História Pré-pitagórica.	15
2.2 Pitágoras: O homem e o seu teorema.	16
3. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS.	19
3.1 Demonstrações Algébricas	19
3.1.1 Usando Semelhança de Triângulos.	19
3.1.2 Por meio de razão de Áreas.	20
3.1.3 Usando uma Circunferência, W.Rupert,1900.	21
3.1.4 Usando uma Circunferência, Richardson ,1859.	22
3.1.5 Usando a bissetriz de um ângulo, Richardson, 1859.	23
3.1.6 Por comparação de Áreas, presidente Garfield (1831-1881).	24
3.1.7 Caso particular do teorema de Ptolomeu, século II d.C..	25
3.2 Demonstrações Geométricas	26
3.2.1 Por equivalência de Áreas, Hindu.	26
3.2.2 Por dissecação de Áreas, Henry Perigal, 1873.	27
3.2.3 Por equivalência de Áreas, Bhaskara, Hindu, século XII.	28
3.2.4 Por transposição de Áreas, Liu Hui, 270 d.C.	29
3.2.5 Por transposição de Áreas, Euclides, 300 a.C.	31
3.2.6 Por equivalência de Áreas, Leonardo da Vinci (1452-1519).	33
3.2.7 Por transposição de Áreas, Nasir Ed-Din (1201-1274).	34
3.2.8 Por equivalência de Áreas, 1897.	35
3.2.9 Pela área do retângulo.	36

3.3 Outras Demonstrações	37
3.3.1 A demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras.	37
3.3.2 Outra demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras.	39
3.3.3 A Generalização do Teorema, George Polya.	40
3.3.4 A Generalização do Teorema, Pappus de Alexandria, 300 d.C.	41
3.3.5 Outra generalização do Teorema.	42
4. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS.	44
4.1 Visualizações Geométricas das Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica. ...	44
4.2 As Lúnulas de Hipócrates.	46
4.3 A representação geométrica de números do tipo $a.\sqrt{n}$	47
4.4 Os ternos pitagóricos e os números primos.	49
4.5 Questões do ENA e do EQ (PROFMAT).	51
4.6 A condição de perpendicularidade entre segmentos.	56
4.7 Questões do ENEM.	58
4.8 O método do pedreiro, uma prática milenar.	61
4.9 As medidas dos lados de um triângulo retângulo em sequências:	62
4.9.1 Em Progressão Geométrica (P.G).	62
4.9.2 Em Progressão Aritmética (P.A).	63
4.10 O Aqueduto de Eupalinus.	65
4.11. A matemática por trás do GPS.	67
4.12. O axioma V de Euclides (das retas paralelas).	73
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	77

LISTA DE FIGURAS E TABELAS:

Figura 1. O tablete Plimpton 322.	15
Figura 2. O triângulo pitagórico chinês (Chóu-pei).	16
Figura 3. A relação de Pitágoras.	17
Figura 4. Triângulos retângulos semelhantes.	19
Figura 5. Triângulos retângulos proporcionais em área.	20
Figura 6.1. O Teorema de Pitágoras na circunferência.	21
Figura 6.2. O teorema das Cordas.	21
Figura 7. O Teorema de Pitágoras na circunferência. Outra abordagem.	22
Figura 8. A bissetriz de um ângulo agudo no triângulo retângulo.	23
Figura 9. O trapézio do ex-presidente americano Garfield.	24
Figura 10. O teorema de Ptolomeu.	25
Figura 11. “Olhe”. Equivalência de áreas Hindu	26
Figura 12. A dissecação de Henry Perigal	27
Figura 13. O quadrado de Bhaskara	28
Figura 14. Equivalência de áreas, Bhaskara.	28
Figura 15. Outra equivalência de áreas, Bhaskara	29
Figura 16. A transposição de áreas, Liu-Hui.	30
Figura 17. A cadeira da noiva, Euclides.	31
Figura 18. Os hexágonos equivalentes de Leonardo da Vinci.	33
Figura 19. A transposição de áreas, árabe Nasir-Ed-Din.	34
Figura 20. Equivalência de áreas.	35
Figura 21. Triângulo inscrito no retângulo.	36

Figura 22. Triângulo Acutângulo.	37
Figura 23. Triângulo Obtusângulo.	38
Figura 24a. Triângulo pitagórico por definição.	39
Figura 24b. Triângulo retângulo por construção.	39
Figura 25. Figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	40
Figura 26. Paralelogramos sobre os lados de um triângulo retângulo.	41
Figura 27. O Tetraedro de Gua de Malves.	42
Figura 28. A visualização geométrica das médias.	44
Figura 29. As Lúnulas de Hipócrates.	46
Figura 30. O triângulo retângulo isósceles.	47
Figura 31. Representação geométrica dos números irracionais.	48
Figura 32. Representação do número $5\sqrt{3}$ na reta real.	48
Figura 33. Hexágonos inscrito e circunscrito ao círculo.	51
Figura 34 a e 34 b. Triângulo isósceles inscrito no círculo.	52
Figura 35 a. Dobradura em folha retangular	53
Figura 35 b Dobradura em folha retangular (medidas).	54
Figura 36. Altura relativa à hipotenusa no triângulo retângulo.	55
Figura 37. Distância entre dois pontos no plano.	56
Figura 38. Segmentos perpendiculares no plano.	57
Figura 39. Escada com corrimão.	58
Figura 40. As peças do tangram e suas formas.	59
Figura 41. Os egípcios e a construção do ângulo reto.	61
Figura 42. As medidas dos lados de um triângulo retângulo em P.G.	62

Figura 43. As medidas dos lados de um triângulo retângulo em P.A.	63
Figura 44. O esboço do aqueduto de Eupalinus.	66
Figura 45. Esquema do funcionamento do GPS.	67
Figura 46. Sistema de coordenadas cartesianas de três dimensões.	69
Figura 47. Os ângulos das coordenadas geográficas.	71
Figura 48. O axioma V de Euclides (das paralelas).	73
Tabela 1. Fábrica de ternos pitagóricos.	50

1. INTRODUÇÃO

No decorrer de alguns anos de magistério, no ensino da Matemática para o Ensino Médio, percebemos uma grande dificuldade dos alunos em aplicar o Teorema de Pitágoras como ferramenta, tanto na resolução de questões diversas, como na compreensão de outros conteúdos mais complexos. Foi observado que o simples enunciado do Teorema de Pitágoras não era de domínio da maioria dos alunos. Se o assunto, em questão, é estudado no último ano do Ensino Fundamental, qual o motivo de tamanha dificuldade? Concluímos que algo deveria ser feito para minimizar tais dificuldades. Este é o principal objetivo deste trabalho.

Para respondermos a esse questionamento, analisamos alguns livros didáticos das últimas séries do Ensino Fundamental e perguntamos a alguns professores de Matemática do Ensino Fundamental, o porquê das dificuldades dos alunos em assimilarem os conteúdos relacionados com o Teorema de Pitágoras. As respostas indicaram que o assunto era tratado de forma superficial, apesar de alguns livros abordarem o conteúdo com rigor e profundidade. Se havia material disponível para aplicar, qual justificativa que o professor alegava em não tratar o Teorema de Pitágoras com a importância que ele merecia? Uma explicação, apresentada pelos professores, era a falta de compromisso dos alunos com o estudo, prejudicando a assimilação de novos conhecimentos. Acreditamos que a falta de novos métodos de ensino, como o uso de novas tecnologias disponíveis, tais como vídeos, oficinas com material concreto, laboratórios, geram em parte esse desinteresse do alunado. Independente do fato gerador dessa carência, o qual não é o objetivo desse trabalho, ficou claro que uma melhor e mais aprofundada abordagem do Teorema de Pitágoras deveria ser praticada, pois sem essa base, boa parte do conteúdo do Ensino Médio estaria com seu aprendizado comprometido. Baseado nessa ideia, é que obtivemos motivação para escrevermos esse trabalho, acreditando estar contribuindo para minimizar esse déficit de aprendizagem dos alunos, como também disponibilizarmos um material de apoio ao corpo docente para uma empreitada rumo à melhoria do ensino dessa ferramenta de vasta aplicação.

Na Trigonometria, usamos a relação de Pitágoras para encontramos sua Relação Fundamental. Na Geometria Analítica, usamos a relação de Pitágoras para obtermos a distância entre dois pontos que é o alicerce para a obtenção das equações das cônicas.

No estudo dos Números Complexos, o módulo é obtido a partir do Teorema de Pitágoras. Na Geometria Plana e Espacial, o uso do Teorema de Pitágoras é essencial para a obtenção do apótema de um polígono regular, a determinação da altura do cone e da pirâmide, a obtenção do raio de uma calota esférica, a resolução de problemas de inscrição e circunscrição de sólidos em outros. Verificamos, portanto, a enorme aplicabilidade do Teorema de Pitágoras em diversos ramos da matemática.

Na primeira parte do trabalho apresentaremos um pouco da História de Pitágoras e do seu Teorema, objetivando humanizar a construção do conhecimento desenvolvido ao longo de milênios.

A segunda parte do trabalho apresentará várias demonstrações do Teorema de Pitágoras, objetivando difundir as ideias e técnicas usadas pelos autores destas demonstrações.

A terceira e última parte do trabalho apresentará algumas aplicações do Teorema de Pitágoras. Tais aplicações poderão enriquecer a abordagem do Teorema de Pitágoras em sala de aula. Além disso, este trabalho também poderá ser usado pelos apreciadores da Matemática, para um aprofundamento sobre o Teorema e suas aplicações. A leitura do trabalho demonstrará que por mais simples que seja o conteúdo, sempre haverá algo a aprender.

2. HISTÓRIA

2.1. História Pré-pitagórica

Existem evidências de que os antigos babilônios, egípcios e chineses tinham conhecimento do Teorema de Pitágoras. Tais evidências foram materializadas de diversas maneiras.

Na Babilônia, os antigos usavam tabletes em barro para registrar seus conhecimentos e em um destes, datado de 1800 a 1600 a.C., foi encontrado uma tabela de números, que depois de estudos minuciosos concluíram-se serem ternas pitagóricas, isto é, ternas de números inteiros nas quais o quadrado de um destes números e a soma dos quadrados dos outros dois eram iguais. Este tablete (figura 1) se encontra na Universidade de Columbia, e recebeu a denominação de Plimpton 322 em homenagem ao arqueólogo inglês que o descobriu.



Figura 1

Os egípcios, usando cordas divididas em 12 partes através de 11 nós, construíam ângulos retos. Isto era possível tendo em mente que um triângulo cujos lados medem respectivamente 3, 4, 5 unidades, é retângulo. Assim eles construíam retângulos que eram usados para o loteamento dos terrenos que margeavam o Rio Nilo.

A figura 2 aparece no Chóu-pei, o mais antigo trabalho chinês conhecido, que pode remontar ao segundo milênio a.C. (Eves, 2008,pg 86). Neste trabalho foram encontrados sinais de que os chineses tinham conhecimentos das ternas pitagóricas.

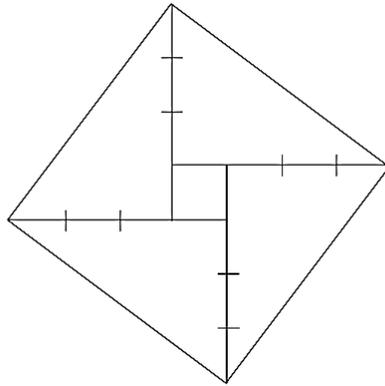


Figura 2

2.2. Pitágoras: o homem e o seu teorema

Não há provas documentais da vida de Pitágoras, apenas relatos escritos por historiadores que viveram bem após sua existência. Um desses relatos foram encontrados no *Sumário Eudemiano* de Proclus (século V d.C.), nome dado em homenagem ao seu criador, Eudemo de Rodas. Através dele, estima-se que Pitágoras viveu entre 572 e 480 a.C., nasceu, por volta de 572 a.C, na ilha de Samos, situada no mar Egeu, próxima a cidade de Mileto.

Pitágoras, ao que tudo indica, viajou bastante e conheceu alguns países, tais como Síria, Líbano, Babilônia, Egito. Ao retornar à Grécia, tentou se fixar em sua terra natal, a Ilha de Samos, porém devido à crueldade do tirano Polícrates, Pitágoras estabeleceu-se na cidade de Crotona (sudeste da Itália de hoje), onde fundou uma escola dedicada principalmente ao estudo da matemática e da filosofia.

Os pitagóricos, como eram chamados os membros da escola de Pitágoras, adotavam o vegetarianismo e tinham o hábito de comer lentilhas, pois para eles havia a transmigração de almas, ou seja, a alma de um morto poderia ocupar o corpo de um animal, e os membros da escola não gostariam de correr o risco de matar o que seria a moradia da alma de um amigo.

O mais notável entre os pitagóricos era a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras filosofia (amor à sabedoria) e matemática (o que é aprendido) supõe-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever as atividades intelectuais de sua escola.

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. O estudo das propriedades dos números e da aritmética, junto com a geometria, a música e a astronomia, constituíam as linhas básicas do programa de estudos pitagóricos.

Os ensinamentos da escola se davam através da oralidade e era costume dos pitagóricos atribuir todas as descobertas ao reverenciado fundador, assim é difícil saber exatamente que descobertas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da escola. Não sabemos sequer se foi o próprio Pitágoras que descobriu um dos mais importantes teoremas da matemática, objeto de estudo deste trabalho (Teorema de Pitágoras), pois o mesmo pode ter sido descoberto por outro membro da escola, e ter sido atribuída ao mestre.

Com o tempo, a influência e as tendências aristocráticas dos pitagóricos tornaram-se tão grandes que forças democráticas da região destruíram os prédios da escola fazendo com que seus membros se dispersassem. Pitágoras fugiu para Metaponto onde morreu provavelmente assassinado, com idade avançada entre setenta e cinco e oitenta anos de idade.

O Teorema de Pitágoras estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Esta relação pode ser expressa do seguinte modo: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois. A recíproca deste teorema, que será demonstrada no capítulo 3 deste trabalho, estabelece: se em um triângulo a soma dos quadrados das medidas de dois de seus lados é igual ao quadrado da medida do terceiro lado, então o triângulo é retângulo.

Geometricamente o Teorema de Pitágoras pode ser interpretado como na figura 3. Veja que o triângulo ABC é retângulo em A , e as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} são respectivamente a , b e c . Assim, a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo ABC de medida a , é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo ABC de medidas b , e c . Isto é $a^2 = b^2 + c^2$.

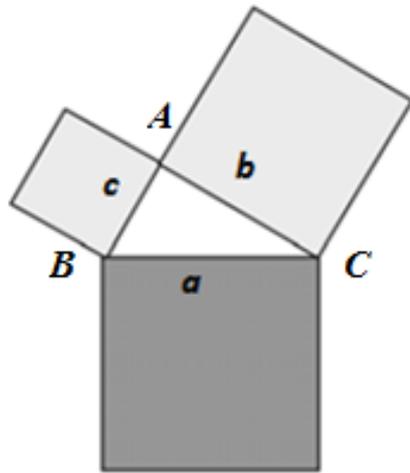


Figura 3

O professor Elisha Scott Loomis, Cleveland- Ohio, pesquisou e catalogou mais de trezentas e sessenta demonstrações do Teorema de Pitágoras em seu “ The Pythagorean Proposition”, cuja segunda edição foi publicada em 1940. Hoje sabemos que existem mais de quatrocentas demonstrações deste teorema. Neste trabalho apresentaremos algumas destas demonstrações e algumas aplicações do Teorema de Pitágoras.

3. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Apresentaremos algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Classificamos estas demonstrações em algébricas e geométricas. Dentre as várias demonstrações existentes, escolhemos uma amostra que expressasse não só a beleza deste teorema, mas, sobretudo a criatividade de seus autores.

Ao longo deste trabalho usamos \overline{AB} para denotar o segmento de reta de extremos A e B , e AB a medida deste segmento, $\Delta XYZ \sim \Delta X'Y'Z'$ para denotar que os triângulos XYZ e $X'Y'Z'$ são semelhantes.

