Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

TIAGO REIS SILVA

DESENHOS GEOMÉTRICOS:
MÉTODOS CONSTRUTIVOS NO ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

GOIÂNIA, GO
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Tiago Reis Silva

3. Título do trabalho

Desenhos geométricos: métodos construtivos no ensino de geometria euclidiana

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Reis Silva**, **Discente**, em 07/08/2024, às 23:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Lopes Ferro**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/08/2024, às 16:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4728103** e o código CRC **7C1DC4E5**.

Referência: Processo nº 23070.034025/2024-64 SEI nº 4728103

TIAGO REIS SILVA

DESENHOS GEOMÉTRICOS:
MÉTODOS CONSTRUTIVOS NO ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade Federal de Goiás, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Lopes Ferro.

GOIÂNIA, GO

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Tiago Reis
Desenhos geométricos: métodos construtivos no ensino de geometria euclidiana [manuscrito] / Tiago Reis Silva. - 2024.
91 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Lopes Ferro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2024.
Bibliografia. Anexos.
Inclui abreviaturas, tabelas, lista de figuras.

1. construções geométricas. 2. régua e compasso. 3. geometria plana. I. Ferro, Marcelo Lopes, orient. II. Título.

CDU 51:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata 18 da sessão de Defesa de Dissertação de **Tiago Reis Silva** que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos sete dias do mês de agosto de dois mil e vinte e quatro, a partir das 14:00h, por meio de videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Desenhos geométricos: métodos construtivos no ensino de geometria euclidiana"**. Os trabalhos foram instalados pelo orientador, Professor Doutor Marcelo Lopes Ferro (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Marcelo Almeida de Souza (IME/UFG), membro titular interno e a professora Doutora Tatiana Pires Fleury Bezerra (IFG) membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho**.** A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado com louvor** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Marcelo Lopes Ferro, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos sete dias do mês de agosto de dois mil e vinte e quatro.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Almeida De Souza**, **Professor do Magistério Superior**, em 21/08/2024, às 09:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Lopes Ferro**, **Professor do Magistério Superior**, em 22/08/2024, às 17:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Tatiana Pires Fleury Bezerra**, **Usuário Externo**, em 23/08/2024, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4761294** e o código CRC **5D58C44D**.

Referência: Processo nº 23070.034025/2024-64 SEI nº 4761294

Dedico a minha mãe Margarida Teixeira, ao meu pai Ademar da Silva, a minha esposa Beatriz Rick e as minhas filhas Laís, Letícia e Lívia.

AGRADECIMENTOS

Com imensa gratidão e emoção, gostaria de iniciar agradecendo ao meu pai Ademar e a minha mãe Margarida, que me deram a vida e sempre me incentivaram e apoiaram em cada passo da minha jornada. Seus sacrifícios e ensinamentos foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui. A vocês, dedico toda minha gratidão e carinho.

A minha querida esposa Beatriz, que esteve ao meu lado em todos os momentos, acreditando em meus sonhos e me dando forças para continuar, mesmo nas horas mais difíceis. Seu amor e apoio incondicional foram essenciais para que eu pudesse alcançar todas as minhas conquistas.

As minhas filhas Laís, Letícia e Lívia, que são a razão do meu esforço e perseverança, agradeço por entenderem minhas ausências e por me inspirarem a ser uma pessoa melhor a cada dia.

Aos meus professores, que compartilharam seus conhecimentos e me guiaram ao longo dessa caminhada. Cada aula, cada orientação foi de imenso valor e contribuiu significativamente para a minha formação. Meu sincero agradecimento por todo o cuidado, respeito e dedicação.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcelo Lopes Ferro, expresso minha profunda gratidão, pois sua paciência, sabedoria e orientação foram cruciais para a realização deste trabalho. Obrigado por acreditar em mim e por me guiar com tanto zelo e dedicação.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a Deus, que me trouxe até aqui. Sem sua benção e proteção, nada disso seria possível. A Ele, toda a minha gratidão e louvor.

RESUMO

A presente dissertação tem como foco principal a utilização de métodos construtivos, explorando formas de ensino que facilitem a compreensão dos conceitos geométricos por parte dos estudantes. Utilizando técnicas de construções com régua e compasso, que vão além do simples uso de fórmulas e cálculos, propondo um enfoque prático e visual, onde os estudantes são incentivados a construir elementos geométricos utilizando as ferramentas e percebendo as relações entre os diferentes elementos nas figuras que estão construindo. Além disso, discute a importância de integrar essas técnicas construtivas ao currículo escolar, ressaltando os benefícios de um aprendizado mais ativo e envolvente. A abordagem visa dar suporte aos professores e educadores para que possam aplicar esses conceitos e melhorar o desempenho dos estudantes em geometria, buscando aumentar o interesse e engajamento dos estudantes no estudo desse tema.

Palavras-chave: construções geométricas; régua e compasso; geometria plana.

ABSTRACT

The main focus of this dissertation is the use of construction methods, exploring teaching methods that facilitate the understanding of geometric concepts by students. Using construction techniques with ruler and compass, which go beyond the simple use of formulas and calculations, proposing a practical and visual approach, where students are encouraged to construct geometric elements using the tools and realizing the relationships between the different elements in the figures that are building. Furthermore, it discusses the importance of integrating these constructive techniques into the school curriculum, highlighting the benefits of more active and engaging learning. The approach aims to support teachers and educators so that they can apply these concepts and improve student performance in geometry, seeking to increase student interest and engagement in the study of this topic.

Keywords: geometric constructions; ruler and compass; plane geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CFE	Conselho Federal de Educação
CNE	Conselho Nacional de Educação
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IES	Instituições de Ensino Superior
IME	Instituto de Matemática e Estatística
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MP	Medida Provisória
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PPC	Projetos Pedagógicos Curriculares
PPP	Projeto Político Pedagógico
PROFMAT	mestrado profissional em matemática
PUC-Goiás	Pontifícia Universidade Católica de Goiás
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
THE	*Times Higher Education*
UEG	Universidade Estadual de Goiás
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UFCat	Universidade Federal de Catalão
UFG	Universidade Federal de Goiás
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFPA	Universidade do Pará
UFPE	Universidade de Pernambuco
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRR	Universidade Federal de Roraima
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade de Campinas
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho investiga o ensino da geometria através das construções geométricas, destacando sua relevância no contexto acadêmico dos educandos do ensino básico. Apresenta os testes que frequentemente são utilizados para discutir a qualidade do ensino, e os índices gerados pelos resultados dessas avaliações que influenciam de forma direta ou indireta nas políticas educacionais brasileiras. Este estudo mostra um panorama histórico sobre o ensino de geometria, destaca mudanças curriculares e metodológicas ao longo dos anos, analisando assim, a estrutura curricular de alguns cursos de licenciatura em matemática, enfatizando a importância do desenho geométrico na formação dos professores.

O trabalho aborda a importância de uma boa escolha do livro didático na promoção da educação, discutindo a aplicabilidade dos desenhos geométricos no ensino, ressaltando sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos. Além de descrever as principais técnicas utilizadas no desenho geométrico, fornece uma base prática para a execução de atividades que envolvem elementos da geometria.

Ainda explora a contribuição de Euclides e seu trabalho "Elementos", que é uma referência fundamental para a geometria clássica, introduzindo os conceitos fundamentais, como ponto, reta e plano, que servem de base para o estudo da geometria. Trata ainda dos lugares geométricos, como conjuntos de pontos que compartilham uma propriedade comum exibindo as principais construções geométricas e apresentando sequências didáticas elaboradas com a intenção de enriquecer o repertório metodológico dos docentes na área da geometria.

1.1 Objetivos gerais

Este trabalho visa promover o desenvolvimento profissional docente na didática da geometria, com ênfase particular na implementação de construções geométricas como recurso didático no processo de ensino e aprendizagem. Almeja que, com base no presente material, os educadores se sintam confiantes e motivados a adotar metodologias de ensino que incorporem o desenho geométrico, promovendo o aprimoramento das competências geométricas dos estudantes.

1.2 Objetivos específicos

- Promover o desenvolvimento da didática dos professores do ensino básico a partir do uso de ferramentas e técnicas para criar e interpretar desenhos geométricos específicos;
- Estimular a investigação e a prática reflexiva sobre o papel do desenho geométrico no desenvolvimento do pensamento dos estudantes;
- Proporcionar experiências práticas que permitam aos professores explorarem diferentes abordagens para o ensino de geometria, utilizando desenhos geométricos como ponto central;
- Compartilhar processos e estratégias eficazes na construção de elementos geométricos.

1.3 Relevância do assunto

A Geometria Euclidiana é uma disciplina matemática que se dedica ao estudo de figuras e formas geométricas no plano e no espaço. Se baseia nas obras do matemático grego Euclides, que desenvolveu um sistema lógico para a dedução de teoremas a partir de axiomas e postulados. Ao longo da história, a Geometria Euclidiana foi utilizada como base para o ensino de matemática em diversas culturas e países, e ainda hoje é considerada um dos pilares da educação matemática.

Dentro da geometria, os lugares geométricos são um importante tema de estudo. São conjuntos de pontos que satisfazem determinadas condições e podem ser utilizados para representar figuras geométricas complexas. As construções podem ser feitas por meio de métodos construtivos, utilizando como ferramentas, apenas a régua e o compasso. São procedimentos sistemáticos para construir figuras geométricas a partir de elementos básicos como pontos, retas e circunferências.

Os métodos construtivos são amplamente utilizados em atividades e exercícios de geometria, desde o ensino básico até o ensino superior, desenvolvendo habilidades de observação, imaginação, raciocínio lógico e criatividade, além de permitir que compreendam e visualizem propriedades geométricas tornando o aprendizado mais prático, visual e intuitivo. Além disso, esses recursos podem ajudar a desenvolver habilidades de raciocínio lógico, que são importantes para o desempenho em outras áreas da matemática e de outras disciplinas. Por isso, é fundamental que professores e educadores conheçam e saibam como aplicar esses conceitos em suas aulas, contribuindo para uma educação matemática mais eficaz e acessível.

A utilização de régua e compasso é um dos métodos mais tradicionais e antigos no estudo da geometria. Com essas ferramentas, ao realizar uma construção, é necessário seguir um procedimento sistemático, que envolve a escolha de pontos, a construção de retas e circunferências, e a interseção entre elas. Com a utilização de desenhos geométricos no ensino de geometria, o estudante deve ser capaz de demonstrar propriedades e teoremas de uma geometria axiomática, bem como resolver problemas aplicando os métodos adequados para as construções. Este estudo oferece uma abordagem que sugere a integração de desenhos geométricos aos programas de formação de professores e ao ensino básico.

1.4 Motivação para o estudo

Mesmo tendo acesso a materiais didáticos que contemplam o ensino de geometria a partir de construções geométricas, essa metodologia ainda não havia sido aplicada de forma efetiva em minha prática docente. Devido a necessidade de cumprir um currículo apertado, não encontrei oportunidades para implementar essas técnicas.

Durante a graduação, eu como estudante não tive contato com as construções geométricas dentro das sequência de fluxo proposta pela instituição, fazendo com que o interesse por essa metodologia surgisse tardiamente, durante aulas de geometria no mestrado profissional em matemática (PROFMAT). Nestas aulas, o professor apresentava as teorias geométricas utilizando algumas construções, o que despertou meu interesse.

A falta de conhecimento sobre os procedimentos para realizar as construções geométricas gerou um desconforto, pois, mesmo conhecendo a teoria e as propriedades geométricas, não havia experimentado a necessidade de pensar no passo a passo para realizar certas construções. Entendi naquele momento que, ao introduzir essas técnicas ainda no ensino básico, seria possível proporcionar uma formação matemática mais completa e eficaz para os estudantes.

A seguir, apresento algumas hipóteses que podem explicar a não utilização de métodos construtivos no ensino de geometria por parte dos professores:

- **Falta de conhecimento dos professores:** muitos professores de matemática não tiveram uma formação adequada para o uso de métodos construtivos em sala de aula;
- **Ênfase na resolução de problemas:** em muitos currículos de matemática, a ênfase é dada a resolução de problemas e não a construção de figuras geométricas. Isso pode levar a uma visão limitada da Geometria Euclidiana, focada apenas em cálculos e fórmulas, e não em sua aplicação prática;
- **Dificuldade de aprendizado dos estudantes:** a Geometria Euclidiana pode ser um tema abstrato e complexo para muitos estudantes, especialmente aqueles que não possuem uma base sólida em matemática. Isso pode levar a uma resistência ou falta de interesse no uso de métodos construtivos, que podem parecer mais desafiadores do que a resolução de problemas convencionais.

Dessa forma, este trabalho busca preencher essa lacuna matemática, oferecendo uma abordagem prática e teórica para o ensino das construções geométricas, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação matemática preparando melhor os estudantes para enfrentar desafios futuros.

2. A EDUCAÇÃO E OS OBJETOS AVALIATIVOS

A educação é pauta de muitas discussões e o tema é abordado levando em consideração diversos aspectos que influenciam de forma direta ou indireta as políticas voltadas para a educação. Entretanto, uma discussão que está sempre em evidência é a qualidade do ensino, muitas vezes mensurada a partir de avaliações realizadas nas instituições de ensino, por avaliadores externos, designados pelo governo federal, a fim de avaliar o aprendizado dos estudantes. A seguir, foram apresentados alguns métodos usados nessas avaliações e os resultados mais recentes.

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) foi criado em 2007, funcionando como um indicador da qualidade da Educação, com o intuito de medir a qualidade do aprendizado dos estudantes em âmbito nacional e possibilitar a criação de metas para propiciar a melhoria do ensino. Os cálculos do IDEB são feitos a partir de dois parâmetros: a taxa de rendimento escolar (aprovação, reprovação e abandono) realizada pelo Censo Escolar, e as médias de desempenho nos exames aplicados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) (Brasil, 2023). Para gerar as médias de desempenho, as avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) são realizadas a cada 2 anos.

O último SAEB disponível e analisado por este trabalho é o de 2021, que apresenta particularidades devido ao conturbado e atípico período de pandemia que o mundo sofreu provocada pela COVID-19. Com o período de suspensão das aulas presenciais e a implementação de aulas remotas e, em seguida híbridas, levou as instituições a reverem os currículos e processos, o que impactou efetivamente nos resultados obtidos pela avaliação.

O resultado do SAEB, segundo Brasil (2023), que classifica os estudantes conforme sua proficiência em matemática dentre os níveis de zero a nove, no qual zero indica que os estudantes ainda não demonstram habilidades muito elementares que deveriam apresentar nessa etapa escolar e nove a maior proficiência, o resultado para 2021 em matemática para o 9º ano do ensino fundamental II, foi uma maior concentração de estudantes com proficiência de nível 3 (18,2%) e nível 4 (17,5%), seguidos do nível 2 (16,6%) e zero (14,7%). Se levar em consideração nessa análise apenas os quatro primeiros níveis da escala de proficiência (zero a três), esse grupo representa 62,6% dos estudantes brasileiros (Brasil, 2023).

Isso evidencia que a maior parte dos estudantes não apresentam domínio das habilidades mais básicas consideradas para o final do ensino fundamental. Pode-se notar ainda um agravamento no quadro dos resultados quando se faz um recorte amostral das escolas localizadas na zona rural, nas quais 62,2% dos estudantes estão nos três níveis inferiores das proficiências, contra 42,4% da área urbana nesses mesmos níveis.

Os resultados de matemática para os estudantes do ensino médio são mais alarmantes do que o que foi apresentado para o 9° ano. Levando em consideração os níveis da escala de proficiência (zero a três) o quantitativo de estudantes nesse grupo representa 71,6% dos estudantes. A diferença entre o nível de proficiência em matemática dos estudantes é maior nas capitais quando comparadas aos estudantes do interior. Em ambas as localizações a maior concentração está no nível 0, com 22,8% no interior e 19,9% nas capitais. Enquanto nas faixas intermediárias (níveis 2, 3 e 4) e superiores (7, 8 e 9), estão concentrados 47,7% e 2,7%, respectivamente, dos estudantes do interior contra 47,5% e 4,9%, respectivamente, dos estudantes das capitais.

Os indicadores apresentam a necessidade de atenção aos resultados dos estudantes com perfil socioeconômico mais vulnerável e a população atendida por escolas públicas estaduais e municipais.

Também devemos levar em consideração, dentro do quesito avaliações externas, o resultado divulgado pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), que deveria ter sido realizado em 2021, mas foi adiado e realizado em 2022 pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que no Brasil é operacionalizado e planejado pelo INEP (Brasil, 2023). Trata-se do maior estudo comparativo internacional do mundo e tem como foco a avaliação dos estudantes na faixa de 15 anos, em relação aos seus conhecimentos em matemática, leitura e ciências, programa no qual os testes exploram a capacidade dos estudantes em resolver problemas complexos, pensar criticamente e possuir uma comunicação eficaz.

A aplicação no Brasil foi feita de modo digital, foram aplicados testes com perguntas objetivas de múltipla escolha e perguntas discursivas nas quais os estudantes necessitavam construir suas próprias respostas. Os resultados alcançados nessas três áreas avaliadas foram muito semelhantes aos alcançados no último levantamento feito em 2018. Quando analisamos a matemática, o resultado aponta, segundo seus parâmetros, que 73% dos estudantes brasileiros possuem baixo desempenho nessa área (abaixo do Nível 2[1]). Segundo a OCDE o nível apresentado está abaixo do recomendado para que os indivíduos possam exercer plenamente sua cidadania. Nessa aplicação, apenas 1% dos estudantes apresentaram alto desempenho em matemática alcançando o Nível 5 ou 6[2].

Segundo o censo, no contexto brasileiro, 74% dos estudantes afirmam que, na maioria das aulas de matemática, os professores demonstram interesse pelo aprendizado dos estudantes. Além disso, 72% dos estudantes relatam que os educadores oferecem ajuda extra quando necessário. No entanto, muitos estudantes consideram o ambiente em que estudam matemática seja não favorável ao aprendizado, no qual 38% não ouvem o que o professor fala (em comparação com a média da OCDE, que é de 30%). Além disso, 45% dos estudantes se distraem durante as aulas usando dispositivos digitais.

2.1 Histórico sobre o ensino da geometria e desenhos geométricos

O processo de ensino de Desenhos Geométricos apresenta constantes alterações no sistema de ensino brasileiro. Uma cronologia das mudanças pode ser entendida de acordo com o panorama da legislação, conforme apresentado por Zuin (2001) que relata em sua pesquisa, que os processos de ensino de Desenhos, estão retrocedendo desde o Brasil-Império, mostrando as modificações causadas devido a fatores políticos, econômicos e sociais ao longo dos anos. Esse autor ainda enfatiza a retirada gradativa dessa matéria da listagem de disciplinas obrigatórias e o direcionamento do assunto a parte diversificada do currículo, possibilitando uma abordagem das construções entranhado ao ensino de Artes, em seguida como um tópico raso dentro do ensino de geometria, até por fim, cair no esquecimento, não sendo usada nem ao menos lembrada no processo de ensino.

Zuin (2001) ainda elenca alguns contextos dentro dessa cronologia, destacando-se a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) 5692/71, na qual os currículos do ensino do 1° e 2° grau seriam compostos por núcleos comuns

---

[1] Nível 2: No mínimo, esses estudantes podem interpretar e reconhecer, sem instruções diretas, como uma situação simples pode ser representada matematicamente (por exemplo, comparar a distância total de duas rotas alternativas ou converter preços em uma moeda diferente).

[2] Nível 5 e 6: Os estudantes podem simular situações complexas matematicamente e podem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de solução de problemas para lidar com elas.

nacionais definidos pelo Conselho Federal de Educação (CFE) e uma parte diversificada para atender necessidades regionais (cuja relação e aprovação estava a cargo dos Conselhos de Educação) como um marco histórico, e o ensino de Desenhos Geométricos passa a não ser considerado uma disciplina obrigatória.

Segundo Pavanello (1993), a liberdade concedida às escolas fez com que muitos professores de matemática resguardados pela flexibilidade da lei, deixassem de trabalhar a geometria ou então realocando-a para o findar do período letivo de seus programas, por não possuírem confiança para ministrar as aulas, podendo assim, se apoiar ao fato do tempo como uma saída para a não realização do conteúdo programado.

