Universidade de Brasília


INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ELTON JOSÉ SOARES


# PROBABILIDADE, ERROS INTUITIVOS E FALÁCIAS:

# UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO


Brasília

2024

ELTON JOSÉ SOARES

# PROBABILIDADE, ERROS INTUITIVOS E FALÁCIAS:
# UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Simone Vasconcelos da Silva

Brasília

2024

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SS676p

Soares, Elton José
PROBABILIDADE, ERROS INTUITIVOS E FALÁCIAS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO / Elton José Soares; orientador Simone Vasconcelos Da Silva; co-orientador Simone Vasconcelos Da Silva. -- Brasília, 2024.
76 p.

Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2024.

1. Teoria de Probabilidade. 2. Vieses intuitivos. 3. Probabilidade Condicional. 4. Eventos Independentes. 5. Falácia do Promotor. I. Da Silva, Simone Vasconcelos, orient. II. Da Silva, Simone Vasconcelos, co-orient. III. Título.

ELTON JOSÉ SOARES

**PROBABILIDADE, ERROS INTUITIVOS E FALÁCIAS:**

**UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

---

Profa. Dra. Simone Vasconcelos da Silva - FUP/UnB (Orientadora)

---

Prof. Dr. Magno Alves de Oliveira-MAT/UFV (Membro)

---

Prof. Dr. Theo Allan Darn Zapata-MAT/UnB (Membro)

*Dedico este trabalho às mulheres da minha vida: Lúcia (minha genitora), Janaína (minha esposa) e Beatriz (minha filha). À minha sogra, Lourdes, e ao meu sogro, Calixto, por emanarem orações e energias positivas constantemente. À minha orientadora, Professora Doutora Simone Vasconcelos da Silva, pela perfeita orientação nesta dissertação.*

**AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter permitido a realização de um sonho. À minha orientadora, Simone Vasconcelos da Silva, pelo preciosíssimo auxílio, incentivo e por compartilhar tamanho conhecimento para chancelar esta dissertação. Expresso minha gratidão aos meus professores pela dedicação nas aulas, em especial ao Igor e Vinicius, ex-coordenadores do programa; aos meus amigos Sidney Pires e Walter Souza, estes, sempre incentivaram a conclusão deste trabalho. Também quero agradecer aos meus colegas de sala, Cecília, Danilo, Elisângela e Ricardo, pelo companheirismo e apoio durante todo o processo acadêmico.

*"O ignorante afirma, o sábio duvida, o sensato reflete".*

*Aristóteles*

*"O problema do mundo de hoje é que as pessoas inteligentes estão cheias de dúvidas, e as pessoas idiotas estão cheias de certeza".*

*Bertrand Russell*

## RESUMO

Normalmente, os indivíduos se deixam guiar por impressões e sentimentos em situações de tomada de decisão sob incerteza e a confiança em suas crenças e preferências, em geral, é justificada, mas nem sempre a matemática empregada na conclusão está correta. Este trabalho explora como a Teoria de Probabilidade pode ser tratada na educação básica, considerando situações em que a intuição e a matemática se confrontam, ou seja, quando se têm vieses intuitivos. Analisamos e discutimos formas de se aplicar apropriadamente os conceitos de independência de eventos, probabilidade condicional, teorema de Bayes, entre outros. Alguns dos problemas apresentados são baseados em situações reais, como em resultados de exames laboratoriais (falso positivo) e erros cometidos em tribunais de justiça (falácia do promotor). Com intuito de facilitar o aprendizado do aluno do Ensino Médio e auxiliar na explanação do conteúdo pelo professor, os cálculos probabilísticos são apresentados de forma mais objetiva e simplificada. Como recurso educacional vinculado a esta dissertação, apresentamos uma sequência de videoaulas abordando a discussão de alguns dos problemas propostos no trabalho.



**Palavras-chaves:** Teoria de Probabilidade, Vieses intuitivos, Eventos Independentes, Probabilidade Condicional, Falácia do Promotor.

# ABSTRACT

Normally, individuals are guided by impressions and feelings in decision-making situations under uncertainty and confidence in their beliefs and preferences is generally justified, but the mathematics used in the conclusion are not always correct. This work explores how the content of Probability Theory can be treated in basic education considering situations in which intuition and mathematics clash, that is, when there are intuitive biases. We analyze and discuss ways to appropriately apply the concepts of event independence, conditional probability, Bayes' theorem, among others. Some of the problems presented are based on real situations, such as laboratory test results (false positive) and errors made in courts of law (prosecutor's fallacy). In order to simplify the learning of high school students and assist in the explanation of the teacher, the probabilistic calculations are presented in a more objective way. As an educational resource linked to this dissertation, we present a video classes sequence addressing the discussion of some of the problems proposed in the work.



**Key-words:** Probability Theory, Intuitive Biases, Independent Events, Conditional Probability, Prosecutor's Fallacy.

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

# SUMÁRIO

## INTRODUÇÃO

O pensamento intuitivo desempenha um papel fundamental na construção do conhecimento matemático, porém é preciso ter cuidado ao analisar uma situação problema. Muitas vezes, o fato que será interpretado é tão simples que sua análise é imediata, ou seja, que se chega a uma solução dispensando o rigor matemático. A intuição ocorre naturalmente, independentemente de qualquer conhecimento teórico prévio, porém em alguns casos, está sujeita a erros.

A palavra falácia é utilizada, em geral, quando se obtém uma conclusão equivocada a partir de proposições, ou seja, de declarações, também chamadas premissas. Trata-se de um argumento mal construído, que engana e induz a erro, quando as pessoas deixam de aplicar uma regra lógica relevante.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta os conceitos de certeza e incerteza como um par de ideias fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático a ser explorado no Ensino Médio

> Em Matemática, a validação de ideias deriva da busca de certeza. Como certeza e incerteza são inerentes à elaboração de conjecturas e predições, podemos considerar que a visualização, a antevisão, a previsão e a antecipação são inseparáveis desse par de ideias e estão associadas às práticas de expressar e comunicar ideias e estratégias matemáticas, validando-as por meio de sugestões. Expressar incertezas em relação às próprias ideias e às dos colegas, indicando seus limites, e imaginar, criar e cogitar coletivamente o que ocorreria na extrapolação dos limites indicados também integra esse par. (BRASIL, 2018. p.520-521)

Em abordagens didáticas, a investigação dos erros intuitivos à luz da Teoria da Probabilidade pode se constituir como um catalisador de processos de ensino aprendizagem. É importante que os docentes contextualizem a matemática de modo que os discentes se interessem pelo conteúdo estudado. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) reforçam essa necessidade no estudo da Teoria de Probabilidade, relacionando acaso e incerteza à intuição:

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o

> aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1997, p.56)

A presente dissertação tem o objetivo de reunir e apresentar problemas que envolvam erros intuitivos e conceitos da teoria de probabilidade como instrumento para o aprofundamento do conhecimento sobre o tema no Ensino Médio, despertando a curiosidade e o interesse dos alunos.

Para auxiliar na aplicabilidade e replicabilidade da abordagem proposta nesses problemas e visando alcançar professores e estudantes da educação básica de maneira mais eficaz, apresentamos como recurso educacional vinculado a este trabalho uma sequência de videoaulas, que abordam as soluções de alguns dos problemas propostos. Link do vídeo de apresentação da dissertação: https://youtu.be/VizBNRL8d8o

Este trabalho está dividido em 3 capítulos. No primeiro capítulo são propostos e solucionados problemas probabilísticos que não requerem um conhecimento robusto em probabilidade. São eles: O problema do futebol; Procurando a Chapeuzinho Vermelho; Linda, menos é mais; O problema clássico de Monty Hall.

No capítulo 2 são apresentadas as bases teóricas do conteúdo proposto: A teoria de probabilidade. Além disso, apresentamos um pouco do contexto histórico da formalização dos conceitos matemáticos dessa teoria. São apresentadas também as diferentes definições de probabilidade, a aplicabilidade de cada uma delas e as propriedades e teoremas básicos, fundamentais para o entendimento do capítulo seguinte. Neste capítulo, os problemas propostos que envolvem aplicação do Teorema de Bayes, serão, também, resolvidos de forma mais prática, ou seja, mais acessível ao entendimento do aluno e da explicação do professor do ensino básico.

No capítulo 3 são abordados os erros probabilísticos cometidos em interpretações equivocadas de probabilidade condicional (falácia do promotor), da aplicação do Teorema de Bayes e do conceito de Independência entre Eventos Probabilísticos.

# 1 PROBLEMAS INTRODUTÓRIOS

Neste capítulo apresentaremos quatro situações probabilísticas que sugerem erros intuitivos e que podem ser utilizados para introduzir a teoria de probabilidade no Ensino Médio de forma a instigar o interesse dos estudantes pelo assunto. A partir das noções prévias de probabilidade adquiridos no Ensino Fundamental e nas situações presentes no cotidiano, espera-se que os estudantes sejam estimulados a participar da discussão dos problemas propostos.

O primeiro dos problemas, intitulado “O Problema do Futebol”, foi elaborado pelo autor. O segundo, chamado de “Procurando Chapeuzinho Vermelho” foi adaptado de uma prova de concurso para agente administrativo do Conselho Regional de Medicina, realizado em 2021 e elaborado pelo Instituto Quadrix. O terceiro, foi extraído de Kahneman (2012, p.198-199). O quarto é o problema clássico de Monty Hall ou paradoxo de Monty Hall exposto num programa televisivo Trato Feito (Let's Make a Deal) nos Estados Unidos da América na década de 1970.

## 1.1. O problema do futebol.

***Imagine dois times de futebol, $A$ e $B$. Haverá um jogo entre eles em um campo neutro, desprovido de torcedores. Suponha que os dois times tenham características semelhantes, ou seja, estatísticas que nos mostram que cada um dos times tem a mesma chance de vitória. Então, numa partida de futebol entre as duas equipes $A$ e $B$, qual a probabilidade do time $A$ ser o vencedor?***

Considerando a primeira resposta que vem à mente, é possível que se tenha pensado que a probabilidade do time $A$ ser o vencedor do jogo é de 50%, o que é um equívoco. Ao analisar a questão de forma mais cuidadosa percebe-se que o conjunto de todos os resultados possíveis para partida de futebol são: vitória do time $A$, vitória do time $B$ ou empate entre os dois times. Concebendo agora os cálculos para os três resultados possíveis para a partida, uma atualização da probabilidade do time $A$ ser o vencedor do jogo sugere que seja de $\frac{1}{3} \cong 33{,}33\%$, acontece que essa também é uma interpretação equivocada.

De fato, são apenas três resultados possíveis para uma partida de futebol, e o problema destaca que a probabilidade de vitória dos dois times é a mesma, porém não se pode afirmar que a probabilidade de vitória de cada time seja igual a probabilidade de empate. Por exemplo, pode-se ter a probabilidade de empate entre os dois times sendo de 60%. Neste caso, a probabilidade do time $A$ vencer (que é igual à probabilidade do time $B$ vencer) é de 20%. Analogamente, se a probabilidade de empate for de 10%, a probabilidade do time $A$ vencer será de 45%.

Assim, percebe-se que há mais de uma solução para a situação proposta e o problema proposto só pode ser determinado de forma precisa se a probabilidade de empate entre os times for fornecida.

## 1.2. Procurando a Chapeuzinho Vermelho.

***A Chapeuzinho Vermelho se escondeu em um bosque com cinquenta árvores e o Lobo Mau está determinado a encontrá-la. Ele escolhe aleatoriamente as árvores, uma após a outra, e não retorna às árvores que já verificou. A probabilidade de o Lobo Mau encontrar a Chapeuzinho Vermelho na quinta tentativa é superior à probabilidade de encontrá-la na primeira tentativa?***

Provavelmente, de forma intuitiva, o leitor responde a essa questão afirmando que "SIM", ou seja, que é mais provável que o Lobo encontre a Chapeuzinho Vermelho na quinta tentativa, pelo fato de ter reduzido o número de árvores. Denotando por $S_n$ e $F_n$, o sucesso e o fracasso na tentativa $n$, respectivamente, temos

$$P(S_1) = \frac{1}{50}.$$

Para que o Lobo Mau encontre a Chapeuzinho exatamente na quinta tentativa, é necessário que ele tenha fracasso nas quatro primeiras tentativas. Assim, a probabilidade é obtida pelo produto

$$P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot P(F_3) \cdot P(F_4) \cdot P(S_5) = \frac{49}{50} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{47}{48} \cdot \frac{46}{47} \cdot \frac{1}{46} = \frac{1}{50},$$

ou seja, a probabilidade de o Lobo Mau encontrar a Chapeuzinho na quinta tentativa é igual a probabilidade de encontrá-la na primeira. Na verdade, apesar de contraintuitivo, a probabilidade é a mesma para qualquer que seja a tentativa.

