



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional



Geometrias não euclidianas: uma possibilidade para a educação básica

Lucas Mata da Câmara Santos

Brasília

2024

Lucas Mata da Câmara Santos

Geometrias não euclidianas: uma possibilidade para a educação básica

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Adail de Castro Cavalleiro

Brasília
2024

Posição vertical

Lucas Mata da Câmara Santos

Geometrias não euclidianas: uma possibilidade para a educação básica/ Lucas
Mata da Câmara Santos. – Brasília, 2024-
110 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Adail de Castro Cavalheiro

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM, 2024.

1. Geometrias não Euclidianas. 2. Educação Básica. 3. Geometria do Taxista.
4. Geometria Elíptica. 5. Geometria Esférica. 6. Geometria Hiperbólica. I. Adail de
Castro Cavalheiro. II. Universidade de Brasília. III. PROFMAT - SBM. IV. Guia
para professores de possibilidades para o ensino das geometrias não-euclidianas
nas escolas básicas.

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometrias não euclidianas: uma possibilidade para a educação básica

por

Lucas Mata da Câmara Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 27 de Junho de 2024

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Adail de Castro Cavaleiro- MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Rui Seimetz - MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi - UFABC (Membro)

Dedico a Patrícia Dias, minha grande cúmplice na realização dos meus sonhos, que, estando sempre ao meu lado nos momentos duros dessa caminhada, fez com que esse trabalho fosse possível. Sua parceria, paciência e carinho foram fundamentais para conclusão de mais essa etapa.

Dedico também aos meus familiares, que sempre acreditaram no meu potencial e torceram pelo meu sucesso. Em especial, à minha amada mãe, Alda, que sempre fez de tudo pela minha felicidade, sendo grande exemplo de resiliência e força, e minha querida tia, Aldineide, que sempre foi minha maior inspiração de amor pelo magistério. Em especial, dedico à minha avó Aurenides (in memoriam), que sempre se faz presente nos meus pensamentos, uma das responsáveis pelo meu grande amor pela matemática.

Agradecimentos

A todos que fazem com que o PROFMAT continue impulsionando a formação continuada de professores em todo Brasil, qualificando cada vez mais os profissionais de matemática que atuam nas instituições de ensino de nosso país.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, que foi o grande espaço de aprendizagem que tive durante a graduação e o mestrado, com estrutura e profissionais do mais alto nível.

Aos maravilhosos professores que me inspiraram durante toda minha trajetória escolar e acadêmica. Em especial, ao meu querido orientador neste trabalho, Prof. Dr. Adail Cavaleiro que, desde a minha graduação, sempre foi um exemplo de profissionalismo e excelência no meio acadêmico. Obrigado por ter aceito meu convite para a realização deste trabalho.

*“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema
beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura”*

Bertrand Russell

Resumo

Este trabalho apresenta noções sobre geometrias não euclidianas e ideias de abordagens da temática no ambiente escolar. A dissertação apresenta um ponto de vista histórico, que trata do surgimento e da evolução dessas geometrias, estabelecendo um contraponto com a geometria de Euclides, apresentando propriedades e características da Geometria do Taxista, da Geometria Elíptica (com foco na Geometria Esférica) e da Geometria Hiperbólica. A proposta visa auxiliar os docentes na formação continuada e na elaboração de aulas e atividades sobre a temática para aplicação em turmas do ensino básico, de maneira contextualizada e criativa.

Palavras-chaves: Geometrias não Euclidianas. Educação Básica. Geometria do Taxista. Geometria Elíptica. Geometria Esférica. Geometria Hiperbólica.

Abstract

This work presents notions about non-Euclidean geometries and ideas for approaching the topic in the school environment. The dissertation presents a historical point of view, which deals with the emergence and evolution of these geometries, establishing a counterpoint with Euclid's geometry, presenting properties and characteristics of Taxicab Geometry, Elliptical Geometry (with a focus on Spherical Geometry) and Hyperbolic Geometry. These work aims to assist teachers in continuing training and in the development of classes and activities on the topic for application in basic education classes, in a contextualized and creative way.

Key-words: Non-Euclidean Geometries. Basic Education. Taxicab Geometry. Elliptical Geometry. Spherical Geometry. Hyperbolic Geometry

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração do Axioma 3(a) - Fonte: elaborada pelo autor	18
Figura 2 – Suporte para demonstração da equivalência entre o axioma de Playfair e o 5° postulado I - Fonte: elaborada pelo autor	19
Figura 3 – Suporte para demonstração da equivalência entre o axioma de Playfair e o 5° postulado II - Fonte: elaborada pelo autor	20
Figura 4 – Suporte para demonstração da equivalência entre o axioma de Playfair e o 5° postulado III - Fonte: elaborada pelo autor	20
Figura 5 – Segmento AB de dois pontos de uma esfera - Fonte: elaborada pelo autor	24
Figura 6 – Segmento AB de dois pontos de uma esfera maciça - Fonte: elaborada pelo autor	24
Figura 7 – Cilindro maciço e os caminhos minimizantes de A para B - Fonte: elaborada pelo autor	28
Figura 8 – Planificação da superfície lateral do cilindro - Fonte: elaborada pelo autor	28
Figura 9 – Mapa GPS - Fonte: elaborada pelo autor	29
Figura 10 – Malha quadriculada - Fonte: (CÉSAR, 2010)	30
Figura 11 – Blocos formados pelos pontos A , B , C , D e E - Fonte: (MIRANDA, 1999)	30
Figura 12 – Caminho direto entre os pontos A e B - Fonte: (MIRANDA, 1999) . .	31
Figura 13 – Três caminhos diferentes entre A e B - Fonte: (MIRANDA, 1999) . . .	31
Figura 14 – Triângulo de Pascal na Geometria do Taxista - Fonte: elaborada pelo autor	32
Figura 15 – Reta AB e duas retas paralelas a ela que passam pelo ponto C - Fonte: elaborada pelo autor	33
Figura 16 – Circunferência de raio 2 e centro C na geometria do taxista - Fonte: elaborada pelo autor	33
Figura 17 – Caso I - Fonte: elaborada pelo autor	34
Figura 18 – Caso II - Fonte: elaborada pelo autor	35
Figura 19 – Caso III - Fonte: elaborada pelo autor	35
Figura 20 – Curvas r e s - Fonte: elaborada pelo autor	36
Figura 21 – Círculo Osculante - Fonte: elaborada pelo autor	37
Figura 22 – Superfície I - Fonte: (UFC, 2022)	38
Figura 23 – Superfície II - Fonte: (UFC, 2022)	38
Figura 24 – Superfície III - Fonte: (UFC, 2022)	39
Figura 25 – Superfície IV - Fonte: (UFC, 2022)	39
Figura 26 – Superfície V - Fonte: (UFC, 2022)	39
Figura 27 – Superfície VI - Fonte: (DELAÏ; FRANCO, 2010)	40

Figura 28 – Reta Esférica - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)	42
Figura 29 – Curvas com Extremidades em A e em B - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)	42
Figura 30 – Segmento AB - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)	42
Figura 31 – Trópicos e Geodésicas - Fonte: (NETO, 2023)	43
Figura 32 – Circunferências máximas e paralelismo - Fonte: (RIBEIRO, 2013)	44
Figura 33 – Retas esféricas determinadas por pontos antípodas - Fonte: (ANTUNES, 2009)	44
Figura 34 – Ângulo esférico - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)	45
Figura 35 – Triângulo esférico - Fonte: (RIBEIRO, 2013)	45
Figura 36 – Triângulo esférico de um octante - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)	46
Figura 37 – Cinta esférica I - Fonte: (PRESMIC, 2014)	46
Figura 38 – Cintas esféricas II e III - Fonte: (PRESMIC, 2014)	47
Figura 39 – Circunferência Esférica - Fonte: (PRESMIC, 2014)	48
Figura 40 – Mediatriz Esférica - Fonte: (PRESMIC, 2014)	48
Figura 41 – Cidade Imaginária - Fonte: elaborada pelo autor	50
Figura 42 – Trajetória AB proposta - Fonte: elaborada pelo autor	51
Figura 43 – Pseudoesfera e tratriz - Fonte: (AGUSTINI, 2022)	52
Figura 44 – Pseudoesfera - Fonte: (AGUSTINI, 2022)	53
Figura 45 – Reta AB no disco de Klein - Fonte: elaborada pelo autor	53
Figura 46 – Paralelas à reta AB que passam pelo ponto P no disco de Klein - Fonte: elaborada pelo autor	54
Figura 47 – Paralelas à reta AB que passam pelo ponto P - Fonte: elaborada pelo autor	54
Figura 48 – Pontos ideais, pontos ultra-ideais, pontos ordinários e ângulo de paralelismo - Fonte: elaborada pelo autor	55
Figura 49 – Disco de Poincaré e definições - Fonte: elaborada pelo autor	56
Figura 50 – Segmentos de mesmo tamanho no disco de Poincaré - Fonte: (RIBEIRO, 2013)	57
Figura 51 – Círculo Limite I e III - Fonte: (VOGADO et al., 2020)	57
Figura 52 – Paralelas à reta AB que passam pelo ponto P no disco de Poincaré - Fonte: (GALVAO, 2014)	58
Figura 53 – Ângulo hiperbólico BAC - Fonte: (RIBEIRO, 2013)	58
Figura 54 – Triângulo hiperbólico ABC - Fonte: (RIBEIRO, 2013)	59
Figura 55 – Soma dos ângulos internos no triângulo hiperbólico ABC - Fonte: (RIBEIRO, 2013)	59
Figura 56 – Malha Gravitacional - Fonte: (UFPA, 2021)	60
Figura 57 – Deformação espaço-tempo - Fonte: (CARDOSO, 2019)	60
Figura 58 – Crochê Hiperbólico - Fonte: elaborada pelo autor	61

Figura 59 – Axioma de Lobachevsky crochê hiperbólico - Fonte: (VOGADO et al., 2020), com adaptações	61
Figura 60 – Trajetória AB minimizante - Fonte: elaborada pelo autor	62
Figura 61 – Vista superior do bairro em malha quadriculada - Fonte: elaborada pelo autor	63
Figura 62 – Vista superior do bairro I - Fonte: elaborada pelo autor	64
Figura 63 – Vista superior do bairro II - Fonte: elaborada pelo autor	65
Figura 64 – Vista superior do bairro III - Fonte: elaborada pelo autor	66
Figura 65 – Vista superior do bairro IV - Fonte: elaborada pelo autor	68
Figura 66 – Folha de Caderno - Fonte: Google Imagens	70
Figura 67 – Bola de Futebol Americano - Fonte: Google Imagens	70
Figura 68 – Batata Chips - Fonte: Google Imagens	71
Figura 69 – Cilindro Circular Reto - Fonte: Google Imagens	71
Figura 70 – Vuvuzela - Fonte: Google Imagens	71
Figura 71 – Toro - Fonte: Google Imagens	72
Figura 72 – Determinando diâmetro da esfera I - Fonte: elaborada pelo autor . . .	74
Figura 73 – Determinando diâmetro da esfera II - Fonte: elaborada pelo autor . . .	74
Figura 74 – Determinando diâmetro da esfera III - Fonte: elaborada pelo autor . .	74
Figura 75 – Marcação dos ângulos até 360° na tira maior de acrílico - Fonte: elaborada pelo autor	75
Figura 76 – Marcação dos ângulos até 90° nas tiras menores de acrílico - Fonte: elaborada pelo autor	75
Figura 77 – Juntando as tiras menores na tira maior - Fonte: elaborada pelo autor	76
Figura 78 – Juntando as pontas da maior tira - Fonte: elaborada pelo autor	76
Figura 79 – Juntando as pontas das tiras menores I - Fonte: elaborada pelo autor .	77
Figura 80 – Juntando as pontas das tiras menores II - Fonte: elaborada pelo autor .	77
Figura 81 – Usando transferidor I - Fonte: elaborada pelo autor	78
Figura 82 – Usando transferidor II - Fonte: elaborada pelo autor	78
Figura 83 – Usando transferidor III - Fonte: elaborada pelo autor	79
Figura 84 – Representação da cidade imaginária - Fonte: elaborada pelo autor . . .	81
Figura 85 – Proposta de segmento AB - Fonte: elaborada pelo autor	82
Figura 86 – Modelo crochê hiperbólico - Fonte: (VOGADO et al., 2020), com adaptações	83
Figura 87 – Triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré - Fonte: (RIBEIRO, 2013, p. 102), com adaptações	84
Figura 88 – Triângulos hiperbólicos na pseudoesfera de Beltrami - Fonte: (DELAJ; FRANCO, 2010)	85
Figura 89 – Gabarito - Quadro Resumo - Fonte: elaborada pelo autor	85
Figura 90 – Quadro Resumo - Fonte: elaborada pelo autor	86

Sumário

	Introdução	13
1	HISTÓRICO	15
2	PRELIMINARES: NOÇÕES BÁSICAS	23
3	GEOMETRIA DO TAXISTA	29
4	CURVATURAS	36
5	GEOMETRIA ELÍPTICA	41
6	GEOMETRIA HIPERBÓLICA	50
7	ATIVIDADES PROPOSTAS	63
	Considerações Finais	87
	REFERÊNCIAS	89
	APÊNDICES	92

Introdução

Embora a geometria euclidiana não seja a única abordagem geométrica existente, tampouco seja a mais aplicável para as situações cotidianas, ela segue predominando no ensino escolar. Esse fato é reforçado pela abordagem dos livros didáticos e invisibilizam toda uma construção histórica da geometria, em particular das geometrias não euclidianas – objeto de estudo deste trabalho.

Negligenciar o estudo das geometrias não euclidianas é deixar de lado todo um potencial crítico do estudo da matemática, uma vez que investigar e questionar os resultados encontrados se faz presente nos diversos currículos escolares. Nesse sentido, a abordagem das geometrias não euclidianas propicia aos alunos o desenvolvimento de habilidades essenciais para o verdadeiro aprendizado matemático.

Vale ressaltar que, por meio desse tópico, é possível aproximar os estudantes de como a matemática se desenvolve, mostrando que a disciplina está em constante processo de aprimoramento e construção, além de permitir trabalhar todo um aspecto histórico da disciplina no contexto geométrico.

A dissertação estrutura-se em 7 capítulos. No Capítulo 1, faz-se uma abordagem histórica do surgimento das geometrias não euclidianas a partir da geometria proposta por Euclides, com suas noções comuns e postulados.

O Capítulo 2 será destinado à discussão de noções básicas que serão usadas ao longo do trabalho, como a noção generalizada de reta e paralelismo, abordadas para o melhor andamento da leitura e facilidade na compreensão dos próximos capítulos.

O Capítulo 3 é destinado ao estudo da geometria do taxista. Esse capítulo apresenta definições básicas e propriedades da primeira geometria não euclidiana deste trabalho.

O Capítulo 4 discute curvaturas e suas propriedades, partindo da curvatura de uma curva até a curvatura de superfícies.

O Capítulo 5, apresenta a geometria elíptica, por meio do modelo esférico. Nesse capítulo, conceitos fundamentais para a compreensão dessa geometria são estabelecidos, bem como suas propriedades.

O Capítulo 6 aborda a geometria hiperbólica, partindo da parte histórica, passando pelos seus pressupostos e, por fim, chegando na parte de contextualização.

O Capítulo 7 apresenta propostas de atividades sobre a temática deste trabalho, aplicando o conteúdo proposto nos capítulos.

O trabalho tem como objetivo contribuir para discussão acerca do ensino da geometria, em especial das geometrias não euclidianas, mostrando as diversas possibilidades e abordagens possíveis para seu ensino. Nesse sentido, o presente texto pode ser utilizado por professores da educação básica como um guia para a introdução dessa temática em suas salas de aula.

1 Histórico

Geometria, comumente tratada apenas como uma área da matemática que se dedica ao estudo das formas, tem origem no grego antigo e é composta pelos termos “geo”, associado a terra, e “metria”, da palavra “métron”, cujo significado está relacionado a medir. Dessa forma, a Geometria surge na antiguidade, em que as civilizações, na busca por uma melhor interpretação do mundo a sua volta, se apropriaram dos conhecimentos geométricos para conseguir “medir a terra”. (SMOGORZHEVSK, 1978) retrata que a geometria antiga era tida como uma ciência empírica, na qual todos os resultados eram deduzidos diretamente da prática como respostas às necessidades das civilizações antigas.

No Egito Antigo, a Geometria desempenhou um papel essencial para o aprimoramento de sua sociedade, contribuindo para o desenvolvimento de sua arquitetura, dos conhecimentos astronômicos e até da escrita hieroglífica. Nesse sentido, para (BICUDO, 2011):

A geometria teria surgido no Egito. Para Heródoto, conforme registrado no segundo livro da sua obra “História”, a geometria teria surgido graças ao Faraó Sesóstris III, que dividiu as terras da região para a agricultura, fazendo com que cada proprietário pagasse tributos conforme o tamanho do terreno. (BICUDO, 2011)

De maneira análoga, como apresentado por (KATZ; IMHAUSEN et al., 2007), os babilônicos, os mesopotâmicos, os chineses, os islâmicos e diversos outros povos contribuíram para o desenvolvimento geométrico e fizeram uso de suas ferramentas para o aprimoramento de suas civilizações.

Todavia, (BARKER, 1969, p. 28) destaca que os gregos, porém, ao contrário dos egípcios, apreciavam a Geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas em virtude de seu interesse teórico, uma vez que a preocupação demonstrativa na matemática, iniciada no século VI a.C por Tales de Mileto e retratada por (AVILA, 2001), detinha grande importância para os matemáticos gregos.

Por volta de 300 a.C., Euclides de Alexandria, grego considerado o pai da Geometria, reuniu os conhecimentos na área até o momento, em seu livro “Os Elementos”, o qual, segundo (BOYER, 1996), somente perde para a Bíblia em número de edições publicadas, tornando-se o livro didático mais bem sucedido e influente já escrito. Dessa forma, a obra foi fundamental para dar início ao que se conhece como a Geometria Euclidiana Clássica.

Um dos principais pontos a ser destacado no livro de Euclides é a metodologia utilizada para o desenvolvimento dos conceitos abordados, a axiomática. Segundo (RAG-

GIO, 2003), um sistema axiomático apresenta axiomas e conceitos fundamentais definidos, respectivamente, por serem afirmações imediatamente evidentes (que não carecem de demonstração) e informações imediatamente compreensíveis (que não carecem de definição). Dessa forma, por meio do uso coerente dos axiomas e dos conceitos fundamentais, todos os resultados obtidos, denominados proposições, poderão ser demonstrados como fatos verdadeiros.

Desse modo, para Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva baseada em hipóteses básicas, os axiomas ou postulados, e em noções comuns. Na tradução realizada por (BICUDO, 2009), os postulados e as noções apresentadas no Livro I dos Elementos são dados como na relação a seguir:

Postulados:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas outras, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menos do que dois retos.

Noções Comuns:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, se caso de iguais sejam subtraídas iguais, os restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contém uma área.

A estrutura desenvolvida por Euclides perdurou por mais de dois mil anos, servindo de base para o desenvolvimento de diversos estudos na área. Por outro lado, o quinto postulado enunciado foi motivo de reflexão de diversos matemáticos, que buscaram compreender se o mesmo poderia ser demonstrado e, portanto, perderia seu caráter de axioma. Nesse sentido, na busca por demonstrá-lo, foram desenvolvidos diversos enunciados similares ao quinto postulado de Euclides, denominado postulado das paralelas. Consequentemente, criaram-se novas estruturas axiomáticas para representar a Geometria Euclidiana. Segundo (BARBOSA, 1994),

Uma das conseqüências da busca da prova do 5º postulado, foi a produção de um número de substitutos (ou equivalentes) a esse postulado. Estes substitutos são proposições equivalentes ao quinto postulado, ou seja, usando-se os quatro primeiros postulados, mais o substituto, é possível desenvolver a mesma geometria euclidiana.

De acordo com (AVILA, 2001), uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da Geometria Euclidiana foi realizada no livro “Fundamentos da Geometria”, do alemão David Hilbert (1862-1943). A publicação tinha como objetivo complementar o trabalho realizado por Euclides, reestruturando-o de uma maneira lógica, consistente e didática, apresentando, segundo (GREENBERG, 1993), cinco termos indefinidos (primitivos), quatorze definições e cinco grupos de axiomas, listados a seguir:

1. Axiomas de Incidência.

- (a) Para quaisquer pontos distintos P e Q existe uma única reta r que passa por P e Q .
- (b) Existem ao menos dois pontos distintos em qualquer reta.
- (c) Existem ao menos três pontos distintos que não estão sobre uma mesma reta.

2. Axiomas de Ordem.

- (a) Se $A - B - C$, ou seja, B está entre A e C , então A , B e C são três pontos distintos e colineares, e $C - B - A$.
- (b) Dados quaisquer dois pontos distintos B e D , existem pontos A , C e E que estão em \overleftrightarrow{BD} (reta determinada pelos pontos B e D) tais que $A - B - D$, $B - C - D$ e $B - D - E$.
- (c) Se A , B e C são três pontos distintos que estão sobre a mesma reta, então um e somente um está entre os outros dois.
- (d) Para qualquer reta r e para quaisquer pontos A , B e C que não estão em r :

(i) se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão do mesmo lado de r .

(ii) se A e B estão do em lados opostos de r e B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .

3. Axiomas de Congruência.

(a) Se A e B são pontos distintos e A' é um ponto qualquer, então para qualquer semirreta r começando de A' existe um único ponto B' em r tal que $B' \neq A'$ e $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Ou seja, o segmento de reta AB é congruente ao segmento $A'B'$, em que o símbolo \equiv indica congruência, que determina uma correspondência métrica entre dois entes matemáticos em que, no caso apresentado, são segmentos de mesma medida.

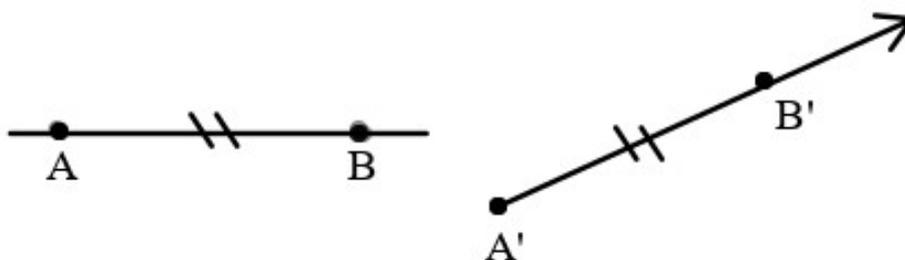


Figura 1 – Ilustração do Axioma 3(a) - Fonte: elaborada pelo autor

(b) Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$. Além disso, qualquer segmento é congruente a si mesmo.

(c) Se $A - B - C$ (B está entre A e C), $A' - B' - C'$, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

(d) Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$, e dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ começando do ponto A' , então existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ em um dado lado da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\angle B'A'C' \equiv \angle BAC$, ou seja, o ângulo $B'A'C'$ é equivalente ao ângulo BAC .

(e) Se o ângulo com vértice em A é equivalente ao ângulo com vértice em B , ou seja, $\angle A \equiv \angle B$ e $\angle A \equiv \angle C$, então $\angle B \equiv \angle C$. Além disso, qualquer ângulo é congruente a si mesmo.

(f) (Critério Lado-Ângulo-Lado) Se dois lados e o ângulo incluído de um triângulo são congruentes respectivamente à dois lados e o ângulo incluído de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

4. Axioma de Continuidade (Axioma de Dedekind).

Suponha que os pontos de uma reta r estão decompostos em dois conjuntos disjuntos não vazios Σ_1 e Σ_2 tais que:

$$(a) \ r = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

(b) Nenhum ponto de Σ_1 está entre dois pontos de Σ_2 e vice-versa.

Então existe um único ponto O sobre r tal que um dos dois subconjuntos é uma semirreta que começa em O .

5. Axioma das Paralelas (Postulado de Playfair).

Para qualquer reta r e qualquer ponto P que não está em r existe no máximo uma reta s passando por P tal que s é paralela a r .

O axioma das paralelas, adotado no livro de Hilbert, seguiu uma equivalência mais acessível e intuitiva, obtida pelo matemático escocês John Playfair (1748-1819) para o quinto axioma de Euclides. Vamos mostrar que o Axioma de Playfair (AP) é equivalente ao quinto postulado de Euclides ($E5$), ou seja, $(AP) \iff (E5)$, para isso mostraremos que $(AP) \implies (E5)$ e $(E5) \implies (AP)$.

Demonstração de que $(E5) \iff (AP)$. Considere os seguintes enunciados, apresentados anteriormente:

Postulado 5 de Euclides ($E5$): E, caso uma reta, caindo sobre duas outras, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menos do que dois retos.

Axioma das Paralelas (AP): Por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

(\implies) Sejam P um ponto e r uma reta, tais que $P \notin r$. Tracemos uma perpendicular s a r passando por P . Tracemos uma perpendicular m a s , passando por P .

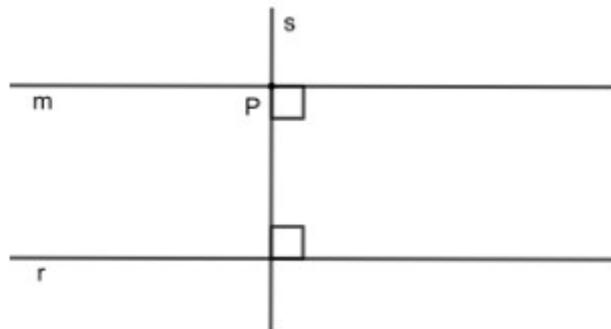


Figura 2 – Suporte para demonstração da equivalência entre o axioma de Playfair e o 5º postulado I - Fonte: elaborada pelo autor

Por (BICUDO, 2011, Proposição I.27), se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes congruentes, então as duas retas são paralelas. Logo, temos que $m \parallel r$ e isso prova a existência da paralela m .

Quanto à unicidade, suponhamos que existe n paralela a r , passando por P e $n \neq m$, como apresentado na figura a seguir:

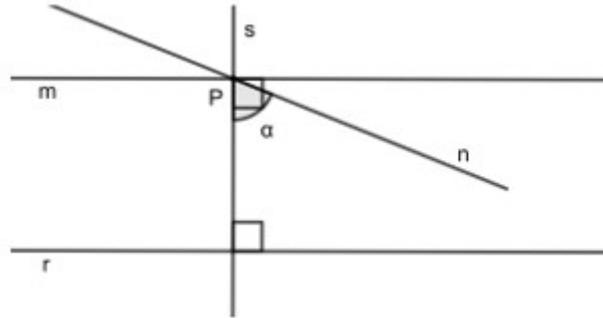


Figura 3 – Suporte para demonstração da equivalência entre o axioma de Playfair e o 5º postulado II - Fonte: elaborada pelo autor

Logo, $\alpha + \beta \neq 180^\circ$ e, sem perda de generalidade, suponhamos $\alpha + \beta < 180^\circ$ sendo α o ângulo formado entre a reta n e a reta s e β o ângulo formado por s e r que está do mesmo lado de m e de α . Pelo quinto postulado de Euclides, n e r se encontram, uma contradição, pois, por hipótese, n e r são paralelas. Portanto, n e m não podem ser distintas, ou seja, m é única.

(\Leftarrow) Sejam as retas r e s , cortadas por uma transversal t , de tal modo que os ângulos colaterais internos possuam soma menor que dois retos, sendo $\{P\} = t \cap s$, ou seja, o ponto P a intersecção da reta t com a reta s .

Tomando α e β , ângulos colaterais internos de r e s por t , de modo que $\alpha + \beta < 180^\circ$, mostraremos que r e s se encontram. Considere, como mostrado na figura 4, a reta m passando por P , de modo que os ângulos colaterais internos somem dois retos.

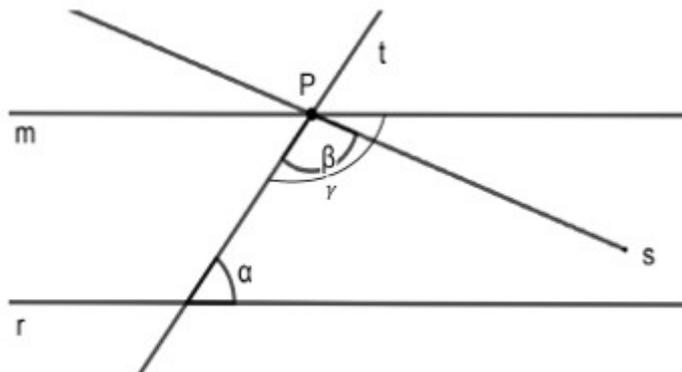


Figura 4 – Suporte para demonstração da equivalência entre o axioma de Playfair e o 5º postulado III - Fonte: elaborada pelo autor

Por (BICUDO, 2011, Proposição I.28), se uma reta corta duas outras formando ângulos colaterais internos de medidas α e β tais que $\alpha + \beta$ é igual à medida de dois ângulos retos, então as duas retas são paralelas. Logo, tem-se que $m \parallel r$, em que \parallel simboliza o paralelismo entre as retas .

Suponha, por contradição, que $s \parallel r$. Por (AP), temos a unicidade das paralelas, ou seja: $m = s \implies \gamma = \beta \implies \gamma + \alpha = \beta + \alpha$, uma contradição, pois, por hipótese, $\alpha + \beta < 180^\circ$. Portanto, s não é paralela a r .

Dessa forma, concluímos que (E5) \iff (AP).

□

Caso o leitor tenha o interesse em verificar outras “proposições” equivalentes ou substitutos para o quinto postulado enunciado por Euclides, sugere-se a leitura da tese de (SILVA, 2022).