Em 1998 os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já evidenciavam a importância do estudo da geometria, colocando-a como um campo fértil para trabalhar situações-problema, relacionando esse conhecimento também ao estímulo da observação, percebendo assim relações de semelhanças, diferenças e regularidades (Brasil, 1998). Em seu texto, quando se prefere a seleção de conteúdos, reforça que esses conteúdos possibilitam a capacidade de “saber fazer”, que implica na utilização de estratégias e procedimentos compreendendo os conceitos envolvidos e pressupõe, exemplificando, que no âmbito de trabalho com espaço e forma o estudante utilize de construções geométricas com régua e compasso, para visualizar aplicações, propriedades, generalizações e relações entre figuras.

Ainda no âmbito de conceitos e procedimentos dos anos finais do Ensino Fundamental, dentre os conteúdos propostos para o ensino de matemática, podemos destacar no bloco de Espaço e Forma as construções que proporcionam a divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso; a identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.

Em outubro de 1994 a partir da Medida Provisória (MP) nº 661, que viria a ser convertida em 1995 na Lei nº 9.131/95, foi criado o Conselho Nacional de Educação (CNE), com a finalidade de atuar na elaboração de Políticas Nacionais de Educação assessorando o Ministério da Educação com a missão de assegurar a participação da sociedade e a articular um diálogo e colaboração entre os sistemas de ensino no âmbito federal, estadual e municipal, focada na melhoria da qualidade da educação nacional.

Foi esse conselho, dentro do ministério da Educação, que recebeu em abril de 2017 a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para ser apreciada, levando em consideração os interesses, necessidades e pluralidade da educação brasileira (Brasil, 2018). Segundo a resolução CNE/CP Nº 2, foi instituída a implantação da BNCC, passando a ser respeitada obrigatoriamente no âmbito da Educação Básica em todo território nacional.

A Lei nº 13.415/2017 (também conhecida como a Lei do Novo Ensino Médio) alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na organização do currículo do ensino médio, ampliando a carga horária mínima anual do estudante na escola para 1000 horas, deixando o currículo mais flexível por meio da escolha de Itinerários Formativos e fazendo de modo a contemplar as diretrizes da BNCC. A mudança teve como objetivo garantir a oferta de educação de qualidade a todos os jovens brasileiros.

A BNCC, atual referência para a educação brasileira, apresenta em suas unidades temáticas, nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, a necessidade de a geometria ser trabalhada seguindo os objetos de conhecimento detalhados nos quadros abaixo (quadro 1, 2 e 3), e que os estudantes adquiram as habilidades em cada uma das séries, respectivamente.

Quadro 1. Habilidades da Base Nacional Comum Curricular que contemplam construções no 6º ano.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros. Ângulos: noção, usos e medida.	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

Fonte: Brasil (2018, p. 302-303).

Quadro 2. Habilidades da Base Nacional Comum Curricular que contemplam construções no 7º ano.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
A circunferência como lugar geométrico. Construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos de triângulos.	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Fonte: Brasil (2018, p. 308).

Quadro 3. Habilidades da Base Nacional Comum Curricular que contemplam construções no 8º ano.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros. Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas. Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros.	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas. (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Fonte: Brasil (2018, p. 314).

Nas novas matrizes curriculares da rede estadual de Goiás (Goiás, 2019) podemos destacar o ensino de Língua Portuguesa e de Matemática que, no Ensino Médio, além de serem disciplinas obrigatórias do currículo, também aparecem dentro do programa de algumas matérias eletivas para todas as escolas da rede. Nesses programas, o estudante possui uma aula de Língua Portuguesa a ser escolhida entre ‘Tópicos de Língua Portuguesa’ ou ‘Produção de Texto’ e mais uma de Matemática a ser escolhida entre ‘Tópicos de Matemática’ ou ‘Geometria’.

Ainda analisando os norteadores dos programas de ensino, não podemos deixar de mencionar o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Como os estudantes se preparam para realizar esse exame anualmente, precisamos destacar a sua Matriz de Referência, que é dividida por áreas de conhecimento. Das quais, na área de Matemática e suas Tecnologias, apresenta como competência a utilização de conhecimentos geométricos para realização de leitura e representação da realidade no agir sobre ela. Uma de suas habilidades frisa a identificação de figuras planas e a resolução de situações-problema envolvendo conhecimentos geométricos na formulação de argumentos durante a solução. Sendo assim, quando essa Matriz delimita as competências necessárias para a realização do exame, ela se torna uma diretriz para a formação e preparação dos estudantes, principalmente no Ensino Médio.

2.2 Grade curricular da graduação de licenciatura em matemática

A prática do professor está diretamente relacionada com a sua formação. Logo, analisar como cada uma das Instituições de Ensino Superior (IES) estão preparando seus discentes se torna algo necessário. As IES estão atreladas a uma legislação que orienta os programas de licenciaturas nas universidades. Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de licenciatura em matemática, o parecer CNE/CES 1.302/2001 descreve os conteúdos comuns a todos os currículos dos cursos, assegurando o cumprimento de conteúdo das diferentes áreas de conhecimento referentes a um profissional da área de matemática. Ainda informa que cada instituição poderá organizar uma formação complementar incrementando o currículo dos profissionais a serem formados.

O ensino superior no país representa um complexo de 2574 instituições, sendo 313 públicas e 2261 privadas. Das 313 instituições públicas, 119 são federais que ofertam em 6844 cursos, 491 mil vagas; 134 são estaduais; e 60 municipais segundo o Censo da Educação Superior de 2022 (referente ao ano 2021) do INEP (Brasil, 2023).

Considerando a importância da geometria no processo de aprendizagem no ensino básico, devemos salientar a necessidade de uma formação adequada dos profissionais responsáveis por essa fase da educação básica. Por esse motivo, realizamos uma pesquisa que analisou as grades curriculares e Projetos Pedagógicos Curriculares (PPC) dos cursos de Licenciatura em Matemática em universidades consideradas referências pelo *Times Higher Education* (THE) que apresenta um ranking internacional levando em consideração 1906 instituições em 108 países, baseadas em metodologia aplicada com 18 indicadores de desempenho em cinco áreas: ensino, ambiente de investigação, qualidade da investigação, indústria e perspectivas internacionais (Times Higher Education, 2024). Também foi considerado em âmbito regional, estado de Goiás, as principais instituições públicas de ensino superior. E foi feito um levantamento analisando uma universidade federal em cada um dos 26 estados e no Distrito Federal, totalizando 27 Unidades da Federação.

Das universidades brasileiras que apresentam as melhores classificações no THE (segundo o ranking internacional de 2024) estão, em ordem de classificação: a Universidade de São Paulo (USP), Universidade de Campinas (UNICAMP), Universidade Estadual Paulista (UNESP), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e a Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Em Goiás, levantamos as grades curriculares da Universidade Federal de Goiás (UFG), Universidade Estadual de Goiás (UEG), Universidade Federal de Catalão (UFCat) e da Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC-Goiás) sendo esta última uma instituição particular.

Todas as instituições mencionadas disponibilizam as grades curriculares em suas páginas na internet. Entretanto, apenas as instituições públicas disponibilizam a versão digital dos projetos pedagógicos, que possibilitam a análise das ementas das disciplinas; do material de referência; e das bibliografias utilizadas nas disciplinas do curso. As instituições particulares disponibilizam as versões impressas do PPC nas secretárias ou polos de atendimento presencial, podendo assim ser consultada pelo público em geral quando requisitadas.

A pesquisa busca entender como as Universidades e os centros educacionais de ensino se comportam perante a disponibilidade de desenhos geométricos em suas grades, sendo eles apresentados como uma disciplina exclusiva ou como parte de alguma disciplina de Geometria Plana. Busca fazer análise das referências bibliográficas principais ou complementares disponibilizadas nas ementas e se a escolha da matéria pelo discente é pertencente ao núcleo obrigatório, núcleo optativo, núcleo livre ou eletivo.

Analisando as instituições goianas, pode-se notar que a Geometria Plana é pautada nos estudos de uma geometria axiomática. As disciplinas intituladas como “Geometria” e “Geometria Euclidiana I” ofertadas pela UFCat e UEG, respectivamente, apresentam ementas onde deixam explícita as construções geométricas com o auxílio de régua e compasso. Pode-se entender a forma em que a UFCat aborda os conceitos pelas orientações metodológicas presentes no projeto pedagógico mostrando que a disciplina pretende trabalhar os conhecimentos geométricos a partir de uma visão da relação dos conceitos com o universo artístico, de forma dinâmica, onde os aspectos visuais possam ser explorados. Entretanto, a UEG não apresenta detalhes adicionais como bibliografia básica de referência no arquivo disponível.

A UFG e a PUC-GO não mencionam desenhos geométricos nas descrições de suas disciplinas de Geometria Euclidiana e Geometria Plana. Mesmo sendo trabalhadas com suporte nos axiomas e resoluções de problemas, apenas na UFG pode-se encontrar uma menção em relação as construções geométricas quando Wagner (2007) é citado na lista de referência bibliográfica complementar.

Dentre as regiões brasileiras que apresentam, segundo o ranking do THE, o maior número de instituições mais bem classificadas, está a região sudeste do país com cinco das seis universidades listadas. Dentre elas estão a UNIFESP e UFMG que apresentam as disciplinas de Construções Geométricas, sendo que a Federal de São Paulo em sua ementa não deixa claro como os desenhos geométricos vão ser trabalhados. No entanto, cita Wagner (2007) como bibliográfica complementar. Já a Federal de Minas Gerais solicita que seus estudantes cursem, em caráter obrigatório, a disciplina de Construções com sua ementa que apresenta enfoque em resoluções por métodos de lugares geométricos e construções fundamentais.

Já a UNICAMP disponibiliza a matéria Geometria Plana contemplando os desenhos geométricos e sua ementa aborda: o tratamento axiomático da geometria euclidiana plana (os cinco postulados de Euclides); a introdução as geometrias não euclidianas; noções comuns da geometria; e desenho geométrico (construções com régua e compasso).

Ainda no sudeste brasileiro, a USP apresenta dentre as grandes áreas, conteúdos que contemplam o currículo do curso de licenciatura em matemática do Instituto de Matemática e Estatística (IME), a Geometria. Na perspectiva da instituição, em seu projeto pedagógico, busca proporcionar aos estudantes um contato sistemático com a Geometria axiomática plana e espacial, bem como com os problemas clássicos de construções com régua e compasso. Esse tipo de abordagem busca garantir que a intuição geométrica se desenvolva juntamente com a capacidade de utilizar uma linguagem formal e precisa. Os objetivos centrais incluem o desenvolvimento de habilidades, como desenho, visão espacial, raciocínio dedutivo e familiarização com o método axiomático. Além disso, promove a discussão da prática pedagógica, reconhecendo sua importância na formação dos jovens. Disciplinas como Geometria e Desenho Geométrico I e II, voltados para a geometria plana e espacial, respectivamente; são áreas representadas na universidade. Promove, dessa forma, estudos dos procedimentos utilizados durante as construções geométricas com o auxílio de régua e compasso, podendo assim levantar questionamentos e justificar a validade deles. Isso possibilita que o estudante relacione a teoria com a prática, exemplificando as teorias de lugares geométricos com as construções dos elementos geométricos.

Na UFRGS, a disciplina Geometria I é de caráter obrigatório para os discentes de licenciatura em matemática, com súmula abordando construções com régua e compasso e lugares geométricos. A utilização dessa ferramenta volta a ficar em evidência na disciplina de Álgebra II com a ementa que abrange números algébricos e transcendentes; construções com régua e compasso; números construtíveis.

Considerando 27 instituições federais, uma em cada unidade federativa e suas grades curriculares, podemos notar que 67% dessas universidades disponibilizam em seus cursos de licenciatura em matemática alguma disciplina de Geometria que remeta ao uso de construções geométricas como parte da ementa ou uma disciplina específica de Desenho Geométrico. Um dado relevante que deve ser acrescentado a essa análise dos PPC’s de ensino com construções é que em quatro das universidades que não possuem em suas descrições de ementas a indicação desse conteúdo como parte do curso, usam como material de referência bibliográfica algum livro de Construção Geométrica. A figura 1 abaixo apresenta os estados brasileiros que possuem instituições federais que possuem na grade curricular do curso de licenciatura em Matemática a disciplina Desenhos Geométricos.

Figura 1. Mapa brasileiro dividido por estados.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

É importante ressaltar outros aspectos importantes da pesquisa, como: a oferta de Desenhos Geométricos que ainda vigorava na última grade curricular da UFRJ, sendo retirada apenas na implementação da nova grade em 2023; a Universidade Federal do Amazonas (UFAM) disponibiliza uma matéria intitulada Laboratório de Ensino de Geometria plana e espacial, na qual se compromete apresentar, discutir e elaborar formas diferenciadas de trabalhar a Geometria Plana; e a Universidade Federal de Roraima (UFRR) não apresenta a matéria de Construções Geométricas em sua grade na modalidade presencial, mas possibilita a inscrição dos discentes da licenciatura em matemática EaD como disciplina optativa, podendo ser cursada no sétimo ou oitavo período.

A Universidade do Pará (UFPA) é a única, das instituições pesquisadas, a disponibilizar em sua ementa referência a programas computacionais em geometria aplicados em construções geométricas. Por fim, a Universidade de Pernambuco (UFPE) oferta as construções geométricas em uma disciplina intitulada Geometria Gráfica, divergindo dos títulos comumente encontrados nas outras instituições.

Tendo essa análise como um primeiro passo para justificar a importância dos desenhos com régua e compasso na construção do conhecimento geométrico dos estudantes, podemos levar em consideração a relevância dada pelas instituições de ensino superior aqui descritas como referência, e mais bem colocadas em pesquisas internacionais, na inserção desse método na formação dos discentes de licenciatura em matemática e futuros professores de matemática da rede básica de ensino. Pode até ser precipitado relacionar a presença de matérias específicas de Construções Geométricas nas grades curriculares dessas universidades com seus conceitos perante a sociedade acadêmica, mas não podemos fazer vista grossa a essa relação e ao prestígio com que os profissionais vindos dessas instituições possuem no ambiente social e profissional.

2.3 Bibliografia de apoio e complementar

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) desempenha um papel fundamental na promoção da educação de qualidade no Brasil. Tem a função de disponibilizar, para avaliação, materiais didáticos de diferentes autores e editoras. Esses materiais compõem o Guia Digital do PNLD, que ao serem selecionados pelo corpo docente e diretivo das escolas, são distribuídos para os estudantes da educação básica nas redes públicas de ensino de forma gratuita, garantindo o acesso adequado e sempre atualizado das coletâneas. O programa também contempla materiais de apoio, possibilitando que as instituições recebam jogos educacionais, *softwares*, entre outros materiais destinados a prática educativa, ampliando as ferramentas utilizadas no processo de ensino.

A seleção cuidadosa do material didático é essencial para proporcionar um processo de ensino e aprendizagem enriquecedor. É importante que essa coletânea apresente um suporte para a elaboração de um currículo sólido. Portanto, esse momento é crucial dentro do planejamento, pois a escolha deve ser criteriosa, levando em consideração inúmeras variáveis contidas no Projeto Político Pedagógico (PPP) da instituição, atendendo as necessidades específicas de cada comunidade escolar. Segundo Dante (1996), é preciso que a responsabilidade da escolha do livro didático seja compartilhada com toda a equipe escolar. Ele ainda ressalta que deveriam ser consultados profissionais experientes da área, “avaliando cuidadosamente em que medida aquele material satisfaz as características arroladas como desejáveis anteriormente e aos objetivos que a escola se propõe a alcançar”.

Para a elaboração das sugestões de sequências didáticas desse trabalho, baseadas na utilização de desenhos geométricos com auxílio de régua e compasso, foram escolhidos dois materiais: Matemática e realidade (Iezzi et al., 2018) e

Construções Geométricas (Wagner, 2007). Para a realização dessa escolha, foi levado em consideração a presença do material no catálogo do Guia Digital de livros para a educação básica, ou a presença nas ementas dos cursos de licenciatura em matemática no território nacional. A ideia de trabalhar com um material focado no ensino básico e outro para a qualificação de docentes foi a de aproximar a formação acadêmica dos docentes com o ambiente de sala de aula.

A obra “Matemática e realidade” se destaca por apresentar uma abordagem didática e contextualizada do universo da matemática, estimulando o pensamento crítico e criativo dos estudantes, proporcionando aos educandos um maior engajamento e motivação, gerando uma compreensão mais ampla e significativa dos conceitos matemáticos. Por levar em consideração esses motivos, os livros seriados dessa coletânea foram escolhidos como suporte para a elaboração do trabalho, pois eles representam bem a intenção da proposta de valorizar os desenhos geométricos no ensino de geometria.

Esse material busca evidenciar sempre em seus capítulos de geometria as construções geométricas, focadas no passo-a-passo dos procedimentos no desenho de cada objeto geométrico solicitado. Em sua seleção de exercícios, os autores procuram propor ao menos um exercício que proporcione ao estudante a aplicação das técnicas explanadas no decorrer do capítulo. A versão do professor apresenta a resolução dos exercícios contidos no livro, no qual o professor pode recorrer a essa seção com a possibilidade de apreciar uma possível forma de resolução dos problemas. As respostas aos problemas no Manual do Professor, é defendida por Dante (1996), que afirma que as atividades e exercícios devem ser apresentadas de preferência, “com soluções alternativas, diferentes das costumeiramente dadas, para que o professor possa estimular seus estudantes a buscarem criativamente novas e diferentes maneiras de resolver um mesmo problema ou questão”.

A escolha dessa coletânea foi feita de forma tranquila e natural, devido a experiência e o conhecimento adquirido antecipadamente do material. O livro foi utilizado como material didático no ensino fundamental II (do 6º ao 9º ano), em uma escola da rede particular de ensino, durante o período de 2014 a 2021, enquanto trabalhava como professor de matemática naquela instituição.

Já o livro “Construções Geométricas”, o próprio autor deixa claro ao apresentar em seu prefácio, que o material foi pensado e elaborado com o intuito de aperfeiçoamento dos professores secundários (professores do ensino fundamental e médio) de matemática. Apresenta a realidade angustiante do distanciamento do ensino de geometria e busca mostrar que as construções são instrumentos de imensa utilidade, não somente no estudo da geometria, mas também em outros universos, como o da álgebra. Ao expor o conteúdo de forma clara, o material é fiel ao seu propósito inicial de escrita que busca sempre possibilitar a compreensão de todos os leitores, pois tem como público, além dos professores do Ensino Médio, estudantes de licenciatura e até mesmo estudantes do Ensino Médio que tenham o interesse e/ou curiosidades das técnicas usadas nessa área.

Esse material foca o ensino de geometria a partir de construções geométricas nos currículos escolares, reforçando que elas estão cada vez mais ausentes nos currículos. Ressalta ainda que as construções com régua e compasso resgatam conceitos e podem enriquecer o aprendizado, motivando os estudantes a investigarem propriedades e soluções distintas para certos problemas. Traz uma organização de exercícios que enfatiza a necessidade de uma representação fiel das propriedades em suas resoluções. A análise da situação, o planejamento da construção, a execução e a conclusão são extremamente educativos e possibilitam a percepção de diferentes formas de raciocinar sobre um mesmo problema.

Podemos concluir que a união desses dois universos, organizadas de forma clara e detalhada em forma de sequências didáticas, pode auxiliar os professores que desejam trabalhar com essa forma de ensinar geometria, enriquecendo suas aulas. Com os conceitos organizados de forma detalhada e elencando várias possibilidades de construções, o professor terá confiança no suporte dado e poderá trabalhar com as construções de uma forma mais coerente, confiante e seguro.

2.4 Para o que serve desenhos geométricos?

Ao responder a essa pergunta: “Para que serve desenhos geométricos?” (Putnoki, 1993) afirma que o desenho geométrico é um instrumento que possibilita dar respostas precisas para problemas de natureza prática e teórica. Durante a resolução, o estudante busca identificar as propriedades (teóricas e formais) do elemento geométrico, para assim dar sequência na construção, manuseando os instrumentos de forma precisa e organizada, para concretizar no papel as ideias envolvidas.

Os PCN’s de matemática (Brasil, 1998), apresentavam dentro dos conteúdos selecionados para o ensino fundamental, um espaço rico para que o professor propusesse problemas que demandassem a necessidade de construções geométricas com régua e compasso, como a visualização e aplicação das propriedades das figuras geométricas planas, a procura de uma relação entre objeto e propriedade, organizando um conjunto e desenhos de maneira compatível com a imagem do objeto em questão.