### 1.3. Linda: Menos é Mais

Considere uma mulher fictícia chamada Linda

***Linda tem 31 anos de idade, é solteira, franca e muito inteligente. É formada em filosofia. Quando era estudante, preocupava-se profundamente com questões de discriminação e justiça social, e também participava de manifestações antinucleares.***

***Qual alternativa é mais provável?***

1. ***Linda é uma caixa de banco.***
2. ***Linda é uma caixa de banco e é ativa no movimento feminista.***

Provavelmente você tenha respondido que Linda é uma caixa de banco e é ativa no movimento feminista. Essa foi a resposta dada por cerca de 85% dos entrevistados pelo autor em diversas universidades.

O julgamento intuitivo afeta a interpretação lógica, pois se a situação for interpretada com uso do diagrama de Venn, percebe-se que o conjunto das caixas de banco feministas é subconjunto do conjunto das caixas de banco, já que toda caixa de banco feminista é uma caixa de banco. Assim, a probabilidade de Linda ser uma caixa de banco feminista pode ser menor ou igual a probabilidade de ser uma caixa de banco. Tal erro interpretativo foi denominado de falácia da conjunção.

"Quando você especifica um possível evento em maiores detalhes, você só pode reduzir sua probabilidade. Desse modo, o problema estabelece um conflito entre a intuição da representatividade e a lógica da probabilidade" (Kahneman, 2012, p.199).

*As soluções dos problemas 1.1, 1.2 e 1.3 podem ser vistas pelo link*: https://youtu.be/Pz02UPMduPM *videoaula produzida como recurso educacional vinculado a esta dissertação.*

### 1.4. O Problema Clássico de Monty Hall

O problema de Monty Hall, também conhecido por paradoxo de Monty Hall, é um problema matemático e paradoxal que surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos, chamado Let's Make a Deal, exibido na década de 1970.

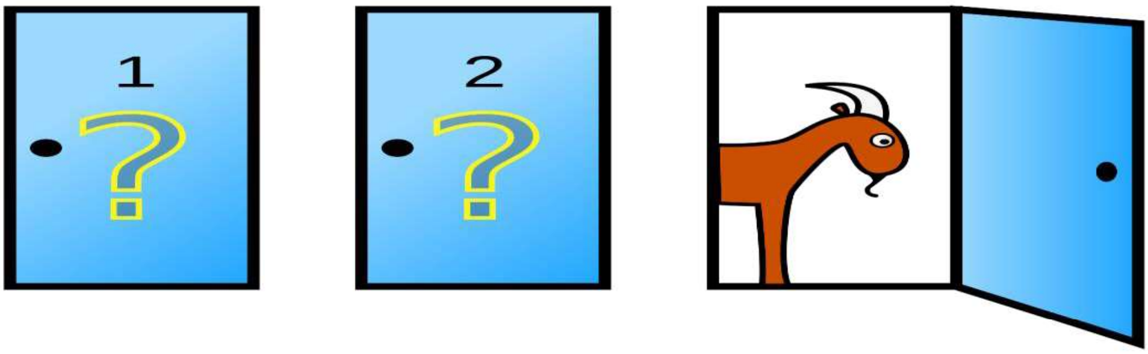
O jogo consistia no seguinte: Monty Hall, o apresentador, apresentava três portas aos concorrentes. Atrás de uma delas estava um prêmio (um carro) e, atrás das outras duas, dois bodes.

Na 1.ª etapa, o concorrente escolhe uma das três portas (que ainda não é aberta);

Na 2.ª etapa, Monty abre uma das outras duas portas que o concorrente não escolheu, revelando que o carro não se encontra nessa porta e revelando um dos bodes;

Na 3.ª etapa, Monty pergunta ao concorrente se quer decidir permanecer com a porta que escolheu no início do jogo ou se ele pretende mudar para a outra porta que ainda está fechada para então a abrir. Agora, com duas portas apenas para escolher — pois uma delas já se viu, na 2.ª etapa, que não tinha o prêmio — e sabendo que o carro está atrás de uma das duas restantes, o concorrente tem que tomar a decisão.

Figura 1 - O problema de Monty Hall.




Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre. Acesso em 15 de junho de 2023.

Em busca de um novo carro, o jogador escolhe a porta 1. O apresentador então abre a porta 3 revelando que ela não tem o carro, e oferece ao jogador a possibilidade de escolher a porta 2 ao invés da porta 1.

Qual é a estratégia mais lógica? Ficar com a porta escolhida inicialmente ou mudar de porta? Com qual das duas portas ainda fechadas o concorrente tem mais probabilidades de ganhar? Por quê?

Uma pessoa de forma intuitiva irá responder que a probabilidade de ganhar o prêmio trocando de porta é de 50%. Porém, em uma análise mais cautelosa, percebe-se que cometeu um equívoco. Imaginemos que o prêmio esteja na porta 1 e que o concorrente escolha a porta correta. Neste caso, trocar de porta é “prejuízo”. Porém, se o concorrente escolher a porta 2, o apresentador irá lhe mostrar a porta 3 a qual terá um bode, assim trocar de porta é vantajoso. Analogamente, se o concorrente escolher a porta 3, o apresentador irá lhe mostrar a porta 2 a qual também terá um bode, sendo que trocar de porta também será vantagem. Logo, percebe-se que nos casos possíveis, ganha-se em dois e perde em 1. Portanto, trocar de porta aumenta a probabilidade de ganhar o prêmio. Dessa maneira, a probabilidade de ganhar o prêmio trocando de porta é igual a $\frac{2}{3} \cong 66,67\%$.

A resposta surpreende e faz pensar o quanto é necessário ser criterioso ao analisar um problema probabilístico e, quando rápida, sem a devida análise dos casos possíveis, provavelmente será equivocada.

Este trabalho promove uma discussão sobre aspectos matemáticos presentes em situações hipotéticas e reais em que se justifica a utilização de teoria de probabilidade, evidenciando as dificuldades presentes na busca de respostas rápidas e intuitivas para alguns problemas. A resposta rápida, sem a devida análise dos casos possíveis, provavelmente será equivocada. O estudo de teoria de probabilidade, iniciado no ensino básico, é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico e probabilístico. Interpretações equivocadas geram erros desastrosos, quando a probabilidade for utilizada em situações reais. A Falácia do Promotor, tema desta dissertação, é um erro interpretativo do conceito de probabilidade condicional.

# 2 TEORIA DE PROBABILIDADE

Quando empregamos a Matemática para estudar algum fenômeno, essencialmente começamos construindo um modelo matemático adequado, que pode ser *determinístico ou probabilístico*. Nos modelos *determinísticos*, as condições sob as quais um experimento é executado *determinam* o resultado do experimento. Por sua vez, os modelos *probabilísticos (ou não determinísticos)* são utilizados para estudar fenômenos que, mesmo sendo realizados sob as mesmas condições e circunstâncias, podem resultar em observações distintas.

A Teoria de Probabilidade busca quantificar as chances dos resultados possíveis em experimentos não determinísticos, ou seja, é a matemática da incerteza.

Neste capítulo apresentamos os conceitos da Teoria de Probabilidade necessários para a resolução dos problemas propostos ao longo do trabalho. Admitimos como pré-requisito conhecimentos básicos de Teoria de Conjuntos e de Análise Combinatória. Foram utilizadas como referências para a elaboração deste capítulo Bussab (2013), Hazzan (1993), James (2008), Meyer (1982), Morgado (2020) e Oliveira (2011).

## 2.1 Conceitos Básicos

Comecemos o estudo da teoria de probabilidade com a compreensão de três noções fundamentais: experimento aleatório, espaço amostral e eventos.

Um **experimento** é chamado de **aleatório** se, quando repetido sobre as mesmas condições, pode apresentar resultados diversos (os resultados ocorrem ao acaso, não há uma previsão lógica para eles), ou seja, não podem ser previstos com absoluta certeza. Porém, em geral, podemos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis. Alguns exemplos estão apresentados a seguir:

**Exemplo 2.1 (Experimentos Aleatórios):**

a. *Lançar um dado honesto[1] de seis faces, numeradas de 1 a 6, e observar o número da face voltada para cima;*

b. *Lançar uma moeda honesta, com duas faces distintas, e observar a face voltada para cima;*

c. *Lançar uma moeda honesta três vezes e observar a sequência obtida de caras e coroas;*

d. *De um lote de 70 peças boas e 30 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de peças boas.*

e. *De um baralho de 52 cartas, selecionar ao acaso uma carta e observar o seu naipe.*

f. *Lançar um dado viciado[2] de seis faces, numeradas de 1 a 6, em que a chance de sair determinada face é proporcional ao seu número.*

g. *Lançar uma moeda, com duas faces distintas, e observar a face voltada para cima, sabendo que uma das faces têm três vezes mais chances de ocorrência em relação a outra face.*

$\square$

Em um experimento aleatório, chamamos de **espaço amostral** ao conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Representaremos este conjunto pela letra grega ômega, $\Omega$.

**Exemplo 2.2 (Espaço Amostral):** *Considere o experimento aleatório descrito no Exemplo 2.1, item c., ou seja, lançar uma moeda três vezes e observar a sequência obtida de caras e coroas. O diagrama apresentado na Figura 2, apresenta todas as*

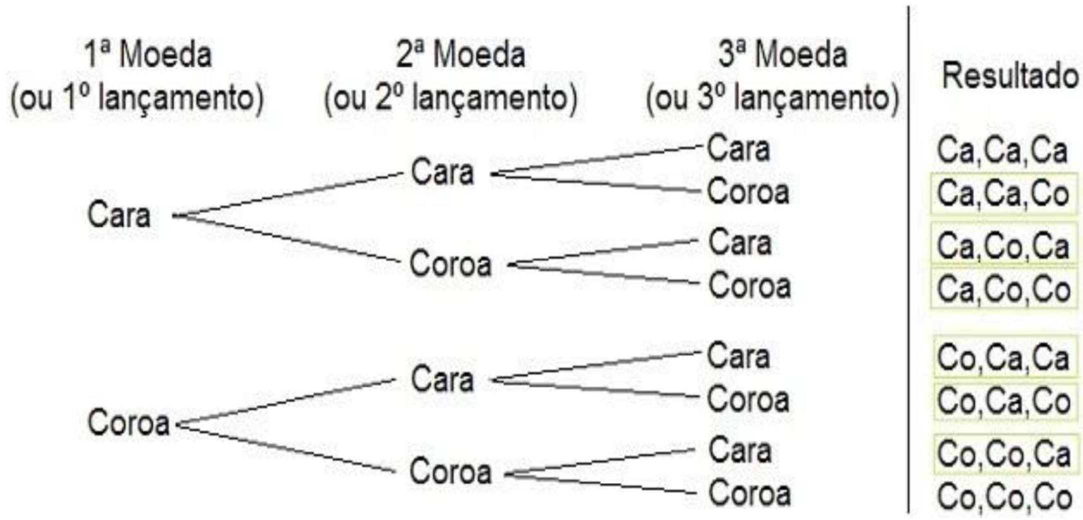
---

[1] Um dado é dito honesto ou equilibrado se em um lançamento aleatório as faces têm a mesma probabilidade de ocorrer. Este conceito se aplica de maneira análoga a outros objetos, na teoria de probabilidade.

[2] Um dado é dito viciado ou viesado se em um lançamento aleatório as faces têm probabilidades diferentes de ocorrer. Este conceito se aplica de maneira análoga a outros objetos, na teoria de probabilidade.

*possibilidades para os três lançamentos da moeda, em que Ca representa cara e Co é coroa:*

Figura 2 - Diagrama de árvore 1.




Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/13199845. Acesso em 08 ago. 2023

*Temos então o espaço amostral* $\Omega$ *desse experimento, com 8 elementos*

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (Ca, Ca, Ca), (Ca, Ca, Co), (Ca, Co, Ca), (Co, Ca, Ca), \\ (Ca, Co, Co), (Co, Ca, Co), (Co, Co, Ca), (Co, Co, Co) \end{matrix} \right\}$$

*A primeira entrada de cada terno ordenado se refere ao resultado do 1º lançamento e o mesmo se aplica para a segunda e terceira entradas dos ternos ordenados.*

*Observe que é possível determinar o número de elementos do espaço amostral utilizando o Princípio Fundamental de Contagem. De fato, cada um dos 3 lançamentos tem dois resultados possíveis, portanto o número total de sequências de lançamentos é* $2 \times 2 \times 2 = 8$.