As várias tentativas de demonstração do 5º postulado levaram não só aos diversos resultados equivalentes, mas também a uma melhor compreensão da geometria euclidiana, como a reformulação apresentada por Hilbert. Além disso, permitiram compreender a importância da fundamentação lógica na matemática. Nesse sentido, a estrutura de argumentação rigorosa baseada no método axiomático foi fundamental para o desenvolvimento da matemática como uma ciência.

Ademais, diante das suposições de que o postulado das paralelas poderia ser provado, ganhando assim o status de um teorema, diversos matemáticos desconfiaram da validade do axioma e passaram a negá-lo, dando início à formulação de novas geometrias, as geometrias não euclidianas.

Inicialmente desenvolvidas no final do século XIX e início do século XX, as geometrias não euclidianas têm como pressuposto o estabelecimento de um contraponto à Geometria considerada até então como a única verdadeira, a Geometria Euclidiana Clássica. Vale ressaltar que, apesar de incluírem negações do quinto postulado, as geometrias obtidas ainda se mostraram consistentes, pelo fato de o quinto postulado ser independente dos outros postulados de Euclides, como o apresentado por (BARKER, 1969, p. 51).

Dentre os diversos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento das novas geometrias, o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856) foram os que mais contribuíram na construção das geometrias não euclidianas, e, segundo (BOYER, 1999), o desenvolvimento dessas geometrias se deve a Lobachevsky, sendo Bolyai pouco lembrado. Ademais, de acordo com (COUTINHO, 1989, p. 65), tendo em vista o desenvolvimento proporcionado por Lobachevsky e Bolayai, o matemático alemão Georg Bernhard Riemann (1826-1866) também estabeleceu as bases de uma nova geometria.

Dentre as diversas geometrias não euclidianas formuladas, tem-se a do Motorista de táxi, a Elíptica - iniciada por Riemann - e a Hiperbólica - com Lobachevsky como precursor - que serão abordadas neste trabalho.

2 Preliminares: Noções básicas

Para o melhor desenvolvimento dos próximos capítulos deste trabalho, faz-se necessário estabelecer noções básicas essenciais e definições, que buscam generalizar conceitos adotados na geometria euclidiana que, em geral, não se aplicam para o contexto de outras geometrias abordadas neste trabalho. Dessa forma, esses tópicos serão explicados a seguir e, dentre eles, serão abordados os conceitos de retas e caminhos minimizantes, a definição de comprimento, paralelismo, métrica e outros.

Seguindo os pressupostos da Geometria Euclidiana, a maneira de medir a distância entre dois pontos de um plano é tomando o comprimento de um segmento de reta que determina a menor distância entre eles. Sendo assim, para a melhor compreensão de como estabelecer uma maneira de medir a distância entre pontos em uma superfície qualquer, as definições ampliadas de reta, segmento de reta e comprimento são fundamentais.

Dessa forma, podemos observar que a reta é caracterizada por ser a curva que minimiza a distância entre quaisquer dois pontos pertencentes a ela, sendo uma curva uma trajetória descrita por um ponto. Nesse sentido, para generalizar esse conceito de reta, adotaremos neste trabalho a noção de caminho contínuo minimizante, que denotaremos simplesmente por caminho minimizante e que poderá ser usada para uma superfície qualquer, mantendo as propriedades minimizadoras da reta euclidiana. Logo, essa definição possibilitará observar e conhecer as propriedades dessas curvas minimizadoras tanto em superfícies euclidianas, quanto em superfícies não euclidianas.

A noção de segmento de reta, proposta na geometria euclidiana, é do conjunto de todos os pontos da reta localizados entre dois pontos distintos, sendo esses dois pontos pertencentes a esse segmento. Os pontos que delimitam o segmento são chamados de extremidades do segmento. No contexto mais amplo, adotaremos a mesma definição para caracterizar um segmento qualquer. Ou seja, o segmento é o conjunto de todos os pontos pertencentes ao caminho minimizante que estão compreendidos entre dois pontos dados, sendo esses pontos também pertencentes ao segmento e chamados de extremidades. No caso de um segmento que possui como extremidades os pontos A e B , denotaremos-lo por AB .

Na Figura 5 a seguir, os pontos A e B da esfera estão dispostos de modo que a menor distância entre eles é dada por um segmento de reta AB do plano que passa por esses pontos e pelo centro da esfera, representado pelo plano azul.

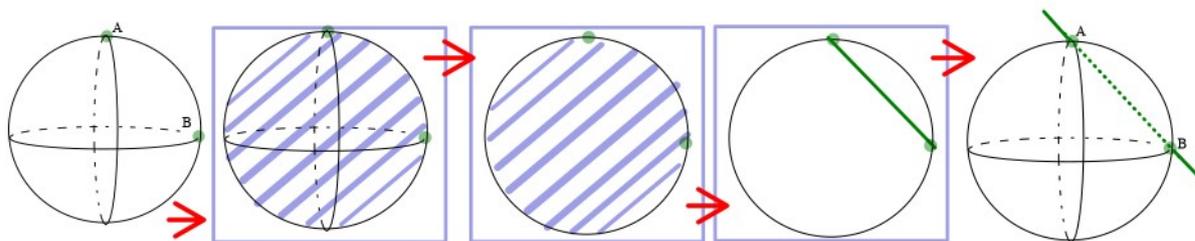


Figura 5 – Segmento AB de dois pontos de uma esfera - Fonte: elaborada pelo autor

Todavia, em um contexto em que a esfera é maciça, percorrer o mesmo caminho em busca dessa menor distância seria inviável e, conseqüentemente, a menor distância entre A e B não será dada pelo mesmo segmento. Ademais, neste trabalho, abordaremos no tópico sobre geometria esférica que esse menor caminho será dado por um arco de circunferência que passa por esses pontos, como o apresentado na Figura 6. A circunferência que contém esse segmento será considerada um caminho minimizante. Note que o outro arco AB dessa circunferência será um segmento, todavia não será o que determina menor distância entre tais pontos.

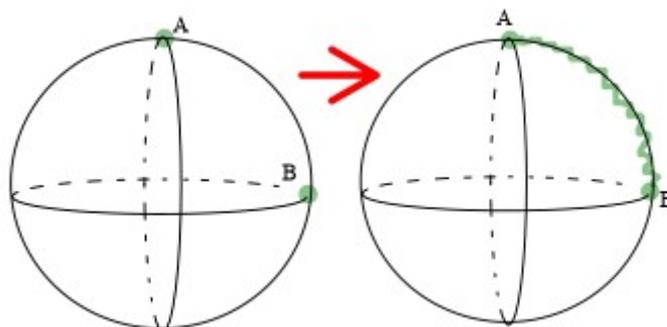


Figura 6 – Segmento AB de dois pontos de uma esfera maciça - Fonte: elaborada pelo autor

Ou seja, dependendo da geometria a ser trabalhada, o segmento possuirá um nome específico, por exemplo, na geometria do taxista, o segmento será chamado de caminho direto e, na geometria esférica, o segmento está associado ao arco de um círculo máximo como apresentado anteriormente.

O comprimento de um segmento está relacionado à grandeza que determina a distância entre dois pontos. Ademais, para compreender a definição de distância entre pontos, é necessário compreender a melhor forma de fazê-la, que é estabelecida por uma métrica. Em matemática, métrica é um conceito que generaliza a ideia geométrica de distância e é definida como uma aplicação $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \quad d(A, B) \geq 0, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2 \quad e \quad d(A, B) = 0 \iff A = B.$$

- (ii) $d(A, B) = d(B, A), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2.$
- (iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^2,$ sendo A, B e C pontos não colineares da superfície adotada.

Dessa forma, dizemos que d é uma métrica e o número real $d(A, B)$ é a distância entre o ponto A e o ponto B .

Note que, na abordagem algébrica da Geometria Euclidiana Plana pela Geometria Analítica, os pontos são denotados por pares ordenados (x, y) , em que x e y são números reais. Nesse sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, a distância d entre os pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ é definida por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}.$$

Observe que d define uma métrica. De fato:

- (i) Pela definição, tem-se que $d(A, A) = \sqrt{(x_a - x_a)^2 + (y_a - y_a)^2} = 0$. Logo, $d(A, A) = 0$. E, se $A \neq B$, então $x_a \neq x_b$ ou $y_a \neq y_b$. Logo, $(x_a - x_b)^2 > 0$ ou $(y_a - y_b)^2 > 0$. Portanto, $d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} > 0$. Então $d(A, B) \geq 0$.
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$. De fato,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = \sqrt{(-(x_b - x_a))^2 + (-(y_b - y_a))^2} \\ &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = d(B, A). \end{aligned}$$

- (iii) Inicialmente, provaremos que, para quaisquer números reais x, y, z e w , têm-se que:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)} \geq xz + yw.$$

De fato,

$$(xw - yz)^2 \geq 0 \implies x^2w^2 - 2xwyz + y^2z^2 \geq 0 \implies x^2w^2 + y^2z^2 \geq 2xwyz.$$

Logo,

$$(x^2 + y^2)(z^2 + w^2) = x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 \geq x^2z^2 + 2xwyz + y^2w^2 = (xz + yw)^2.$$

Como ambos os membros da desigualdade anterior são não-negativos, então:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)} \geq \sqrt{(xz + yw)^2} = |xz + yw|.$$

Por outro lado, $xz + yw \leq |xz + yw|$. Portanto,

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)} \geq xz + yw.$$

Tomando-se $x = x_a - x_c$, $y = y_a - y_c$, $z = x_c - x_b$ e $w = y_c - y_b$, temos:

$$\begin{aligned}
 (d(A, C) + d(C, B))^2 &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + w^2} \right)^2 \\
 &= x^2 + y^2 + 2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \left(\sqrt{z^2 + w^2} \right) + z^2 + w^2 \\
 &\geq x^2 + y^2 + 2(xz + yw) + z^2 + w^2 \\
 &= (x + z)^2 + (y + w)^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a + y_b)^2 = d(A, B)^2.
 \end{aligned}$$

Logo, $(d(A, C) + d(C, B))^2 \geq d(A, B)^2$. Portanto, $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Dessa forma, fica provado que a função apresentada é uma métrica. Nesse exemplo, essa métrica é chamada de métrica euclidiana. Outras duas métricas clássicas são as métricas do máximo e a métrica da soma. Essa última pode ser obtida definindo a função distância d por:

$$d(A, B) := |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

em que $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$. Podemos demonstrar que tal aplicação é uma métrica. De fato,

(i) Pela definição, têm-se que $d(A, A) = |x_a - x_a| + |y_a - y_a| = 0$. Logo, $d(A, A) = 0$. E, se $A \neq B$, então $x_a \neq x_b$ ou $y_a \neq y_b$. Logo, $|x_a - x_b| > 0$ ou $|y_a - y_b| > 0$. Portanto, $d(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b| > 0$. Então $d(A, B) \geq 0$.

(ii) $d(A, B) = d(B, A)$. De fato,

$$\begin{aligned}
 d(A, B) &= |x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |-(x_b - x_a)| + |-(y_b - y_a)| \\
 &= |x_b - x_a| + |y_b - y_a| = d(B, A).
 \end{aligned}$$

(iii) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. De fato,

$$\begin{aligned}
 d(A, C) &= |x_a - x_c| + |y_a - y_c| = |x_a - x_b + x_b - x_c| + |y_a - y_b + y_b - y_c| \\
 &\leq |x_a - x_b| + |x_b - x_c| + |y_a - y_b| + |y_b - y_c| = d(A, B) + d(B, C).
 \end{aligned}$$

Já a métrica do máximo é dada pela função:

$$d(A, B) = \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}$$

em que $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$. Podemos demonstrar que tal aplicação é uma métrica, pois atende aos três tópicos da definição, como mostrado a seguir:

(i) Pela definição, tem-se que $d(A, A) = \max\{|x_a - x_a|, |y_a - y_a|\} = \max\{0, 0\} = 0$. Logo, $d(A, A) = 0$. E, se $A \neq B$, então $x_a \neq x_b$ ou $y_a \neq y_b$. Logo, $|x_a - x_b| > 0$ ou $|y_a - y_b| > 0$. Portanto, $d(A, B) = \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\} > 0$. Então $d(A, B) \geq 0$.

(ii) $d(A, B) = d(B, A)$. De fato,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\} = \max\{|-(x_b - x_a)|, |-(y_b - y_a)|\} \\ &= \max\{|x_b - x_a|, |y_b - y_a|\} = d(B, A). \end{aligned}$$

(iii) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. De fato,

$$\begin{aligned} d(A, C) &= \max\{|x_a - x_c|, |y_a - y_c|\} = \max\{|x_a - x_b + x_b - x_c|, |y_a - y_b + y_b - y_c|\} \\ &\leq \max\{|x_a - x_b| + |x_b - x_c|, |y_a - y_b| + |y_b - y_c|\} \\ &\leq \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\} + \max\{|x_b - x_c|, |y_b - y_c|\} = d(A, B) + d(B, C). \end{aligned}$$

Vale ressaltar que a métrica adotada em uma situação depende do seu contexto e da sua aplicação. Comumente, a métrica é adotada visando a otimização de distâncias em uma superfície. Todavia, nem sempre o caminho minimizante que descreve a menor distância será a curva de interesse. Por exemplo, dadas duas cidades, pode-se tomar 3 trajetos distintos a serem percorridos de carro, tais que um minimize a distância, outro minimize o tempo e outro minimize o gasto de gasolina para a realização desse deslocamento. Assim, para cada um desses casos, adotaremos uma métrica específica.

Ademais, outro conceito elementar que podemos generalizar é a noção de paralelismo entre curvas. Note que, segundo a tradução do livro I dos Elementos de Euclides, (BICUDO, 2009) apresenta o conceito de paralelismo pela Definição 23: “paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram”. Além disso, outras definições de paralelismo equivalentes a essa são adotadas no universo Euclidiano, como a de que retas paralelas preservam as distâncias entre si. Neste trabalho, adotaremos que, para dois caminhos serem paralelos, eles não se interceptarão. Note que essa definição será essencial sob a perspectiva da análise das geometrias abordadas neste trabalho, pois devido as divergências entre os matemáticos acerca do quinto postulado, que trata da noção de paralelismo, foi possível a criação e o desenvolvimento das novas geometrias abordadas neste trabalho.

A Figura 7 abaixo representa dois caminhos minimizantes do ponto A ao ponto B pela superfície lateral de um cilindro maciço, em que as projeções ortogonais desses pontos sobre uma das bases estão dispostas de maneira diametralmente opostas. Dessa forma, o caminho tracejado e o caminho contínuo descrevem caminhos que minimizam a distância entre esses pontos.

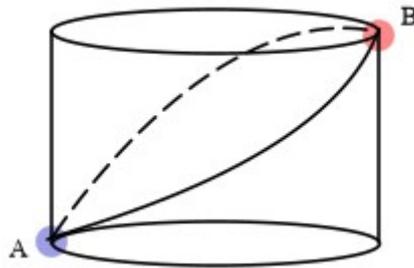


Figura 7 – Cilindro maciço e os caminhos minimizantes de A para B - Fonte: elaborada pelo autor

Já a Figura 8 apresenta uma planificação da superfície lateral, em que trivialmente os segmentos tracejados e contínuos ligam tais pontos minimizando a distância, sob uma métrica euclidiana. Vale ressaltar que, por esses dois pontos, existe mais de um caminho minimizante que os liga, ou seja, a geometria observada na superfície lateral do cilindro não é euclidiana, pois viola um de seus pressupostos.

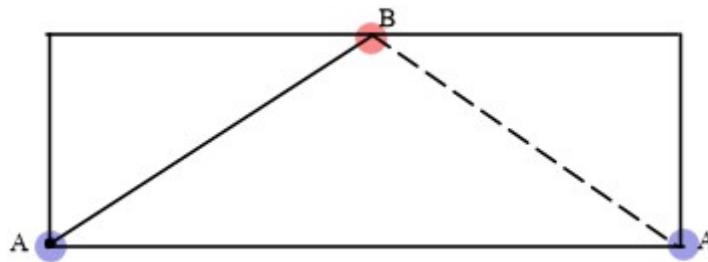


Figura 8 – Planificação da superfície lateral do cilindro - Fonte: elaborada pelo autor

Nesse sentido, os próximos capítulos serão destinados a apresentar outros tipos de geometrias que, assim como a geometria tomada na superfície do cilindro, violam o quinto postulado euclidiano.

3 Geometria do Taxista

Pense em algum lugar na sua cidade ao qual você goste muito de ir e responda: qual é a menor distância entre esse lugar e a sua casa? Pelo ponto de vista da geometria euclidiana, a menor distância entre esses lugares é descrita por uma trajetória retilínea. Todavia, na maior parte dos trajetos dentro de uma cidade, a malha urbana precisa ser levada em consideração quando precisamos nos deslocar entre dois lugares, uma vez que os edifícios e construções geram empecilhos para o deslocamento retilíneo, como o que podemos observar na Figura 9, que descreve uma trajetória entre dois lugares dada por um GPS.

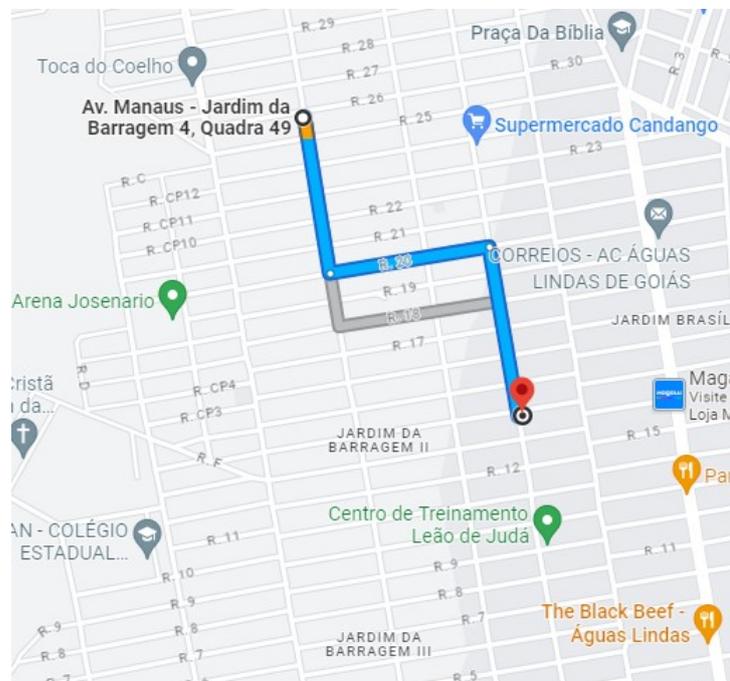


Figura 9 – Mapa GPS - Fonte: elaborada pelo autor

Sendo assim, existe a necessidade de nos deslocarmos seguindo a malha urbana com suas ruas, avenidas e calçadas. Dessa forma, a métrica a ser usada para medir distâncias nesse cenário não será a mesma de uma geometria euclidiana.

Tendo isso em vista, a Taxicab Geometry (KRAUSE, 1986), criada pelo matemático Hermann Minkowski (1864-1909), descreve um modelo consistente de uma geometria não euclidiana que pode modelar situações como a apresentada anteriormente com uma métrica específica. Seu nome deriva da ideia de os taxistas trafegarem pelas ruas de uma cidade em busca de uma métrica que atenda ao seu problema de otimização da distância, do tempo ou do gasto de combustível. Também chamada de Geometria de Manhattan,

a distância entre dois pontos na geometria do motorista de táxi corresponde ao trajeto feito por meio das ruas.

Na Geometria Táxi, a menor distância entre dois pontos de um plano não é a linha reta. A distância não é medida como o vôo de um pássaro, mas como a viagem de um táxi numa cidade, cujas ruas estendem-se vertical e horizontalmente em uma malha urbana, que convenientemente pode ser associada ao plano euclidiana. (MIRANDA; BARROSO; ABREU, 2005)

A geometria do motorista de táxi figura entre as geometrias não euclidianas que possibilitam um estudo geográfico mais próximo do mundo real do que a geometria euclidiana. Dessa forma, o universo em que essa geometria está descrita apresenta uma malha quadriculada, como da Figura 10, formada pelo conjunto de retas verticais e horizontais em um mesmo plano (CÉSAR, 2010). Segundo (KALEFF; NASCIMENTO, 2004), a malha quadriculada, nos estudos da Geometria do Táxi, se constitui um recurso que busca simplificar a medição da métrica-táxi.

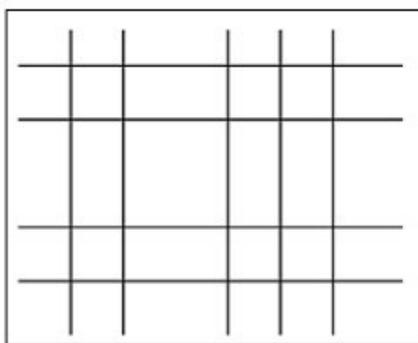


Figura 10 – Malha quadriculada - Fonte: (CÉSAR, 2010)

As noções primitivas dessa geometria são de pontos, formados pelas interseções entre as retas que compõem a malha; e blocos, formados pelo segmento de reta entre dois pontos de um mesmo quadriculado e em uma mesma reta, como exemplificado na Figura 11.

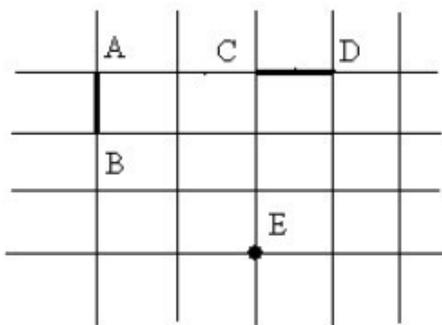


Figura 11 – Blocos formados pelos pontos A , B , C , D e E - Fonte: (MIRANDA, 1999)

Um trajeto feito por meio da malha para se deslocar de um ponto à outro é chamado de viagem, e a quantidade de blocos que delimitam esse percurso quantificam a distância percorrida. Ou seja, o comprimento ou norma de uma viagem é o número inteiro de blocos dessa viagem. Uma viagem é considerada “direta” ((MIRANDA, 1999), tradução nossa) ou dita “caminho direto” ((MIRANDA, 1999), tradução nossa) quando é a viagem que tem o menor comprimento. Adotaremos $d_t(A, B)$ para representar a norma da viagem direta entre os pontos A e B nessa geometria. A Figura 12 a seguir representa uma viagem direta entre os pontos A e B e tem-se que $d_t(A, B) = 5$.

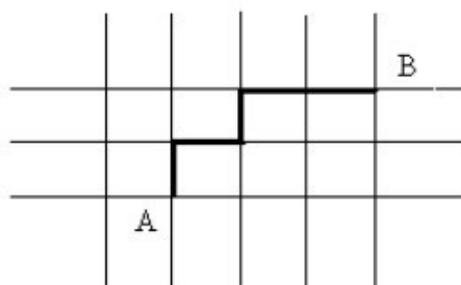


Figura 12 – Caminho direto entre os pontos A e B - Fonte: (MIRANDA, 1999)

Ademais, note que, dados dois pontos distintos, nem sempre a viagem direta possui percurso único. A Figura 13 apresenta 3 trajetórias entre A e B tais que $d_t(A, B) = 3$.

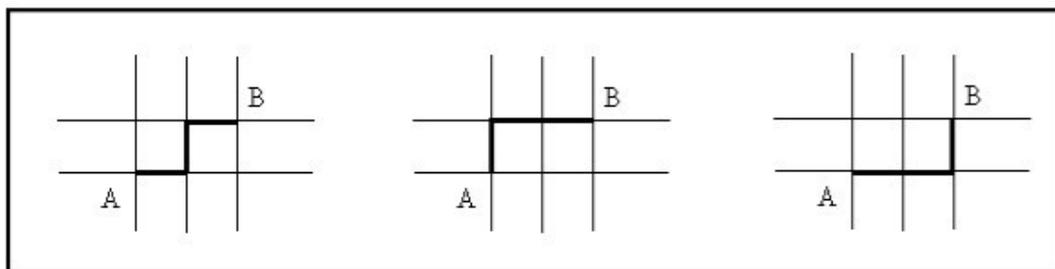


Figura 13 – Três caminhos diferentes entre A e B - Fonte: (MIRANDA, 1999)

Apesar de os três caminhos serem diferentes, todos apresentam um deslocamento vertical e dois horizontais, e esse padrão garante o menor comprimento para essa trajetória. Observe que na Figura 13, por exemplo, podemos associar cada um dos caminhos diretos à sequência de escolhas entre tomar um bloco no sentido vertical ou horizontal do ponto A até a chegada ao ponto B , ou seja, adotando H para um bloco no sentido horizontal e V para um bloco no sentido vertical, os caminhos diretos apresentados na Figura 13 são dados pelas sequências HVH , VHH e HHV . Assim, pode-se notar que os caminhos são permutações com repetições das sequências das letras que caracterizam seus respectivos blocos. Tendo isso em vista, é possível quantificar a quantidade de caminhos

que minimizam a distância entre tais pontos sob um ponto de vista combinatório de uma permutação com repetições, pois a quantidade de caminhos diretos Q entre A e B é dada pela fórmula $Q = \frac{(h+v)!}{h!v!}$, em que h é a quantidade de blocos percorridos no sentido horizontal para realizar um caminho direto entre A e B e v é a quantidade de blocos no sentido vertical.

Nesse sentido, podemos notar uma aplicação do triângulo de Pascal, que será construído considerando um ponto fixo A e os pontos X da malha que estão nas mesmas retas ou em retas paralelas abaixo e à direita desse ponto fixado. Desse modo, escreve-se a quantidade de caminhos diretos referente a cada ponto X , como na Figura 14.

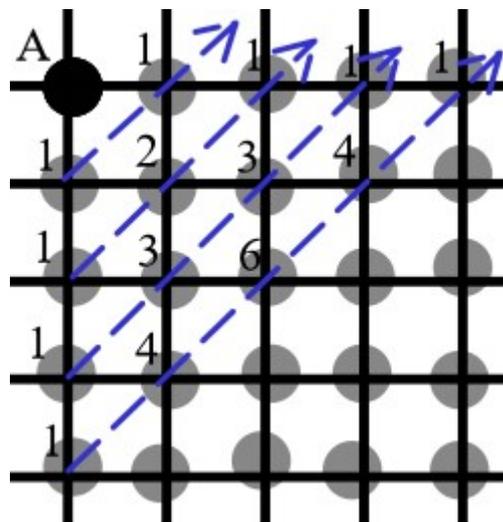


Figura 14 – Triângulo de Pascal na Geometria do Taxista - Fonte: elaborada pelo autor

Vale ressaltar que o espaço descrito anteriormente pode ser considerado um espaço métrico, e a métrica adotada para medir distâncias nesse cenário não será a mesma de uma geometria euclidiana.

Definida a métrica nesse espaço, é importante salientar o comportamento desse universo e de seus elementos, como a noção de reta, paralelismo e circunferência.

Nas preliminares, descrevemos a definição de reta, sob o ponto de vista de um conceito primitivo da geometria euclidiana. Na geometria do taxista, uma reta é dada pela:

(...) união de viagens diretas, ou seja é uma viagem estendida, no sentido de que se considera sempre o caminho mais curto entre 2 pontos quaisquer dessa viagem. (MIRANDA; BARROSO; ABREU, 2005)

Ademais, adotaremos a noção de caminhos minimizantes paralelos, estabelecidas nas preliminares, para compreender a posição relativa entre as retas da geometria apresentada.

Dadas as definições de reta e de paralelismo, pode-se comprovar que a geometria-táxi não é euclidiana, uma vez que viola o quinto postulado.

Na Figura 15, pode-se observar que, dado um ponto C e a reta que passa pelos pontos A e B , denotada por AB , foi possível construir duas retas distintas que passam por C e são paralelas à reta AB , contradizendo o quinto postulado de Euclides.

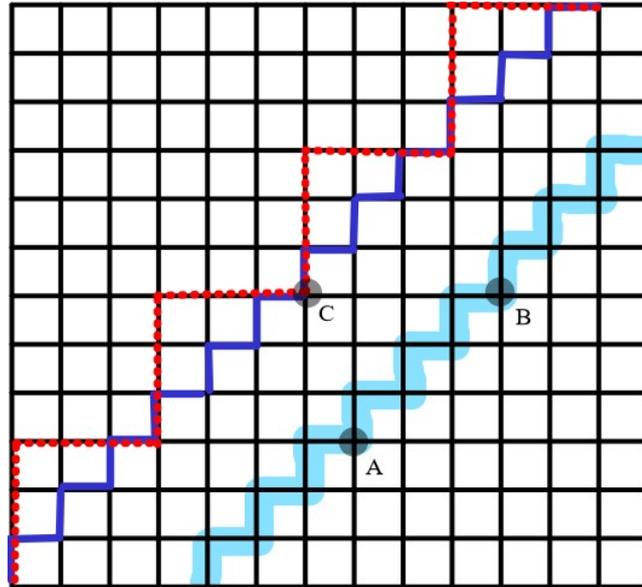


Figura 15 – Reta AB e duas retas paralelas a ela que passam pelo ponto C - Fonte: elaborada pelo autor

Por meio da definição de circunferência como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo, pode-se construir uma circunferência nessa geometria levando em consideração o universo formado pelas retas verticais e horizontais da malha.

Na Figura 16, o ponto fixo C corresponde ao centro de uma circunferência de raio igual a 2 blocos formadas pelos pontos $P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7$ e $P8$.

