Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O jogo Dobble e a introdução da geometria finita no ensino médio: como estudantes lidam com o termo primitivo "reta"

por

Andréia Cardoso Ferreira

Brasília

2024

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O jogo Dobble e a introdução da geometria finita no ensino médio: como estudantes lidam com o termo primitivo “reta”

por

Andréia Cardoso Ferreira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção de grau de

MESTRE

Brasília, 28 de junho de 2024

Comissão Examinadora:

Dr. Guy Grebot- UnB - Orientador

Dra. Maria Terezinha Jesus Gaspar - Examinadora

Dra. Regina da Silva Pina Neves - UnB - Examinadora

“Eu pensava que nós seguíamos caminhos já feitos, mas parece que não os há. O nosso ir faz o caminho.”

C.S.Lewis

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade de realização do mestrado e por me fornecer as lentes com as quais enxergo este mundo.

Aos meus pais, Valdeir Luiz Ferreira e Terezinha Cardoso Ferreira, pelo apoio e incentivo ao longo dos meus estudos. Obrigada por todo amor e cuidado que sempre demonstraram. Amo vocês!

Aos meus irmãos, Alana Cardoso Ferreira, Allisson Cardoso Ferreira e Alan Cardoso Ferreira, pelo auxílio em diversos momentos deste trabalho. Vocês são a melhor coisa que me aconteceu; a vida é boa com vocês.

Aos meus amigos Evelyn Helena Nunes da Silva, Rodolpho Pinheiro de Azevedo e Henrique Costa dos Reis, pelo apoio, incentivo e correções deste trabalho. Vocês são os melhores presentes que a Universidade de Brasília me deu.

Ao meu namorado, Hudson Henrique Corrêa Teixeira, por todo o amor, carinho, compreensão e cuidados demonstrados ao longo desse processo. A leveza com que você encara a vida me encanta.

Ao meu orientador, Guy Grebot, pelas oportunidades de pesquisa, eventos e viagens científicas ao longo da graduação, pela convivência durante esses anos e pelo reencontro no mestrado. Tenho uma grande admiração pelo seu profissionalismo, empenho e dedicação demonstrados. Pela confiança em mim depositada e pelo exemplo de pessoa. Ouvi-lo me chamar de professora na formatura com certeza foi um dos momentos mais emocionantes pelos quais passei.

Agradeço aos meus colegas de curso por compartilharmos horas de estudos e trocas de experiências, em especial à Aline Cristyna G. Alves, pelo carinho e apoio ao longo do processo.

A todos os professores que participaram do meu desenvolvimento acadêmico durante os anos de estudos, em especial: Arthur Vicentini Ferreira Azevedo, Maria Terezinha Jesus Gaspar e Mauro Luiz Rabelo. Seus exemplos influenciam a minha prática docente.

Ao professor Raphael Martinez Eleutério da Silva, por ter gentilmente aberto as portas de sua sala de aula para a aplicação das atividades.

À Universidade de Brasília, pela oportunidade de concluir a minha graduação e mestrado.

Ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), pela oportunidade de melhorar a minha formação e prática docente.

À Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEE-DF), pelo período de licença que possibilitou a minha dedicação exclusiva aos estudos.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar os resultados de uma investigação sobre a apreensão e compreensão, por parte de estudantes do ensino médio, das várias interpretações do termo primitivo "reta" em um contexto de geometria finita. Para isso, foi criado um conjunto de tarefas matemáticas centradas no jogo Dobble, que é um modelo de geometria projetiva finita de ordem 7. Nessas tarefas, o aluno é levado a explorar a estrutura do jogo Dobble e, com base nessa exploração, realizar a construção de seu próprio mini-Dobble. Propõe-se então a análise de várias interpretações do termo primitivo reta por meio da conversão de registros e mudança de quadros. Ao longo do desenvolvimento das tarefas, o aluno é levado a usar várias representações do seu modelo de mini-Dobble, a fazer reflexões e redigir suas ideias, o que permite analisar como ele lida com o termo primitivo "reta". As tarefas foram aplicadas em várias turmas de ensino médio do Distrito Federal e entorno. Com base nos resultados e análises, foram acrescentadas sugestões ao professor que desejar aplicar as tarefas.

Palavras-chave: Geometria finita; termos primitivos; ensino de geometria; ensino médio.

Abstract

The objective of this dissertation is to present the results of a research about how students apprehend and understand the several interpretations of the primitive term "staight line" in the context of finite geometry. To this end, we criated a matemathical task centered on the game Dobble which is a model for the finite projective geometry of order 7. In this task, the student is guided to explore the structure of the game and to create his own mini-Dobble. The analysis of several interpretations of the primitive term "straight line", through conversion of registers and change of context, is proposed to the student. During the development of the task, the student is asked to use several representations of his mini-Dobble, to reflect and to write down his ideas, which allow for the analysis of how he copes with the primitive term "straight line". The task was applied in several classes of high school students in the Federal District and its surrounding region. Based on the results of these applications and their analysis, suggestions of how to use and mediate the task in classroom were also appended.

Key-Words: Finite geometry; primitive term; geometry teaching; high school.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Essa dissertação foi desenvolvida com o objetivo de investigar como estudantes do ensino médio lidam com o termo primitivo "reta" em um contexto de geometria finita. Para isso, foi desenvolvido um conjunto de tarefas matemáticas, que denominamos caderno, centradas no jogo Dobble e a construção do plano projetivo de ordem sete, que é a estrutura matemática por trás desse jogo.

A literatura afirma que os estudantes confundem os objetos matemáticos com a sua representação, o que constitui um obstáculo à aprendizagem [8].

Nesse sentido, a introdução da geometria finita na educação básica, através do Jogo Dobble, pode desempenhar um papel importante no aprofundamento e na compreensão dos objetos matemáticos. Ao apresentar uma representação distinta daquela com a qual os estudantes estão familiarizados, é possível desenvolver tarefas nas quais eles são conduzidos ao trabalho de conversão e coordenação de registros, essenciais à aprendizagem matemática. Isso permite ao estudante reconhecer um mesmo objeto em várias representações. A abordagem de outros modelos geométricos também pode ajudar a impedir a criação de obstáculos à aprendizagem causados pela aderência a um único ponto de vista, conforme alerta Saddo [1].

No âmbito do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) da Universidade de Brasília, o primeiro contato com o jogo Dobble ocorreu entre 2011 e 2012, por meio da leitura do artigo [4] que relacionava o jogo com a geometria finita. A partir dessa leitura, foi realizado um estudo sobre planos projetivos finitos e sua construção, com foco na determinação de todas as retas do plano projetivo de ordem 7, utilizadas na construção das cartas do Dobble. Posteriormente, foi elaborado um caderno de atividades [10] para explorar a estrutura por trás do jogo com os estudantes. Essa sequência de atividades foi aplicada em escolas da rede pública do Distrito Federal por alunos do PIBID, em turmas reduzidas.

Retomamos o estudo de planos projetivos finitos utilizando os resultados fornecidos por Raj Chandra Bose [3] e Lowell L. Paige e Charles Wexler [14], que relacionam os planos projetivos finitos aos quadrados latinos e nos fornecem uma maneira de organizar a matriz de incidência de um plano. Isso permite a resolução de uma equação matricial que resulta na determinação de todas as retas do plano.

Com o objetivo de investigar como os estudantes do ensino médio lidam com o termo primitivo "reta" em um contexto de geometria finita, elaboramos uma sequência didática centrada no jogo Dobble, utilizando parte das atividades presentes no caderno [4] do PIBID. Inicialmente, deixamos os estudantes utilizarem o jogo de forma livre para que explorassem sua estrutura. Com base em suas observações, eles são conduzidos à confecção do seu próprio mini-Dobble. A partir dessa construção, são sugeridas conversões de registros envolvendo várias interpretações do termo primitivo "reta". Ao longo das tarefas, é solicitado aos alunos que façam sínteses de suas observações e redijam respostas completas.

A análise das produções dos estudantes é feita com base na definição de imagem conceitual e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Duval [8].

Ao final da análise, entendemos que os estudantes têm condições de comparar interpretações de retas como sendo finitas com interpretações de reta como sendo um conjunto contínuo de pontos. Essa comparação leva os alunos a reconhecer que o termo primitivo "reta" de fato não pode ser definido, mas sim interpretado de várias formas.

O primeiro capítulo desta dissertação mostra como se constrói o plano projetivo de ordem 7 através da sua relação com quadrados latinos. Um caderno é elaborado no segundo capítulo, que também apresenta os resultados das várias aplicações em turmas do ensino médio do Distrito Federal e entorno. No terceiro capítulo, é realizada a análise dos resultados dessas aplicações com base na teoria de representações semióticas e no conceito de imagem conceitual. Os dois primeiros anexos detalham os cálculos necessários para a construção do plano projetivo de ordem 7, enquanto que o terceiro traz sugestões sobre como o caderno deve ser aplicado em sala de aula.

Capítulo 1

Construção de Planos Projetivos Finitos

1.1 Conceitos Básicos

Um plano projetivo finito é composto por um conjunto de pontos, um conjunto de retas e uma relação entre pontos e retas chamada de incidência, onde as retas são subconjuntos do conjunto finito de pontos [11]. Os termos primitivos plano, ponto, reta e incidência satisfazem os seguintes axiomas:

1. Quaisquer dois pontos incidem em uma, e somente uma, reta;

2. Duas retas quaisquer incidem em um, e somente um, ponto em comum;

3. Existem quatro pontos, três a três não colineares.

Segue diretamente do axioma 2 a não existência de retas paralelas.

A única reta r incidente em dois pontos distintos A e B é chamada *a reta que passa por* A e B. O único ponto P incidente a duas retas distintas r e s é chamado *a interseção de* r e s.

Dizer que um ponto incide em uma reta significa que este ponto "está contido" na reta ou que a reta "contém" este ponto.

Considere os seguintes pontos A_1, A_2, A_3 e A_4, três a três não colineares. Obtemos seis retas distintas passando pelos pares de pontos:

$$\begin{aligned} l_1 &= A_1A_2 & l_4 &= A_2A_3 \\ l_2 &= A_1A_3 & l_5 &= A_2A_4 \\ l_3 &= A_1A_4 & l_6 &= A_3A_4 \end{aligned}$$

onde $l_k = A_iA_j$ é a reta determinada pelos pontos A_iA_j. Além disso, obtemos os três pontos a seguir em função do axioma 2: $B_1 = l_1 \cap l_6, B_2 = l_2 \cap l_5, B_3 = l_3 \cap l_4$.

Lema 1. *Toda reta contém pelo menos três pontos.[11]*

Demonstração do Lema 1. *As retas $l_1, \cdots, l_6$, como construídas acima, contêm pelo menos três pontos. Seja l uma reta. Se ela não contém A_1, então l intersecta l_1, l_2 e l_3 em três pontos distintos. Se l contém o ponto A_1, então ela intersecta l_4, l_5 e l_6 em dois pontos distintos, já que essas retas se intersectam duas a duas. Portanto, l contém pelo menos três pontos.* □

Lema 2. *Existem quatro retas tais que, tomadas três a três, não se intersectam no mesmo ponto.[11]*

Demonstração do Lema 2. *l_1, l_2, l_5 e l_6 são quatro retas que, tomadas três a três, não se intersectam no mesmo ponto.* □

Se, nos axiomas 1 e 2, trocarmos "ponto" por "reta" e "incidente" por "está contido" e, além disso, trocarmos o axioma 3 pelo lema 2, obtemos:

1. Quaisquer duas retas contém um, e somente um, ponto em comum;

2. Dois pontos quaisquer estão contidos em uma, e somente uma, reta;

3. Existem quatro retas três a três não concorrentes.

Obtemos o dual de um plano projetivo, mais precisamente, se π é um plano projetivo qualquer, então existe um plano π^* dual a π que pode ser construído da seguinte forma:

Seja P_i o conjunto de pontos de π e k_j o conjunto de retas de π. Então em π^* temos retas p_i em correspondência biunívoca com os pontos P_i de π e pontos K_j em correspondência biunívoca com as retas k_j de π. Além disso, se $P_i \in k_j$ em π, colocamos $K_j \in p_i$ em π^*, onde $k_j \leftrightarrow K_j$ e $P_i \leftrightarrow p_i$. Nossas observações mostram que se π satisfaz os axiomas para um plano projetivo, então π^* também satisfaz esses axiomas. Além disso, o dual de π^* é π, isto é, $(\pi^*)^* = \pi$. Portanto, trocando os papéis de pontos e retas e

invertendo as inclusões, cada afirmação sobre o plano π torna-se uma afirmação sobre o plano dual π^*.
Esse é o *princípio de dualidade*. Aplicando o princípio de dualidade ao lema 1 obtemos:

Lema 3. *Cada ponto pertence a pelo menos três retas.[11]*

Suponha que uma reta l_1 de um plano projetivo π contém um número finito de pontos. Chame esse número de $n+1$ onde $n \geq 2$ pelo lema 1. O número n é chamado de ordem do plano π. Pelo axioma 3 existem pelo menos dois pontos, P_3 e P_4, que não estão em l_1. Seja B_1 o ponto de interseção de P_3P_4 com l_1 e sejam P_1 e P_2 dois outros pontos de l_1. Então P_1P_3 e P_2P_4 se interceptam num outro ponto B_2, que não pertence a l_1 e nem a P_3P_4. Se P é um ponto fora de l_1, unindo P aos $n+1$ pontos de l_1, temos $n+1$ retas passando por P e essas são todas as retas passando por P, uma vez que cada reta que passa por P intercepta l_1. Em particular existem $n+1$ retas passando por cada um dos pontos P_3, P_4 e B_2. Suponha agora que por um ponto P passem $n+1$ retas e seja uma reta l tal que $P \notin l$. Então l contém pelo menos $n+1$ pontos. Por outro lado, l não pode conter mais do que $n+1$ pontos pois, se contivesse, haveria mais do que $n+1$ retas passando por P. Portanto, cada reta l de π contém $n+1$ pontos, uma vez que pelo menos um dos P_3, P_4 ou B_2 não está em l (de acordo com a construção B_2, P_3 e P_4 não são colineares). Igualmente existem $n+1$ retas passando por cada ponto P de π, sendo estas as retas unindo P aos $n+1$ pontos de alguma reta l que não passa por P. Com isso, temos provada a maior parte do Teorema 1.1 [11] enunciado abaixo.

Teorema 1.1. *Seja $n \geq 2$ um inteiro. Em um plano projetivo finito de ordem n as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *Uma reta contém $n+1$ pontos;*
2. *Um ponto pertence a $n+1$ retas;*
3. *Cada reta contêm $n+1$ pontos;*
4. *Cada ponto pertence a $n+1$ retas;*
5. *Existem n^2+n+1 pontos;*
6. *Existem n^2+n+1 retas.*

Demonstração do Teorema 1.1. *Mostramos anteriormente que* $1 \implies 2, 3$ *e* 4*. Para provar que* 1 *implica* 5*, seja* P_0 *um ponto de* π *e seja* $l_1, \cdots, l_{(n+1)}$ *as* $n+1$ *retas passando por* P_0*. Nestas retas estão incluídos todos os pontos de* π *e cada uma delas contém* *n pontos além de* P_0. *Portanto* π *contém* $1 + (n+1)n = n^2 + n + 1$ *pontos. Para provar que* 1 *implica* 6, *seja* l_0 *uma reta de* π *e* $P_1, P_2, \ldots P_{(n+1)}$ *os pontos de* l_0. *Cada* $P_1, P_2, \cdots, P_{(n+1)}$ *pertence a* l_0 *e* n *outras retas. Dessa forma obtemos todas as retas de* π, *e existem* $1+(n+1)n = n^2+n+1$ *retas em* π. *Logo* 6 *implica as demais propriedades. Por dualidade* 2 *implica as propriedades restantes. Trivialmente* $3 \Rightarrow 1$ *e* $4 \Rightarrow 2$. *Se* 5 *é válida então alguma reta tem* $m+1$ *pontos, onde* m *é um inteiro e concluímos que* π *tem* $m^2 + m + 1 = n^2 + n + 1$ *pontos; então* $m = n$ *e* $5 \Rightarrow 1$. *Da mesma forma* $6 \Rightarrow 2$. $\square$

A figura 1.1 ilustra o plano de ordem 2, que é chamado *Plano de Fano*.

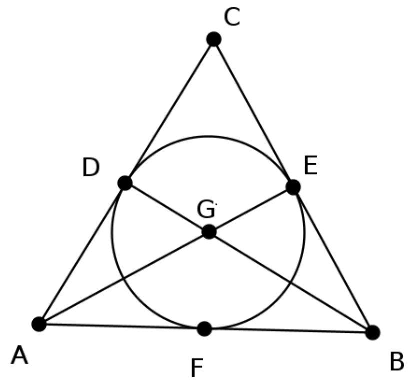

Figura 1.1: plano de Fano.

As retas deste plano são: $l_1 = \{C, E, B\}, l_2 = \{C, F, G\}, l_3 = \{C, A, D\}, l_4 = \{E, F, D\}, l_5 = \{E, A, G\}, l_6 = \{B, F, A\}$ e $l_7 = \{B, D, G\}$.

Cada plano projetivo tem uma matriz de incidência associada a ele. Esta é definida como sendo uma matriz quadrada de ordem $n^2 + n + 1$ onde as retas e os pontos são representados, respectivamente, pelas linhas e colunas da matriz. A entrada ij recebe o valor 1 se o ponto j pertence à reta l_i e 0 no caso contrário, tal como exemplificado na tabela 1.1 para o plano de Fano.