□

Outra noção fundamental para o desenvolvimento da Teoria de Probabilidade é o conceito de evento. Se $\Omega$ é o espaço amostral do experimento, todo subconjunto $E \subset \Omega$ será chamado **evento.**

**Exemplo 2.3 (Evento):** *Voltemos ao experimento aleatório dos 3 lançamentos de uma moeda, cujo espaço amostral está descrito no Exemplo 2.2. Se $E$ é o evento em que ocorrem exatamente duas caras $(Ca)$, então*

$$E = \{(Ca, Ca, Co), (Ca, Co, Ca), (Co, Ca, Ca)\}$$

*é um subconjunto de Ω que possui 3 elementos.*

□

Para auxiliar na interpretação da notação de conjuntos na linguagem de eventos, fornecemos uma tradução, listada a seguir:

a. O conjunto universo $\Omega$ é o evento certo**;**

b. O conjunto vazio $\emptyset$ é o evento impossível;

c. Se $a \in \Omega$, então o conjunto unitário $\{a\}$ é dito ser um evento elementar ou ponto amostral;

d. $A \cup B$ é o evento "$A$ ou $B$ ocorrem";

e. $A \cap B$ é o evento "$A$ e $B$ ocorrem";

f. $\bar{A}$ (complementar de $A$) é o evento "não $A$", ou seja, o evento $\bar{A}$ ocorre se, e somente se, $A$ não ocorre;

g. $A - B = A \cap \bar{B}$ é o evento "somente $A$ ocorre".

h. $A \subset B$ significa que a ocorrência do evento $A$ implica na ocorrência do evento $B$;

i. $A \cap B = \emptyset$ significa que $A$ e $B$ são eventos mutuamente exclusivos ou mutuamente excludentes.

## 2.2 Definições de Probabilidade

Não há apenas uma definição de probabilidade. Existem três definições amplamente aceitas: a **probabilidade clássica**, **probabilidade empírica** e a **probabilidade subjetiva**, descritas a seguir.

A **probabilidade clássica** se baseia em espaços amostrais com finitos elementos, cujos eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer. Fornece a base para a utilização de análise combinatória em estudos de probabilidade, é bastante aplicada em estudos de jogos de azar, porém é limitada quanto à aplicabilidade em outros contextos.

A **probabilidade empírica** é baseada em frequências relativas e utiliza dados prévios para atribuir valores às chances de um evento ocorrer e é responsável pela conhecida aproximação entre Teoria da Probabilidade e Estatística.

A **probabilidade subjetiva** se aplica às situações que não se enquadram nas definições anteriores, porém são muito comuns no cotidiano. Compreende os casos em que não se tem dados prévios para se usar como referência ou quando se utiliza crenças e opiniões para atribuir valores para as chances de um evento ocorrer.

A abordagem das diferentes concepções de probabilidade na Educação Básica é evidenciada por Carvalho (1999) apud Bayer (2005):

> "É importante que o aluno mobilize diferentes concepções de probabilidade no estudo das situações-problema pois elas, além de não serem exclusivas, têm adequação determinada pela natureza do problema".

### 2.2.1 Probabilidade Clássica

Embora existam registros de trocas de correspondências entre Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre Fermat (1601 - 1665) utilizando enumeração de possibilidades no estudo de jogos de azar e uma preocupação em formalizar os conceitos, a primeira apresentação de cálculo de probabilidades, contendo a definição explícita da probabilidade foi apresentada por Pierre-Simon Laplace (1749

– 1827) em seu *Essai Philosophique sur les Probabilités,*[3] publicado em 1814 (De Queiroz, 2007).

Figura 3 - Pierre-Simon Laplace


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace#/media/Ficheiro:P_S_Laplace.jpg Acesso em 24 dez. 2023.

A definição clássica de probabilidade, apresentada por Laplace em seu livro, está apresentada a seguir:

> A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. **A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, a qual é, portanto, uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.** (Laplace, 1840, p. 7, tradução e grifo nosso)

Observe que a definição proposta por Laplace, se baseia em espaços amostrais finitos e equiprováveis, ou seja, cada um dos elementos que compõem o espaço amostral têm a mesma chance de ocorrer. Por exemplo, a probabilidade de uma moeda honesta lançada cair com o lado "cara" para cima é de 50%. Detalhamos esta definição a seguir:

---

[3] Ensaio Filosófico sobre Probabilidades em português.

**Definição (Probabilidade Clássica):** *Seja $\Omega$ um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e seja $E$ um evento de $\Omega$, então a probabilidade de ocorrência do evento $E$ é dada por:*

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

$onde$ $n(E)$ *é o número de elementos do evento $E$ (casos favoráveis) e $n(\Omega)$ é o número de elementos de $\Omega$ (casos possíveis).*

**Exemplo 2.4:** *Numa urna há 3 bolas pretas, 2 bolas brancas e 5 bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso e sua cor é observada. Determine a probabilidade de ocorrer os seguintes eventos:*

a. $E_1$ *= {bola de cor branca ou azul};*
b. $E_2$ *= {bola de cor preta};*
c. $E_3$ *= {bola de cor marrom}.*

***Solução:***

a. $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$, *espera-se que em cada 10 repetições do experimento, em 7 delas saia bola de cor branca ou de cor azul.*
b. $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$, *espera-se que em cada 10 repetições do experimento, em 3 delas saia bola de cor preta.*
c. $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(\Omega)} = \frac{0}{10}$ *= 0, o evento é impossível, pois dentro da urna não existe bola na cor marrom.*

□

2.2.2 Probabilidade Empírica

Os primeiros registros de cálculos de probabilidade utilizando estimativas de valores obtidos de observações da frequência experimental foram feitos por J.

Bernoulli (1654 - 1705) na obra *Ars Conjectandi,*[4] lançada em 1713, oito anos após a sua morte. O livro apresenta um marco histórico da Teoria de Probabilidade por apresentar aplicação em outros contextos que não os de jogos de azar e evidencia a limitação da determinação de uma probabilidade por estratégias de contagem devida à necessidade de se supor a equiprobabilidade dos eventos elementares (De Queiroz, 2007).

Figura 4 – Jacobi Bernoulli

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/archive/1/19/20210112150724%21Jakob_Bernoulli.jpg. Acesso em 24 dez. 2023.

Bernoulli é enfático ao dizer que intuitivamente os resultados tendem a se aproximar do valor esperado à medida que mais tentativas se sucederem:

> (...) enfim não pode escapar a ninguém que, para julgar desta forma qualquer evento, não seria suficiente ter escolhido uma ou duas experiências: todo ser mais estúpido, por não sei qual instinto natural, por si mesmo e sem a direção dada por qualquer ensino (coisa absolutamente admirável) tem como evidente que mais observações deste gênero tenhamos recolhido, menor será o perigo de se distanciar do objetivo. (Bernoulli, 1713, p. 42-44, apud De Queiroz, 2007, p. 62).

Em experimentos aleatórios, embora não saibamos qual evento irá ocorrer, é possível intuir que alguns eventos ocorram frequentemente, enquanto outros podem ocorrer raramente. Desejamos, então, associar aos eventos números que nos deem

[4] A arte de projetar

uma indicação quantitativa da ocorrência deles, quando o experimento é repetido muitas vezes, nas mesmas condições. Para isso, vamos definir a *frequência relativa* de um evento.

**Definição (Frequência Relativa):** *Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral finito* $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_k\}$*. Sejam* $N$ *a quantidade de realizações deste experimento e* $n_i$ *o número de vezes que ocorreu o resultado* $a_i$*, onde* $i \in \{1, 2, 3, \ldots k\}$*. Definimos o número*

$$f_i = \frac{n_i}{N} = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

*como sendo a frequência relativa do resultado* $a_i$ *.*
☐

Algumas propriedades da frequência relativa que decorrem da definição são:

***P1.*** $0 \leq f_i \leq 1 \ \forall i \in \{1, 2, 3, \ldots k\}$;
***P2.*** $f_1 + f_2 + \cdots . + f_k = 1$.

Verifica-se experimentalmente que a frequência relativa tende a se “estabilizar” em torno de algum valor bem definido, à medida em que o número $N$ de repetições do experimento cresce. Dessa maneira, considerando $N$ tendendo ao infinito, podemos definir precisamente a probabilidade de um evento como

$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(E)}{N}$$

o que não é uma definição aplicável em situações reais. A Probabilidade Empírica utiliza, portanto, as frequências relativas baseadas no histórico de resultados do experimento para determinar a probabilidade do evento. Observe que a credibilidade da probabilidade empírica de um evento depende de dois fatores: de se ter uma amostra suficientemente “grande”; e do quanto o passado do experimento é representativo do futuro.

**Exemplo 2.5 (Frequência relativa e Probabilidade):** *Suponha que se deseje verificar se o comando “Aleatório” de uma planilha do Excel é capaz de simular um* *dado de 6 faces equilibrado. Sabemos que em um dado equilibrado, a probabilidade de qualquer evento elementar* $\{i\},\ i \in \{1,2,\dots,6\}$ *é dada por*

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6} \cong 0{,}167.$$

*Simulando 1000 lançamentos do dado usando o Excel, observou-se que o número 2 apareceu 170 vezes, ou seja, a frequência relativa deste evento será*

$$f(\{2\}) = \frac{170}{1000} = 0{,}17.$$

*Todas as frequências resultantes da simulação de 1000 lançamentos estão apresentadas na Tabela 1.*

Tabela 1 - Simulação de 1000 lançamentos de um dado equilibrado usando Excel

| Número | Frequência Absoluta | Frequência Relativa | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| 1 | 164 | 0,164 | 16,4% |
| 2 | 170 | 0,17 | 17% |
| 3 | 160 | 0,16 | 16% |
| 4 | 163 | 0,163 | 16,3% |
| 5 | 169 | 0,169 | 16,9% |
| 6 | 174 | 0,174 | 17,4% |
| **Total** | **1000** | **1,000** | **100%** |

Fonte: Autoria própria

*Os resultados obtidos na simulação no Excel são compatíveis com os de um experimento com um dado equilibrado e as frequências tendem a se estabilizar em torno de* $1/6$ *à medida em que o número de simulações aumentam, ou seja, espera-se que se o experimento for realizado com* $N$ *suficiente grande as frequências relativas se estabilizem em torno de* $1/6$ *, para cada suposta face.* □

### 2.2.3 Probabilidade Subjetiva

A probabilidade subjetiva funciona como um palpite e é utilizada para a tomada de decisão sob incerteza ou risco quando não há dados disponíveis e, portanto, não se pode utilizar a probabilidade empírica ou a probabilidade clássica. Neste caso, para quantificar as chances de um evento ocorrer, o experimentador pode se valer de crenças, opiniões, intuições, e análises subjetivas.

Um exemplo de utilização da probabilidade subjetiva ocorre quando uma empresa deseja lançar um produto inovador no mercado. A avaliação da aceitação do produto, ou seja, a probabilidade de sucesso, é subjetiva. Outro exemplo é quando médicos, a partir de um laudo de um paciente com alguma enfermidade, são solicitados a atribuir um valor para as chances de alguma sequela no paciente.

Embora esta definição pareça fugir ao alcance da matemática, ela também satisfaz aos axiomas[5] e teoremas de probabilidade, que serão apresentados na seção seguinte.

## 2.3 Teoria Axiomática de Probabilidade

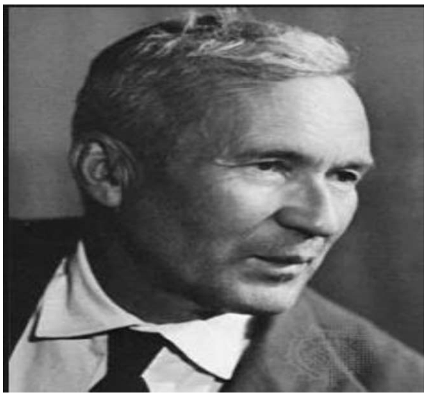
Considerado o precursor da teoria moderna da probabilidade, Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987), matemático soviético, em 1933 publicou um trabalho intitulado *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, que foi traduzido para o em inglês como *Foundations of Probability Theory*[6]. Nesse trabalho, Kolmogorov apresentou os axiomas da teoria de probabilidade. Para dimensionar a importância do feito "Kolmogorov axiomatizou a teoria da probabilidade da mesma forma que a Geometria foi axiomatizada por Euclides (Euclides de Alexandria - 325 ac a 265 ac) nos Elementos" (VIALI, 2009, p.152). Apesar de a teoria axiomática de probabilidade ser bastante recente quando comparada à da Geometria, muito avanços e aplicações desta área de pesquisa têm sido registrados. Hoje a teoria de probabilidade é considerada uma parte de um campo da matemática mais amplo: a Teoria da Medida.