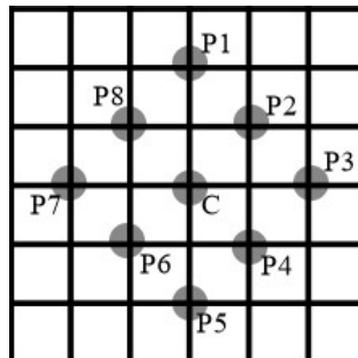


Figura 16 – Circunferência de raio 2 e centro C na geometria do taxista - Fonte: elaborada pelo autor

De acordo com (KALEFF; NASCIMENTO, 2004), as circunferências dessa geometria podem auxiliar na construção que possibilita encontrar com maior facilidade a distância entre um ponto e uma reta euclidiana no universo da geometria do taxista. Entretanto, faz-se necessário observar que o ângulo de inclinação da reta euclidiana, em relação às retas que determinam a malha quadriculada, influencia no caminho direto que delimita a distância do ponto à reta. Ademais, existe a possibilidade de o caminho direto entre o ponto e a reta não ser único.

No caso I, apresentado na Figura 17, pode-se observar que, quando a reta euclidiana se sobrepõe a uma reta que determina a malha dessa geometria, a viagem direta entre o ponto dado e essa reta será única e será equivalente ao percurso entre ponto e reta da geometria euclidiana, logo, em ambas geometrias, a distância seria a mesma. Note que o ponto da reta euclidiana que determina a viagem curta entre o ponto dado e a reta euclidiana pode ser obtido através da intersecção entre a circunferência de menor raio que possua intersecção não vazia com a reta euclidiana dada.

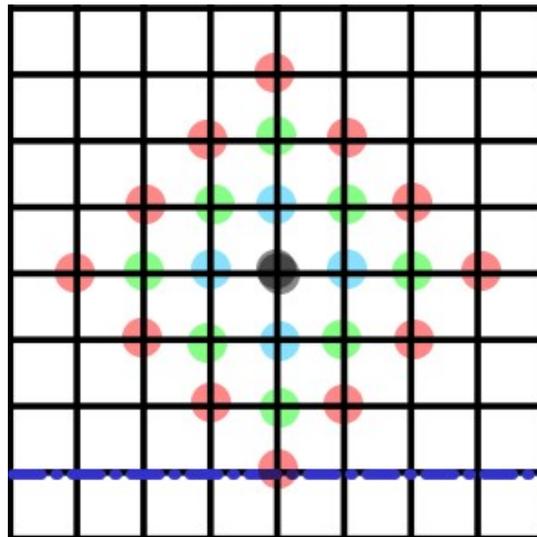


Figura 17 – Caso I - Fonte: elaborada pelo autor

No caso II, apresentado na Figura 18, pode-se observar que, quando a reta euclidiana não se sobrepõe a uma reta que determina a malha dessa geometria e a menor angulação da reta com relação às retas horizontais da malha difere de 45° , a viagem direta entre o ponto dado e essa reta será única, como no caso I, e a maneira de encontrar o ponto da reta que possui menor distância do ponto dado é análoga ao caso I.

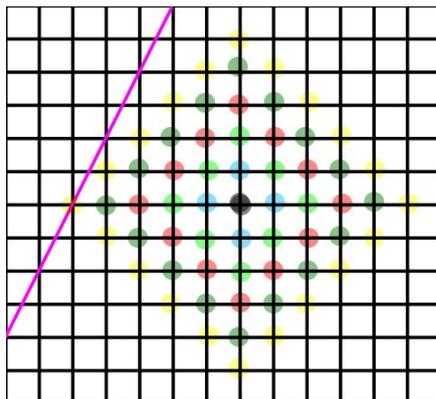


Figura 18 – Caso II - Fonte: elaborada pelo autor

Contudo, no caso III, apresentado na Figura 19, a reta euclidiana não se sobrepõe a uma reta que determina a malha dessa geometria, e a menor angulação da reta com relação às retas horizontais da malha é de 45° . Nesse caso, seguindo o procedimento sugerido nos casos anteriores, observa-se que o ponto da reta euclidiana que minimiza a distância para o ponto dado não é único, contrapondo um princípio euclidiano.

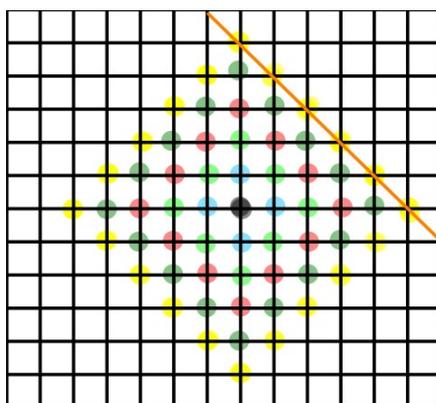


Figura 19 – Caso III - Fonte: elaborada pelo autor

Dessa forma, pode-se observar que a Geometria de Manhattan diverge de princípios euclidianos clássicos e pode ser caracterizada como uma geometria não euclidiana que, segundo (KALEFF; NASCIMENTO, 2004), levam os estudantes a perceberem a existência de outras geometrias, levando-os a despertar a curiosidade na investigação dos diferentes ambientes geométricos e a desenvolver um olhar investigativo sob uma nova perspectiva acerca de tópicos matemáticos.

4 Curvaturas

Nos próximos capítulos do trabalho, abordaremos as geometrias elíptica e hiperbólica, respectivamente. Dessa forma, faz-se necessária uma melhor compreensão de suas superfícies. Sendo assim, estabeleceremos algumas noções básicas sobre curvatura, que possibilitarão a melhor diferenciação entre as superfícies futuramente abordadas. Caso o leitor tenha interesse em aprofundar seus conhecimentos sobre o assunto, pode ler o trabalho de (CARMO, 2005).

Primeiramente, abordaremos o conceito de curvatura de curvas. Uma forma de compreender o conceito de curvas é associando-as ao caminho traçado por um ponto que se move no espaço. Analisando as duas curvas s e r da Figura 20, a propriedade geométrica que as diferencia é denominada curvatura, que está diretamente associada ao quanto a curva está “encurvada”.

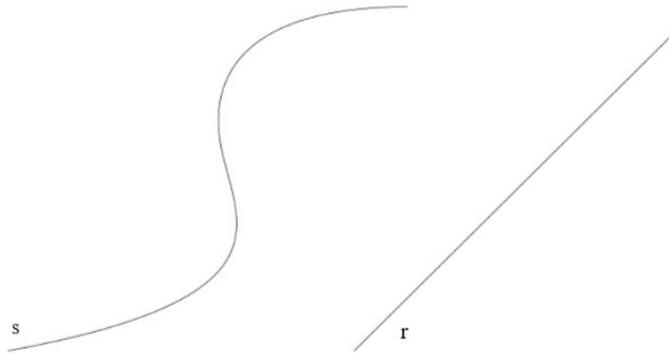


Figura 20 – Curvas r e s - Fonte: elaborada pelo autor

A definição de curva está associada à trajetória percorrida por um ponto. Por outro lado, a curvatura está associada ao nível de alteração da trajetória do ponto. Sendo assim, podem-se estabelecer analogias das curvas com trajetões realizados por carros e da alteração da posição do volante com a noção de curvatura. Por exemplo, quando percorremos uma “pista retilínea”, não é necessário alterar o posicionamento do volante, logo, a ausência de alteração, dada a não mudança na trajetória, caracteriza uma curvatura nula.

Quando observamos trajetórias circulares, pode-se notar que, ao percorrer rotatórias, nas vias urbanas, quanto maior seu raio, menos necessária será a alteração no posicionamento do volante, logo, quanto maior o raio de curva circular, que descreve uma circunferência, menor será sua curvatura. Ademais, caso se mantenha travada a posição de um volante ao descrever uma trajetória não retilínea, ele irá percorrer uma trajetória que determinará uma circunferência, ou seja, a curvatura nessa trajetória circular é constante.

Desse modo, de acordo com (MINHÓS, 2011), podemos estabelecer intuitivamente duas propriedades da curva, que ajudam a compreender a noção de curvatura:

1. A curvatura de uma linha reta deve ser zero; e
2. A curvatura de uma circunferência deve ser constante e inversamente proporcional ao seu raio. Assim, sendo C a curvatura da circunferência e R seu raio, tem-se que $C = \frac{1}{R}$.

Para possibilitar uma forma precisa e válida de medir a curvatura, estabelecendo a ela um significado mais preciso e válido para um ponto qualquer da curva, continuaremos com a analogia anterior. Note que, associando a curva com um trajeto descrito por um carro em uma rodovia, quando percorremos uma “pista curva”, é necessária a alteração do posicionamento do volante em cada momento da trajetória, exigindo uma variação diferente na posição do volante. Ou seja, cada ponto da trajetória possui uma curvatura diferente e, dessa forma, cada curva se distingue da outra, de acordo com a variação dessa curvatura. Assim, são determinadas, na linguagem de trânsito, curvas “mais fechadas” e curvas “mais abertas”.

Dessa maneira, a curvatura da curva no ponto P de uma curva qualquer será igual à curvatura da circunferência de maior raio que tangencia a curva no ponto P pelo seu lado côncavo, denominada círculo osculante, como pode-se observar na Figura 21.

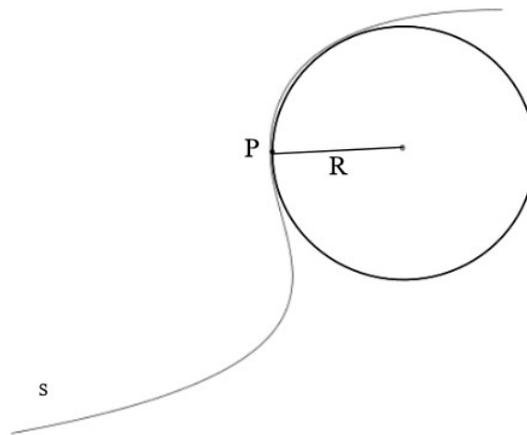


Figura 21 – Círculo Osculante - Fonte: elaborada pelo autor

Generalizando, a tendência é que, quando pensarmos em superfícies, a curvatura em um determinado ponto seria dada pelo inverso do raio de uma suposta “esfera osculante”. Entretanto, dado um determinado ponto P de uma superfície, existe uma infinidade de curvas, e cada uma delas possuirá uma curvatura em P , como se pode observar na Figura 22.

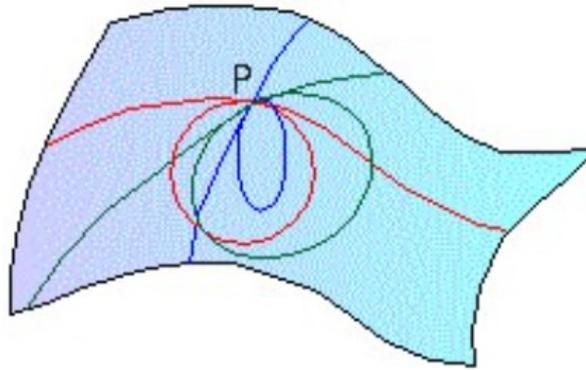


Figura 22 – Superfície I - Fonte: (UFC, 2022)

Tendo isso em vista, o matemático Gauss (1777-1855) estabeleceu em um de seus trabalhos uma maneira de determinar a curvatura de uma superfície que possibilitou o avanço nos estudos da topologia e da geometria diferencial.

A curvatura de Gauss ou curvatura gaussiana, em um ponto P qualquer da superfície, é definida pelo produto da curvatura da curva em P que possui maior círculo osculante em P pela curvatura da curva em P que possui menor círculo osculante em P . Note que, na Figura 23, C_1 determina o menor círculo osculante e C_2 determina o maior círculo osculante que passam por P .

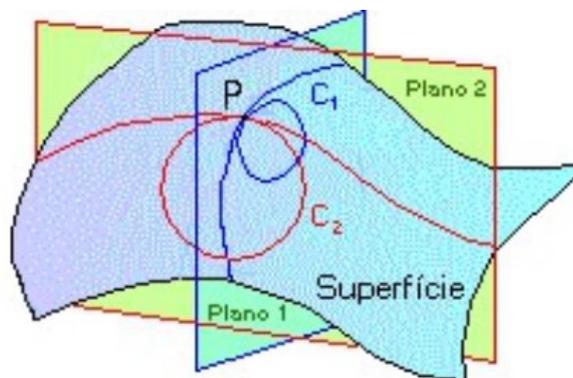


Figura 23 – Superfície II - Fonte: (UFC, 2022)

Sendo R_1 o raio de C_1 e R_2 o raio de C_2 , a curvatura K de Gauss na superfície no ponto P , em módulo, é dada por:

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

Com relação ao sinal da curvatura de Gauss em um ponto P de uma superfície, ele será:

- Positivo: se os dois círculos osculantes em P ficam no mesmo lado da superfície, como no caso da superfície A da Figura 24.

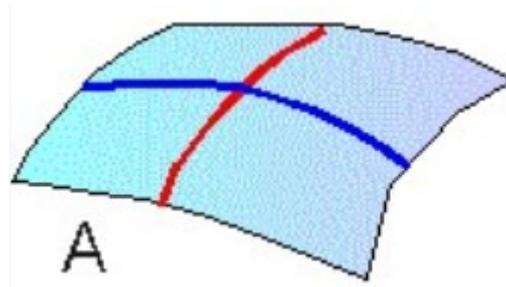


Figura 24 – Superfície III - Fonte: (UFC, 2022)

- Negativo: se os dois círculos osculantes em P ficam em lados opostos da superfície, como no caso da superfície B da Figura 25.

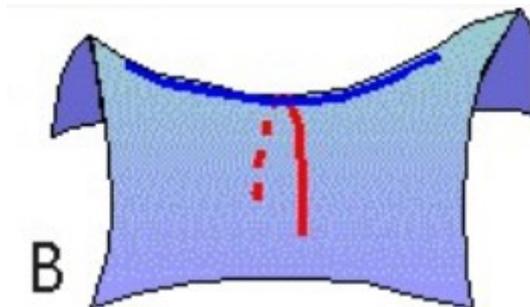


Figura 25 – Superfície IV - Fonte: (UFC, 2022)

- Nulo: se for possível estabelecer uma curva em P de curvatura nula, como no caso da superfície C da Figura 26.

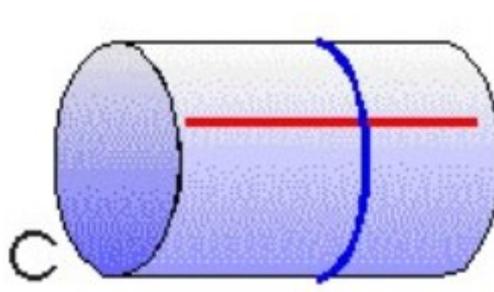


Figura 26 – Superfície V - Fonte: (UFC, 2022)

Todavia, segundo o Teorema Egregium de Gauss, a curvatura que levava seu nome pode ser definida intrinsecamente, fato que não iremos aprofundar neste trabalho. Contudo, esse resultado possibilita estabelecer a curvatura gaussiana como um invariante geométrico da superfície, ou seja, superfícies obtidas por meio de transformações isométricas possuem a mesma curvatura e não é possível sobrepor duas superfícies de curvaturas diferentes.

Dessa maneira, podemos observar que, juntando dois lados paralelos de uma folha de papel A4, podemos obter uma superfície cilíndrica, e ambas possuem curvatura nula. Além do mais, esse fato ajuda a explicar também que, como a curvatura da folha é diferente da curvatura da esfera, é impossível fazer um mapa em uma folha de papel que possa retratar o globo terrestre de maneira correta sem distorções nas áreas dos países. Ademais, por raciocínio análogo, é impossível embrulhar uma bola de futebol sem deixar sobras no papel, como se pode observar na Figura 27 do experimento realizado por (DELAI; FRANCO, 2010).

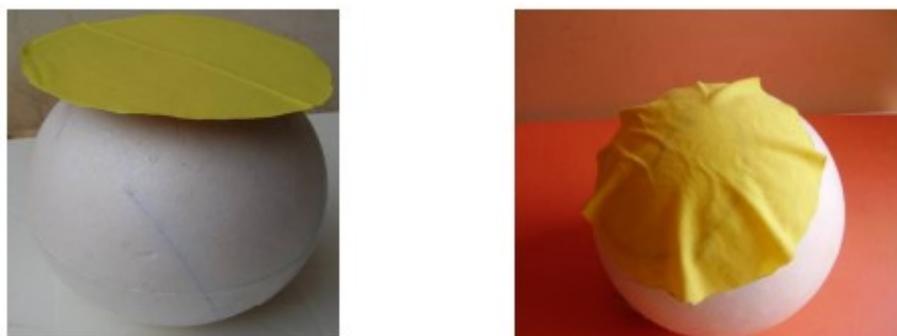


Figura 27 – Superfície VI - Fonte: (DELAI; FRANCO, 2010)

5 Geometria Elíptica

Antes de iniciar o presente capítulo, proponho o seguinte enigma ao leitor: Certa vez, uma pessoa, fugindo de um urso, decidiu se deslocar à mesma distância para o sul, depois para o oeste e, por fim, para o norte. Sabendo que a pessoa acabou parando no mesmo lugar em que iniciou sua trajetória, qual é a cor do urso? Inicialmente, o questionamento aparenta não ter relação com a hipótese apresentada e, pelo ponto de vista da geometria euclidiana, sob a perspectiva de uma superfície plana, não faria sentido algum a pessoa terminar o trajeto no ponto inicial. Dessa forma, para tentar compreender melhor a situação apresentada e tentar responder à curiosa pergunta, será necessário compreender melhor como se estabelece uma nova geometria, que possibilitará compreender melhor o enigma apresentado. Assim como no capítulo anterior, este será destinado à apresentação de uma outra geometria não euclidiana, a geometria esférica.

Com a substituição que se fez do quinto postulado, surgiram duas geometrias não euclidianas clássicas: a geometria elíptica e a geometria hiperbólica. Na geometria hiperbólica, que será tema do próximo capítulo, o enunciado “dado um ponto não pertencente a uma reta, existe mais de uma reta que passa por esse ponto e é paralela à reta dada” é o substituto do axioma das paralelas. Enquanto isso, na geometria elíptica, postula-se que não existe nenhuma paralela que passa por esse ponto fora da reta dada.

Segundo (COUTINHO, 1989, p. 65), o matemático alemão Georg Bernhard Riemann, discípulo de Gauss, foi o responsável por estabelecer as bases da geometria elíptica ao propor que “não existem paralelas a uma reta dada”, conhecido como postulado de Riemann. Ainda de acordo com (COUTINHO, 1989, p. 65), essa possibilidade de geometria foi considerada pelo matemático pela primeira vez, em sua aula inaugural para admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen em 1851.

Com intuito de possibilitar a visualização dessas novas geometrias e suas propriedades, modelos associados a certos tipos de superfícies foram adotados. No caso da geometria elíptica, a geometria projetiva, a geometria estereográfica e a geometria hiperesférica são exemplos de modelos. Neste trabalho, apresentaremos o modelo da geometria esférica, um caso particular de fácil visualização da geometria hiperesférica em uma superfície de curvatura positiva constante em que serão explorados os conceitos e as propriedades da geometria elíptica proposta por Riemann. Dessa maneira, adotaremos nesse capítulo a nomenclatura Geometria Esférica para debater as propriedades da Geometria Elíptica no modelo esférico.

No modelo esférico, a noção euclidiana de ponto segue preservada, todavia, o conceito dado à reta será estabelecido pela noção de caminho minimizante, abordada

no capítulo preliminar. Dessa forma, como afirma (COUTINHO, 1989, p. 67), deve-se abandonar a noção de “estar entre” e a ideia de que a reta é ilimitada. Considera-se uma reta, nessa geometria, os círculos máximos determinados pela interseção entre a superfície esférica e os planos que contêm seu centro, como se pode observar na Figura 28 a seguir.

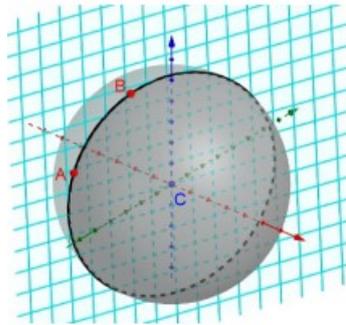


Figura 28 – Reta Esférica - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)

Note que, como mostra a Figura 29, para os pontos A e B da superfície esférica, existem infinitas curvas que possuem os pontos como extremidades.

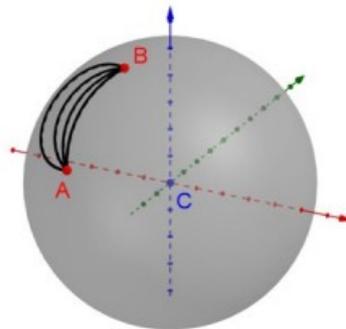


Figura 29 – Curvas com Extremidades em A e em B - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)

Todavia, a curva que será considerada um segmento nessa geometria é dada pelo menor arco do círculo máximo que passa por esses pontos, conforme mostra a Figura 30.

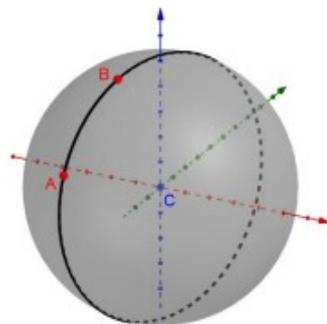


Figura 30 – Segmento AB - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)

Logo, a menor distância entre dois pontos, nesse modelo, será estabelecida pela medida do arco que determina o segmento esférico, chamado de geodésica. Por outro lado, as semicircunferências máximas são limitantes para a distância entre dois pontos quaisquer, ou seja, a distância entre dois pontos na superfície esférica nunca será maior que πr , em que r é o raio da esfera, e será igual a πr quando os pontos forem antípodas.

A unicidade da geodésica é garantida pelo postulado que determina que três pontos não colineares determinam um plano, uma vez que, dados dois pontos distintos e o centro da esfera, nota-se que eles são trivialmente não colineares, logo, determinam um plano cuja intersecção com a esfera determina um círculo máximo que contém o arco que minimiza as distâncias entre os pontos dados.

Uma curiosidade geográfica associada a esse fato é que o trajeto que minimiza a distância percorrida por um avião para se deslocar entre dois pontos de um mesmo trópico não é descrito sobre o próprio trópico, pelo fato de a circunferência determinada pelo trópico sobre a superfície esférica não ser um círculo máximo, como se pode observar na Figura 31, e será melhor discutida quando for apresentado o conceito de circunferência no modelo da esfera.



Figura 31 – Trópicos e Geodésicas - Fonte: (NETO, 2023)

Ademais, vale notar que o meridiano de Greenwich e a linha do Equador determinam círculos máximos e, portanto, não se aplicam à propriedade descrita anteriormente.

Estabelecida a noção de reta nesse modelo, é possível compreender o que Riemann considerou como ponto de partida, que não existem paralelas à retas dadas. Note que, de acordo com a Figura 32 e a noção de paralelismo estabelecida nas preliminares, quaisquer duas circunferências máximas se interceptam.

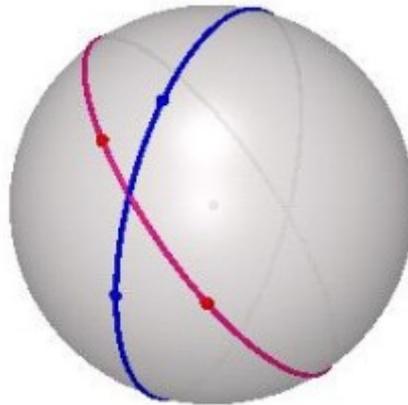


Figura 32 – Circunferências máximas e paralelismo - Fonte: (RIBEIRO, 2013)

Vale ressaltar que elas se interceptam em dois pontos diametralmente opostos, ditos pontos antípodas, como os pontos de intersecção entre os caminhos minimizantes da Figura 32. Ademais, dados dois pontos antípodas, existem infinitas retas esféricas que passam por esses pontos, como se pode observar na Figura 33.



Figura 33 – Retas esféricas determinadas por pontos antípodas - Fonte: (ANTUNES, 2009)

Esse fato contrapõe a afirmativa euclidiana da unicidade da reta que passa por quaisquer dois pontos.

Outra definição importante para a compreensão das propriedades dessa geometria é a de ângulo esférico, que é dada pelo menor ângulo diédrico entre os planos que dão origem a cada uma das retas esféricas, como se observa na Figura 34 a seguir.

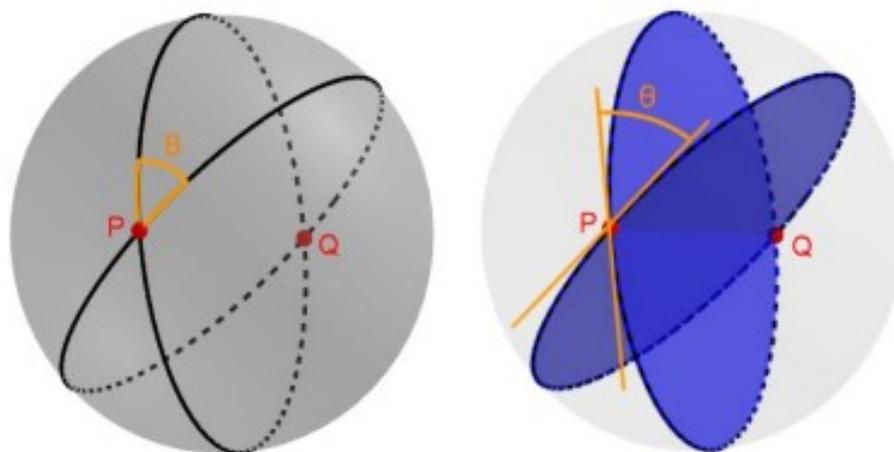


Figura 34 – Ângulo esférico - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)

Na Figura 35 a seguir, o triângulo ABC representa um triângulo nessa geometria, chamado de triângulo esférico, que é determinado por três pontos não pertencentes à mesma reta esférica e sendo determinado pelas geodésicas que ligam, dois a dois, os três pontos.

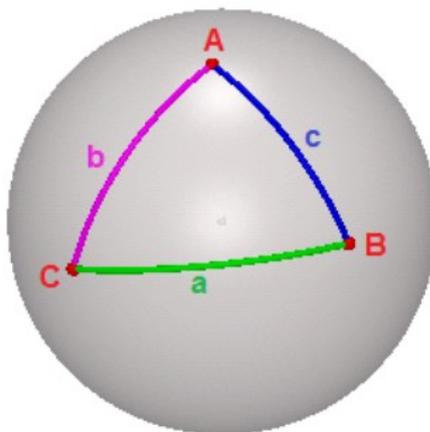


Figura 35 – Triângulo esférico - Fonte: (RIBEIRO, 2013)

Segundo (OLIVEIRA, 2022, p. 51), a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico não é constante e o máximo que se pode afirmar a respeito dessa soma é que ela é superior a 180° e inferior a 540° . Por exemplo, tomando o triângulo esférico ABC , de uma esfera de centro na origem O do sistema cartesiano, formado pelas geodésicas que delimitam um octante e estão contidas nos planos xOy , xOz e yOz , é de simples verificação que cada um de seus ângulos internos medem 90° e, portanto, a soma dos ângulos internos de ABC mede 270° , como mostra a Figura 36 a seguir.

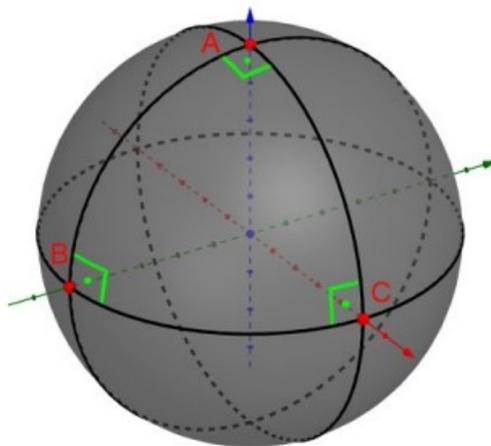


Figura 36 – Triângulo esférico de um octante - Fonte: (OLIVEIRA, 2022)

Conforme (COUTINHO, 1989, p. 79), pode-se classificar os triângulos esféricos quanto aos seus ângulos como retângulo, birretângulo e trirretângulo, ou seja, com um, dois ou três ângulos retos, respectivamente.

Um curioso resultado a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico se refere à diferença entre essa soma e o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria euclidiana, que é π radianos. Essa diferença, que no caso do modelo esférico será positiva, é chamada de excesso esférico ou defeito do triângulo esférico. Note que, como a soma dos ângulos internos não é constante, o defeito do triângulo também não é. Por outro lado, o excesso é sempre proporcional à área do triângulo esférico e, em particular, no caso da esfera unitária, o defeito será igual à área do triângulo.

Esse resultado é um caso particular do Teorema de Gauss Bonnet, e sua demonstração pode ser encontrada no livro de (CARMO, 2005). Neste trabalho, demonstraremos o caso particular da esfera unitária com triângulo esférico de ângulos internos α, β e γ com e sendo o excesso desse triângulo.

Demonstração de que o excesso esférico é positivo. Cada ângulo interno é delimitado por dois círculos máximos que delimitam uma cinta esférica, como mostra a Figura 37 a seguir.