Retas \ Pontos	A	B	C	D	E	F	G
l_1	0	1	1	0	1	0	0
l_2	0	0	1	0	0	1	1
l_3	1	0	1	1	0	0	0
l_4	0	0	0	1	1	1	0
l_5	1	0	0	0	1	0	1
l_6	1	1	0	0	0	1	0
l_7	0	1	0	1	0	0	1

Tabela 1.1: matriz de incidência do plano de Fano.

A matriz de incidência de um plano projetivo não é única, uma vez que ela depende da maneira pela qual as retas e os pontos são organizados.

Decorre diretamente da Teoria de Galois o teorema 1.2 [11] a seguir.

Teorema 1.2. *Para cada potência de um número primo p, existe um plano projetivo finito de ordem p.*

A demonstração deste teorema, bem como de alguns teoremas subsequentes, será omitida por não ser parte do objetivo deste trabalho.

1.2 Construção de um plano projetivo finito de ordem 7

No caso do jogo Dobble, temos 8 símbolos por carta e deveríamos ter 57 cartas representando as retas do plano projetivo para $n = 7$, porém no jogo são utilizadas apenas 55 cartas. Desde o início do trabalho, um dos nossos objetivos era a construção do plano projetivo finito de ordem 7, ou seja, a construção de todas as retas do plano.

Um resultado importante, que auxilia na construção de um plano projetivo é dado pelo teorema a seguir.[3]

Teorema 1.3. *Um plano projetivo finito de ordem n existe se, e somente se, existe um conjunto completo de $(n-1)$ quadrados latinos mutuamente ortogonais.*

Um **Quadrado Latino** de ordem n, $L = (a_{ij})$, é definido como uma matriz quadrada $n \times n$, cujas entradas são os elementos de um conjunto contendo n símbolos distintos em que cada símbolo aparece apenas uma vez em cada linha e em cada coluna. Dois quadrados latinos, $L = (a_{ij})$ e $M = (b_{ij})$, são ditos ortogonais se os n^2 pares ordenados (a_{ij}, b_{ij}) são todos distintos. Além disso, $(n-1)$ quadrados latinos são ditos mutuamente ortogonais se quaisquer dois desses quadrados latinos são ortogonais.

Para realizar a construção do plano projetivo, com base no resultado fornecido por Raj Chandra Bose no teorema 1.3 e na organização da matriz de incidência descrita por Lowell J. Paige e Charles Wexler [14], é necessário seguir os passos abaixo:

- Organizar a matriz de incidência e preenchê-la parcialmente;
- Obter uma equação matricial que relacione os elementos faltantes da matriz de incidência com os quadrados latinos;
- Estabelecer uma relação geradora dos quadrados latinos;
- Resolver a equação matricial resultante;

- Completar o preenchimento da matriz de incidência.

Seguindo esse processo, todas as retas do plano projetivo são determinadas.

1.2.1 Matriz Canônica de Incidência

Lowell J. Paige e Charles Wexler [14] nos mostram que é sempre possível organizar as retas e os pontos de tal forma a obtermos uma matriz de incidência, tal que:

1. $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$ são pontos que pertencem a l_1;
2. $l_1, l_2, \cdots, l_{n+1}$ são as retas que passam pelo ponto P_1;
3. $P_{kn+2}, \cdots, P_{kn+n+1}$ são os pontos que pertencem à reta l_{k+1} para $k = 1, 2, \cdots, n$;
4. $l_{kn+2}, \cdots, l_{kn+n+1}$ são as retas que passam pelo ponto P_{k+1} para $k = 1, 2, \cdots, n$.

Assim, a matriz de incidência tem a forma dada na tabela 1.2, onde cada elemento C_{ij} é uma matriz de ordem $n \times n$. Além disso, podemos reorganizar as retas e os pontos de maneira que os elementos C_{1j} e C_{j1} sejam matrizes identidade.

Retas \ Pontos	1	2	3	$\cdots$	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$2n+1$	$2n+2$	$\cdots$	$3n+1$	$\cdots$	n^2+2	$\cdots$	n^2+n+1
l_1	1	1	1	$\cdots$	1										
l_2	1					1	$\cdots$	1							
l_3	1								1	$\cdots$	1				
$\vdots$	$\vdots$											$\cdots$			
l_{n+1}	1												1	$\cdots$	1
l_{n+2}		1													
$\vdots$		$\vdots$					C_{11}			C_{12}		$\cdots$		C_{1n}	
l_{2n+1}		1													
l_{2n+2}			1												
$\vdots$			$\vdots$				C_{21}			C_{22}		$\cdots$		C_{2n}	
l_{3n+1}			1												
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$		$\cdots$		$\vdots$	
l_{n^2+1}					1										
$\vdots$					$\vdots$		C_{n1}			C_{n2}		$\cdots$		C_{nn}	
l_{n^2+n+1}					1										

Tabela 1.2: matriz de incidência.

Uma matriz canônica de incidência de um plano projetivo é uma matriz de incidência satisfazendo as quatro propriedades acima e cujos elementos C_{1j} e C_{j1} (para $j = 1, \cdots, n-1$) de ordem $n \times n$ são matrizes identidade.

Com base nas propriedades acima obtemos parcialmente a matriz de incidência dada na tabela 1.3, para o caso $n = 7$.

Retas \ Pontos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
l_1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
l_8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
l_9	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
l_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
l_{11}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
l_{12}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
l_{13}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
l_{14}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
l_{15}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
l_{16}	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0																																										
l_{17}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																										
l_{18}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																										
l_{19}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0				C_{12}							C_{13}							C_{14}							C_{15}							C_{16}							C_{17}			
l_{20}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0																																										
l_{21}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0																																										
l_{22}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																																										
l_{23}	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0																																										
l_{24}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																										
l_{25}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																										
l_{26}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0				C_{22}							C_{23}							C_{24}							C_{25}							C_{26}							C_{27}			
l_{27}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0																																										
l_{28}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0																																										
l_{29}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																																										
l_{30}	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0																																										
l_{31}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																										
l_{32}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																										
l_{33}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0				C_{32}							C_{33}							C_{34}							C_{35}							C_{36}							C_{37}			
l_{34}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0																																										
l_{35}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0																																										
l_{36}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																																										
l_{37}	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0																																										
l_{38}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																										
l_{39}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																										
l_{40}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0				C_{42}							C_{43}							C_{44}							C_{45}							C_{46}							C_{47}			
l_{41}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0																																										
l_{42}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0																																										
l_{43}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1																																										
l_{44}	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0																																										
l_{45}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0																																										
l_{46}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0																																										
l_{47}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0				C_{52}							C_{53}							C_{54}							C_{55}							C_{56}							C_{57}			
l_{48}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0																																										
l_{49}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0																																										
l_{50}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1																																										
l_{51}	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0																																										
l_{52}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0																																										
l_{53}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0																																										
l_{54}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0				C_{62}							C_{63}							C_{64}							C_{65}							C_{66}							C_{67}			
l_{55}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0																																										
l_{56}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0																																										
l_{57}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1																																										

Tabela 1.3: matriz de incidência parcialmente preenchida para $n = 7$.

Com essa construção determinamos as primeiras $2n + 1$ retas do plano e parte das demais. As matrizes C_{ij} restantes são as soluções da equação matricial

$$C_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{bmatrix} = L_i(j), \tag{1.1}$$

em que $L_i(j)$ é a j–ésima coluna do i–ésimo quadrado latino [8].

1.2.2 Determinação dos quadrados latinos

O procedimento para a determinação dos quadrados latinos mutuamente ortogonais, necessários para a resolução da equação (1.1), se apoia no teorema 1.4:

Teorema 1.4. *([5] R. C. Bose) Sejam $a_0 = 0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ os elementos do corpo de Galois $G(n = p^k)$, onde p^k é uma potência inteira do número primo p. Considere as matrizes quadradas L_m, de ordem n, com $m = 1, \cdots, n-1$, cujos elementos são dados pela equação*

$$q_{ij} = a_i + a_m a_j, \tag{1.2}$$

para, $i, j = 0, 1, \cdots, n-1$. Então, cada L_m é um quadrado latino. Além disso os $n-1$ quadrados latinos $L_1, L_2, \cdots, L_{n-1}$ são mutuamente ortogonais.

Para $k = 1$, fazemos a identificação dos elementos a_m com a classe residual módulo p.

Um corpo de Galois $(G, +, \cdot)$ [3] é um conjunto finito e não vazio munido das operações $+$ e $\cdot$ satisfazendo os seguintes axiomas, para quaisquer a, b, $c \in G$:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
2. Existe um elemento em G denotado por 0, tal que $a + 0 = 0 + a = a$;
3. Para todo $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $a + b = b + a = 0$;
4. $a + b = b + a$;
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
6. Existe um elemento em G, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
7. Para todo $a \in G$, $a \neq 0$ existe $b \in G$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$;
8. $a \cdot b = b \cdot a$;
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Aplicando o resultado do teorema 1.4 para $n = 7$ temos $G(7) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5$ e $a_6 = 6$.

Fixando $a_1 = 1$ e realizando as operações módulo 7 na equação (1.2), obtemos os elementos do quadrado latino L_1 dados abaixo:

$0+1\cdot 0=0$	$1+1\cdot 0=1$	$2+1\cdot 0=2$	$3+1\cdot 0=3$	$4+1\cdot 0=4$	$5+1\cdot 0=5$	$6+1\cdot 0=6$
$0+1\cdot 1=1$	$1+1\cdot 1=2$	$2+1\cdot 1=3$	$3+1\cdot 1=4$	$4+1\cdot 1=5$	$5+1\cdot 1=6$	$6+1\cdot 1=0$
$0+1\cdot 2=2$	$1+1\cdot 2=3$	$2+1\cdot 2=4$	$3+1\cdot 2=5$	$4+1\cdot 2=6$	$5+1\cdot 2=0$	$6+1\cdot 2=1$
$0+1\cdot 3=3$	$1+1\cdot 3=4$	$2+1\cdot 3=5$	$3+1\cdot 3=6$	$4+1\cdot 3=0$	$5+1\cdot 3=1$	$6+1\cdot 3=2$
$0+1\cdot 4=4$	$1+1\cdot 4=5$	$2+1\cdot 4=6$	$3+1\cdot 4=0$	$4+1\cdot 4=1$	$5+1\cdot 4=2$	$6+1\cdot 4=3$
$0+1\cdot 5=5$	$1+1\cdot 5=6$	$2+1\cdot 5=0$	$3+1\cdot 5=1$	$4+1\cdot 5=2$	$5+1\cdot 5=3$	$6+1\cdot 5=4$
$0+1\cdot 6=6$	$1+1\cdot 6=0$	$2+1\cdot 6=1$	$3+1\cdot 6=2$	$4+1\cdot 6=3$	$5+1\cdot 6=4$	$6+1\cdot 6=5$

Os resultados obtidos nas colunas da tabela acima formam as linhas do quadrado latino L_1,

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

A construção dos demais quadrados latinos encontra-se disponível no anexo 1.

1.2.3 Resolução da Equação Matricial para $n = 7$

As etapas descritas acima possibilitam a resolução da equação matricial (equação (1.1) vista na página 9)

$$C_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{bmatrix} = L_i(j). \tag{1.3}$$

A partir do quadrado latino L_1 determinamos os elementos $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}$ e C_{17} da matriz de incidência dada na Tabela 1.3:

$$C_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$C_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$$C_{14}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\\0\\1\\2\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{14} = \begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$C_{15}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{15} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$C_{16}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\6\\0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{16} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$C_{17}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{17} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

De maneira análoga, a determinação dos outros elementos da matriz de incidência, dada na tabela 1.3, encontra-se no anexo 3.

1.2.4 Construção do plano projetivo

Com base nos resultados das equações matriciais anteriores, obtemos a matriz de incidência para $n = 7$ dada na tabela 1.4 abaixo:

Retas \ Pontos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
l_1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
l_8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
l_9	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
l_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
l_{11}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
l_{12}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
l_{13}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
l_{14}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
l_{15}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
l_{16}	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
l_{17}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
l_{18}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
l_{19}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
l_{20}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
l_{21}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
l_{22}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
l_{23}	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
l_{24}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
l_{25}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
l_{26}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
l_{27}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
l_{28}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
l_{29}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
l_{30}	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
l_{31}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
l_{32}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
l_{33}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
l_{34}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
l_{35}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
l_{36}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
l_{37}	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
l_{38}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
l_{39}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
l_{40}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
l_{41}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
l_{42}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
l_{43}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
l_{44}	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
l_{45}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
l_{46}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
l_{47}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
l_{48}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
l_{49}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
l_{50}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
l_{51}	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
l_{52}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
l_{53}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
l_{54}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
l_{55}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
l_{56}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
l_{57}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Tabela 1.4: matriz de incidência para $n = 7$.

As retas desejadas são obtidas a partir da matriz de incidência acima. São elas:

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} & l_{13} &= \{2, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55\} \\
l_2 &= \{1, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} & l_{14} &= \{2, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56\} \\
l_3 &= \{1, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\} & l_{15} &= \{2, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57\} \\
l_4 &= \{1, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\} & l_{16} &= \{3, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57\} \\
l_5 &= \{1, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\} & l_{17} &= \{3, 10, 18, 26, 34, 42, 50, 51\} \\
l_6 &= \{1, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43\} & l_{18} &= \{3, 11, 19, 27, 35, 43, 44, 52\} \\
l_7 &= \{1, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50\} & l_{19} &= \{3, 12, 20, 28, 36, 37, 45, 53\} \\
l_8 &= \{1, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57\} & l_{20} &= \{3, 13, 21, 29, 30, 38, 46, 54\} \\
l_9 &= \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51\} & l_{21} &= \{3, 14, 22, 23, 31, 39, 47, 55\} \\
l_{10} &= \{2, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52\} & l_{22} &= \{3, 15, 16, 24, 32, 40, 48, 56\} \\
l_{11} &= \{2, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53\} & l_{23} &= \{4, 9, 18, 27, 36, 38, 47, 56\} \\
l_{12} &= \{2, 12, 19, 26, 33, 40, 47, 54\} & l_{24} &= \{4, 10, 19, 28, 30, 39, 48, 57\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{25} &= \{4, 11, 20, 29, 31, 40, 49, 51\} & l_{42} &= \{6, 14, 18, 29, 33, 37, 48, 52\}\\
l_{26} &= \{4, 12, 21, 23, 32, 41, 50, 52\} & l_{43} &= \{6, 15, 19, 23, 34, 38, 49, 53\}\\
l_{27} &= \{4, 13, 22, 24, 33, 42, 44, 53\} & l_{44} &= \{7, 9, 21, 26, 31, 43, 48, 53\}\\
l_{28} &= \{4, 14, 16, 25, 34, 43, 45, 54\} & l_{45} &= \{7, 10, 22, 27, 32, 37, 49, 54\}\\
l_{29} &= \{4, 15, 17, 26, 35, 37, 46, 55\} & l_{46} &= \{7, 11, 16, 28, 33, 38, 50, 55\}\\
l_{30} &= \{5, 9, 19, 29, 32, 42, 45, 55\} & l_{47} &= \{7, 12, 17, 29, 34, 39, 44, 56\}\\
l_{31} &= \{5, 10, 20, 23, 33, 43, 46, 56\} & l_{48} &= \{7, 13, 18, 23, 35, 40, 45, 57\}\\
l_{32} &= \{5, 11, 21, 24, 34, 37, 47, 57\} & l_{49} &= \{7, 14, 19, 24, 36, 41, 46, 51\}\\
l_{33} &= \{5, 12, 22, 25, 35, 38, 48, 51\} & l_{50} &= \{7, 15, 20, 25, 30, 42, 47, 52\}\\
l_{34} &= \{5, 13, 16, 26, 36, 39, 49, 52\} & l_{51} &= \{8, 9, 22, 28, 34, 40, 46, 52\}\\
l_{35} &= \{5, 14, 17, 27, 30, 40, 50, 53\} & l_{52} &= \{8, 10, 16, 29, 35, 41, 47, 53\}\\
l_{36} &= \{5, 15, 18, 28, 31, 41, 44, 54\} & l_{53} &= \{8, 11, 17, 23, 36, 42, 48, 54\}\\
l_{37} &= \{6, 9, 20, 24, 35, 39, 50, 54\} & l_{54} &= \{8, 12, 18, 24, 30, 43, 49, 55\}\\
l_{38} &= \{6, 10, 21, 25, 36, 40, 44, 55\} & l_{55} &= \{8, 13, 19, 25, 31, 37, 50, 56\}\\
l_{39} &= \{6, 11, 22, 26, 30, 41, 45, 56\} & l_{56} &= \{8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 57\}\\
l_{40} &= \{6, 12, 16, 27, 31, 42, 46, 57\} & l_{57} &= \{8, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51\}.\\
l_{41} &= \{6, 13, 17, 28, 32, 43, 47, 51\}
\end{aligned}
$$

A determinação das retas do plano nos permite realizar a confecção do baralho, uma vez que cada reta corresponde a uma carta do jogo, que será utilizado com os estudantes no desenvolvimento das tarefas matemáticas.