---

[5] Verdades absolutas que não carecem de demonstrações.

[6] Fundamentos da Teoria de Probabilidade, em português.

Figura 5 - Andrei Nikolaevich Kolmogorov



Fonte: COOKE, 2024

A teoria axiomática de Kolmogorov é constituída por três princípios fundamentais (axiomas) que permitem definir, de maneira básica, o conceito de probabilidade, tornando-o rigoroso e coeso, permitindo que os teoremas probabilísticos sejam formalizados e demonstrados de forma mais precisa.

**Definição (Axiomas de Probabilidade):** *Considere um experimento aleatório com espaço amostral $\Omega$. Uma função $P$ definida para todos os eventos de $\Omega$ é chamada uma probabilidade se:*

- ***I.*** *Axioma da não-negatividade:* $P(A) \geq 0, \forall\, A \subset \Omega$;
- ***II.*** *Axioma da normalização:* $P(\Omega) = 1$;
- ***III.*** *Axioma da aditividade: Se $A$ e $B$ são eventos mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$), então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Qualquer sequência contável de conjuntos disjuntos, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ satisfaz* $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$. □

As três propriedades descritas acima definem quais funções podem ser chamadas de probabilidade, o que abrange as definições de probabilidade clássica, empírica e subjetiva. De fato, existem muitas probabilidades, ou seja, funções que satisfazem as propriedades I, II e III da definição acima.

**Exemplo 2.6:** *Seja $\Omega = \{0, 1\}$. Definindo $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(\{0\}) = 1/4$ e $P(\{1\}) = 3/4$, tem-se que a função $P$ assim obtida é uma probabilidade sobre $\Omega$.*

□

Através dos três axiomas de Kolmogorov, demonstraremos várias consequências simples e importantes da definição de probabilidade, relacionadas às propriedades operatórias de probabilidade:

**Teoremas (Propriedades Operatórias de Probabilidade):**

***P1.*** *(Evento Complementar): Seja $A$ um evento qualquer de um espaço amostral $\Omega$ e $\overline{A}$ o evento complementar de $A$, então $P(A) + P(\overline{A}) = 1$;*

***P2.*** *(Evento Impossível): A probabilidade do evento impossível é zero, ou seja, $P(\emptyset) = 0$;*

***P3.*** *(Inclusão de Eventos): Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$;*

***P4.*** *(União de Eventos): Sejam $A$ e $B$ dois eventos quaisquer de um espaço amostral $\Omega$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;*

***P5.*** *(Desigualdade de Bonferroni): $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$;*

***P6.*** *(Primeira Lei de Morgan): $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$;*

***P7.*** *(Segunda Lei de Morgan): $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$.*

**Demonstrações:**

***P1.*** *(Evento Complementar): Como $A$ e $\bar{A}$ são mutuamente exclusivos, temos $A \cap \bar{A} = \emptyset$ . Assim, pelo Axioma III, tem-se*

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

*Ora, $A \cup \bar{A} = \Omega$, dessa forma $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. (Axioma II). Logo,*

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

***P2.*** *(Evento Impossível): Note que $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, ou seja $\Omega$ e $\emptyset$ são mutuamente excludentes. Assim, pelo Axioma III, tem-se*

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

*Ora, $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, dessa forma $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = 1$ (Axioma II). Assim,*

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1.$$

*Portanto,* $P(\emptyset) = 0$.

***P3.*** *(Inclusão de Eventos): Primeiramente, vamos provar que se* $A \subset B$*, então*

$$P(A) = P(B) - P(B - A).$$

*De fato, como* $B = A \cup (B - A)$*, e* $A \cap (B - A) = \emptyset$*, pelo Axioma III,*

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

*e, consequentemente* $P(A) = P(B) - P(B - A)$. *Temos ainda que* $P(B - A) \geq 0$ *(porque P é uma probabilidade), o que resulta em* $P(A) \leq P(B)$.

A propriedade $\boldsymbol{P3}$ foi utilizada na solução do problema "Linda: Menos é Mais", descrito na seção 1.3.

***P4.*** *(União de Eventos): Note que podemos escrever a união dos eventos* $A$ *e* $B$ *de maneira disjunta:*

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B \qquad (1)$$

*Assim,* $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$ *(Axioma III). Analogamente, escrevemos* $A$ *como a união disjunta*

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \qquad (2)$$

*e* $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$ *(Axioma III).*

*Substituindo (2) em (1), obtém-se:*

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B).$$

*Logo,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

***P5.*** *(Desigualdade de Bonferroni): De P4 e do Axioma I temos,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1.$$

*Portanto,*

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

***P6.*** *(Primeira Lei de Morgan):* $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

*Observe que:* $\overline{A \cup B} = \{x | x \notin A \cup B\}$.

*Além disso, se* $x \notin A \cup B$, *então* $x \notin A$ *e* $x \notin B$, *ou seja,*

$$\overline{A \cup B} = \{x | x \notin A \ e\ x \notin B)\}.$$

*Por outro lado,* $x \notin A$ *e* $x \notin B$ *é equivalente a* $x \in \overline{A}$ *e* $x \in \overline{B}$. *Logo,*

$$\overline{A \cup B} = \{x \in \overline{A}\ e\ x\ \in \overline{B}\} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

*Consequentemente,* $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

***P7.*** *(Segunda Lei de Morgan):* $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

*Note que,* $\overline{A \cap B} = \{x | x \notin A \cap B\}$.

*Além disso, a afirmação* $x \notin \overline{A \cap B}$ *é equivalente a dizer que* $x \notin A$ *ou* $ou\ x \notin B$. *Portanto,* $\overline{A \cap B} = \{x | x \notin A\ ou\ x \notin B)\}$.

*Por outro lado,* $x \notin A$ *ou* $x \notin B$ *é equivalente a* $x \in \overline{A}$ *ou* $x \in \overline{B}$. *Logo,*

$$\overline{A \cap B} = \{x \in \overline{A}\ ou\ x\ \in \overline{B}\} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

*Consequentemente,* $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

$\square$

## 2.4 Probabilidade Condicional e Independência

Abordaremos nesta seção os conceitos de probabilidade condicional e independência para dois eventos, por ser o foco de interesse deste trabalho. As definições e exemplos para mais de dois eventos podem ser encontrados em Meyer (1982) e Morgado (2020).

### 2.4.1 Probabilidade Condicional

Para entendermos o conceito de probabilidade condicional, comecemos com um exemplo:

**Exemplo 2.7:** *Suponhamos que numa sala de aula com 200 alunos, 80 usam óculos. Sabe-se também que 100 desses alunos são mulheres, e que 60 dos que usam óculos são homens. Os dados são mostrados na Tabela 2:*

Tabela 2 - Distribuição dos alunos quanto ao gênero e uso de óculos

| | ***Usam Óculos*** | ***Não usam Óculos*** | ***Total*** |
|---|---|---|---|
| ***Homens*** | *60* | *40* | *100* |
| ***Mulheres*** | *20* | *80* | *100* |
| ***Total*** | *80* | *120* | *200* |

Fonte: Autoria própria

*A partir das informações e considerando que todos os alunos têm a mesma chance de ser escolhido de forma aleatória, podemos calcular probabilidades simples (ou marginais ou incondicionais), conjuntas e condicionais.*

a. *A probabilidade de uma pessoa, escolhida aleatoriamente, usar óculos é 80/200 = 0,40.*
b. *A probabilidade de uma pessoa, escolhida aleatoriamente, ser homem e usar óculos é 60/200 = 0,30.*
c. *A probabilidade de uma pessoa, escolhida aleatoriamente, usar óculos dado que é um homem é 60/100 = 0,60.*
d. *A probabilidade de uma pessoa, escolhida aleatoriamente, ser homem dado que usa óculos é 60/80 = 0,75.*

□

Observe que nos itens *a* e *b* do exemplo 2.7, o experimento se refere à escolha aleatória e equiprovável no espaço amostral composto por 200 alunos. No item *c*, dado que o estudante, escolhido ao acaso, é homem, a probabilidade de usar óculos é 60/100. Isso porque, do total de 100 alunos homens, 60 usam óculos.

Assim, podemos chegar num modelo matemático para o cálculo desse tipo de probabilidade, denominada **probabilidade condicional**, definida a seguir:

**Definição (Probabilidade Condicional):** *Sejam $A$ e $B$ dois eventos de um espaço amostral $\Omega$, tal que quando $P(B) > 0$. A probabilidade da ocorrência do evento $A$, dado que o evento $B$, ocorreu, denotada por $P(A|B)$ , é dada por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$\square$

Intuitivamente, a probabilidade condicional afirma que, sabendo que o evento $B$ já ocorreu, a parte do evento $A$ a se considerar no cálculo da probabilidade é a que também é parte de $B$, ou seja, a intersecção dos dois conjuntos. É importante ressaltar que a probabilidade $P(A|B)$ , para $B$ fixado, satisfaz os axiomas de probabilidade, logo é, de fato, uma probabilidade.

**Exemplo 2.8:** *A Tabela 3 representa os dados de uma pesquisa realizada com 500 alunos de uma faculdade, em relação ao seu curso de formação (Matemática, Química ou Física) e gênero (Homens ou Mulheres):*

Tabela 3 - Distribuição dos estudantes por gênero e curso

| | ***Matemática ($M_A$)*** | ***Química (Q)*** | ***Física (F)*** | ***Total*** |
|---|---|---|---|---|
| ***Homens (H)*** | *120* | *100* | *80* | *300* |
| ***Mulheres (M)*** | *60* | *80* | *60* | *200* |
| ***Total*** | *180* | *180* | *140* | *500* |

Fonte: Autoria própria

*Com base nos dados e sabendo que todos os estudantes têm a mesma chance de ser escolhido de forma aleatória, responda os itens a seguir:*

a. *Escolhe-se uma pessoa ao acaso. Sabe-se que esta pessoa cursa matemática, qual é a probabilidade que seja homem?*

$$P(H|M_A) = \frac{P(H \cap M_A)}{P(M_A)} = \frac{120}{180} = \frac{2}{3} \cong 0{,}67 = 67\%.$$

b. *Escolhe-se uma pessoa ao acaso. Sabe-se que esta pessoa é homem, qual é a probabilidade que esta pessoa curse matemática?*

$$P(M_A|H) = \frac{P(H \cap M_A)}{P(H)} = \frac{120}{300} = \frac{40}{100} = 40\%.$$

c. *Sabendo que o escolhido é uma mulher, qual é a probabilidade de cursar física?*

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{60}{200} = \frac{30}{100} = 0{,}30 = 30\%.$$

d. *Sabendo que o escolhido cursa física, qual é a probabilidade de ser mulher?*

$$P(M|F) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)} = \frac{60}{140} = \frac{3}{7} \cong 0{,}43 = 43\%$$

$\square$

A partir da comparação dos resultados obtidos nos itens do Exemplo 2.8 observa-se que $P(H|M_A) \neq P(M_A|H)$ e $P(F|M) \neq P(M|F)$.

De fato, em geral, $P(A|B) \neq P(B|A)$, porém esses valores podem coincidir.

Assim, sejam $A$ e $B$ eventos não nulos de um espaço amostral $\Omega$ tais que $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$. Então, estão definidas,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{e} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Note que,

$$P(A|B) = P(B|A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = P(B) \; ou \; P(A \cap B) = 0.$$

**Exemplo 2.9:** *Considere um experimento com espaço amostral equiprovável* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *e eventos dados por* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{3, 4, 5, 6\}$. *Note que*

$$P(A) = \frac{4}{10} \quad e \quad P(B) = \frac{4}{10},$$

*ou seja,* $P(A) = P(B)$. *Os conjuntos* $A$ *e* $B$ *não precisam ser necessariamente iguais para que as probabilidades coincidam.*

*Observe que* $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$, *pois o evento* $A \cap B = \{3,4\}$. *Assim,*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

*Por outro lado,*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

*Logo,* $P(A|B) = P(B|A)$.

□

**Regra do produto de probabilidades**: *Sejam* $A$ *e* $B$ *dois eventos quaisquer de um espaço amostral* $\Omega$. *Então, da definição de probabilidade condicional* $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, *com* $P(A) \neq 0$, *conclui-se que:*

$$P(A \cap B) \; = \; P(A) \cdot P(B|A)$$

que decorre de forma imediata da definição de probabilidade condicional e foi utilizado na solução do problema “Procurando a Chapeuzinho Vermelho”, descrito na seção 1.2.