3.1. Demonstrações Algébricas

3.1.1. Demonstração usando a semelhança de triângulos

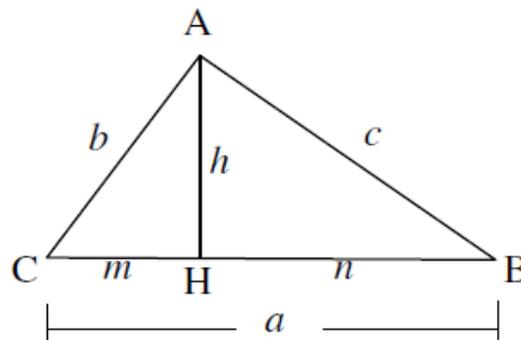


Figura 4

Seja o triângulo ABC (figura 4), retângulo em A , no qual \overline{AH} é a altura relativa à hipotenusa de medida h , \overline{AC} e \overline{AB} os catetos de medidas b e c respectivamente, \overline{BC} a hipotenusa de medida a , e \overline{CH} e \overline{BH} as projeções dos catetos \overline{AC} e \overline{AB} sobre a hipotenusa de medidas m e n respectivamente. Teremos:

$$\text{I) } \Delta AHC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \text{ ou } \frac{m}{b} = \frac{b}{a}, \text{ logo } b^2 = m \cdot a$$

$$\text{II) } \Delta AHB \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \text{ ou } \frac{n}{c} = \frac{c}{a}, \text{ logo } c^2 = n \cdot a$$

Somando-se os dois resultados obtidos em I) e II), teremos:

$$b^2 + c^2 = m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a = a \cdot a = a^2. \text{ Assim, } a^2 = b^2 + c^2$$

3.1.2. Demonstração por meio de razão de áreas

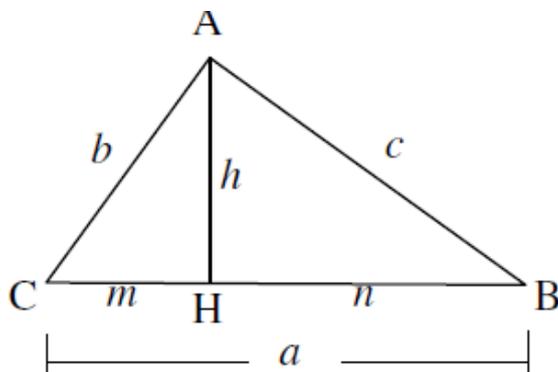


Figura 5

Na figura 5, \overline{AH} é a altura relativa à hipotenusa \overline{BC} de medida h . Os triângulos retângulos ABC , AHC , AHB são semelhantes (ângulos homólogos correspondentes congruentes). Sendo a , a medida de \overline{BC} , b , a medida de \overline{AC} , c , a medida de \overline{AB} , m , a medida de \overline{CH} , n , a medida de \overline{BH} , usando que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança e a propriedade das proporções (a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para cada consequente), e considerando S_1 , S_2 e S_3 representando as áreas dos triângulos ABC , AHC e AHB , respectivamente, tendo em vista as semelhanças $\Delta ABC \sim \Delta AHB \sim \Delta AHC$, teremos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2; \frac{S_1}{S_3} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ ou } \frac{S_1}{a^2} = \frac{S_2}{b^2} = \frac{S_3}{c^2}, \text{ logo}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(m+n)h}{a^2} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot m}{b^2} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot n}{c^2} \text{ ou } \frac{\frac{1}{2}(m+n)h}{a^2} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot n + \frac{1}{2}h \cdot m}{c^2 + b^2} = \frac{\frac{1}{2}(m+n) \cdot h}{c^2 + b^2} \text{ ou}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(m+n)h}{a^2} = \frac{\frac{1}{2}(m+n)h}{c^2 + b^2}. \text{ Segue que } a^2 = b^2 + c^2.$$

3.1.3. Demonstração utilizando-se uma circunferência (atribuída a W.Rupert, 1900)

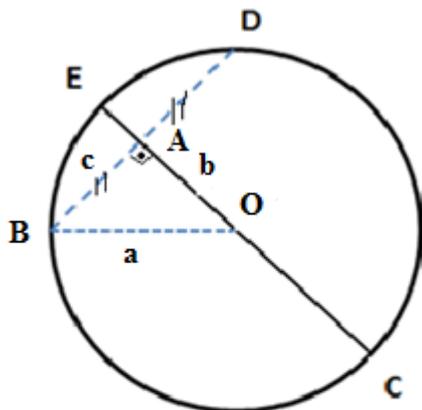


Figura 6-1

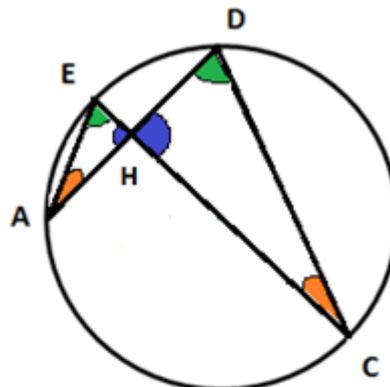


Figura 6-2

Na figura 6-2, os triângulos AHE e DHC são semelhantes, pois seus ângulos homólogos correspondentes são congruentes. Desta semelhança, concluímos que:

$$\frac{AH}{CH} = \frac{EH}{DH} \text{ ou } AH \cdot DH = CH \cdot EH. \quad (\text{Teorema das cordas})$$

Na figura 6-1, temos o triângulo retângulo BAO a partir do qual construímos a circunferência com centro em O e raio \overline{OB} de medida a (*hipotenusa do triângulo BAO*). Seja \overline{EC} o diâmetro da circunferência e \overline{BD} uma corda perpendicular a \overline{EC} , portanto \overline{EC} é a mediatriz de \overline{BD} , pois os triângulos BAO e DAO são congruentes, assim $AB = AD$. Sendo b a medida de \overline{OA} , e c a medida de \overline{AB} e de \overline{AD} , usando o teorema das cordas, teremos :

$$AB \cdot AD = EA \cdot AC \text{ ou } c \cdot c = (a - b) \cdot (a + b), \text{ logo } c^2 = a^2 - b^2, \text{ disto segue}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.1.4. Demonstração usando uma circunferência (atribuída à Richardson in Runkle's Mathematical Journal, 1859)

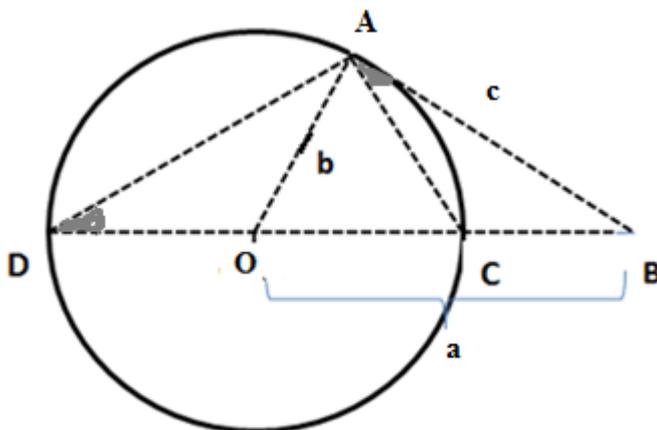


Figura 7

Seja o triângulo OAB retângulo em A (figura 7), cujas medidas da hipotenusa \overline{OB} e dos catetos \overline{OA} e \overline{AB} são, respectivamente, a , b e c . Traçamos uma circunferência com centro em O e raio $\overline{OA} \equiv \overline{OD} \equiv \overline{OC}$ de medida b . \overline{AB} é tangente à circunferência, pois \overline{OA} e \overline{AB} são perpendiculares.

Os ângulos \widehat{CAB} e \widehat{BDA} são congruentes, pois estão associados ao mesmo arco AC . Disto segue que:

$$\triangle BDA \sim \triangle BCA, \text{ assim } \frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA}$$

Temos então:

$$\frac{c}{a+b} = \frac{a-b}{c}, \quad \text{ou seja,} \quad c^2 = (a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\text{Portanto } a^2 = b^2 + c^2.$$

3.1.5. Demonstração usando a bissetriz de um ângulo (outro caso de semelhança de triângulos atribuído à Richardson-Math. Mo., 1859):

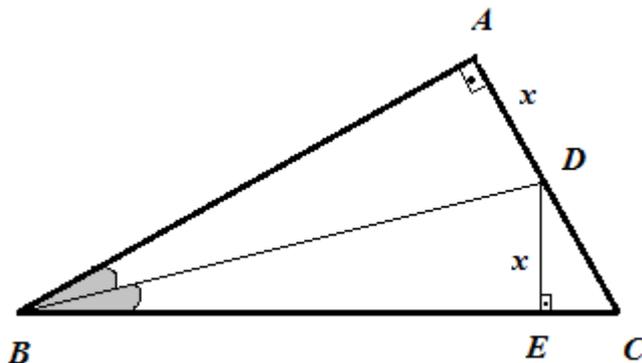


Figura 8

Seja o triângulo ABC (figura 8) retângulo em A , de hipotenusa \overline{BC} e catetos \overline{AC} e \overline{AB} , cujas medidas são, respectivamente, a , b e c . Considere a bissetriz \overline{BD} do ângulo \widehat{ABC} e o segmento \overline{DE} perpendicular ao lado \overline{BC} . Veja que os segmentos \overline{AD} e \overline{DE} têm medida igual a x , e que os segmentos \overline{AB} e \overline{BE} têm medida igual a c , pois os triângulos ABD e BED são congruentes. Além disso, da semelhança entre os triângulos ABC e DEC temos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}, \text{ ou } \frac{c}{x} = \frac{a}{b-x} = \frac{b}{a-c}$$

Segue que

$$c \cdot a - c^2 = b \cdot x$$

$$a^2 - a \cdot c = b^2 - b \cdot x$$

Somando membro a membro as duas últimas igualdades teremos:

$$a^2 - c^2 = b^2, \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2. \text{ Isto é o Teorema de Pitágoras.}$$

3.1.6. Demonstração por comparação de áreas (atribuída ao ex-presidente dos Estados Unidos da América, Garfield, 1831-1881)

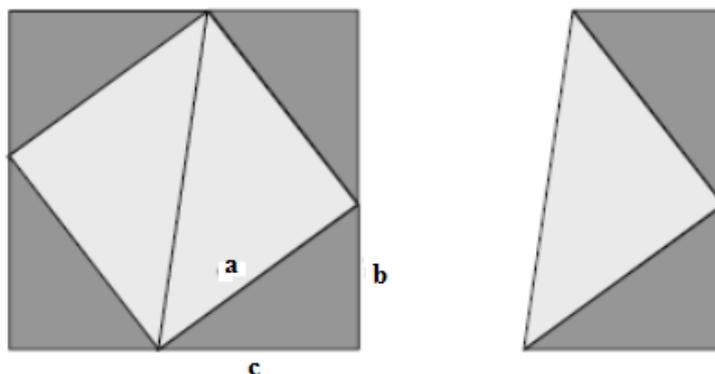


Figura 9

Consideremos quatro triângulos retângulos congruentes cujas medidas dos catetos sejam b e c , e a medida da hipotenusa seja a . Construímos um quadrado de lado $b + c$ formado por esses quatro triângulos retângulos e um quadrado central de lado a (figura 9). A diagonal do quadrado central de lado a divide o quadrado maior de lado $b + c$, em dois trapézios congruentes, cujas bases maior e menor são, respectivamente, c e b . Calculando a área de um desses trapézios, teremos:

$$A = \frac{(base\ maior + base\ menor) \cdot altura}{2} = \frac{(c + b) \cdot (c + b)}{2} = \frac{(c + b)^2}{2} \quad (I)$$

Por outro lado, o mesmo trapézio é formado por três triângulos retângulos, sendo dois deles congruentes, cujos lados são a , b e c , e o terceiro obtido da metade do quadrado de lado a , logo a área do trapézio pode ser calculada por:

$$A = \frac{1}{2}b \cdot c + \frac{1}{2}b \cdot c + \frac{a^2}{2} \quad (II)$$

Como (I) e (II) são expressões que representam a mesma área, teremos:

$$\frac{(c + b)^2}{2} = \frac{1}{2}b \cdot c + \frac{1}{2}b \cdot c + \frac{a^2}{2} \text{ ou } \frac{c^2 + 2 \cdot b \cdot c + b^2}{2} = \frac{2 \cdot b \cdot c + a^2}{2}, \text{ então } a^2 = b^2 + c^2$$

3.1.7. Demonstração através de um caso particular do teorema de Ptolomeu, século II d.C.:

O teorema de Ptolomeu (figura 10) afirma que, em um quadrilátero inscrito em uma circunferência, o produto das medidas das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas dos lados opostos, ou seja, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

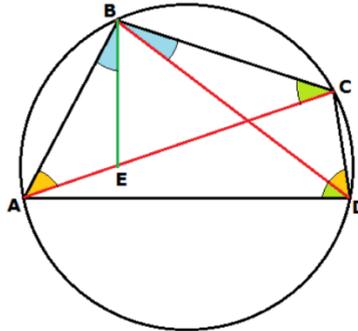


Figura 10

Para demonstrarmos o teorema de Ptolomeu, tracemos \overline{BE} de modo que os ângulos \widehat{ABE} e \widehat{DBC} tenham a mesma medida. Então os triângulos ABE e BCD são semelhantes, assim teremos:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} \text{ ou } AB \cdot CD = BD \cdot AE \quad (I)$$

Como os ângulos \widehat{ABD} e \widehat{EBC} são congruentes, temos que os triângulos ABD e EBC são semelhantes, assim teremos:

$$\frac{AD}{CE} = \frac{BD}{BC} \text{ ou } AD \cdot BC = BD \cdot CE \quad (II)$$

Somando os resultados obtidos em I e II , teremos:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AE + BD \cdot CE \text{ ou } AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot (AE + CE) = BD \cdot AC.$$

Consideremos o caso particular em que o triângulo ABC seja retângulo em B , e o quadrilátero $ABCD$ seja um retângulo cuja diagonal \overline{AC} é a hipotenusa do triângulo ABC . Aplicando o teorema de Ptolomeu no retângulo $ABCD$, teremos: $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$. Como $AC = BD$, $AB = CD$ e $BC = AD$, teremos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

3.2. Demonstrações Geométricas

3.2.1. Demonstração por equivalência de áreas, Hindu

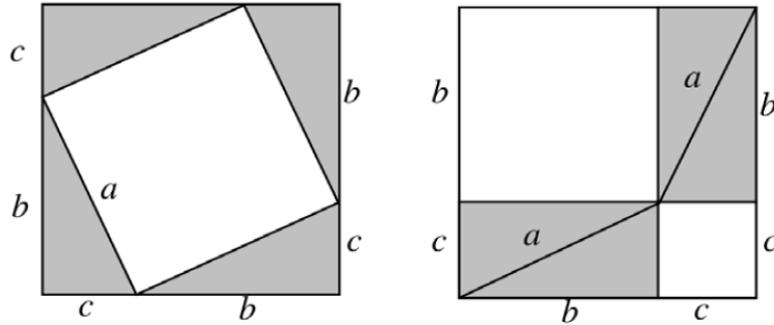


Figura 11

Usamos na construção do quadrado de lado $b + c$ (figura 11, à esquerda), quatro triângulos retângulos congruentes, cujas hipotenusas medem a , e os catetos medem b e c , e um quadrado central, cuja medida do lado é a .

Na figura da esquerda, suprimindo os quatro triângulos retângulos, obtemos um quadrado de lado a . Na figura da direita, suprimindo os quatro triângulos retângulos (congruentes aos da esquerda), obtemos um quadrado de lado b , e outro de lado c . Assim, podemos concluir que a área do quadrado de lado a é igual a área do quadrado de lado b somada com a área do quadrado de lado c . Supõe-se esta como sendo a demonstração construída pelos pitagóricos.

Na figura à esquerda, teremos:

$$(b + c)^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2 \quad (I)$$

Na figura à direita, teremos:

$$(b + c)^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + b^2 + c^2 \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), teremos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.2.2. Demonstração por dissecção de áreas (atribuída a Henry Perigal livreiro de Londres, 1873):

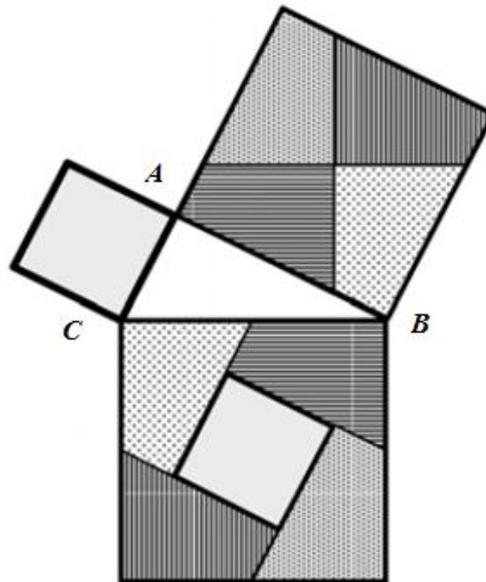


Figura 12

Considere o triângulo ABC retângulo em A (figura 12). O quadrado desenhado sobre o cateto \overline{AB} do triângulo ABC foi dissecado em quatro quadriláteros congruentes, através de duas retas perpendiculares passando pelo seu centro, sendo uma das retas paralela à hipotenusa \overline{BC} do triângulo ABC . Estas quatro partes, juntamente com o quadrado desenhado sobre o cateto \overline{AC} , totalizam a área do quadrado construído sobre a hipotenusa \overline{BC} .