Capítulo 2

Tarefas Propostas

2.1 Introdução

O Dobble é um jogo francês publicado pela Amodée e pela Play Factory. No Brasil, ele é comercializado pela Galápagos Jogos. É um jogo de observação e velocidade. Ele é composto por 55 cartas, cada uma contendo 8 símbolos, e é jogado como segue: coloca-se uma carta no centro da mesa e as cartas restantes são distribuídas igualmente entre os jogadores. Cada jogador deve, o mais rápido possível, identificar qual símbolo é comum a uma de suas cartas e à carta do centro; quem conseguir identificar o símbolo mais rapidamente, deve colocar sua carta por cima da carta do centro, anunciando qual símbolo é comum às duas cartas. O jogo continua dessa forma até que algum jogador, que será o vencedor, fique sem cartas.

Com o objetivo de investigar como estudantes do ensino médio lidam com o termo primitivo "reta" nesse contexto, elaboramos um conjunto de tarefas matemáticas (que, na sequência, denominamos caderno) que orienta os estudantes a explorarem a geometria finita, que serve como base para a construção do jogo Dobble.

A maioria das tarefas desenvolvidas prioriza os três processos que, segundo Duval [7], são necessários ao aprendizado da geometria:

- Visualização: refere-se à ilustração de um enunciado para investigar/explorar uma situação complexa;

- Construção: que diz respeito à construção de configurações que constituem um modelo no qual os objetos matemáticos são relacionados aos procedimentos representados e aos resultados obtidos;

- Pensamento: abrange o processo discursivo para ampliação do conhecimento, bem como para demonstrações e explicações.

O contexto do jogo no qual os alunos são inseridos permite iniciar as tarefas de maneira mais agradável para eles. Durante o desenvolvimento das tarefas, surgem situações que os levam a estudar a estrutura do jogo e exigem dos estudantes operações discursivas, como descrição e síntese.

Ao longo das tarefas, os estudantes se deparam com vários momentos em que é necessário redigir o que observam e compreendem. Esse processo é importante pois, segundo Duval [9], a expressão verbal abre caminho para o pensamento e, além disso, através dessa tarefa, os estudantes mobilizam simultaneamente conhecimento, compreensão e conscientização.

Os registros produzidos pelos alunos nas tarefas nos permitem investigar o seus raciocínios.

Segundo Duval [8], os estudantes têm a tendência de confundir os objetos matemáticos com suas representações, o que dificulta a compreensão desses objetos. Uma maneira de evitar essa confusão é ter à disposição vários registros para um mesmo objeto e a capacidade de conversão desses registros. Nesse sentido, são propostas algumas tarefas nas quais essas conversões são sugeridas pelo professor através de mudanças de quadro.

As mudanças de quadro, conforme destacado por Saddo [1], são uma maneira de obter diferentes pontos de vista sobre uma mesma situação e, quando provocadas de maneira assertiva, contribuem para a aprendizagem.

Na seção 2.2, o leitor encontrará o primeiro caderno elaborado e os resultados de sua aplicação. Apesar do jogo original ser composto por 55 cartas, utilizamos nas aplicações baralhos contendo as 57 cartas correspondentes às retas do plano projetivo de ordem sete. Parte das tarefas pertencem ao caderno[10]. Em seguida, apresentamos a reformulação desse caderno com base nos resultados da primeira aplicação, juntamente com os resultados da nova aplicação.

2.2 Caderno proposto

2.2.1 Tarefa: sobre a estrutura do jogo.

1. O que você observa sobre a estrutura do jogo?

2. Quantos símbolos há por carta?

3. Quantas cartas contêm o mesmo símbolo?

4. Quantos símbolos são comuns a duas cartas?

2.2.2 Tarefa: sobre as jogadas.

1. Com base nas observações anteriores, dá para afirmar que pelo menos um jogador sempre vai poder continuar jogando até ele não ter mais cartas na mão?

2. Podemos afirmar que todos os jogadores sempre terão condição de jogar na mesma rodada?

3. Em caso afirmativo, qual é a condição que torna este último fato verdadeiro?

2.2.3 Tarefa: construindo um mini-Dobble com 3 símbolos por carta.

1. Quais condições precisam ser levadas em consideração na hora de montar o mini-Dobble?

2. Quantos símbolos diferentes são necessários? Quais são os símbolos que você escolheu?

3. Quantas cartas compõem o mini-Dobble? Quais são elas?

4. Quantas cartas contêm um determinado símbolo?

5. Quantas vezes cada símbolo aparece no baralho?

2.2.4 Tarefa: representando o mini-Dobble.

1. Faça uma representação gráfica de como você enxerga o mini-Dobble.

2. Identifique cada símbolo que você escolheu na construção das suas cartas com os números 1,2,3,4,5,6,7.

3. Represente as cartas como um conjunto de três números.

4. Faça uma representação gráfica do mini-Dobble utilizando pontos para representar símbolos (numere os pontos para facilitar a representação) e linhas para conectar os pontos que pertencem a uma mesma carta. No entanto, atenção: nessa tarefa, você só pode escrever cada número uma única vez.

2.2.5 Tarefa: paralelo com a geometria de incidência.

A geometria euclidiana plana, que é amplamente estudada na educação básica, tem como base os termos indefinidos “ponto”, “reta”, “incidência”, “ordem”, “congruência” e relações entre esses termos indefinidos estabelecidas por axiomas. No sistema de axiomas de Hilbert [13], para a geometria euclidiana, há cinco conjuntos de axiomas, a saber: incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade.

Intuitivamente, um ponto é dito incidente com uma reta se ele está sobre essa reta e dizemos que uma reta incide com um ponto se o ponto está sobre ela. Os axiomas de incidência que relacionam os termos indefinidos “ponto”, “reta” e “incidência” são:

- Axioma de incidência 1: Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P, existe uma única reta l que incide com P e Q.
- Axioma de incidência 2: Para toda reta l, existem pelo menos dois pontos distintos incidentes com l.
- Axioma de incidência 3: Existem três pontos distintos tais que nenhuma reta seja incidente com os três pontos.

2.2.5.1 Tarefa: interpretação comum dos termos indefinidos.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: “reta” é interpretada como sendo um traço qualquer na folha de papel; “ponto” é interpretado como sendo uma marca qualquer na folha de papel e “incidência” como “passa por” ou “estar sobre”.

1. Usando essa interpretação, verifique se os axiomas de incidência acima estão satisfeitos.

2.2.5.2 Tarefa: outra interpretação dos termos indefinidos.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: “ponto” é interpretado como sendo uma letra do conjunto {A, B, C, D}; “reta” é interpretada como sendo um conjunto de duas dessas letras; “incidência” é interpretado como “contém” ou “estar contido”.

1. Usando essa interpretação, determine todas as retas possíveis.
2. Para essa interpretação, verifique se os axiomas de incidência acima estão satisfeitos.
3. Para essa interpretação, há retas paralelas?

2.2.6 Modelo mini-Dobble.

Considere o mini-Dobble montado na tarefa 2.2.4 com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como “estar sobre” ou “contém”.

1. Verifique se os axiomas de incidência estão satisfeitos.

2. A estrutura do jogo poderia ser considerada uma geometria? Justifique.

3. Nessa interpretação, há retas paralelas?

2.2.7 Tarefa: sobre as retas.

Considere ainda o mini-dobble montado no item 2 da tarefa 2.2.4 com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como “estar sobre” ou “contém”. Nesse item 2, usamos linhas para ligar entre si os pontos que pertencem a uma mesma carta.

1. Essas linhas que conectam os pontos que pertencem a uma mesma carta podem ser estendidas? Justifique.

2. Se a resposta for sim, existem mais pontos sobre essas linhas estendidas? Justifique.

3. Se a resposta for sim, quais seriam esses pontos?

2.3 Primeiras aplicações do caderno

2.3.1 Contexto geral

A aplicação do caderno iniciou no Colégio Estadual Pacaembu (CEP), situado no município de Valparaíso-GO, com uma turma do 2º ano do ensino médio regular. Um total de 24 estudantes participou das tarefas, porém nem todos concluíram. Foi informado a eles que poderiam deixar as tarefas a qualquer momento, e, consequentemente, alguns optaram por fazê-lo.

Inicialmente, os estudantes demonstraram bastante entusiasmo, pois se tratava de um jogo e era totalmente diferente do que é feito regularmente em sala de aula. A ausência de alunos em determinadas tarefas e os atrasos dificultaram a aplicação. Isso porque, em determinados momentos, havia grupos de estudantes nas mais diversas partes das tarefas.

Em um segundo momento, o caderno foi aplicado nas turmas do 1° ano C, D e no 3° ano do ensino médio regular do Instituto Federal de Brasília(IFBE), situado no Campus da Estrutural. Um total de 73 estudantes participou das tarefas. Todas as aulas foram acompanhadas pela professora de matemática regente. Também foi comunicado aos estudantes que poderiam optar em qualquer momento pela não realização das tarefas e, assim como aconteceu na primeira aplicação, alguns estudantes não terminaram as tarefas. Acredito que alguns pela complexidade de algumas tarefas, outros devido ao cansaço e à ansiedade com relação às férias. Nessas turmas, também enfrentei dificuldades com relação à ausência dos estudantes em determinadas tarefas e aos atrasos constantes na chegada às aulas.

Em ambas as turmas, alguns estudantes, durante a mediação, demonstraram resistência à correção de seus próprios erros, sendo esse um motivo para abandonarem as tarefas, mesmo compreendendo a razão da correção. Outra dificuldade enfrentada foi relacionada à cópia das tarefas, facilitada em alguns momentos pelo uso de celulares em sala.

2.3.2 Resultado das primeiras aplicações do caderno

Tarefa 2.2.1: sobre a estrutura do jogo.

Não houve grandes dificuldades nessa tarefa em ambas as escolas. Inicialmente, o jogo foi apresentado aos estudantes, juntamente com as suas regras, e foi concedido um tempo para que jogassem entre si. Algumas cartas do baralho utilizado pelos estudantes estão ilustradas na figura 2.1.

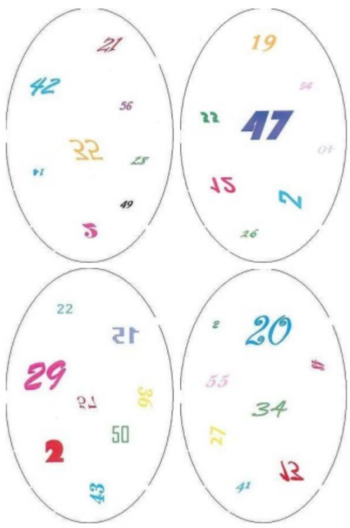

Figura 2.1: cartas do jogo.

Os estudantes do CEP enfrentaram dificuldades para identificar os símbolos em comum devido à fonte e à disposição dos mesmos, uma dificuldade que raramente surgiu na aplicação feita nas turmas do IFBE. Em seguida, partimos para a aplicação das tarefas, obtendo os seguintes resultados.

1. **O que você observa sobre a estrutura do jogo?**
   Essa pergunta ficou muito aberta e gerou certa dificuldade em relação ao seu objetivo. Ela deverá ser retirada para uma próxima aplicação. Era esperado que os estudantes fizessem afirmações em relação à estrutura do jogo com base em sua experiência após jogarem com seus colegas. Porém, surgiram as mais variadas respostas, desde a quantidade de cartas até as habilidades exigidas dos jogadores, como agilidade e observação.

2. **Quantos símbolos há por carta?**
   Nenhum aluno apresentou dificuldade, uma vez que é necessário realizar apenas uma contagem simples.

3. **Quantas cartas contêm o mesmo símbolo?**
   Em ambas as escolas, alguns estudantes tiveram dificuldade em contar determinados símbolos devido à sua disposição na carta, à fonte e à cor, o que resultou em uma contagem equivocada, porém facilmente corrigida. Na aplicação realizada no IFBE, em ambas as turmas, alguns alunos responderam fazendo uso de um símbolo fixo, o que levou a respostas do tipo: "O 22 aparece 8 vezes" e "O 11 aparece 8 vezes".

4. **Quantos símbolos são comuns a duas cartas?**
   Aqui, a maior dificuldade de alguns estudantes foi na redação da resposta. Sempre que pegavam duas cartas, conseguiam identificar que havia apenas um símbolo em comum. No entanto, como isso acontecia repetidamente, alguns respondiam da seguinte forma: "Todas possuem um símbolo em comum". Quando questionados sobre qual seria esse símbolo presente em todas as cartas, ficavam confusos e pegavam vários pares de cartas na tentativa de justificar o que haviam escrito, até identificarem o seu erro.

Tarefa 2.2.2: sobre as jogadas.

1. **Com base nas observações anteriores, dá para afirmar que pelo menos um jogador sempre vai poder continuar jogando até ele não ter mais cartas na mão?**
   Alguns poucos estudantes do CEP responderam que não, pois em algum momento

o jogo ficou travado, já que ninguém conseguiu identificar um símbolo em comum. Nesse momento, tive que retomar o jogo com eles. A maioria respondeu que sim, pois foi o observado durante as partidas.

2. **Podemos afirmar que todos os jogadores sempre terão condição de jogar na mesma rodada?**
   Em ambas as escolas, retornamos ao item 4 da tarefa anterior e questionei sobre as respostas que haviam dado. Foi nesse momento que a maioria dos estudantes compreendeu que qualquer jogador tinha chance de ganhar, bastando fazer uma observação cuidadosa e ter agilidade. Alguns grupos perceberam que todos os jogadores tinham condições de jogar na mesma rodada ainda na fase inicial, ao jogarem com os colegas. Isso ocorreu porque havia entre eles um colega habilidoso que jogava uma carta atrás da outra e, além disso, vários jogadores queriam jogar as cartas na mesma rodada. Isso os motivou a se perguntarem por que isso estava acontecendo. Rapidamente perceberam que duas cartas quaisquer sempre tinham um símbolo em comum.

3. **Em caso afirmativo, qual é a condição que torna este último fato verdadeiro?**
   Nas duas escolas, alguns estudantes apresentaram dificuldade na hora de passar suas conclusões para o papel, surgindo respostas do tipo: "Duas cartas terão pelo menos um símbolo em comum", "duas cartas têm número em comum" e "todas as cartas têm números iguais", mesmo tendo respondido no item 4 da tarefa anterior que há apenas um símbolo comum a duas cartas.

Tarefa 2.2.3: construindo um mini-Dobble com 3 símbolos por carta.

Essa tarefa em específico despertou interesse nos estudantes gerando discussão e cooperação entre eles. Acreditei que seria uma tarefa na qual desanimariam logo de início devido à dificuldade. Mas, na prática, o que observei foi o desafio, instigando os estudantes a buscarem maneiras de se organizarem para completar a montagem do jogo. Com exceção de uma minoria que, desde o início, imaginou que seriam muitas cartas e desanimou, deixando a tarefa nesse ponto. A montagem do mini-Dobble não é uma tarefa simples; exige do professor mediador uma observação constante do que os estudantes estão produzindo.

1. **Quais condições precisam ser levadas em consideração na hora de montar o mini-Dobble?**

Eu os incentivei a voltarem na primeira tarefa e encontrar as regras que precisavam ser seguidas. Em geral, em ambas as escolas, os estudantes conseguiram identificar as regras necessárias ao fazerem um paralelo com o jogo que utilizaram inicialmente. Apenas um estudante do CEP respondeu que "seria necessário um ambiente calmo e tranquilo", entendendo a palavra "condições" como algo que seria necessário a ele no momento da montagem e não em relação ao jogo.

2. **Quantos símbolos diferentes são necessários? Quais são os símbolos que você escolheu?**
   A maioria dos estudantes em ambas as escolas errou inicialmente a quantidade de símbolos por não observar as regras. Precisei lembrá-los o tempo todo quais regras precisavam ser seguidas. Em geral, o que mais lhes deu trabalho foi a necessidade de duas cartas quaisquer terem apenas um símbolo em comum. Foi bastante comum a ocorrência de cartas contendo dois símbolos em comum. A maioria, ao montar uma nova carta, conferia apenas com a carta que havia feito imediatamente antes e não com todas as cartas já produzidas. Como novos símbolos, utilizaram: números aleatórios, letras e desenhos mais básicos como coração, estrela, sol, lua entre outros. Os formatos de carta triangular, quadrangular e oval foram os mais comuns.

3. **Quantas cartas compõem o mini-Dobble? Quais são elas?**
   Aqui ocorreu o mesmo que na tarefa anterior: contagem errada devido à não observância das regras da montagem do jogo.

4. **Quantas cartas contêm um determinado símbolo?**
   Alguns responderam a essa questão, não com base no que montaram anteriormente, mas conforme a resposta ao primeiro item. Assim, responderam corretamente, mesmo tendo respondido erroneamente às duas questões anteriores. Os demais estudantes responderam com base no jogo que haviam montado, tendo que ajustar as suas respostas quando necessário.

5. **Quantas vezes cada símbolo aparece no baralho?**
   O mesmo que ocorreu no item anterior ocorreu aqui.

Foram poucos os estudantes que conseguiram montar o jogo e responder às questões sem nenhum tipo de auxílio ou correção. No entanto, todos que se propuseram a fazer a tarefa conseguiram concluí-la após revisarem as regras e identificarem seus erros.

Tarefa 2.2.4: representando o mini-Dobble.

1. **Faça uma representação gráfica de como você enxerga o mini-Dobble.**
   Os estudantes fizeram sua representação na tarefa anterior desenhando suas cartas e símbolos. Questionaram se deveriam refazer os seus desenhos aqui. Portanto, esse item poderia ser retirado para uma próxima aplicação. Alguns poucos estudantes do IFBE tentaram montar algum tipo de gráfico de função ou estatístico por conta da palavra “gráfica” no enunciado do item, mas não conseguiram explicar o que estavam fazendo.