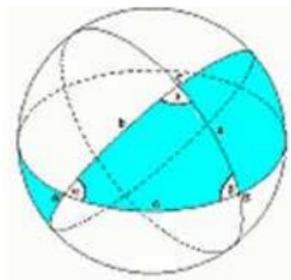


Figura 37 – Cinta esférica I - Fonte: (PRESMIC, 2014)

Note que a área dessa cinta está para a área da superfície esférica assim como seu ângulo está para π . Logo, a área dessa cinta vale 4α . Analogamente, a área das outras cintas, apresentadas na Figura 38 abaixo, são 4β e 4γ .

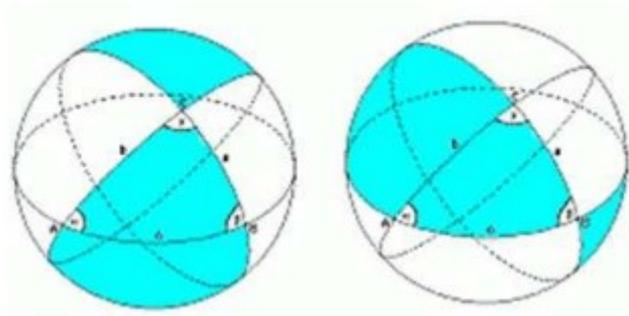


Figura 38 – Cintas esféricas II e III - Fonte: (PRESMIC, 2014)

Note que a soma das áreas das três cintas equivale à área da superfície esférica mais quatro vezes a área do triângulo esférico. Ou seja, tem-se que:

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4A,$$

sendo A a área do triângulo esférico. Assim, obtemos que:

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \pi = A,$$

e, portanto, $e = A > 0$. □

(Para melhor visualização das cintas e as relações de áreas presentes na demonstração, sugere-se ao leitor o uso de um material concreto, como uma bola de isopor, para melhor compreensão.)

Ademais, preservando as definições de circunferência e mediatriz, pode-se compreender esses lugares geométricos no modelo esférico de modo análogo ao realizado com a geometria do taxista apresentada neste trabalho.

Note que, dado um ponto P na superfície esférica de raio r e uma constante real d , menor ou igual à metade do comprimento de um círculo máximo, o conjunto dos pontos da superfície que distam d do ponto dado determinam uma circunferência, e esse lugar geométrico é considerado uma circunferência esférica de centro P e raio d . Em particular, caso a distância d seja um quarto do comprimento do círculo máximo, o lugar geométrico será dado por uma circunferência máxima e, caso contrário, será considerado uma circunferência menor, como se pode observar na Figura 39, uma circunferência menor de centro P e raio d . Por exemplo, ao considerar o globo terrestre uma esfera, um trópico determina uma circunferência na superfície terrestre, pois a circunferência dada pelo trópico apresenta os pontos que equidistam dos pólos.

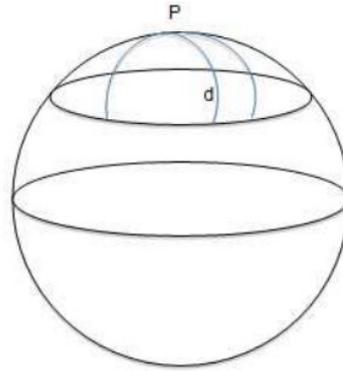


Figura 39 – Circunferência Esférica - Fonte: (PRESMIC, 2014)

Diferentemente da geometria euclidiana, em que a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é constante, na geometria esférica, a razão entre a circunferência esférica e o seu diâmetro não será constante. Note que, considerando d o raio da circunferência esférica e r o raio da esfera, como apresentado anteriormente, tomando $d = \frac{\pi r}{2}$, a circunferência esférica será máxima e, portanto, a razão k , entre o comprimento da circunferência esférica, $2\pi r$, e o diâmetro dela, $2d$, será igual a 2. Por outro lado, ao adotar $d = \pi r$, a circunferência esférica de centro P e raio d será dada pelo ponto antípoda ao ponto dado, logo, essa circunferência terá comprimento nulo, e a razão k será igual a 0.

Note que, dados dois pontos A e B na superfície esférica de raio r , a circunferência máxima que passa pelo ponto médio do segmento AB e seu antípoda é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B dessa superfície e, por definição, é a mediatriz do segmento AB , como se pode observar na Figura 40 a seguir.

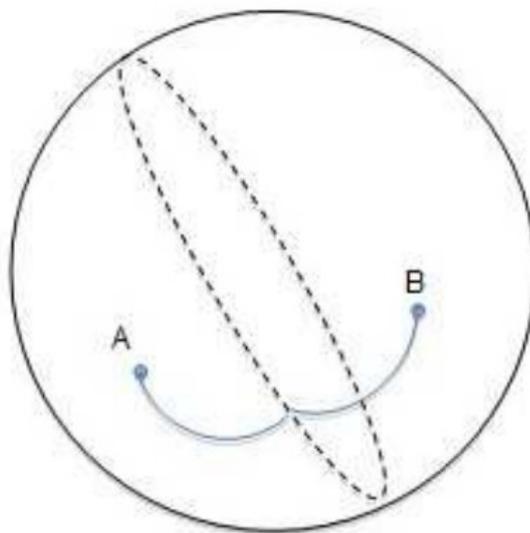


Figura 40 – Mediatriz Esférica - Fonte: (PRESMIC, 2014)

Portanto, a partir da discussão realizada neste capítulo sobre uma proposta de geometria não euclidiana, podemos retomar o enigma apresentado em seu início e concluir que o urso é branco, por se tratar de um urso polar, pois somente nos polos terrestres é possível realizar o trajeto descrito e parar no ponto inicial, supondo a superfície terrestre uma superfície esférica.

6 Geometria Hiperbólica

Assim como nos outros capítulos, destino ao leitor uma nova reflexão, desta vez, sobre o caso hipotético de uma cidade redonda imaginária, em que, à medida em que uma pessoa se afasta do centro dessa cidade, ela e tudo em sua volta reduzem de tamanho progressivamente, de modo que essa redução seja imperceptível para ela e, caso a pessoa, partindo do centro da cidade, ande metade da distância até a borda da cidade, ela teria metade do tamanho inicial, assim como todas as coisas ao seu redor, como se pode observar na Figura 41.

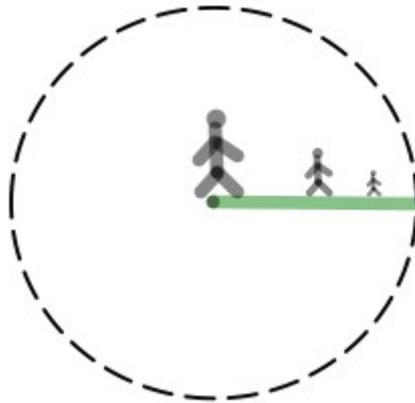


Figura 41 – Cidade Imaginária - Fonte: elaborada pelo autor

Ademais, suponha que seriam necessários mil passos para um indivíduo chegar à borda da cidade partindo do centro. Tendo seu tamanho no centro da cidade como referência, quantos passos seriam necessários para que a pessoa consiga chegar à borda da cidade após ter alcançado metade do trajeto entre o centro e a borda da cidade? Curiosamente, ainda restariam mil passos para chegar ao seu destino, pois, como o tamanho do seu passo foi reduzido à metade do passo inicial, para alcançar a borda andando até a outra metade do trajeto, seriam necessários mais quinhentos passos com o comprimento do passo inicial, que equivaleriam aos mil passos com seu novo tamanho, que equivale à metade do tamanho anterior.

Outra análise que se pode realizar é a de que a pessoa do exemplo nunca conseguiria efetivamente chegar à borda da cidade, devido à distorção do espaço causada pela diminuição do tamanho das coisas ao longo da cidade, como observado no exemplo do parágrafo anterior. Dessa forma, pode-se concluir que essa cidade possui tamanho infinito, apesar de ela ser limitada, já que seriam necessários exatamente mil passos da pessoa do início do exemplo para alcançar sua borda.

Outro questionamento que deixo ao leitor sobre essa cidade peculiar é que, dados os pontos A e B da cidade e o traçado vermelho entre os pontos A e B , destacados na Figura 42, pode-se afirmar que a trajetória do tracejado é a que determina o percurso com a menor quantidade de passos entre os pontos A e B da cidade? Se a resposta for negativa, como deveria ser essa trajetória?

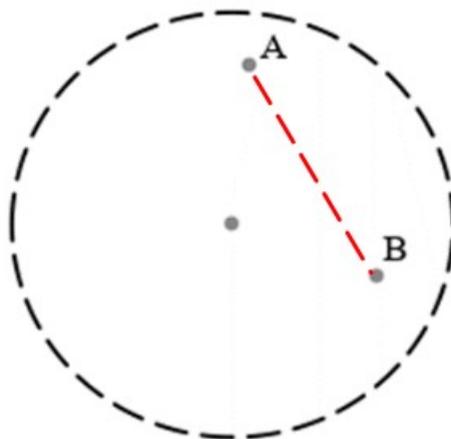


Figura 42 – Trajetória AB proposta - Fonte: elaborada pelo autor

Ademais, como alguém nessa cidade poderia perceber e comprovar matematicamente que a cidade possuiria essas distorções em seu espaço?

Para responder a essas últimas perguntas, será conveniente um embasamento teórico de mais um tipo de geometria não euclidiana, a geometria hiperbólica.

No capítulo anterior, em que falamos sobre a geometria elíptica, a substituição do quinto postulado pela negação da existência de retas paralelas originou uma nova geometria: a geometria elíptica, em que abordamos suas propriedades no modelo da esfera. Neste capítulo, a temática abordada será a geometria hiperbólica, que surgiu com a adoção de que “dado um ponto não pertencente a uma reta, existe mais de uma reta que passa por esse ponto e é paralela à reta dada” como substituto do axioma das paralelas. Essa nova geometria foi desenvolvida por Nicolai Lobachevsky e Janos Bolyai, de forma independente mas quase simultânea.

Segundo (EVES, 2004, p. 543), Lobachevsky foi o primeiro a publicar sua teoria sobre geometrias não euclidianas em 1829. Por ter sua obra publicada inicialmente em russo, seu trabalho ficou desconhecido pelo mundo acadêmico por um certo período, e, somente em 1840, quando ele publicou o tratado “Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas” em alemão, sua obra ganhou repercussão. Neste trabalho, segundo (RIBEIRO, 2012, p. 50), o russo define retas não secantes, retas paralelas, ângulo de paralelismo e chegou a apresentar o teorema cuja a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° . Além do mais, o texto também apresentou deduções em trigonometria

que figuram entre as partes mais importantes de seu trabalho.

Já o húngaro Janos Bolyai, de acordo com (EVES, 2004, p. 542), recebeu incentivos de seu pai, Farkas Bolyai, para estudar o postulado das paralelas, pois anteriormente Farkas havia se interessado pelo problema. Por volta de 1823, Janos comunicou ao seu pai, por meio de uma carta, o seu interesse em publicar seus estudos, mas explicou que precisaria de um tempo para organizar seus materiais. Naquele momento, ele já previa uma nova descoberta: “do nada eu criei um universo novo e estranho”. Segundo (RIBEIRO, 2012, p. 54), o matemático publicou seu trabalho intitulado “Ciência Absoluta do Espaço” como apêndice de um livro de seu pai.

Para Eves, a publicação do trabalho dos Bolyais ocorreu em 1832, mesmo Bolyai tendo submetido seus manuscritos ao seu pai em 1829. Vale ressaltar que o húngaro não aprofundou suas ideias como fez o russo e, por isso, essa geometria não euclidiana também ficou conhecida como geometria de Lobachevsky.

Assim como na geometria elíptica, a geometria hiperbólica possui alguns modelos que ajudam a representar e facilitar a visualização de seus conceitos e propriedades. Neste trabalho, apresentaremos brevemente os modelos da pseudoesfera de Beltrami e do disco de Klein, mas destinaremos maior foco ao modelo do disco de Poincaré. Por fim, mostraremos uma curiosa relação entre o crochê e a geometria hiperbólica.

Conforme (VOGADO et al., 2020), foi Eugênio Beltrami que provou definitivamente que o quinto postulado não podia ser demonstrado, em 1868. Dessa forma, ele foi responsável por um modelo parcial para a geometria hiperbólica, com o uso da superfície originada pela revolução da curva denominada tratriz em torno de sua assíntota, uma superfície de curvatura negativa denominada pseudoesfera, como se pode observar na Figura 43.

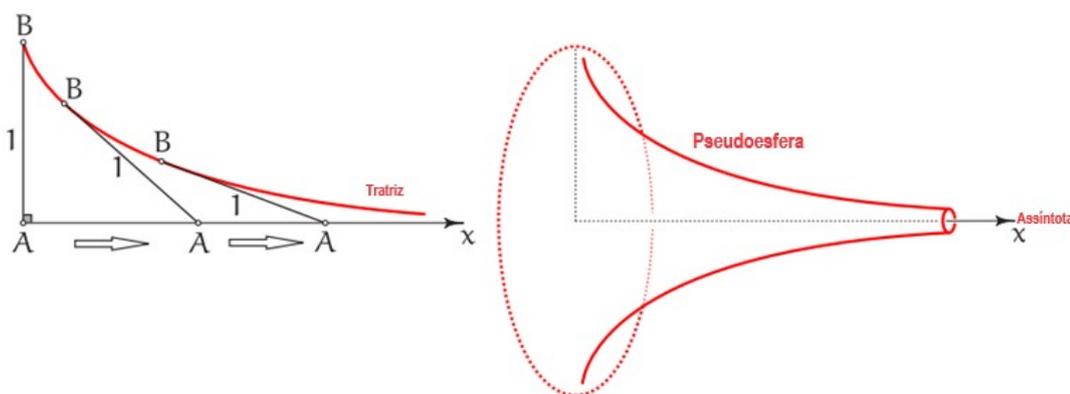


Figura 43 – Pseudoesfera e tratriz - Fonte: (AGUSTINI, 2022)

Na Figura 44, pode-se observar o axioma de Lobachevsky no modelo da Pseudoesfera, em que se pode perceber a existência das retas s e s' , que são paralelas à reta r

dada e passam pelo ponto P exterior a r .

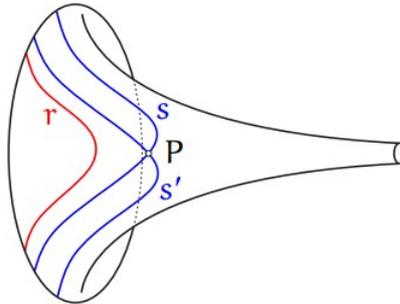


Figura 44 – Pseudoesfera - Fonte: (AGUSTINI, 2022)

Esse modelo representava o plano hiperbólico de modo parcial, pois não era possível estender as retas hiperbólicas de modo conveniente e, segundo (AGUSTINI, 2022, p. 59), o formato das retas hiperbólicas no modelo apresentado é difícil de ser descrito, como se pode perceber na imagem anterior. Porém, Agustini descreve que as retas hiperbólicas detêm as propriedades dos caminhos minimizantes apresentados nas preliminares. O autor também retrata que é possível estabelecer uma isometria entre o modelo da pseudoesfera com o modelo do disco de Poincaré, que apresentaremos posteriormente.

Após o trabalho de Beltrami, em 1871, o geômetra Felix Klein (1849-1925) introduziu um modelo completo para a geometria hiperbólica, conhecido como o modelo do disco de Klein ou simplesmente modelo de Klein. Nesse modelo, o espaço hiperbólico, denominado plano de Lobachevsky, é dado pelo interior de um círculo euclidiano, em que sua circunferência não está contida no seu espaço e as retas são dadas pelas cordas do círculo, com exceção de suas extremidades, que são tomadas por bolas abertas para mostrar que não pertencem às retas, como mostra a Figura 45 a seguir.

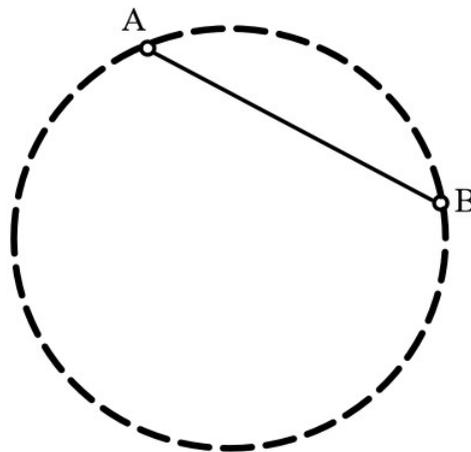


Figura 45 – Reta AB no disco de Klein - Fonte: elaborada pelo autor

Dessa forma, para garantir a extensão infinita dentro do disco, a métrica adotada faz com que a unidade de medida de comprimento de um segmento seja variável, ou seja, tamanho diminui na proporção em que se aproxima da fronteira do plano, tornando uma reta qualquer nesse plano infinita.

Observe, na Figura 46 a reta AB e o ponto P exterior à ela. Note que, segundo a definição de paralelismo estabelecida no capítulo de preliminares, página 27, existe mais de uma reta paralela à reta AB que passa pelo ponto P , fato justificado pelas retas não terem ponto em comum.

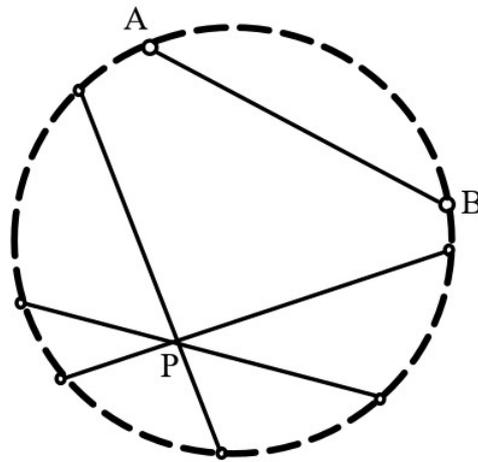


Figura 46 – Paralelas à reta AB que passam pelo ponto P no disco de Klein - Fonte: elaborada pelo autor

Ademais, os pontos A e B da borda do disco não fazem parte do espaço hiperbólico que estamos adotando, todavia servem de referência para a localização das retas nessa geometria. Dessa forma, podemos adotar retas AP e BP que sejam paralelas à reta AB , conforme podemos observar na Figura 47 abaixo.

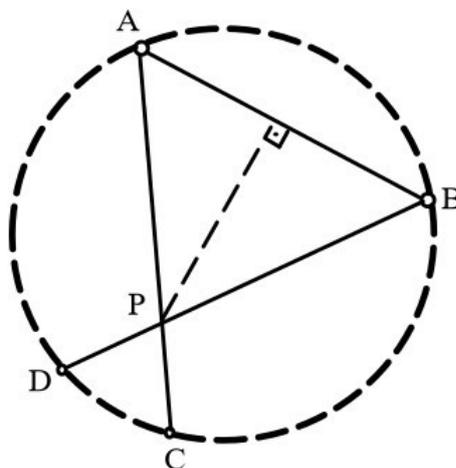


Figura 47 – Paralelas à reta AB que passam pelo ponto P - Fonte: elaborada pelo autor

Vale ressaltar que, para Lobachevsky, só existiam duas retas paralelas à uma reta dada, que, na Figura 47, seriam as retas AC e BD relativas à reta AB . Já as outras retas que passam pelo ponto P e estariam no interior dos ângulos $\angle BPC$ e $\angle APD$, que, de acordo com a definição de paralelismo apresentada no trabalho, foram consideradas paralelas, como a reta EF da Figura 48 abaixo, seriam classificadas pelo matemático russo como retas não secantes. Ou seja, as retas tomadas como paralelas são as retas limites.

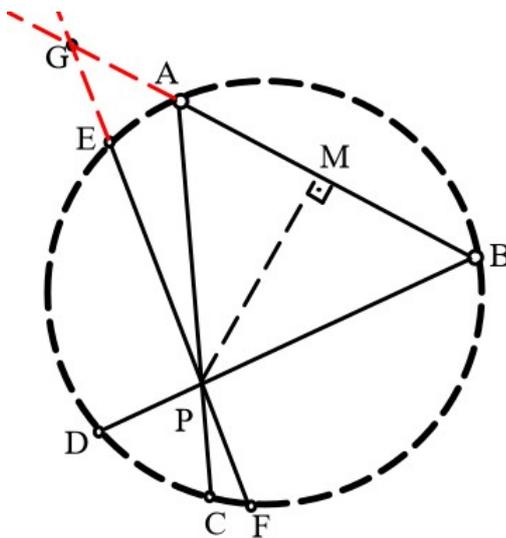


Figura 48 – Pontos ideais, pontos ultra-ideais, pontos ordinários e ângulo de paralelismo
- Fonte: elaborada pelo autor

Ademais, os pontos A e B da Figura 48, que, em uma visão euclidiana do disco, seriam os supostos pontos de intersecção das retas AC e BD com a reta AB , são definidos pelo russo como pontos ideais, uma vez que não pertencem ao espaço hiperbólico descrito, assim como em um intervalo aberto as extremidades não pertencem ao conjunto. Ou seja, os pontos da fronteira do disco “comuns” à duas retas paralelas são ditos pontos ideais. Analogamente, definem-se pontos ordinários como pontos de intersecção entre duas retas do disco e pontos ultra-ideais, como o suposto ponto de intersecção entre uma reta e suas não secantes. Por exemplo, na Figura 48, o ponto P é um ponto ordinário, e o ponto G é um ponto ultra-ideal, também chamado de ponto-gama.

Ainda tendo a Figura 48 como suporte, podemos observar outro conceito de Lobachevsky, o de ângulo de paralelismo, que é dado pelo ângulo formado entre a reta paralela por um ponto à reta dada e a perpendicular a reta dada também traçada por esse ponto, como o ângulo $\angle BPM$ da figura mencionada. Segundo (RIBEIRO, 2012), o conceito de ângulo de paralelismo é de suma importância e foi muito utilizado pelo matemático russo em suas análises.

O modelo de Klein se faz muito significativo na geometria hiperbólica por proporcionar fácil visualização de conceitos abordados por Lobachevsky e possibilitar avanços

na parte teórica, uma vez que, por exemplo, foi possível provar que o ângulo de paralelismo é agudo. Em (GALVAO, 2014, p. 31), o autor faz uso do resultado apresentado para demonstrar propriedades dos triângulos nessa geometria.

Assim como no modelo de Klein, o plano hiperbólico e a noção de pontos ideais são preservadas no modelo de Poincaré, ou seja, o espaço hiperbólico é uma região limitada por uma circunferência não contida no espaço, e os pontos pertencentes à circunferência são definidos como pontos ideais. A circunferência que delimita o espaço hiperbólico desse modelo é chamada de horizonte hiperbólico, e o espaço estritamente contido em seu interior é chamado de disco.

Nesse modelo, as retas hiperbólicas são determinadas pelo conjunto de infinitos pontos do disco, ditos pontos interiores, que formam diâmetros sem extremidade ou arcos de circunferências ortogonais ao disco. Note que circunferências são ortogonais ao disco quando as retas tangentes à circunferência, em seus pontos de intersecção com o horizonte do disco, são perpendiculares às retas tangentes ao disco nesses pontos ideais.

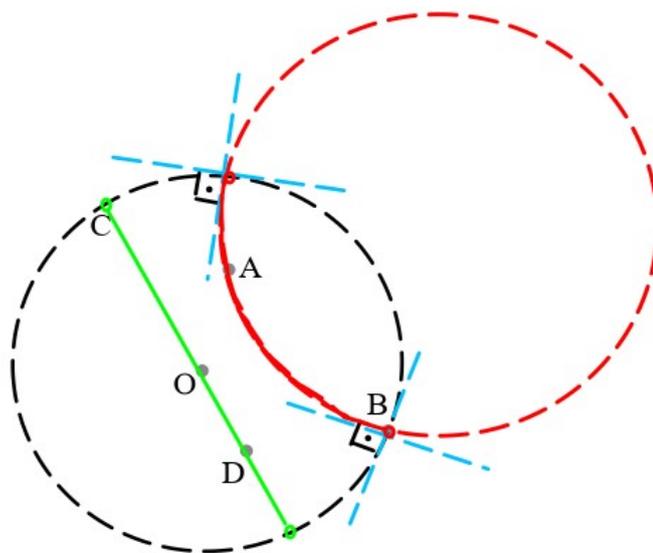


Figura 49 – Disco de Poincaré e definições - Fonte: elaborada pelo autor

Na Figura 49, sendo o ponto O o centro do disco, pode-se observar alguns dos conceitos apresentados para esse modelo. Note que os pontos A , O e D são interiores, e os pontos C e B , ideais. Ademais, o diâmetro CD é uma reta hiperbólica, assim como o arco AB .

Nesse modelo, Poincaré estabelece como métrica que, dados dois pontos A e B do disco, $d(A, B) = \ln \left(\frac{(AC/AD)}{(BC/BD)} \right)$, tais que AC , BC , AD e BD são as medidas dos segmentos euclidianos, e os pontos C e D são os pontos ideais da reta hiperbólica que passa por A e B . A adoção da métrica apresentada garante a propriedade minimizante das retas hiperbólicas propostas anteriormente e descrevem uma distorção do espaço hiperbólico

quando analisado por um ponto de vista euclidiano. Ademais, de acordo com (RIBEIRO, 2013, p. 107), tendo em vista que as distâncias são distorcidas nesse modelo aos “olhos euclidianos” e os segmentos coloridos da Figura 50 possuem mesma medida hiperbólica, pode-se perceber a infinitude do espaço hiperbólico descrito no modelo, assim como no modelo de Klein.

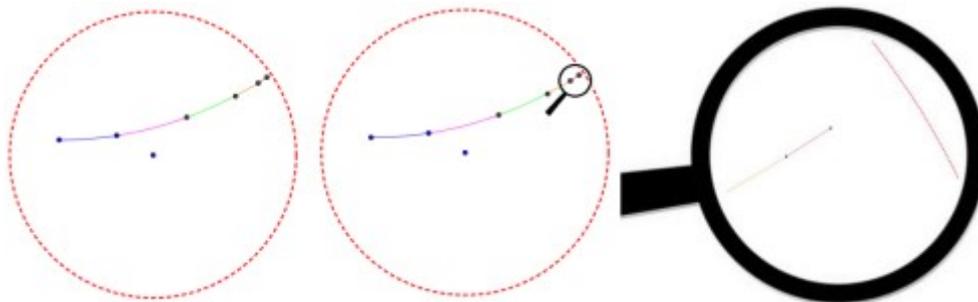


Figura 50 – Segmentos de mesmo tamanho no disco de Poincaré - Fonte: (RIBEIRO, 2013)

Essa distorção foi usada pelo artista Holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), que, ao perceber que o modelo de Poincaré possibilitava uma representação do infinito, fez obras com base nesse modelo para a geometria hiperbólica, como as obras Círculo Limite I e III da Figura 51 abaixo.



Figura 51 – Círculo Limite I e III - Fonte: (VOGADO et al., 2020)

Observe que, sob a perspectiva euclidiana, a composição vai ficando cada vez menor quando se aproxima do horizonte hiperbólico. Todavia, podemos observar que a composição da figura se repete com as mesmas imagens.

A seguir, na Figura 52, pode-se observar que esse modelo obedece ao axioma de Lobachevsky. Note que, dada a reta AB , observa-se a representação das retas paralelas DP e CP e retas não secantes que passam por P .

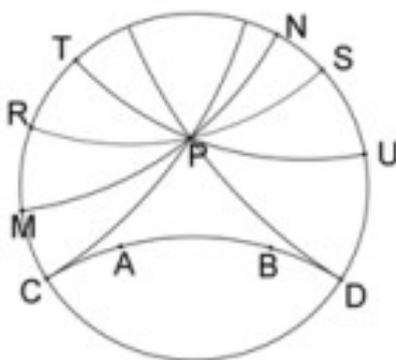


Figura 52 – Paralelas à reta AB que passam pelo ponto P no disco de Poincaré - Fonte: (GALVAO, 2014)

Para que seja possível observar algumas propriedades desse modelo, definiremos alguns conceitos necessários, como o de segmento, semirreta e ângulos no disco, que se assemelham às definições euclidianas. Dessa forma, dado um ponto A que divide uma reta hiperbólica em dois arcos, dizemos que esses arcos são semirretas hiperbólicas de origem A . Ademais, sendo A e B pontos interiores, um arco de extremos A e B contido em uma reta hiperbólica é dito um segmento hiperbólico. Dadas duas semirretas de mesma origem A , dizemos que A é o vértice de um ângulo hiperbólico, que é dado pela medida do ângulo euclidiano formado pelas retas euclidianas tangentes às semirretas em sua origem.

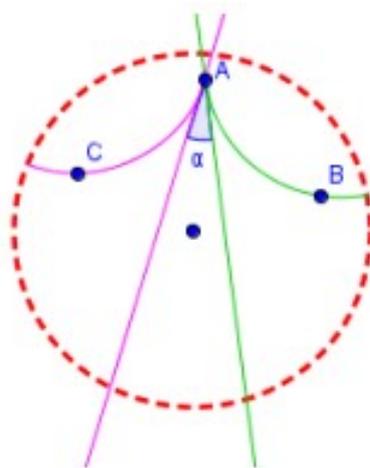


Figura 53 – Ângulo hiperbólico BAC - Fonte: (RIBEIRO, 2013)

A Figura 53 demonstra as semirretas AC e AB , bem como os segmentos AC e AB e o ângulo hiperbólico $\angle BAC$ de medida α . Além disso, dados três pontos não colineares, ou seja, não pertencentes a uma mesma reta hiperbólica, os segmentos que ligam tais pontos formam um triângulo hiperbólico, como o mostrado na Figura 54 a seguir.