Veja que os quadriláteros que compõem o quadrado desenhado sobre o cateto \overline{AB} são congruentes e possuem dois ângulos retos opostos. Usando o fato de que uma das retas que passa pelo centro do quadrado desenhado sobre o lado \overline{AB} é paralela à hipotenusa \overline{BC} , conseguimos provar que a figura obtida no centro do quadrado construído sobre a hipotenusa \overline{BC} é um quadrado congruente ao desenhado sobre o cateto \overline{AC} . Disto segue o Teorema de Pitágoras.

3.2.3. Demonstração por equivalência de áreas (atribuída a Bhaskara, hindu, século XII d.C.)

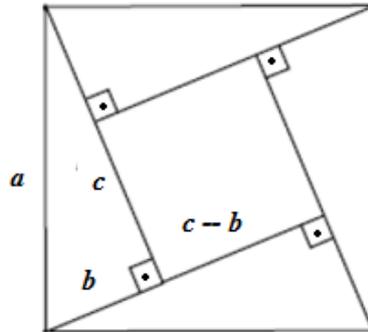


Figura 13

Na figura 13, o quadrado cuja medida do lado é a é formado por quatro triângulos retângulos congruentes cujas medidas das hipotenusas e dos catetos são a , b e c , respectivamente, e de um quadrado central que tem como medida de lado $c - b$. Calculando a área do quadrado cuja medida do lado é a , teremos:

$$a^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + (c - b)^2 = 2 \cdot b \cdot c + c^2 - 2 \cdot b \cdot c + b^2. \text{ Disto segue que } a^2 = b^2 + c^2$$

Apresentaremos outra ilustração geométrica da demonstração proposta por Bhaskara (figura 14)

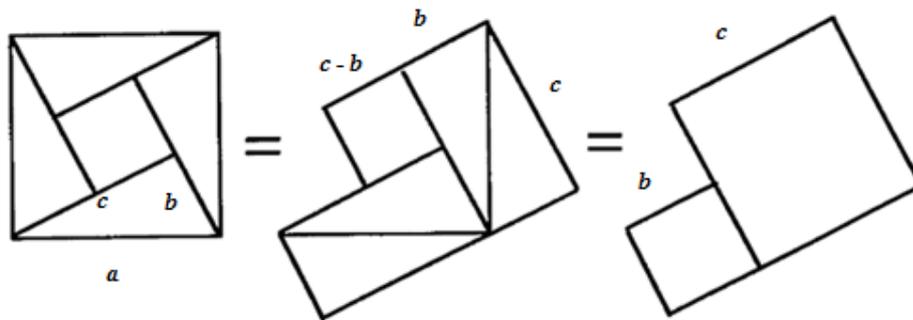


Figura 14

3.2.4. Demonstração por transposição de áreas (atribuída a Liu Hui, 270 d.C.)

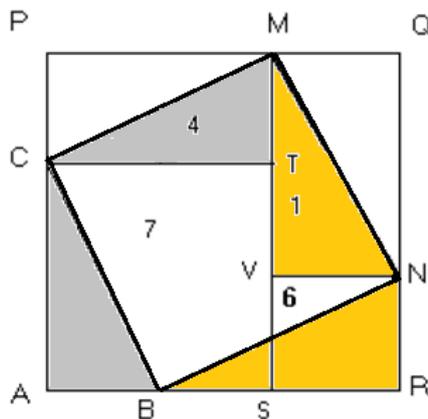


Figura 15

O quadrado $APQR$ (figura 15) foi construído com quatro triângulos retângulos congruentes (BAC , CPM , MQN , BRN), e com o quadrado $BCM N$. Usando a transposição de figuras geométricas, conseguimos mostrar que o quadrado $BCM N$ é formado pelos quadrados $ACTS$ e $NRSV$, construídos sobre os catetos \overline{AC} e \overline{NR} , respectivamente.

O polígono côncavo de cinco lados $BCTVN$ (7 e 6) é elemento comum ao quadrado $BCM N$ e ao conjunto formado pelos quadrados $ACTS$ e $NRSV$. Assim, se transpusermos o triângulo BAC para a região delimitada pelos vértices CMT (4), e se transpusermos o triângulo BRN para a região delimitada pelos vértices MVN (1) obteremos a região formada pelos elementos 1, 4, 6 e 7, que é o quadrado $BCM N$, cujo lado é a hipotenusa de um dos triângulos retângulos congruentes.

Seja a área do quadrado $ACTS$ denotada por S_{ACTS} , e a área dos demais polígonos representada de forma análoga, algebricamente teremos:

$$S_{ACTS} + S_{NRSV} = S_{BCTVN} + 2 \cdot S_{ABC} = \text{região } 7 + \text{região } 6 + 2 \cdot \text{região } 4 = \\ = \text{região } 7 + \text{região } 6 + \text{região } 4 + \text{região } 1 = S_{BCM N}, \text{ assim}$$

$$S_{ACTS} + S_{NRSV} = S_{BCM N}$$

Concluimos que a área do quadrado $BCM N$ é igual à soma das áreas dos quadrados $ACTS$ e $SVNR$, ou seja, o Teorema de Pitágoras.

Na figura 16, encontramos outra construção auxiliar (usando quatro triângulos retângulos congruentes) para demonstrarmos o Teorema de Pitágoras, aplicando equivalência de áreas. Esta demonstração é outra ilustração geométrica da proposta pelo chinês Liu Hui (3.2.4) aproximadamente 1.000 anos antes que a apresentada por Bháskara.

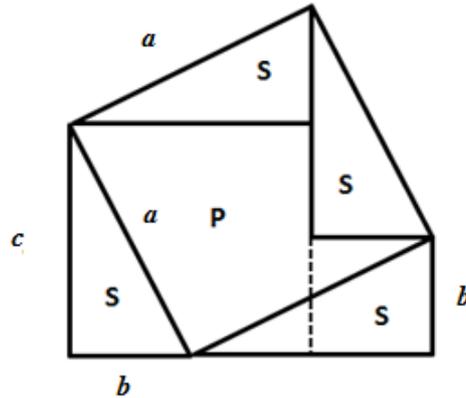


Figura 16

Seja A_1 a área do quadrado de lado a , formado pela união de dois triângulos retângulos congruentes (S) e um polígono côncavo de cinco lados (P). Temos

$$A_1 = P + 2.S = a^2 \quad (I)$$

Considerando os quadrados de lado b e c , cuja soma das áreas é A_2 , formados pela união de dois triângulos retângulos congruentes (S) e o polígono côncavo de cinco lados (P), teremos:

$$A_2 = P + 2.S = b^2 + c^2 \quad (II)$$

Comparando (I) e (II) , percebemos que A_1 é igual a A_2 , ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

3.2.5. Demonstração por equivalência de áreas (atribuída a Euclides 300 a.C., livro I dos Elementos, proposição 47)

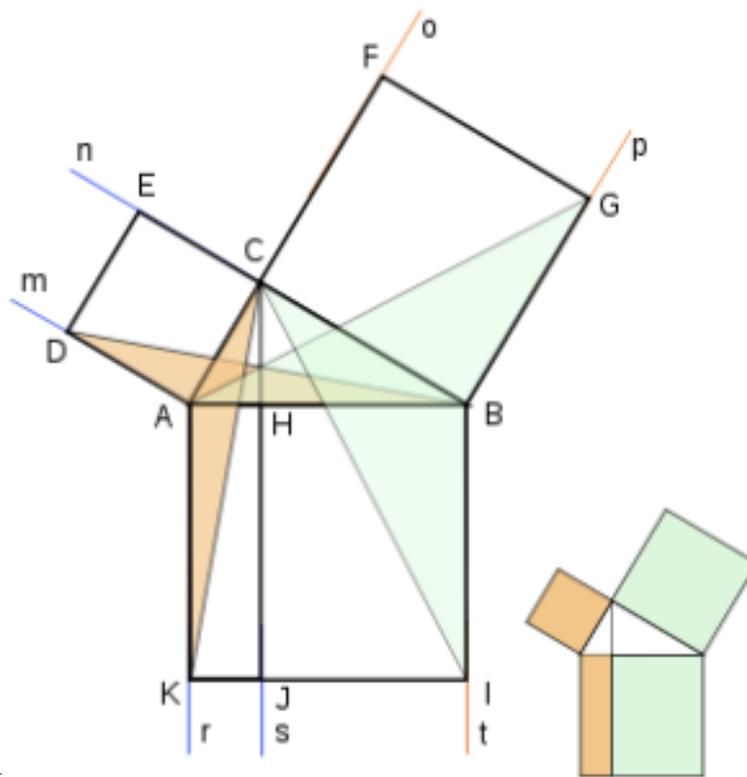


Figura 17

Seja ABC um triângulo retângulo (figura 17). Construimos os quadrados $ABIK$, $BCFG$, $ACED$ respectivamente sobre os seus lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , do triângulo ABC e traçamos as retas paralelas r , s e t , sendo que a reta s é suporte da altura \overline{CH} relativa à hipotenusa \overline{AB} e as retas r e t são suportes dos lados \overline{AK} e \overline{BI} , respectivamente. O quadrado $ABIK$ fica dividido em dois retângulos: o retângulo $AHJK$ e o retângulo $HBIJ$. Mostraremos que a medida da área do quadrado $ACED$ é igual à medida da área do retângulo $AHJK$ e que a medida da área do quadrado $BCFG$ é igual à medida da área do retângulo $HBIJ$. Disto segue o Teorema de Pitágoras.

Veja que os triângulos CAK e DAB são congruentes e, portanto têm a mesma área. Temos que:

$$S_{\triangle CAK} = \frac{AK \cdot AH}{2} \text{ e } S_{\triangle DAB} = \frac{AD \cdot ED}{2}$$

Segue que $AD \cdot ED = AK \cdot AH$. Isto significa que a medida da área do quadrado $ACED$ é igual à medida da área do retângulo $AHJK$.

De maneira análoga, observe que os triângulos ABG e BCI são congruentes e, portanto, têm a mesma área. Temos então:

$$S_{\Delta ABG} = \frac{BG \cdot BC}{2} \quad e \quad S_{\Delta BCI} = \frac{BI \cdot BH}{2}$$

Então, $BI \cdot BH = BG \cdot BC$ e assim a medida da área do retângulo $BIJH$ é igual à medida da área do quadrado $BCFG$.

Concluimos que a medida da área do quadrado $ABIK$ é a soma das medidas das áreas dos quadrados $ACED$ e $BCFG$, ou seja, a medida da área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados sobre os catetos. Isto é o Teorema de Pitágoras.

3.2.6. Demonstração por equivalência de áreas (Leonardo da Vinci, 1452-1519)

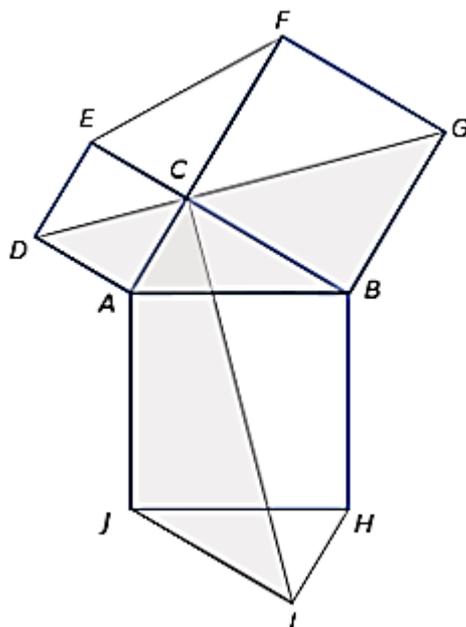


Figura 18

Na figura 18 temos três triângulos retângulos congruentes e três quadrados desenhados sobre os lados do triângulo ABC . Mostraremos que a medida da área do quadrado $ABHJ$ é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados $ADEC$ e $BCFG$.

Observe que o quadrilátero $DABG$ tem a mesma área que o quadrilátero $CAJI$, ou seja, pois:

$$DA = CA; \quad AB = AJ; \quad BG = JI;$$

$$a \text{ medida do ângulo } (D\hat{A}B) = a \text{ medida do ângulo } (C\hat{A}J);$$

$$a \text{ medida do ângulo } (A\hat{J}I) = a \text{ medida do ângulo } (A\hat{B}G).$$

Como a área do hexágono $ABGFED$ é o dobro da área do quadrilátero $DABG$, e a área do hexágono $CAJIHB$ é o dobro da área do quadrilátero $CAJI$, temos que os hexágonos $ABGFED$ e $CAJIHB$ tem a mesma área. Subtraindo de cada hexágono os dois triângulos retângulos, temos a igualdade entre a área do quadrado $ABHJ$ e a soma das áreas dos quadrados $ADEC$ e $BCFG$. Isto é o Teorema de Pitágoras.

3.2.7. Demonstração por transposição de áreas (atribuída ao árabe Nasir-Ed-Din 1201-1274)

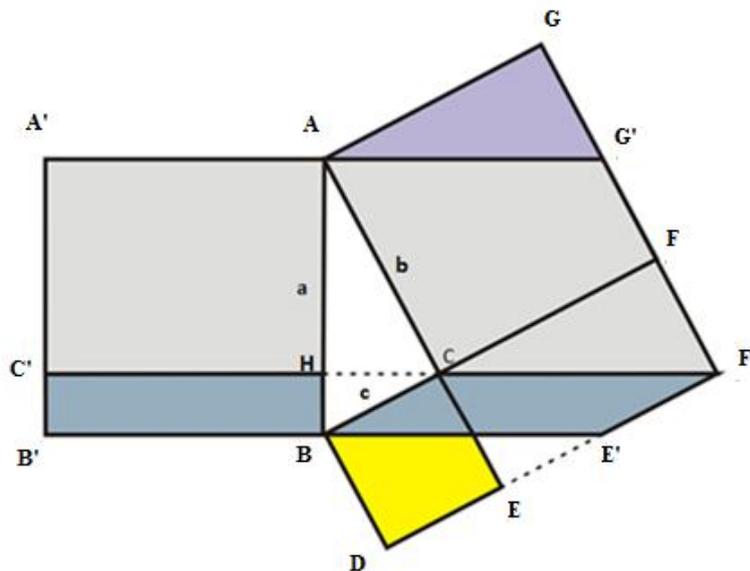


Figura 19

Na figura 19, temos um triângulo retângulo ABC cujas medidas dos lados são a (hipotenusa), b e c (catetos). Sobre os lados deste triângulo são desenhados os quadrados $AA'B'B$, $ACFG$ e $BCED$. O ponto F' é a intersecção dos prolongamentos dos lados \overline{GF} e \overline{DE} . Note que os triângulos retângulos ACB , CFE' , AGG' são congruentes (LLL).

Analisando o paralelogramo $ACF'G'$, podemos concluir que sua área (S_1) é igual à área do quadrado $ACFG$, pois:

$$S_1 = \text{base} \times \text{altura} = (AC) \cdot (AG) = b^2 = \text{área quadrado } ACFG$$

Como $\overline{AG'} \parallel \overline{CF'}$, a área do paralelogramo $ACF'G'$ (S_1) pode ser obtida por:

$$S_1 = \text{base} \times \text{altura} = (CF') \cdot (AH) = (C'H) \cdot (AH) = \text{área do retângulo } AA'C'H = b^2$$

Analisando de forma análoga o paralelogramo $BCF'E'$, chegaremos à conclusão que sua área (S_2) é igual à área do quadrado $BCED$ e também igual à área do retângulo $BB'C'H$. Segue que:

$$a^2 = S_1 + S_2 = b^2 + c^2 \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2$$

3.2.8. Demonstração usando equivalência de áreas, Am. Math.

Mo.,1897

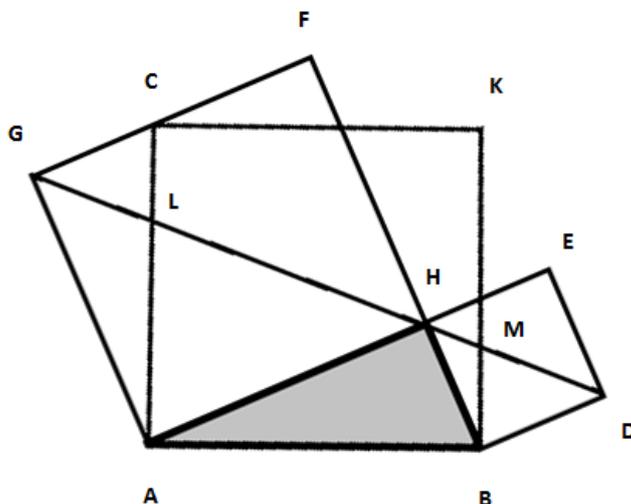


Figura 20

Na figura 20, desenhamos sobre os lados do triângulo retângulo AHB , os quadrados $AHFG$, $BDEH$, $ABKC$. Os vértices dos quadrados G , H , D foram unidos pelo segmento de reta \overline{GD} , que ao intersectar os lados do quadrado \overline{AC} e \overline{BK} , geraram os pontos L e M , respectivamente. Vamos provar que a área do quadrado $ABKC$ é igual à soma das áreas dos quadrados $AHFG$ e $BDEH$. Isto é o Teorema de Pitágoras.