2. **Identifique cada símbolo que você escolheu na construção das suas cartas com os números 1,2,3,4,5,6,7.**
   Alguns estudantes não precisaram fazer esse item, pois já haviam utilizado exatamente esses números na montagem do mini-Dobble; os demais realizaram a tarefa sem problemas.

3. **Represente as cartas como um conjunto de três números.**
   Esse comando não fez sentido para os estudantes do CEP. Por outro lado, os estudantes do IFBE do 1° ano conseguiram compreender e responder ao item corretamente, acredito que por estudarem o conteúdo de conjuntos recentemente. Os do 3º ano fizeram um esforço para lembrar e, em seguida, eles mesmos responderam corretamente.

4. **Faça uma representação gráfica do mini-Dobble utilizando pontos para representar símbolos (numere os pontos para facilitar a representação) e linhas para conectar os pontos que pertencem a uma mesma carta. No entanto, atenção: nessa tarefa, você só pode escrever cada número uma única vez.**
   Em um primeiro momento, a maioria dos estudantes ficou sem saber como fazer a representação utilizando cada número apenas uma vez, mas, logo em seguida, eles mesmos conseguiram compreender que várias linhas passariam pelo mesmo ponto. O fato de estar escrito “linha” no enunciado do item fez com que não tivessem dificuldade em fazer a representação, não ficando presos à ideia de ser necessariamente uma linha reta. Alguns já começaram com linhas em trajetórias aleatórias e outros começaram fazendo linhas retas. No entanto, mesmo esses estudantes, quando perceberam que não era possível representar todas as cartas com linhas retas, não tiveram problemas em utilizar uma linha em outro formato. Acredito que o fato de estar escrito “linha” e não “reta” contribuiu para isso.

Algumas das representações produzidas pelos estudantes estão ilustradas nas figuras 2.2 a 2.4:

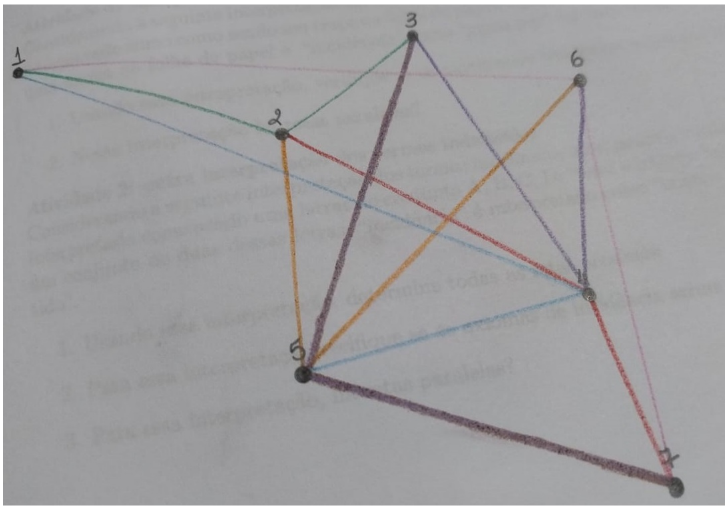

Figura 2.2: representação 1 do mini-Dobble.

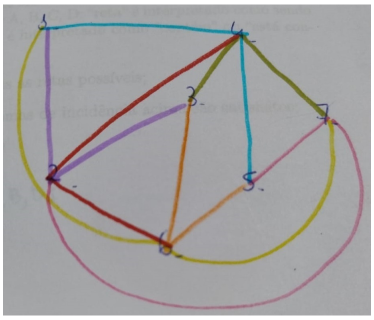

Figura 2.3: representação 2.

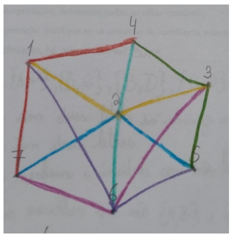

Figura 2.4: representação 3.

Tarefa 2.2.5: paralelo com a geometria de incidência.

Essa foi a tarefa mais complicada para os estudantes. Um dos motivos é a falta de familiaridade com alguns termos, como "axioma" e "incidência". Outros motivos podem ser citados, como a dificuldade na leitura e interpretação. Foi necessária a constante releitura dos axiomas com os alunos para as várias interpretações de reta, ponto e incidência.

A geometria euclidiana plana, que é amplamente estudada na educação básica, tem como base os termos indefinidos "ponto", "reta", "incidência", "ordem", "congruência" e relações entre esses termos indefinidos estabelecidas por axiomas.

Intuitivamente, um ponto é dito incidente com uma reta se ele está sobre essa reta e dizemos que uma reta incide com um ponto se o ponto está sobre ela. Os axiomas que relacionam os termos indefinidos “ponto”, “reta” e “incidência” são:

- Axioma de incidência 1: Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P, existe uma única reta l que incide com P e Q.
- Axioma de incidência 2: Para toda reta l, existem pelo menos dois pontos distintos incidentes com l.
- Axioma de incidência 3: Existem três pontos distintos tais que nenhuma reta seja incidente com os três pontos.

Tarefa 2.2.5.1: interpretação comum dos termos indefinidos.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: “reta” é interpretada como sendo um traço qualquer, feito na folha de papel; “ponto” é interpretado como sendo uma marca qualquer na folha de papel e “incidência” como “passa por” ou “estar sobre”.

1. **Usando essa interpretação, verifique se os axiomas de incidência acima estão satisfeitos.**
   Em ambas as instituições, nenhum dos estudantes fez um traço que não fosse reto, mesmo não sendo especificado no enunciado, por uma falha na redação, que deveriam utilizar uma régua para isso. Alguns utilizaram o ponto como “marca qualquer”, porém a grande maioria utilizou como marca um desenho que já havia utilizado nas cartas do mini-Dobble. Inicialmente, todos afirmavam que o axioma 1 era satisfeito, mesmo tendo desenhado marcas grandes o suficiente para passarem vários traços pelas duas marcas. Então, eles foram questionados sobre a possibilidade de passar outros traços por essas marcas. Somente após desenharem vários traços pelas duas marcas e voltarem ao axioma 1 é que perceberam que o mesmo não estava sendo satisfeito. Conseguiram verificar o axioma 2 sem dificuldades. Já o axioma 3 foi o mais complicado para eles, acredito que por conter a palavra “existe” e “nenhuma” na mesma frase. Insistiam que era falso, pois não existia traço passando pelas três marcas. Isso aconteceu em todas as tarefas que envolviam o axioma 3. Após verificarem a validade dos axiomas 2 e 3, voltamos ao axioma 1 e, então, eles foram questionados sobre o motivo de ele não ser satisfeito e qual modificação poderiam fazer para que ele também fosse satisfeito. Precisaram pensar um pouco, mas conseguiram chegar à conclusão de que o problema era o tamanho das marcas que haviam feito.

Tarefa 2.2.5.2: outra interpretação dos termos indefinidos.

Foi necessário reler os axiomas com os alunos para essa nova interpretação e deixar muito claro a mudança que estava ocorrendo.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: "ponto" é interpretado como sendo uma letra do conjunto {A, B, C, D}; "reta" é interpretada como sendo um conjunto de duas dessas letras; "incidência" é interpretado como "conter" ou "estar contido".

1. **Usando essa interpretação, determine todas as retas possíveis.**
   Esse item foi realizado sem grandes dificuldades; precisaram apenas ser lembrados de que os conjuntos {A, B} e {B, A} são iguais.

2. **Para essa interpretação, verifique se os axiomas de incidência acima estão satisfeitos.**
   Em ambas as instituições, os estudantes não tiveram dificuldades na verificação dos axiomas 1 e 2, sendo necessária apenas a releitura dos axiomas com as novas interpretações para ponto e reta a cada verificação. Já no axioma 3, eles tiveram a mesma dificuldade na interpretação anterior, insistindo que o axioma era falso, pois não havia um conjunto formado por três letras.

3. **Para essa interpretação, há retas paralelas?**
   Nenhum estudante do CEP soube definir retas paralelas quando questionados. Eles não conseguiam exemplificar com desenhos ou de outra forma, portanto não fizeram o item inicialmente, somente após uma breve explicação. Este fato não aconteceu no IFBE, onde os estudantes precisaram de um tempo para processarem a nova ideia e, então, conseguiram identificar as retas paralelas.

Tarefa 2.2.6: modelo do mini-Dobble.

Considere o mini-Dobble montado na tarefa 2.2.3 com a seguinte interpretação: "pontos" são interpretados como "símbolos"; "retas" são interpretadas como "cartas" e "incidência" é interpretado como "estar sobre" ou "conter".

1. **Verifique se os axiomas de incidência estão satisfeitos.**
   Voltamos à tarefa da montagem do mini-Dobble e fizemos a releitura dos axiomas para essa nova interpretação. Para o axioma 1, os estudantes fizeram a verificação para cada carta que haviam desenhado e conseguiram verificar a sua validade. Validaram o axioma 2 sem dificuldades. No axioma 3, tiveram a mesma dificuldade das

tarefas anteriores: inicialmente afirmavam que era falso por não conseguirem exibir uma carta contendo três símbolos que eles escolheram.

2. **A estrutura do jogo poderia ser considerada uma geometria? Justifique.**
   A maioria dos estudantes não conseguiu responder a essa questão. Apenas afirmaram sim ou não, sem conseguir justificar. Alguns que afirmaram que sim, quando questionados sobre o motivo dessa resposta, afirmaram que envolvia formas geométricas. Alguns conseguiram responder e obtivemos as seguintes respostas:

   - "Sim, pois há pontos e retas."
   - "Sim, pois ela tem a estrutura para ser uma geometria, os axiomas."
   - "Sim, pois a geometria ensinada nas escolas tem como base pontos e retas."
   - "Sim, a estrutura é geométrica, pois existem algumas regras (no caso, os axiomas) para que seja possível uma lógica dentro da criação."
   - "Sim, pois nessa lógica, todo o jogo é feito de retas e pontos, ligados entre si."
   - "Sim, porque mesmo trocando as retas e pontos, os axiomas continuam valendo."
   - "Sim é uma geometria. Porque símbolos são interpretados por pontos e cartas são interpretadas por retas."

   As resposta dadas pelos estudantes nos mostram que eles entenderam a pergunta de forma superficial. Como não houve tempo para entrevistar os alunos separadamente a respeito dessa pergunta, optamos por retirá-la da próxima aplicação.

3. **Nessa interpretação, há retas paralelas?**
   Os alunos responderam corretamente sem grandes dificuldades; tive apenas que lembrar alguns deles o que eram retas paralelas.

Tarefa 2.2.7: sobre as retas.

Considere ainda o mini-Dobble montado no item 2 da tarefa 2.2.4 com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como "estar sobre" ou "conter". Nesse item 2, usamos linhas para ligar entre si os pontos que pertencem a uma mesma carta.

1. **Essas linhas que conectam os pontos que pertencem a uma mesma carta podem ser estendidas? Justifique.**
   Em ambas as instituições, os alunos responderam a este item sem precisar de nenhum

tipo de mediação. Deixei-os à vontade para darem as suas respostas. Algumas das respostas obtidas foram:

- “Pode, porque os pontos podem ser ultrapassados.”
- “Sim, pois se tivessem mais pontos ou não as linhas poderiam ser estendidas.”
- “Não, pois caso as linhas fossem estendidas, existiriam cartas com número maior de pontos.”
- “Não, porque a linha poderá ser estendida somente até o ponto.”
- “Sim, não há problema em estender a linha, caso ela continue representará o mesmo grupo de pontos.”
- “Não porque não tem mais símbolos para estender as linhas.”
- “Não, porque o jogo só pode ter 7 símbolos. Se for estender as linhas teria que ter mais símbolos.”
- “Não, pois não tem mais pontos para interligar.”
- “Sim, pois estendendo a forma do jogo não será alterada.”
- “Sim, mas precisaria criar mais pontos.”

As respostas obtidas acima mostram que a maior parte dos nossos estudantes compreendeu que as linhas não representam as retas dessa interpretação. Outra parte confunde essas linhas com as retas, pois acreditam ser necessário haver mais pontos para efetuar o prolongamento delas. No total, 65% dos estudantes responderam sim para esta pergunta e 35% responderam não.

2. **Se a resposta for sim, existem mais pontos sobre essas linhas estendidas? Justifique.**
   Independente da instituição, todos os estudantes que responderam sim ao item anterior afirmaram que não haveria mais pontos, em função da quantidade de símbolos por carta.

3. **Se a resposta for sim, quais seriam esses pontos?**
   Nenhum estudante respondeu a este item por já responderem “não” ao item anterior.

2.4 Caderno reformulado

Após analisarmos os resultados das primeiras aplicações do caderno, foram necessárias algumas alterações. Isso incluiu a revisão de enunciados para tornar mais claro o objetivo de determinados itens, a exclusão do item 1 da tarefa 2.2.1 e do item 2 da tarefa 2.2.6, pois consideramos que os estudantes não estavam preparados para respondê-los, e a inclusão de novos itens nas tarefas 2.2.3 e 2.2.7. Também adicionamos uma nova tarefa ao final a fim de melhor compreendermos os pensamentos dos estudantes. A seguir está o caderno, com as devidas alterações, que foram aplicados nas turmas do 2º e 3º ano do ensino médio do Centro Educacional 104(CED104), localizado no Recanto das Emas-DF.

2.4.1 Tarefa : sobre a estrutura do jogo.

1. Quantas cartas há no jogo?

2. Quantos símbolos há por carta?

3. Quantas cartas contêm o mesmo símbolo?

4. Quantos símbolos são comuns a duas cartas?

2.4.2 Tarefa: sobre as jogadas.

1. Com base nas observações anteriores, dá para afirmar que pelo menos um jogador sempre vai poder continuar jogando até ele não ter mais cartas na mão?

2. Podemos afirmar que todos os jogadores sempre terão condição de jogar na mesma rodada?

3. Em caso afirmativo, qual é a condição que torna este último fato verdadeiro?

2.4.3 Tarefa: construindo um mini-Dobble com 3 símbolos por carta.

1. Quais condições precisam ser levadas em consideração na hora de montar o mini-Dobble?

2. Monte o seu mini-Dobble conforme as condições levantadas no item anterior (você poderá utilizar os símbolos e formato de carta que preferir).

3. Quantos símbolos diferentes foram necessários? Quais são os símbolos que você escolheu?

4. Quantas cartas compõem o mini-Dobble?

5. Quantas cartas contêm um determinado símbolo?

6. Quantas vezes cada símbolo aparece no baralho?

2.4.4 Tarefa: representando o mini-Dobble.

1. Identifique cada símbolo que você escolheu na construção das suas cartas com os números 1,2,3,4,5,6,7.
2. Represente as cartas como um conjunto de três números.
3. Faça uma representação gráfica do mini-Dobble utilizando pontos para representar símbolos (numere os pontos para facilitar a representação) e linhas (utilize uma cor diferente para cada linha) para conectar os pontos que pertencem a uma mesma carta. No entanto, atenção: nessa tarefa, você só poderá escrever cada número uma única vez.

2.4.5 Tarefa: paralelo com a geometria de incidência.

A geometria euclidiana plana, que é amplamente estudada na educação básica, tem como base os termos indefinidos "ponto", "reta", "incidência", "ordem", "congruência" e relações entre esses termos indefinidos estabelecidas por axiomas. No sistema de axiomas de Hilbert [13], para a geometria euclidiana, há cinco conjuntos de axiomas, a saber: incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade.

Intuitivamente, um ponto é dito incidente com uma reta se ele está sobre essa reta e dizemos que uma reta incide com um ponto se o ponto está sobre ela. Os axiomas de incidência que relacionam os termos indefinidos "ponto", "reta" e "incidência" são:

- Axioma de incidência 1: Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P, existe uma única reta l que incide com P e Q.
- Axioma de incidência 2: Para toda reta l, existem pelo menos dois pontos distintos incidentes com l.
- Axioma de incidência 3: Existem três pontos distintos tais que nenhuma reta seja incidente com os três pontos.

2.4.5.1 Tarefa: interpretação comum dos termos indefinidos.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: "reta" é interpretada como sendo um traço qualquer, feito com régua, na folha de papel; "ponto" é interpretado como sendo uma marca qualquer na folha de papel e "incidência" como "passar por" ou "estar sobre".

1. Usando essa interpretação, verifique se os axiomas de incidência acima estão satisfeitos, justificando as suas afirmações para cada um deles.

2.4.5.2 Tarefa: outra interpretação dos termos indefinidos.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: "ponto" é interpretado como sendo uma letra do conjunto {A, B, C, D}; "reta" é interpretada como sendo um conjunto de duas dessas letras; "incidência" é interpretado como "conter" ou "estar contido".

1. Usando essa interpretação, determine todas as retas possíveis.

2. Para essa interpretação, verifique se os axiomas de incidência acima está satisfeito.

3. Para essa interpretação, há retas paralelas?

2.4.6 Tarefa: modelo do mini-Dobble.

Considere o mini-Dobble montado na tarefa 2.4.3 com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como "estar sobre" ou "conter".

1. Verifique se os axiomas de incidência estão satisfeitos, justificando as suas afirmações para cada um deles.

2. Nessa interpretação, há retas paralelas? Justifique.

2.4.7 Tarefa: sobre as retas.

Considere ainda o mini-Dobble, montado no item 2 da tarefa 2.4.3, com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como "estar sobre" ou "conter". Nesse item 2, usamos linhas para ligar entre si os pontos que pertencem a uma mesma carta.