Não é habitual pensar geometria sem suas representações. Logo, o desenho se torna uma linguagem matemática gráfica do objeto e sua boa grafia possibilita um bom aprendizado, pois assim podem ser representadas propriedades oriundas das definições que auxiliam na compreensão das demonstrações, tornando-se parte fundamental da disciplina, sendo uma ferramenta facilitadora do processo. O Desenho Geométrico presente nas fases iniciais de desenvolvimento dos estudantes proporciona um refinamento nas habilidades motoras do estudante, o manuseio dos instrumentos requer extrema atenção para que seja feito um traçado preciso e coerente nas construções representadas.

Entretanto, os desenhos geométricos, atualmente quando ensinados são focados apenas nos mecanismos e processos de construção dos traços, sem a conexão adequada com as características estudadas na geometria plana conceitual/teórica. Ao analisar matérias sobre o tema, podemos identificar um enfoque em procedimentos práticos, apenas na técnica.

Para Marmo e Marmo (1994), já existia a indagação do porquê se estudar desenhos geométricos na era dos computadores, mas já na sequência apresentava uma resposta para a questão: Os desenhos são um bom modo de exercitar a capacidade de chegar em conclusões baseando-se em conceitos anteriores. Ele afirma que o desenho geométrico e a geometria possuem uma relação bem íntima, comparando-a com um casamento perfeito, pois ambas trabalham e analisam os conceitos e propriedades de figuras geométricas, diferindo apenas nas suas representações, a geometria representa as medidas das figuras (números) e os desenhos geométricos a estrutura abstrata das figuras (conhecimentos teóricos) em suas representações concretas.

Há críticas sobre os métodos tradicionais do ensino em várias áreas da matemática, o que não é diferente quando se trata da geometria. É necessário repensar o processo, analisar os pontos positivos de procedimentos anteriormente utilizados, discutir e aprimorar as ações pedagógicas buscando descartar as deficiências de algum método e enfatizar ou até mesmo aprimorar o que antes era bem-conceituado e eficaz.

Segundo Wagner (2007), os conhecimentos adquiridos durante as construções são duradouros, sendo intrigante os problemas motivam os estudantes a organizarem estratégias visando um planejamento adequado, buscando analisar as situações e utilizar conceitos anteriores. Chegando assim em possíveis soluções distintas, podendo gerar, inclusive, novos conceitos ou até mesmo novas propriedades. Problemas de Geometria comumente envolvem o domínio de propriedades e do processo de demonstrações o que demanda uma organização do raciocínio, os desenhos geométricos podem atuar nesse processo proporcionando um melhor desenvolvimento na execução dos problemas.

Em um contexto de construções geométricas a tentativa deve ser valorizada a todo momento. Os procedimentos são pautados em conceitos e propriedades, e apenas o conhecimento desses conceitos em algumas situações não bastam, pois a escolha do conceito correto passa reiteradamente pela experiência e a prática de suas aplicações. Sendo que “a segurança que se pode adquirir em um assunto tem uma só origem: a prática, a experiência muitas vezes repetida onde os insucessos têm tanto valor quanto os sucessos” (Wagner, 2007).

A matemática focada apenas na medição, nos números e suas operações nos traz à tona como apresenta Lorenzato (1995), a forte tendência de “Aritmetização” do raciocínio matemático. Mas a geometria valoriza o processo de descoberta, de experimentação e a possibilidade e deduzir com base nos indícios.

2.5 Técnicas no desenho geométrico

Quando tratados os desenhos geométricos como instrumento do ensino de geometria, temos alguns aspectos que devem ser levados em consideração. Mesmo que o foco seja aplicar as construções relacionando-as aos conceitos e teorias dos entes geométricos, o conhecimento das técnicas, dos procedimentos, do rigor e dos postulados devem ser levados em consideração, pois a precisão dos desenhos torna-se um grande aliado na aplicação dos conceitos durante a construção da solução ou da demonstração de um problema.

Segundo Albrecht e Oliveira (2012), as construções com régua e compasso, são estruturas sobre os três primeiros postulados de Euclides: traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer; estender um segmento de reta continuamente em uma linha reta; e descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio. A partir desses postulados, podemos escrever e determinar pontos pela interseção de duas retas ou dois arcos de circunferências, traçar retas por dois pontos determinados e traçar circunferências com centro e raio conhecidos ou arbitrários.

É importante ressaltar que as demonstrações devem levar em consideração uma forma geral da resolução do problema. As construções não devem ser feitas em situações particulares, tendo em vista que as soluções devem ser determinadas graficamente, sem o auxílio de cálculos ou variações de medidas.

Na prática, a utilização de instrumentos adequados e precisos surgem como potencializadores das resoluções, tornando as representações mais acuradas, minimizando possíveis complicações e confusões a partir de eventuais erros gráficos de construções. Logo, os entendimentos em relação aos possíveis erros parciais e totais são fundamentais para uma melhor representação, sabendo que por se tratar de representações esses erros são inevitáveis. Como o erro total é calculado a partir do somatório de todos os erros parciais, e que a resolução de um problema demanda normalmente uma certa quantidade de processos, é compreensível almejar uma quantidade mínima de operações gráficas para a resolução do problema, com o intuito de reduzir o erro total.

Nesse ponto cabe ao professor explicar as técnicas dessa modalidade juntamente com os seus preceitos, a fim de aprimorar as construções feitas pelos estudantes, mostrando e discutindo as construções fundamentais que serão básicas no processo. Cabe também a discussão quanto a validade das construções, mediante o propósito enunciado e validação dos processos para a demonstração. Tendo o conhecimento das propriedades bem estabelecidas, o professor poderá fazer a validação ou as intervenções necessárias para garantir a compreensão do educando sobre algum erro possível na construção ou a validade dos passos do processo.

2.6 Conceitos primitivos

Para se apresentar um elemento geométrico há a necessidade de se usar o recurso da definição para estruturar o conceito que possibilite estabelecer a noção acerca do objeto referido. Para o estudo da geometria faz-se necessário o conhecimento de alguns elementos geométricos primitivos, pois as características desses novos elementos estão pautadas em elementos anteriores já conhecidos e definidos previamente. Sendo assim, se faz necessário um princípio, bem estruturado e aceito por todos, sem essa base sólida os constructos seguintes não podem se alicerçar. Formando uma teia de conhecimentos e conceitos formais.

Quando se fala de Geometria Euclidiana, temos os elementos primitivos estruturantes de todos os conceitos que se podem imaginar. Segundo Barbosa (2006), as figuras elementares, no plano, são os pontos e as retas, sendo o plano formado por pontos e os subconjuntos de pontos distintos são retas. Essa ideia de não ser possível apresentar uma definição sobre os elementos primitivos, gera uma grande inquietação por parte dos estudantes em sala de aula, quando se tem o primeiro contato com o estudo formal dos elementos da geometria.

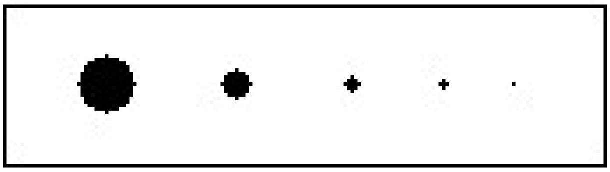
Nas séries iniciais da educação infantil, os estudantes começam a ter os primeiros contatos com os elementos da geometria. Os docentes se apropriam de representações e em sua grande maioria, de elementos concretos para exemplificar o ponto e a reta. É muito conveniente falar que a cabeça de um alfinete, as estrelas no céu ou um grão de areia são representações de pontos. Que uma corda esticada, o encontro de paredes ou a lateral de uma porta são representações de uma reta e que o chão, o teto ou até mesmo o quadro da sala de aula são representações de um plano onde esses elementos estão inseridos.

O estudante, enquanto avança no sistema seriado de ensino, começa a apresentar uma criticidade maior em relação a matemática e os “porquês” se tornam mais frequentes, a busca de explicações e demonstrações são necessárias para que ele se convença sobre o conceito que está sendo apresentado. Nesse momento inicia-se uma ruptura no processo, pois há a necessidade de se entender que alguns entes geométricos são formas idealizadas.

Os conceitos que seguem são apresentados por Iezzi et al., (2018) em seu material destinado ao primeiro ano das séries iniciais do ensino fundamental II (6º ano):

- O ponto é um elemento geométrico que não possui tamanho, ou seja, não pode ser medido. Mesmo que sua representação seja a menor possível, sempre existirá a possibilidade de ser representado por um elemento ainda menor (Figura 2).

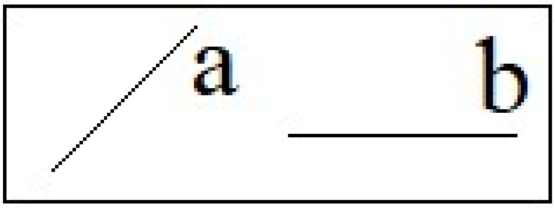
Figura 2. Representações de um ponto



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

- A reta é um conjunto de pontos, sem espessura, cujos elementos são pontos. Sobre esse elemento paira grande estranhamento por parte dos estudantes, sobre a possibilidade de se unir elementos sem dimensões gerando um elemento unidimensional (Figura 3).

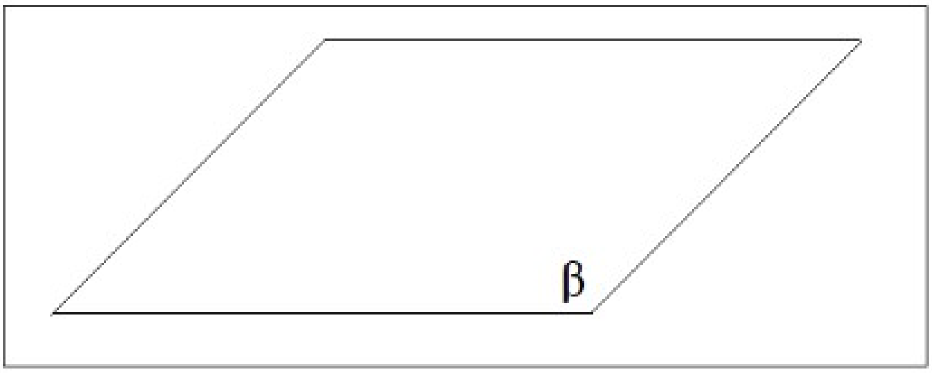
Figura 3. Representação de retas.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

- O plano é um conjunto cujos elementos são pontos (Figura 4).

Figura 4. Representação de um plano.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

É extremamente necessário esclarecer para o estudante que a existência dos elementos primitivos são necessários na construção da geometria e, para que isso aconteça, é necessário que o professor se aproprie do conhecimento sobre as noções primitivas, postulados e axiomas, cercando-se de conhecimento. Assim ele poderá transmitir de forma mais assertiva e com segurança o que deseja.

Em uma analogia feita por Barbosa (2006), ao comparar a geometria a um jogo como o de xadrez e damas, exemplifica perfeitamente a importância dos axiomas na construção de uma geometria, pois com um certo número inicial de elementos deve-se aceitar algumas regras básicas nas relações entre eles, buscando determinar propriedades válidas, construídas e provadas a partir apenas das regras inicialmente estabelecidas. Nesse caso, a descrição dos elementos do “jogo” não se mostra essencial, pois o importante é saber as regras de como “jogar”, sendo elas sólidas e suficientes, ou seja, não contraditórias e capazes de estabelecer tudo o que é permitido ser feito.

Portanto, os axiomas são declarações estabelecidas como verdades incontestáveis, isto é, são aceitos sem a exigência de comprovações. Estes constituem o alicerce fundamental para a construção do conhecimento nos estudos geométricos e suas respectivas demonstrações.

2.7 Euclides de Alexandria e sua obra “Os Elementos”

A geometria que conhecemos atualmente, essa que é ensinada nas escolas, é pautada em uma teoria organizada que serve como modelo para o desenvolvimento de um pensamento lógico e dedutivo. Euclides não foi o pioneiro na produção de livros-texto de geometria, mas em “Os Elementos” é uma obra fundamental na história da matemática grega, representando o auge da produção matemática na Grécia clássica.

Os conhecimentos foram compilados de forma sistemática, abordando geometria plana, teoria dos números e geometria sólida, em um material dividido em 13 volumes, os quais apresentam definições, postulados e axiomas, e conclusões são apresentadas em seus teoremas, partindo de demonstrações a partir de uma cadeia de pensamento entrelaçando os teoremas e estabelecendo as bases para a geometria. Certamente, “Os Elementos” pode ser considerada a maior conquista e norteou os estudos da geometria pelos anos seguintes, e que recebeu em sua homenagem o nome de geometria euclidiana. Berlinski (2018, p.11) idealiza que “(...) talvez Euclides tenha lido seu brilhante trabalho em voz alta, sem saber que seus alunos ouviam em primeira mão uma lição que tantos outros viriam a ouvir tantas vezes e de tantas outras vozes”.

Inclusive, surgiram outras geometrias contrárias à euclidiana, construídas buscando uma ideia distinta das estabelecidas pelos postulados presentes em sua obra ou buscando uma falha, como a tentativa de negar ou demonstrar tais postulados que são os alicerces dessa teoria. Particularmente, o quinto postulado, que se diferencia dos anteriores pela estrutura/tamanho como ele é apresentado e a forma tardia com que foi utilizado na obra para as demonstrações das preposições, tornou-se o principal alvo de matemáticos, desde aquela época, que buscavam sua demonstração e em seguida sua substituição. Logo, as geometrias não euclidianas se baseavam na substituição desse postulado por uma concepção contrária, culminando no desenvolvimento de geometrias como a geometria hiperbólica e a geometria esférica.

Cardoso (2013, p.7) mostra que a geometria hiperbólica, consiste na substituição do quinto postulado pelo axioma de Lobachevsky, no qual “dada, num plano hiperbólico, uma reta L e um ponto P exterior a L, existem pelo menos duas retas que passam por P e são paralelas a L”. Ainda relata que na geometria esférica o postulado de Euclides foi substituído pelo axioma de Riemann, no qual “dada, num plano esférico, uma reta L e um ponto P fora de L, não existe nenhuma reta que passe por P e seja paralela a L”.

Dentre os treze volumes estão presentes 467 proposições, organizadas de modo que nos livros I ao IV, abordam conceitos da geometria plana como pontos, linhas retas, círculos, ângulos e triângulos; nos livros V ao IX, apresentam estudos relacionados a teoria de números e proporções; e nos livros X ao XIII, o enfoque é relacionado a geometria de sólidos. Conforme apresentado por Barbosa (2006), a estruturação teórica de Euclides foi alicerçada em dez axiomas que foram organizados em dois grupos intitulados de “noções comuns” e “postulados”. As “noções comuns” englobam uma perspectiva abrangente, aplicável as demais ciências, enquanto os “postulados” são mais restritos ao estudo da geometria.

A seguir, apresenta-se a maneira, de forma integral, pela tradução de “Os Elementos”, que expõe os postulados e noções comuns. E, entre parênteses, a interpretação que Barbosa (2006), apresta em sua obra.

Postulados:

I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

(Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos);

II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

(Pode-se continuar uma reta infinitamente);

III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

(Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio);

IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

(Todos os ângulos retos são iguais);

V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

(Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor elo que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos).

Noções comuns:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

(Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si);

2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

(Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais);

3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.

(Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais);

4. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

(Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma à outra);

5. E o todo [é] maior do que a parte.

(O todo é maior do que qualquer ele suas partes).

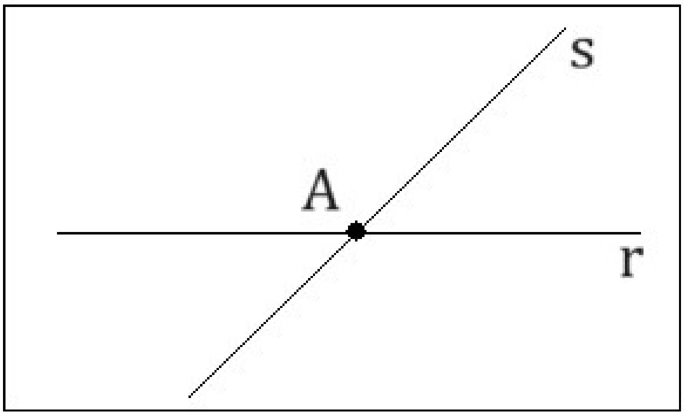
3. OS PRINCIPAIS LUGARES GEOMÉTRICOS

O conjunto de pontos do plano que possuem uma característica em comum é classificado como lugar geométrico. Ao construir uma figura – um elemento geométrico – buscamos satisfazer as definições e características estabelecidas por um lugar geométrico. Dessa forma, podemos garantir que todos os pontos que formam esse ente geométrico satisfazem a propriedade estabelecida e que somente os pontos que fazem parte dessa figura possuem essa propriedade.

As figuras construídas a partir de lugares geométricos passam a ser uma ferramenta de incontestável valor para a resolução dos problemas que envolvem construções geométricas. Assim podemos converter um conjunto com suas propriedades representadas em uma linguagem verbal (escrita ou simbólica), para uma linguagem gráfica (desenho), que por ser visual pode ser mais facilmente compreendida. Além do mais, durante a resolução de um problema podemos determinar um caminho lógico apropriando-se de conhecimentos anteriores ou reduzindo as condições vigentes para a determinação de um único ponto que satisfaça as premissas impostas.

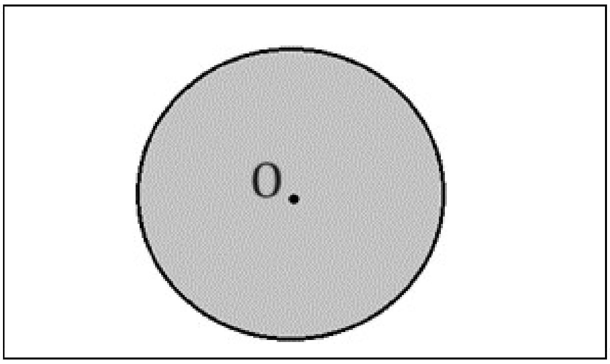
Por se tratar de um conjunto, podemos concluir que sendo ele não vazio, os lugares geométricos podem ser representados por um único ponto (como na interseção de retas), ou por vários pontos (linhas retas ou curvas) (Figuras 5 e 6).

Figura 5. Ponto de encontro entre as retas r e s.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 6. Pontos interiores a circunferência de centro O.

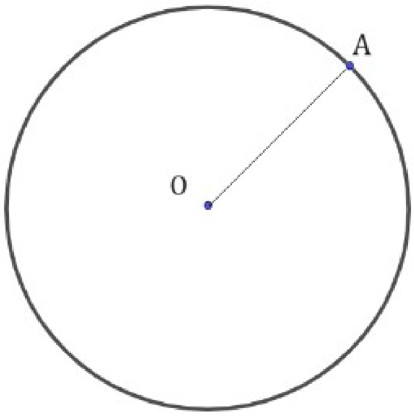


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.1 Circunferência

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano que são equidistantes (mesma distância) de um ponto fixo (Figura 7).

Figura 7. Circunferência de centro O e raio OA.



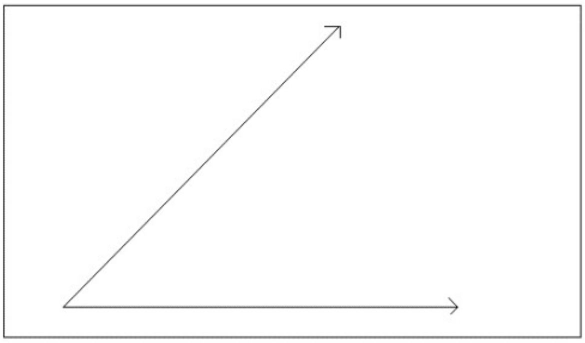
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vale lembrar que a distância entre pontos é definida pelo segmento de reta que tem extremidades nos dois pontos dados; esse segmento será definido como um raio dessa circunferência; e o ponto fixo será chamado de centro da circunferência. Para desenhar uma circunferência com o auxílio de um compasso, inicialmente abre-se as pernas do compasso na abertura desejada para a medida do raio da circunferência, com a ponta seca definimos o local do ponto central e riscamos a superfície, por uma volta completa, marcando assim, todos os pontos que satisfazem a condição.

3.2 Ângulo

Região do plano delimitada por duas semirretas com mesma origem (Figura 8).

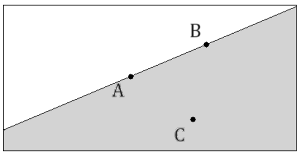
Figura 8. Ângulo.