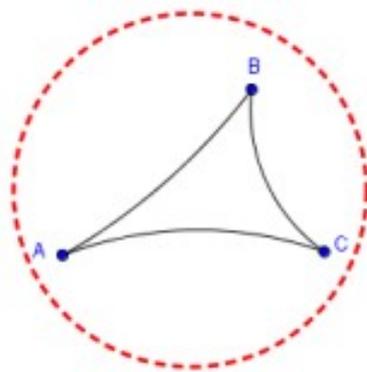


Figura 54 – Triângulo hiperbólico ABC - Fonte: (RIBEIRO, 2013)

Diferentemente do que acontece na geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico não é constante, como se pode observar nos experimentos propostos por (RIBEIRO, 2013, p. 113) com o auxílio do software GeoGebra, presentes na Figura 55 a seguir, em que dois triângulos hiperbólicos distintos possuem valores distintos para a soma de seus ângulos hiperbólicos internos.

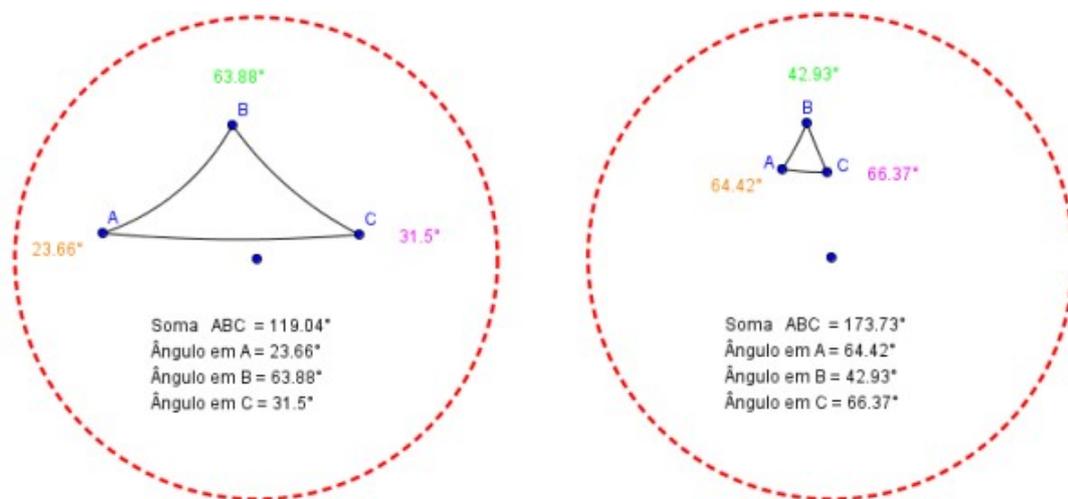


Figura 55 – Soma dos ângulos internos no triângulo hiperbólico ABC - Fonte: (RIBEIRO, 2013)

Ademais, vale ressaltar que, quanto menor a área do triângulo hiperbólico, menor será sua distorção em relação à geometria euclidiana e, conseqüentemente, mais perto de 180° será a soma de seus ângulos internos. Todavia, a somatória dos ângulos sempre estará entre 0° e 180° .

Como foi mencionado anteriormente, existe uma correspondência entre disco de Poincaré e a pseudoesfera de Beltrami, uma superfície de curvatura negativa. Desse modo, podemos associar as propriedades do disco a superfícies de mesma curvatura. Ademais, como este trabalho tem como objetivo maior a exploração empírica dos objetos e das

propriedades da geometria hiperbólica, o fato proposto não será demonstrado e ficará como exercício para o leitor.

Tendo em vista que a geometria euclidiana não é capaz de explicar diversos fenômenos do universo, o desenvolvimento de novas geometrias se fez necessário para a explicação de diversos fenômenos que sofrem influência da curvatura das superfícies estudadas. Pode-se exemplificar isso com o desenvolvimento da Física moderna, que perpassa pelo desenvolvimento das geometrias hiperbólicas adotadas para o avanço dos estudos da teoria da relatividade. Para (KALEFF; NASCIMENTO, 2004), as novas geometrias possibilitaram aos cientistas buscar novas explicações sobre o mundo físico que nos cerca e, segundo a autora, “os antigos conceitos geométricos não descreviam tão bem as formas fragmentadas e irregulares, como aquelas normalmente encontradas na natureza”.



Figura 56 – Malha Gravitacional - Fonte: (UFPA, 2021)

Observe, na Figura 56, o famoso experimento usado pelos físicos para mostrar o funcionamento da gravidade no modelo relativístico de Einstein e note que a superfície do tecido se assemelha à estrutura da pseudoesfera de Beltrami, como se pode ver na Figura 57. Além disso, a trajetória do objeto na superfície busca o caminho que minimiza a trajetória descrevendo um caminho minimizante que pode ser comparado a uma reta hiperbólica, como o caminho descrito pelas bolinhas de gude da Figura 56.

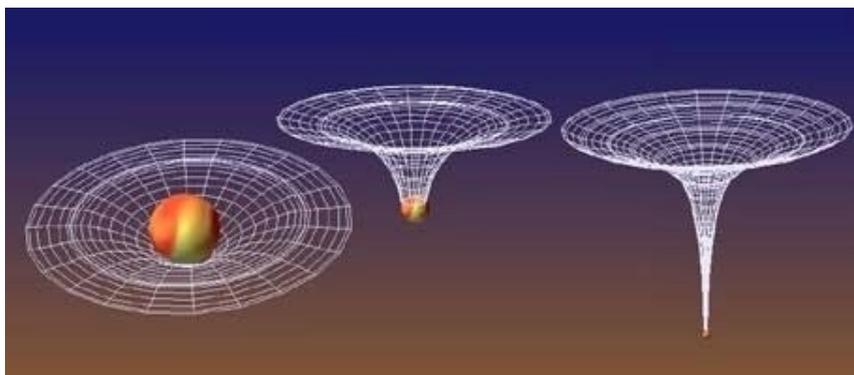


Figura 57 – Deformação espaço-tempo - Fonte: (CARDOSO, 2019)

Nesse sentido, o estudo da geometria hiperbólica se faz relevante, e a utilização de um modelo que simplifique sua visualização, tornando as propriedades tangíveis, se faz fundamental, dada a complexidade das ideias apresentadas. Portanto, estudos como o da matemática inglesa Daiana Tamina aproximam a temática do público, possibilitando uma compreensão facilitada, como é o caso do uso do crochê hiperbólico. Em seu trabalho, Daiana realizou a construção de modelos de crochê em que, para cada ponto existente em uma camada, são ligados outros dois na próxima camada, gerando superfícies de curvatura negativa devido ao seu padrão de montagem, como na Figura 58.



Figura 58 – Crochê Hiperbólico - Fonte: elaborada pelo autor

A facilidade em manipular a superfície criada possibilita a utilização desse espaço para a observação de propriedades dessa geometria não euclidiana, como na Figura 59 a seguir, com as imagens de (VOGADO et al., 2020, p. 24), em que podemos ver concretamente o axioma de Lobachevsky, abordado ao longo do capítulo.

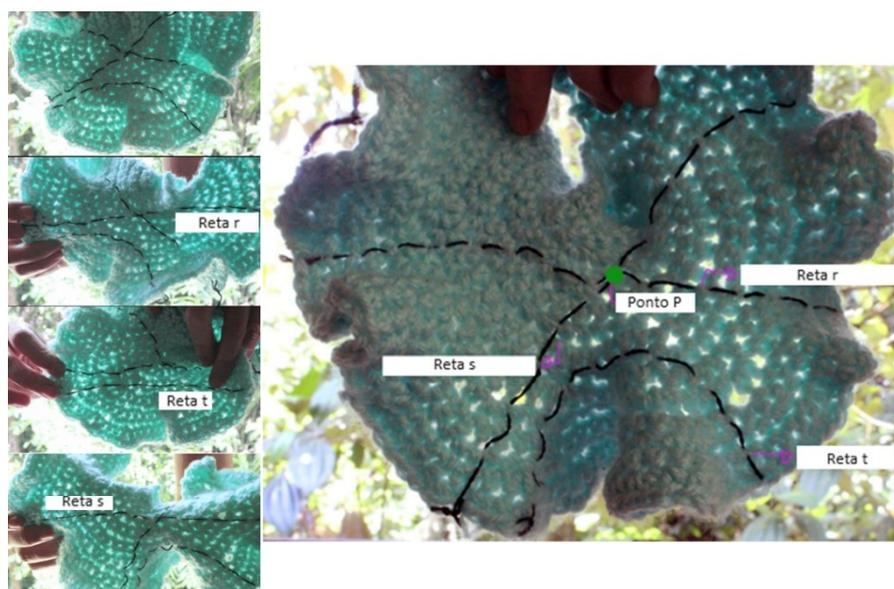


Figura 59 – Axioma de Lobachevsky crochê hiperbólico - Fonte: (VOGADO et al., 2020), com adaptações

Sendo assim, retomando as perguntas que deixamos no início do capítulo, podemos observar que, realizando alguns testes, seria possível observar que a cidade possui uma superfície na qual propriedades euclidianas não se mantêm. Logo, notando que a superfície obedece ao modelo do disco de Poincaré, uma das possibilidades para o cidadão comprovar matematicamente que a cidade possuiria essas distorções em seu espaço seria com a medição dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico suficientemente grande para observar que a sua soma é inferior a 180° .

Ademais, a trajetória entre os pontos A e B que minimizariam a quantidade de passos é dada por uma curva que se aproxima do centro da cidade, um segmento AB no modelo de Poincaré, como se pode observar na Figura 60 a seguir.

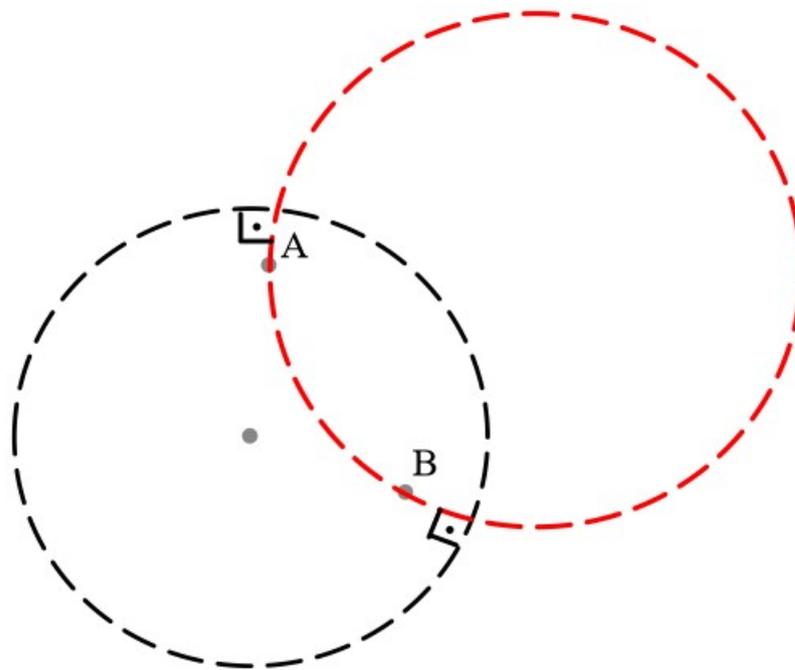


Figura 60 – Trajetória AB minimizante - Fonte: elaborada pelo autor

Vale analisar que, intuitivamente, a escolha dessa trajetória justifica-se pelo fato de que, aproximando-se do centro da cidade, o tamanho da pessoa aumentará e, conseqüentemente, a quantidade de passos diminuirá.

7 Atividades Propostas

Ao longo deste capítulo, serão apresentadas atividades de investigação para verificar a compreensão dos princípios fundamentais das geometrias não euclidianas abordadas de maneira introdutória neste trabalho. Ademais, vale ressaltar que essa abordagem visa não apenas aprofundar o entendimento conceitual, mas também cultivar uma apreciação mais ampla da riqueza e da diversidade do pensamento matemático.

Por meio de atividades e oficinas, tem-se como objetivos: (1) que, ao participarem das atividades propostas, os alunos sejam incentivados a questionar as suposições euclidianas tradicionais e a explorar as consequências surpreendentes das geometrias não euclidianas; e (2) que os professores tenham mais um material de apoio para trabalhar essa temática tão negligenciada nos currículos escolares. Tendo isso em vista, as atividades prontas para a aplicação estão disponíveis no apêndice do trabalho, com o intuito de facilitar o trabalho de quem quiser fazer seu uso para fins educacionais.

Oficina 1 - Atividades sobre a Geometria do Taxista

A malha quadriculada da Figura 61 representa um modelo da vista superior de um bairro, tais que as retas horizontais e verticais igualmente espaçadas determinam, respectivamente, as ruas e avenidas da região, determinando uma disposição cartesiana, uma vez que as ruas e avenidas foram enumeradas, como mostrado na figura.

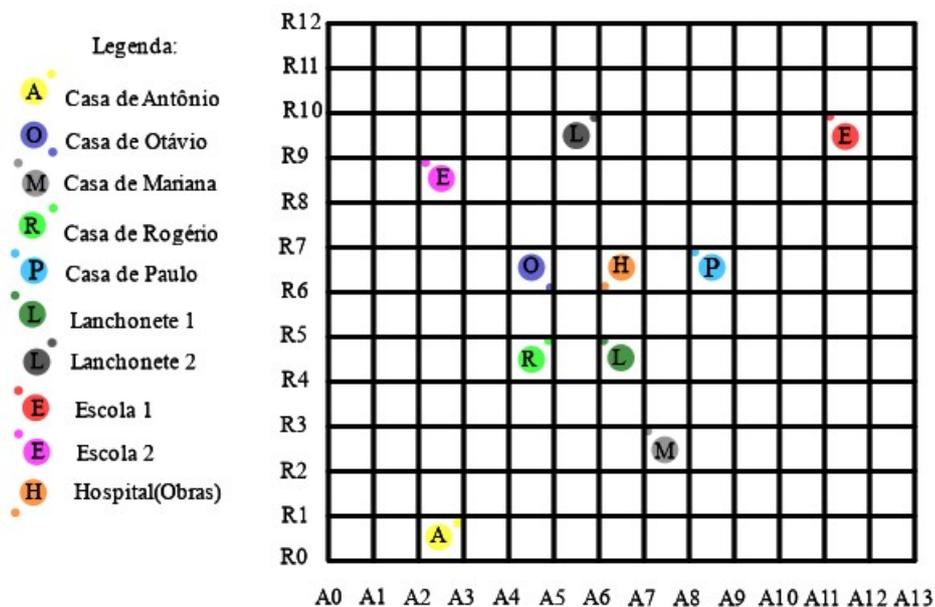


Figura 61 – Vista superior do bairro em malha quadriculada - Fonte: elaborada pelo autor

Todos os quarteirões, quadrados delimitados pelos cruzamentos das ruas com as

avenidas, possuem algum tipo de construção/imóvel, logo, os deslocamentos nessa região só podem ser realizados quando percorridos pelas ruas ou avenidas. A malha da imagem apresenta alguns dos imóveis e construções da região, bem como uma legenda explicativa. Diante do exposto, responda o que se pede nas questões a seguir:

1. Tipo de atividade: questões abertas de resposta curta.

Materiais: atividade impressa, com o mapa da malha quadriculada colorido.

Objetivo(s) da atividade: introduzir os princípios da geometria do taxista e seus conceitos básicos, como distância e caminho direto.

Pré-requisitos: nenhum.

Público sugerido: 7° ano (cerca de 12 anos).

Classificação: atividade individual.

Joana trabalha para um aplicativo de entrega e utiliza sua bicicleta para fazer as entregas pelos bairros da cidade apresentada. Em certo momento, ela recebeu uma notificação para recolher três encomendas na lanchonete cuja porta se localizava no cruzamento da avenida 6 com a rua 5, dado pelo par ordenado $(6, 5)$, porém, ela havia acabado de realizar uma entrega na casa de Paulo de entrada localizada no cruzamento $(8, 7)$, sendo tais pontos representados na Figura 62.

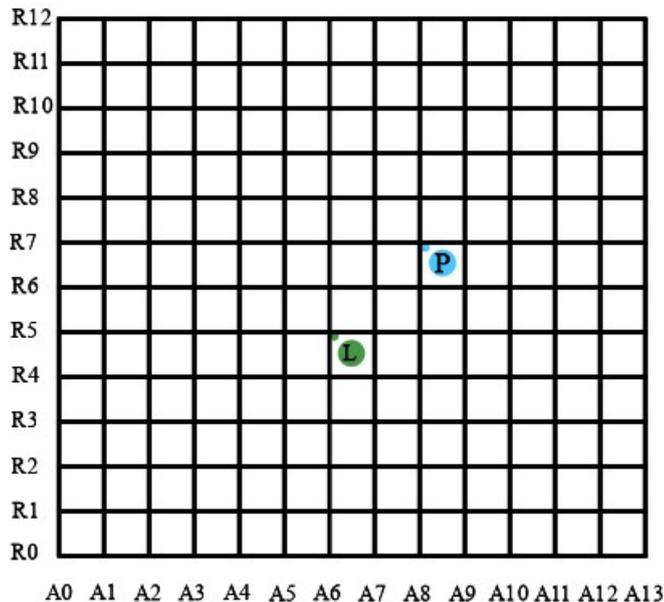


Figura 62 – Vista superior do bairro I - Fonte: elaborada pelo autor

Adotando o lado do quarteirão como unidade de medida, responda ao que se pede nos itens a seguir:

- (a) Qual é a menor distância possível para Joana pegar as entregas?
- (b) Existem percursos alternativos que mantenham essa distância mínima?

(c) Supondo que não existissem construções nos quarteirões, isso alteraria sua resposta para as perguntas anteriores? Justifique sua resposta.

Sugestão: uma possibilidade de aprofundamento para aproveitar a atividade acima é apresentar a fórmula de distância entre dois pontos na Geometria do Taxista e compará-la à fórmula em uma geometria euclidiana.

2. Tipo de atividade: questão aberta de resposta curta.

Materiais: atividade impressa, com o mapa da malha quadriculada colorido.

Objetivo(s) da atividade: introduzir a noção de circunferência na geometria do taxista.

Pré-requisitos: reconhecimento das formas geométricas básicas, suas características e suas propriedades.

Público sugerido: 7º ano (cerca de 12 anos).

Classificação: atividade individual.

Ao pegar as encomendas na lanchonete do problema anterior, ela percebeu que ocorreu uma falha no aplicativo, de forma que era possível visualizar somente a distância da porta da lanchonete para os locais em que seriam feitas as entregas, ou seja, não era possível obter a localização exata dos pontos de entrega. Ela observou que essas distâncias, para os três locais de entrega, eram de um, dois e três quarteirões. Assim, na malha quadriculada da Figura 63, os possíveis locais para a entrega das três encomendas e responda o que se pede no item a seguir. Adote cores ou símbolos diferentes para cada uma delas.

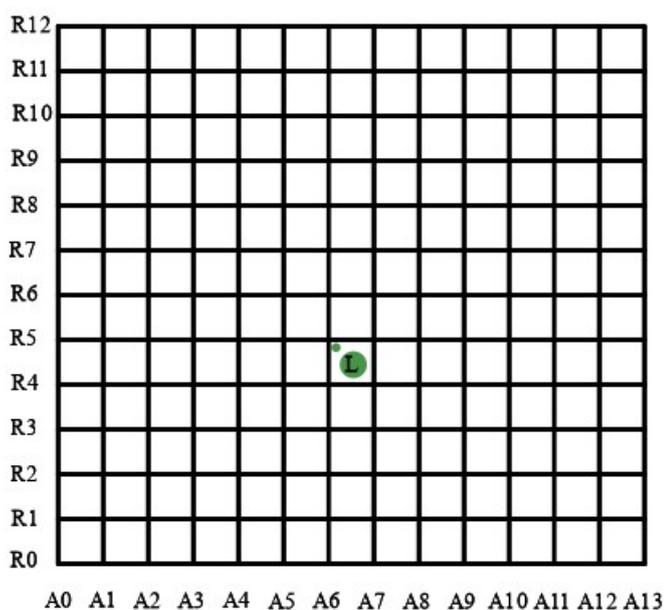


Figura 63 – Vista superior do bairro II - Fonte: elaborada pelo autor

(a) Os pontos assinalados estão dispostos segundo qual forma geométrica?

Sugestão: após a atividade acima, sugere-se ao regente conceituar a circunferência como lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto determinado. Em seguida, conceituar a circunferência na Geometria do Taxista, por meio da observação dos padrões dos pontos nas respostas dadas pelos alunos para a atividade, retomando a pergunta realizada no item (a).

3. Tipo de atividade: questão de múltipla escolha.

Materiais: atividade impressa, com o mapa da malha quadriculada colorido.

Objetivo(s) da atividade: introduzir a noção de caminho minimizante e segmentos na geometria do taxista; e possibilitar aos alunos o reconhecimento da geometria do taxista como uma geometria não euclidiana.

Pré-requisitos: compreender o conceito de reta e suas propriedades; e compreender o quinto postulado de Euclides.

Público sugerido: 9º ano (cerca de 14 anos).

Classificação: atividade individual ou em dupla. Gabarito: "D"

Antônio estudava na escola de entrada localizada no ponto (11, 10), já a porta de sua moradia era no ponto (3, 1). Durante três dias, ele realizou percursos de ida distintos, apresentados na Figura 64 pelos trajetos coloridos.

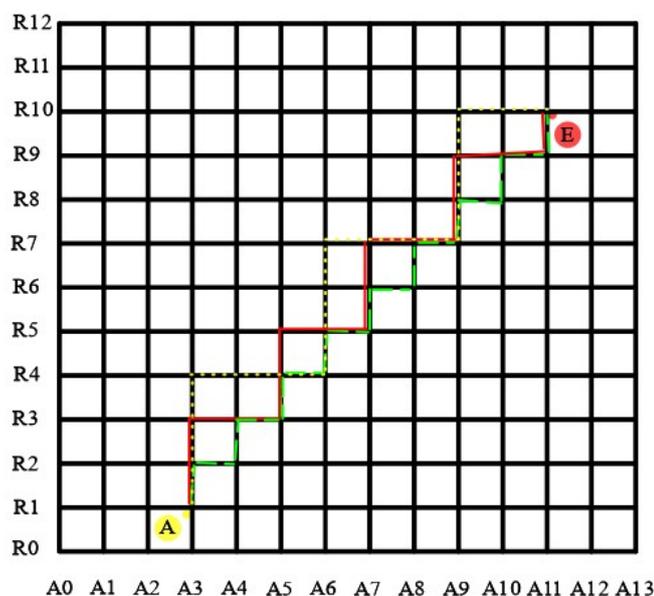


Figura 64 – Vista superior do bairro III - Fonte: elaborada pelo autor

Assinale o item que completa o texto de maneira correta:

Sabendo que, na geometria do taxista, retas são determinadas por caminhos que minimizam distâncias entre pontos pertencentes a eles e que Euclides afirma no livro “Os Elementos” que dois pontos distintos determinam uma única reta,

(a) os trajetos não determinam segmentos de reta e a geometria em questão obedece ao enunciado de Euclides.

(b) os trajetos não determinam segmentos de reta e a geometria em questão não obedece ao enunciado de Euclides.

(c) os trajetos determinam segmentos de reta e a geometria em questão obedece ao enunciado de Euclides.

(d) os trajetos determinam segmentos de reta e a geometria em questão não obedece ao enunciado de Euclides.

Sugestão: após a atividade acima, sugere-se debater a resposta obtida, definindo os conceitos abordados na questão de acordo com a nomenclatura apropriada. Ademais, é importante o regente mostrar o fato de que a Geometria do Taxista não é euclidiana e como suas propriedades violam os postulados de Euclides.

4. Tipo de atividade: questões abertas de resposta longa.

Materiais: atividade impressa, com o mapa da malha quadriculada colorido.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos a compreensão da noção de distância de um ponto a uma reta na geometria do taxista e o entendimento das formas de determiná-la.

Pré-requisitos: compreender a noção de circunferência na geometria do taxista; e compreender a noção de distância de ponto a reta na geometria euclidiana e as formas de determiná-la.

Público sugerido: 2º ano (cerca de 16 anos).

Classificação: atividade individual ou em dupla.

Pela região apresentada, passavam três linhas de metrô distintas, representadas pelas linhas coloridas da Figura 65:

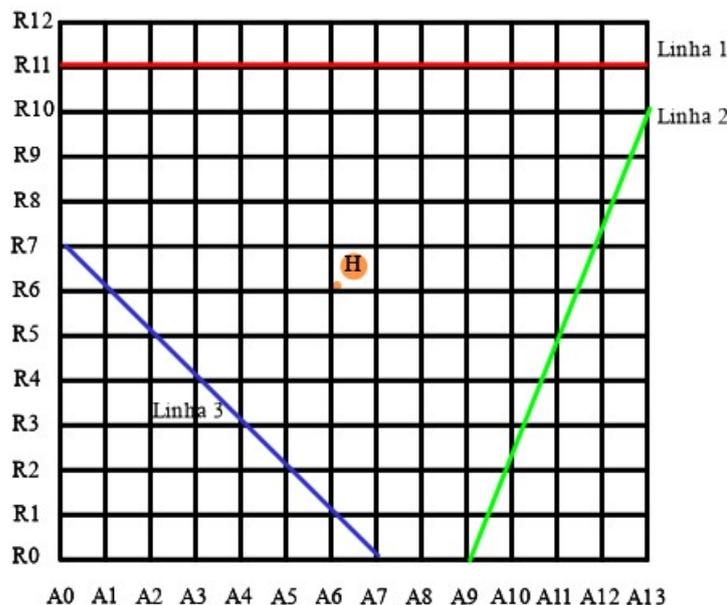


Figura 65 – Vista superior do bairro IV - Fonte: elaborada pelo autor

Tendo isso em vista, o governo local acredita que esse bairro é estratégico para a construção de um hospital, de entrada localizada na posição (6, 6). Dessa maneira, para ampliar o acesso de outras localidades a esse hospital, decidiu-se construir uma estação de metrô em cada uma das linhas, de modo que suas distâncias para o hospital sejam as menores possíveis.

(a) Supondo que você fosse o responsável técnico por definir os locais de construção dessas estações, escreva o trecho do relatório em que você justifica a escolha dos locais para as obras.

(b) Caso não existissem construções nos quarteirões e fosse possível a livre circulação por eles, isso alteraria a escolha dos pontos para o metrô? Em caso afirmativo, explique o raciocínio usado na escolha, dado essa nova condição.

Sugestão: após a atividade acima, sugere-se ao regente comparar formas de obter a distância entre ponto e reta na Geometria do Taxista com a da geometria euclidiana, mostrando a aplicabilidade dessa geometria não euclidiana na vida real.

Oficina 2 - Atividades sobre Curvaturas

1. Tipo de atividade: questão de múltipla escolha.

Materiais: atividade impressa.

Objetivo(s) da atividade: verificar a compreensão de conceitos, definições e propriedades da parte introdutória da teoria de curvaturas.

Pré-requisitos: noções básicas da teoria de curvatura de curvas.

Público sugerido: 8º ano (cerca de 13 anos).

Classificação: atividade individual ou em dupla.

Gabarito: E-C-E-C-E.

De acordo com os conceitos e as propriedades de curvaturas e seus conhecimentos, julgue os itens a seguir em certo (C) ou errado (E).

() A curvatura de uma linha reta é positiva.

() Circunferências descrevem trajetórias circulares de curvatura constante.

() Quanto maior o raio de uma circunferência, maior será sua curvatura.

() A maior circunferência que tangencia uma curva em um determinado ponto pelo seu lado côncavo é denominada círculo osculante.

() A curvatura em um ponto de uma curva qualquer é dada pela curvatura do círculo osculante à curva nesse ponto e, em uma superfície, ela é dada pela curvatura de uma esfera osculante.

Sugestão: Recomenda-se que o professor solicite ao aluno a justificativa das respostas dadas

2. Tipo de atividade: questão de múltipla escolha.

Materiais: atividade impressa.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos o reconhecimento das propriedades básicas da teoria de curvatura.

Pré-requisitos: noções básicas da teoria de curvatura.

Público sugerido: 8º ano (cerca de 13 anos).

Classificação: atividade individual ou em dupla.

Gabarito: item (c).

Sabe-se que a curvatura de uma circunferência deve ser constante e inversamente proporcional ao seu raio. Assim, sendo C a curvatura da circunferência e R seu raio, assinale a alternativa que corresponde à relação correta:

(a) $C + R = 1$.

(b) $C - R = 1$.

(c) $C = \frac{1}{R}$.

(d) $\frac{C}{R} = 1$.

Sugestão: Recomenda-se que o professor solicite ao aluno a justificativa das respostas dadas

3. Tipo de atividade: questão aberta de resposta curta.

Materiais: atividade impressa, com itens coloridos.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos a classificação, de maneira intuitiva, da curvatura de superfícies constantes e a identificação de superfícies cuja curvatura não é constante.

Pré-requisitos: noções básicas da teoria de curvatura em superfícies.

Público sugerido: 9º ano (cerca de 14 anos).

Classificação: atividade individual.

Gabarito: (a) - nula; (b) - positiva; (c) - negativa; (d) - nula; (e) - negativa; e (f) - o sinal é não constante.

Classifique a curvatura da superfície dos objetos das imagens a seguir em: positiva, negativa ou nula.