O segmento de reta \overline{LM} divide o quadrado $ABKC$ em dois trapézios congruentes, pois os triângulos GLC e BMD são congruentes (ALA-ângulo, lado, ângulo). Veja que os triângulos retângulos AGC e AHB também são congruentes. Denotaremos a área do polígono por S seguida das letras que representam seus respectivos vértices, assim a área do quadrado $ABKC$ será S_{ABKC} .

Adotando a nomenclatura citada, e usando equivalência de áreas, teremos:

$$\begin{aligned} S_{ABKC} &= 2 \cdot S_{ABML} = 2 \cdot [S_{AHL} + S_{AHB} + S_{HMB}] = 2 \cdot [S_{AHL} + S_{CGA} + S_{HMB}] = \\ &= 2 \cdot [S_{AHL} + S_{GLA} + S_{GLC} + S_{HMB}] = 2 \cdot [(S_{AHL} + S_{GLA}) + (S_{BMD} + S_{HMB})] = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{S_{AHFG}}{2} + \frac{S_{BDEH}}{2} \right] = S_{AHFG} + S_{BDEH}. \end{aligned}$$

Então a medida da área do quadrado $ABKC$ é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados $AHFG$ e $BDEH$.

3.2.9. Demonstração usando a área do retângulo [10]

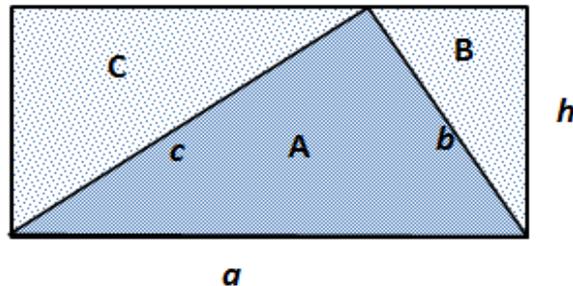


Figura 21

Na figura 21, o triângulo retângulo cujas medidas da hipotenusa e dos catetos são respectivamente a , b e c , está inscrito no retângulo cuja medida da base é a , e a medida da altura é h . Segue que a medida da área do retângulo é duas vezes a medida da área do triângulo maior.

Veja que o retângulo é formado por três triângulos retângulos mutuamente semelhantes. Se B e C representam as medidas das áreas dos triângulos retângulos menores, temos que $A = B + C$. Além disso, usando a relação entre áreas de figuras semelhantes teremos:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a^2}{b^2}\right) ; \frac{A}{C} = \left(\frac{a^2}{c^2}\right). \text{ Segue que } \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}, \text{ e assim } \frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}.$$

Sendo $A = B + C$, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. Isto é o Teorema de Pitágoras.

3.3. Outras Considerações

3.3.1. Uma demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras [9]

Demonstraremos agora a recíproca do Teorema da Pitágoras, isto é, se um triângulo satisfaz a condição: o quadrado da medida de um dos lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

Nos triângulos ABC (figuras 22 e 23), denotemos as medidas dos lados \overline{AB} , \overline{AC} , e \overline{BC} por c , b e a , respectivamente.

Suponhamos que $b \leq c < a$, $a^2 = b^2 + c^2$.

Mostraremos que a medida do ângulo $B\hat{A}C$ não pode ser menor que 90° e nem maior que 90° .

Se a medida do ângulo $B\hat{A}C$ for menor que 90° , teremos:

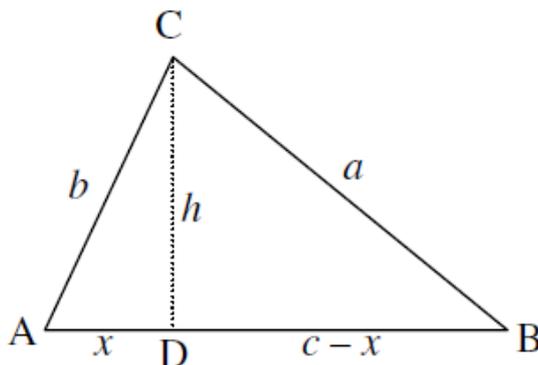


Figura 22

A projeção D , de C sobre o lado \overline{AB} o divide em dois segmentos \overline{AD} e \overline{DB} . Sejam x e $c - x$, respectivamente, as medidas destes segmentos. Sendo a medida de \overline{CD} igual a h e os triângulos ADC e BCD retângulos em D , teremos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \text{ ou } h^2 = b^2 - x^2 \quad (I); \quad a^2 = h^2 + (c - x)^2 \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), teremos: $a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2.c.x + x^2$ ou

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.x. \text{ Segue que } a^2 < b^2 + c^2, \text{ o que contraria a hipótese.}$$

Então a medida do ângulo $(B\hat{A}C)$ não pode ser menor que 90° .

Se a medida do ângulo $B\hat{A}C$ for maior que 90° , teremos:

Neste caso, a projeção D , de C , sobre o prolongamento do lado \overline{AB} (figura 23), determina o segmento \overline{AD} , de medida x . Procedendo de forma análoga ao 1º caso, teremos:

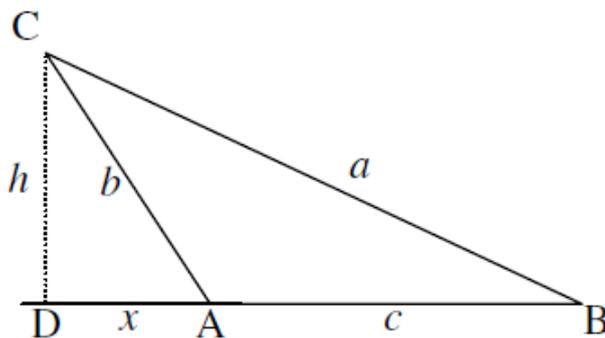


Figura 23

Veja que os triângulos CDB e ADC são retângulos em D .

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2 \text{ ou } a^2 = h^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x + x^2 \quad (I);$$

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ ou } h^2 = b^2 - x^2 \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), teremos:

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x + x^2 \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x$$

Ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, o que contraria a hipótese, logo a medida do ângulo ($B\hat{A}C$) não pode ser maior que 90° .

Das considerações acima, concluímos que a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a 90° , e assim o triângulo ABC é retângulo.

3.3.2. Outra demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras [11]

Considere um triângulo ABC (figura 24 a) cujas medidas dos lados \overline{AB} , \overline{AC} , e \overline{BC} são respectivamente c , b e a . Suponha que $c \leq b < a$, e a relação $a^2 = b^2 + c^2$ seja satisfeita.

Construiremos um triângulo $A'B'C'$ com $\overline{A'C'}$ perpendicular a $\overline{A'B'}$, e cujas medidas dos lados $\overline{A'C'}$ e $\overline{A'B'}$ são b e c , respectivamente. (figura 24 b).

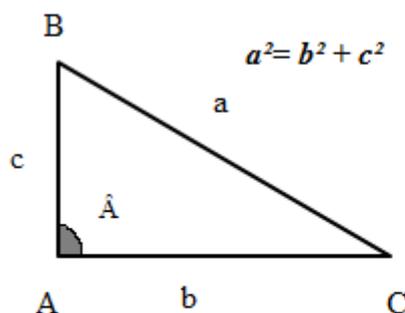


Figura 24 a

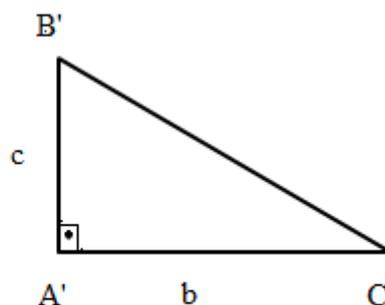


Figura 24 b

Como o triângulo $A'B'C'$ (figura 24b) é retângulo por construção, poderemos aplicar a relação de Pitágoras. Teremos:

$$(B'C')^2 = (A'B')^2 + (A'C')^2 \text{ ou } (B'C')^2 = c^2 + b^2$$

Como, por hipótese, no triângulo ABC vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, então temos:

$$B'C' = a, \text{ e como } BC = a, \text{ temos que } B'C' = BC, \text{ segue que } \overline{B'C'} = \overline{BC}$$

Assim os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes (LLL, lado-lado-lado). Como o triângulo $A'B'C'$ é retângulo por construção, o triângulo ABC também o será.

3.3.3. A generalização do Teorema de Pitágoras (matemático húngaro George Polya, 1897-1985)

O matemático húngaro de Budapeste, Polya, usou o Teorema de Pitágoras para comprovar que esta importante relação entre áreas vale para quaisquer figuras semelhantes desenhadas sobre a hipotenusa e sobre os catetos de um triângulo retângulo.

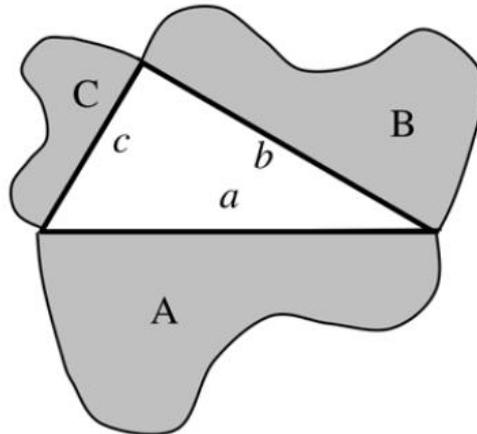


Figura 25

No triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa é a , e cujas medidas dos catetos são b e c (figura 25), desenhamos sobre seus lados, figuras semelhantes de áreas A , B e C .

Se duas figuras são semelhantes, a razão entre as medidas de suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 ; \frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ e assim } \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

Pela propriedade das proporções, concluiremos:

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B + C}{b^2 + c^2}.$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ (relação de Pitágoras), tem-se que $A = B + C$.

3.3.4. A generalização do Teorema de Pitágoras (Papus de Alexandria, 290-350 d.C.)

Seja o triângulo retângulo ABC (figura 26). Construiremos sobre seus lados \overline{AB} e \overline{BC} , os paralelogramos $ABDE$ e $BCFG$, respectivamente. Seja H a intersecção dos prolongamentos dos lados \overline{ED} e \overline{FG} destes paralelogramos. Uniremos H e B através de um segmento de reta que será prolongado até J , onde J é tal que $\overline{IJ} \equiv \overline{HB}$.

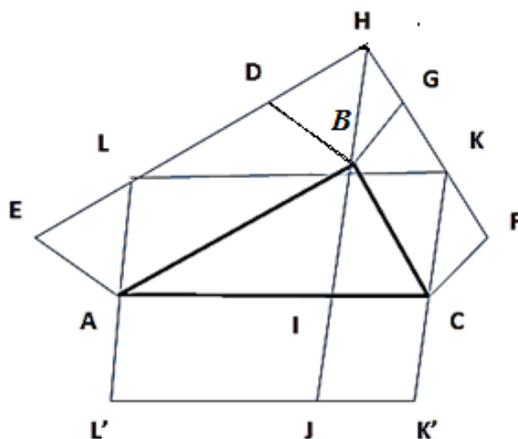


Figura 26

Seja $\overline{LL'} \parallel \overline{BJ} \parallel \overline{KK'}$ onde $\overline{AL'} \equiv \overline{AL} \equiv \overline{IJ} \equiv \overline{IB} \equiv \overline{CK'} \equiv \overline{CK} \equiv \overline{HB}$. Os triângulos ALE e BHD são congruentes (ALA, ângulo-lado-ângulo).

Os paralelogramos $ABDE$ e $ABHL$ são equivalentes em área, pois possuem a mesma base \overline{AB} e a mesma altura (distância entre as retas paralelas, suporte dos lados \overline{AB} e \overline{ED}). Os paralelogramos $ABHL$ e $AIBL$ são equivalentes em área, pois possuem a mesma base \overline{AL} e a mesma altura (distância entre as retas paralelas, suportes dos lados $\overline{LL'}$ e \overline{BJ}). Concluimos que o paralelogramo $ABDE$ é equivalente, em área, ao paralelogramo $AIBL$, e de forma análoga concluimos que o paralelogramo $BCFG$ é equivalente em área ao paralelogramo $ICKB$.

Denotaremos a área do paralelogramo $ABDE$ por S_{ABDE} , e área dos demais paralelogramos de forma análoga. Teremos:

$$S_{ABDE} = S_{ABHL} = S_{AIBL} = S_{AIJL'}; \quad S_{BCFG} = S_{BCKH} = S_{CKBI} = S_{CK'JI},$$

$$S_{AIJL'} + S_{CK'JI} = S_{ACK'L'} \text{ ou seja } S_{ABDE} + S_{BCFG} = S_{ACK'L'}$$

3.3.5. Outra generalização do Teorema de Pitágoras (Jean Paul Gua de Malves, século XVIII)

Considere no R^3 , um sistema de eixos ortogonais $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ e os pontos $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ e $C(0,0,c)$. O plano que passa por A, B e C , e os planos coordenados determinam um tetraedro com vértices A, B, C e O . As faces deste tetraedro estão nos planos determinados por XOY, XOZ, YOZ e ABC . Um triedro, tri-retângulo de vértice O , foi cortado por um plano que contém A, B e C (figura 27).

Um plano que contém \overrightarrow{OZ} e é perpendicular a \overline{AB} , determina no triângulo ABC o segmento \overline{CH} , e determina no triângulo ABO o segmento \overline{OH} .

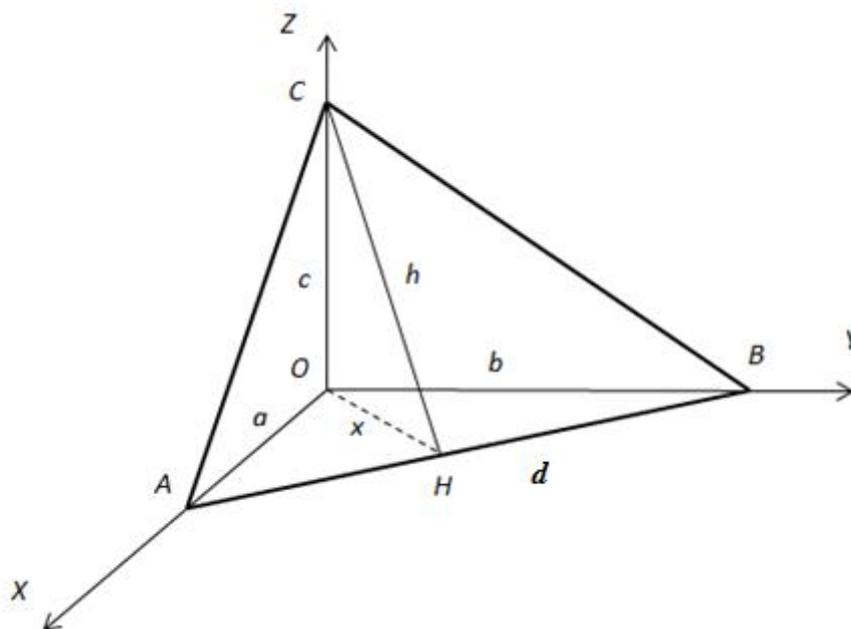


Figura 27

Por construção, \overline{OH} e \overline{CH} são perpendiculares a \overline{AB} , cujas medidas são respectivamente x e h .

Vamos demonstrar que o quadrado da área do triângulo ABC é igual à soma dos quadrados das áreas dos triângulos ABO, ACO e BCO .

Em um triângulo retângulo, o produto da hipotenusa pela altura a ela relativa é igual ao produto dos catetos. Seja a, b, c e d , respectivamente as medidas dos segmentos \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} e \overline{AB} . No triângulo retângulo ABO temos: $x.d = a.b$.