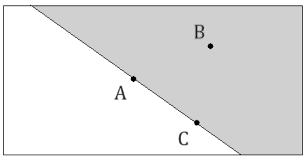
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Ressaltamos que o ângulo representa uma região do plano, como podemos identificar na figura 9 a seguir. Considerando três pontos não colineares de um plano, podemos analisar os semiplanos determinados pelas retas que passam pelos pares A, B e A, C.

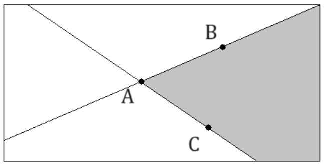
Figura 9. Regiões do plano limitadas por retas.



Semiplano limitado pela reta AB.



Semiplano limitado pela reta AC.

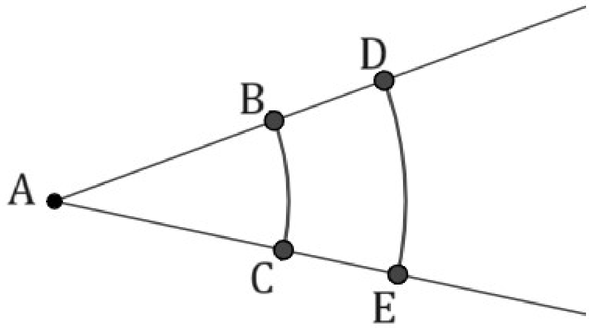


Ângulo limitado pelas semirretas AB e AC.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Logo, o ângulo BÂC ou CÂB é representado pela região convexa limitada pelas semirretas AB e AC (Figura 10). Normalmente, em situações problemas que envolvem ângulos é comum darmos grande atenção a medida do ângulo, ou seja, a abertura existente entre os lados (as semirretas de mesma origem) do ângulo. Usualmente utilizamos a marcação dessa abertura por um arco de circunferência e a ele atrelamos um valor numérico medido em graus. Para fins de cálculos esse procedimento é extremamente útil, entretanto ao atrelar a medida do ângulo a esse arco, os estudantes perdem a essência da definição de região e isso corrobora a seguinte confusão: Qual ângulo é maior BÂC ou DÂE?

Figura 10. Representação dos arcos BC e DE.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando analisamos a abertura do ângulo pelo traçado de um arco de circunferência, o estudante de forma equivocada pode afirmar que DÂE é maior que BÂC, pois o comprimento do arco DE é maior que o comprimento do arco BC. Entretanto, ambos os arcos representam a abertura das mesmas semirretas e expressam a reunião do mesmo conjunto de pontos, logo os ângulos são iguais. Neste caso não foi dito côngruo, mas sim iguais, pois os conjuntos de pontos são os mesmos.

3.3 Triângulo

O triângulo é uma figura geométrica formada por uma linha poligonal fechada (polígono) com três segmentos de reta consecutivos e não colineares. Portanto, dados três pontos A, B e C não colineares, um triângulo ABC é a reunião dos segmentos AB, BC e CA. No qual os pontos A, B e C são os vértices e os segmentos com AB, BC e CA os lados desse triângulo.

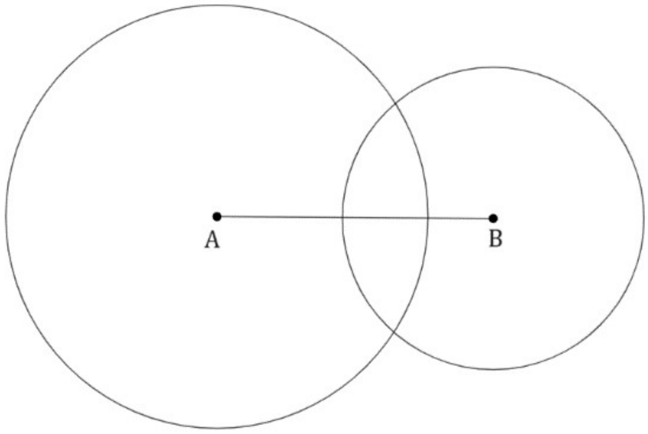
Observação: Como vamos utilizar uma régua não graduada para a construção, as medidas dos segmentos são previamente conhecidas, entretanto não será utilizado unidades métricas para representá-las.

Para construir um triângulo (Figura 11):

1. Traçamos um segmento com a medida desejada.
2. Com o compasso, uma abertura equivalente a medida do segundo segmento e uma circunferência centrada em um dos extremos do segmento é construída. O

processo é repetido para a outra extremidade com a medida do terceiro segmento.

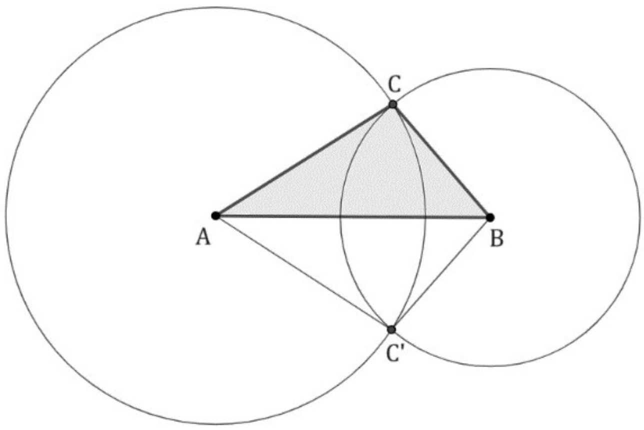
Figura 11. Circunferências centradas em A e B.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso as circunferências sejam caracterizadas como secantes, um dos pontos de interseção pode ser definido como vértice do triângulo, junto aos pontos extremos do segmento inicialmente traçado. Formando o triângulo ABC ou o triângulo ABC’ (Figura 12).

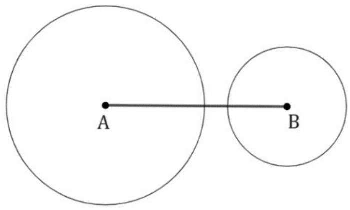
Figura 12. Triângulos ABC e ABC'.



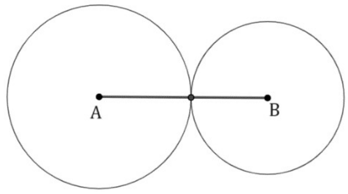
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vale ressaltar que existem três possibilidades de posições relativas entre essas circunferências e apenas o caso de secantes, apresentado acima, gera um triângulo. Os casos abaixo mostram as construções que não possibilitam a construção do triângulo (Figura 13).

Figura 13. Outras posições relativas.



Não existe interseção entre as circunferências.



A interseção entre as circunferências é colinear com A e B.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

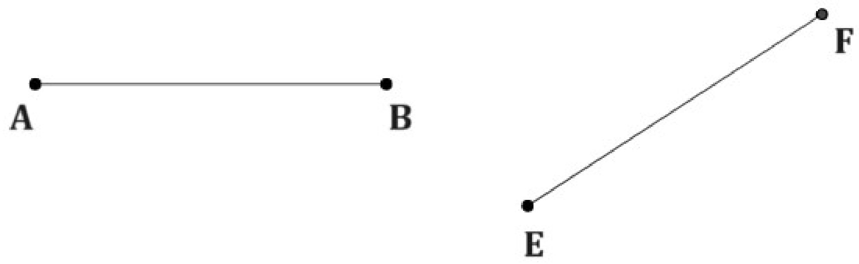
Sendo assim, pode ser considerada uma relação entre a medida dos segmentos, pois para duas circunferências serem classificadas como secante há a necessidade de que a distância entre os centros das circunferências seja inferior a soma de seus raios. Consequentemente, identifica-se um critério para a existência de um triângulo, conhecida como desigualdade triangular. Sendo a, b e c as medidas dos segmentos, a condição necessária para que tais segmentos constituam os lados de um triângulo é que a soma das medidas de quaisquer dois segmentos deve ser superior à medida do terceiro segmento. Podendo ser escrita pelas inequações: $a < b + c$, $b < a + c$ e $c < a + b$, constatamos que se essas condições forem satisfeitas, afirma-se que é possível a existência de um triângulo com as medidas informadas. Caso contrário, ou seja, uma da desigualdade não seja satisfeita, não existe triângulo.

3.3.1 Triângulos congruentes

Dois segmentos AB e EF são congruentes se d(A, B) = d(E, F) (equivalentemente $\overline{AB} = \overline{EF}$, comprimento do segmento AB é igual ao comprimento do segmento EF). Nesse caso escrevemos AB = EF[3] (Figura 14).

[3] Nesse caso o sinal de igualdade "=" representa a congruência entre os segmentos, ou seja, dizemos que o segmento AB é congruente ao segmento EF.

Figura 14. Segmentos congruentes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Dois triângulos ABC e EFG são congruentes (ABC = EFG) se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices,

$$A \leftrightarrow E, B \leftrightarrow F \text{ e } C \leftrightarrow G$$

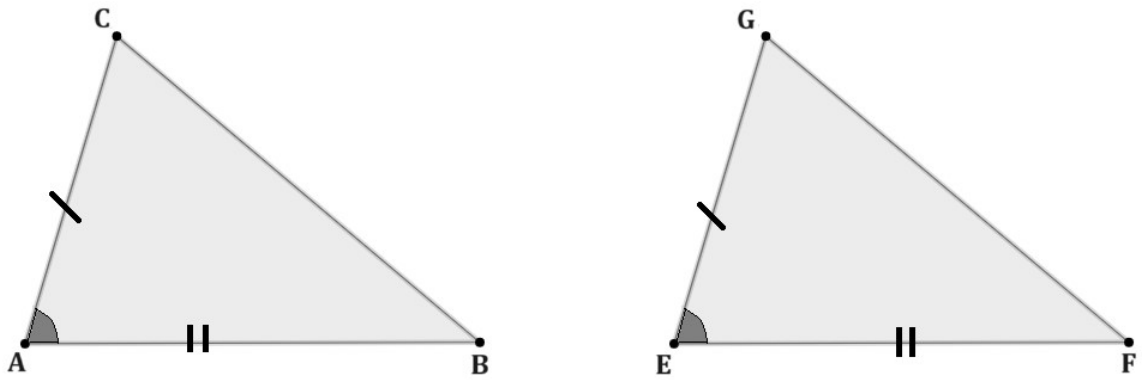
de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

$$AB = EF, AC = EG\ , BC = FG \text{ e } \hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G}$$

De forma análoga, podemos identificar o seguinte enunciado propagado no ensino básico: dois triângulos são congruentes quando os lados e os ângulos de um deles são respectivamente congruentes aos lados e aos ângulos do outro.

Barbosa (2006) apresenta o primeiro caso de congruência de triângulos, o caso LAL (lado, ângulo, lado), enunciando-o da seguinte forma: dados dois triângulos ABC e EFG, se AB = EF, AC = EG e Â = Ê, então ABC = EFG (Figura 15).

Figura 15. Triângulo ABC congruente a EFG.



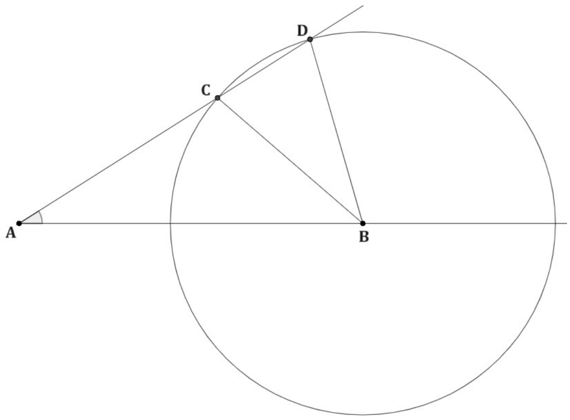
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

É apresentado ainda, como proposições, o 2° e 3º casos de congruência de triângulos, ALA e LLL, respectivamente, com as seguintes estruturas:

(ALA) – Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB = EF, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{E} = \hat{F}$, então ABC = EFG; (LLL) – Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

Dentre os seis elementos dos triângulos (três lados e três ângulos), para garantir a congruência é necessário e suficiente mostrar a congruência entre três desses elementos como: LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto) e os casos apresentados anteriormente. Mas vale ressaltar que algumas configurações não garantem a congruência, pois AAA (ângulo, ângulo, ângulo) garante a proporcionalidade entre os lados dos triângulos e ALL (ângulo, lado, lado) que mostraremos a seguir, também não garante a congruência (Figura 16).

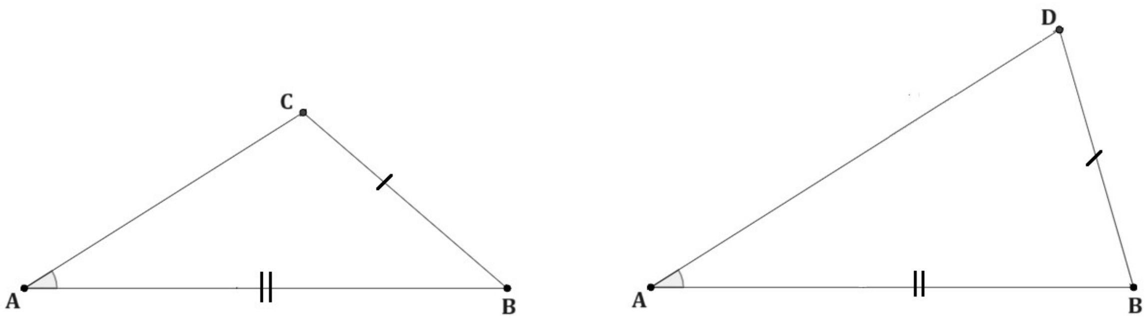
Figura 16. Construção pelo caso ALL.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Nesse caso podemos notar que os triângulos ABC e ABD compartilham o ângulo do vértice A e o lado AB e como os segmentos BC e BD são raios da mesma circunferência podemos afirmar que BC = BD (Figura 17).

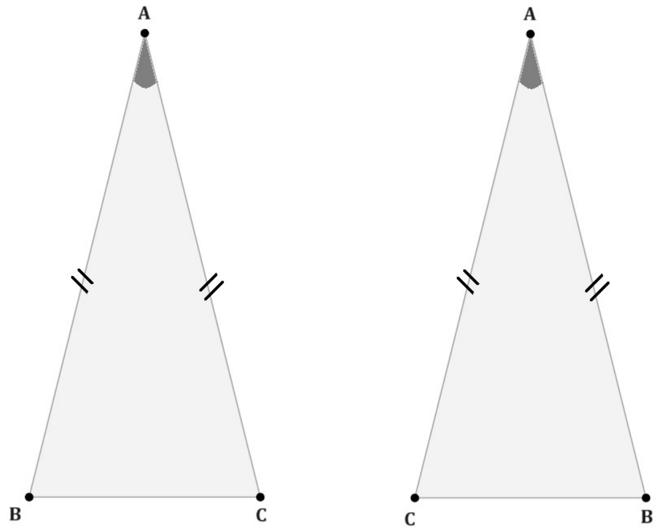
Figura 17. Triângulos ABC e ABD não congruentes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Entretanto, os triângulos mencionados não são congruentes, o que nos leva a conclusão de que o caso ALL não configura um critério de congruência entre triângulos. Também é apresentada uma definição para um triângulo ser isósceles: triângulo que tem dois lados congruentes, sendo estes lados chamados de laterais, e o terceiro lado chamado de base. Seguida da seguinte proposição: em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes (Figura 18). Podemos mostrar essa proposição a partir da congruência de triângulos, pois sendo ABC um triângulo isósceles de base BC, temos:

Figura 18. Triângulo isósceles ABC.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Pelo critério LAL, ABC = ACB, com $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C \; e \; C \leftrightarrow B$. Logo, $\hat{B} = \hat{C}$. De modo análogo a construção anterior, pelo critério ALA, a recíproca é verdadeira.

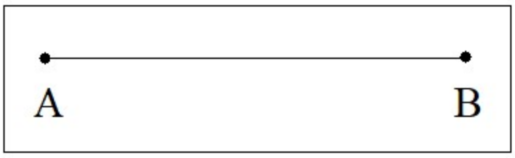
3.4 Ponto médio e mediatriz de um segmento

O ponto médio de um segmento é definido como um ponto que pertence ao segmento e equidista de seus extremos. Sendo um segmento AB e seu ponto médio M podemos afirmar que $AM = MB$.

Para determinar o ponto médio utilizando régua e compasso vamos seguir os seguintes passos:

1. Traçar um segmento AB com medida qualquer (Figura 19).

Figura 19. Segmento AB.



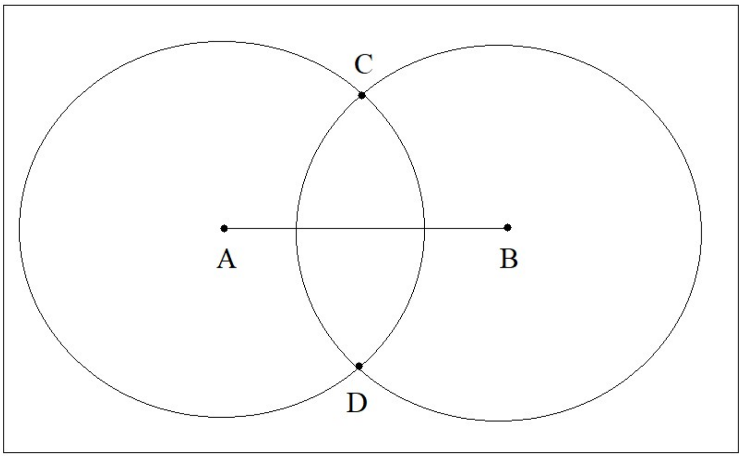
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2. Escolher uma abertura para o compasso maior que a metade do segmento AB.

É válido comentar que essa escolha da abertura pode ser feita mesmo não sabendo o ponto médio, onde é definido como meio do segmento. Podemos fazer essa escolha com tranquilidade (convenientemente), pois a medida pode ser próxima da medida do segmento AB, maior, menor (desde que seja maior que a metade do segmento AB) ou até mesmo igual a medida desse segmento.

3. Fixar a ponta seca nos extremos A e B e realizar as marcações dos arcos de circunferência em cada situação de modo a encontrar a interseção deles (C e D) (Figura 20).

Figura 20. Pontos de interseção das circunferências.

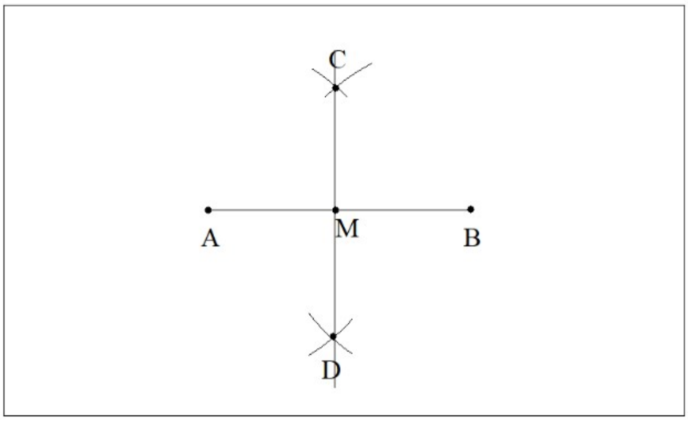


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Nesse caso podemos afirmar que os pontos C e D são os pontos que equidistam dos extremos A e B do segmento.

4. Traçar a reta que passa pelos pontos C e D. Identificar o ponto de interseção da reta CD com o segmento AB (Figura 21).

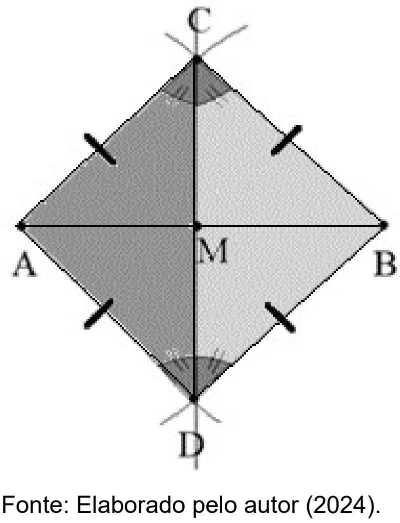
Figura 21. Reta CD.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Conclusão: M é o ponto médio do segmento AB. Essa afirmação pode ser demonstrada levando-se em consideração que o triângulo BCD e ACD são isósceles de base comum CD, sendo assim, os triângulos apresentados são congruentes a partir do critério de congruência LLL. Ainda pela definição de triângulos isósceles, podemos afirmar que os ângulos da base CD, em ambos os triângulos, são côngruos (Figura 22).