1. Essas linhas que conectam os pontos que pertencem a uma mesma carta podem ser estendidas? Justifique.

2. Se a resposta for sim, existem mais pontos sobre essas linhas estendidas? Justifique.

3. Se a resposta for sim, quais seriam esses pontos?

4. Nessa interpretação, linhas e retas são a mesma coisa? Justifique.

2.4.8 Tarefa: sobre interpretações.

1. Após as várias interpretações de reta e ponto nas tarefas anteriores, explique se é possível definir o que é uma reta.

2.5 Aplicação do caderno reformulado

2.5.1 Contexto geral

A aplicação deste caderno ocorreu no Centro Educacional 104 (CED104), localizado no Recanto das Emas-DF. Um total de 173 estudantes participou das tarefas, porém nem todos concluíram. Alguns faltaram às aulas, outros não gostaram das tarefas ou enfrentaram dificuldades. Todos os estudantes tinham a opção de deixar a tarefa a qualquer momento e alguns optaram por fazê-lo.

Para concluir a aplicação, foram necessárias sete aulas em cada turma. Todas as aulas foram acompanhadas pelo professor das turmas, que me auxiliou em inúmeros momentos, principalmente com os estudantes que foram chegando ao longo da semana e que, consequentemente, estavam em momentos distintos dos demais em relação às tarefas.

Os estudantes ficaram bastante entusiasmados com o jogo e com a possibilidade de participar de algo diferente do habitual. Foram bem receptivos e ficaram animados com o fato das tarefas conterem o símbolo da UnB; alguns o utilizaram na confecção dos seus jogos. Algumas estudantes do terceiro ano questionaram-me sobre a universidade, incluindo a forma de ingresso, o meu curso e meu trabalho. O entusiamo foi diminuindo aos poucos conforme as dificuldades foram surgindo.

Durante o desenrolar da aplicação, surgiram alguns empecilhos: ausência de alguns estudantes em determinadas etapas das tarefas, atrasos na entrada ocasionando perda do tempo de aula e fotos das respostas de outras turmas. Um fator que me impressionou foi a falta de autonomia dos estudantes, pois ficavam esperando que eu dissesse o que fazer, mesmo em comandos simples que não necessitavam de explicações mais detalhadas. Outro fator que atrapalhou na análise dos resultados, que também ocorreu nas outras aplicações, foi a quantidade de alunos que efetivamente desenvolveram as tarefas, aproximadamente um terço dos alunos. Os demais apresentaram cópias das respostas dos colegas ou deixaram as tarefas.

2.6 Resultados da aplicação do caderno reformulado

Tarefa 2.4.1: sobre a estrutura do jogo.

Essa foi uma tarefa que não apresentou grandes dificuldades para a maioria dos estudantes, assim como foi observado nas aplicações anteriores. Inicialmente, o jogo foi apresentado aos estudantes, juntamente com as suas regras, e foi concedido um tempo para que jogassem entre si. Os estudantes enfrentaram dificuldades para identificar os símbolos em comum, devido à fonte e disposição dos mesmos, mas nada que tenha atrapalhado o desenvolvimento da tarefa.

1. **Quantas cartas há no jogo?**
   Alguns poucos estudantes responderam incorretamente por não contarem com as cartas do centro. Dependendo do número de jogadores nos grupos, a quantidade de cartas a ser retirada para que cada participante ficasse com uma quantidade igual de cartas era diferente, resultando em números diferentes nessa resposta. No entanto, a maioria respondeu corretamente.

2. **Quantos símbolos há por carta?**
   Nenhum estudante apresentou dificuldades, uma vez que é necessário realizar apenas uma contagem simples.

3. **Quantas cartas contêm o mesmo símbolo?**
   Aqui surgiu uma dificuldade com relação à fonte, cor e tamanho dos símbolos. Alguns grupos fixaram um determinado número e não encontraram todas as cartas que o continham, ou então contaram mais vezes do que o símbolo aparecia de fato. No entanto, isso foi facilmente corrigido.

4. **Quantos símbolos são comuns a duas cartas?**
   O mesmo ocorreu nas aplicações anteriores: alguns estudantes responderam que haveria **pelo menos** um símbolo em comum, ou então que **todas** as cartas tinham um símbolo em comum. Precisei questioná-los quanto à veracidade do que estavam escrevendo para que corrigissem.

Tarefa 2.4.2: sobre as jogadas.

Os estudantes sentiram um pouco de dificuldade nesta tarefa, pois não conseguiram associar suas respostas na tarefa anterior com a prática do jogo em si.

1. **Com base nas observações anteriores, dá para afirmar que pelo menos um jogador sempre vai poder continuar jogando até ele não ter mais cartas na mão?**
   Todos os estudantes responderam afirmativamente, pois foi o observado durante as partidas.

2. **Podemos afirmar que todos os jogadores sempre terão condição de jogar na mesma rodada?**
   A maioria respondeu inicialmente que não. Foi necessário passar pelos grupos e questioná-los sobre a resposta que haviam dado no item 4 da tarefa anterior e o que isso implicava na prática. Permiti que jogassem algumas rodadas, sempre lembrando do que haviam afirmado anteriormente. Então, perceberam que todos tinham condições de jogar na mesma rodada. Apesar disso, alguns grupos responderam afirmativamente aos dois itens dessa tarefa e, antes mesmo do item 3, já justificaram corretamente esse fato, questionando se era correto manter a mesma resposta neste item e no próximo.

3. **Em caso afirmativo, qual é a condição que torna este último fato verdadeiro?**
   Devido às respostas do item anterior, a maioria não conseguiu responder corretamente inicialmente. Alguns sequer compreenderam a pergunta e deram respostas sem sentido algum. Após a mediação, conseguiram compreender o que estava acontecendo no jogo e responder corretamente ao item.

Tarefa 2.4.3: construindo um mini-Dobble com 3 símbolos por carta.

Os estudantes enfrentaram bastante dificuldade para encontrar uma forma de organização que lhes permitisse verificar mais facilmente se as cartas produzidas estavam de acordo com as regras que eles estabeleceram. Enfrentei muita dificuldade para corrigir os erros, pois cada estudante escolheu os seus próprios símbolos e sua própria maneira de produzir as cartas. Nem sempre conseguiam identificar o que causou seu próprio erro e levava um certo tempo para que eu conseguisse identificar. Isso causou a demora no atendimento de alguns estudantes. No geral, a montagem do mini-Dobble os desafiou e eles se interessaram bastante, mesmo diante das dificuldades. Poucos estudantes deixaram a tarefa devido à dificuldade.

1. **Quais condições precisam ser levadas em consideração na hora de montar**

o mini-Dobble?

Retornamos à primeira tarefa e então eles conseguiram listar as condições necessárias.

2. **Monte o seu mini-Dobble conforme as condições levantadas no item anterior (você poderá utilizar os símbolos e formato de carta que preferir).** Inicialmente, a maioria começou a desenhar várias cartas em branco, acreditando que seriam necessárias muitas cartas, uma vez que o jogo que utilizaram têm 57. Tentavam adivinhar a quantidade de cartas sem observar o que tinham acabado de escrever no item anterior. Foi necessário passar pelos grupos, questionar sobre as condições necessárias e incentivá-los a organizar sua construção de alguma maneira, além de orientá-los a revisar as condições necessárias constantemente para não se perderem durante o processo. A partir desse momento, tornou-se mais complicado identificar rapidamente o erro em alguma montagem do mini-Dobble, pois os jogo eram completamente diferente em relação aos símbolos e à maneira como cada um iniciou sua montagem. No entanto, conseguimos terminar essa tarefa com êxito. As cartas do mini-Dobble produzidas por alguns estudantes estão ilustradas nas figuras 2.5 a 2.7 abaixo:

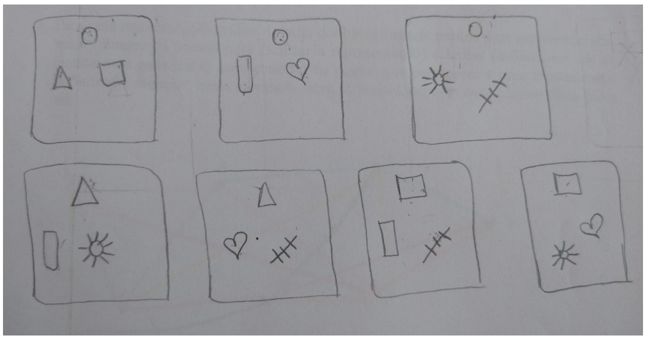

Figura 2.5: cartas 1 do mini-Dobble.

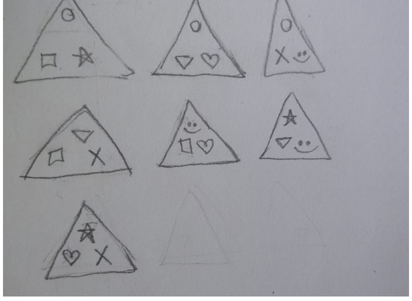

Figura 2.6: cartas 2.

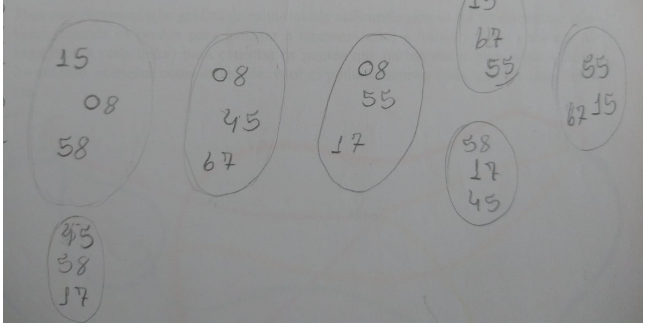

Figura 2.7: cartas 3.

3. **Quantos símbolos diferentes foram necessários? Quais são os símbolos que você escolheu?**
   Uma vez superado o obstáculo da construção do mini-Dobble, tanto este item como os demais foram facilmente respondidos.

4. **Quantas cartas compõem o mini-Dobble?**
   Nenhum estudante teve dificuldade para responder este item após a montagem correta do jogo.

5. **Quantas cartas contêm um determinado símbolo?**
   Nenhum estudante teve dificuldade para responder este item após a montagem correta do jogo.

6. **Quantas vezes cada símbolo aparece no baralho?**
   Nenhum estudante teve dificuldade para responder este item após a montagem correta do jogo.

Tarefa 2.4.4: representando o mini-Dobble.

Chamou-me a atenção a quantidade de alunos que ficaram esperando que eu dissesse o que deveria ser feito, mesmo sendo uma tarefa relativamente simples. Acredito que isso não se deu pela redação dos itens ou pela dificuldade das tarefas, mas sim pelo fato de ser mais fácil esperar que alguém diga o que fazer, do que ler e tentar interpretar o que está sendo pedido, ou por falta de familiaridade com tarefas desse tipo. Isso aconteceu ao longo de toda a aplicação, mas aqui foi onde mais me surpreendeu, pois alguns estudantes não fizeram sozinhos nem mesmo o primeiro item.

1. **Identifique cada símbolo que você escolheu na construção das suas cartas com os números 1,2,3,4,5,6,7.**
   Alguns estudantes não precisaram realizar esse item, pois já haviam escolhido exatamente esses números durante a confecção de suas cartas. Os demais conseguiram completá-lo.

2. **Represente as cartas como um conjunto de três números.**
   Aqui, precisaram de um exemplo e de lembrar como representamos conjuntos; em seguida, conseguiram responder.

3. **Faça uma representação gráfica do mini-Dobble utilizando pontos para representar símbolos (numere os pontos para facilitar a representação) e linhas (utilize uma cor diferente para cada linha) para conectar os pontos**

que pertencem a uma mesma carta. No entanto, atenção: nessa tarefa, você só poderá escrever cada número uma única vez.
A maioria conseguiu desenvolver esse item sem auxílio, porém alguns estudantes tiveram dificuldade. Acredito que o tamanho do enunciado do item tenha dificultado a sua interpretação. Após uma breve explicação, todos conseguiram fazer a sua representação. Alguns começaram tentando traçar linhas retas, mas quando perceberam que não seria possível, passaram para curvas sem problema algum, enquanto outros começaram diretamente com uma curva qualquer. Acredito que o fato de estar escrito "linha" fez com que não ficassem presos aos traços retos.

A representação do mini-Dobble feita por um dos estudantes está ilustrada na figura 2.8 abaixo:

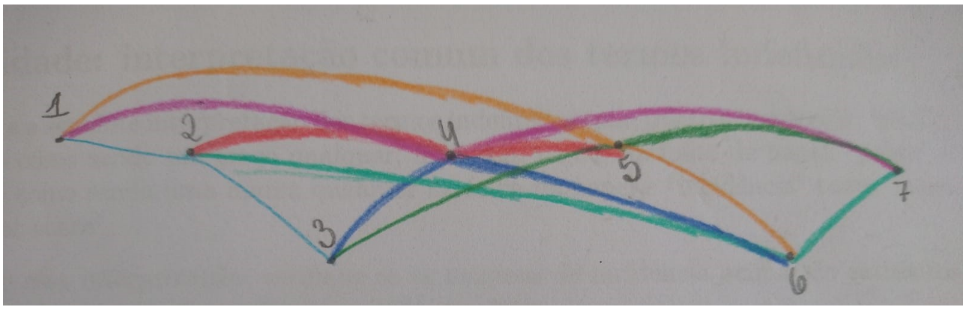

Figura 2.8: representação 2 do mini-Dobble.

Tarefa 2.4.5: paralelo com a geometria de incidência.

A geometria euclidiana plana, que é amplamente estudada na educação básica, tem como base os termos indefinidos "ponto", "reta", "incidência", "ordem", "congruência" e relações entre esses termos indefinidos estabelecidas por axiomas. No sistema de axiomas de Hilbert [13], para a geometria euclidiana, há cinco conjuntos de axiomas, a saber: incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade.

Intuitivamente, um ponto é dito incidente com uma reta se ele está sobre essa reta e dizemos que uma reta incide com um ponto se o ponto está sobre ela. Os axiomas de incidência que relacionam os termos indefinidos "ponto", "reta" e "incidência" são:

- Axioma de incidência 1: Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P, existe uma única reta l que incide com P e Q.

- Axioma de incidência 2: Para toda reta l, existem pelo menos dois pontos distintos incidentes com l.

- Axioma de incidência 3: Existem três pontos distintos tais que nenhuma reta seja incidente com os três pontos.

Tarefa 2.4.5.1: interpretação comum dos termos indefinidos.

A partir dessa tarefa, surgiram mais dificuldades de leitura e interpretação devido à falta de familiaridade com esse tipo de tarefa e com essa linguagem. Os estudantes não conseguiam desenvolver quase nada por conta própria. A cada nova interpretação, foi necessário reler os axiomas e fazer as devidas substituições para que conseguissem avançar nas tarefas. Foi nessa etapa que a mediação se tornou mais complicada, pois eram vários grupos na mesma tarefa, necessitando de uma mediação quase constante.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: "reta" é interpretada como sendo um traço qualquer, feito com régua, na folha de papel; "ponto" é interpretado como sendo uma marca qualquer na folha de papel e "incidência" como "passar por" ou "estar sobre".

1. **Usando essa interpretação, verifique se os axiomas de incidência acima estão satisfeitos, justificando as suas afirmações para cada um deles.**
   Após a releitura dos axiomas e as devidas mudanças, os alunos conseguiram justificar suas respostas com sucesso. Precisei corrigir alguns deles quanto à escrita, pois, apesar de estarem trabalhando com uma nova interpretação, escreviam as suas justificativas utilizando a interpretação inicial. No axioma 1, fizeram as marcas muito grandes, de modo que era possível passar vários traços por elas. Mesmo assim, afirmavam que o axioma estava sendo satisfeito. Precisaram ser questionados sobre a possibilidade de passagem de mais traços por essas marcas e incentivados a fazer o desenho para que percebessem a sua não validade para esse caso. Justificaram o axioma 2 sem dificuldades. Como nas aplicações anteriores, o axioma 3 foi o mais desafiador para eles, pois se fixavam na não existência do traço e não na existência dos pontos. Após a verificação da validade dos axiomas 2 e 3, voltamos ao axioma 1 e então eles foram questionados sobre a mudança que poderiam efetuar em suas marcas para que ele também fosse válido. Assim, conseguiram concluir que o problema era o tamanho das marcas.

Tarefa 2.4.5.2: outra interpretação dos termos indefinidos.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: "ponto" é interpretado como sendo uma letra do conjunto {A, B, C, D}; "reta" é interpretado como sendo um conjunto de duas dessas letras; “incidência” é interpretado como “conter” ou “estar contido”.

1. **Usando essa interpretação, determine todas as retas possíveis.**
   A maioria conseguiu responder corretamente este item, mas alguns encontraram um número muito maior de retas por considerarem diferentes os conjuntos {A, B} e {B, A}. Isso foi facilmente corrigido.

2. **Para essa interpretação, verifique se cada um dos axiomas de incidência acima está satisfeito.**
   A primeira coisa que os estudantes fizeram foi desenhar um traço cujas extremidades eram duas letras, pois não compreenderam inicialmente essa nova interpretação. Foi necessário retornar aos grupos, explicar essa nova interpretação e reler os axiomas com as devidas alterações para que conseguissem desenvolver a tarefa. Após isso, conseguiram justificar os axiomas com mais facilidade do que na tarefa anterior, tendo dificuldade apenas no axioma 3, pois se fixaram na não existência do conjunto em vez da existência das letras.