Denotando por S_{UVW} a área de um triângulo UVW , e usando esta notação nos triângulos faces do tetraedro, teremos:

$$S_{ABC} = \frac{d.h}{2} ; S_{ACO} = \frac{a.c}{2} ; S_{ABO} = \frac{a.b}{2} ; S_{BCO} = \frac{b.c}{2}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} (S_{ACO})^2 + (S_{ABO})^2 + (S_{BCO})^2 &= \frac{a^2.c^2}{4} + \frac{a^2.b^2}{4} + \frac{b^2.c^2}{4} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot [(d^2.x^2) + c^2.(a^2 + b^2)] = \frac{1}{4} \cdot [(d^2.x^2) + (c^2.d^2)] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot [d^2.(x^2 + c^2)] = \frac{1}{4} \cdot [d^2.h^2] = \left(\frac{1}{2} \cdot [d.h]\right)^2 = (S_{ABC})^2. \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$(S_{ABC})^2 = (S_{ACO})^2 + (S_{ABO})^2 + (S_{BCO})^2$$

Observação: É possível ainda estender esse resultado para uma figura plana qualquer, ou seja, se ela for projetada em três planos perpendiculares dois a dois, a área dessa figura é igual à soma das áreas das suas três projeções.

4. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Apresentaremos a relação de Pitágoras sendo usada nas resoluções de questões de diversos exames como também, na solução de alguns problemas práticos. Assim, verificaremos a ampla empregabilidade do Teorema.

4.1. Visualização Geométrica das médias aritmética, geométrica e harmônica [12]

O Teorema de Pitágoras pode ser usado para visualizar geometricamente as médias aritmética, geométrica e harmônica. Na figura 28, temos uma circunferência com centro em O e raio \overline{OF} cuja medida é R , e o triângulo retângulo ABC , retângulo em A . Traçamos a altura \overline{AD} relativa à hipotenusa \overline{BC} , cuja medida é x . No triângulo retângulo AED , y é a medida do cateto \overline{AE} .

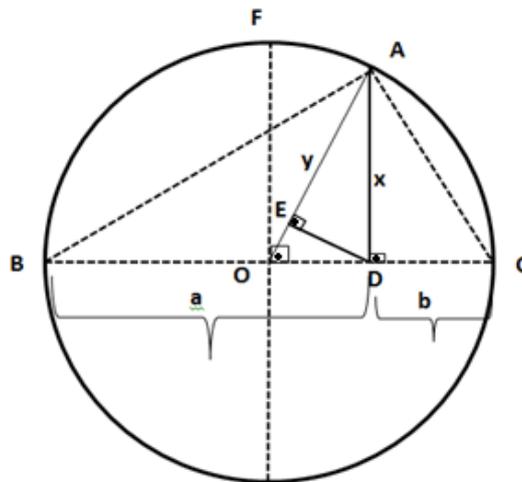


Figura 28

Os triângulos retângulos ADO , AED e OED são semelhantes (AAA, ângulo-ângulo-ângulo).

Sendo a medida dos segmentos \overline{BD} e \overline{DC} , a e b respectivamente, usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABC , ADB e ADC , temos:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ ou } (BD + DC)^2 = AB^2 + AC^2 \quad (*)$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = x^2 + a^2 \quad (I); \quad AC^2 = AD^2 + DC^2 = x^2 + b^2 \quad (II)$$

Substituindo (I) e (II) em (*), teremos:

$$(a + b)^2 = x^2 + a^2 + x^2 + b^2 \text{ ou } a^2 + 2.a.b + b^2 = 2.x^2 + a^2 + b^2,$$

$$\text{segue que } x^2 = a.b, \text{ assim } x = \sqrt{a.b}$$

isto é $x = AD$ é a média geométrica dos números a e b .

Como a medida do diâmetro $BC = 2.R = a + b$, segue que $R = \frac{(a+b)}{2}$, isto é R é a média aritmética dos números a e b .

Usando a semelhança dos triângulos AED e OED , teremos:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{DE}{EO} \text{ ou } DE^2 = AE.EO, \text{ assim } DE^2 = y.(R - y) \quad (*)$$

Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo AED , teremos:

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 \text{ ou } x^2 = y^2 + DE^2 \quad (I); \text{ Substituindo } (*) \text{ em } (I), \text{ teremos:}$$

$$x^2 = y^2 + y.(R - y) \text{ ou } a.b = y^2 + R.y - y^2 \text{ assim, } a.b = R.y, \text{ onde } R = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{logo, } y = \frac{a.b}{R} \text{ ou } y = \frac{a.b}{\frac{a+b}{2}} \Rightarrow y = \frac{2.a.b}{a+b} \quad (\text{Média Harmônica dos números } a \text{ e } b)$$

Geometricamente, podemos concluir que:

$$AE < AD < OF \text{ ou seja, } \quad MH < MG < MA \quad (\text{desigualdade das médias})$$

A igualdade das Médias só ocorrerá quando os números a e b forem iguais.

No caso de $MH = MG = MA$, ou seja, a igualdade das médias ocorrerá quando os números que a compõem forem iguais. Assim, quando $a = b$, por construção, teremos:

$$\text{Se } a = b \Rightarrow \triangle ABC \text{ será isósceles } \Rightarrow \overline{OF} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{AE} \text{ ou seja, } \quad MH = MG = MA$$

Concluimos a desigualdade das médias:

$$MH \leq MG \leq MA$$

4.2. As Lúnulas de Hipócrates

Hipócrates de Chios foi um dos pitagóricos. Além de geômetra, gostava muito de analisar as luas crescentes, que em matemática chamam-se Lúnulas. Hipócrates concluiu, usando a generalização do Teorema de Pitágoras, que a medida da área do triângulo retângulo ABC é igual à soma das medidas das áreas das Lúnulas construídas sobre seus catetos.

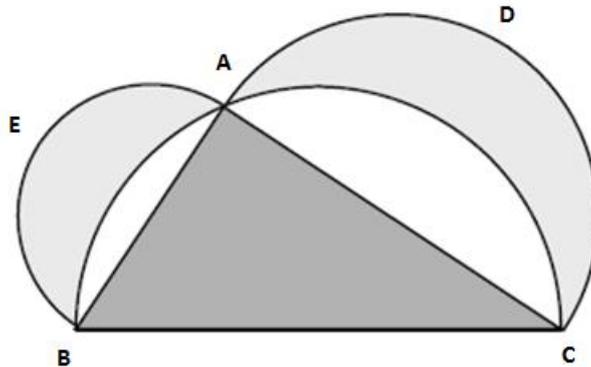


Figura 29

Sobre os lados do triângulo retângulo ABC (figura 29), construímos semicircunferências BAC , BEA , ADC . Seja a área do semicírculo BAC denotada por S_{BAC} , e para a área dos demais semicírculos, adotaremos a mesma notação. Denotaremos a área do triângulo retângulo ABC por $S_{\Delta ABC}$.

Concluimos da generalização do Teorema de Pitágoras (3.3.3) que:

$$S_{BAC} = S_{ADC} + S_{BEA} \quad (*)$$

A soma das áreas das Lúnulas (sombreada clara) é dada por:

$$S_{ADC} + S_{BEA} - (S_{BAC} - S_{\Delta ABC}) = S_{Lúnulas},$$

$$S_{ADC} + S_{BEA} - S_{BAC} + S_{\Delta ABC} = S_{Lúnulas} \quad (I).$$

Substituindo () em (I), teremos : $S_{\Delta ABC} = S_{Lúnulas}$.*

4.3. A representação geométrica dos números do tipo " $a.\sqrt{n}$ " na reta Real

Hipásus de Metaponto, por volta de 420 a.C., causou enorme escândalo entre os pitagóricos ao anunciar a descoberta de grandezas incomensuráveis, ou seja, de números que não poderiam ser expressos na forma de fração, os chamados números irracionais. Esta descoberta abalou toda a fé dos pitagóricos, baseada nos números inteiros.

Ao que tudo indica, Hipásus teve a percepção da incomensurabilidade de grandezas ao analisar um triângulo retângulo isósceles e comparar seu lado (cateto) com sua hipotenusa. Vejamos a lógica adotada por Hipásus :

Seja o triângulo retângulo isósceles de catetos cuja medida é l e de hipotenusa cuja medida é h (figura 30). Da relação de Pitágoras, teremos:

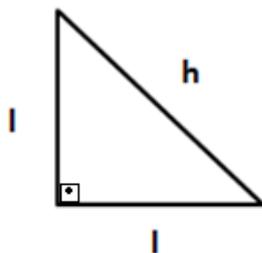


Figura 30

$$h^2 = l^2 + l^2 = 2.l^2 \quad (*)$$

Suponhamos $\frac{h}{l}$ racional, isto é $\frac{h}{l} = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$). De (*) temos,

$$\frac{h^2}{l^2} = \frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{então } p^2 = 2.q^2 \quad (I).$$

Logo, p^2 é par e assim p é par. Então q deve ser ímpar ($\frac{p}{q}$, p e q primos entre si).

Façamos $p = 2.k$ ($k \in \mathbb{Z}$). De (I) temos que, $(2.k)^2 = 2.q^2$ ou $4.k^2 = 2.q^2$ ou $q^2 = 2.k^2$, q^2 é par e assim q é par. Mas q deveria ser ímpar, logo uma contradição

Assim $\frac{h}{l}$ não é racional, h e l são grandezas incomensuráveis. Os irracionais haviam sido descobertos. Hipasus não se conteve, a pedido dos pitagóricos, e revelou sua descoberta contribuindo para o desenvolvimento da matemática, e também para sua expulsão da confraria.

Os números do tipo $a \cdot \sqrt{n}$, onde $a \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{N}$, podem ser localizados geometricamente na reta real através do Teorema de Pitágoras. Vejamos:

Consideremos duas retas paralelas cuja distância entre elas é uma unidade (figura 31). Construiremos vários triângulos retângulos com um dos catetos de medida constante igual a um, e usando o Teorema de Pitágoras, determinaremos a medida da hipotenusa de cada um desses triângulos. Essa medida encontrada será transportada, através de um arco de círculo, para a reta Real, obtendo-se a representação geométrica do número irracional \sqrt{n} .

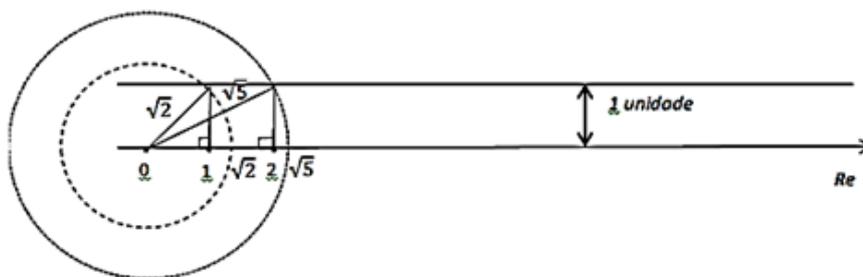


Figura 31

Ao obtermos geometricamente, na reta Real, os números da forma \sqrt{n} com $n \in \mathbf{N}$, se quisermos obter na reta real os números da forma " $a \cdot \sqrt{n}$ ", podemos com um compasso, transportar a medida deste segmento a vezes e teremos a medida de $a \cdot \sqrt{n}$.

Por exemplo, uma vez encontrado a medida $\sqrt{3}$, com um compasso aberto nesta medida, transportamo-la para a reta Real, cinco vezes, obtendo-se $5\sqrt{3}$ (figura 32).

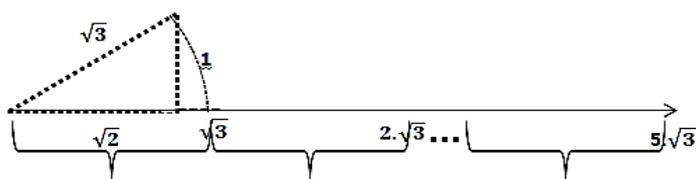


Figura 32

4.4. Os ternos pitagóricos e os números primos [16]

Um terno pitagórico é um conjunto formado por três inteiros positivos, a , b e c , que satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, inteiros que representem as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Será que podemos formar um destes ternos pitagórico somente de números primos? Para respondermos a esta pergunta, vamos apresentar um pequeno relato sobre os ternos pitagóricos.

No tablete Plinpton 322 constam evidências de que os babilônios sabiam como encontrar estes ternos pitagóricos, pois nele havia colunas de números inteiros cujo quadrado de um destes números era igual à soma dos quadrados dos outros dois, e uma das formas de gerar tais números é atribuída a Platão (século IV a.C.). Apresentaremos essa forma:

Se m e n são inteiros positivos, $m > n$, defina a , b e c por:

$$\begin{aligned} a &= (m^2 + n^2); \quad c = (m^2 - n^2); \quad b = 2.mn, \text{ então } c^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2.mn)^2 = \\ &= m^4 - 2.m^2.n^2 + n^4 + 4.m^2.n^2 = m^4 + 2.m^2.n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = a^2. \end{aligned}$$

Isto é, os números a , b e c formam um terno pitagórico.

Exemplo: Se $m = 2$ e $n = 1$, então $a = (2^2 + 1^2) = 5$; $c = (2^2 - 1^2) = 3$;

$b = 2.2.1 = 4$. Encontramos o terno pitagórico 3, 4, 5.

O método de Platão não é o único para obtermos ternos pitagóricos. Em “Fábrica de Ternos Pitagóricos” (Rocha, Sérgio. RPM 55) temos:

Se em um triângulo retângulo as medidas dos catetos são os inteiros a e b , e a hipotenusa tem medida $b + 1$, temos:

$$a^2 + b^2 = (b + 1)^2 = b^2 + 2.b + 1 \text{ ou } a^2 = 2.b + 1 \quad (*). \text{ Segue que } a \text{ é ímpar.}$$

Veja que para qualquer $a > 1$, ímpar, sempre existe b satisfazendo a condição (*). Assim para todo $n \in \mathbf{N}$, o terno pitagórico fica definido por:

$$(a_n, b_n, b_n + 1), \text{ onde } a_n = 2.n + 1 \text{ e } b_n = \frac{1}{2}.(a_n^2 - 1).$$

Na tabela 1 apresentaremos a Fábrica de produzir estes ternos pitagóricos.

n	cateto menor (a) $a_n = 2 \cdot n + 1$	cateto maior (b) $b_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n^2 - 1)$	hipotenusa (b+1) $b_n + 1$
<u>1</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
<u>2</u>	<u>5</u>	12	13
<u>3</u>	<u>7</u>	24	25
<u>4</u>	<u>9</u>	40	41
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 1

Pitágoras dividiu os números em duas categorias, os que são divisíveis por dois (pares) e os que quando divididos por dois deixam resto um (ímpares). Ele estabeleceu as regras de cálculo referentes à paridade na adição: par mais par igual a par, ímpar mais ímpar igual a par, par mais ímpar igual a ímpar, e, na multiplicação, par vezes par é igual a par, ímpar vezes ímpar é igual a ímpar, e par vezes ímpar é igual a par.

Sabemos que o único primo par é o número 2, e que não há terno pitagórico cujo número 2 seja um dos seus elementos.

Se dois elementos b e c de um terno pitagórico são ímpares então b^2 e c^2 também serão ímpares e assim $a^2 = b^2 + c^2$ é um número par e portanto a será par. Como a é diferente de 2, a não será um número primo.

Conclusão: Não há terno pitagórico formado somente de primos.