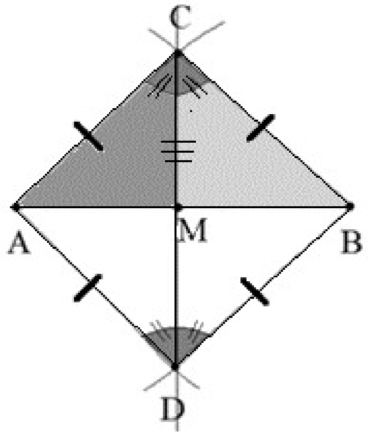
Figura 22. Triângulos isósceles ACD e BCD.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Dessa forma podemos agora voltar nossa atenção para os triângulos CMB e CMA, pois esses são congruentes pelo critério LAL, já que os ângulos ACM e BCM são congruentes, os lados BC = AC e CM é comum aos dois triângulos (Figura 23).

Figura 23. Triângulos ACM e BCM.

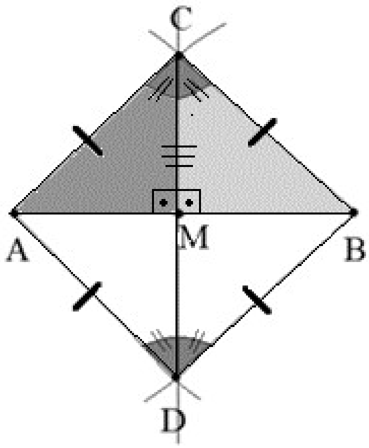


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Portanto os segmentos AM e MB são congruentes, chegando na conclusão que M é o ponto médio do segmento AB. A reta mediatriz de um segmento de reta AB é a perpendicular a esse segmento que contém o seu ponto médio. Considerando esse conjunto de pontos como um lugar geométrico, podemos garantir que a mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento.

Podemos usar a figura anterior e garantir que a reta CD é a reta mediatriz do segmento AB, pois como mostrado CD contém o ponto médio do segmento. Agora é necessário garantir a perpendicularidade. De fato, a perpendicularidade é verdadeira, pois sendo os triângulos CMB e CMA congruentes, os ângulos congruentes CMA e CMB são adjacentes e suplementares. Logo, os ângulos são retos (Figura 24).

Figura 24. Triângulos CMA e CMB retângulos.

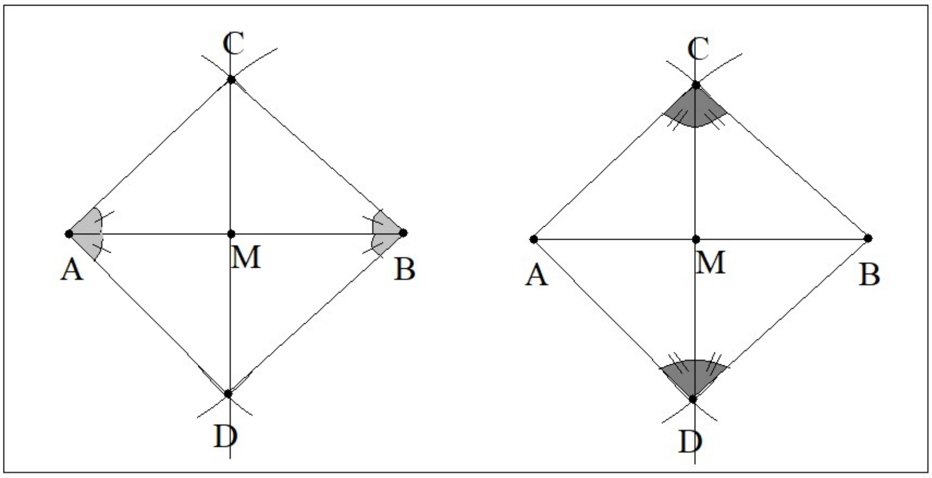


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Entretanto essa construção está carregada de informações e conceitos muito bem estruturados que podemos identificar no processo de ensino de geometria no ensino básico.

I. A reta CD contém as alturas dos triângulos ABC e ABD. Como os triângulos mencionados são isósceles, temos como característica que a altura em relação a base também coincide com a mediana[4] (Figura 25).
II. Os triângulos ABC e ABD são isósceles e congruentes pelo critério LLL. Sabemos então que o quadrilátero ACBD é um losango. Podemos identificar uma importante propriedade de losangos: as suas diagonais AB e CD são perpendiculares entre si, se encontram em seus respectivos pontos médios e são bissetrizes (Definido em 3.8) dos ângulos internos do losango.
III. Os quatro triângulos retângulos formados são congruentes.

Figura 25. Diagonais do losango bissetrizes dos ângulos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.5 Retas paralelas

Duas retas r e s que não se interceptam são ditas paralelas. Para a construção de uma reta paralela a uma reta dada, podemos utilizar a construção de uma mediatriz e a proposição: duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, são paralelas entre si.

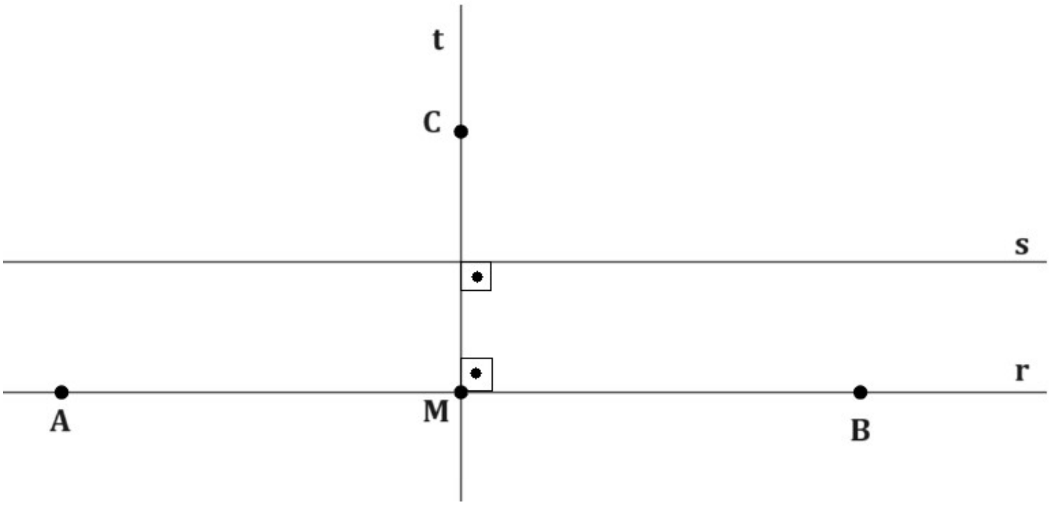
---

[4] Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.

Para construir uma reta s paralela a r, podemos proceder da seguinte forma:

1. Dado uma reta r, vamos marcar dois pontos A e B em r e construir uma reta t perpendicular a r, utilizando o procedimento listado na construção de uma mediatriz para o segmento AB.
2. Em seguida, marcamos dois pontos quaisquer em t para traçarmos a mediatriz desse segmento (Figura 26), e esta será a reta s.

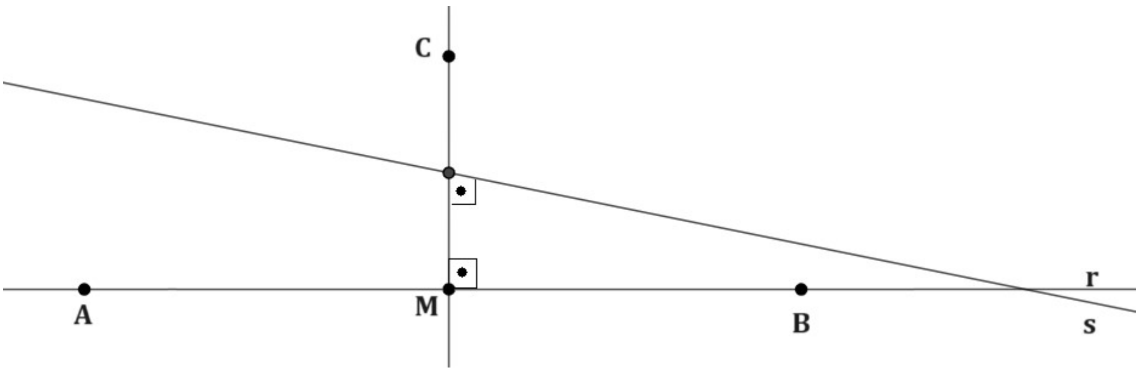
Figura 26. Reta s mediatriz de CM.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Concluímos então que r e s são paralelas pois são perpendiculares a uma reta comum. De fato, as retas r e s são paralelas entre si, pois caso contrário, r e s seriam concorrentes, formando assim um triângulo com dois ângulos retos. Um absurdo, pois qualquer triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos (Figura 27).

Figura 27. Triângulo com dois ângulos retos.



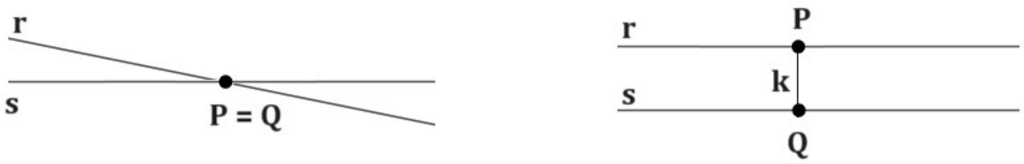
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Podemos definir a distância entre duas retas r e s, sendo:

$$d(r,s) = \min\{d(P,Q) / P \in r, Q \in s\}$$

Sendo r e s paralelas, temos que d(r,s) é uma constante k que representa o comprimento do segmento PQ perpendicular comum a r e s (Figura 28). Sendo r e s concorrentes, temos que d(r,s) = 0.

Figura 28. Distância entre retas.



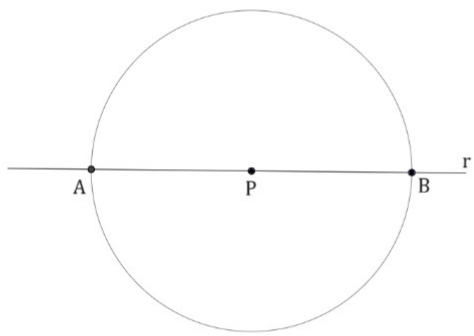
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Levando em consideração o fato evidenciado anteriormente podemos analisar as características das retas paralelas e identificar a seguinte propriedade: duas retas paralelas sempre conservam entre si uma distância constante. Considerando a propriedade apresentada, tratando a reta paralela a uma reta r inicialmente dada como um lugar geométrico, podemos caracterizar o conjunto de todos os pontos que equidistam de r, determinando não apenas uma reta, mas sim um par de retas como veremos em sequência.

Para traçar as retas paralelas podemos seguir os seguintes passos:

Passo 1: Dada uma reta r, escolhemos um ponto P que pertence a r e construímos uma circunferência centrada em P com raio qualquer (Figura 29).

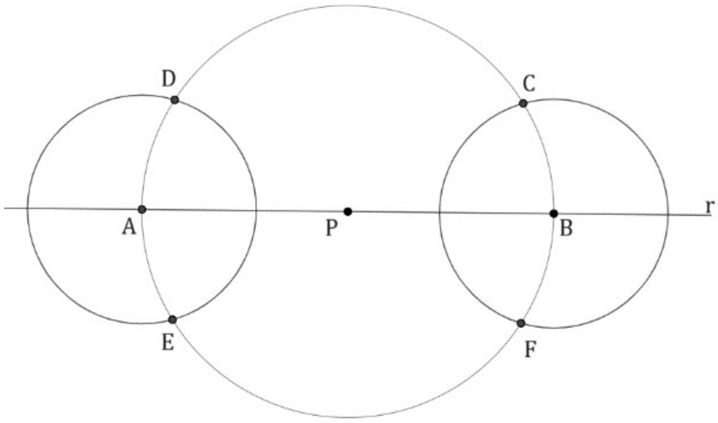
Figura 29. Circunferência centrada em P.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Passo 2: Tomando os pontos A e B de interseção da reta r com a circunferência e construímos duas circunferências com um mesmo raio (menor que o diâmetro da circunferência original), centradas nesses pontos e determinamos os pontos C, D, E e F de interseção com a circunferência (Figura 30).

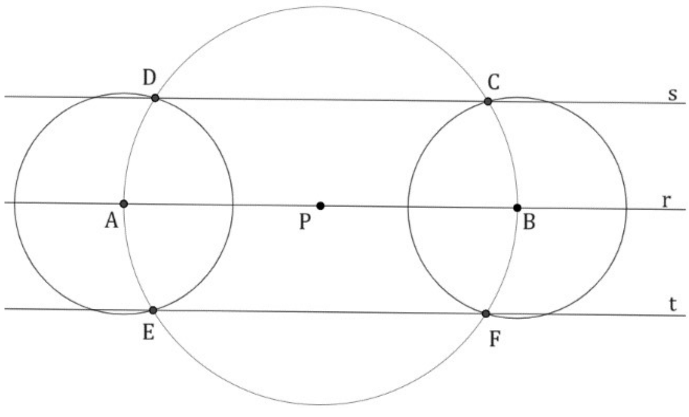
Figura 30. Circunferências de mesmo raio centradas em A e B.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Passo 3: A reta s e t que passam, respectivamente, por C e D e por E e F são paralelas a reta r inicialmente dada (Figura 31).

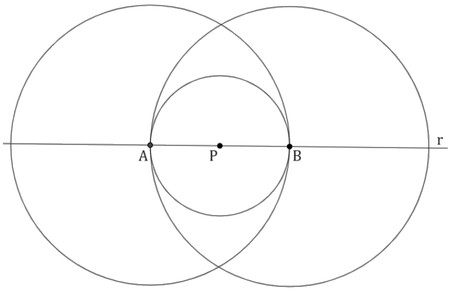
Figura 31. Retas s e t paralelas a r.



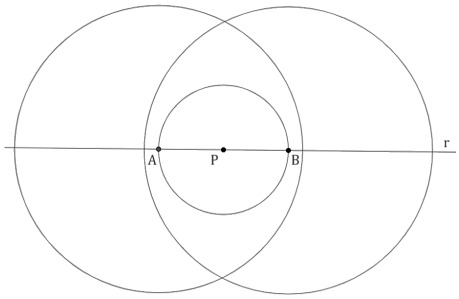
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vale observar que no passo 2 a escolha da medida do raio das circunferências que serão construídas deve ser menor que a medida do diâmetro da circunferência inicial, para que exista a interseção (Figura 32). Caso contrário, teremos os seguintes casos:

Figura 32. Posições relativas entre as circunferências.



Raio igual ao diâmetro: os pontos de interseção coincidem com A e B.

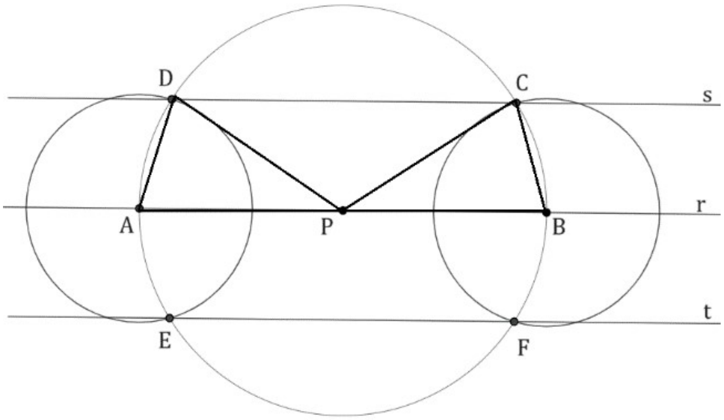


Raio maior que o diâmetro: não existe ponto de interseção.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para demonstrar que a construção apresentada é válida e que a afirmação que as retas s e t são paralelas a reta r, podemos usar a seguinte demonstração. Por construção $BC = AD$, pois são os raios das circunferências centradas em A e B. Sabemos que $PA = PB = PC = PD$, pois são raios da circunferência inicial, centrada em P (Figura 33).

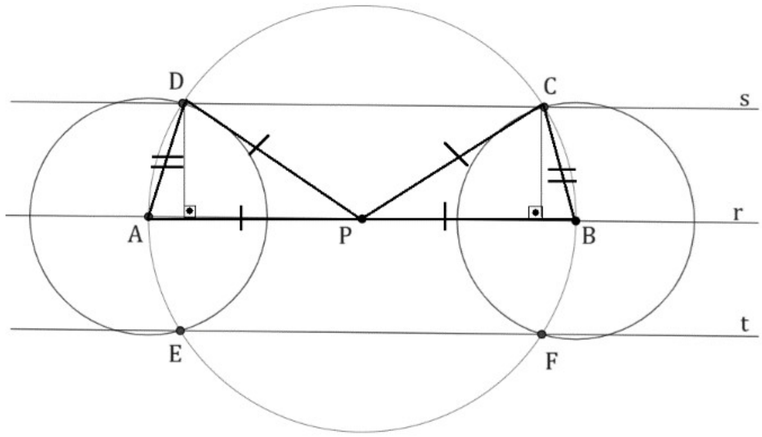
Figura 33. Triângulos PAD e PBC.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Logo, os triângulos PAD e PBC são congruentes pelo critério LLL. Com isso, podemos afirmar que os pontos C e D equidistam do segmento AB. Portanto a reta que passa por C e D é a reta que contêm os pontos que equidistam de r. Com isso podemos afirmar que r//s (Figura 34).

Figura 34. Altura dos triângulos PAD e PBC.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

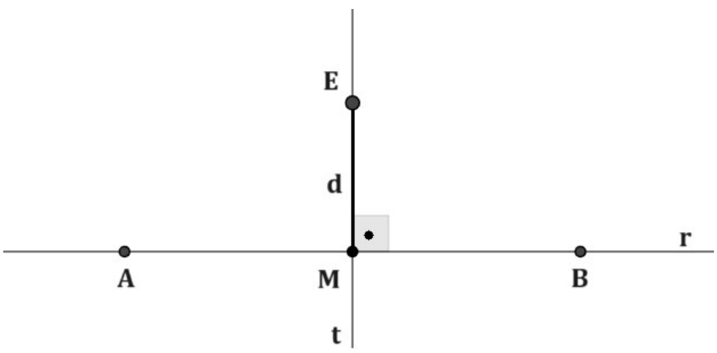
De maneira análoga, podemos demonstrar que t é paralela à r. Sendo assim as retas t e r representam o conjunto de todos os pontos que equidistam de r.

3.6 Retas paralelas dada uma distância

E válido ressaltar que para a construção de retas paralelas apresentadas anteriormente leva-se em consideração a determinação de paralelas a reta r, sem estabelecer condições extras, como uma distância definida entre as retas. Caso essa condição seja imposta, podemos seguir o seguinte procedimento.

Construindo uma perpendicular a reta r, marcamos convenientemente dois pontos A e B distintos, formando assim o segmento AB e traçamos t, sua mediatriz. Em seguida, com auxílio do compasso, marcamos em t um segmento com medida d e extremos em M (ponto médio de AB) e E (Figura 35).

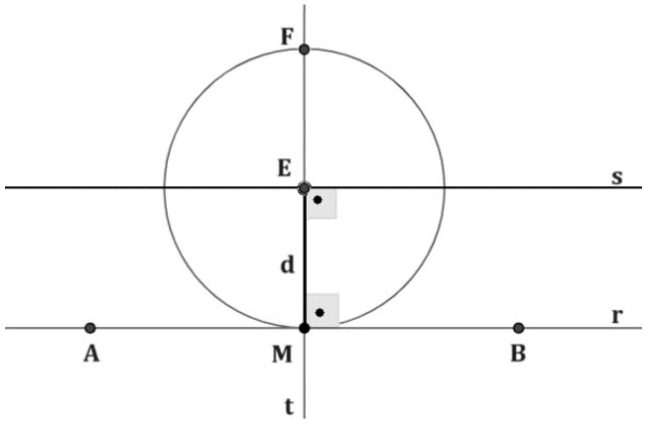
Figura 35. Ponto E em t que dita d em relação a r.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Marcamos o ponto F na reta t, com distância d do ponto E. Em seguida traçamos novamente a mediatriz s do segmente MF (Figura 36).