3. **Para essa interpretação, há retas paralelas?**
   A maioria conseguiu: explicar o que seriam retas paralelas com suas próprias palavras, concluir que seriam conjuntos que não têm nenhuma letra em comum e encontrar um par de retas paralelas. Em geral, exibiam o par {A, B} e {C, D}.

Tarefa 2.4.6: modelo do mini-Dobble.

Considere o mini-Dobble montado na tarefa 2.4.3 com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como “estar sobre” ou "conter".

1. **Verifique se os axiomas de incidência estão satisfeitos, justificando as suas afirmações para cada um deles.**
   Assim como nas aplicações anteriores, os estudantes voltaram para as cartas que haviam desenhado e verificaram a validade do axioma 1. Fizeram a verificação do axioma 2 sem nenhuma dificuldade. O axioma 3, que é sempre o mais desafiador para eles, não foi tão facilmente verificado, pois os estudantes fixavam-se na não existência da carta e não na existência dos símbolos.

2. **Nessa interpretação, há retas paralelas? Justifique.**
   A maioria conseguiu chegar à conclusão de que não, devido à propriedade de que

duas cartas sempre têm um símbolo em comum. Àqueles que responderam que sim, foi solicitado que exibissem as retas paralelas. Após tentarem encontrar tais retas em seus jogos, conseguiram lembrar da propriedade que impedia essa existência.

Tarefa 2.4.7: sobre as retas.

Durante essa tarefa, dei liberdade aos estudantes para fornecerem suas respostas de acordo com suas próprias impressões.

Considere ainda o mini-Dobble montado no item 2 da tarefa 2.2.4 com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como "estar sobre" ou "conter". Nesse item 2, usamos linhas para ligar entre si os pontos que pertencem a uma mesma carta.

1. **Essas linhas que conectam os pontos que pertencem a uma mesma carta podem ser estendidas? Justifique.**
   Os estudantes que responderam sim a este item, deram os seguintes tipos de respostas:

   - "Podem ser estendidas, pois não muda nada no jogo."
   - "Sim, porque o que importa são os números e não as linhas."
   - "Sim, pois não irá mudar nada na carta."
   - "Sim, os pontos continuam se conectando, então não faz diferença."
   - "Sim, pode estender porque não muda nada na reta."
   - "Sim, porque as linhas não interferem em nada."

   Os estudantes que responderam não a este item, deram os seguintes tipos de respostas:

   - "Não, porque não tem outros pontos para conectar."
   - "Não, pois mudaria a reta."
   - "Não, porque não podem existir ligações diferentes fora dos números."

   No total, 83% dos alunos responderam sim para esta pergunta e 17% não.

2. **Se a resposta for sim, existem mais pontos sobre essas linhas estendidas? Justifique.**
   Todos os estudantes que responderam sim ao item anterior afirmaram que não haveria mais pontos, devido à quantidade de símbolos por carta.

3. **Se a resposta for sim, quais seriam esses pontos?**
   Nenhum estudante precisou responder a este item.

4. **Nessa interpretação, linhas e retas são a mesma coisa? Justifique.**
   Respostas obtidas:

   - "Não, porque a reta é diferente da linha."
   - "Sim, pois uma reta é uma linha."
   - "Não, retas são os conjuntos."
   - "Não, pois as retas são representadas pelas cartas."
   - "Não, a reta são os números."
   - "Não, pois as retas são as cartas, ela é finita nesse caso."
   - "Não, pois a linha serve para ligar os símbolos e a reta é a carta."
   - "Não são a mesma coisa, a linha serve para ligar os símbolos e a reta é o conjunto de símbolos."

   Aproximadamente 95% responderam não a essa pergunta e 5% responderam sim. Alguns estudantes afirmaram que a linha e a reta são objetos diferentes, porém não conseguiram explicar essa diferença; para outros, linha e reta são a mesma coisa.

Tarefa 2.4.8: sobre interpretações.

1. **Após as várias interpretações de reta e ponto nas tarefas anteriores, explique se é possível definir o que é uma reta.**
   Algumas das respostas obtidas:

   - "Não, pois a reta pode ser representada de diversas formas."
   - "Não, porque ficou mudando o significado do que é "reta"."
   - "Não, porque a reta pode ser várias coisas."
   - "Depende do comando da questão."
   - "A reta pode ser definida de várias formas, depende da situação que irá usar."
   - "Uma reta não pode ser definida, sempre vai depender do contexto."
   - "Sim, uma reta é uma linha contínua."
   - "Sim, reta é o que usamos para fazer a ligação entre números."

   A maioria dos estudantes conseguiu entender que não é possível definir o termo primitivo reta. No entanto, aproximadamente 16% arriscaram uma definição.

Capítulo 3

Análise dos resultados

3.1 Contexto geral

As análises dos resultados, em ambas as aplicações, assim como as porcentagens mencionadas no texto, foram realizadas com base nas respostas dos estudantes que demonstraram real disposição para trabalhar nas tarefas. Excluímos respostas que consistiam apenas em cópias de outras e aquelas deixadas incompletas devido à ausência dos alunos. Aproximadamente um terço dos estudantes de cada turma participou ativamente das tarefas.

Em todas as escolas, as seguintes ocorrências dificultaram o desenvolvimento das aplicações: a ausência de alguns alunos durante a semana da aplicação, a prática de copiar as respostas das tarefas dos colegas facilitada pelo uso de celulares em sala, a quantidade de alunos por turma e a entrada de alunos na sala de aula em diversos momentos das tarefas.

Um dos objetivos deste trabalho é compreender como os estudantes lidam com o termo primitivo “reta” em um contexto de geometria não-euclidiana. Seguindo Shlomo Vinner [17], que afirma que a aquisição de um conceito significa formar uma imagem conceitual para esse conceito, podemos reformular o nosso objetivo como sendo: investigar como a imagem conceitual que os alunos têm do termo “reta” interfere na compreensão deste termo em um novo contexto.

Segundo Hershkowitz [12], **imagem conceitual** deve ser entendida como o reflexo mental individual de um conceito. Tall [16] utiliza o termo **imagem conceitual** para descrever a estrutura cognitiva que é associada ao conceito, isso inclui todas as imagens mentais, as propriedades e processos associados. Argumenta ainda que é algo que vai se desenvolvendo conforme os estímulos e o amadurecimento.

O processo de construção e a apreensão de conceito são detalhados por Duval [8], na sua Teoria de Representação Semiótica. Para esse autor, "não há noésis sem semiósis", o que significa que a apreensão conceitual de um objeto matemático (noésis) passa necessariamente pela formação de uma representação semiótica (semiósis).

De acordo com Duval [8], para haver apreensão adequada de um objeto matemático, é fundamental não o confundir com a sua representação, pois um mesmo objeto matemático pode ser dado por meio de representações muito diferentes. Qualquer tipo de confusão nesse sentido resulta em uma perda de compreensão. Para o autor, é a atividade de conversão que permite o reconhecimento de um mesmo objeto em suas diferentes representações.

Assim, é necessário fornecer aos estudantes pelo menos dois sistemas semióticos distintos para a representação de um objeto e, além disso, permitir a coordenação entre registros diferentes no sentido de realizar a conversão de um sistema semiótico para outro.

No entanto, ele ressalta que:

> "A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes. Estes, frequentemente não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes..." [8].

A conversão, que consiste em transformar a representação de um objeto matemático de um registro semiótico para outra representação em um sistema semiótico diferente, só é possível quando há o fenômeno da congruência. Segundo Duval [8], isso ocorre quando há possibilidade de uma correspondência semântica dos elementos significantes nas duas representações (cada unidade significante da representação de partida corresponde a uma só unidade significante na representação de chegada) e quando há uma ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações.

O autor ressalta ainda que, para ter acesso a uma nova rede conceitual ou dominá-la, são necessárias atividades centradas na conversão de registros. A conversão não é uma tarefa simples de realizar devido à sua diversidade e complexidade, porém auxilia na diferenciação entre representante e representado e proporciona acesso aos objetos matemáticos que não estão disponíveis diretamente à percepção. Nesse sentido, quanto maior o número de representações distintas e maior for a habilidade de conversão entre elas, maiores são as chances de compreensão dos objetos matemáticos.

Um conceito que permite pôr em prática as observações anteriores é o conceito de mudança de quadros. Saddo [2] traz a definição de quadro como sendo constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, de formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dessa forma, a mudança de quadros consiste em uma mudança de contexto. O que geralmente implica na troca de registros. A sugestão de mudanças de quadros por parte do professor pode facilitar a aprendizagem e o entendimento das relações entre os objetos matemáticos. Essa mudança, segundo o autor, permite uma nova visão das dificuldades, a mobilização de outras ferramentas e técnicas. Saddo defende que:

> "Em sua dimensão epistemológica, [$\cdots$] as mudanças de quadro são ferramentas de análise que permitem diferentes leituras de noções matemáticas. As mudanças de quadro e as interações entre diferentes quadros constituem um poderoso instrumento para a criação de novos conhecimentos em matemática a partir de antigos." [1]

Portanto, mudar de quadro ajuda a desenvolver a habilidade de conversão de registros.

3.2 Análise dos resultados das primeiras aplicações

Analisando as respostas fornecidas pelos estudantes nas tarefas 2.2.1 e 2.2.2, podemos observar que a maior dificuldade encontrada foi relacionada ao domínio da própria linguagem. Alguns alunos não compreenderam o enunciado do item 4; outros foram capazes de explicar corretamente o seu raciocínio verbalmente, mas ao redigirem suas respostas, acabaram escrevendo algo diferente do que afirmavam oralmente, como observado em frases do tipo "todas possuem um símbolo em comum" ou "pelo menos um símbolo em comum". Eles não estão habituados a escrever durante as aulas de matemática e a refletir sobre o que estão escrevendo. Alguns, inclusive, demonstraram irritação diante da exigência de respostas completas ou com a solicitação de correção dos seus registros.

Essa dificuldade com a linguagem também se evidenciou nas tarefas 2.2.5, especialmente no momento em que os estudantes precisavam justificar a validade do axioma 3 para as diversas interpretações. Isso, em função da ordem em que aparecem as palavras "existem" e "nenhuma". Além disso, a leitura e a interpretação dos axiomas em cada uma das interpretações propostas também representaram um desafio para eles, principalmente devido à falta de familiaridade com esse tipo de linguagem.

Durante o desenvolvimento da tarefa 2.2.3, os estudantes enunciaram as condições necessárias para a construção do mini-Dobble no item 1. Entretanto, ao confeccionarem suas cartas, muitos deles abandonavam essas condições e só as retomavam, por sugestão da professora, quando enfrentavam dificuldades para completar a tarefa. Conforme apontado por Shlomo Vinner [17], isso ocorre porque, em nosso dia-a-dia, não costumamos recorrer a definições. Naturalmente, como nossas ações são influenciadas pela vida cotidiana em qualquer ambiente, os estudantes tendem a não considerar as definições, e nem os axiomas, ao realizarem uma tarefa matemática. Vinner [17] ressalta ainda que, como muitas vezes eles têm sucesso em suas tarefas sem recorrer às definições, desenvolver o hábito de fazê-lo é um processo difícil. Além disso, ele argumenta que as definições ajudam a formar a imagem conceitual e auxiliam na correção de imagens conceituais equivocadas. Nos parece plausível estender as observações de Vinner [17] ao caso de axiomas para o grupo analisado. Essas observações foram constatadas pela professora, pois após reverem as condições enunciadas, algumas ideias equivocadas sobre o jogo que ainda persistiam foram abandonadas.

Parte desse problema também é atribuída à falta de familiaridade dos estudantes com tarefas que requerem retornar ao que foi desenvolvido anteriormente para dar continuidade ao raciocínio. Para os alunos, as tarefas muitas vezes são vistas como isoladas umas das outras, o que faz com que sintam a necessidade de recomeçar o raciocínio do zero a cada nova etapa. Isso também dificulta a coordenação de registros, pois os estudantes não têm a iniciativa de pensar nas conversões, considerando que se trata de algo completamente novo.

Ao observar a representação do mini-Dobble feita pelos estudantes na tarefa 2.2.4, parece que a imagem conceitual de linha à qual eles rapidamente recorrem é a de um traço reto. Possivelmente, o fato da linha conectar os pontos os leva imediatamente à imagem conceitual da reta euclidiana, como evidenciado pelos estudantes que começaram as suas representações utilizando traços retos, o que corresponde a aproximadamente 65% dos alunos. Por outro lado, correspondendo a um total de 35% dos alunos, temos um segundo grupo que parece não ter uma mesma imagem conceitual para "reta" e "linha", fazendo uma diferenciação entre esses dois. Isto é observado nos alunos que iniciaram suas representações usando qualquer tipo de curva.

Na tarefa 2.2.5.1, devido a um erro no enunciado, a indicação do uso de régua foi omitida. No entanto, mesmo assim, nenhum estudante fez um desenho diferente de um traço reto, o que evidencia que a imagem conceitual de reta que possuem, como sendo um traço contínuo, está bem enraizada.

Quanto à pergunta "A estrutura do jogo poderia ser considerada uma geometria?", obtivemos algumas respostas afirmativas, nas quais os estudantes justificam esse fato pela presença de pontos, retas e figuras geométricas. Parece que a imagem de geometria que possuem está associada a algo visual, como as formas geométricas. Outra resposta obtida foi a de que a estrutura do jogo seria uma geometria por satisfazer os axiomas de incidência da geometria euclidiana. No nosso caso, o jogo satisfaz os axiomas de incidência, porém não é um modelo de geometria euclidiana, uma vez que não há retas paralelas. Nesse sentido, acreditamos que essa resposta foi induzida pelo próprio enunciado vago da questão. Apenas alunos que não entenderam o enunciado deram respostas negativas, mas não conseguiram justificar. Diante dessas respostas inconclusivas e por não termos tempo suficiente para realizar entrevistas individuais com os alunos, optamos por retirar essa pergunta na aplicação seguinte.

Ao observar a representação do mini-Dobble feita pelos estudantes na tarefa 2.2.7 e analisar suas respostas sobre a possibilidade de estender as linhas que conectam os símbolos de uma mesma carta, notamos diferentes interpretações. Alguns estudantes entenderam a linha como estando ali apenas para conectar os pontos, podendo estendê-la tanto quanto desejarem, pois isso não alteraria o jogo de forma alguma. Esses alunos entenderam que a linha não é a reta, mas está ali somente para conectar os pontos dela. Neste caso, a imagem conceitual de reta que eles possuem parece ser mais maleável e adaptável ao contexto em que está sendo utilizada. A maioria dos estudantes, representada por esse primeiro grupo, compreendeu a reta como sendo um conjunto de pontos não necessariamente contínuo.

Esses alunos parecem ter conseguido lidar com as mudanças de quadros e interpretar a reta nesse novo contexto. Foram capazes de lidar com as várias interpretações de reta sugeridas e, ao final, identificá-la em uma representação com a qual não estão acostumados. Acredito que, se não tivessem passado pelas várias conversões de registros que os fizeram se acostumarem com novas representações, teria sido mais difícil fazer esse reconhecimento.

Outro grupo de estudantes respondeu que não poderíamos estender a linha, pois não há mais pontos, evidenciando que não compreenderam que a linha está ali apenas para conectar os pontos. Esse segundo grupo não conseguiu se desvencilhar da imagem conceitual de reta euclidiana, pois acreditam ser necessário mais pontos para que as linhas sejam estendidas. Isso também evidencia que a compreensão do termo primitivo "reta" passa pela sua relação com o termo primitivo "ponto", como afirmado por Strauss [15]. Fica claro que, para esses alunos, não houve a conversão do registro de reta contínua para a reta como sendo um conjunto finito de pontos.

A afirmação de Duval [8] de que os estudantes confundem os objetos matemáticos com as suas representações fica clara após a análise dos resultados. Alguns estudantes não foram capazes, ao final das tarefas, de reconhecer a reta em suas diversas representações. Essa confusão parece ter prejudicado a compreensão desse novo modelo geométrico.

Apesar de oferecermos várias representações para o termo indefinido "reta" e deixarmos claras as formas de conversão de um registro para outro, nem todos conseguiram se livrar dessa confusão. Isso confirma a afirmação de Duval [8] de que conversão não é algo fácil para os estudantes.

Acreditamos que parte desse problema se deve ao próprio tempo disponível para assimilar as novas ideias. Segundo Tall [16], parte do sucesso da compreensão matemática e, portanto, da formação de conceitos, é devido ao trabalho árduo que estimula a tarefa mental, seguido de um relaxamento para permitir que o processamento continue de forma subconsciente. A formação de um conceito está sujeita a um tempo de amadurecimento necessário. Muitas vezes isso não é respeitado devido ao tempo disponível e à quantidade de estudantes em sala de aula.

Outro fator que pode ter contribuído, e é apontado por Saddo [1] como um gerador de obstáculos à aprendizagem, é a aderência exclusiva a um único ponto de vista, uma vez que a maioria dos estudantes só teve contato com a geometria euclidiana. O autor destaca também os obstáculos psicológicos que, no nosso caso, aparecem por estarmos lidando com uma representação que contradiz aquela que está profundamente arraigada em alguns estudantes e que pode ser inaceitável para eles.