(a)



Figura 66 – Folha de Caderno - Fonte: Google Imagens

(b)



Figura 67 – Bola de Futebol Americano - Fonte: Google Imagens

(c)



Figura 68 – Batata Chips - Fonte: Google Imagens

(d)

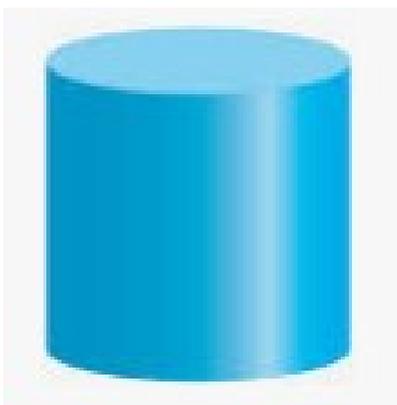


Figura 69 – Cilindro Circular Reto - Fonte: Google Imagens

(e)



Figura 70 – Vuvuzela - Fonte: Google Imagens

(f) (Desafio)



Figura 71 – Toro - Fonte: Google Imagens

Sugestão: sugere-se ao regente orientar os alunos a pensarem intuitivamente nas curvaturas de diferentes pontos da superfície do toro, objeto apresentado no item (f). Ajude-os a observar que sua curvatura não tem sinal constante como nos demais itens, mostrando que existem pontos em que sua curvatura pode ser positiva, negativa e nula. Ademais, recomenda-se que o professor solicite ao aluno a justificativa das respostas dadas

4. Tipo de atividade: questão aberta de resposta média.

Materiais: atividade impressa.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos a compreensão e a aplicação dos resultados do Teorema Egregium de Gauss.

Pré-requisitos: teorema Egregium de Gauss.

Público sugerido: 9º ano (cerca de 14 anos).

Classificação: atividade individual ou em dupla.

O Teorema Egregium de Gauss possibilita estabelecer a curvatura gaussiana como um invariante geométrico da superfície, ou seja, superfícies obtidas por meio de transformações isométricas possuem a mesma curvatura, não sendo possível sobrepor duas superfícies de curvaturas diferentes. Diante do exposto, apresente uma aplicação prática do teorema.

Sugestão: sugere-se ao regente aplicar a questão após uma devida explicação sobre o teorema, exemplificando possibilidades de aplicações práticas (exemplos possíveis: não ser possível embrulhar presentes que não possuem superfície de curvatura nula com papéis de embrulho, sem rasgar ou amassar o papel; não ser possível criar um mapa plano para representar o globo terrestre sem deformar alguma região).

Oficina 3 - Construção do transferidor esférico e seu uso para compreender a geometria esférica, suas propriedades e aplicações

Tipo de atividade: oficina de confecção de material.

Materiais: atividade impressa, régua, estilete/tesoura, folha de acetato/plástico, fita dupla face, caneta permanente, elástico pequeno e dispositivo eletrônico com acesso à Internet.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos a compreensão da geometria esférica e das suas propriedades com o uso de materiais concretos.

Pré-requisitos: noções geométricas básicas de ponto, reta, ângulo, triângulo, soma dos ângulos internos, Regra de Três simples etc.; e noções geográficas básicas de latitude, longitude, meridiano, linha do equador, paralelos etc.

Público sugerido: 7º ano (cerca de 12 anos).

Classificação: atividade em dupla ou em pequenos grupos.

Tempo: cerca de 180 minutos.

1. Conhecendo o conceito de reta na geometria esférica e fazendo um paralelo com uma geometria euclidiana.

(a) Com o auxílio de um alfinete para mapa, marque dois pontos na esfera de isopor.

(b) Em seguida, com um elástico ou uma linha de costura, marque sobre a esfera o menor segmento que conecta os pontos marcados.

(c) Prolongue o segmento feito no passo anterior.

(i) Em uma superfície plana, quando se prolonga um segmento de reta, obtém-se qual ente geométrico?

Sugestão: (síntese teórica) o professor regente da atividade deverá levar os alunos a concluírem que a circunferência obtida no passo c funciona como uma reta, denominada círculo máximo ou geodésica, nessa nova superfície, e que o arco montado no passo (b) funciona como um segmento de reta. Ademais, é importante fazer com que os alunos comparem as propriedades da reta nas diferentes superfícies (plana e esférica).

(ii) Em ambos os casos as retas minimizam a distância entre dois pontos pertencentes a ela. Porém, podemos afirmar que em ambos os casos ela é limitada? E finita?

Sugestão: apresente brevemente, de maneira natural e fluida, a noção de limitação e finitude, diferenciando-as.

(d) Existem retas paralelas nessa nova geometria?

(e) Essa nova superfície obedece ao quinto postulado de Euclides? Justifique sua resposta.

Sugestão: o professor regente pode sugerir aos estudantes que usem uma construção no isopor com os alfinetes e as linhas/elásticos para justificar suas respostas.

2. Passo a passo da montagem do transferidor esférico.

(a) Com o auxílio de uma linha, meça o comprimento do diâmetro da esfera e marque em uma tira de plástico/acetato. Como demonstrado nas Figuras 72, 73 e 74.



Figura 72 – Determinando diâmetro da esfera I - Fonte: elaborada pelo autor



Figura 73 – Determinando diâmetro da esfera II - Fonte: elaborada pelo autor



Figura 74 – Determinando diâmetro da esfera III - Fonte: elaborada pelo autor

(b) Divida esse pedaço em 360 partes iguais com auxílio da régua e faça marcações com a caneta permanente. No exemplo abaixo, as marcações foram feitas a cada 10° . Conforme Figura 75.

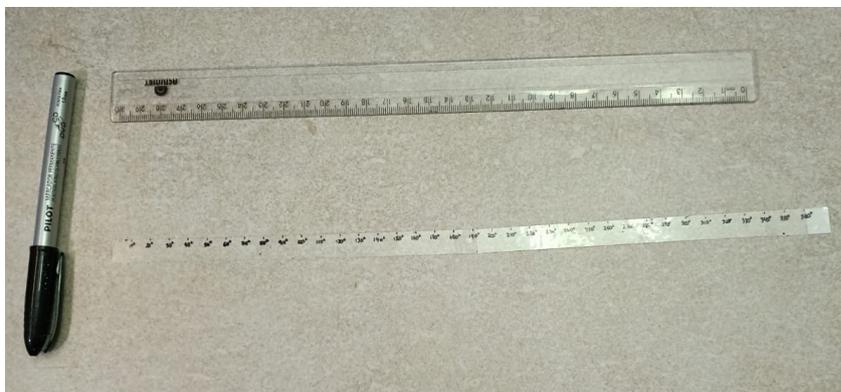


Figura 75 – Marcação dos ângulos até 360° na tira maior de acrílico - Fonte: elaborada pelo autor

(c) Corte mais quatro tirinhas de plástico e, utilizando a mesma proporção, faça marcações até 90° em cada uma delas. A Figura 76 ilustra a ação a ser realizada.

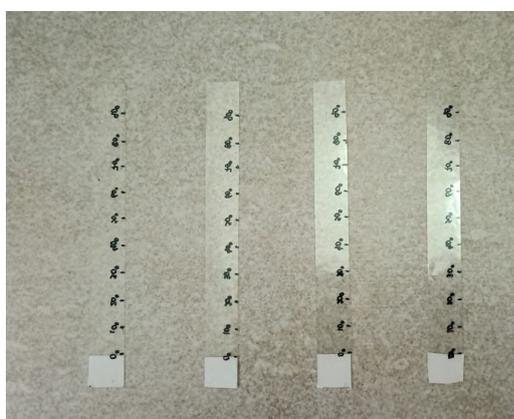


Figura 76 – Marcação dos ângulos até 90° nas tiras menores de acrílico - Fonte: elaborada pelo autor

(d) Cole-as, com a fita dupla face, nas marcas de 0° , 90° , 180° e 270° da tira maior. Como se observa na Figura 77.

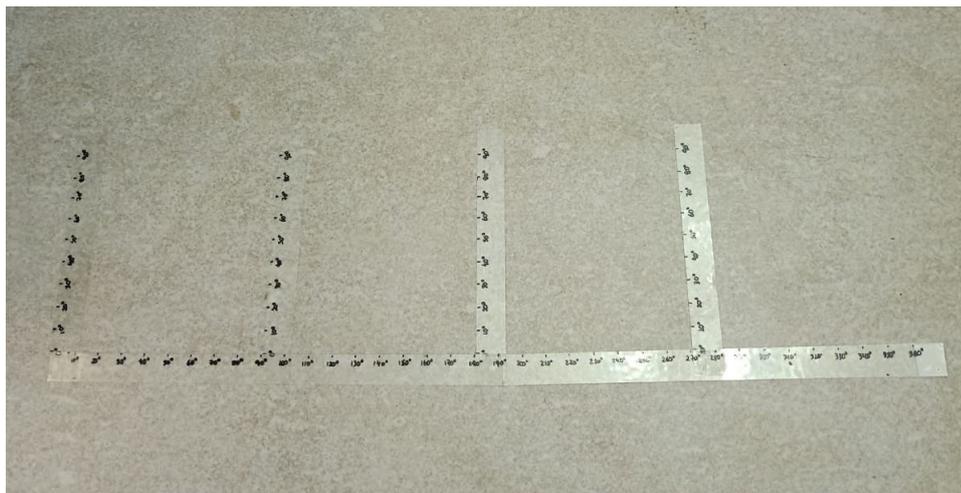


Figura 77 – Juntando as tiras menores na tira maior - Fonte: elaborada pelo autor

(e) Junte as pontas da maior tira, deixando uma pequena sobra para diâmetro da circunferência, conforme indicado na Figura 78.

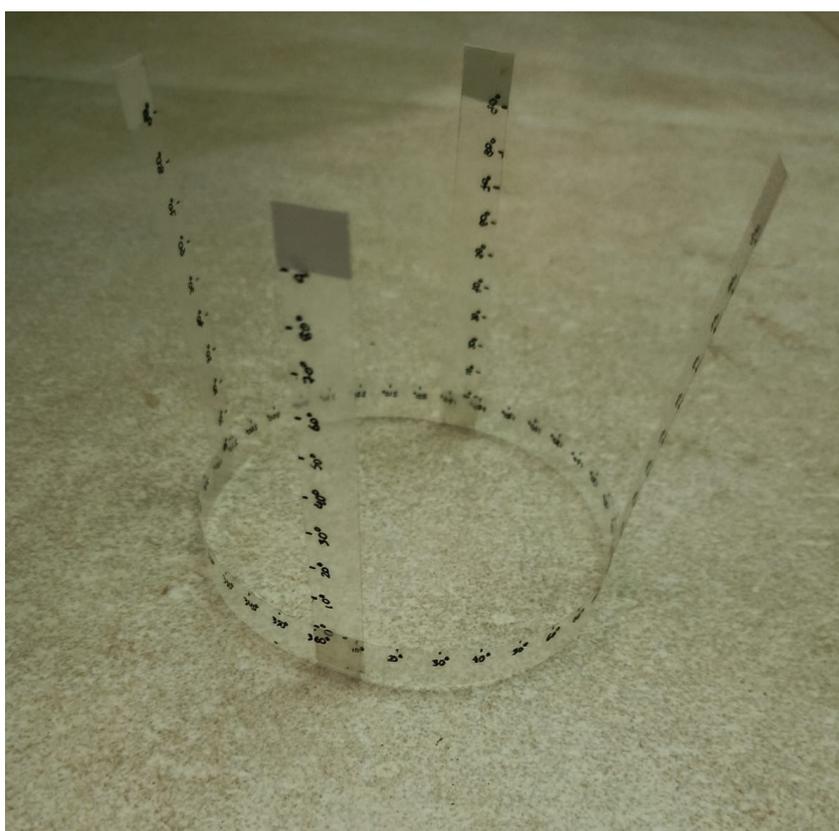


Figura 78 – Juntando as pontas da maior tira - Fonte: elaborada pelo autor

(f) Cole as pontas que ficaram soltas das tiras menores, de modo que o ângulo formado entre elas seja de 90° , seguindo o mostrado nas Figuras 79 e 80.

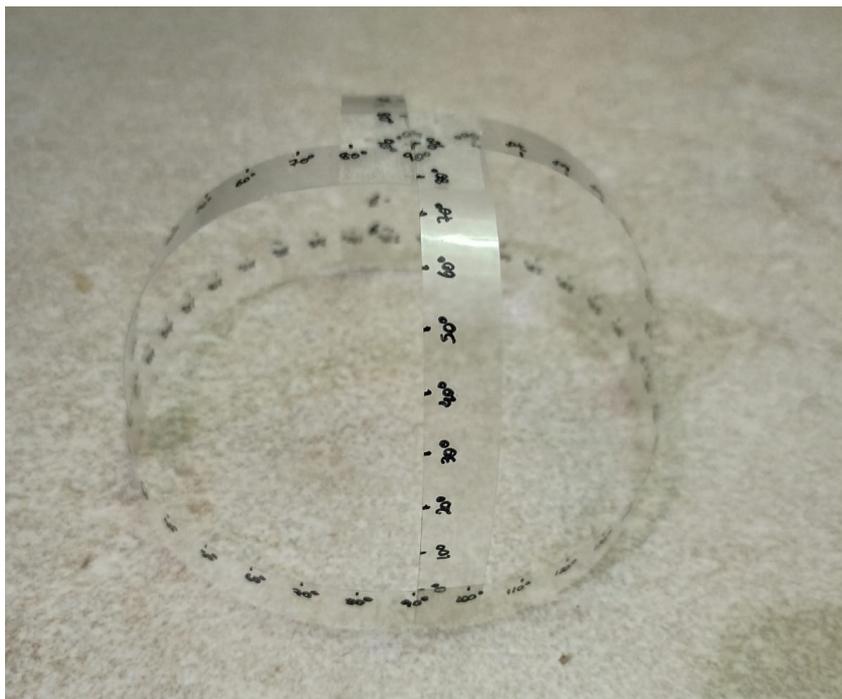


Figura 79 – Juntando as pontas das tiras menores I - Fonte: elaborada pelo autor

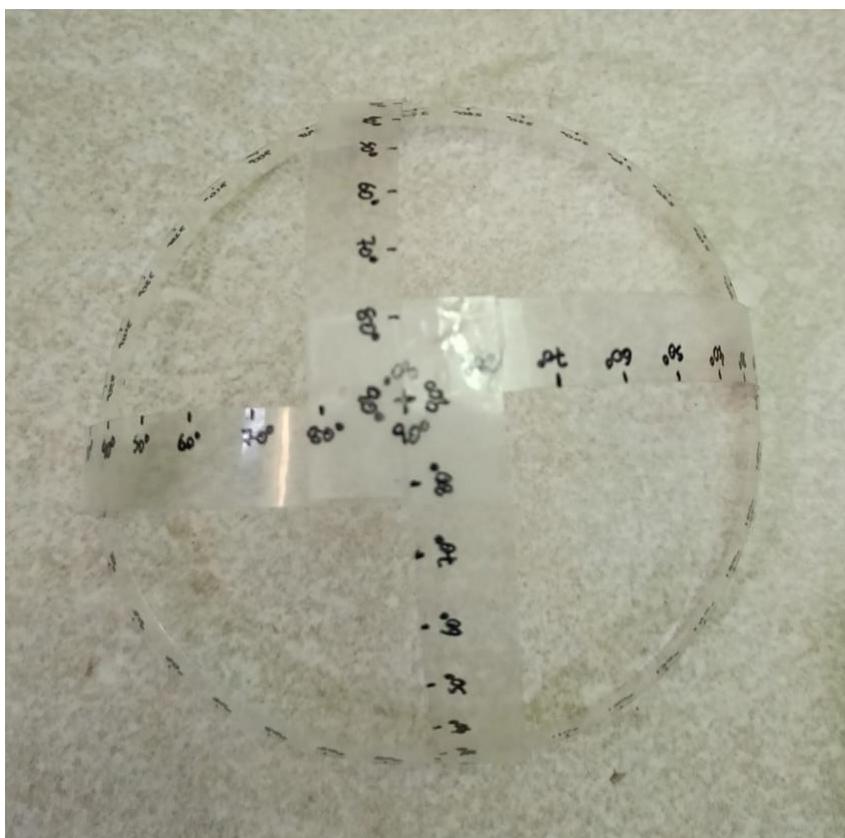


Figura 80 – Juntando as pontas das tiras menores II - Fonte: elaborada pelo autor

Breve tutorial de uso:

i) Coloque o vértice do ângulo a ser calculado abaixo do encontro das tiras menores, conforme mostrado na Figura 81.

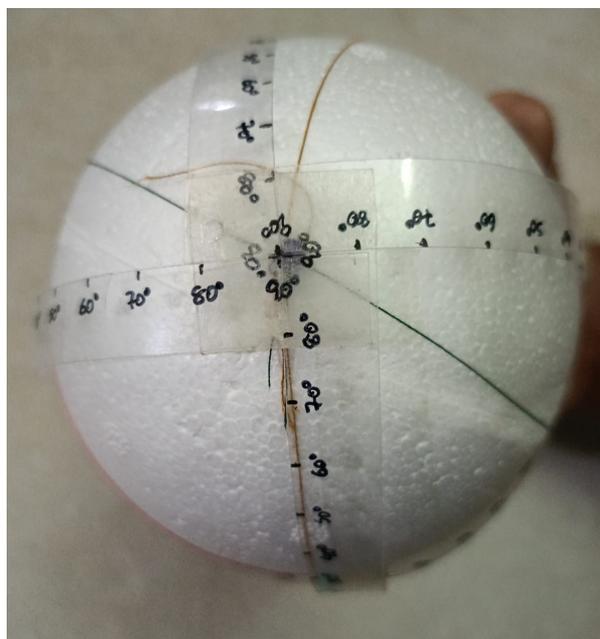


Figura 81 – Usando transferidor I - Fonte: elaborada pelo autor

ii) Alinhe a tira menor que foi colocada no marco inicial (0° e 360°) da tira maior sobre uma das retas que contém um dos lados do ângulo, como indicado na Figura 82.

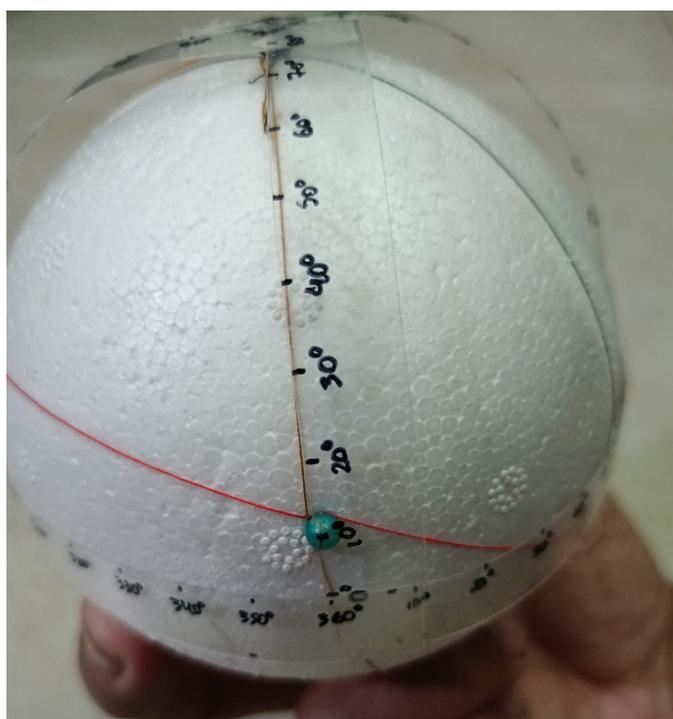


Figura 82 – Usando transferidor II - Fonte: elaborada pelo autor

iii) Observe, de modo aproximado, que o valor do ângulo formado é dado pela marca feita na tira maior pela outra reta que contém o outro lado do ângulo a ser calculado. A Figura 83 ilustra o procedimento adotado.



Figura 83 – Usando transferidor III - Fonte: elaborada pelo autor

Note que, no exemplo acima, a medida do ângulo é de aproximadamente 60° .

3. Conhecendo propriedades dessa geometria com o uso do transferidor.
 - (a) Use um transferidor para determinar o ângulo formado entre duas retas na superfície esférica (dica: aproveite as retas formadas na atividade 1 (e)).
 - (b) Monte, com o auxílio das linhas e dos alfinetes, um triângulo e calcule as medidas dos seus ângulos internos com o transferidor.
 - (c) Na geometria euclidiana plana, qual é o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? Essa nova geometria obedece à mesma propriedade?
4. Medindo a distância aproximada entre duas cidades com Regra de Três simples, latitudes e longitudes.
 - (a) Construa a Linha do Equador e o Meridiano de Greenwich com o transferidor da atividade 2 (observe que eles serão nossa referência para a marcação das cidades);
 - (b) Pesquise as latitudes e as longitudes de Brasília e Roma.
 - (c) Marque, com os alfinetes, Brasília e Roma na esfera, de acordo com as latitudes e as longitudes pesquisadas;

Sugestão: para promover a interdisciplinaridade e uma boa contextualização do tema, sugere-se trabalhar esses 3 primeiros tópicos em uma aula multidisciplinar de matemática e geografia.

(d) Use a Regra de Três simples, com o uso do raio do planeta, o raio da esfera e a medida angular do arco formado pelas cidades, para obter uma aproximação da distância entre as cidades;

Sugestão: questionar aos alunos se os valores obtidos foram razoavelmente próximos e por que os valores obtidos não são idênticos aos valores reais.

(e) Construa um paralelo geográfico com o auxílio do transferidor;

Sugestão: para auxiliar os alunos com a construção dos paralelos, o professor regente deverá informar aos alunos que os pontos do paralelo são equidistantes da Linha do Equador.

(f) Verifique que o menor trajeto de avião para locais no mesmo paralelo não tem trajetória sobre o paralelo.

Sugestão: o professor regente pode sugerir aos estudantes que usem uma construção no isopor com os alfinetes e as linhas/elásticos para justificar suas respostas (exemplo: sugerir que o aluno marque três pontos de um mesmo paralelo com alfinetes e mostrar que a curva minimizante entre dois desses pontos não passa pelo terceiro ponto).

Oficina 4 - Atividades sobre a Geometria Hiperbólica

1. Tipo de atividade: questão aberta de resposta média.

Materiais: atividade impressa, com imagem colorida. Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos a compreensão das propriedades da geometria hiperbólica, de maneira intuitiva, por meio de uma situação baseada no disco de Poincaré.

Pré-requisitos: noções introdutórias do disco de Poincaré.

Público sugerido: 9º ano (cerca de 14 anos).

Classificação: atividade individual ou em dupla.

Gabarito:

(a) Ainda restariam mil passos para chegar ao seu destino, pois, como o tamanho do seu passo foi reduzido à metade do passo inicial, para alcançar a borda andando a outra metade do trajeto, seriam necessários mais quinhentos passos com o comprimento do passo inicial, que equivaleriam aos mil passos com seu novo tamanho, pois o novo tamanho do passo equivale à metade do tamanho inicial.

(b) A pessoa do exemplo nunca conseguiria efetivamente chegar à borda da cidade, devido à distorção do espaço causada pela diminuição do tamanho das coisas

ao longo da cidade, como observado no item anterior, em que, mesmo tendo andado metade da distância até a borda da cidade, ainda falta a mesma quantidade de passos para alcançar sua borda.

(c) A trajetória entre os pontos A e B que minimizariam a quantidade de passos é dada por uma curva que se aproxima do centro da cidade, um segmento AB no modelo do disco de Poincaré. Vale analisar que, intuitivamente, a escolha dessa trajetória justifica-se pelo fato de que, aproximando-se do centro da cidade, o tamanho da pessoa e de seus passos aumentará e, conseqüentemente, a quantidade de passos diminuirá.

Considere uma cidade redonda imaginária, em que, à medida em que uma pessoa se afasta do centro dessa cidade, ela e tudo em sua volta reduzem de tamanho progressivamente, de modo que essa redução seja imperceptível para ela e, caso a pessoa, partindo do centro da cidade, ande metade da distância até a borda da cidade, ela teria metade do tamanho inicial, assim como todas as coisas ao seu redor, como se pode observar na Figura 84.

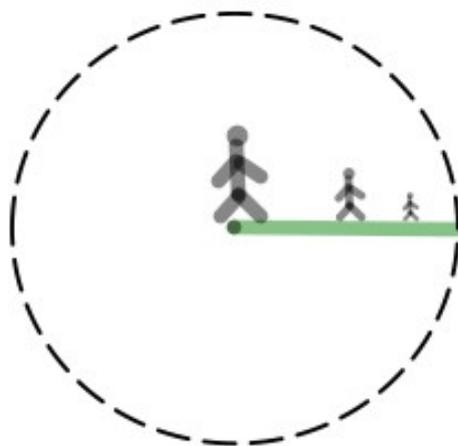


Figura 84 – Representação da cidade imaginária - Fonte: elaborada pelo autor

De acordo com a situação apresentada, responda o que se pede nos itens a seguir:

(a) Sabendo-se que, andando o caminho mais curto, seriam necessários mil passos para um indivíduo chegar à borda da cidade partindo do centro, tendo seu tamanho no centro da cidade como referência, quantos passos seriam necessários para que a pessoa consiga chegar à borda da cidade após ter alcançado metade do trajeto entre o centro e a borda da cidade?

(b) Seria possível que a pessoa conseguisse sair da cidade imaginária? Justifique sua resposta.

(c) Dados os pontos A e B da cidade e o traçado vermelho entre os pontos A e B , destacados na Figura 85, pode-se afirmar que a trajetória do tracejado é a que

determina o percurso com a menor quantidade de passos entre os pontos A e B da cidade? Se a resposta for negativa, como deveria ser essa trajetória? Justifique sua resposta.

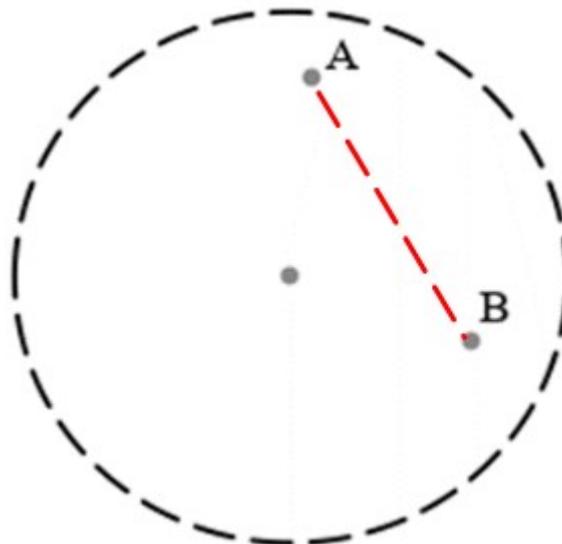


Figura 85 – Proposta de segmento AB - Fonte: elaborada pelo autor

2. Tipo de atividade: questão aberta de resposta curta/Elaboração de esquema.

Materiais: atividade impressa, com imagem colorida.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos o reconhecimento das propriedades básicas das geometrias não euclidianas, além do entendimento de como relacionar os diferentes tipos de modelos hiperbólicos.

Pré-requisitos: noções básicas sobre geometrias não euclidianas; e noções básicas dos modelos do disco de Poincaré e do disco de Klein.

Público sugerido: 9º ano (cerca de 14 anos).

Classificação: atividade individual ou em dupla.

Resposta esperada: dados uma reta e um ponto fora dela, existem duas ou mais retas paralelas à reta dada que passam pelo ponto dado.

Dentre os diversos modelos que retratam as propriedades da geometria hiperbólica, existem os modelos do disco de Klein e do disco de Poincaré, nos quais o universo é dado pelo interior de um disco circular. Todavia, os modelos possuem definições distintas de reta.

Nesse sentido, a matemática inglesa Daiana Tamina decidiu adotar uma curiosa superfície hiperbólica para trabalhar as propriedades não euclidianas da geometria hiperbólica, um modelo em que o universo é dado por uma construção em crochê.

A Figura 86 apresenta uma propriedade que diferencia a geometria hiperbólica da geometria euclidiana no modelo do crochê hiperbólico.

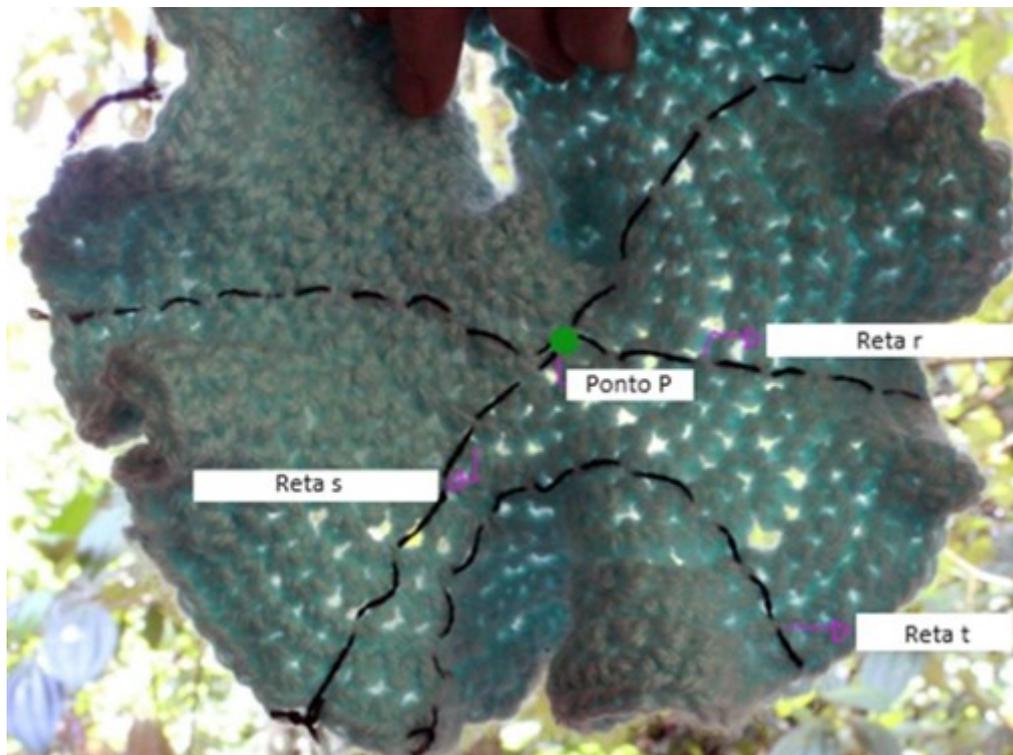


Figura 86 – Modelo crochê hiperbólico - Fonte: (VOGADO et al., 2020), com adaptações

Escreva qual é essa propriedade e adapte, em um desenho, a construção realizada na superfície do crochê em cada um dos dois modelos de disco mencionados.