Note que, ainda pela regra do produto com $P(B) \neq 0$, poderíamos ter escrito:

$$P(A \cap B) \; = \; P(B) \cdot P(A|B)$$

que decorre de $P(A|B) \; = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

2.4.2 Independência entre Eventos

Dados dois eventos $A$ e $B$, se a ocorrência ou não do evento $A$ não interfere na ocorrência do evento $B$, os eventos são ditos independentes. Formalmente, a definição de independência é apresentada abaixo:

**Definição (Independência de eventos):** *Dois eventos $A$ e $B$ de um mesmo espaço amostral $\Omega$, são ditos independentes, se*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{3}$$

□

A partir da equação (3) e da regra do produto de probabilidades, conclui-se que se $A$ *e* $B$ são independentes, então $P(B|A) = P(B)$, ou seja, a probabilidade de $B$ ocorrer, sabendo que $A$ ocorreu, é a própria probabilidade de $B$ ocorrer. Analogamente, $P(A|B) = P(A)$, ou seja, a probabilidade de $A$ ocorrer, sabendo que $B$ ocorreu, é a própria probabilidade de $A$ ocorrer.

Quando a equação (3) não ocorre, dizemos que os eventos são **dependentes**.

Vejamos um exemplo para averiguar se há independência entre os eventos apresentados.

**Exemplo 2.10:** *Considere um dado honesto com 6 faces numeradas de 1 a 6. A probabilidade, ao lançar o dado, de observar na face voltada para cima um número ímpar, é de 50%. Se for feito um segundo lançamento, a probabilidade de se observar uma face com um número par, sabendo que o resultado do primeiro lançamento foi um número ímpar, também é de 50%, ou seja, o primeiro lançamento não influencia no resultado do segundo. Portanto, os eventos são independentes.* □

Os dois exemplos a seguir têm estruturas semelhantes e os valores das probabilidades determinam se os eventos são independentes ou não.

**Exemplo 2.11:** *Sejam $A\ e\ B$ dois eventos de um espaço amostral $\Omega$. Sabe-se que a probabilidade de ocorrência do evento $A$ é $P(A) = 60\% = 0{,}6$, do evento $B$ é $P(B) = 50\%$ = 0,5, do evento simultâneo $A\ e\ B$ é $P(A \cap B) = 20\% = 0{,}2$ e de não ocorrer nem $A$ nem $B$ é $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 10\% = 0{,}1$. Calcule:*

*a.* $P(A \cup B)$
*b.* $P(A|B)$
*c.* $P(B|A)$

***Solução:***

*a. Queremos encontrar a probabilidade da união dos eventos $A\ e\ B$. Pelo item P4 das propriedades operatórias de probabilidade,*

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 60\% + 50\% - 20\% \\ &= 90\%. \end{aligned}$$

*Outra forma de obter que $P(A \cup B) = 90\%$ é utilizando que a probabilidade do seu evento complementar é $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 10\%$.*

*b. A probabilidade do evento $A$ ocorrer sabendo da ocorrência do evento $B$ é dada por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 40\%.$$

*Vejam que $P(A) = 60\%$ e $P(A|B) = 40\%$, ou seja, $P(A) \neq P(A|B)$. Isto quer dizer que a ocorrência do evento $B$ influencia na ocorrência do evento $A$, ou seja, os eventos $A\ e\ B$ são dependentes.*

*c. Analogamente à solução do item anterior, a probabilidade do evento $B$ ocorrer sabendo da ocorrência do evento $A$ é dada por:*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} \cong 33{,}33\%.$$

*Do item b, já sabíamos que os eventos $A$ e $B$ são dependentes. Note que $P(B) = 50\%$ e $P(B|A) = 33{,}33\%$, ou seja, $P(B) \neq P(B|A)$.*

□

**Exemplo 2.12:** *Sejam $A$ e $B$ dois eventos de um espaço amostral $\Omega$. Sabe-se que a probabilidade de ocorrência do evento $A$ é $P(A) = 40\% = 0{,}4$, do evento $B$ é $P(B) = 50\%$ = 0,5, do evento simultâneo $A$ e $B$ é $P(A \cap B) = 20\% = 0{,}2$ e de não ocorrer nem $A$ nem $B$ é $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 30\% = 0{,}3$. Calcule:*

a. $P(A \cup B)$
b. $P(A|B)$
c. $P(B|A)$

***Solução:***

a. *Como $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 30\%$, então, a probabilidade do seu evento complementar é $P(A \cup B) = 70\%$.*
b. *A probabilidade do evento $A$ ocorrer sabendo da ocorrência do evento $B$ é dada por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 40\%$$

.

*Vejam que $P(A) = 40\%$ e $P(A|B) = 40\%$, ou seja, $P(A) = P(A|B)$. Portanto, dizemos que os eventos $A$ e $B$ são independentes.*

c. *A probabilidade do evento $B$ ocorrer sabendo da ocorrência do evento $A$ é dada por:*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 50\%$$

*Do item b, já sabíamos que os eventos $A$ e $B$ são independentes. Note que $P(B) = 50\%$ e $P(B|A) = 50\%$, ou seja, $P(B) = P(B|A)$.*

□

**Propriedades da Independência de dois Eventos**

**E1.** *(Eventos Mutuamente Exclusivos): Sejam $A$ e $B$ eventos independentes, $A$ e $B$ são mutuamente exclusivos se, e somente se, pelo menos um deles tem probabilidade nula;*

**E2.** *(Evento Independente de si mesmo): Um evento $A$ é independente de si mesmo, se, e somente se, P($A$) $= 0$ ou P($A$) $= 1$;*

**E3.** *(Evento não independente do seu complementar): Um evento $A$ e seu complementar são eventos dependentes se, e somente se, $P(A) \neq 0$ e $P(A) \neq 1$. (É equivalente a dizer que "A é independente de seu complementar se, e só se, $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$")*

**E4.** *(Eventos Independentes de qualquer outro evento): $A$ é independente de qualquer outro evento do espaço amostral se, e somente se $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$;*

**E5.** *(Independência entre dois eventos complementares): Se $A$ e $B$ são eventos independentes, então também serão independentes os eventos:*

*a.* $A$ e $\bar{B}$

*b.* $\bar{A}$ e $B$

*c.* $\bar{A}$ e $\bar{B}$

***Demonstrações:***

**E1.** *Suponha primeiramente que $A$ e $B$ são independentes e mutuamente exclusivos, então*

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = 0,$$

*logo, $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$. Reciprocamente, se $A$ e $B$ são independentes e $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, então*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0$$

*logo, $P(A \cap B) = 0$ e os eventos são mutuamente exclusivos.*

**E2.** *Seja $A$ um evento independente de si mesmo. É sempre verdade que $P(A) = P(A \cap A)$. Então:*

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) = P(A)^2 \Rightarrow P(A) - P(A)^2 = 0.$$

*Assim,* $P(A) \cdot (1 - P(A)) = 0$*. Logo,* $P(A) = 0$ *ou* $P(A) = 1$*.*

*Considere agora que* $P(A) = 0$*. Daí,*

$$P(A) = 0 = 0 \cdot 0 = P(A) \cdot P(A).$$

*Dessa forma,*

$$0 = P(A) = P(A \cap A).$$

*Das duas equações anteriores, tem-se*

$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A),$$

*então* $A$ *é independente de si mesmo. O argumento é análogo considerando* $P(A) = 1$*.*

***E3.*** *Note que* $A \cap \bar{A} = \emptyset$*, então é sempre verdade que*

$$P(A \cap \bar{A}) = 0.$$

*Supondo* $0 < P(A) < 1$*, temos* $0 < P(\bar{A}) < 1$ *e, consequentemente,*

$$P(A) \cdot P(\bar{A}) > 0.$$

*Portanto,*

$$P(A \cap \bar{A}) \neq P(A) \cdot P(\bar{A})$$

*Ou seja,* $A$ *e* $\bar{A}$ *não são independentes.*

*Suponha agora que* $P(A) = 0$ *ou* $P(A) = 1$*, então*

$$P(A) \cdot P(\bar{A}) = P(A) \cdot \big(1 - P(A)\big) = 0$$

*Como* $P(A \cap \bar{A}) = 0$*, temos que* $P(A \cap \bar{A}) = P(A) \cdot P(\bar{A})$*, ou seja,* $A$ *e* $\bar{A}$ *são independentes.*

***E4.*** *Se $A$ é independente de qualquer evento do espaço amostral, então $A$ é independente do seu complementar, e decorre de E3 que $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. Provemos agora a recíproca, em dois casos.*

- *Suponha $P(A) = 0$ e $B$ arbitrário. Como $A \cap B \subset A$, então*

  *$P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. Sendo assim,*

  $$P(A \cap B) = 0.$$

  *Além disso,*

  $$P(A) \cdot P(B) = 0 \cdot P(B) = 0, \forall B \subset \Omega.$$

  *Portanto $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ o que mostra que $A$ e $B$ são independentes.*

- *Considere agora $P(A) = 1$ e $B$ arbitrário. Escrevendo $B$ como a união disjunta $B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$, temos*

  $$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B).$$

  *Ora, $P(\bar{A} \cap B) \leq P(\bar{A}) = 0$, o que implica $P(\bar{A} \cap B) = 0$. Assim, $P(A \cap B) = P(B)$. Como $P(A) = 1$, podemos escrever*

  $$P(A \cap B) = 1 \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B).$$

  *Logo, $A$ e $B$ são independentes.*

***E5.*** *Para demonstrarmos as três independências, usaremos as seguintes igualdades:*

- ✓ $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- ✓ $P(B - A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$
- ✓ $P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$

*a. Por hipótese, $A$ e $B$ são independentes, ou seja,*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

*Note que,* $P(A-B)=P(A\cap\bar{B})=\ P(A)-P(A\cap B)$*, então*

$$\begin{aligned} P(A\cap\bar{B}) &= P(A)-P(A)\cdot P(B) \\ &= P(A)\cdot[1-P(B)] \\ &= P(A)\cdot P(\bar{B}). \end{aligned}$$

*Ou seja,* $A\ e\ \bar{B}$ *são independentes.*

b. *Por hipótese,* $A$ *e* $B$ *são independentes. Note que*

$$P(B-A)=P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(A\cap B),$$

*então*

$$\begin{aligned} P(B\cap\bar{A}) &= P(B)-P(A)\cdot P(B) \\ &= P(B)\cdot[1-P(A)] \\ &= P(B)\cdot P(\bar{A}). \end{aligned}$$

*Ou seja,* $B$ *e* $\bar{A}$ *são independentes.*

c. *Por hipótese,* $A$ *e* $B$ *são independentes. Note que*

$$P(\overline{A\cup B})=P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A\cup B),$$

*então*

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\cap\bar{B}) &= 1-[P(A)+P(B)-\ P(A\cap B)] \\ &= 1-[P(A)+P(B)-\ P(A)\cdot P(B)] \\ &= 1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B) \\ &= [1-P(A)]-P(B)\cdot[1-P(A)] \\ &= P(\bar{A})-P(B)\cdot P(\bar{A}) \\ &= [P(\bar{A})]\cdot[1-P(B)] \end{aligned}$$

$$= \quad P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

*Portanto,* $\bar{A}$ *e* $\bar{B}$ *são independentes.*

$\square$

**Exemplo 2.13:** *Ao lançar uma moeda (não viciada) três vezes e observar as faces voltadas para cima. Considere os eventos*

$A$*: observar a face cara no segundo lançamento;*

$B$*: observar faces iguais nos três lançamentos.*

*Verifique se os eventos* $A$ *e* $B$ *são independentes e se* $\bar{A} \cap \bar{B}$ *também o são.*

***Solução:***

*O espaço amostral do experimento foi descrito no Exemplo 2.2. Considerando* $C_a$ *como cara e* $C_o$ *como coroa temos,*

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (C_a, C_a, C_a), (C_a, C_a, C_o), (C_a, C_o, C_a), (C_o, C_a, C_a), \\ (C_a, C_o, C_o), (C_o, C_a, C_o), (C_o, C_o, C_a)\ , (C_o, C_o, C_o) \end{Bmatrix}.$$

*Definindo a função* $n(\cdot)$*, que associa a cada evento do espaço amostral o seu número de elementos, temos que* $n(\Omega) = 8$*. Os eventos* $A$ *e* $B$ *são descritos como:*

$A = \{(C_a, C_a, C_a), (C_a, C_a, C_o), (C_o, C_a, C_a), (C_o, C_a, C_o)\}$*, em que* $n(A) = 4$*;*

$B = \{(C_a, C_a, C_a), (C_o, C_o, C_o), \}$*, com* $n(B) = 2$*.*

*Considere o evento* $A \cap B = \{(C_a, C_a, C_a)\}$*, ou seja, ocorrer cara no segundo lançamentos e faces iguais nos três lançamentos. Temos que* $n(A \cap B) = 1$*.*