4.5. Questões do Exame Nacional de Acesso (ENA) e de Qualificação (EQ) do PROFMAT

1.(ENA 2012). Os hexágonos regulares $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$ estão respectivamente inscrito e circunscrito à uma circunferência de centro O (figura 33). A razão $\frac{\text{área } A'B'C'D'E'F'}{\text{área } ABCDEF}$ vale:

- a) $3/2$ b) $4/3$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) 2

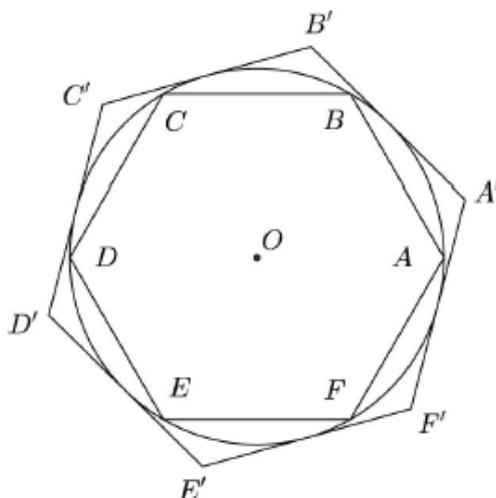


Figura 33

Solução:

Ao olharmos para um hexágono regular, podemos visualisá-lo como a união de seis triângulos equiláteros de lados iguais ao lado do hexágono, cuja medida de suas alturas é h que corresponde ao apótema (a_6) do hexágono. Assim, no hexágono $ABCDEF$ inscrito no círculo de centro O e raio $\overline{OA} \equiv \overline{AB}$, cuja medida é R , teremos:

$$\text{área } ABCDEF = 6 \cdot \frac{AB \cdot h}{2} = 3 \cdot R \cdot \text{apótema } (a_6) \quad (I)$$

Aplicando o Teorema de pitágoras para encontrarmos o apótema (a_6), que é a altura do triângulo equilátero OAB , teremos:

$$OA^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (a_6)^2 \text{ ou } R^2 = \frac{R^2}{4} + (a_6)^2 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot R^2 = (a_6)^2, \text{ logo } (a_6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R \quad (*)$$

Substituindo (*) em (I), teremos: $\text{área } ABCDEF = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot R^2$

No hexágono $A'B'C'D'E'F'$ circunscrito no círculo de centro O e raio R , teremos:

$$\text{área } A'B'C'D'E'F' = 6 \cdot \frac{(A'B') \cdot H}{2} = 3 \cdot (A'B') \cdot \text{apotema } (A_6) = 3 \cdot (A'B') \cdot R \quad (II)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras para encontrarmos a medida do lado $\overline{A'B'}$ do hexágono $A'B'C'D'E'F'$, teremos :

$$(OA')^2 = R^2 + \left(\frac{A'B'}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot (OA')^2 = R^2 \text{ ou } \frac{3}{4} \cdot (A'B')^2 = R^2, \text{ logo } A'B' = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot R \quad (**)$$

Substituindo (**) em (II), teremos : $\text{área } A'B'C'D'E'F' = 2\sqrt{3} \cdot R^2$

Assim, a razão pedida na questão , vale: $\frac{2\sqrt{3} \cdot R^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot R^2} = \frac{4}{3}$ (Alternativa B)

2.(ENA 2013). Considere um triângulo isósceles inscrito em um círculo cuja medida do raio é 3 metros, como mostra a figura 34 a. Se x representa a medida, em metros, da altura desse triângulo com relação à sua base, então sua área, em metros quadrados, é igual a:

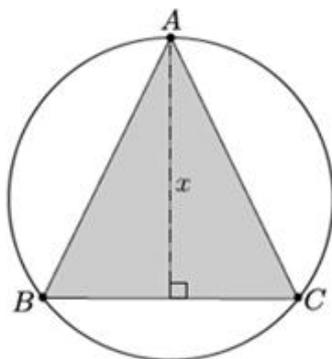


Figura 34 a

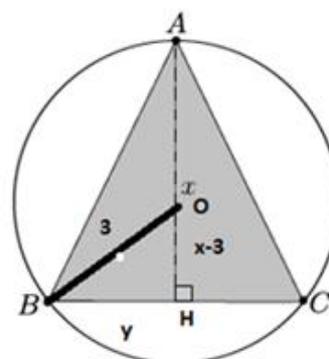


Figura 34 b

- a) $x \cdot \sqrt{x \cdot (6 - x)}$ b) $\frac{x}{2} \cdot \sqrt{x \cdot (6 - x)}$ c) $x \cdot \sqrt{x \cdot (3 - x)}$ d) $\frac{x}{2} \cdot \sqrt{x \cdot (3 - x)}$ e) $\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Solução:

Considerando o centro O do círculo (figura 34 b), considere a medida de \overline{OH} e \overline{BH} , respectivamente, $x - 3$ e y , usando o Teorema de Pitágoras no triângulo OHB , teremos:

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \text{ ou } 3^2 = (x - 3)^2 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2,$$

$$y^2 = x(6 - x), \text{ logo } y = \sqrt{x(6 - x)} \quad (*)$$

A área do triângulo ABC ($S_{\Delta ABC}$) é dada por : $S_{\Delta ABC} = AH \cdot \frac{BC}{2} = x \cdot y$ (I)

Substituindo (*) em (I), teremos :

$$S_{\Delta ABC} = x \cdot \sqrt{x(6 - x)} \text{ (Alternativa A)}$$

3. (E.Q 2012/Setembro) A figura 35a mostra uma folha de papel retangular $ABCD$ com $AB=25$ cm e $BC=20$ cm. Foi feita uma dobra no segmento \overline{AE} de forma que o vértice B coincidiu com o ponto P do lado \overline{CD} do retângulo $ABCD$.

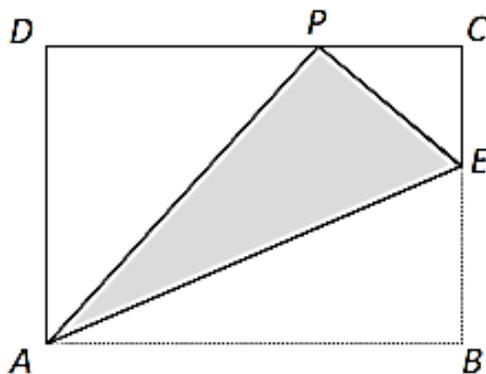


Figura 35 a

- Calcule o comprimento do segmento \overline{DP} .
- Calcule o comprimento do segmento \overline{AE} .

Solução:

Após a dobradura, o ponto B foi levado em P , (figura 35 b), então $AB=AP$.
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADP , teremos :

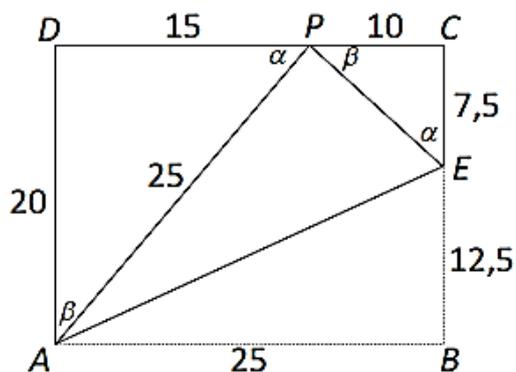


Figura 35 b

$$AP^2 = AD^2 + DP^2 \text{ ou } AB^2 = AD^2 + DP^2, \text{ assim } 25^2 = 20^2 + DP^2, \text{ logo } DP^2 = 225,$$

concluimos que $DP = 15 \text{ cm}$.

$$\text{Se } DP = 15 \text{ cm, então } PC = 10 \text{ cm, pois } DP + PC = DC = 25 \text{ cm}$$

Os triângulos ADP e PCE são semelhantes, pois seus ângulos homólogos correspondentes possuem mesma medida. Teremos :

$$\frac{DP}{AD} = \frac{CE}{PC} \text{ ou } \frac{15}{20} = \frac{CE}{10}, \text{ assim } CE = 7,5 \text{ cm}$$

$$\text{Se } CE = 7,5 \text{ cm, então } BE = 12,5 \text{ cm, pois } CE + BE = BC = 20 \text{ cm}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABE , teremos:

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 \text{ ou } AE^2 = 25^2 + 12,5^2, \text{ logo } AE = \sqrt{25^2 + 12,5^2} \text{ cm}$$

Podemos considerar também que AB é o dobro de BE , assim se $AB = 2a$ e $BE = a$, teremos : $AE^2 = a^2 + (2a)^2$ ou $AE^2 = 5 \cdot a^2$ ou $AE = a \cdot \sqrt{5}$, logo

$$AE = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{5} \text{ cm.}$$

4.(ENA 2013). Em um triângulo retângulo conhecem-se a soma s dos catetos e a altura h relativa à hipotenusa. Qual das expressões abaixo representa o valor da hipotenusa em função de s e h ?

- A) $s - h$ B) $\sqrt{h^2 + s^2}$ C) $s + \sqrt{s^2 - h^2}$ D) $\sqrt{h^2 + 4s^2} - h$ E) $\sqrt{h^2 + s^2} - h$

Solução:

Seja o triângulo retângulo cujos lados medem a , b e c , e a altura relativa à hipotenusa mede h (figura 36), logo vale a relação: $a \cdot h = b \cdot c$ (*)

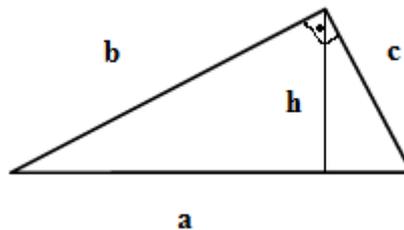


Figura 36

Seja $s = b + c$, a soma dos catetos. Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$ (Pitágoras), teremos: $s^2 = (b + c)^2 = b^2 + 2 \cdot bc + c^2$ ou $s^2 = a^2 + 2 \cdot bc$ (I).

Substituindo (*) em (I), teremos: $s^2 = a^2 + 2 \cdot ah$ ou $a^2 + 2 \cdot h \cdot a - s^2 = 0$ (II)

Note que (II) é uma equação quadrática em a , logo temos que:

$$a = \frac{-2 \cdot h \pm \sqrt{4 \cdot h^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-s^2)}}{2} = \frac{-2 \cdot h \pm \sqrt{4 \cdot (h^2 + s^2)}}{2} = \frac{-2 \cdot h \pm 2\sqrt{h^2 + s^2}}{2},$$

como $a > 0$; $a = \frac{-2 \cdot h + 2 \cdot \sqrt{h^2 + s^2}}{2} = -h + \sqrt{h^2 + s^2}$, ou seja $a = \sqrt{h^2 + s^2} - h$

(Alternativa E)

4.6. A condição de perpendicularidade entre segmentos

O sistema de coordenadas cartesianas no plano consiste de duas retas perpendiculares, chamadas de eixos coordenados. A origem O do sistema é a intersecção destes eixos, os quais são chamados de Ox (*eixo horizontal*) e Oy (*eixo vertical*). Cada ponto P do plano é representado por um par de números (x, y) chamados de coordenadas de P . Como obter a distância entre dois pontos do plano usando o Teorema de Pitágoras ?

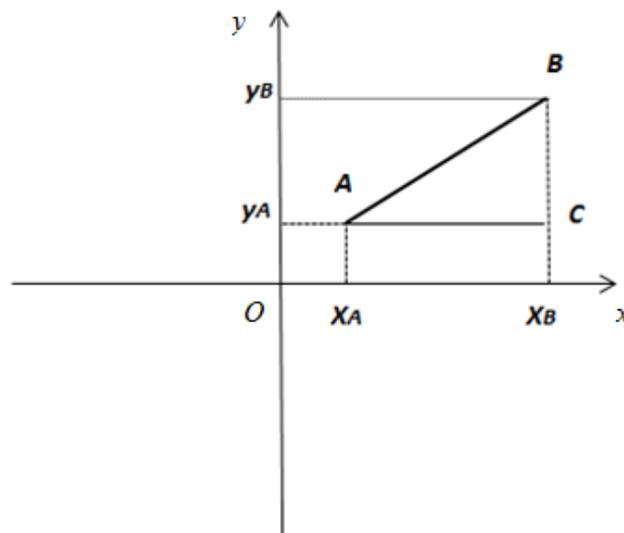


Figura 37

Seja $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos do plano. No triângulo retângulo ABC (figura 37) as coordenadas do vértice C são (x_B, y_A) . Denotaremos a distância do ponto A ao ponto B por $d(A, B)$. Usando a mesma notação para as demais distâncias, e aplicando a relação de Pitágoras, teremos:

$$[d(A, B)]^2 = [d(A, C)]^2 + [d(B, C)]^2 \text{ ou } d(A, B) = \sqrt{[d(A, C)]^2 + [d(B, C)]^2}.$$

$$\text{Logo } d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (I)$$

Observe que o estudo das cônicas pode ser feito usando a fórmula da distância entre dois pontos e portanto é uma consequência do Teorema de Pitágoras.

Na figura 38, O é a origem do sistema de coordenadas cartesianas xOy , $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos distintos do plano. Qual deve ser a relação entre as coordenadas de A e as coordenadas de B para que os segmentos de retas \overline{OA} e \overline{OB} sejam perpendiculares? Responderemos a essa pergunta usando a fórmula da distância entre dois pontos. Teremos:

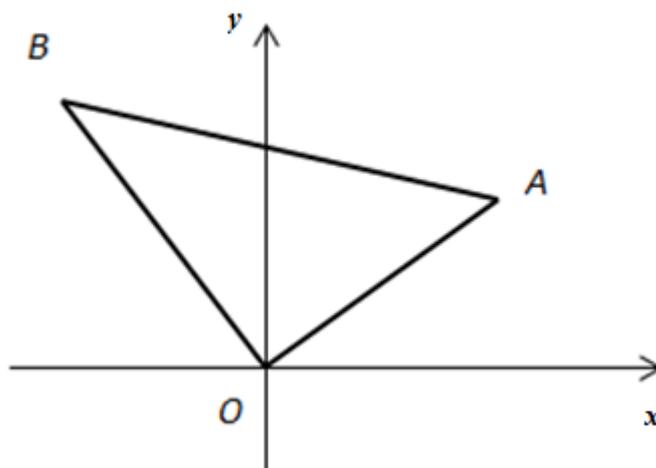


Figura 38

Os segmentos \overline{OA} e \overline{OB} são perpendiculares se e somente se o triângulo ABO é retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2, \text{ assim:}$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2 + (x_B - 0)^2 + (y_B - 0)^2,$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2 = x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2, \text{ então temos:}$$

$$x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_B + x_B^2 + y_B^2 - 2 \cdot y_A \cdot y_B + y_A^2 = x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2, \text{ ou seja,}$$

$-2 \cdot x_A \cdot x_B - 2 \cdot y_A \cdot y_B = 0$, assim $x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B = 0$, que é a condição para que os segmentos \overline{OA} e \overline{OB} sejam perpendiculares.

4.7. Questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).[13]

O ENEM foi criado como uma das formas de avaliar o Ensino Médio nas instituições de ensino no Brasil. Atualmente o ENEM está também servindo como forma de ingresso nas principais Universidades Federais do país, substituindo os tradicionais vestibulares .

Vejam algumas questões do ENEM que abordam o conhecimento do Teorema de Pitágoras.

1. (ENEM-2006) Na figura 39, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

- a) 1,8m
- b) 1,9m
- c) 2,0m
- d) 2,1m
- e) 2,2m

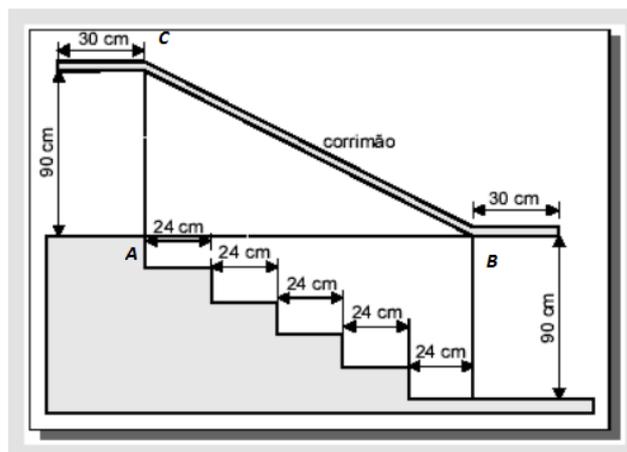


Figura 39

Solução:

Usando a relação de Pitágoras no triângulo retângulo ABC (figura 39) teremos:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ ou } BC^2 = (5 \cdot 24 \text{ cm})^2 + (90 \text{ cm})^2 = (120)^2 + (90)^2 \text{ ou}$$

$$BC^2 = 14400 + 8100 = 22500 \text{ cm}^2, \text{ assim } BC = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m}$$

Na questão é pedido o comprimento total do corrimão, logo teremos:

$$BC + 30 \text{ cm} + 30 \text{ cm} = 150 + 30 + 30 = 210 \text{ cm} = 2,1 \text{ m (alternativa D)}$$

2. (ENEM 2008) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 40a. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 40b e 40c.

Se o lado \overline{AB} do hexágono mostrado na figura 40b mede 2 cm, então a área da figura 40c, que representa uma “casinha”, é igual a :

- A) 4 cm² B) 8 cm² C) 12 cm² D) 14 cm² E) 16 cm²

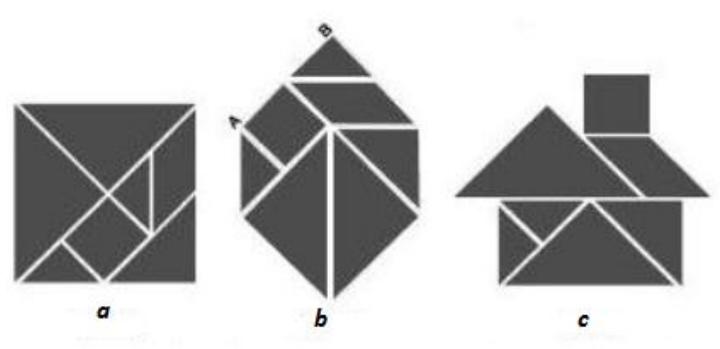


Figura 40

Solução:

O lado \overline{AB} do hexágono é formado pelo lado do quadrado e pelo cateto do menor triângulo retângulo isósceles. Como a medida do lado do quadrado é igual a medida do cateto deste triângulo retângulo isósceles (figura 40a), concluímos que ambos medem 1 cm. O lado menor do paralelogramo também mede 1 cm, pois é igual ao lado do quadrado (figura 40b).