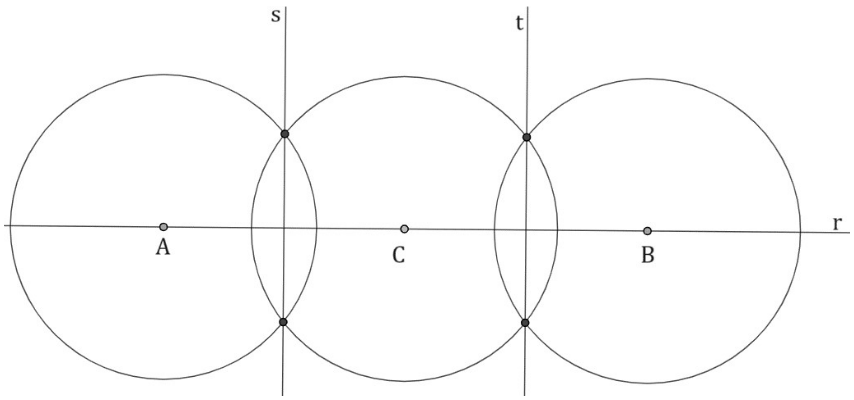
Figura 36. Circunferência de raio d centrada em E.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para determinar o conjunto de pontos que estão a uma distância d de uma reta r, podemos inicialmente determinar duas retas perpendiculares a esse segmento, usando a construção da reta mediatriz. Podemos também usando a propriedade de que retas paralelas conservam a distância, podemos construir uma paralela usando duas perpendiculares a r, conforme sequência abaixo. Construindo as duas perpendiculares a reta r. Marcando convenientemente três pontos distintos, formando assim os segmentos AC e CB. Em seguida realizamos os procedimentos listados anteriormente para a construção das mediatrizes s e t (Figura 37).

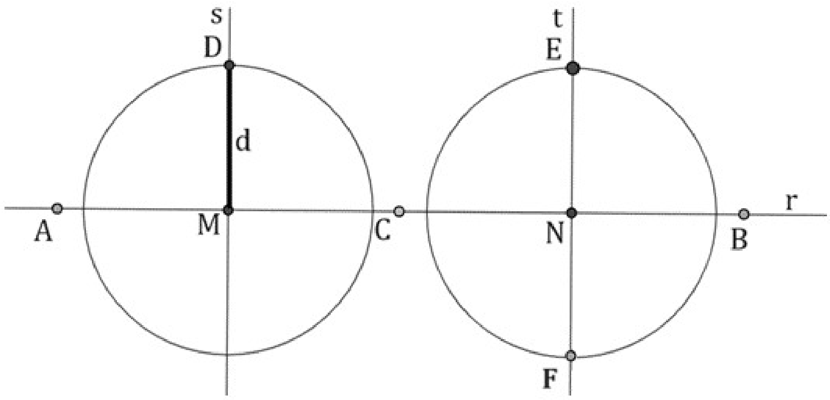
Figura 37. Retas s e t, mediatrizes de AC e CB.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construímos agora, uma circunferência centrada no ponto de interseção de s e r (ponto M) e raio d e marcamos o ponto D (interseção da circunferência e s). Em seguida, desenhamos uma circunferência com raio d e centro em N, determinando assim um ponto E (Figura 38).

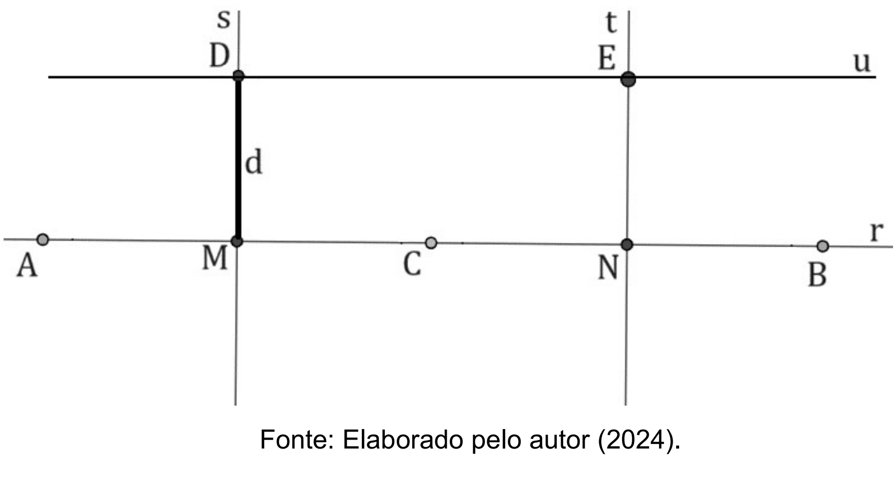
Figura 38. Pontos de interseção das circunferências.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Por consequência da construção, D, E e F são pontos que equidistam uma distância d de r. Entretanto a reta que contém D e F é concorrente a r, logo a reta paralela a r é a reta u, que contêm os pontos D e E (Figura 39).

Figura 39. Reta u que passa por D e E.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

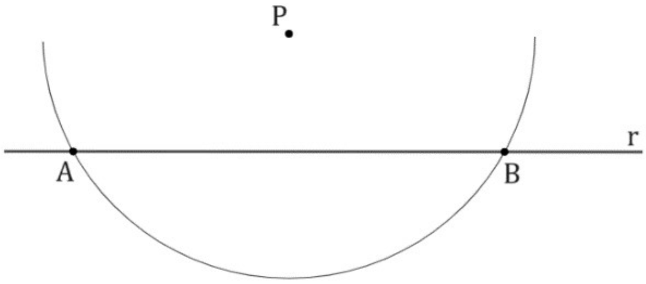
Vale lembrar que a outra reta que pertence ao par de paralelas a r pode ser determinada na interseção das circunferências com as mediatrizes nos pontos abaixo de r.

3.7 Reta paralela por um ponto não pertencente

Para construir uma reta paralela a uma reta r por um ponto P, não pertencente a reta, podemos utilizar a seguinte construção:

1. Com o auxílio de um compasso, construir uma circunferência centrada em P, de modo que intersecte a reta r em dois pontos A e B (Figura 40).

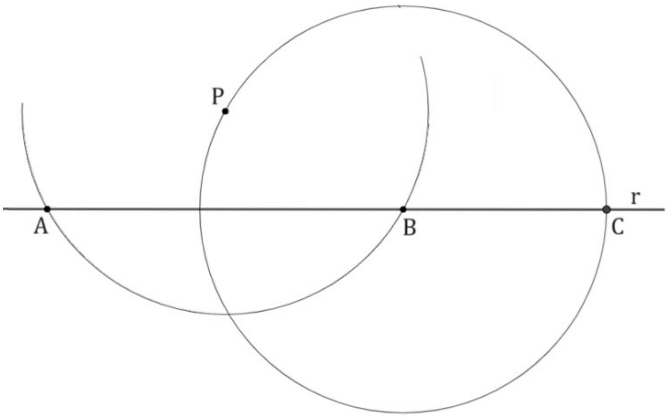
Figura 40. Arco da circunferência centrada em P que intersecta r.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2. Traçar uma circunferência centrada em B com o mesmo raio da circunferência anterior e marcar o ponto C de interseção da circunferência com a reta r (Figura 41).

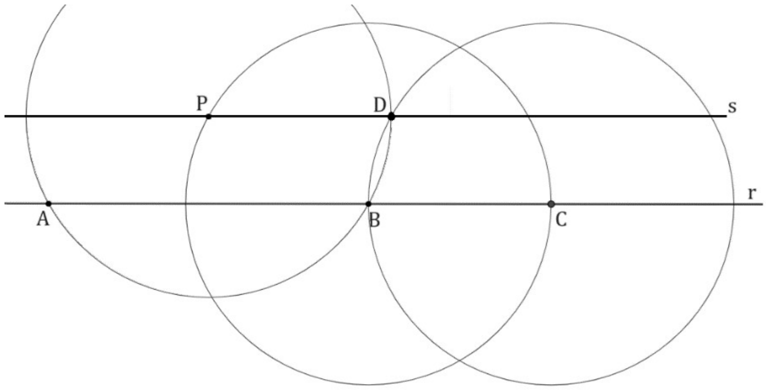
Figura 41. Circunferência centrada em B e raio PB.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3. Novamente, desenhar uma circunferência centrada em C com o mesmo raio da circunferência anterior. Determinar o ponto D de interseção com entre a primeira e a última circunferência. Traçar a reta s por P e D (Figura 42).

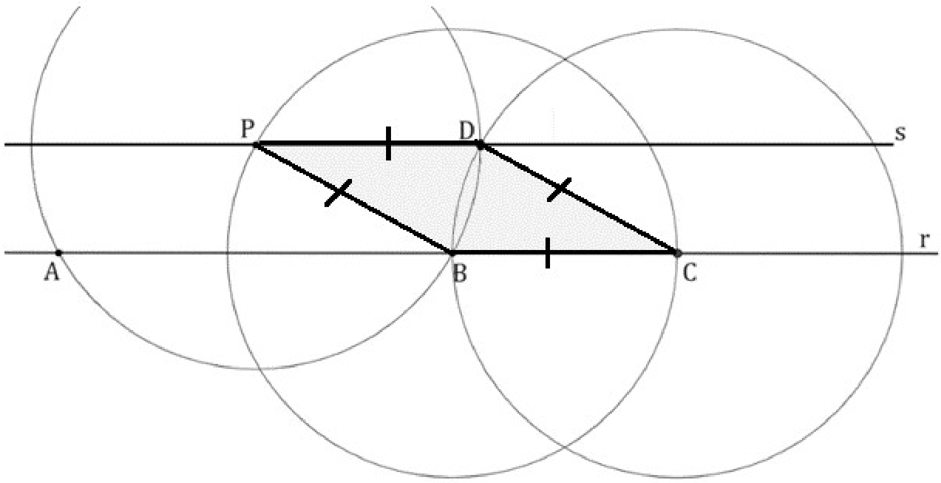
Figura 42. Circunferência centrada em C com raio BC.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Conclusão: a reta s é paralela à reta r, pois PBCD é um losango, já que PB = BC = CD = PD. Sendo assim as retas que contêm os lados opostos são paralelas (Figura 43).

Figura 43. Losango PBCD.

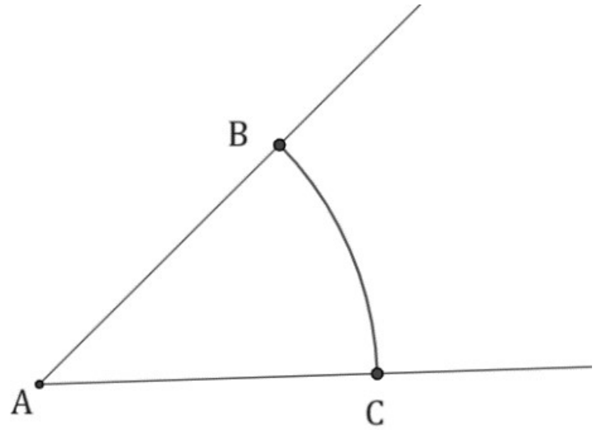


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.8 Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo é a semirreta interna de mesma origem que o divide em dois ângulos adjacentes e congruentes. Para construir a bissetriz, inicialmente desenhemos um ângulo BÂC qualquer e com o auxílio do compasso, marcamos um arco de circunferência centrada no vértice A do ângulo (Figura 44).

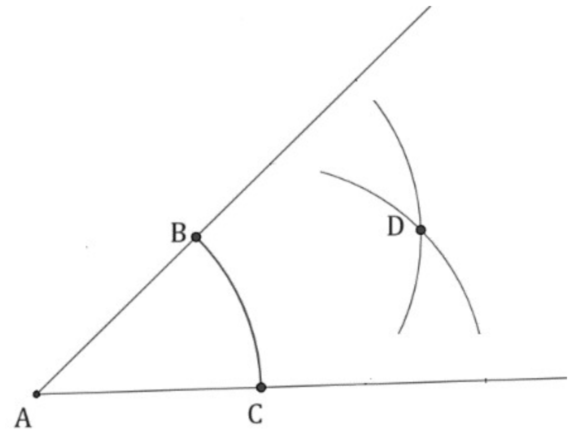
Figura 44. Ângulo BÂC.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Mantendo a mesma abertura marcamos outros dois arcos cujos centros são os pontos B e C de interseção do arco com os lados do ângulo. Determinamos então o ponto D, interseção desses arcos (Figura 45).

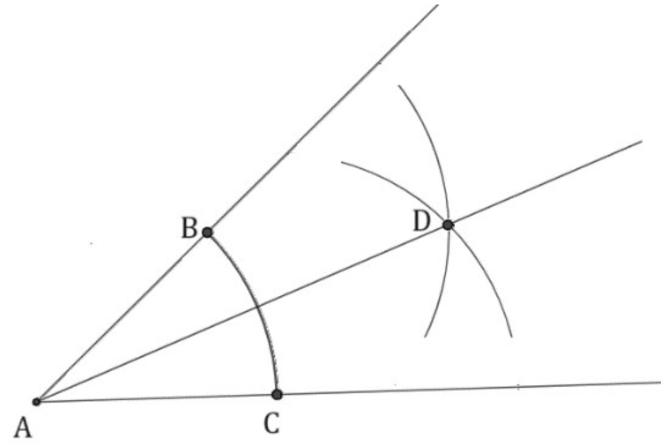
Figura 45. Interseção dos arcos centrado em B e C.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Traçamos a semirreta com origem em A (vértice do ângulo) pelo ponto de interseção D. Concluímos então que essa semirreta é a bissetriz do ângulo dado (Figura 46).

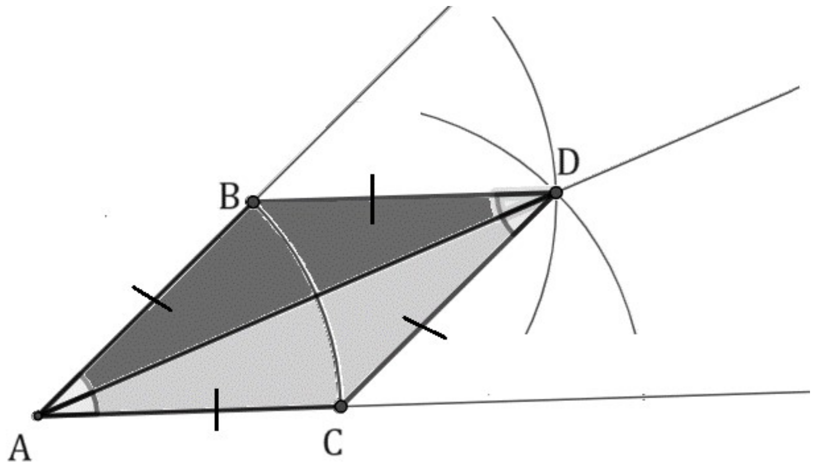
Figura 46. Bissetriz do ângulo BÂC.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Podemos justificar a conclusão levando em consideração que os triângulos isósceles ABD e ACD são congruentes (caso LLL), dessa forma, os ângulos adjacentes BÂD e CÂD são congruentes (Figura 47).

Figura 47. Triângulos BÂD e CÂD isósceles congruentes.



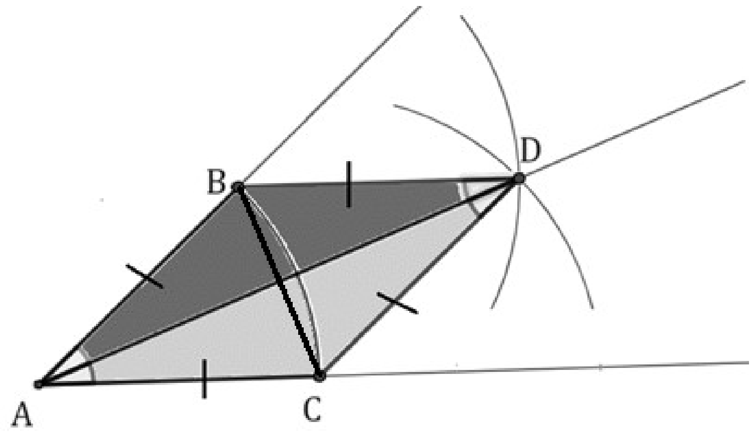
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas observações podem sem feitas analisando a conclusão da demonstração anterior.

I. O quadrilátero formado é um losango e podemos afirmar que a bissetriz contém uma diagonal do quadrilátero. Percebemos então que as diagonais do losango são bissetrizes dos ângulos internos do quadrilátero notável.

II. A construção feita, a reta AD é a mediatriz do segmento BC formado. Como os triângulos ABC e DBC são isósceles a reta mediatriz em relação a base contém a bissetriz do ângulo oposto à AB (Figura 48).

Figura 48. Reta AD a mediatriz do segmento BC.

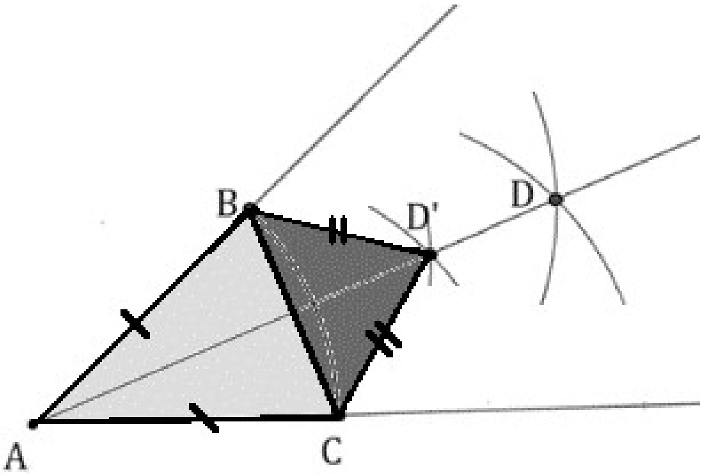


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Um questionamento que pode surgir ou até mesmo ser proposto pelo professor, para instigar o senso crítico e testar o domínio das propriedades dos educandos é: Na construção da bissetriz, por que a segunda abertura, para construção dos arcos, a abertura do compasso precisa ser do mesmo tamanho do escolhido anteriormente?

É importante ressaltar que não existe uma única solução, a escolha da construção dá enfoque nas propriedades conhecidas. Entretanto, a justificativa apresenta a construção de triângulos isósceles semelhantes. Podemos imaginar inicialmente o segmento BC e a construção de uma reta mediatriz, por se tratar de um conjunto de pontos que equidista de B e C, o segundo segmento não necessita ter o mesmo tamanho do inicial. O importante é que na construção, os triângulos que irão surgir (ABC e D’BC) para se ligar aos vértices, compartilhem um lado (a “base BC”), com isso a construção também apresentará êxito (Figura 49).

Figura 49. Triângulos isósceles ABC e D'BC.



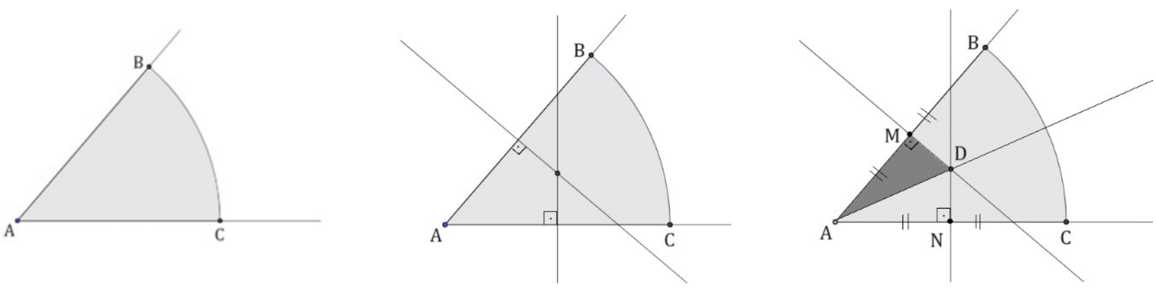
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Fica apenas uma ressalva! A escolha do segundo segmento necessita ser maior do que a metade do segmento AB, para que a construção satisfaça a existência de um triângulo pela desigualdade triangular apresentada anteriormente.

3.8.1 Bissetriz de um ângulo por lugar geométrico

A bissetriz é o conjunto de todos os pontos, internos ao ângulo, que equidistam dos lados do ângulo. Para construir a bissetriz, inicialmente desenhe um ângulo qualquer e com o auxílio do compasso, marque dois segmentos congruentes, um em cada lado do ângulo. Utilizando os conhecimentos adquiridos na seção anterior, construa as retas mediatrizes dos segmentos AB e AC e determine o ponto de interseção D dessas retas (Figura 50).