*Para concluir sobre a independência de* $A$ *e* $B$*, calculemos:*

$$P(A) \ = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$P(B) \ = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}.$$

*Note que o produto das probabilidades dos eventos $A$ e $B$ é*

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

*ou seja, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, o que nos mostra, que $A$ e $B$ são independentes.*

*Observe ainda que podemos calcular também as probabilidades condicionais para constatar a independência dos eventos $A\ e\ B$ .*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1}{2}.$$

*Dessa maneira verificamos que a ocorrência do evento $B$ não interfere na ocorrência do evento $A$, pois $P(A|B) = P(A) = 1/2$. Além disso,*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{4} = P(B),$$

*ou seja, a ocorrência do evento $A$ não interfere na ocorrência do evento $B$. Por fim, não restam dúvidas sobre a independência dos eventos $A$ e $B$ acima mencionados.*

*Agora, vamos verificar se existe independência entre os eventos $\bar{A}$ e $\bar{B}$. Sabemos que:*

$$P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{3}{4}$$

*O evento $(\bar{A} \cap \bar{B})$ representa os casos que não apresentam a face cara no segundo lançamento nem resultados iguais nos três lançamentos. Então*

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{(C_a, C_o, C_a), (C_o, C_o, C_a), (C_a, C_o, C_o)\}$$

*em que o evento $n(\bar{A} \cap \bar{B}) = 3$. Dessa forma, temos que*

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{8}.$$

*Note que o produto das probabilidades dos eventos complementares de $A$ e $B$ é dada por:*

$$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

*Assim, verificamos que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$, portanto $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são independentes.*

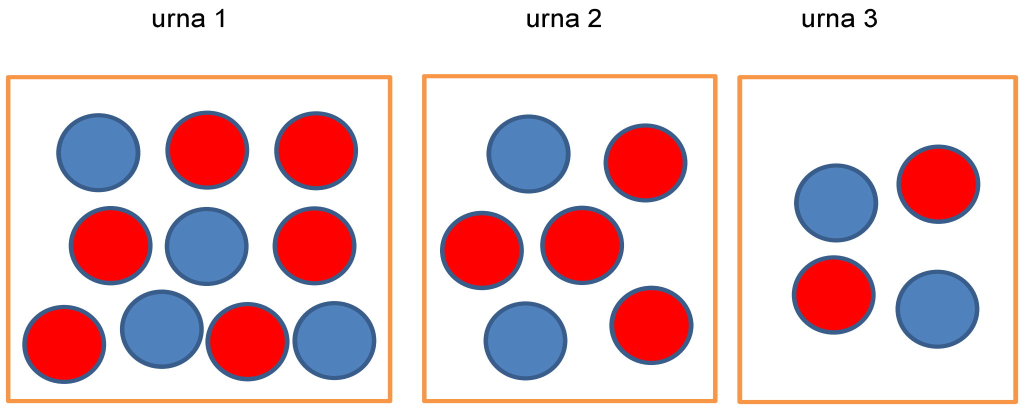
□

## 2.5 Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

**Exemplo 2.14:** *Considere três urnas com as seguintes configurações:*

- *Na primeira urna, há 4 bolas azuis e 6 bolas vermelhas;*
- *Na segunda urna, há 2 bolas azuis e 4 bolas vermelhas;*
- *Na terceira urna, há 2 bolas azuis e 2 bolas vermelhas.*

Figura 6 - Problema das 3 urnas.




Fonte: autoria própria

*Selecionando uma dessas urnas ao acaso, qual é a probabilidade de retirarmos uma bola azul?*

*Note que nas três urnas temos um total de 20 bolas, das quais 8 são azuis. Um erro grave é calcular a probabilidade como sendo* $8/20$. *Isso não pode ser feito porque as probabilidades de cada bola ser retirada não são iguais. Vejam que:*

- *Se a primeira urna for escolhida, a probabilidade de sair uma bola azul é* $4/10$*;*
- *Se a segunda urna for escolhida, a probabilidade de sair uma bola azul é* $2/6$;
- *Se a terceira urna for escolhida, a probabilidade de sair uma bola azul é* $2/4$.

*Precisamos calcular a probabilidade total de sair uma bola azul independentemente de qual urna foi selecionada. Outro erro grave cometido é dizer que a probabilidade de sair uma bola azul, ao escolher-se aleatoriamente uma urna, é igual à soma das probabilidades acima calculadas. Assim, de forma errônea chegaríamos em um absurdo, pois ao somarmos as probabilidades*

$$\frac{4}{10}+\frac{2}{6}+\frac{2}{4}=\frac{24+10+30}{60}=\frac{64}{60}>1.$$

*Os axiomas de Kolmogorov afirmam que* $0 \leq P(A) \leq 1$, *ou seja, a probabilidade de ocorrência de determinado evento está sempre no intervalo fechado entre zero e um. Tal erro é cometido devido ao fato de não se levar em consideração a probabilidade de se escolher determinada urna. Erros probabilísticos são comuns quando não se pensa de maneira abrangente, ou seja, quando não se considera todos os casos possíveis. O equívoco acontece porque o experimento é realizado em duas etapas:*

*1ª etapa: escolher uma urna aleatoriamente;*

*2ª etapa: escolher uma bola aleatoriamente.*

*A probabilidade de se escolher a urna 1 é de* $1/3$ *e dessa urna sair uma bola azul é de* $4/10$, *logo, a probabilidade de retirarmos uma bola azul da urna 1 é de*

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}=\frac{4}{30}.$$

*A probabilidade de escolher a urna 2 é de* $1/3$ *e dessa urna sair uma bola azul é de* $2/6$, *logo, a probabilidade de retirarmos uma bola vermelha da urna 2 é de*

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{18}.$$

*Analogamente, a probabilidade de retirarmos uma bola vermelha da urna 2 é de*

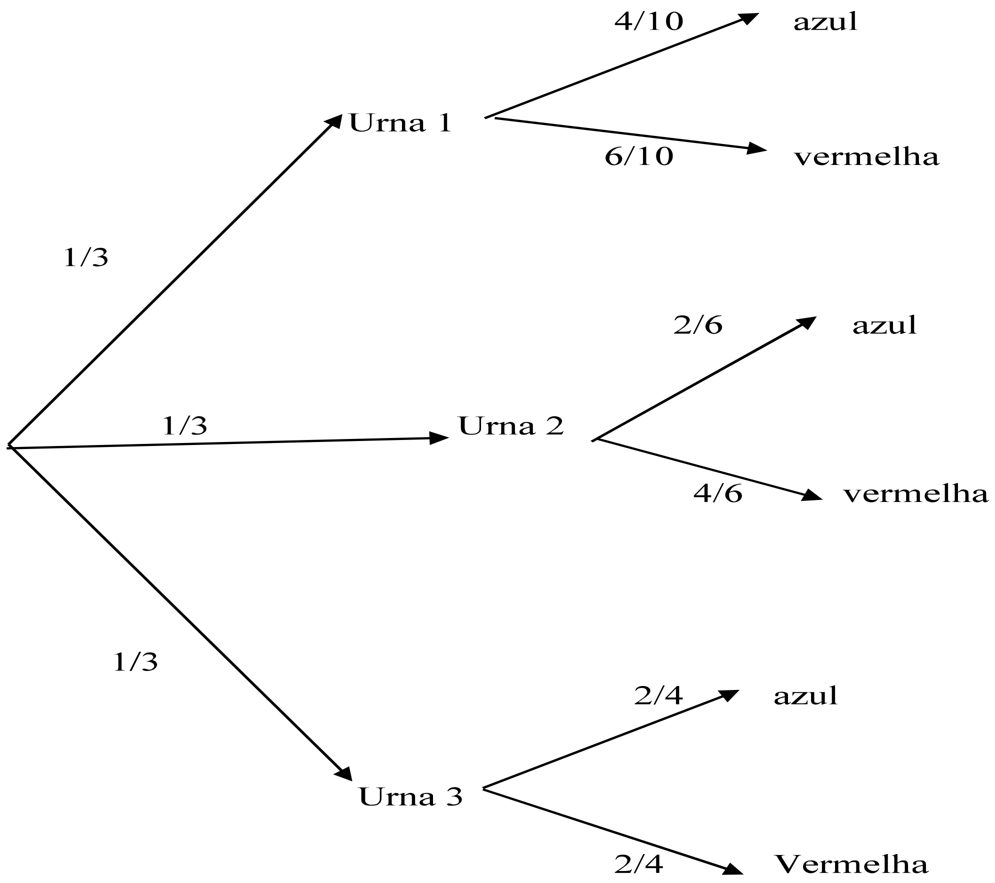
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{12}.$$

*Assim, temos que a probabilidade de retirarmos uma bola azul é*

$$\frac{4}{30} + \frac{2}{18} + \frac{2}{12} = \frac{24 + 20 + 30}{180} = \frac{74}{180}.$$

*Vamos representar os cálculos através de um diagrama de árvore.*

Figura 7 - Diagrama de árvore do problema das 3 urnas




Fonte: autoria própria

*Agora, a partir do diagrama, vamos calcular a probabilidade de a bola retirada ser vermelha.*

$$P(V) = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}$$
$$= \frac{6}{30} + \frac{4}{18} + \frac{2}{12} = \frac{106}{180}.$$

*Note que, se somarmos a probabilidade de ocorrer uma bola azul e a de ocorrer uma bola vermelha obtemos que o total é igual*

$$\frac{74}{180} + \frac{106}{180} = \frac{74+106}{180} = \frac{180}{180} = 1.$$

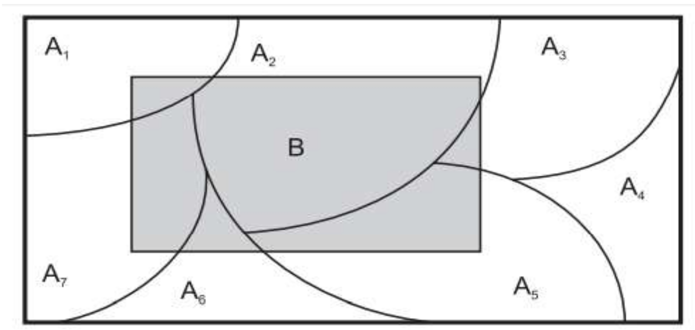
□

Dizemos que os eventos $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ representam uma *partição* do espaço amostral $\Omega$ quando

a. $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$;
b. $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$;
c. $P(A_i) > 0$, para todo $i$.

Considere $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma partição do espaço amostral $\Omega$ e $B$ um evento qualquer em $\Omega$, conforme a figura abaixo

Figura 8 - Partição do um espaço amostral




Fonte: https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/10161710102012Probabilidade_e_Estatistica_aula_9.pdf. Acesso em 18 dez. 2023

Como a união de todos os $A_i's$ é o espaço amostral, segue que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B).$$

O fato de existirem alguns termos da igualdade acima como sendo conjunto vazio (por exemplo, $B \cap A_4 = \emptyset$) não invalida o resultado, uma vez que $A \cup \emptyset = A$. Por definição de partição, os $A_i's$ são mutuamente exclusivos dois a dois; logo, os eventos $A_i \cap B$ também o são, para todo $i$. Então, pelo axioma da atividade de Kolmogorov, podemos escrever

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)].$$

Assim,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

e a regra do produto de probabilidades garante que

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n),$$

esse resultado é conhecido como Teorema da Probabilidade Total.

$\square$

**Teorema da Probabilidade Total**: *Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma partição do espaço amostral $\Omega$ e seja $B$ um evento qualquer em $\Omega$. Então*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i).$$

$\square$

A probabilidade $P(A_i)$ é denominada probabilidade *a priori* do evento $A_i$. Continuando no contexto da Figura 10, suponhamos agora que $B$ tenha ocorrido. Vamos usar essa informação para calcular a probabilidade *a posteriori* do evento $A_i$, ou seja, vamos calcular $P(A_i|B)$. Por definição temos

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}.$$

Usando a regra do produto de Probabilidades e o Teorema da Probabilidade Total, resulta que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}.$$

Esse resultado é conhecido como Teorema de Bayes.