Veja que no quadrado maior (figura 40a) a diagonal é formada pela junção de quatro lados de figuras menores, todos medindo 1 cm. Usando o Teorema de Pitágoras, teremos:

Seja L a medida do lado do quadrado maior (figura 40a), logo :

$$4^2 = L^2 + L^2 = 2.L^2, \text{ assim } L^2 = 8$$

A medida da área do quadrado maior (figura 40a) é dada por L^2 , teremos:

$$\text{Área da figura 40a} = 8 \text{ cm}^2 = \text{Área da figura 40c}$$

A área da “casinha” (figura 40c) possuiu mesma medida da área do quadrado (figura 40a) pois ambas figuras são construídas com o mesmo tangram, assim a medida de sua área também será 8 cm^2 . (*Alternativa B*).

4.8. O método do pedreiro para obtenção de ângulos retos [12]

O método do pedreiro para construir paredes em esquadro, ou seja, paredes em ângulo reto, é similar ao adotado pelos egípcios a milhares de anos. Esse método consiste em fazer, no chão, alinhamentos com linhas (fios de nylon) presas em ferros de construção ou a estacas de madeira.

Os egípcios usavam o triângulo 3, 4, 5, pois já sabiam que ele era retângulo, (figura 41). O pedreiro utiliza outra terna pitagórica para a construção do ângulo reto, no caso, para cada lado é feito marcas no alinhamento. Em um desses lados é marcado 60 cm do ponto de encontro com o outro alinhamento, e no outro lado, é marcado 80 cm do mesmo ponto de encontro. Depois é medido com uma corda a distância entre os extremos dos lados de comprimento 60 cm e 80 cm, que deverá ser igual a 1m. Assim é obtido o ângulo reto na construção de uma casa.



Figura 41

O método é baseado num caso particular da recíproca do Teorema de Pitágoras. Vejamos a justificativa.

As medidas dos lados do triângulo, feito com linhas, satisfazem a igualdade $(1\text{ m})^2 = (60\text{ cm})^2 + (80\text{ cm})^2$ ou $(100\text{ cm})^2 = (60\text{ cm})^2 + (80\text{ cm})^2$, então o ângulo oposto ao lado de medida 100 cm é reto.

4.9. As medidas dos lados de um triângulo retângulo em seqüências numéricas

Encontraremos a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo para que elas formem seqüências em progressão geométrica e progressão aritmética.

4.9.1. Em Progressão Geométrica (P.G)

Seja o triângulo retângulo cuja medidas dos lados são a , b e c (figura 42). Para que estas medidas formem uma progressão geométrica (P.G), de razão q , devemos ter:

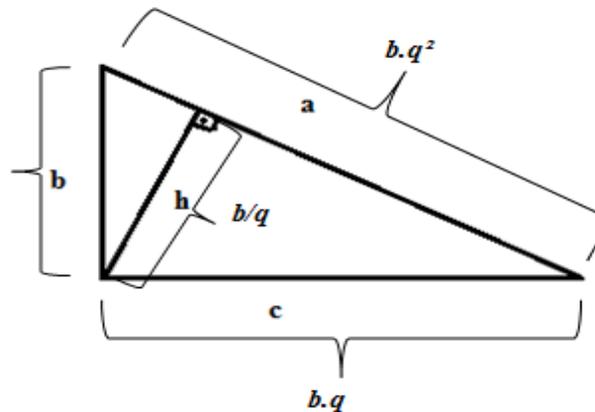


Figura 42

Considerando a P.G crescente (b, c, a) , onde $c = b \cdot q$ e $a = b \cdot q^2$, pelo Teorema de Pitágoras temos: $a^2 = b^2 + c^2$ ou $(b \cdot q^2)^2 = b^2 + (b \cdot q)^2$, assim $b^2 \cdot q^4 = b^2 + b^2 \cdot q^2$, como $b \neq 0$, teremos: $q^4 = 1 + q^2$ ou $q^4 - q^2 - 1 = 0$

Fazendo $q^2 = K$, teremos:

$$K^2 - K - 1 = 0, \text{ e assim } K = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = q^2$$

$$\text{Então } q = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}, \text{ como } q > 0 \text{ e } q \in R, \text{ temos } q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

O número $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é chamado de número de ouro. Então a razão da P.G é igual a raiz quadrada do número de ouro.

Veja que se h é a medida da altura relativa a hipotenusa, da relação $a \cdot h = b \cdot c$, conclui-se que $h = \frac{b \cdot c}{a}$. Disto segue que os números h, b, c, a formam uma progressão geométrica de razão $q = \sqrt{\varphi}$.

4.9.2. Em Progressão Aritmética (P.A)

Seja o triângulo retângulo ABC , retângulo em A , circunscrito ao círculo de centro O e raio R cujas medidas dos lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ e \overline{BC} são respectivamente $b - r, b, b + r$ (figura 43). Devemos mostrar sob que condição existe r , razão da progressão aritmética.

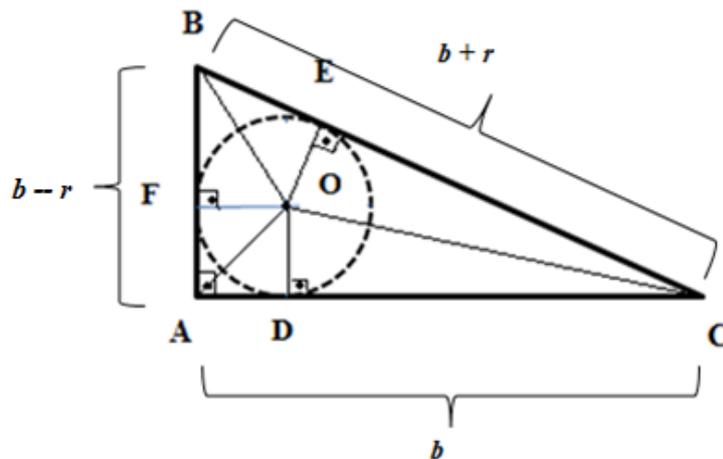


Figura 43

Se E, F e D são os pontos de tangência dos lados do triângulo retângulo com o círculo, temos:

Do caso especial de congruência de triângulos retângulos (se dois triângulos retângulos possuem ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então estes triângulos são congruentes), teremos:

$\triangle ODC \equiv \triangle OEC$ e $\triangle OFB \equiv \triangle OEB$, disto segue que $CE = CD$ e $BF = BE$, respectivamente.

$\triangle ODA \equiv \triangle OFA$, teremos $AD = AF = OD = OF = R$ (raio do círculo inscrito).

Temos ainda que:

$$CD = CA - AD = b - R \quad e$$

$$CE = BC - BE = b + r - (BF) = b + r - [(b - r) - R] = 2.r + R.$$

Como $CE = CD$, teremos $2.r + R = b - R$, e assim $b = 2.R + 2.r$ (I)

Usando o Teorema de Pitágoras temos:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ ou } (b + r)^2 = (b - r)^2 + b^2 \text{ ou ainda,}$$

$$b^2 + 2br + r^2 = b^2 - 2br + r^2 + b^2, \text{ assim } 4.b.r = b^2, \text{ como } b > 0, \text{ temos } b = 4.r \text{ (II)}$$

Das relações encontradas em (I) e (II), teremos:

$$2.R + 2.r = 4.r \text{ ou } 2.R = 2.r, \text{ assim } r = R \text{ (A razão da } P.A \text{ é igual ao raio do círculo)}$$

Então da relação (I) conclui-se que $b = 4.R$, e assim as medidas dos lados do triângulo retângulo ABC serão: $3R, 4R, 5R$.

4.10. O Aqueduto de Eupalinus (Ilha de Samos, século VI a.C.)

Por volta de 570 a 522 a.C., o tirano Polícrates governou a Ilha de Samos, situada no mar Egeu (parte oriental do mar mediterrâneo). A fortaleza da ilha foi construída numa encosta de frente para o mar, visando um posto estratégico de observação à época da construção, porém uma dificuldade surgiu, a fonte de água potável estava localizada mais ao norte, além do Monte Castro (O maciço de Ampelus) cuja elevação passava dos 266 metros em relação ao nível do mar.

Polícrates não abriu mão da localização de sua fortaleza e resolveu consultar um engenheiro da época, Eupalinus, para que este o ajudasse a solucionar o problema considerado primordial para o funcionamento da edificação. Eupalinus estudou o local e propôs uma solução genial e inusitada para a época. Ele sugeriu um aqueduto, para transportar a água potável da nascente ao norte, que atravessasse o Monte Castro até a fortaleza ao sul. Para isto, resolveu escavar dos dois lados da montanha, para que os túneis escavados pelo lado norte e sul se encontrassem em um certo ponto. Este método foi usado recentemente no túnel sob o canal da mancha, ligando a Inglaterra à França.

O problema era que Eupalinus não possuía os equipamentos modernos que dispomos hoje. Ele tinha apenas conhecimentos matemáticos e sua genialidade. Veja a técnica adotada pelo engenheiro de Polícrates:

O túnel deveria atravessar o calcáreo do Monte Castro por uma extensão maior que 1.000 metros, e os equipamentos de escavação da época resumiam-se em apenas uma pequena picareta e a mão humana. Eupalinus resolveu escavar dos dois lados do monte, atacando o problema em duas frentes de serviço, porém havia duas dificuldades a serem transpostas: a direção a ser escavada no monte e a garantia de encontro dos dois túneis (o plano das duas escavações deveria ser o mesmo). A figura 44 é a vista superior do Monte Castro (parte a ser escavada), onde o segmento \overline{AB} representa a extensão do túnel. Eupalinus usou a técnica dos egípcios para obtenção de ângulos retos e esquadrejou todo o contorno da região, assim ele saberia quanto teria andado para o sul e para o norte, e para o oeste e para o leste, respectivamente através das somatórias dos X_i e Y_j .

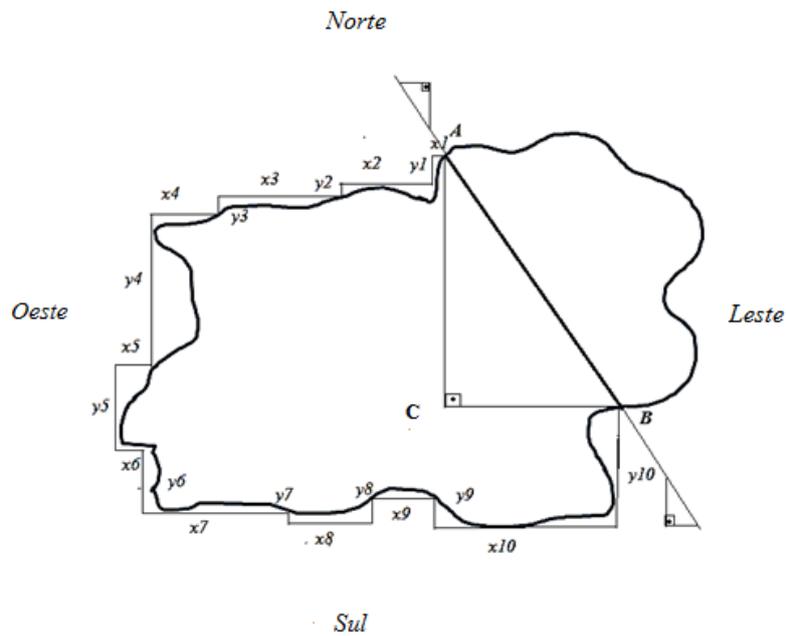


Figura 44

Veja que a medida do lado \overline{AC} é obtida através da somatória dos Y_j , considerando direção Norte-Sul valores positivos ($Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_9$) e direção Sul-Norte (Y_8, Y_{10}) valores negativos. Assim como a medida do lado \overline{BC} é obtida através da somatória dos X_i , considerando a direção Leste-Oeste valores negativos (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) e direção Oeste-Leste valores positivos ($X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$). Usando o Teorema de Pitágoras encontraremos a medida do lado \overline{AB} , comprimento do túnel a ser escavado:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Eupalinus garantiu a direção a ser escavada (lado \overline{AB}) construindo triângulo retângulos auxiliares externos ao túnel por ambos os lados (figura 44), pelos quais os trabalhadores tomavam referência do alinhamento das escavações. O problema da garantia de nível entre os pontos A e B , foi resolvido através de calhas construídas no contorno do Monte Castro, seguindo o esquadramento feito anteriormente, desta forma pode-se verificar se a água realmente fluía do lado norte (nascente da fonte) para o lado sul (fortaleza de Polícrates). Este método é conhecido atualmente pelos pedreiros como “bater o nível”.

4.11 A matemática por trás do GPS [17]

O GPS (Global Position System) é um sistema formado por um conjunto de 24 satélites orbitando em torno da Terra a uma altitude média de 20.000 Km permitindo a receptores conhecer sua posição instantânea sobre a superfície terrestre com notável precisão. Foi desenvolvido pelo departamento de defesa americano na década de 70 com propósito militar: para que seus navios e aeronaves pudessem determinar sua localização exata no globo terrestre, independente das condições climáticas. As órbitas em torno da Terra são seis e em cada uma delas orbita quatro satélites sendo que eles levam 12 horas para completá-las. Essa configuração garante que cada ponto sobre a superfície terrestre, seja visualizado por pelo menos quatro destes satélites. O gerenciamento desse sistema se dá através de estações espalhadas pelo nosso planeta, sendo a principal localizada no Colorado, U.S.A. Essas estações de gerenciamento monitoram todo o sistema e efetuam correções e reprogramações quando necessário, e após o processamento destes dados, o controle é novamente devolvido ao satélite.

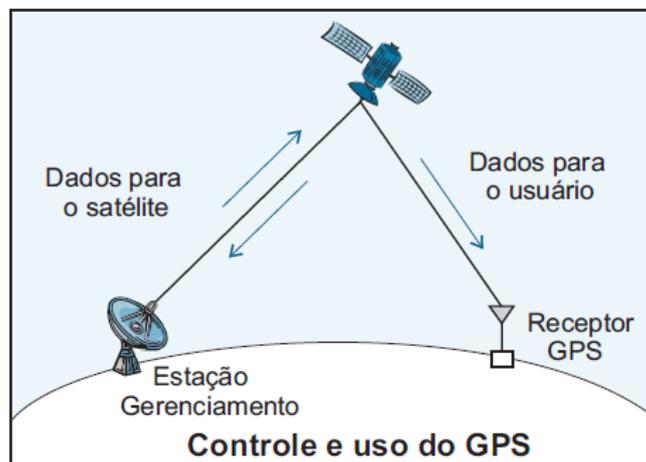


Figura 45

Hoje em dia o uso do GPS é bastante difundido na sociedade civil, auxiliando os navios e as aeronaves a se deslocarem de um local ao outro do globo com a precisão requerida, isto é chamado de navegação. Existem disponíveis no mercado até receptores portáteis que são instalados em carros, facilitando a locomoção nos grandes centros.

Veremos como o GPS determina com precisão a localização de um ponto sobre a superfície terrestre.

Cada um dos satélites do GPS transmite por onda de rádio um padrão fixo, que é recebido pelo receptor na Terra (usuário), funcionando como um cronômetro extremamente preciso. O intervalo de tempo entre a emissão e o recebimento deste padrão é medido pelo equipamento permitindo que o receptor calcule a distância que o separa do satélite, bastando para isto multiplicar o intervalo de tempo pela velocidade da luz ($\Delta S = \Delta t \cdot v$). Esta informação localiza o receptor sobre uma imaginária superfície esférica cujo centro é o satélite e o raio é a distância calculada pelo equipamento. Os satélites são programados para emitir a sua posição exata a cada instante, em relação a um fixado sistema ortogonal de coordenadas, a qual chama-se de efeméride. Assim com a posição do satélite (centro da esfera) e a distância calculada (raio da esfera) obtêm-se a equação geral da superfície esférica imaginária.

A localização do receptor se dá calculando-se os sinais emitidos por quatro satélites, interpretando a posição como sendo a intersecção de quatro superfícies esféricas imaginárias. O posicionamento é dado não por coordenadas cartesianas, mas por meio de coordenadas geográficas (latitude, longitude e a elevação).