Figura 50. Construção de bissetriz por mediatrizes.



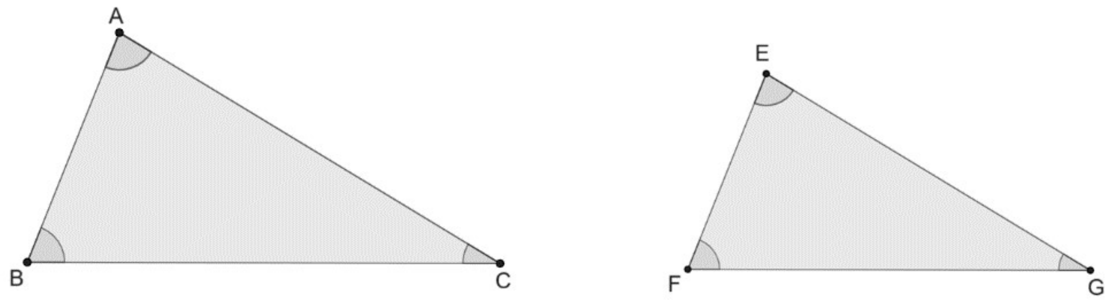
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Os triângulos AMD e AND formados pelos lados do ângulo e as mediatrizes, são côngruos pois são retângulos com catetos e hipotenusa, respectivamente, congruentes. Com isso os DM = DN equidista dos lados do ângulo. Logo os ângulos internos são de mesma medida. Sendo assim, a semirreta forma dois ângulos adjacente BÂD e CÂD congruentes, sendo assim classificada como bissetriz e formada pelos pontos que equidistam dos lados do ângulo.

3.9 Divisão de um segmento em partes iguais

Diremos incialmente que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma relação biunívoca entre os seus vértices, de modo que os ângulos desses vértices sejam congruentes e os lados proporcionais. Sejam ABC e EFG dois triângulos, de modo que $A \rightarrow E$, $B \rightarrow F$ e $C \rightarrow G$ (Figura 51), temos que:

Figura 51. Triângulos ABC e EFG semelhantes.

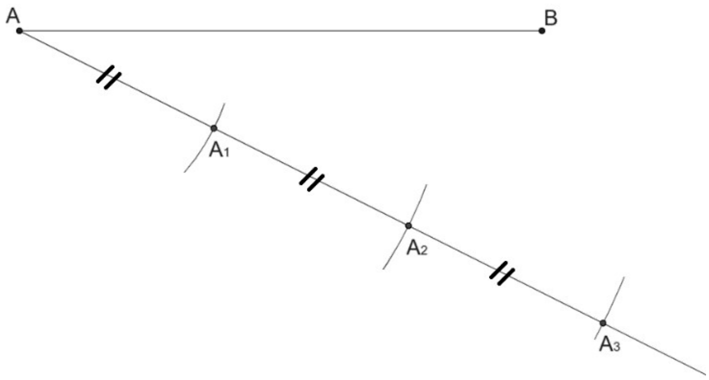


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{E} \\ \hat{B} = \hat{F} \\ \hat{C} = \hat{G} \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}} = k$$, sendo k constante de proporcionalidade dos lados.

Podemos observar que sendo $k = 1$, temos dois triângulos congruentes. Para dividir um segmento em AB em partes iguais podemos usar a construção de retas paralelas e semelhança de triângulos. Apresentamos a seguir o processo para dividir um segmento em três partes proporcionais. Dado o segmento AB, construímos uma semirreta qualquer com origem em A. Nessa semirreta, com auxílio do compasso, marcamos três pontos (A_1, A_2 e A_3) igualmente espaçados (Figura 52).

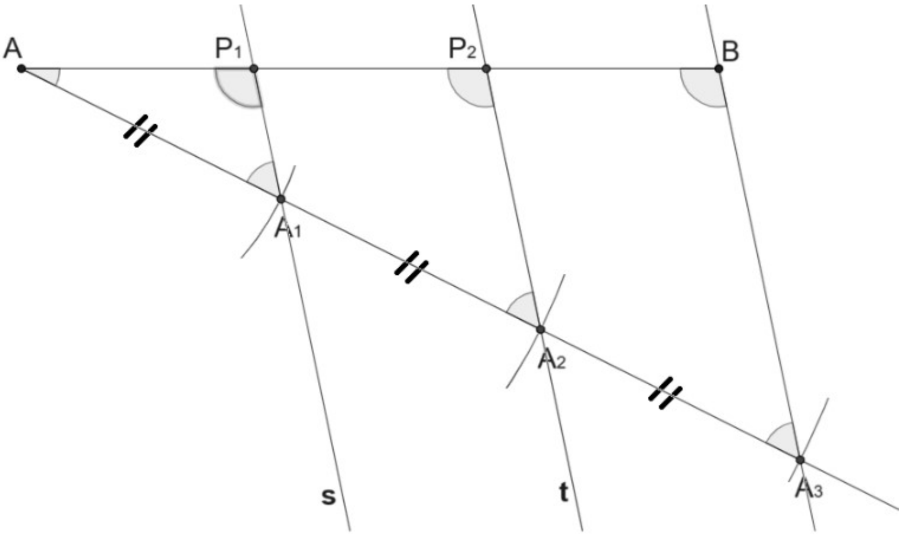
Figura 52. Divisão da semirreta em partes iguais.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Traçamos a reta que passa pelos pontos B e A_3. Em seguida, traçamos as retas s e t paralelas a BA_3, que passam por A_1 e A_2, respectivamente (Figura 53).

Figura 53. Construção de retas paralelas a BA_3.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

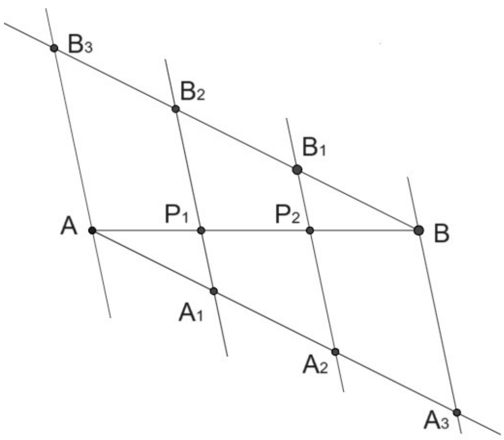
Os triângulos AP_1A_1, AP_2A_2 e ABA_3 são semelhantes, já que sendo as retas paralelas, os ângulos correspondentes são congruentes ($\widehat{P_1} = \widehat{P_2} = \hat{B}$ e $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3}$). Logo:

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_2}} = 2 \text{ e } \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_3}} = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{AB}} = 3$$

Temos então que $\overline{AB} = 3.\overline{AP_1}$, como $\overline{AP_2} = 2.\overline{AP_1}$, concluímos que $AP_1 = P_1P_2 = P_2B$.

De modo análogo ao que foi construído anteriormente, podemos fazer a divisão do segmento em n partes iguais, tendo em vista que a quantidade de pontos marcados e a distância entre eles, podem ser escolhidos e construídos na semirreta conforme a necessidade. Essa mesma construção pode ser feita usando a ideia de paralelogramos para realizar a divisão do segmento em n partes iguais. Pois podemos construir duas semirretas paralelas, uma com origem em A e outra em B. Nessas semirretas, com auxílio do compasso, marcamos três pontos (A_1, A_2 e A_3; B_1, B_2 e B_3) igualmente espaçados. Traçamos as retas AB_3, A_1B_2, A_2B_1 e A_3B, paralelas entre si, dividindo o segmento AB em partes iguais (Figura 54).

Figura 54. Construção de retas paralelas a partir de duas semirretas.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

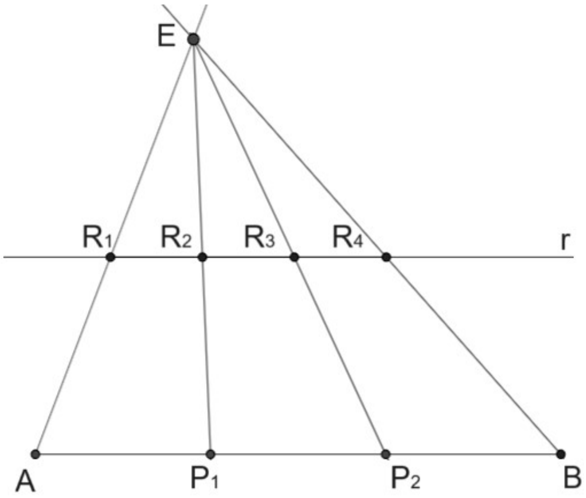
Podemos realizar, também pela ideia de semelhança de triângulos, a divisão do segmento pelos seguintes passos:

1. Traçamos uma reta r paralela ao segmento AB e em seguida marcamos, com auxílio do compasso, quatro pontos (R_1, R_2, R_3 e R_4) igualmente espaçados em r.
2. Desenhamos as retas AR_1 e BR_4, determinando assim (caso exista)[5] o ponto E, interseção das retas.

[5] O ponto E será determinado, se somente se, as retas AR_1 e BR_4 forem concorrentes. Caso contrário, as retas serão paralelas e o segmento R_1R_4 = AB. Nesse caso, a medida do segmente R_1R_2 será exatamente igual a medida das partes de AB.

3. Em seguida, traçamos as retas ER_2 e ER_3. Determinando assim os pontos P_1 e P_2 (Figura 55).

Figura 55. Divisão do segmento utilizando uma reta paralela.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

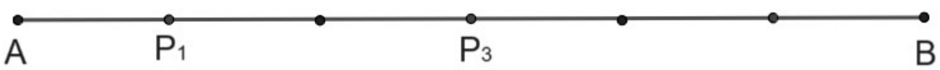
Sendo k a constante de proporção entre as alturas h de ER_1R_2 e H de EAP_1, temos que:

$$\frac{\overline{R_1R_2}}{\overline{AP_1}} = \frac{\overline{R_2R_3}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{\overline{R_3R_4}}{\overline{P_2B}} = k$$

Como os segmentos R_1R_2, R_2R_3 e R_3R_4 são congruentes por construção, concluímos que $AP_1 = P_1P_2 = P_2B$.

Vale ressaltar que os procedimentos apresentados dividem o segmento AB em parte iguais, entretanto, é possível usar os mesmos conceitos e dividir o segmento em partes proporcionais, como por exemplo em partes proporcionais a 1:2:3. Para isso, basta construir seis ($1 + 2 + 3$) segmentos congruentes, marcando os pontos P_1 a P_5, logo as partes de AB proporcionais a 1:2:3 serão os segmentos AP_1, P_1P_3 e P_3B, respectivamente (Figura 56).

Figura 56. Segmento dividido em seis partes iguais.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No aprendizado do estudante, técnicas de desenhos geométricos desempenham um papel crucial. A habilidade de manusear instrumentos tradicionais como compasso e régua não deve ser negligenciada, pois oferece uma base sólida para compreender e manipular conceitos de forma tangível. Em um mundo cada vez mais digital, é tentador depender exclusivamente de ferramentas digitais e aplicativos para essas tarefas. No entanto, essa dependência pode limitar as oportunidades de aprendizado e aprofundamento do conhecimento.

Entende-se que os aplicativos e *softwares* educacionais na construção desses elementos geométricos são grandes aliados, mas é necessário compreender que, mesmo para a utilização de um *software* demanda-se um conhecimento sobre o objeto estudado. É necessário compreender que essas construções virtuais nada mais são do que uma interpretação que traduz as proposições sobre a geometria.

Realizar uma construção geométrica manualmente é uma experiência que proporciona uma compreensão mais profunda das propriedades e das relações entre formas e objetos. Esse processo não apenas prepara os estudantes para desafios acadêmicos, mas também para os desafios da vida profissional, na qual a compreensão visual e prática dos conceitos geométricos é frequentemente necessária.

Nota-se que os estudantes que ingressam em cursos de engenharia geralmente têm algum contato com geometria e construções geométricas durante a graduação, embora o foco possa variar, dependendo da especialização e do currículo específico de cada universidade. Em disciplinas como geometria descritiva, fundamental em cursos de arquitetura e engenharia civil, os estudantes aprendem técnicas para representar objetos tridimensionais em duas dimensões através de projeções. Caso esse estudante já tenha tido contato com construções geométricas o estudante desenvolve uma intuição geométrica mais profunda, facilitando a aplicação de conceitos geométricos nas situações práticas.

Ao se tornar demasiadamente dependente da tecnologia, o estudante corre o risco de perder a oportunidade de desenvolver habilidades de raciocínio crítico e resolução de problemas. Portanto, é essencial que os estudantes mantenham um equilíbrio saudável entre o uso de ferramentas tradicionais e digitais. Isso não apenas enriquece sua experiência de aprendizado, mas também os capacita a enfrentar desafios de maneira mais criativa e eficaz, preparando-os de forma abrangente para os diversos contextos que enfrentarão ao longo de suas vidas, tanto a acadêmica quanto a profissional.

Dessa forma, é importante ressaltar que as sequências didáticas aqui apresentadas são um suporte para o professor, para que se sinta seguro e possa ministrar aulas de construções geométricas com o auxílio de régua e compasso. As propostas foram pensadas para turmas de ensino médio, mas não de forma exclusiva, o que possibilita modificações e adequações que as tornem passíveis de aplicação em outras séries, incluindo as do ensino fundamental.

Levando em consideração que um dos objetivos deste trabalho é a promoção do desenvolvimento profissional, formação e aperfeiçoamento do docente em matemática, não podemos deixar de reconhecer a significativa contribuição do programa de mestrado (PROFMAT) para o aprimoramento das minhas qualidades como professor. Voltado para educadores de matemática, esse programa possibilitou uma ampliação do meu conhecimento teórico em relação à diversas áreas da matemática, proporcionando a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos em áreas específicas. Isso permitiu uma abordagem dos conteúdos de forma mais detalhada, abrangente e segura em vários momentos em sala de aula; resultando em aulas mais dinâmicas, envolventes e eficazes, atendendo melhor às necessidades e expectativas dos estudantes.

Por fim, o profissional da educação matemática deve sempre buscar o aprimoramento em sua formação, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdos matemáticos que sejam relevantes para a docência. Com uma compreensão mais robusta sobre os temas que ministra, o professor pode enriquecer o currículo e proporcionar aos estudantes uma experiência de aprendizagem mais profunda e significativa.

Referências

ALBRECHT, Clarissa; OLIVEIRA, Luiza. **Desenho Geométrico**. Viçosa, 2012.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 10ª edição. SBM. Rio de janeiro, 2006.

BERLINSKI, David. **Os elementos de Euclides/David Berlinski**; tradução Claudio Carina; revisão técnica Marco Moriconi – 1. ed. – Rio de Janeiro: Zahar, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório da amostragem do Saeb 2021**. Brasília, DF: INEP, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/relatorio_de_amostragem_saeb_2021.pdf Acesso em: 12, janeiro de 2024.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Notas sobre o Brasil no Pisa 2022**. Brasília, DF: INEP, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2022/pisa_2022_brazil_prt.pdf Acesso em: 12, janeiro de 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em: 12, janeiro de 2024.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf Acesso em: 12, janeiro de 2024.

CARDOSO, Cátia Vanessa Oliveira. **A Geometria de Lobachevsky**. Dissertação de Mestrado. Mestrado em Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra.

2013. Disponível em: https://hdl.handle.net/10316/99864 Acesso em: 12, janeiro de 2024.

DANTE, Luiz Roberto. **Livro didático de matemática: uso ou abuso?** Aberto, Brasília, ano 16, n. 69, jan./mar. 1996.

GOIÁS, **Documento Curricular para Goiás Ampliado**, DC-GO, 5ª versão, 2019. Disponível em: https://goias.gov.br/educacao/wp-content/uploads/sites/40/2020/08/80d3d5d8ac56f920562e29f5ef9785df-2cf.pdf. Acesso em: 12, janeiro de 2024.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**. 9º ano. ed., São Paulo: Atual Editora, 2018.

LORENZATO, Sergio Apparecido. **Por que não ensinar Geometria?** In: A. Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, p. 3-13,1995.

MARMO, C.; MARMO, N. **Desenho Geométrico**. v. 1, Editora Scipione, São Paulo 1994.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil**: **causas e consequências.** Zetetiké, Campinas, SP, v. 1, n. 1, p. 7-17, jan./dez. 1993.

PUTNOKI, Jose Carlos. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico.** V. 1. Editora Scipione Ltda., São Paulo, 1993.

TIMES HIGHER EDUCATION. **World University Rankings 2024.** Times Higher Education, 2024. Disponível em: https://www.timeshighereducation.com/world-university-rankings/2024/world-ranking Acesso em: 11, junho de 2024.

WAGNER, Eduardo. Colaboração de CARNEIRO, J. P. Q. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.** 2001. Dissertação, Mestrado em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/FAEC-85DGQB/1/zuin_elenice_disserta_nopw.pdf Acesso em: 12, janeiro de 2024.

ANEXOS
SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Sequência 01

TEMA: Construção de um triângulo

Público-alvo: 1ª Série do Ensino Médio

Etapas: 02

Duração: 02 aulas

Objetivo da sequência didática:

- Entender a circunferência como lugar geométrico.
- Retomar conceitos de posições relativas entre circunferências.
- Identificar a desigualdade triangular como uma condição de existência do triângulo.

Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:

(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Materiais necessários: folha, lápis, borracha, régua e compasso

1ª Etapa

Nesse primeiro momento poderá ser feito uma atividade diagnóstica que possibilite ao professor entender o nível de conhecimento dos estudantes em relação a alguns elementos geométricos.

Descrição da etapa:

Primeiramente, deve-se apresentar aos estudantes que a proposta dessa aula está focada na revisão de conceitos já estudados e que as respostas gráficas (desenhos) devem ser apresentadas usando apenas os instrumentos de construção indicados. Oriente que quanto menor as marcações, mais precisas serão as construções. Então, proponha que os estudantes respondam às questões e ilustrem os elementos que correspondam às características pedidas, quando solicitados.

Sugestão de atividade:

1. **Exploração de retas a partir de um ponto:** Determine o número de retas que podem ser traçadas através de um único ponto A.
2. **Conexão entre pontos por retas:** Estabeleça o número de retas distintas que interligam os pontos A e B.
3. **Visualização e medição de distância:** Represente graficamente a distância entre os pontos A e B. E com o auxílio do compasso meça esse comprimento.
4. **Construção de pontos equidistantes:** Defina ‘equidistante’ e ilustre, com um desenho, os pontos C e D, de modo que ambos sejam equidistantes do ponto E.
5. **Representações alternativas de equidistância:** Existe outra maneira de representar os pontos C e D como equidistantes do ponto E? Elabore uma representação com outras possibilidades para justificar a resposta.
6. **Associação com elementos geométricos:** A representação feita, assemelha-se a algum elemento geométrico conhecido? Qual?
7. **Definição e representação de circunferência:** Defina o termo circunferência e faça um desenho representativo dessa forma.
8. **Relações entre circunferências:** Considerando um segmento FG, desenhe uma circunferência com centro no ponto F e outra com centro no ponto G. Determine a posição relativa entre essas duas circunferências.
9. **Variação dos raios e interseções:** Avalie se diferentes tamanhos de raios para as circunferências resultam em novas configurações. Liste as possíveis relações, indicando a presença ou ausência de interseções.
10. **Relação entre raios e segmento para tangência e separação:**

- Para circunferências tangentes exteriormente, qual deve ser a relação entre os raios e o segmento FG?
- Para circunferências tangentes internamente, como os raios se relacionam com o segmento FG?

- Para circunferências que são externas sem interseção, qual é a condição necessária em relação aos raios e ao segmento FG?

Na construção do item 4, é conveniente marcar o ponto E inicialmente, para em seguida marcar o ponto C e posteriormente, com a abertura do compasso na medida EC, marcar o ponto D. No item 6, os estudantes podem apresentar uma confusão na definição de circunferência e círculo. No item 10, podemos sugerir para o caso de tangentes internamente a fixação da ponta seca no cento da circunferência maior e a outra ponta no ponto de tangência e solicitar que sem mover a ponta seca, usem o compasso para medir o segmento FG. Com isso, o estudante irá verificar que para realizar essa medida, a medida do raio da circunferência maior diminuiu exatamente a medida do raio menor. Logo, a medida de FG é igual a diferença dos raios.