**Teorema de Bayes:** *Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma partição do espaço amostral $\Omega$ e seja $B$ um evento qualquer em $\Omega$. Então,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B|A_j)}. \qquad \square$$

**Exemplo 2.15[7]:** *Suponha que um posto de saúde tem, em estoque, 600 doses de vacina contra gripe. Dessas doses, 30% são importadas e o restante, nacional. Quando aplicada em um paciente, a vacina importada tem 20% de probabilidade de causar reação alérgica, enquanto a vacina nacional tem 30% de probabilidade. Considerando que, após tomar a vacina, um paciente apresente reação alérgica, a probabilidade de que ele tenha tomado a vacina nacional é de:*

*a.* $126/420$

*b.* $420/600$

*c.* $7/9$

*d.* $27\%$

*e.* $21\%$

**Solução:**

*Sabe-se que houve reação. (Vamos desconsiderar os casos que não houve reação).*

*Considere as notações probabilísticas, listadas a seguir:*

$P(I \cap R)$ *(Reação com vacina importada);*

$P(N \cap R)$ *(Reação com vacina nacional);*

$P(N|R)$ *(Probabilidade de ter tomado vacina nacional, dado que houve reação alérgica).*

---

[7] Questão proposta pela banca IADES para o concurso da Secretaria de Saúde do Distrito Federal no ano de 2018.

*Assim, pelo Teorema de Bayes:*

$$P(N|R) = \frac{P(N \cap R)}{P(N \cap R) + P(I \cap R)} = \frac{\frac{70}{100} \cdot \frac{30}{100}}{\frac{70}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{100}} = \frac{\frac{21}{100}}{\frac{27}{100}} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}.$$

□

O Teorema de Bayes é uma das fórmulas mais importantes da Teoria de Probabilidade e têm sido fundamental no desenvolvimento da ciência em diversas áreas, tais como medicina, economia, justiça e mais recentemente, em aprendizado de máquinas (do inglês, *machine learning*) e em inteligência artificial. Em geral, cientistas utilizam este resultado para avaliar até que ponto novos dados validam ou não seus modelos.

Calcular a probabilidade *a posteriori*, ou seja, após algo ter acontecido, possibilita a devida consideração de evidências relevantes ao caso particular que está sendo analisado. É fundamental ressaltar que o conceito de probabilidade condicional é pré-requisito essencial para a aplicação desse teorema.

A análise da probabilidade *a posteriori* traz uma importante interpretação de resultados de diversos exames, como por exemplo em pesquisas sobre câncer, covid 19, entre outras doenças. Em tribunais de justiça, erros na utilização do Teorema de Bayes e consequente confusão em considerar $P(A|B)$=$P(B|A)$ ficaram conhecidos como a “Falácia do Promotor”, que foi responsável pela condenação de pessoas.

No próximo capítulo estudaremos problemas que envolvem julgamentos que contradizem o que algumas das leis de probabilidade, apresentadas neste capítulo, estabelecem.

# 3 ERROS MATEMÁTICOS E TEORIA DE PROBABILIDADE

Pequenos erros matemáticos, resultados catastróficos. Em algumas áreas, erros matemáticos são fatais. Um avião, um navio, entre outros, mal projetados, podem resultar em morte de centenas de pessoas. Uma das teorias sobre o naufrágio do 'Titanic", navio Britânico projetado nos anos de 1909 a 1911, tido como uma embarcação totalmente segura, diz que houve um erro de cálculo nas construções das três hélices a vapor, as quais funcionam apenas em mão única. Ao avistar o iceberg, foi ordenado que toda a força das hélices fosse na direção oposta, mas uma delas continuou girando na mesma direção, ainda que em menor velocidade. O cálculo de velocidade somado ao erro de projeto da embarcação ocasionou a batida e o consequente naufrágio, vitimando mais de 1,5 mil pessoas.

Em Tribunais de Justiça, várias pessoas foram condenadas pelo uso indevido, não criterioso, do Teorema de Multiplicação de Probabilidades, do conceito de Independência entre eventos probabilísticos e pela interpretação equivocada do conceito de condicionalidade de probabilidade condicional, erros que ficaram conhecidos como "A Falácia do Promotor".

Neste capítulo serão abordados erros conceituais de probabilidade cometidos em situações reais. Na seção 3.1 e nas subseções 3.1.1 e 3.1.2, cometidos em tribunais de justiça e em exames médicos (falso positivo), a interpretação equivocada em não diferenciar as probabilidades condicionais $P(A|B)$ e $P(B|A)$. Na seção 3.2, o erro da regra da multiplicação de probabilidades em desconsiderar eventos dependentes. Assim, destaca-se a importância da leitura e do bom entendimento da base teórica explanada no capítulo 2, principalmente na seção 2.4 deste trabalho.

## 3.1 A Falácia do Promotor

O erro cometido na interpretação equivocada de probabilidades condicionais deu origem à chamada Falácia do Promotor. A confusão lógica ocorre em não diferenciar as probabilidades $P(A|B)$ e $P(B|A)$. Tal erro interpretativo seria cometido por ignorância ou por conveniência? O certo é que, tal equívoco, resulta, na área jurídica, no caso da falácia do promotor/defensor e, em medicina, no fenômeno dos falsos positivos. Confundir as probabilidades condicionais e multiplicar probabilidades de eventos que não são independentes ocorreu em vários casos reais. São exemplos famosos da falácia, a condenação de Sally Clark na Inglaterra, a absolvição de O.J. Simpson nos Estados Unidos.

Trata-se de uma falácia do ponto de vista lógico de origem estatística. Utilizada de forma equivocada pelas promotorias, que induz o júri a acreditar que a probabilidade de inocência parece ser algo improvável. A falácia do promotor utiliza de argumentos inválidos e falas do tipo: "as chances de determinado acusado ser inocente são tão pequenas que o júri pode, com segurança, desconsiderar a possibilidade de que esse réu seja inocente". A falácia do promotor ignora o fato de que a probabilidade do réu ser inocente dado que possui evidências de determinado crime é diferente da probabilidade de o réu possuir evidências de determinado crime dado que o réu é inocente. São marcantes os erros no conceito de probabilidade condicional, bem como nas interpretações equivocadas de eventos independentes.

### 3.1.1 Teste positivo e chances de doença

Iniciemos este capítulo com o problema apresentado em Kremer (2014), relatando a pesquisa realizada pelo médico alemão, Dr. Gerd Gigerenzer, pesquisador sobre o uso da racionalidade limitada e da heurística na tomada de decisões. Entre 2006 e 2007, Gigerenzer ministrou uma série de workshops de estatística para mais de 1.000 ginecologistas praticantes e iniciou todas as sessões com a mesma pergunta:

*Uma mulher de 50 anos sem sintomas participa de uma mamografia de rotina. Ela testou positivo, está alarmada e quer saber se ela tem câncer de mama com certeza ou quais são as suas chances. Além do resultado do exame você não tem informações adicionais sobre a mulher.*

*Alguns dados adicionais foram fornecidos:*

1. *A probabilidade de uma mulher ter câncer de mama é de 1% ("prevalência");*

2. *Se uma mulher tem câncer de mama, a probabilidade de seu teste ser positivo é de 90% ("sensibilidade");*
3. *Se uma mulher não tiver câncer da mama, a probabilidade de o teste ser positivo é de 9% ("taxa de falsos alarmes").*

*Uma determinada mulher fez o teste e deu positivo. Qual a probabilidade dessa mulher ter câncer de mama?*

a. *90%*
b. *80%*
c. *10%*
d. *1%*

Numa sessão, quase metade do grupo de 160 ginecologistas respondeu que a chance de a mulher ter câncer era de 9 em 10. Apenas 21% disseram que o número era de 1 em 10 – que é a resposta correta. Esse é um resultado pior do que se os médicos tivessem escolhido aleatoriamente uma das 4 respostas possíveis.

O problema proposto pelo Dr. Gerd Gigerenzer é um caso típico de aplicação do Teorema de Bayes. Percebe-se interpretações equivocadas por parte dos médicos participantes da pesquisa ao confundir as probabilidades condicionais $P(A|B)$ e $P(B|A)$. Tal erro de interpretação é conhecido como a Falácia do Promotor. Na pesquisa realizada foi solicitado que os ginecologistas avaliassem a probabilidade de uma mulher que testou positivo ter câncer, e a maioria respondeu que seria de 90%. Ora, essa probabilidade é de uma mulher com câncer testar positivo. Note que houve uma inversão das probabilidades condicionais. Neste trabalho já foi mostrado que essas duas probabilidades, em geral, produzem resultados bem diferentes.

Considere os eventos:

$C$: mulher tem câncer;

$\bar{C}$: mulher não tem câncer;

$T_{+}$: o teste deu resultado positivo.

Podemos reescrever os dados fornecidos pelo Dr. Gigerenzer como:

1. $P(C) = 1/100$ *(consequentemente,* $P(\bar{C}) = 99/100)$;
2. $P(T_+|C) = 90/100$;
3. $P(T_+|\bar{C}) = 9/100$.

A partir dos dados e utilizando o Teorema de Bayes, calculemos a probabilidade de uma mulher ter câncer, dado que o resultado do seu teste foi positivo:

$$P(C|T_+) \quad = \quad \frac{P(C)\cdot P(T_+|C)}{P(C)\cdot P(T_+|C) \ + \ P(\bar{C})\cdot P(T_+|\bar{C})}$$

$$= \frac{\frac{1}{100}\cdot\frac{90}{100}}{\frac{1}{100}\cdot\frac{90}{100}+\frac{99}{100}\cdot\frac{9}{100}} = \frac{\frac{90}{10000}}{\frac{981}{10000}}$$

$$= \frac{90}{981} \cong 9{,}2\%.$$

Portanto, a melhor resposta para o problema proposto é a letra C, ou seja, 10%.

Para tornar a interpretação do problema menos abstrata e mais objetiva, vamos recalcular a probabilidade solicitada no problema utilizando uma amostra representativa ao invés de aplicar o Teorema de Bayes. Essa estratégia permite que os cálculos sejam resolvidos utilizando apenas conhecimentos básicos de porcentagem e que o foco da discussão esteja nos aspectos conceituais do problema, facilitando a apresentação do conteúdo no Ensino Médio.

Suponhamos uma amostra com 1000 mulheres com 50 anos de idade. A partir das probabilidades fornecidas no problema, temos as seguintes estimativas:

Tabela 4 - Falso positivo

| **Amostra = 1000 mulheres** | | | |
|---|---|---|---|
| Têm câncer ($C$):<br>1% de 1000 mulheres<br>**= 10 mulheres** | | Não têm câncer ($\bar{C}$):<br>99% de 1000 mulheres<br>**= 990 mulheres** | |
| Teste positivo ($T_+$):<br>90% de 10 mulheres<br>**= 9 mulheres** | Teste negativo ($T_-$):<br>10% de 10 mulheres<br>**= 1 mulher** | Teste positivo ($T_+$):<br>9% de 990 mulheres<br>≅ **89 mulheres** | Teste negativo ($T_-$):<br>91% de 990 mulheres<br>≅ **901 mulheres** |

Fonte: Autoria própria

O Objetivo agora é, a partir dos dados da tabela acima, determinar a probabilidade de uma mulher ter câncer, sabendo que o seu teste deu positivo. O total de mulheres com resultados positivos em seus testes é de $9 + 89 = 98$. Destes testes, $9$ de fato correspondem a mulheres com câncer. Portanto,

$$P(C|T_+) = \frac{9}{98} \cong 9{,}2\%.$$

A vantagem do uso da tabela para solucionar o problema é que não é necessário memorizar a fórmula, basta ter conhecimento prévio de probabilidade condicional e de porcentagem. Sabendo que o espaço amostral é reduzido, pois é dada a informação que o teste deu positivo, fica fácil resolver a questão aplicando apenas a definição clássica de probabilidade.