3. Tipo de atividade: questão de múltipla escolha.

Materiais: atividade impressa, imagem colorida.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos a compreensão das propriedades da geometria hiperbólica por meio de um estudo de caso.

Pré-requisitos: noções introdutórias sobre geometria hiperbólica (modelos do disco de Poincaré).

Público sugerido: 7º ano (cerca de 12 anos) Classificação: Atividade individual ou em dupla.

Gabarito: “triângulos hiperbólicos possuem a soma de seus ângulos internos variável, ou seja, dependendo dos pontos escolhidos no universo hiperbólico estudado, as somas de seus ângulos internos são diferentes. Porém, sempre essa soma será inferior a 180° , e vale ressaltar que, quanto mais próximos os pontos que formam o triângulo, mais perto da soma euclidiana será.”

Observe, na Figura 87, dois triângulos hiperbólicos criados no disco de Poincaré e a medida de seus ângulos internos.

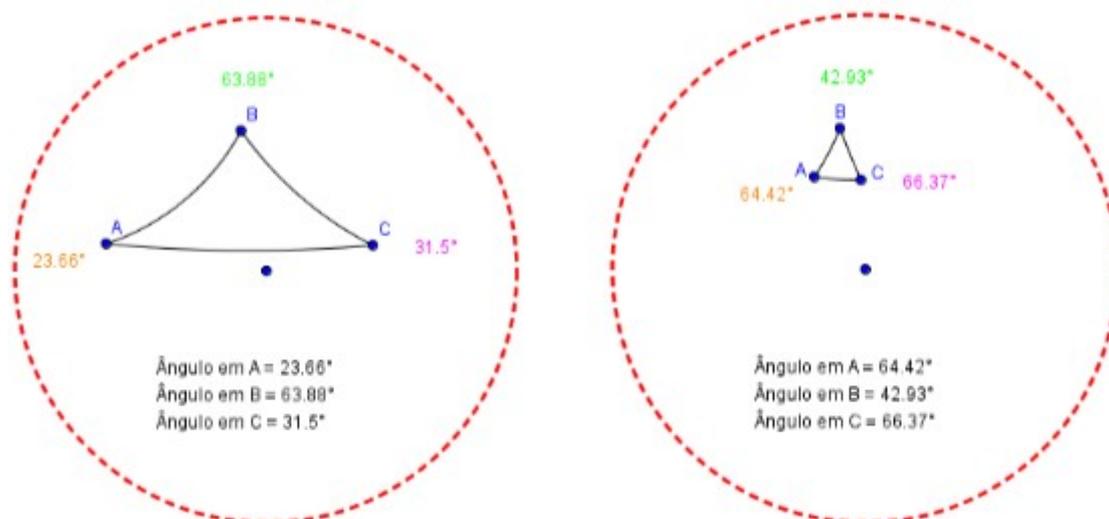


Figura 87 – Triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré - Fonte: (RIBEIRO, 2013, p. 102), com adaptações

De acordo com suas observações, complete corretamente as lacunas do texto a seguir marcando uma das opções dadas:

“Triângulos hiperbólicos possuem a soma de seus ângulos internos (constante/variável), ou seja, dependendo dos pontos escolhidos no universo hiperbólico estudado, as somas de seus ângulos internos são (iguais/diferentes). Porém, sempre essa soma será (inferior/igual/superior) a 180° , e vale ressaltar que, quanto mais próximos os pontos que formam o triângulo, (menos/mais) perto da soma euclidiana será”.

Oficina 5 Atividades sobre as Geometrias Hiperbólica e Elíptica.

1. Tipo de atividade: questão aberta de resposta curta.

Materiais: atividade impressa, com imagem colorida.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos a compreensão e a aplicação das propriedades básicas da soma dos ângulos em superfícies de curvatura constante onde não se aplica a geometria euclidiana.

Pré-requisitos: noções básicas sobre geometria elíptica e hiperbólica e suas propriedades.

Público sugerido: 9º ano (cerca de 14 anos).

Classificação: atividade individual ou em dupla.

Resposta esperada: não, pois, ligando dois pontos não consecutivos dos quadriláteros em cada uma das superfícies não euclidianas, serão formados dois triângulos que não possuem soma de seus ângulos internos igual a 180° , uma vez que, no caso da pseudoesfera, a soma dos ângulos será inferior a 180° e, no caso da esfera, a soma será superior. Consequentemente, a soma dos ângulos do quadrilátero será diferente de 360° , sendo, na pseudoesfera, inferior e, na esfera, superior a 360° .

Observe, na Figura 88, três triângulos feitos na superfície de uma estrutura similar à pseudoesfera de Beltrami.



Figura 88 – Triângulos hiperbólicos na pseudoesfera de Beltrami - Fonte: (DELAI; FRANCO, 2010)

É possível construir um retângulo sobre essa mesma superfície? E sobre uma esfera? Justifique sua resposta.

2. Tipo de atividade: completar o quadro.

Materiais: atividade impressa.

Objetivo(s) da atividade: possibilitar aos alunos que relacionem os diferentes tipos de geometria e suas diferenças.

Pré-requisitos: noções básicas sobre geometria euclidiana, geometria elíptica, geometria hiperbólica e suas propriedades.

Público sugerido: 9º ano (cerca de 14 anos)

Classificação: atividade individual ou em dupla.

Gabarito: Apresentado na Figura 89.

Propriedade matemática	Geometria Euclidiana	Geometrias não euclidianas	
		Geometria elíptica	Geometria hiperbólica
Dada uma reta e um ponto exterior a essa reta, existe(m)	Uma reta que passa pelo ponto dado e é paralela à reta dada	Nenhuma reta que passa pelo ponto dado e é paralela à reta dada	Infinitas retas que passam pelo ponto dado e são paralelas à reta dada
Duas retas distintas se intersectam em no máximo _____ ponto(s)	Um	Um	Dois
Retas paralelas	Existem	Existem	Não existem
A soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180°	Superior a 180°	Inferior a 180°

Figura 89 – Gabarito - Quadro Resumo - Fonte: elaborada pelo autor

De acordo com seus conhecimentos sobre as geometrias não euclidianas, complete o quadro-resumo da Figura 90:

Propriedade matemática	Geometria Euclidiana	Geometrias não euclidianas	
		Geometria elíptica	Geometria hiperbólica
Dada uma reta e um ponto exterior a essa reta, existe(m)	Uma reta que passa pelo ponto dado e é paralela à reta dada		Infinitas retas que passam pelo ponto dado e são paralelas à reta dada
Duas retas distintas se intersectam em no máximo _____ ponto(s)	Um	Um	
Retas paralelas	Existem	Existem	
A soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180°		Inferior a 180°

Figura 90 – Quadro Resumo - Fonte: elaborada pelo autor

Considerações Finais

A visão atual dos alunos em relação ao estudo da matemática, muitas vezes, reflete uma tendência preocupante: a percepção da disciplina como uma simples tarefa de decorar fórmulas e procedimentos. Em vez de compreenderem os fundamentos e a lógica por trás dos conceitos matemáticos, muitos alunos veem a matemática como um conjunto de regras a serem memorizadas, com o intuito de apenas passar em testes e exames. Essa compreensão da matemática superficial não apenas limita o verdadeiro entendimento da matéria, mas também contribui para a perpetuação do medo e da aversão aos seus objetos de conhecimento.

Dessa forma, vale ressaltar que a verdadeira essência da disciplina reside na capacidade de raciocinar logicamente e criativamente, resolver problemas complexos e aplicar conceitos matemáticos em situações do mundo real, algo que se perde quando a ênfase recai apenas na memorização mecânica. Portanto, é essencial que os educadores promovam uma abordagem alinhada com o real aprendizado da matéria, incentivando os alunos a explorar a matemática como uma linguagem universal e uma ferramenta poderosa para a compreensão do mundo à nossa volta.

Ademais, esse fenômeno apresentado, da matemática pela memorização, afeta completamente o estudo da geometria nas salas de aula de educação básica, uma vez que os estudantes adotam a geometria euclidiana presente na maior parte dos livros didáticos como sendo uma verdade absoluta e inquestionável, deixando de lado todo um desenvolvimento histórico das geometrias não euclidianas.

Nesse sentido, introduzir o ensino de geometrias não euclidianas na educação básica é crucial para ampliar a compreensão dos alunos sobre a natureza do espaço e promover o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. Pois, ao explorar essas novas geometrias, como as apresentadas neste trabalho, os alunos são desafiados a questionar as suposições básicas da geometria euclidiana e a reconhecer a diversidade de estruturas geométricas possíveis. Isso não apenas estimula a criatividade e a curiosidade dos alunos, mas também os prepara para enfrentar problemas complexos que exigem uma abordagem flexível e inovadora.

Além disso, o estudo das geometrias não euclidianas permite aos alunos entenderem melhor o mundo ao seu redor, já que muitos fenômenos naturais e científicos não podem ser adequadamente descritos pelas leis da geometria euclidiana. Portanto, ao incorporar esses conceitos no currículo de matemática, os educadores capacitam os alunos a pensarem de forma mais abrangente e crítica, preparando-os para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo com confiança e perspicácia, tornando a aprendizagem dos estudantes

verdadeiramente significativa.

Para alcançar os objetivos de aprendizagem descritos anteriormente, é fundamental investir na formação inicial e continuada dos educadores em relação às geometrias não euclidianas, uma vez que os professores desempenham um papel central na orientação dos alunos e na promoção de um ambiente de aprendizado estimulante e inclusivo. No mesmo sentido, como afirma (GONTIJO; FONSECA, 2020, p. 744) ao mencionar que "para se estimular a criatividade em matemática dos novos estudantes, é necessário se estimular a criatividade em matemática junto aos professores". Portanto, é essencial que eles possuam um conhecimento sólido e atualizado sobre os princípios e aplicações das geometrias não euclidianas, bem como estratégias eficazes de ensino para abordar esses conceitos de maneira acessível, envolvente e criativa.

Sendo assim, este trabalho destina-se aos professores da educação básica que desejam um material de apoio para solidificar seu conhecimento sobre esse universo geométrico diferente e desejam potencializar o trabalho geométrico desenvolvido em sala de aula com os estudantes, proporcionando uma visão crítica e ampla sobre o assunto, dando a devida relevância aos diversos personagens que contribuíram para o desenvolvimento e a construção do pensamento geométrico.

Referências

- AGUSTINI, E. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*. Uberlândia: FAMAT UFU; CEaD UFU, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 10, 52 e 53.
- ANTUNES, M. C. *Uma possível inserção das geometrias não-euclidianas no ensino médio*. 54 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) — UFRGS, Porto Alegre, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 44.
- AVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 45, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- BARBOSA, J. L. M. Geometria hiperbólica. In: UFES. *IX Escola de Geometria Diferencial*. Vitória, 1994. Citado na página 17.
- BARKER, S. F. *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1969. Traduzido por Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 21.
- BICUDO, I. *Os Elementos de Euclides*. São Paulo: Editora Unesp, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 27.
- BICUDO, I. *A história da geometria euclidiana do antigo Egito às salas de aula*. 2011. <<https://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/historia-da-geometria-euclidiana-do-antigo-egito-salas-de-aula.html>>. Acesso em: 18/10/2023. Citado 3 vezes nas páginas 15, 20 e 21.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Traduzido por Elza Gomide. Citado na página 15.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. segunda. São Paulo: Edgard Blucher, 1999. Traduzido por Elza Gomide. Citado na página 21.
- CARDOSO, A. *Buracos Negros: O que são, como são formados, sua estrutura e a foto do buraco negro*. 2019. <<https://medium.com/@andreacruzcardosocontato/buracos-negros-a9f7f000fc20>>. Acesso em: 28/03/2024. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 60.
- CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: Editora da SMB, 2005. Traduzido por Pedro Roitman. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 46.
- CÉSAR, S. M. C. *Geometria táxi: Uma exploração através de atividades didáticas*. Dissertação (Mestrado) — PUC-Minas, Belo Horizonte, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 30.
- COUTINHO, L. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1989. Citado 4 vezes nas páginas 21, 41, 42 e 46.
- DELAI, S.; FRANCO, V. S. *Geometrias não Euclidianas*. 2010. <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/236-4.pdf>>. Acesso em: 14/01/2024. Citado 4 vezes nas páginas 9, 11, 40 e 85.

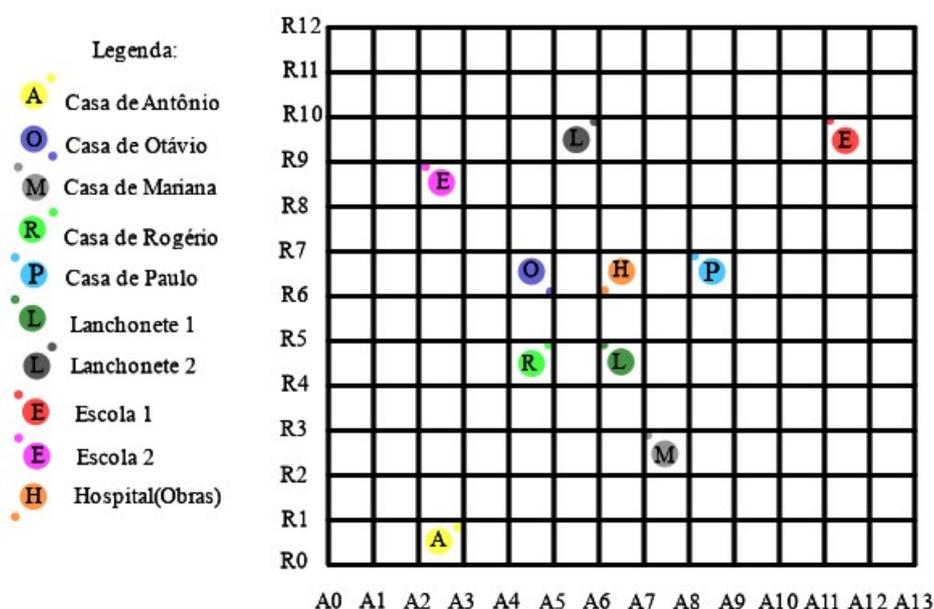
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004. Traduzido por Hygino H. Domingues. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- GALVAO, L. M. *Geometria Hiperbólica: Explorando o Disco de Poincaré no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — UNIRIO, Rio de Janeiro, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 10, 56 e 58.
- GONTIJO, C. H.; FONSECA, M. G. O lugar do pensamento crítico e criativo na formação de professores que ensinam matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática*, Passo Fundo, v. 3, 2020. Citado na página 88.
- GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. New York: W. H. Freeman and Company, 1993. Citado na página 17.
- KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. do. Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: O exemplo da geometria do táxi. *Boletim Gepem*, Rio de Janeiro, v. 44, p. 11–42, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 30, 34, 35 e 60.
- KATZ, V. J.; IMHAUSEN, A. et al. *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. New Jersey: Princeton University Press, 2007. Citado na página 15.
- KRAUSE, E. F. *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover Publications, 1986. Citado na página 29.
- MINHÓS, F. *Análise III*. 2011. <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4270/1/Ap_AMIII_2010-2011.pdf>. Acesso em: 10/04/2024. Citado na página 37.
- MIRANDA, D. F. *Geometria Táxi, uma métrica para os espaços geográficos e urbanos: Uma análise exploratória*. Dissertação (Mestrado) — PUC-Minas, Belo Horizonte, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 9, 30 e 31.
- MIRANDA, D. F.; BARROSO, L. C.; ABREU, J. F. Geometria táxi: uma geometria não-euclidiana descomplicada. In: UFOP. *Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto (EEMOP)*. Ouro Preto, 2005. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- NETO, G. B. L. Astronomia de posição. Notas de Aulas - IAG/USP. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 43.
- OLIVEIRA, E. S. *Geometrias não euclidianas e relatividade: Possibilidades para o ensino básico*. Dissertação (Mestrado) — IFSP, São Paulo, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 10, 42, 45 e 46.
- PRESMIC, J. G. *Geometrias não Euclidianas*. Dissertação (Mestrado) — UnB, Brasília, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 10, 46, 47 e 48.
- RAGGIO, A. A evolução da noção de sistema axiomático [l'évolution de la notion de système axiomatique]. *Philosophos - Revista de Filosofia*, v. 8, n. 1, 2003. Traduzido por Wagner de Campos Sanz e Stefano Domingues Stival. Citado na página 16.
- RIBEIRO, R. D. G. L. *O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica*. Dissertação (Mestrado) — USP, São Paulo, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 55.

- RIBEIRO, R. S. *Geometrias não-euclidianas na escola: Uma proposta de ensino através da geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, Porto Alegre, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 10, 11, 44, 45, 57, 58, 59 e 84.
- SILVA, E. C. *Alguns substitutos para o quinto postulado de Euclides*. Dissertação (Mestrado) — UFPI, Teresina, 2022. Citado na página 21.
- SMOGORZHEVSK, A. S. *Acerca de la Geometría de Lobachevski*. Moscou: MIR, 1978. Traduzido por Virgilio Llanos Mas. Citado na página 15.
- UFC. *Apostilas eletrônicas da Dona FiFi: Apostilas sobre a curvatura de Gauss*. 2022. <<https://seara.ufc.br/pt/producoes/nossas-producoes-e-colaboracoes/secoes-especiais-de-ciencia-e-tecnologia/apostilas-eletronicas-da-d-fifi/apostilas-sobre-a-curvatura-de-gauss/>>. Acesso em: 14/01/2024. Citado 3 vezes nas páginas 9, 38 e 39.
- UFPA, L. de Demonstrações da. *Experimentando: Malha gravitacional / Gravitational fabric*. 2021. <<https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=MfjrGpnpkgd>>. Acesso em: 28/03/2024. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 60.
- VOGADO, G. E. R. et al. A geometria hiperbólica e o reflexo de sua utilização para alunos do ensino médio. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, v. 03, p. 99–118, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 10, 11, 52, 57, 61 e 83.

Apêndices

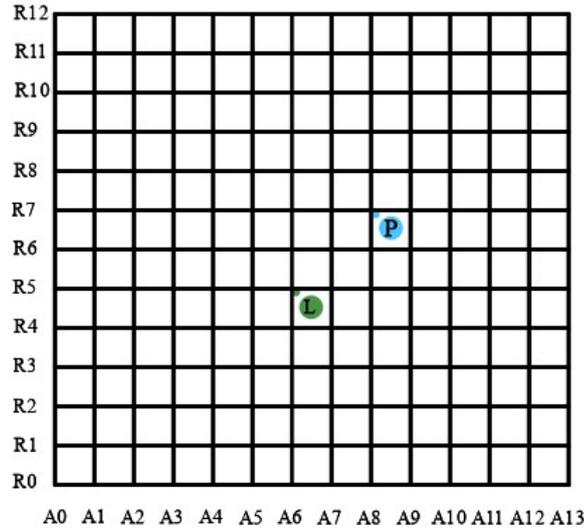
Apêndice A - Atividades sobre a Geometria do Taxista

A malha quadriculada da imagem a seguir representa um modelo da vista superior de um bairro, tais que as retas horizontais e verticais igualmente espaçadas determinam, respectivamente, as ruas e avenidas da região, determinando uma disposição cartesiana, uma vez que as ruas e avenidas foram enumeradas, como mostrado na figura.



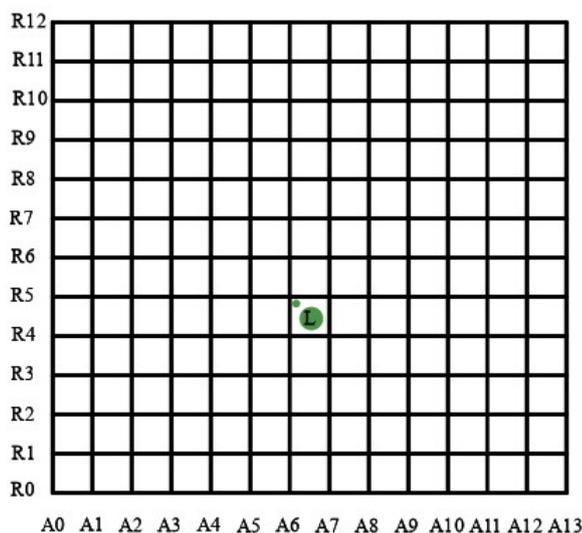
Todos os quarteirões, quadrados delimitados pelos cruzamentos das ruas com as avenidas, possuem algum tipo de construção/imóvel, logo, os deslocamentos nessa região só podem ser realizados quando percorridos pelas ruas ou avenidas. A malha da imagem apresenta alguns dos imóveis e construções da região, bem como uma legenda explicativa. Diante do exposto, responda o que se pede nas questões a seguir:

1. Joana trabalha para um aplicativo de entrega e utiliza sua bicicleta para fazer as entregas pelos bairros da cidade apresentada. Em certo momento, ela recebeu uma notificação para recolher três encomendas na lanchonete cuja porta se localizava no cruzamento da avenida 6 com a rua 5, dado pelo par ordenado $(6, 5)$, porém, ela havia acabado de realizar uma entrega na casa de Paulo de entrada localizada no cruzamento $(8, 7)$, sendo tais pontos representados na imagem a seguir.

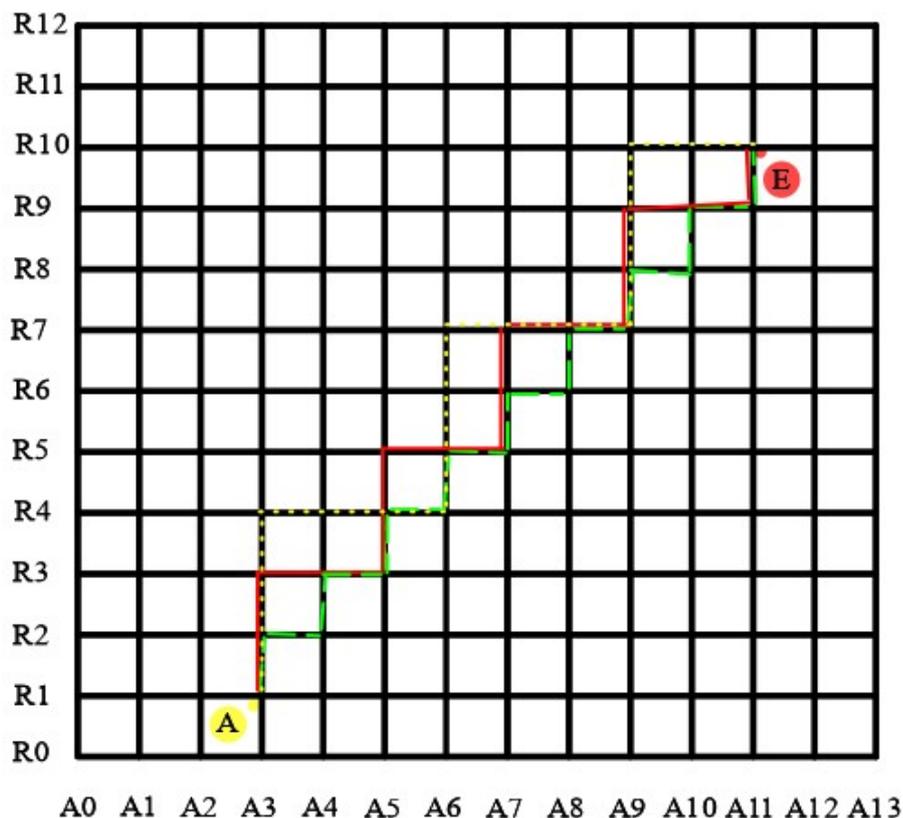


Adotando o lado do quarteirão como unidade de medida, responda ao que se pede nos itens a seguir:

- (a) Qual é a menor distância possível para Joana pegar as entregas?
 - (b) Existem percursos alternativos que mantenham essa distância mínima?
 - (c) Supondo que não existissem construções nos quarteirões, isso alteraria sua resposta para as perguntas anteriores? Justifique sua resposta.
2. Ao pegar as encomendas na lanchonete do problema anterior, ela percebeu que ocorreu uma falha no aplicativo, de forma que era possível visualizar somente a distância da porta da lanchonete para os locais em que seriam feitas as entregas, ou seja, não era possível obter a localização exata dos pontos de entrega. Ela observou que essas distâncias, para os três locais de entrega, eram de um, dois e três quarteirões. Assinale, na malha quadriculada abaixo, os possíveis locais para a entrega das três encomendas e responda o que se pede no item a seguir. Adote cores ou símbolos diferentes para cada uma delas.



- (a) Os pontos assinalados estão dispostos segundo qual forma geométrica?
3. Antônio estudava na escola de entrada localizada no ponto $(11, 10)$, já a porta de sua moradia era no ponto $(3, 1)$. Durante três dias, ele realizou percursos de ida distintos, apresentados na imagem a seguir pelos trajetos coloridos.



Assinale o item que completa o texto de maneira correta:

Sabendo que, na geometria do taxista, retas são determinadas por caminhos que minimizam distâncias entre pontos pertencentes a eles e que Euclides afirma no livro “Os Elementos” que dois pontos distintos determinam uma única reta,

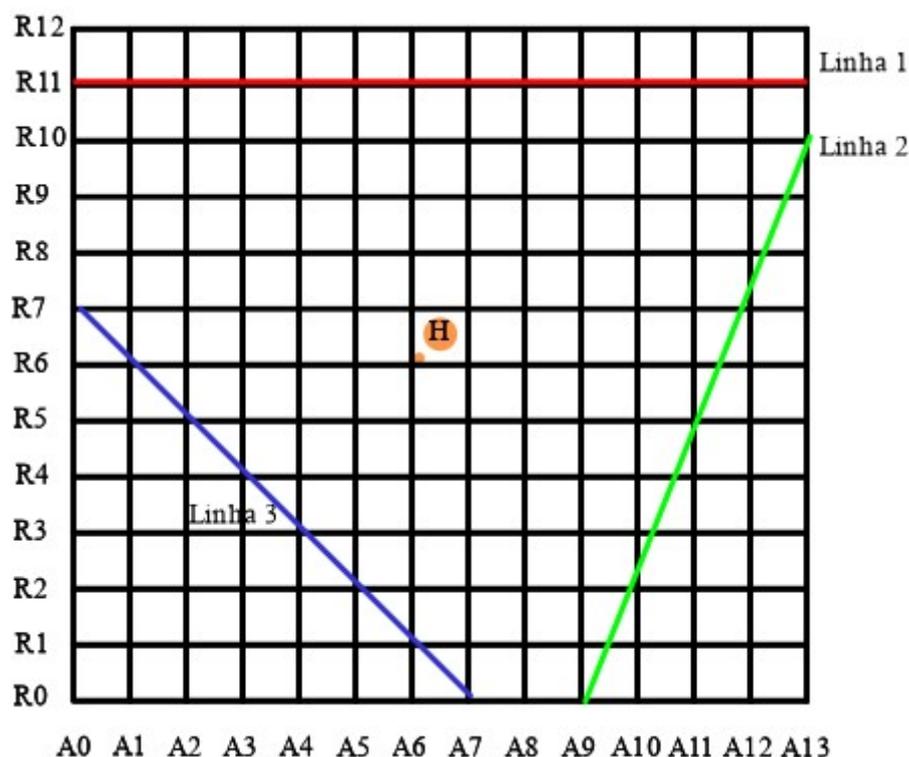
(a) os trajetos não determinam segmentos de reta e a geometria em questão obedece ao enunciado de Euclides.

(b) os trajetos não determinam segmentos de reta e a geometria em questão não obedece ao enunciado de Euclides.

(c) os trajetos determinam segmentos de reta e a geometria em questão obedece ao enunciado de Euclides.

(d) os trajetos determinam segmentos de reta e a geometria em questão não obedece ao enunciado de Euclides.

4. Pela região apresentada, passavam três linhas de metrô distintas, representadas pelas linhas coloridas da imagem abaixo:



Tendo isso em vista, o governo local acredita que esse bairro é estratégico para a construção de um hospital, de entrada localizada na posição (6, 6). Dessa maneira, para ampliar o acesso de outras localidades a esse hospital, decidiu-se construir uma estação de metrô em cada uma das linhas, de modo que suas distâncias para o hospital sejam as menores possíveis.

(a) Supondo que você fosse o responsável técnico por definir os locais de construção dessas estações, escreva o trecho do relatório em que você justifica a escolha dos locais para as obras.

(b) Caso não existissem construções nos quarteirões e fosse possível a livre circulação por eles, isso alteraria a escolha dos pontos para o metrô? Em caso afirmativo, explique o raciocínio usado na escolha, dado essa nova condição.

Apêndice B - Atividades sobre Curvaturas

1. De acordo com os conceitos e as propriedades de curvaturas e seus conhecimentos, julgue os itens a seguir em certo (C) ou errado (E).

() A curvatura de uma linha reta é positiva.