Esta atividade inicial é uma forma de avaliação preliminar, portanto, pode ser vantajoso escolher realizar a tarefa de maneira individual. Em seguida, promova a socialização das respostas entre os estudantes para verificar se chegaram a conclusões comuns e esclarecer possíveis dúvidas.

2ª Etapa

Nesse segundo momento buscamos fazer com que os estudantes relembrem a atividade anterior, resgatando os conhecimentos (que para alguns foram adquiridos nessa etapa) para realizar a construção de triângulos. Vale ressaltar que durante as atividades, as medidas dos segmentos podem ser graduadas para uniformizar as construções na sala, ou então, pode ser produzido um material com segmentos desenhados com as medidas estabelecidas, sem a necessidade de quantificá-las.

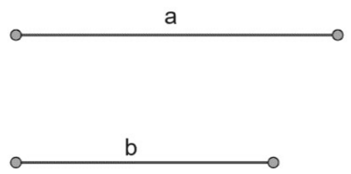
Descrição da etapa:

Proponha que os estudantes respondam às questões e ilustrem os elementos que correspondem às características pedidas, quando solicitados.

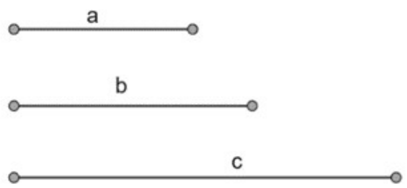
Sugestão de atividade:

1. **Definição de triângulo:** Qual a definição de um triângulo?
2. **Triângulos com lados iguais:** Um triângulo pode ser formado somente por segmentos de um mesmo comprimento?

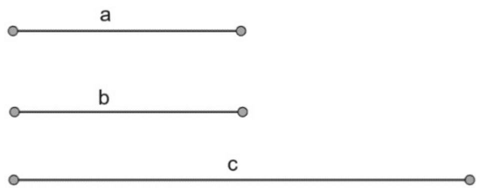
3. **Classificação de triângulos por lados:** A figura do item 2 possui algum tipo de classificação específica? Qual?
4. **Construção de segmento e circunferências:** Desenhe um segmento AB com medida b. Em seguida desenhe duas circunferências de raios a centradas nos extremos do segmento AB.



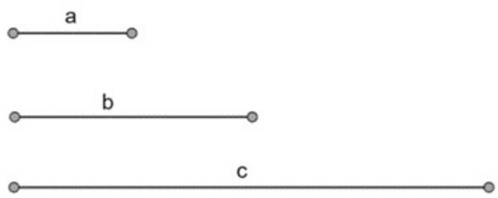
5. **Formação de triângulo por interseção:** A figura formada pela interseção das circunferências e os extremos de AB formam um triângulo? Faça uma representação do objeto.
6. **Construção de triângulos:** É possível construir um triângulo com as medidas a, b e c? Faça uma representação do objeto.



7. **Construção de triângulos:** É possível construir um triângulo com as medidas a, b e c? Justifique com a construção.



8. **Construção de triângulos:** É possível construir um triângulo com as medidas a, b e c? Justifique com a construção.



9. **Condições para formação de triângulos:** Quais as condições necessárias, quanto as medidas dos segmentos, para a construção gerar um objeto caracterizado como um triângulo?

Espera-se que os estudantes consigam construir o triângulo dos itens 4 e 6, entretanto não será possível a construção dos itens 7 e 8.

Durante a socialização dos resultados, alguns estudantes podem identificar a desigualdade triangular. É importante mostrar que são três desigualdades e que todas precisam ser satisfeitas para a existência do triângulo.

Sequência 02

TEMA: Construção de uma Mediatriz

Público-alvo: 1ª Série do Ensino Médio

Etapas: 01

Duração: 01 aula

Objetivo da sequência didática:

- Entender a mediatriz como lugar geométrico.
- Retomar conceitos de ponto médio de um segmento.
- Identificar as propriedades dos losangos.

Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

Materiais necessários: folha, lápis, borracha, régua e compasso

1ª Etapa

Durante esta fase, o docente tem a liberdade de introduzir as perguntas progressivamente, de acordo com o ritmo da classe, permitindo que haja interação entre os estudantes. Assim, o exercício pode ser executado tanto individualmente quanto em grupos reduzidos.

Descrição da etapa:

Inicialmente, é importante comunicar aos estudantes que o objetivo da aula é a revisão de conceitos previamente abordados, e que as respostas visuais (ilustrações) devem ser criadas somente com os materiais de desenho especificados. Em seguida, incentive os estudantes a responderem às perguntas e a desenharem os elementos que representam as qualidades requeridas, conforme forem requisitados.

Sugestão de atividade:

1. **Desenho do segmento e marcação de pontos:**

- Desenhe um segmento de reta chamado AB.
- Escolha e marque um ponto C que esteja localizado sobre o segmento AB.
- Utilize um compasso para marcar um ponto D também sobre o segmento AB, de forma que a distância entre A e D seja igual à distância entre C e B.

2. **Coincidência de pontos:** Pergunte se é possível que os pontos C e D sejam o mesmo ponto (coincidentes)? Quando isso será possível?
3. **Pontos equidistantes:**

- Sabemos que se os pontos C e D, da construção anterior, coincidirem, será o ponto médio do segmento AB.
- Investigue se existem pontos fora do segmento AB que também são equidistantes de A e B. Tente desenhar essa situação.

4. **Características da figura:** A figura formada ao unir o ponto externo, encontrado no item anterior, aos extremos do segmento AB possui alguma característica particular?
5. **Unicidade do ponto:** Verifique se o ponto encontrado no item 03 é único ou se há outros pontos com a mesma propriedade. Represente graficamente.
6. **Conjunto de pontos:** Qual elemento geométrico é possível formar com a união desse conjunto de pontos? Faça uma representação do objeto.
7. **Ponto comum:** Determine se há algum ponto que seja comum tanto a esse conjunto de pontos (reta r) quanto ao segmento AB. Represente na construção.
8. **Ângulos sem transferidor:** Avalie se é possível medir o ângulo entre a reta r e o segmento AB sem o uso de transferidor.
9. **Construção de circunferências:**

- Escolha um ponto C na reta r, que não seja o ponto médio, e conecte-o aos pontos A e B.
- Desenhe duas circunferências com centros em A e B, respectivamente, e raios iguais ao comprimento de CA.
- Marque o ponto D onde as duas circunferências se encontram. Reflita se esse ponto D pertence à reta r.

10. **Congruência de triângulos:** Traçando os segmentos DA e DB, e sendo M o ponto médio de AB, analise se os quatro triângulos (AMC, BMC, BMD e AMD) formados são congruentes e explique o porquê.
11. **Procedimento de construção:** Descreva um método para construir a reta mediatriz usando a menor quantidade de passos.
12. **Classificação do quadrilátero:** Classifique o quadrilátero ACBD com base em suas propriedades e justifique sua resposta.
13. **Propriedades do quadrilátero:** Identifique e liste as propriedades do quadrilátero notável que podem ser observadas na figura.

No item 5, os estudantes podem encontrar apenas o simétrico em relação ao segmente AB do ponto do item 3. Caso isso ocorra oriente a mudar a medida do raio da circunferência. No item 10, relembre os casos de congruência entre triângulos (LLL, ALA e LAL) e oriente os estudantes a fazerem a análise dos triângulos isósceles para justificar ângulos com medidas iguais. Concluímos que a reta r é a mediatriz de AB, por ser perpendicular e conter o ponto médio de AB.

Nesta atividade, o professor deve desempenhar o papel de mediador, introduzindo os tópicos e guiando os estudantes na elaboração de suas próprias conclusões para cada aspecto discutido. É crucial reconhecer que a compreensão aprofundada de cada aspecto é fundamental para o avanço lógico que se segue.

Sequência 03

TEMA: Construção de retas paralelas

Público-alvo: 1ª Série do Ensino Médio

Etapas: 03

Duração: 02 aulas

Objetivo da sequência didática:

- Entender retas paralelas como lugar geométrico.
- Retomar conceitos de posições relativas: entre retas; entre reta e circunferência; e entre circunferências.
- Retomar o conceito de soma de ângulos interno de triângulos.
- Identificar propriedades de um losango.

Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:

(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Materiais necessários: folha, lápis, borracha, régua e compasso

1ª Etapa

Inicialmente, é importante informar aos estudantes que o objetivo da aula é revisitar conceitos previamente explorados. As representações gráficas, como desenhos, devem ser realizadas utilizando somente os materiais de desenho especificados.

Descrição da etapa:

Sugira aos estudantes que participem ativamente, respondendo e compartilhando suas ideias sobre as questões ao longo do processo. Peça que ilustrem os conceitos que se alinham com as características solicitadas e encoraje-os a fundamentar suas conclusões em teorias anteriormente abordadas.

Sugestão de atividade:

1. **Definição:** Explique o que são retas paralelas e retas concorrentes.
2. **Construção de retas:** Trace uma reta r e marque três pontos A, B e C sobre ela, nesta sequência. Construa as mediatrizes s de AB e t de BC.
3. **Análise de r e s:** Discuta a relação entre as retas r e s e forneça uma justificativa.
4. **Análise de r e t:** Discuta a relação entre as retas r e t e forneça uma justificativa.
5. **Interseção de s e t:** Avalie se é possível que as retas s e t se cruzem.
6. **Formação de figuras:** Se s e t se cruzarem, que tipo de figura geométrica elas formariam com a reta r?
7. **Ângulos conhecidos:** Identifique os ângulos internos conhecidos do triângulo formado.
8. **Existência do triângulo:** Determine se o triângulo mencionado realmente pode existir e qual propriedade dos triângulos valida sua conclusão.
9. **Relação de s e t:** Apresente uma conclusão sobre a posição relativa entre as retas s e t e justifique sua resposta.

Esta tarefa inicial retoma o processo de construção de uma mediatriz e oferece aos estudantes a oportunidade de relembrar os conceitos sobre a posição relativa entre retas. A propriedade da soma dos ângulos internos será utilizada para fundamentar a conclusão da atividade. Eles poderão experimentar uma demonstração por absurdo.

2ª Etapa

Nesta fase da atividade, o objetivo é incentivar os estudantes a recordarem a tarefa realizada anteriormente, aplicando os conceitos revisados previamente para efetuar a construção das mediatrizes.

Descrição da etapa:

Proponha que os estudantes respondam às questões e ilustrem os elementos que correspondem às características pedidas, quando solicitados.

Sugestão de atividade:

1. **Paralelismo:** Desenhe uma reta r qualquer. Quantas retas paralelas a reta r existem?
2. **Mediatriz e paralelismo:** Desenhe a mediatriz t do segmento AB que está sobre r. A reta t é paralela a r? Represente graficamente para fundamentar sua resposta.
3. **Marcação de pontos:** Na reta t, marque dois pontos, C e M, sendo M o ponto onde r e t se cruzam.
4. **Construção e análise:** Trace a mediatriz s do segmento CM. Qual é a relação entre as retas s e t? Qual é a posição relativa entre as retas s e r? Ilustre e justifique sua resposta.
5. **Procedimento de construção:** Descreva um método para traçar uma reta s que seja paralela à reta r dada inicialmente.

A expectativa é que os estudantes sejam capazes de seguir todos os passos e, com base nos procedimentos apresentados, elaborem uma sequência coerente para traçar uma reta paralela a uma reta dada inicialmente.

3ª Etapa

Nessa terceira etapa, o objetivo é explorar um método alternativo para criar retas paralelas, empregando circunferências e as características dos losangos. É importante notar que a técnica descrita na fase anterior também pode ser aplicada aqui.

Descrição da etapa:

Encoraje os estudantes a responderem às perguntas e a realizarem as construções, sempre que isso for solicitado, dando sempre o melhor de si em cada tarefa.

Sugestão de atividade:

1. **Traçado inicial**: Desenhe uma reta r e escolha um ponto P que não esteja sobre r.

2. **Construção de circunferência**: Utilize um compasso para desenhar uma circunferência λ_1 com centro em P que corte a reta r nos pontos A e B.
3. **Posição de P e λ_2**: Com o compasso na mesma medida, desenhe outra circunferência λ_2 centrada em B. Analise e descreva a posição de P em relação a λ_2.
4. **Segmentos PB e BC**: Identifique o ponto C onde λ_2 cruza com r, fora do segmento AB. Compare os tamanhos dos segmentos PB e BC e justifique o resultado.
5. **Interseção de circunferências**: Mantendo a abertura do compasso, trace a circunferência λ_3 centrada em C. Determine e ilustre os pontos em comum entre λ_1 e λ_3.
6. **Quadrilátero PBCD**: Nomeie o ponto de interseção das circunferências λ_1 e λ_3 como D e forme o quadrilátero PBCD. Classifique essa figura entre os quadriláteros notáveis.
7. **Reta paralela**: Discuta a relação entre a reta que liga P a D e a reta r, utilizando propriedades do quadrilátero PBCD para justificar sua resposta.

A intenção é que os estudantes realizem todas as etapas da construção e, ao concluírem, sejam capazes de identificar e descrever características ou propriedades do losango, tais como lados opostos paralelos e ângulos consecutivos suplementares.

Sequência 04

TEMA: Construção da bissetriz de um ângulo

Público-alvo: 1ª Série do Ensino Médio

Etapas: 03

Duração: 02 aulas

Objetivo da sequência didática:

- Entender a bissetriz como lugar geométrico.
- Retomar conceitos de congruência de triângulos.
- Identificar propriedades de triângulos isósceles e losangos.

Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:

(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

Materiais necessários: folha, lápis, borracha, régua e compasso

1ª Etapa

Inicialmente, é apropriado realizar um repasse dos conceitos fundamentais e das noções previamente discutidas. O educador pode aproveitar esta oportunidade para sanar quaisquer equívocos relacionados ao entendimento de ângulos.

Descrição da etapa:

Primeiramente, relembre aos estudantes que a proposta dessa aula está focada na revisão de conceitos já estudados e que as respostas gráficas (desenhos) devem ser apresentadas usando apenas os instrumentos de construção indicados.

Sugestão de atividade:

1. **Conceito de ângulo:** Qual a definição de ângulo?
2. **Criação de semiplanos:** Em um plano (folha) marque dois pois A e B, desenhe a reta que contenha esses dois pontos e destaque uma das regiões na qual o plano foi dividido (semiplano).
3. **Criação de semiplanos:** Marque agora um ponto C que pertence a região destacada e trace a reta que passa pelos pontos A e C. Destaque novamente um dos semiplanos determinados por essa reta.
4. **Criação de ângulo por interseção de semiplanos:** Observe a região de interseção entre os dois semiplanos destacados.
5. **Limites da região de interseção:** Quais semirretas limitam essa região? Justifique sua resposta nomeando o elemento a partir dos pontos informados.
6. **Marcação da abertura do ângulo:** Utilize o compasso para desenhar dois arcos de circunferência, com raios distintos, com centro em A, de modo que cada um corte as semirretas AB e AC.
7. **Identificação e nomenclatura do ângulo:** Nomeie os pontos de interseção e apresente duas possíveis formas de se nomear o ângulo, utilizando sempre os pares de pontos de interseção de mesmo arco. Analise se existe alguma relação entre as medidas dos ângulos encontrados. Justifique a resposta.

É valido comentar que, nos itens 2 e 3, as retas são infinitas e que vamos fazer apenas representações, logo os semiplanos em que as retas dividem o plano também são infinitos. Para fim de construção destacaremos apenas uma parte do semiplano.

Esta atividade inicial é uma forma de esclarecer uma dúvida comum entre os estudantes. Como tradicionalmente, para indicar a abertura (medida) dos ângulos, são traçados arcos de circunferência e tendo em vista que o arco da circunferência de maior raio possui um comprimento maior, logo há um erro em achar que o arco maior representa um ângulo maior. De fato, essa afirmação é equivocada, já que as semirretas determinam o mesmo conjunto de pontos.

2ª Etapa

Nesse segundo momento buscamos aprimorar o conhecimento dos estudantes propondo uma construção que possibilite a divisão de um ângulo ao meio. Esclareça que não será usado transferidor para medir a abertura do ângulo e que essa construção irá ser feita utilizando apenas régua e compasso.

Descrição da etapa:

Proponha que os estudantes respondam às questões e ilustrem os elementos que correspondem às características pedidas, quando solicitados.

Sugestão de atividade:

1. **Classificação de ângulos:** Quais são as classificações de um ângulo quanto a medida de sua abertura?
2. **Representação e marcação da abertura do ângulo:** Desenhe um ângulo qualquer de vértice em A. Agora com o auxílio de um compasso, com uma abertura qualquer, marque um arco de circunferência centrado em A que intersecte os lados do ângulo nos pontos B e C.
3. **Interseção de arcos:** Seguindo com a mesma abertura, desenhe arcos de circunferências centrados em B e em C, nomeando a interseção dos arcos, interna ao ângulo, como ponto D.
4. **Análise de segmentos:** Destaque os segmentos AB, BD, DC e CA e determine uma relação entre suas medidas. Escreva qual quadrilátero ABDC representa. Justifique.
5. **Divisão em triângulos:** Construa uma semirreta com origem em A que contenha o ponto D. Essa semirreta divide o quadrilátero em dois triângulos ABD e ACD. Como podem ser classificados os triângulos quanto as medidas de seus lados?
6. **Congruência de triângulos:** Os triângulos podem ser considerados congruentes? Caso afirmativo, qual critério garante a congruência?
7. **Congruência entre ângulos:** O que pode ser dito sobre as medidas dos ângulos BÂD e CÂD? Justifique.
8. **Definição de bissetriz:** Explique o que é uma bissetriz de um ângulo.
9. **Conclusão sobre a semirreta AD:** Análise e conclua sobre a natureza da semirreta AD.

No item 2, solicite que o ângulo não seja “muito” agudo, para que a construção fique convenientemente mais “agradável” de ser realizada.

Espera-se que os estudantes consigam realizar as construções e perceber as relações entre os triângulos, tendo em vista que as justificativas se assemelham as construções feitas anteriormente.

3ª Etapa

Nessa terceira etapa buscamos aprimorar o conhecimento dos estudantes propondo uma nova construção de bissetriz que possibilite a divisão de um ângulo ao meio a partir de construções de mediatrizes.

Descrição da etapa:

Proponha que os estudantes respondam às questões e ilustrem os elementos que correspondem às características pedidas, quando solicitados.

Sugestão de atividade:

1. **Esboço de uma distância**: Desenhe uma reta r e um ponto P fora de r. Sem a necessidade de ferramentas, esboce o segmento que representa a menor distância de P até r.
2. **Definição:** Apresente agora uma definição para a distância entre um ponto P e uma reta r.
3. **Encontrando uma perpendicular:** Qual procedimento pode ser usado para encontrar uma reta perpendicular a r?
4. **Ponto equidistante de um ângulo:** É possível determinar um ponto que equidista dos lados de um ângulo? Faça um esboço (rascunho) a mão livre, sem a necessidade de instrumentos para representar o ponto e sua distância.
5. **Marcação da abertura do ângulo:** Desenhe um ângulo qualquer de vértice em A. Agora com o auxílio de um compasso, com uma abertura qualquer, marque um arco de circunferência centrado em A que intersecte os lados do ângulo nos pontos B e C.
6. **Construção de mediatrizes:** Construa as retas mediatrizes dos segmentos AB e AC.
7. **Interseção e classificação de triângulos:** As retas mediatrizes se intersectam em um ponto D. Desenhe a semirreta com origem no vértice A e que passe por D, formando dois triângulos. Qual a classificação desses triângulos quanto a medida de seus ângulos? Justifique.

8. **Congruência dos triângulos:** Os triângulos podem ser considerados congruentes? Em caso afirmativo, qual critério garante a congruência?
9. **Análise dos ângulos:** O que pode ser dito sobre as medidas dos ângulos BÂD e CÂD?
10. **Conclusões sobre a semirreta AD:** Qual conclusão podemos chegar sobre a semirreta AD?

No momento da definição de distância do ponto P a reta r é importante mostrar que não basta medir um segmento com extremos em P e um ponto qualquer de r. Mas sim medir o menor segmento possível, e é fácil perceber que esse ponto é o “pé” de uma perpendicular. E que os estudantes já sabem construir retas perpendiculares usando mediatrizes.

No item 7 vale relembrar que as classificações dos triângulos quanto a medida de seus ângulos são: acutângulo, retângulo e obtusângulo.