O Teorema de Pitágoras é usado para obtenção da distância entre dois pontos num sistema de coordenadas cartesianas em três dimensões. A figura 46, representa um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal de origem O . Se $P(x, y, z)$ é um ponto, a distância entre O e P pode ser calculada do seguinte modo: Se d_1 é a hipotenusa do triângulo retângulo $OP'B$, onde P' é a projeção de P sobre o plano xOy e B a projeção de P' sobre o eixo Ox , usando o Teorema de Pitágoras teremos:

$$d_1^2 = x^2 + y^2 ; d^2(O, P) = d_1^2 + z^2 \Rightarrow d^2(O, P) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

De uma forma mais geral, a distância entre os pontos $P(x, y, z)$ e $C(u, v, w)$ é dada por:

$$d(P, C) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2}$$

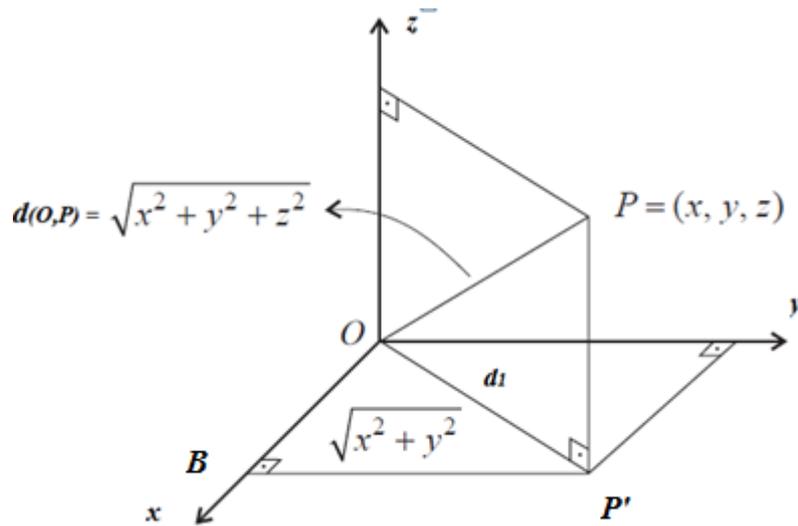


Figura 46

Se r um número real positivo e C um ponto fixo, o conjunto de pontos do espaço cuja distância a C é igual a r é chamado de superfície esférica S de centro C e raio r . Assim sendo $C(u, v, w)$ o ponto representando a efeméride do satélite num dado instante, e r representando a distância, calculada pelo receptor ao satélite, obteremos a equação:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2,$$

Ou equivalentemente:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0 \quad (I)$$

Veja que (I) é uma equação da forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (II), \quad \text{onde } a, b, c \text{ e } d \text{ são números reais}$$

Se S e S' são duas superfícies esféricas de centros distintos C e C' , respectivamente, e cujos respectivos raios são r e r' ($r \geq r'$), sendo O e O' os centros das superfícies esféricas, vemos que:

$$S \cap S' = \Phi(\text{vazio}) \Leftrightarrow d(O, O') > r + r' \text{ ou } d(O, O') < r - r'$$

$$S \cap S' = \{P\} \Leftrightarrow d(O, O') = r + r' \text{ ou } d(O, O') = r - r'$$

$$S \cap S' = \lambda(\text{uma circunferência}) \Leftrightarrow r - r' \leq d(O, O') \leq r + r'$$

A fundamentação matemática do funcionamento do GPS está baseada no teorema a seguir:

“Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros não são coplanares, então essa intersecção é um único ponto.”

Vejamos a prova deste teorema:

Sejam as quatro superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4 de centros C_1, C_2, C_3 e C_4 , respectivamente, mostraremos que se existir um $P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ e os centros C_1, C_2, C_3 e C_4 , não são coplanares, então $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = P$.

Sejam as equações gerais $x^2 + y^2 + z^2 + a_jx + b_jy + c_jz + d_j = 0$ de S_j , onde $j = 1, 2, 3, 4$, ao subtrairmos estas equações duas a duas obtemos equações lineares em x, y e z , pois os termos x^2, y^2, z^2 são eliminados. Veja que subtraindo, por exemplo, as equações de S_1 e S_2 , obtêm-se a equação de um plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Considerando-se os planos que contém $S_1 \cap S_2, S_1 \cap S_3, S_1 \cap S_4$, temos que se $P(x, y, z) \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ então (x, y, z) é solução do sistema linear

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0$$

$$(a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0$$

$$(a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0$$

Se provarmos que o sistema linear possui uma única solução o teorema estará provado.

Seja $C_j(u_j, v_j, w_j)$ o centro de S_j , onde $j = 1, 2, 3, 4$ comparando as equações (I) e (II) temos:

$$a_j = -2u_j; b_j = -2v_j; c_j = -2w_j; \text{ de modo que:}$$

$$\begin{pmatrix} (a_1 - a_2) & (b_1 - b_2) & (c_1 - c_2) \\ (a_1 - a_3) & (b_1 - b_3) & (c_1 - c_3) \\ (a_1 - a_4) & (b_1 - b_4) & (c_1 - c_4) \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} (u_2 - u_1) & (v_2 - v_1) & (w_2 - w_1) \\ (u_3 - u_1) & (v_3 - v_1) & (w_3 - w_1) \\ (u_4 - u_1) & (v_3 - v_1) & (w_3 - w_1) \end{pmatrix}$$

Como os centros C_1, C_2, C_3 e C_4 , são não coplanares, segue que o determinante à direita é não nulo, portanto o sistema linear possui uma única solução, no caso o ponto $P(x, y, z)$. É claro que estamos considerando a hipótese $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ para a validação do teorema.

É interessante observar que na situação real do GPS, a solução do sistema linear é o próprio usuário.

Vejamos agora como representar as coordenadas geográficas de um ponto no espaço:

Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O no centro da Terra, o eixo Oz positivo apontando para o polo Norte, o plano xOy sendo o plano do equador com o eixo Ox cortando o meridiano de Greenwich e o eixo Oy positivo cortando o meridiano de longitude 90° E.

Dado um ponto $P(x, y, z)$ do espaço, consideremos θ (latitude de P) e φ (longitude de P) como indicado na figura 47. A elevação ou altitude de P é representada pela diferença entre $OP = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra.

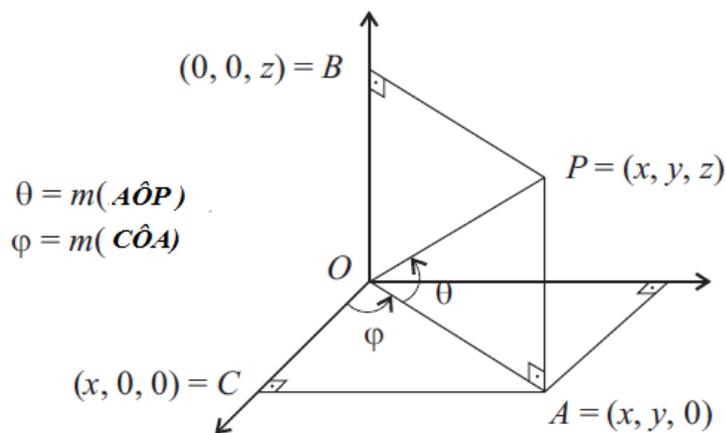


Figura 47

Vejamos como relacionar as coordenadas geográficas de P (*latitude, longitude e elevação*) com as coordenadas cartesianas de P .

No triângulo retângulo ΔOBP (figura 47) temos:

$$\cos(90 - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \theta \quad (I)$$

A expressão obtida em (I) determina um único valor a θ , entre 0 e 90° , quando $z > 0$, e um único valor a θ , entre -90° e 0 , quando $z < 0$. No caso de $z > 0$, dizemos que a latitude de P é θ° (N) Norte, e no caso de $z < 0$, dizemos que a latitude de P é θ° (S) Sul.

No triângulo retângulo ΔOAC (figura 47) temos:

$$\cos \varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \sin \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (II)$$

As expressões obtidas em (II) atribuem a φ um único valor entre 0 e 180° , quando $y > 0$, e um único valor entre -180° e 0 , quando $y < 0$. No caso de $y > 0$, dizemos que a longitude de P é φ° (E) Leste, e no caso de $y < 0$, dizemos que a longitude de P é φ° (W) Oeste.

4.12 O axioma V de Euclides e o Teorema de Pitágoras

Com a morte de Alexandre o Grande, o domínio sobre o Egito passou às mãos de Ptolomeu, um de seus líderes militares. E uma das primeiras e talvez mais importante obra de Ptolomeu foi criar em Alexandria, junto ao Museu (templo às musas), o primeiro modelo do que viriam a ser as universidades, séculos depois. Nesse centro, intelectuais de várias partes do mundo trabalhavam em tempo integral, dedicando-se às pesquisas e ao ensino às expensas dos cofres do Estado. Muitos grandes matemáticos trabalharam ou se formaram no Museu. Dentre eles, o notável Euclides (300 a.C.) , conhecido pela sua obra prima “*Elementos*”, o mais antigo texto grego a chegar completo a nossos dias. Obra em treze livros com mais de mil edições impressas em todo o mundo, desde a primeira em 1482, um feito editorial talvez só superado pela Bíblia. O forte dos “*Elementos*” é, sem dúvida, a geometria. A partir de cinco noções comuns, cinco postulados específicos e algumas definições, centenas de teoremas são deduzidos.

O axioma V de Euclides também estabelece que por um ponto fora de uma reta dada, existe uma única paralela à reta. Demonstraremos o Teorema de Pitágoras usando este axioma.

Seja o triângulo ABC retângulo em A (figura 48) e n , a reta suporte do lado \overline{AB} . Pelo axioma V de Euclides existe uma única reta m paralela a n que passa pelo ponto C . A reta t que contém a hipotenusa \overline{BC} é transversal às retas m e n .

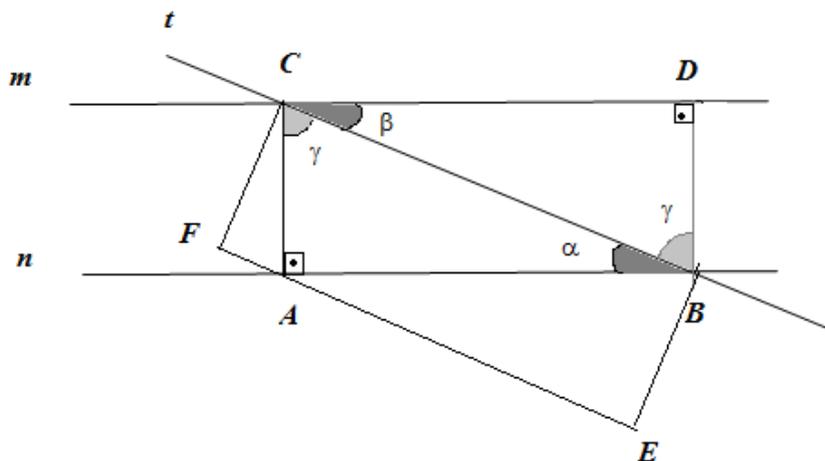


Figura 48

Veja que $\alpha \equiv \beta$. Considere o segmento \overline{BD} paralelo a \overline{AC} . Temos então o retângulo $ABDC$. Seja $\overline{FE} \parallel \overline{BC}$ de modo que o quadrilátero $BCFE$ seja um retângulo. Estes dois retângulos têm a mesma área, pois no triângulo retângulo ABC , vale a relação: $BC \cdot CF = AC \cdot AB$. Veja que \overline{CF} é a altura relativa à hipotenusa \overline{BC} .

Denotaremos por S_{ABC} a área do triângulo ABC , e adotaremos a mesma notação para os demais triângulos. Teremos:

$$S_{ABC} = S_{BDC} = \frac{S_{ABCD}}{2} \quad (I) ; \quad S_{AFC} + S_{ABC} + S_{AEB} = S_{BCFE} \quad (II)$$

Como a área dos retângulos $BCFE$ e $ABCD$ são iguais, de (I) e (II) teremos:

$$S_{ABCD} = S_{BCFE}, \text{ assim } 2 \cdot S_{ABC} = S_{AFC} + S_{ABC} + S_{AEB} \text{ ou } S_{ABC} = S_{AFC} + S_{AEB},$$

$$S_{BDC} = S_{AFC} + S_{AEB} \quad (III)$$

Veja que os triângulos retângulos BDC , AFC , AEB são e semelhantes (AAA), então teremos:

$$\frac{S_{BDC}}{BC^2} = \frac{S_{AFC}}{AC^2} = \frac{S_{AEB}}{AB^2}, \text{ segue então que } \frac{S_{BDC}}{BC^2} = \frac{S_{AFC} + S_{AEB}}{AC^2 + AB^2}.$$

Disto e da relação (III), segue que:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras})$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nós professores, fazemos parte de um sistema de ensino no qual é reservado pouco tempo a nossa qualificação e aperfeiçoamento. Estes se dão através da leitura e pesquisa, e o tempo é artigo de valor precioso para ser gasto em tais práticas, sendo ele gasto na maioria das vezes em aulas expositivas. Dessa maneira, o professor da rede básica de educação não adquire a devida atualização do conhecimento, necessária ao bom desempenho em sala de aula, comprometendo a sua prática pedagógica. Dedicamos este trabalho aos colegas de profissão, que por motivos diversos não foram felizardos em participar de cursos de aperfeiçoamento. Trata-se de aprofundamento de um tópico específico, objetivando disponibilizar um texto que tenha impacto na sua prática de sala de aula, contribuindo dessa maneira para a melhoria da educação de base.

Através de uma linguagem matemática simples, esperamos que esse texto alcance outros leitores apreciadores da rainha das ciências, denominação atribuída à matemática por Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Dessa forma, estaremos contribuindo para a difusão do conhecimento de um Teorema relativamente trivial, porém de grande aplicabilidade. As aplicações contidas neste trabalho, foram escolhidas de forma que acrescentassem algo de novo em relação ao que encontramos nos livros didáticos do ensino básico. A frase abaixo é bastante oportuna ao que se propõe esse trabalho de conclusão de curso.

“A essência do conhecimento consiste em aplicá-lo, uma vez possuído.”(Confúcio)

O professor Elisha Scott Loomis foi um grande apaixonado pelo Teorema de Pitágoras, pois agregou em seu livro “The Pythagorean Proposition” mais de trezentas e setenta demonstrações distintas deste teorema. Tais demonstrações, feitas em épocas distintas por diferentes autores, todas condensadas nessa obra, tiveram forte influência no desenvolvimento da segunda parte deste trabalho. Apresentamos aqui, em um único texto, informações que poderão contribuir para o aprimoramento do conteúdo a cerca do Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”(Paulo Freire)

O empenho dedicado à realização deste trabalho estará plenamente recompensado, se tiver alguma contribuição, por menor que seja, para a melhoria da aprendizagem, ou seja, para uma melhor compreensão do Teorema de Pitágoras por parte dos nossos alunos, e ainda mais se ele puder despertar em alguns o gosto pelo estudo da geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition**. 2 ed. Washigton D.C.: National Coucil of Teachers of Mathematics, 1972
2. BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. tradução: Elza F.Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed.da Universidade de São Paulo, 1974.
3. EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. tradução: Hygino H.Domingues, 5 ed. Campinas- São Paulo, Ed. Da UNICAMP, 2011.
4. GUEDJ, Denis. **O Teorema do Papagaio**. Tradução: Eduardo Brandão- São Paulo, Companhia das Letras, 1999.
5. DANTE, Luis Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo, Ed.Ática, 2010.
6. DANTE, Luis Roberto. **Matemática, volume único**. 1 Ed.. São Paulo, Ed.Ática, 2005.
7. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da matemática Elementar, 9: Geometria plana**. 7 ed. São Paulo, Ed. Atual, 1993.
8. DANTE, Luis Roberto. **Tudo é Matemática: ensino fundamental**. São Paulo, Ed.Ática, 2005.
9. WAGNER. E. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Apostila da OBMEP.
10. LIMA, E. L; CARVALHO, Paulo César. Pinto; WAGNER, E; MORGADO, Augusto César **Temas e Problemas Elementares**. SBM, 2005.
11. Painel I. A recíproca do Teorema de Pitágoras e O Método do pedreiro. RPM 77.
12. ARAÚJO, Fábio. 5º Encontro da RPM, Universidade federal da Bahia, Instituto de Matemática, 2011.
13. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coletânea de Provas. ENEM. Transformando esforço em Sucesso, 2012.

14. GUA DE MALVES, Jean Paul. O Teorema de Gua. Site Wikipedia, a enciclopédia livre. http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Gua.

15. HISTORY CHANNEL documentaries . Videos you tube .Uma aplicação prática do teorema de Pitágoras. <http://www.youtube.com/watch?v=4l4Z8qkvSUc>.

16. ROCHA, Sérgio. **Fábrica de ternos pitagóricos**. RPM 55, 2004.

17. ALVES, Sérgio, II bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.RPM 59, 2006.