() Circunferências descrevem trajetórias circulares de curvatura constante.

() Quanto maior o raio de uma circunferência, maior será sua curvatura.

() A maior circunferência que tangencia uma curva em um determinado ponto pelo seu lado côncavo é denominada círculo osculante.

() A curvatura em um ponto de uma curva qualquer é dada pela curvatura do círculo osculante à curva nesse ponto e, em uma superfície, ela é dada pela curvatura de uma esfera osculante.

2. Sabe-se que a curvatura de uma circunferência deve ser constante e inversamente proporcional ao seu raio. Assim, sendo C a curvatura da circunferência e R seu raio, assinale a alternativa que corresponde à relação correta:

(a) $C + R = 1$.

(b) $C - R = 1$.

(c) $C = \frac{1}{R}$.

(d) $\frac{C}{R} = 1$.

3. Classifique a curvatura da superfície dos objetos das imagens a seguir em: positiva, negativa ou nula.

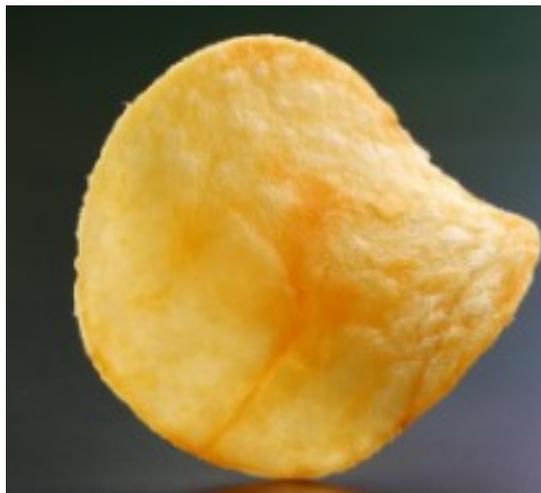
(a)



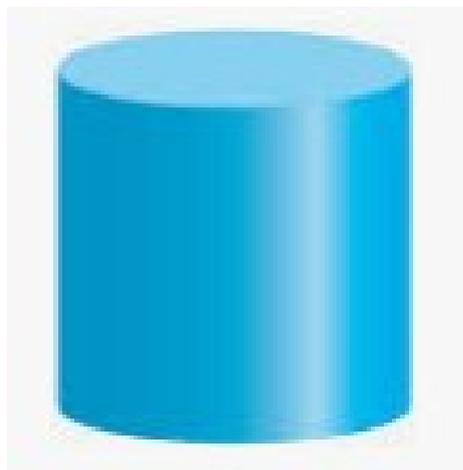
(b)



(c)



(d)



(e)



(f) (Desafio)



4. O Teorema Egregium de Gauss possibilita estabelecer a curvatura gaussiana como um invariante geométrico da superfície, ou seja, superfícies obtidas por meio de transformações isométricas possuem a mesma curvatura, não sendo possível sobrepor duas superfícies de curvaturas diferentes. Diante do exposto, apresente uma aplicação prática do teorema.

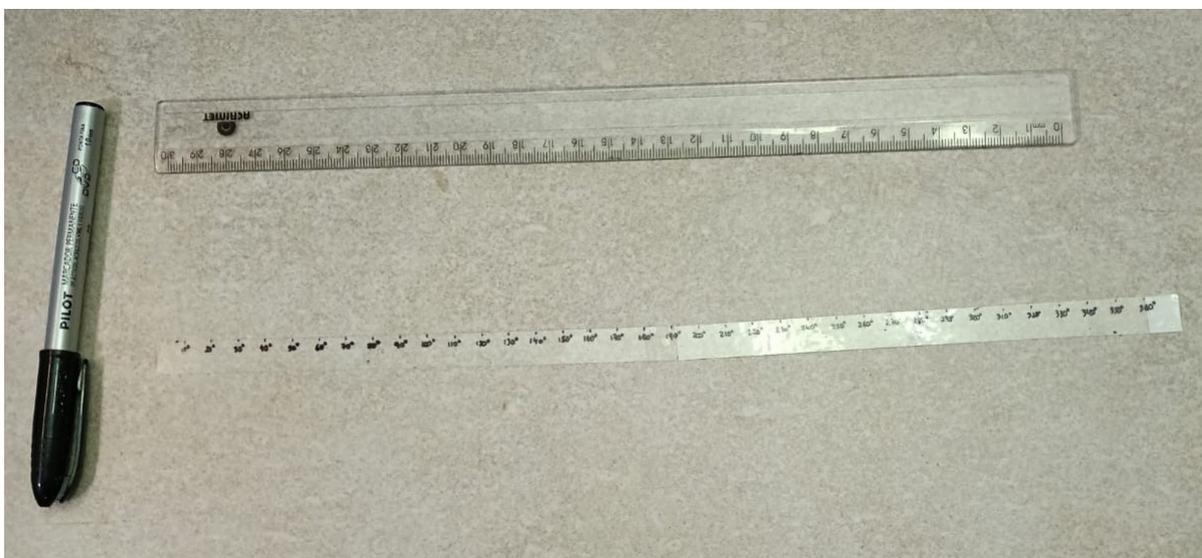
Apêndice C - Construção do transferidor esférico e seu uso para compreender a geometria esférica, suas propriedades e aplicações

1. Conhecendo o conceito de reta na geometria esférica e fazendo um paralelo com uma geometria euclidiana.
 - (a) Com o auxílio de um alfinete para mapa, marque dois pontos na esfera de isopor.
 - (b) Em seguida, com um elástico ou uma linha de costura, marque sobre a esfera o menor segmento que conecta os pontos marcados.
 - (c) Prolongue o segmento feito no passo anterior.
 - (i) Em uma superfície plana, quando se prolonga um segmento de reta, obtém-se qual ente geométrico?
 - (ii) Em ambos os casos as retas minimizam a distância entre dois pontos pertencentes a ela. Porém, podemos afirmar que em ambos os casos ela é limitada? E finita?
 - (d) Existem retas paralelas nessa nova geometria?
 - (e) Essa nova superfície obedece ao quinto postulado de Euclides? Justifique sua resposta.
2. Passo a passo da montagem do transferidor esférico.
 - (a) Com o auxílio de uma linha, meça o comprimento do diâmetro da esfera e marque em uma tira de plástico/acetato.

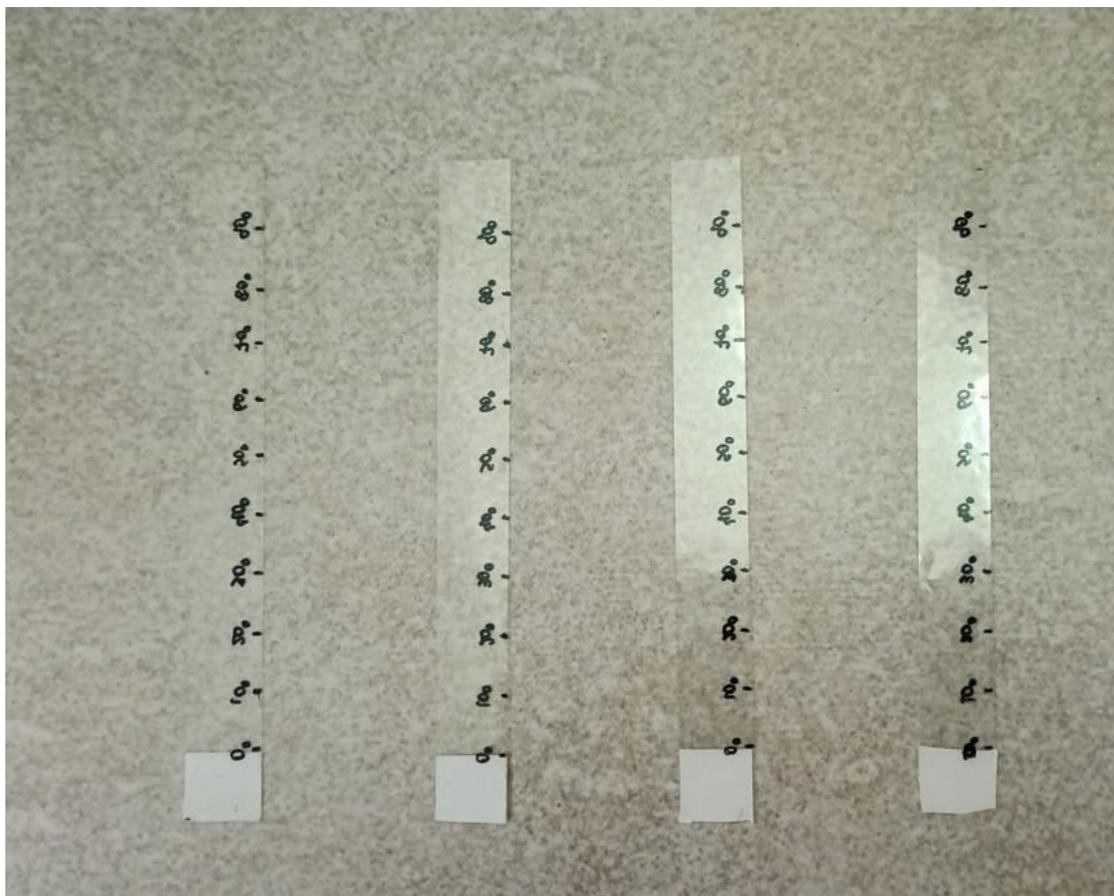




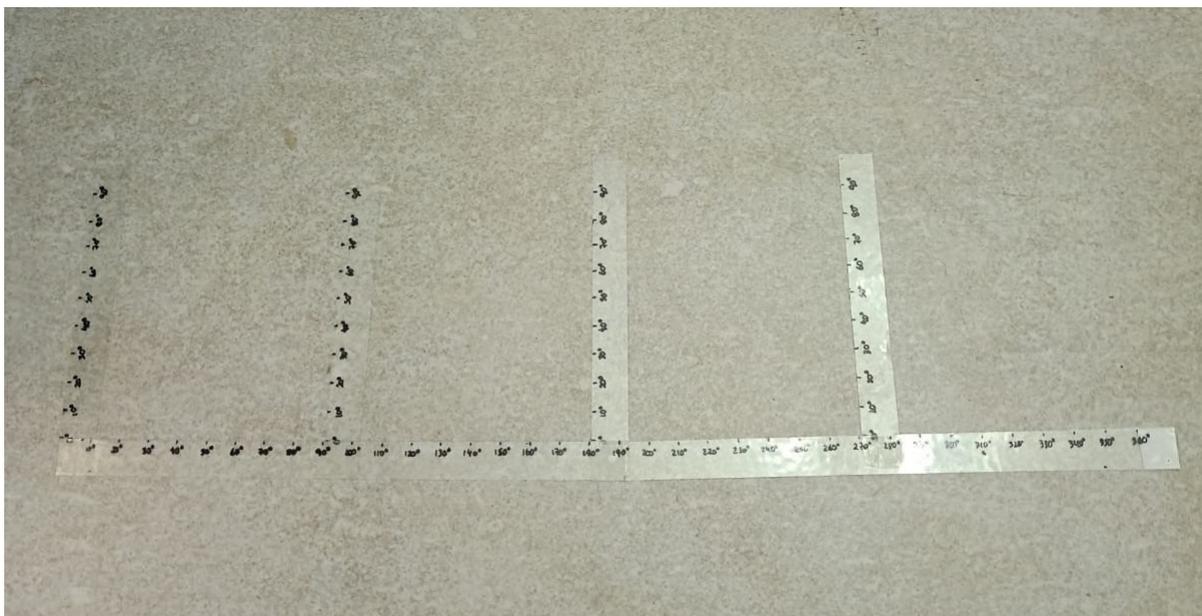
(b) Divida esse pedaço em 360 partes iguais com auxílio da régua e faça marcações com a caneta permanente. No exemplo abaixo, as marcações foram feitas a cada 10° .



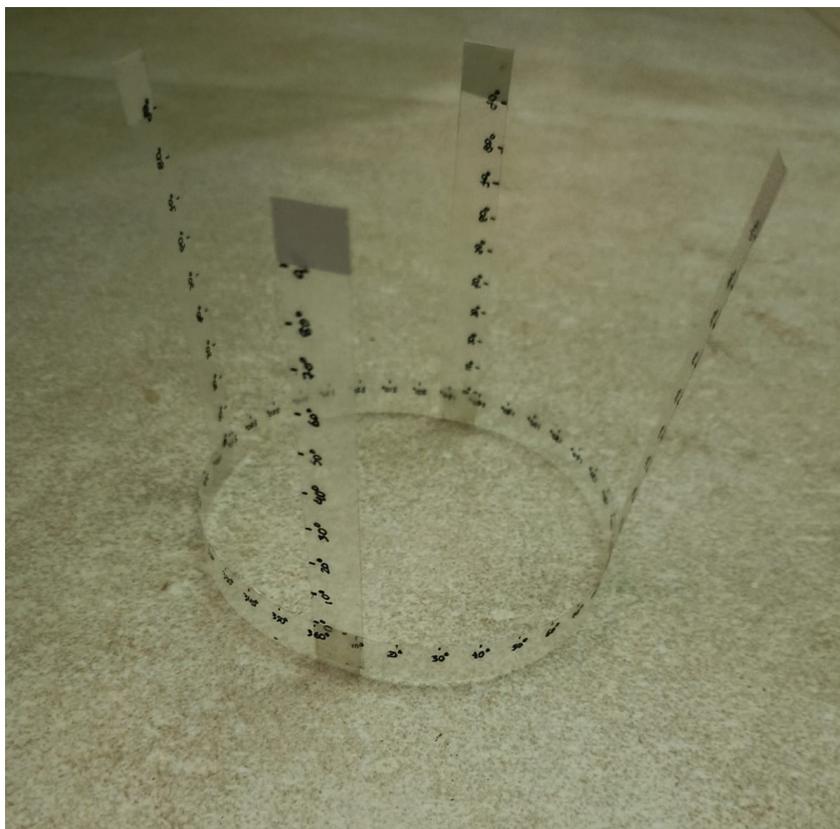
(c) Corte mais quatro tirinhas de plástico e, utilizando a mesma proporção, faça marcações até 90° em cada uma delas.



(d) Cole-as, com a fita dupla face, nas marcas de 0° , 90° , 180° e 270° da tira maior.

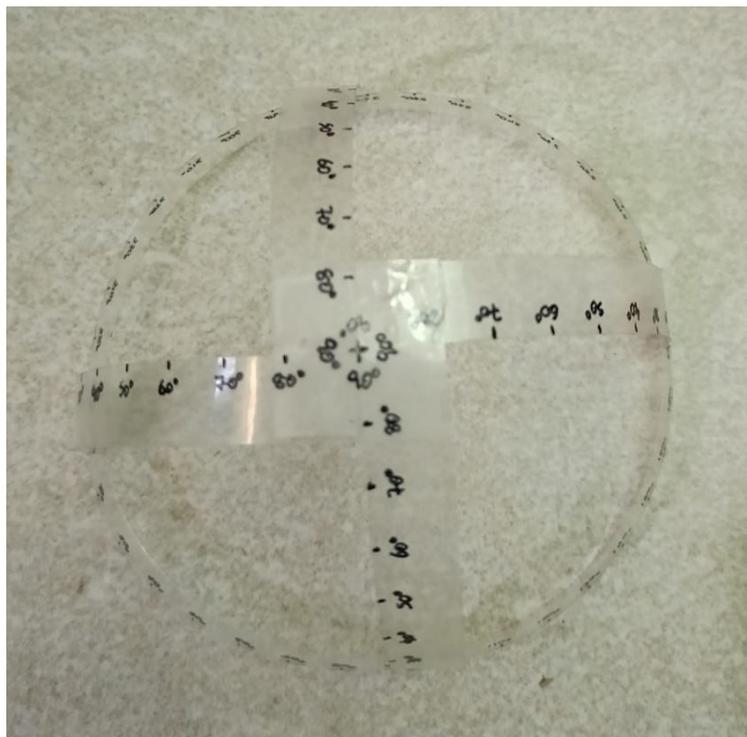


(e) Junte as pontas da maior tira, deixando uma pequena sobra para diâmetro da circunferência.

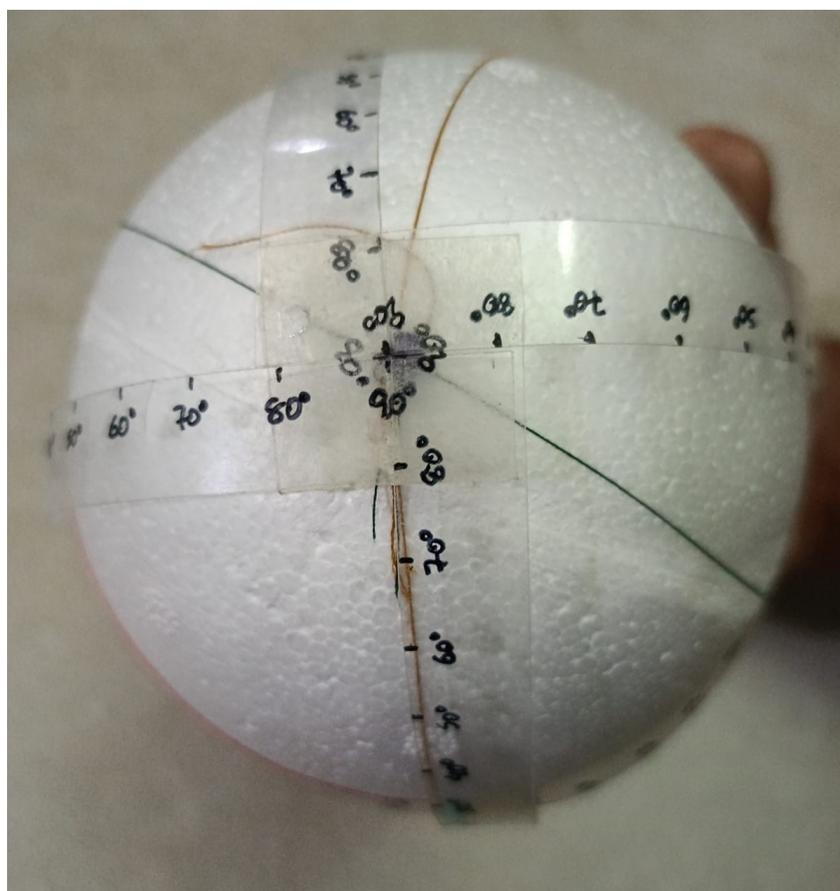


(f) Cole as pontas que ficaram soltas das tiras menores, de modo que o ângulo formado entre elas seja de 90° .

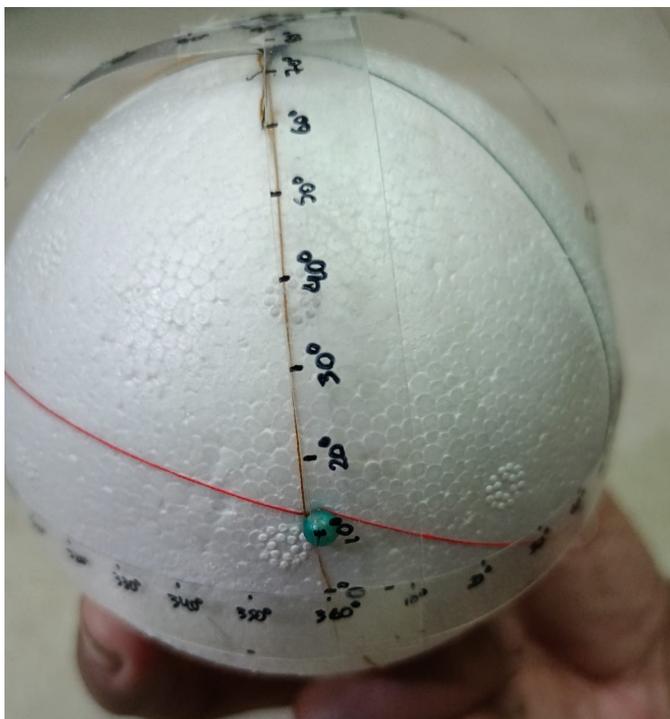


**Breve tutorial de uso:**

- i) Coloque o vértice do ângulo a ser calculado abaixo do encontro das tiras menores.



ii) Alinhe a tira menor que foi colocada no marco inicial (0° e 360°) da tira maior sobre uma das retas que contém um dos lados do ângulo.



iii) Observe, de modo aproximado, que o valor do ângulo formado é dado pela marca feita na tira maior pela outra reta que contém o outro lado do ângulo a ser calculado.



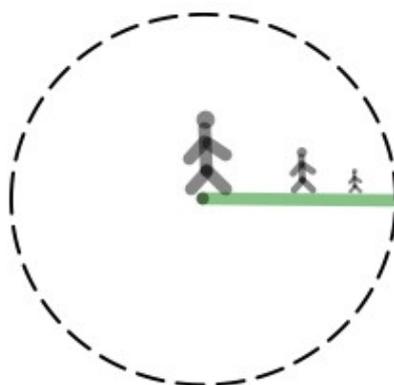
Note que, no exemplo acima, a medida do ângulo é de aproximadamente 60° .

3. Conhecendo propriedades dessa geometria com o uso do transferidor.

- (a) Use um transferidor para determinar o ângulo formado entre duas retas na superfície esférica (dica: aproveite as retas formadas na atividade 1 (e)).
- (b) Monte, com o auxílio das linhas e dos alfinetes, um triângulo e calcule as medidas dos seus ângulos internos com o transferidor.
- (c) Na geometria euclidiana plana, qual é o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? Essa nova geometria obedece à mesma propriedade?
4. Medindo a distância aproximada entre duas cidades com Regra de Três simples, latitudes e longitudes.
- (a) Construa a Linha do Equador e o Meridiano de Greenwich com o transferidor da atividade 2 (observe que eles serão nossa referência para a marcação das cidades);
- (b) Pesquise as latitudes e as longitudes de Brasília e Roma.
- (c) Marque, com os alfinetes, Brasília e Roma na esfera, de acordo com as latitudes e as longitudes pesquisadas;
- (d) Use a Regra de Três simples, com o uso do raio do planeta, o raio da esfera e a medida angular do arco formado pelas cidades, para obter uma aproximação da distância entre as cidades;
- (e) Construa um paralelo geográfico com o auxílio do transferidor;
- (f) Verifique que o menor trajeto de avião para locais no mesmo paralelo não tem trajetória sobre o paralelo.

Apêndice D - Atividades sobre a Geometria Hiperbólica

1. Considere uma cidade redonda imaginária, em que, à medida em que uma pessoa se afasta do centro dessa cidade, ela e tudo em sua volta reduzem de tamanho progressivamente, de modo que essa redução seja imperceptível para ela e, caso a pessoa, partindo do centro da cidade, ande metade da distância até a borda da cidade, ela teria metade do tamanho inicial, assim como todas as coisas ao seu redor, como se pode observar na imagem abaixo.

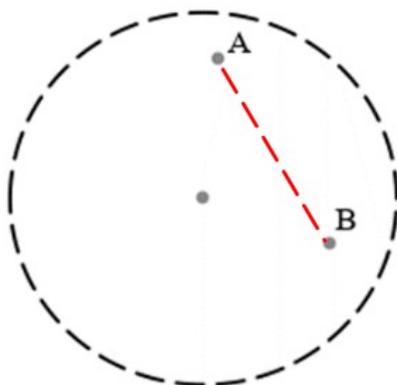


De acordo com a situação apresentada, responda o que se pede nos itens a seguir:

(a) Sabendo-se que, andando o caminho mais curto, seriam necessários mil passos para um indivíduo chegar à borda da cidade partindo do centro, tendo seu tamanho no centro da cidade como referência, quantos passos seriam necessários para que a pessoa consiga chegar à borda da cidade após ter alcançado metade do trajeto entre o centro e a borda da cidade?

(b) Seria possível que a pessoa conseguisse sair da cidade imaginária? Justifique sua resposta.

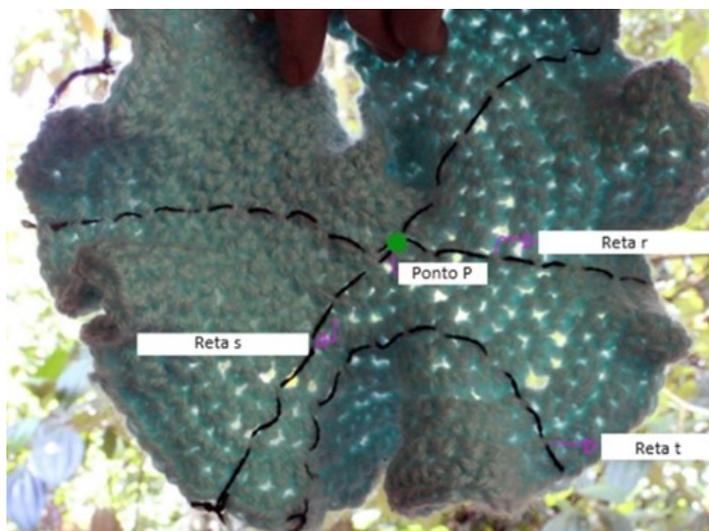
(c) Dados os pontos A e B da cidade e o traçado vermelho entre os pontos A e B , destacados na imagem a seguir, pode-se afirmar que a trajetória do tracejado é a que determina o percurso com a menor quantidade de passos entre os pontos A e B da cidade? Se a resposta for negativa, como deveria ser essa trajetória? Justifique sua resposta.



2. Dentre os diversos modelos que retratam as propriedades da geometria hiperbólica, existem os modelos do disco de Klein e do disco de Poincaré, nos quais o universo é dado pelo interior de um disco circular. Todavia, os modelos possuem definições distintas de reta.

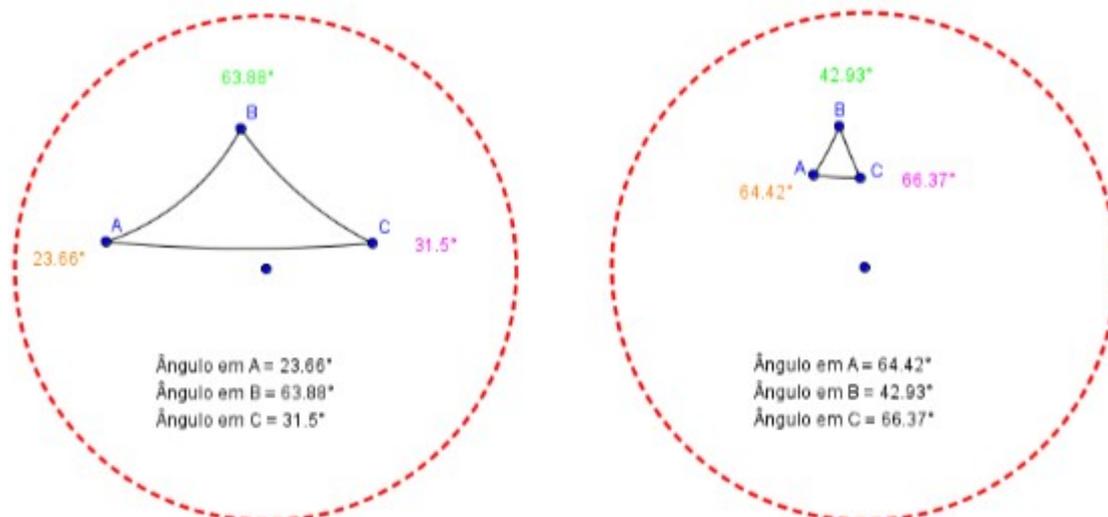
Nesse sentido, a matemática inglesa Daiana Tamina decidiu adotar uma curiosa superfície hiperbólica para trabalhar as propriedades não euclidianas da geometria hiperbólica, um modelo em que o universo é dado por uma construção em crochê.

A imagem a seguir apresenta uma propriedade que diferencia a geometria hiperbólica da geometria euclidiana no modelo do crochê hiperbólico.



Escreva qual é essa propriedade e adapte, em um desenho, a construção realizada na superfície do crochê em cada um dos dois modelos de disco mencionados.

3. Observe, na imagem a seguir, dois triângulos hiperbólicos criados no disco de Poincaré e a medida de seus ângulos internos.



De acordo com suas observações, complete corretamente as lacunas do texto a seguir marcando uma das opções dadas:

“Triângulos hiperbólicos possuem a soma de seus ângulos internos (constante/variável), ou seja, dependendo dos pontos escolhidos no universo hiperbólico estudado, as somas de seus ângulos internos são (iguais/diferentes). Porém, sempre essa soma será (inferior/igual/superior) a 180° , e vale ressaltar que, quanto mais próximos os pontos que formam o triângulo, (menos/mais) perto da soma euclidiana será”.

Apêndice E - Atividades sobre as Geometrias Hiperbólica e Elíptica

1. Observe, na imagem a seguir, três triângulos feitos na superfície de uma estrutura similar à pseudoesfera de Beltrami.



É possível construir um retângulo sobre essa mesma superfície? E sobre uma esfera? Justifique sua resposta.

2. De acordo com seus conhecimentos sobre as geometrias não euclidianas, complete o quadro-resumo a seguir:

Propriedade matemática	Geometria Euclidiana	Geometrias não euclidianas	
		Geometria elíptica	Geometria hiperbólica
Dada uma reta e um ponto exterior a essa reta, existe(m)	Uma reta que passa pelo ponto dado e é paralela à reta dada		Infinitas retas que passam pelo ponto dado e são paralelas à reta dada
Duas retas distintas se intersectam em no máximo _____ ponto(s)	Um	Um	
Retas paralelas	Existem	Existem	
A soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180°		Inferior a 180°