3.3 Análise do resultado da aplicação do caderno reformulado

Assim como nas aplicações anteriores, a maior dificuldade dos estudantes nas tarefas 2.4.1 e 2.4.2 foi a leitura e interpretação dos enunciados, seguida da redação de suas respostas. Isso ocorreu devido à falta de familiaridade com textos que exigem uma leitura mais atenta e reflexiva para alcançar a compreensão. Os alunos estão acostumados com leituras dinâmicas e de conteúdo mais direto, pois, nas aulas de matemática, os enunciados geralmente são mais diretos e as respostas são fornecidas de maneira incompleta. Muitos deles não conseguiam perceber a necessidade de respostas completas ou identificar os erros em suas afirmações escritas. Esse processo é importante pois, segundo Duval [9], a expressão verbal abre caminho para o pensamento e, além disso, através dessa tarefa, os estudantes mobilizam simultaneamente conhecimento, compreensão e conscientização.

Na tarefa de montagem do mini-Dobble, retornamos ao que foi observado inicialmente no jogo e redigimos quais regras deveriam ser seguidas. Eu acreditava que os estudantes estariam atentos às regras que eles mesmos estabeleceram, mas, na prática, eles começaram a montar várias cartas com três símbolos, sem considerar inicialmente a quantidade de vezes que cada símbolo deveria aparecer e que, entre duas cartas do jogo, só poderia ter um símbolo em comum. Isso talvez ocorreu pela falta de familiaridade com tarefas que exigem olhar para o que foi produzido anteriormente. Grande parte das tarefas presentes nos livros didáticos são isoladas e, assim, os estudantes entendem que a cada nova etapa é necessário recomeçar o raciocínio. Novamente, citamos o fator apontado por Vinner [17] que é o fato de não recorrermos a definições (e axiomas) em situações cotidianas; esse hábito faz com que os estudantes não recorram ao que foi previamente estabelecido.

Novamente afirmamos que isso dificulta o reconhecimento de um mesmo objeto em diferentes representações. Não é possível aos estudantes fazer a conversão de registros se eles mantiverem uma visão isolada daquilo que estão desenvolvendo.

Com relação à tarefa 2.4.4, de representação do mini-Dobble, a maioria começou sua representação sem dificuldade utilizando curvas, aproximadamente 55% dos alunos, enquanto outros estudantes começaram com traços retos, aproximadamente 45%. Diante da impossibilidade de completar a representação dessa maneira, eles também utilizaram as curvas sem nenhuma dificuldade. Tal como na primeira aplicação, nos parece que a imagem conceitual de reta que possuem é um traço reto. Os demais parecem ter imagens conceituais distintas para as palavras "linha" e "reta", assim como ocorreu em aplicações anteriores.

Na tarefa 2.4.5.2, conseguimos observar a influência da imagem conceitual de reta euclidiana que os alunos possuem, uma vez que a maioria, em um primeiro momento, desenhou um traço reto cujas extremidades eram duas letras. A ideia de reta como um conjunto de duas letras lhes pareceu muito estranha. Não houve inicialmente a conversão entre a representação de reta como um traço e a representação de reta como um conjunto de duas letras. Foi necessário passar nos grupos e explicar essa nova interpretação. Como nos alerta Duval [8] a conversão de registros não é algo espontâneo para a maioria dos estudantes. Algo positivo foi que, após o contato com essa representação inicialmente estranha, eles parecem ter compreendido mais facilmente a tarefa do modelo do mini-Dobble.

Trabalhar as várias interpretações, consecutivamente, foi bastante cansativo para os alunos por exigir muita conversão de representações. Nesse sentido, talvez o ideal seja avançar gradualmente para um melhor aproveitamento. Cada estudante tem o seu tempo de aprendizagem, e tentar fazer com que todos trabalhem no mesmo ritmo pode impedir o processo de apreensão de novos conceitos por alguns alunos.

Com relação à tarefa 2.4.7, a maioria dos estudantes conseguiu compreender que a função das linhas em suas representações era apenas conectar os pontos pertencentes a uma mesma carta. Portanto, podemos estendê-las o quanto quisermos. Isso fica evidenciado em reposta do tipo "retas são os conjuntos de pontos" ou ainda "a reta é finita nesse caso". A imagem conceitual de reta contínua não os atrapalhou na compreensão da tarefa. Através das mudanças de quadros sugeridas, parece que eles conseguiram realizar as conversões de registros necessárias e reconhecer a reta nessa nova interpretação. Ao final das tarefas, conseguiram fazer a conversão do registro de reta contínua para a reta como sendo um conjunto finito de pontos.

No entanto, parte dos alunos acredita não ser possível estender as linhas, pois não há mais pontos, o que mostra que a influência da imagem conceitual de reta contínua é bastante rígida para eles. Além disso, como ocorreu nas aplicações anteriores, a necessidade de mais pontos evidencia que a compreensão do termo primitivo "reta" passa pela sua relação com o termo primitivo "ponto", como afirmado por Strauss [15].

Apesar de terem passado por diversas mudanças de quadros e conversões de registros, por meio de várias interpretações de reta, isso não foi o suficiente para evitar a confusão entre objeto e sua representação. Esses estudantes não conseguiram fazer a conversão de registros da reta contínua para a reta como sendo um conjunto finito de pontos.

Após uma breve revisão do que foi desenvolvido ao longo das tarefas, a maioria dos alunos conseguiu chegar à conclusão de que a reta não pode ser definida. Isso fica claro em respostas do tipo "reta, é algo definido pelo contexto". Ao que tudo indica, esses estudantes têm uma imagem conceitual maleável para a reta e conseguem reconhecê-la em diferentes representações.

Como esperado, aqueles que não conseguiram fazer essa diferenciação arriscaram uma definição de reta, o que evidencia e reforça uma confusão entre termo primitivo e termo definido.

Um dos obstáculos à aprendizagem apontado por Saddo [9] é a aderência exclusiva a um único ponto de vista. Na educação básica, em geral, os estudantes têm contato apena com a geometria euclidiana, e raramente lhes é apresentada a noção de termos primitivos ou uma abordagem axiomática da geometria, ou de qualquer outro conteúdo. Isso pode fazer com que desenvolvam a crença de que tudo pode ser definido. O que foi observado aqui é que, mesmo estudantes que pareciam ter compreendido as tarefas, tentaram definir uma reta.

Ao final da aplicação, pudemos perceber que alguns estudantes, mesmo após o desenvolvimento das tarefas, ainda confundem a reta com a sua representação, assim como na primeira aplicação. Isso corrobora a afirmação de Duval [8] de que a atividade de conversão de representações, necessária para evitar a confusão entre representante e representado, é algo difícil para os alunos.

Capítulo 4

Considerações finais

Foi elaborado um caderno visando investigar como a imagem conceitual que os alunos têm do termo primitivo"reta" interfere na compreensão deste termo em um novo contexto.

Esse caderno utilizou parte das tarefas já desenvolvidas no caderno do PIBID [10] e foi centrado no jogo Dobble. Ao longo das tarefas, os estudantes exploraram a estrutura matemática por trás do jogo e trabalharam com várias interpretações do termo primitivo "reta".

O caderno foi aplicado em turmas da 1^a, 2^a e 3^a séries do ensino médio, em escolas públicas do Distrito Federal e Entorno, e duraram cerca de 7 aulas.

Em geral, os estudantes demonstraram dificuldades de leitura e interpretação dos enunciados, assim como para redigir claramente suas ideias. Foi observado que compreendiam as tarefas de maneira isolada, iniciando o raciocínio a cada etapa.

Durante a representação do mini-Dobble com pontos e linhas, observou-se que maioria conseguiu compreender a reta como sendo apenas um conjunto finito de pontos. No entanto, parte dos alunos não conseguiu compreender que a função da linha era apenas conectar os pontos que pertenciam a determinada reta, confundindo a linha com a reta. Parece que a imagem conceitual de reta que esses alunos possuem, como um conjunto contínuo de pontos, os influencia a ponto de não se desvencilharem dela em um novo contexto.

Após as tarefas envolvendo as várias interpretações do termo primitivo "reta", a maioria dos estudantes conseguiu chegar à conclusão de que o termo primitivo "reta" não pode ser definido e sim interpretado. Apesar de trabalharmos com mudanças de quadros e conversão de registros, alguns estudantes não conseguiram compreender essas mudanças e realizar as conversões, mesmo sendo indicadas pelo professor. Assim, alguns estudantes arriscaram uma definição do termo primitivo “reta”. Possivelmente isso ocorreu devido à crença de que tudo precisa de uma definição e também pela confusão que ainda fazem da reta com a sua representação.

Trabalhar as várias interpretações de reta consecutivamente foi algo cansativo para os estudantes. Suponho que uma aplicação com um espaço de tempo maior entre as tarefas seja mais eficiente de modo a respeitar a observação de Tall [16].

A quantidade de alunos por turma tornou difícil a administração das dúvidas e solicitações de ajuda, principalmente nas tarefas de construção do mini-Dobble e interpretação dos axiomas, que demandavam mais auxílio do professor. Nesse sentido, a aplicação em turmas reduzidas pode trazer um melhor aproveitamento.

O trabalho desenvolvido junto aos estudantes nos permitiu entender como eles lidam com o termo primitivo “reta” em um contexto de geometria finita. As conversões de registros e mudanças de quadros parecem ter auxiliado-os no entendimento de que, nesse contexto, a reta é um conjunto finito de pontos. Ao final das tarefas, a maioria chegou à conclusão de que a reta só pode ser interpretada e não definida.

Com base nas observações acima, a introdução da geometria finita através do Jogo Dobble pode servir de apoio ao professor, pois auxiliou os estudantes a chegarem a uma compreensão melhor do objeto matemático reta. Isso, de certo modo, justifica várias tentativas de introdução de geometria finita no ensino médio (ver [6] e [5]), não só para auxiliar na compreensão do conceito de reta, mas também para acostumar os alunos a trabalharem em outro contexto.

Uma possível continuidade deste trabalho seria realizar entrevistas com os estudantes para confirmar as afirmações feitas na dissertação. Com essas entrevistas, poderíamos retomar a pergunta “A estrutura do jogo poderia ser considerada uma geometria?” e, assim, compreender as respostas dos alunos.

Referências Bibliográficas

[1] Almouloud, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR, 2010.

[2] Almouloud, S. A. Diálogos da didática da matemática com outras tendências da educação matemática. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online) 9*, 1 (2019).

[3] Bose, R. C. On the application of the properties of galois fields to the problem of construction of hyper-graeco-latin squares. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics* (1938), 323–338.

[4] Bourrigan, M. Dobble et la géométrie finie, 2001. Disponível em: `http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html`. Acesso em 20 Mar. 2024.

[5] Bundrick, Charles M e Frazier, R. C. e. G. H. C. Developing a finite geometry: A math club approach. *The Mathematics Teacher 63*, 6 (1970), 487–492.

[6] Dillon, M. Projective geometry for all. *The College Mathematics Journal 45*, 3 (2014), 169–178.

[7] Duval, R. Geometry from a cognitive point a view. Estrasburgo: C. Mammana e V. Villani. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (2008), Kluwer Academic Publishers.41–76.

[8] Duval, R. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. editora Livraria da Física, 2009.

[9] Duval, R. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Ver e ensinar a matemática de outra forma*, São Paulo: PROEM 1* (2011).

[10] Ferreira, A. Geometria projetiva: O jogo dobble. *In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA* Curitiba, 18-21 de julho (2013. Anais[...]).

[11] Hall, M. *The theory of groups.* Courier Dover Publications, 2018.

[12] Hershkowitz, R. Psychological aspects of learning geometry. In *Mathematics and cognition.* Cambridge University Press, 1990, pp. 70–95.

[13] Hilbert, D. *Fundamentos da geometria.* Editora Gradiva, 2003.

[14] Paige, Lowell J e Wexler, C. A canonical form for incidence matrices of finite projective planes and their associated latin squares. *Portugaliae mathematica 12*, 3 (1953), 105–112.

[15] Strauss, D. Primitive terms and the limits of conceptual understanding. *South African journal of philosophy 32*, 2 (2013), 173–185.

[16] Tall, D. *Advanced mathematical thinking*, vol. 11. Springer Science & Business Media, 1991.

[17] Vinner, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking.* Springer, 1991, pp. 65–81.

Anexo 1

Construção dos quadrados latinos referentes aos termos $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$ e $a_6 = 6$.

Fixando $a_2 = 2$, temos:

$0+2\cdot0=0$	$1+2\cdot0=1$	$2+2\cdot0=2$	$3+2\cdot0=3$	$4+2\cdot0=4$	$5+2\cdot0=5$	$6+2\cdot0=6$
$0+2\cdot1=2$	$1+2\cdot1=3$	$2+2\cdot1=4$	$3+2\cdot1=5$	$4+2\cdot1=6$	$5+2\cdot1=0$	$6+2\cdot1=1$
$0+2\cdot2=4$	$1+2\cdot2=5$	$2+2\cdot2=6$	$3+2\cdot2=0$	$4+2\cdot2=1$	$5+2\cdot2=2$	$6+2\cdot2=3$
$0+2\cdot3=6$	$1+2\cdot3=0$	$2+2\cdot3=1$	$3+2\cdot3=2$	$4+2\cdot3=3$	$5+2\cdot3=4$	$6+2\cdot3=5$
$0+2\cdot4=1$	$1+2\cdot4=2$	$2+2\cdot4=3$	$3+2\cdot4=4$	$4+2\cdot4=5$	$5+2\cdot4=6$	$6+2\cdot4=0$
$0+2\cdot5=3$	$1+2\cdot5=4$	$2+2\cdot5=5$	$3+2\cdot5=6$	$4+2\cdot5=0$	$5+2\cdot5=1$	$6+2\cdot5=2$
$0+2\cdot6=5$	$1+2\cdot6=6$	$2+2\cdot6=0$	$3+2\cdot6=1$	$4+2\cdot6=2$	$5+2\cdot6=3$	$6+2\cdot6=4$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Fixando $a_3 = 3$

$0+3\cdot0=0$	$1+3\cdot0=1$	$2+3\cdot0=2$	$3+3\cdot0=3$	$4+3\cdot0=4$	$5+3\cdot0=5$	$6+3\cdot0=6$
$0+3\cdot1=3$	$1+3\cdot1=4$	$2+3\cdot1=5$	$3+3\cdot1=6$	$4+3\cdot1=0$	$5+3\cdot1=1$	$6+3\cdot1=2$
$0+3\cdot2=6$	$1+3\cdot2=0$	$2+3\cdot2=1$	$3+3\cdot2=2$	$4+3\cdot2=3$	$5+3\cdot2=4$	$6+3\cdot2=5$
$0+3\cdot3=2$	$1+3\cdot3=3$	$2+3\cdot3=4$	$3+3\cdot3=5$	$4+3\cdot3=6$	$5+3\cdot3=0$	$6+3\cdot3=1$
$0+3\cdot4=5$	$1+3\cdot4=6$	$2+3\cdot4=0$	$3+3\cdot4=1$	$4+3\cdot4=2$	$5+3\cdot4=3$	$6+3\cdot4=4$
$0+3\cdot5=1$	$1+3\cdot5=2$	$2+3\cdot5=3$	$3+3\cdot5=4$	$4+3\cdot5=5$	$5+3\cdot5=6$	$6+3\cdot5=0$
$0+3\cdot6=4$	$1+3\cdot6=5$	$2+3\cdot6=6$	$3+3\cdot6=0$	$4+3\cdot6=1$	$5+3\cdot6=2$	$6+3\cdot6=3$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Fixando $a_4 = 4$

$0+4\cdot 0=0$	$1+4\cdot 0=1$	$2+4\cdot 0=2$	$3+4\cdot 0=3$	$4+4\cdot 0=4$	$5+4\cdot 0=5$	$6+4\cdot 0=6$
$0+4\cdot 1=4$	$1+4\cdot 1=5$	$2+4\cdot 1=6$	$3+4\cdot 1=0$	$4+4\cdot 1=1$	$5+4\cdot 1=2$	$6+4\cdot 1=3$
$0+4\cdot 2=1$	$1+4\cdot 2=2$	$2+4\cdot 2=3$	$3+4\cdot 2=4$	$4+4\cdot 2=5$	$5+4\cdot 2=6$	$6+4\cdot 2=0$
$0+4\cdot 3=5$	$1+4\cdot 3=6$	$2+4\cdot 3=0$	$3+4\cdot 3=1$	$4+4\cdot 3=2$	$5+4\cdot 3=3$	$6+4\cdot 3=4$
$0+4\cdot 4=2$	$1+4\cdot 4=3$	$2+4\cdot 4=4$	$3+4\cdot 4=5$	$4+4\cdot 4=6$	$5+4\cdot 4=0$	$6+4\cdot 4=1$
$0+4\cdot 5=6$	$1+4\cdot 5=0$	$2+4\cdot 5=1$	$3+4\cdot 5=2$	$4+4\cdot 5=3$	$5+4\cdot 5=4$	$6+4\cdot 5=5$
$0+4\cdot 6=3$	$1+4\cdot 6=4$	$2+4\cdot 6=5$	$3+4\cdot 6=6$	$4+4\cdot 6=0$	$5+4\cdot 6=1$	$6+4\cdot 6=2$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fixando $a_5 = 5$

$0+5\cdot 0=0$	$1+5\cdot 0=1$	$2+5\cdot 0=2$	$3+5\cdot 0=3$	$4+5\cdot 0=4$	$5+5\cdot 0=5$	$6+5\cdot 0=6$
$0+5\cdot 1=5$	$1+5\cdot 1=6$	$2+5\cdot 1=0$	$3+5\cdot 1=1$	$4+5\cdot 1=2$	$5+5\cdot 1=3$	$6+5\cdot 1=4$
$0+5\cdot 2=3$	$1+5\cdot 2=4$	$2+5\cdot 2=5$	$3+5\cdot 2=6$	$4+5\cdot 2=0$	$5+5\cdot 2=1$	$6+5\cdot 2=2$
$0+5\cdot 3=1$	$1+5\cdot 3=2$	$2+5\cdot 3=3$	$3+5\cdot 3=4$	$4+5\cdot 3=5$	$5+5\cdot 3=6$	$6+5\cdot 3=0$
$0+5\cdot 4=6$	$1+5\cdot 4=0$	$2+5\cdot 4=1$	$3+5\cdot 4=2$	$4+5\cdot 4=3$	$5+5\cdot 4=4$	$6+5\cdot 4=5$
$0+5\cdot 5=4$	$1+5\cdot 5=5$	$2+5\cdot 5=6$	$3+5\cdot 5=0$	$4+5\cdot 5=1$	$5+5\cdot 5=2$	$6+5\cdot 5=3$
$0+5\cdot 6=2$	$1+5\cdot 6=3$	$2+5\cdot 6=4$	$3+5\cdot 6=5$	$4+5\cdot 6=6$	$5+5\cdot 6=0$	$6+5\cdot 6=1$

$$L_5 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fixando $a_6 = 6$

$0+6\cdot0=0$	$1+6\cdot0=1$	$2+6\cdot0=2$	$3+6\cdot0=3$	$4+6\cdot0=4$	$5+6\cdot0=5$	$6+6\cdot0=6$
$0+6\cdot1=6$	$1+6\cdot1=0$	$2+6\cdot1=1$	$3+6\cdot1=2$	$4+6\cdot1=3$	$5+6\cdot1=4$	$6+6\cdot1=5$
$0+6\cdot2=5$	$1+6\cdot2=6$	$2+6\cdot2=0$	$3+6\cdot2=1$	$4+6\cdot2=2$	$5+6\cdot2=3$	$6+6\cdot2=4$
$0+6\cdot3=4$	$1+6\cdot3=5$	$2+6\cdot3=6$	$3+6\cdot3=0$	$4+6\cdot3=1$	$5+6\cdot3=2$	$6+6\cdot3=3$
$0+6\cdot4=3$	$1+6\cdot4=4$	$2+6\cdot4=5$	$3+6\cdot4=6$	$4+6\cdot4=0$	$5+6\cdot4=1$	$6+6\cdot4=2$
$0+6\cdot5=2$	$1+6\cdot5=3$	$2+6\cdot5=4$	$3+6\cdot5=5$	$4+6\cdot5=6$	$5+6\cdot5=0$	$6+6\cdot5=1$
$0+6\cdot6=1$	$1+6\cdot6=2$	$2+6\cdot6=3$	$3+6\cdot6=4$	$4+6\cdot6=5$	$5+6\cdot6=6$	$6+6\cdot6=0$

$$L_6 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anexo 2

A partir do quadrado latino L_2 determinamos os elementos $C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}$ e C_{27} da matriz de incidência dada na Tabela 1.3:

$$C_{22}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\\6\\0\\1\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{22} = \begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$C_{23}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{23} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$C_{24}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{24} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$C_{25}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{25}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{4.4}$$

$$C_{26}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\\0\\1\\2\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{26}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{4.5}$$

$$C_{27}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\\0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{27}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}.\tag{4.6}$$

A partir do quadrado latino L_3 determinamos os elementos $C_{32}, C_{33}, C_{34}, C_{35}, C_{36}$ e C_{37} da matriz de incidência dada na tabela 1.3:

$$C_{32}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\\0\\1\\2\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{32}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{4.7}$$

$$C_{33}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{33} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$C_{34}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\\6\\0\\1\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{34} = \begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$C_{35}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\6\\0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{35} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$C_{36}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{36} = \begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$C_{37}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{37} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

A partir do quadrado latino L_4 determinamos os elementos $C_{42}, C_{43}, C_{44}, C_{45}, C_{46}$ e C_{47} da matriz de incidência dada na Tabela 1.3:

$$C_{42}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{42} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$C_{43}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{43} = \begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$$C_{44}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\6\\0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{44} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$$C_{45}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\\6\\0\\1\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{45} = \begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$C_{46}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{46} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$C_{47}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\\0\\1\\2\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{47} = \begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

A partir do quadrado latino L_5 determinamos os elementos $C_{52}, C_{53}, C_{54}, C_{55}, C_{56}$ e C_{57} da matriz de incidência dada na Tabela 1.3:

$$C_{52}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\6\\0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{52} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$C_{53}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\\0\\1\\2\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{53} = \begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$C_{54}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{54} = \begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$C_{55}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{55} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$C_{56}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{56} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$C_{57}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\\6\\0\\1\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{57} = \begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

A partir do quadrado latino L_6 determinamos os elementos $C_{62}, C_{63}, C_{64}, C_{65}, C_{66}$ e C_{67} da matriz de incidência dada na Tabela 1.3:

$$C_{62}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{62} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$C_{63}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\\0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{63}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}\tag{4.26}$$

$$C_{64}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{64}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\tag{4.27}$$

$$C_{65}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\\0\\1\\2\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{65}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{4.28}$$

$$C_{66}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\\6\\0\\1\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{66}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{4.29}$$

$$C_{67}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow C_{67}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}.\tag{4.30}$$

Anexo 3

O objetivo deste anexo é fornecer algumas sugestões para os professores que desejam aplicar a sequência didática discutida nos capítulos anteriores. Estas são apenas orientações e, portanto, o professor tem total liberdade para fazer os ajustes necessários visando uma melhor adaptação à sua realidade.

Tarefa 2.4.1: sobre a estrutura do jogo.

Esta é uma tarefa na qual as dificuldades podem ser facilmente corrigidas. Reserve pelo menos uma aula para que os alunos joguem entre si e tenham tempo para se familiarizarem com o jogo. Isso os fará sentir-se mais confiantes para desenvolver as tarefas.

1. Quantas cartas há no jogo?
   Resposta esperada: No jogo, há 57 cartas. Pode ser que alguns estudantes não considerem as cartas que devem ser retiradas conforme a quantidade de jogadores nos grupos, o que pode levar a respostas diferentes.

2. Quantos símbolos há por carta?
   Resposta esperada: há oito símbolos em cada carta.

3. Quantas cartas contêm o mesmo símbolo?
   Resposta esperada: há oito cartas com o mesmo símbolo. Explique aos grupos que todos os símbolos aparecem o mesmo número de vezes no baralho. Sugira que escolham um símbolo e determinem juntos em quantas cartas ele aparece.

4. Quantos símbolos são comuns a duas cartas?
   Resposta esperada: um símbolo, e apenas um, é comum a duas cartas. Certifique-se de que esta resposta esteja correta em todos os grupos, pois é extremamente importante nas próximas etapas. É comum aparecerem repostas como "pelo menos um

símbolo em comum" ou "há um símbolo comum a todas as cartas", mas é importante esclarecer que apenas um símbolo é compartilhado entre duas cartas.

Tarefa 2.4.2: sobre as jogadas.

Caso encontrem dificuldades para responder às questões seguintes, sugira que voltem ao item 4 da tarefa anterior e questionem-se sobre as implicações de suas respostas nas partidas. Sugira que joguem algumas rodadas com isso em mente.

1. Com base nas observações anteriores, dá para afirmar que pelo menos um jogador sempre vai poder continuar jogando até ele não ter mais cartas na mão?
   Resposta esperada: sim, uma vez que duas cartas quaisquer sempre têm um símbolo em comum.

2. Podemos afirmar que todos os jogadores sempre terão condição de jogar na mesma rodada?
   Resposta esperada: sim, uma vez que duas cartas quaisquer sempre têm um símbolo em comum, todos os jogadores têm condições de jogar em qualquer rodada.

3. Em caso afirmativo, qual é a condição que torna este último fato verdadeiro?
   Resposta esperada: a condição de que duas cartas quaisquer sempre têm um símbolo em comum.

Tarefa 2.4.3: construindo um mini-Dobble com 3 símbolos por carta.

Esta é uma tarefa que demanda bastante tempo e exige muita atenção do mediador. Geralmente, os estudantes não percebem que deixaram de satisfazer alguma regra na montagem de suas cartas. Erro este que pode não ser tão fácil de identificar, pois cada estudante desenvolve suas cartas à sua própria maneira e com seus próprios símbolos. É extremamente importante verificar as cartas do mini-Dobble, pois uma montagem errada das cartas implicará em respostas equivocadas nas próximas tarefas.

1. Quais condições precisam ser levadas em consideração na hora de montar o mini-Dobble?
   Resposta esperada: cada carta deve conter três símbolos, e cada símbolo deve estar presente em três cartas. Além disso, duas cartas quaisquer devem conter um

símbolo, e apenas um, em comum. Certifique-se de que elencaram todas as regras corretamente antes de iniciarem o próximo item.

2. Monte o seu mini-Dobble conforme as condições levantadas no item anterior (você poderá utilizar os símbolos e formato de carta que preferir).
   Resposta esperada: os estudantes deverão desenhar as sete cartas que compõem o mini-Dobble. Verifique constantemente a montagem das cartas, incentivando-os a encontrar uma forma de organização que lhes permita verificar mais rapidamente as regras que precisam ser seguidas.

3. Quantos símbolos diferentes foram necessários? Quais são os símbolos que você escolheu?
   Resposta esperada: sete símbolos diferentes.

4. Quantas cartas compõem o mini-Dobble?
   Resposta esperada: sete cartas diferentes compõem o mini-Dobble.

5. Quantas cartas contêm um determinado símbolo?
   Resposta esperada: três cartas diferentes contêm determinado símbolo.

6. Quantas vezes cada símbolo aparece no baralho?
   Resposta esperada: cada símbolo aparece três vezes no baralho.

Tarefa 2.4.4: representando o mini-Dobble.

1. Identifique cada símbolo que você escolheu na construção das suas cartas com os números 1,2,3,4,5,6,7.
   Resposta esperada: alguns estudantes não precisarão responder a este item, pois utilizarão exatamente esses números na confecção de seu mini-Dobble.

2. Represente as cartas como um conjunto de três números.
   Resposta esperada: geralmente, eles não se lembram de como representar conjuntos, mas após essa breve revisão serão capazes de responder.

3. Faça uma representação gráfica do mini-Dobble utilizando pontos para representar símbolos (numere os pontos para facilitar a representação) e linhas (utilize uma cor diferente para cada linha) para conectar os pontos que pertencem a uma mesma carta. No entanto, atenção: nessa tarefa, você só poderá escrever cada número uma única vez.

Resposta esperada: os estudantes estão livres para fazer suas representações. Verifique se eles realmente compreenderam que as linhas são apenas para conectar os pontos e uma interseção entre elas não significa necessariamente um novo ponto.

Tarefa 2.4.5: paralelo com a geometria de incidência.

As tarefas que envolvem interpretações de reta, ponto e pertence são as mais desafiadoras para os estudantes, pois envolvem uma linguagem e interpretações com as quais não estão familiarizados. O mediador precisa estar atento aos grupos e fazer a leitura dos axiomas, com as devidas modificações, a cada nova interpretação, juntamente com eles, para conseguirem desenvolver as tarefas.

A geometria euclidiana plana, que é amplamente estudada na educação básica, tem como base os termos indefinidos "ponto", "reta", "incidência", "ordem", "congruência" e relações entre esses termos indefinidos estabelecidas por axiomas. No sistema de axiomas de Hilbert [13], para a geometria euclidiana, há cinco conjuntos de axiomas, a saber: incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade.

Intuitivamente, um ponto é dito pertencente a uma reta se ele está sobre essa reta e dizemos que uma reta contém um ponto se o ponto está sobre ela. Os axiomas de incidência que relacionam os termos indefinidos "ponto", "reta" e "pertence" são:

- Axioma de incidência 1: Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P, existe uma única reta l que contém P e Q.
- Axioma de incidência 2: Para toda reta l, existem pelo menos dois pontos distintos pertencentes a l.
- Axioma de incidência 3: Existem três pontos distintos tais que nenhuma reta contenha os três pontos.

Tarefa 2.4.5.1: interpretação comum dos termos indefinidos.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: "reta" é interpretada como sendo um traço qualquer, feito com régua, na folha de papel; "ponto" é interpretado como sendo uma marca qualquer na folha de papel e "incidência" como "passar por" ou "estar sobre".

1. Usando essa interpretação, verifique se os axiomas de incidência acima são satisfeitos, justificando as suas afirmações para cada um deles.

Resposta esperada: a verificação da validade de cada axioma de incidência. Geralmente, os alunos fazem marcas grandes no papel, desenham apenas um traço passando pelas duas marcas e concluem que o axioma 1 é verdadeiro. Nesse caso, questione-os sobre a possibilidade da passagem de mais traços, incentivando-os a fazerem o desenho. Em seguida, questione-os novamente sobre a validade do axioma 1 até que percebam que não está sendo satisfeito. Pergunte sobre o que poderia ser feito com essas marcas para que o axioma seja verdadeiro, até que compreendam que devem diminuir ao máximo as suas marcas. O axioma 2 é facilmente verificado por eles. Fique atento à verificação do axioma 3, pois geralmente eles se fixam na não existência do traço, ao invés da existência das marcas, e respondem equivocadamente.

Tarefa 2.4.5.2: outra interpretação dos termos indefinidos.

Explique aos estudantes essa nova interpretação de reta, ponto e incidência. É comum que queiram desenhar traços cujas extremidades são duas letras, mostrando que não compreenderam que, nessa nova interpretação, as retas seriam apenas um conjunto de duas letras, por mais estranho que isso possa lhes parecer.

Considere a seguinte interpretação dos termos indefinidos reta, ponto e incidência: "ponto" é interpretado como sendo uma letra do conjunto {A, B, C, D}; "reta" é interpretado como sendo um conjunto de duas dessas letras; "incidência" é interpretado como "conter" ou "estar contido".

1. Usando essa interpretação, determine todas as retas possíveis.
   Resposta esperada: a exibição dos seis subconjuntos de duas das letras de {A, B, C, D}. Lembre-os de que os conjuntos {A, B} e {B, A} são iguais.

2. Para essa interpretação, verifique se cada um dos axiomas de incidência acima está sendo satisfeito.
   Resposta esperada: a verificação da validade de cada axioma de incidência. Os axiomas 1 e 2 são facilmente verificados. Fique atento ao axioma 3, pois geralmente os alunos se fixam na não existência do conjunto, em vez da existência das letras, e respondem de maneira equivocada.

3. Para essa interpretação, há retas paralelas?
   Resposta esperada: sim, há retas paralelas. Por exemplo, {A, B} e {C, D}. Certifique-se de que compreenderam o que seriam retas paralelas nessa nova interpretação.

Tarefa 2.4.6: modelo do mini-Dobble.

Considere o mini-Dobble montado na tarefa 4 com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como “estar sobre” ou "contém".

1. Verifique se os axiomas de incidência são satisfeitos, justificando as suas afirmações para cada um deles.
   Resposta esperada: a verificação da validade de cada axioma de incidência. Em geral, os estudantes verificam facilmente a validade do axioma 1 e 2 se a montagem do mini-Dobble está correta. Fique atento ao axioma 3, pois eles tendem a se fixar na não existência das cartas, em vez da existência dos símbolos.

2. Nessa interpretação, há retas paralelas? Justifique.
   Resposta esperada: não há retas paralelas, uma vez que duas cartas sempre têm um símbolo em comum. Caso tenham dificuldade neste item, basta pedir que procurem um par de retas paralelas em suas próprias cartas. Isso será suficiente para lembrá-los da regra utilizada na montagem no mini-Dobble.

Tarefa 2.4.7: sobre as retas.

Considere ainda o mini-Dobble montado no item 2 da tarefa 4 com a seguinte interpretação: pontos são interpretados como símbolos; retas são interpretadas como cartas e incidência é interpretada como “estar sobre” ou “conter”. Nesse item 2, usamos linhas para ligar entre si os pontos que pertencem a uma mesma carta.

1. Essas linhas que conectam os pontos que pertencem a uma mesma carta podem ser estendidas? Justifique.
   Resposta esperada: sim, pois a linha serve apenas para conectar os pontos. É necessária a justificativa da resposta para entender os pensamentos dos estudantes. O que precisa ficar claro é que a extensão de uma linha não significa que sobre ela incidam novos pontos.

2. Se a resposta for sim, existem mais pontos sobre essas linhas estendidas? Justifique.
   Resposta esperada: que os estudantes que responderam, sim, ao item anterior percebam que não há novos pontos na extensão dessas linhas.

3. Se a resposta for sim, quais seriam esses pontos?
   Resposta esperada: que, com esse questionamento, os estudantes percebam que

não há novos pontos nessa extensão de linha, uma vez que temos uma quantidade finita de pontos e estes já estão representados.

4. Nessa interpretação, linhas e retas são a mesma coisa? Justifique.
   Resposta esperada: que os estudantes percebam que a linha serve apenas para conectar os pontos que pertencem a uma determinada carta, e que a reta é apenas o conjunto de pontos ligados por essa linha.

Tarefa 2.4.8: sobre interpretações.

1. Após as várias interpretações de reta e ponto nas tarefas anteriores, explique se é possível definir o que é uma reta.
   Resposta esperada: que os estudantes percebam que o termo primitivo reta não pode ser definido, mas sim interpretado.