Temos que $P(C) = 1\%$ é a probabilidade *a priori* e $P(C|T_+) \cong 9{,}2\%$ é a probabilidade *a posteriori*, que representa uma atualização do valor da probabilidade que se tinha inicialmente, após as informações sobre o resultado do exame. Podemos ser tentados a condenar a eficácia do teste, já que menos de 10% das pessoas com teste positivo de fato tem câncer, porém dois aspectos precisam ser considerados: após o resultado positivo do teste, as chances de câncer aumentaram em cerca de 9,2 vezes; além disso, o teste é bastante eficiente para descartar casos de câncer em mulheres cujo teste deu negativo, pois

$$P(C|T_-) = \frac{1}{1+901} \cong 0{,}11\%.$$

*A solução do problema proposto pelo Dr. Gerd Gigerenzer também pode ser vista pelo link* https://youtu.be/gC_G3PogNAgi *videoaula produzida como recurso educacional vinculado a esta dissertação.*

### 3.1.2 O Caso Hipotético da Ilha Kamavery

Considere a situação hipotética a seguir (elaboração própria):

*Um corpo com várias perfurações foi encontrado em um matagal na Ilha Kamavery. No tronco de uma árvore próxima ao corpo, a polícia técnica encontrou uma mensagem escrita pela vítima com o seu próprio sangue, com os dizeres: "tatoo caveira". Os investigadores, após análise detalhada do crime, concluíram que o assassino(a) mora no vilarejo, tem tatuagem de caveira e que o crime fora cometido por uma única pessoa.*

*Uma semana após o crime, Tício foi preso como suspeito de assassinato. O acusado alega ser inocente.*

*Diante das evidências apontadas pela polícia técnica, a promotoria ofereceu denúncia contra Tício por homicídio qualificado. Cabe ao júri decidir se, Tício apresentando evidências contundentes do crime, é ou não inocente.*

*No tribunal a polícia técnica apresentou os seguintes dados:*

1. *Uma pessoa inocente tem uma chance em 10.000 de corresponder a uma evidência contundente do crime;*
2. *O culpado é um dos 50.000 moradores do vilarejo;*
3. *O culpado possui evidência contundente do crime.*

*Com base nas informações apresentadas pela polícia, o promotor faz a seguinte sustentação oral: "O acusado tem a evidência do crime, portanto, existe uma chance em 10.000 dele ser inocente obviamente Tício é o culpado".*

Se você estivesse no tribunal do júri, concordaria com o promotor? O argumento matemático utilizado pela acusação está correto? Vamos analisar, do ponto de vista probabilístico, a situação apresentada. Considere os eventos e as seguintes probabilidades:

- $I$ – O acusado é inocente;
- $E$ – Evidência contundente na cena do crime;
- $C$ – O acusado é culpado;
- $P(E|I)$ – Probabilidade de o inocente corresponder a uma evidência contundente da cena do crime;
- $P(I|E)$ – Probabilidade de uma pessoa com evidência contundente ser inocente;
- $P(C)$ – Probabilidade de uma pessoa do vilarejo ser culpada.

Alguns dados importantes são:

- Testemunha especialista (polícia técnica) diz: Uma pessoa inocente tem uma chance em 10.000 de corresponder a uma evidência contundente da cena do crime.
- Promotor diz: O acusado tem a evidência do crime $(E)$. Portanto existe uma chance em 10.000 dele ser inocente, obviamente ele é culpado.

Note que o Promotor, baseado na fala da testemunha, comete um erro gravíssimo ao afirmar que $P(I|E) = \frac{1}{10.000}$ . Observe que tal probabilidade mencionada pelo Promotor é a de $P(E|I)$. Não se trata de um erro intuitivo e sim interpretativo, ou por não dizer "maldoso". É importante destacar que $P(I|E)\ e\ P(E|I)$, são coisas diferentes, pois mostraremos, através do Teorema de Bayes, como as probabilidades $P(E|I)$ e $P(I|E)$ apresentam percentuais bem distintos.

Sabe-se que as probabilidades citadas tanto pela testemunha especialista, quanto pelo promotor, são probabilidades condicionadas. Assim,

$$P(E|I) = \frac{P(E \cap I)}{P(I)} \Rightarrow P(E \cap I) = P(E|I) \cdot P(I) \quad \text{e}$$

$$P(I|E) = \frac{P(E \cap I)}{P(E)} \Rightarrow P(E \cap I) = P(I|E) \cdot P(E).$$

Das duas equações acima, tem-se:

$$P(I|E) \cdot P(E) = P(E|I) \cdot P(I) \Rightarrow P(I|E) = \frac{P(E|I) \cdot P(I)}{P(E)}.$$

Dessa maneira, obtemos as seguintes probabilidades:

$$P(I|E) = \frac{P(E|I)P(I)}{P(E)} \; e$$

$$P(E|I) = \frac{P(I|E)P(E)}{P(I)}.$$

Portanto, as duas probabilidades são distintas.

Agora, vamos determinar a probabilidade de uma pessoa com evidência contundente ser inocente, $P(I|E)$. Sabe-se que:

- O culpado é um dos 50.000 adultos vivendo no vilarejo;
- O culpado também corresponde a uma evidência contundente.

Vamos assumir que só haja um culpado. Dessa maneira:

- A probabilidade de determinada pessoa ser inocente é: $P(I) = \frac{49.999}{50.000}$.
- A probabilidade de determinada pessoa ser culpada é: $P(C) = \frac{1}{50.000}$.
- A probabilidade de o culpado ter evidência contundente da cena do crime é: $P(E|C) = 1$.

A probabilidade de uma pessoa inocente ter evidência contundente da cena do crime é: $P(E|I) = \frac{1}{10.000}$.

As informações estão organizadas na tabela a seguir:

Tabela 5 - Ilha Kamavery

| **Total de habitantes na ilha Kamavery: 50000 pessoas** | |
|---|---|
| Culpado ($C$):<br><br>$\mathbf{1}$ | Inocentes ($I$):<br><br>$\mathbf{49999}$ |
| Culpado com evidência contundente do crime:<br><br>$1$ | Inocentes com evidências contundentes do crime:<br><br>$\frac{1}{10.000} \cdot 49999 \cong 5$ |
| Total de pessoas com evidência contundente do crime ($E$):<br><br>$1 + 5 = 6$. Destes, $5$ são inocentes. | |

Fonte: Autoria própria

Logo, a probabilidade de Tício ser inocente é de $\frac{5}{6} \cong 83{,}33\%$. Portanto, matematicamente o júri não deveria considerar o acusado culpado com base no argumento da promotoria.

Observe que foi utilizado apenas cálculos simples de porcentagem e a definição clássica de probabilidade considerando uma informação *a posteriori*.

Interpretações equivocadas de probabilidade em tribunais levaram pessoas inocentes para a cadeia, tais equívocos correspondem à Falácia do Promotor.

*A solução do problema hipotético da Ilha Kamavery também pode ser vista pelo link [https://youtu.be/bJ2DIb_fN7g](https://youtu.be/bJ2DIb_fN7g) videoaula produzida como recurso educacional vinculado a esta dissertação.*

### 3.2 Erro ao multiplicar probabilidades de eventos não independentes

A regra do produto de probabilidades para dois eventos diz que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$, ou seja, a probabilidade da ocorrência dos eventos A e B é dada pelo produto da probabilidade do evento A e da probabilidade do evento B, sabendo da ocorrência do evento A.

No caso em que A e B são eventos independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ao multiplicarmos dois ou mais eventos, temos que observar se há dependência ou não entre eles. O caso a seguir, mundialmente conhecido, em que uma pessoa foi condenada com base em um erro drástico de multiplicação de probabilidades sem ter provas de que os eventos eram independentes.

3.2.1 O caso Sally Clark: Maternidade sob ataque

Sally Clark, uma advogada britânica foi acusada de duplo assassinato dos seus dois filhos. O primeiro deles faleceu com 11 semanas de vida, o segundo, com 8. Mesmo com depoimentos de peritos que afirmavam que não existiam provas de maus tratos contra as crianças, Sally foi condenada à prisão perpétua pelo crime de homicídio, baseado no depoimento do pediatra Sir Roy Meadow [8], o qual testemunhou na acusação sobre a Síndrome da Morte Súbita Infantil, conhecida como SIDS nos Estados Unidos e morte no berço na Grã-Bretanha. Citando um estudo do governo, Meadow disse que a incidência de morte por SIDS era de uma em 8543 numa família com características semelhantes à de Sally Clark. Para Meadow a chance de ter duas mortes por SIDS era igual ao quadrado desse número, ou seja, uma chance em 72.982.849.

**SNHNEPS, Leila; COLMEZ, Coralie. A matemática nos tribunais - Uso e abuso dos números em julgamentos - Editora : Zahar; 1ª edição (5 junho 2014)**

Vejam que a explicação de Meadow só estaria correta se os eventos fossem independentes. Ora, apesar do fato de algumas famílias serem predispostas à SIDS,

[8] https://pt.wikipedia.org/wiki/Roy_Meadow. Acesso em 23 de junho de 2023.

Meadow presumiu de forma equivocada que a morte de cada irmão ocorreu independentemente da outra. Assim, o cálculo de probabilidade foi feito de forma errônea, ou seja, foi aplicado o teorema da multiplicação de probabilidades para eventos independentes.

Dessa forma a probabilidade do primeiro filho morrer de SIDS e do segundo filho morrer de SIDS foi obtida da seguinte maneira:

$$P(1^{\underline{o}}\ morte\ SIDS\ \cap 2^{\underline{o}}\ morte\ SIDS) = P(1^{\underline{o}}\ morte\ SIDS) \cdot P(2^{\underline{o}}\ morte\ SIDS)$$

$$P(1^{\underline{o}}\ morte\ SIDS\ \cap 2^{\underline{o}}\ morte\ SIDS) = \frac{1}{8543} \cdot \frac{1}{8543} = \frac{1}{72.982.849}.$$

Assim, Meadow afirmou que a probabilidade da acusada ser inocente era muito pequena, ou seja, $\left(\frac{1}{8543}\right)^2 \cong 0{,}0000000137 = 0{,}00000137\%$, portanto não restavam dúvidas que a acusada era culpada (conclusão típica da falácia do promotor). Não foi considerado por Meadow que a morte no berço poderia ter um traço genético e que as duas mortes no berço na mesma família podem ser atribuídas a esse traço, logo não seriam eventos independentes e sim dependentes. Meadow mostrou "erradamente" que a chance de duas crianças morrerem numa família como a de Sally Clark era tão rara, 1 chance em $72.982.849$ que era muito mais provável que os filhos tivessem sido assassinados. A probabilidade conjunta não deveria ter sido considerada argumento suficiente para a condenação de Sally Clark. O simples caso de a probabilidade ser pequena não pode ser tratado como evidência suficiente para culpar ou inocentar uma pessoa. Basta pensarmos no jogo de loteria Mega Sena. A probabilidade de determinado apostador acertar as seis dezenas sorteadas é 1 chance em 50.063.860, porém, devido ao grande de número de apostadores que jogam a cada concurso, a probabilidade de ter um acertador, torna-se muito grande. Mas, pela interpretação de Madow e da promotoria, é mais provável que um ganhador da mega sena tenha "trapaceado" para acertar os 6 números.

A promotoria convenceu os jurados da culpabilidade da acusada. Sally Clark foi condenada 1999 a prisão perpétua. Sua condenação foi revogada em 2003 após "novas evidências" terem sidos expostas ao tribunal de apelação.

As novas evidências no caso Sally Clark estão relacionadas na citação a seguir:

> Nada menos do que oito colônias da bactéria letal Staphilococus aureus haviam sido encontradas no corpo de Harry, algumas aparecendo com polimorfos, as células que nossos corpos desenvolvem para combater uma doença. Elas mostravam que o bebê vinha sofrendo de uma séria infecção bacteriana quando morreu, uma infecção que poderia ter provocado meningite. Confrontados com esses registros, uma dezena de peritos médicos novos e independentes redigiu relatórios afirmando que Harry quase sem dúvida morrera, e provavelmente morreu, de causa natural, de uma infecção muito séria. Sua morte jamais deveria ter sido considerada síndrome de morte súbita infantil.
>
> **SNHNEPS, Leila; COLMEZ, Coralie. A matemática nos tribunais - Uso e abuso dos números em julgamentos - Editora: Zahar; 1ª edição (5 junho 2014)**

Este caso chocante foi precedido de muitos erros matemáticos e estatísticos. Várias pessoas foram condenadas a partir do argumento falacioso defendido pelo Doutor Meadow e dos promotores de justiça.

Usando a matemática em casos semelhantes, deveríamos ter muito zelo na coleta de dados estatísticos para que não trabalhemos com dados enviesados.

O Teorema de Bayes seria mais recomendado para “tentar” uma explicação matemática em casos de crimes.

Posteriormente, foram atualizados os dados estatísticos de mortes de crianças em casos semelhantes aos dos filhos de Sally Clark.

> Primeiro, examinamos as causas naturais da morte infantil súbita. A chance de um bebê aleatório morrer de SIDS era de cerca de 1 em 1.300 durante esse período na Grã-Bretanha. O argumento de Meadow era falho e produzia uma chance muito menor de morte natural. As probabilidades estimadas de uma segunda morte por SIDS na mesma família eram muito menores, talvez uma em 100, porque os membros da família podem compartilhar uma predisposição ambiental ou genética comum para SIDS.
>
> Em segundo lugar, nos voltamos para a hipótese de que os bebês foram assassinados. Apenas cerca de 30 crianças de 650.000 nascimentos anuais na Inglaterra, Escócia e País de Gales foram assassinadas por suas mães. O número de duplos assassinatos devem ser muito menos provável, estimado em 10 vezes menos provável.
>
> **https://dataisle.co/a-falacia-do-promotor-e-o-teorema-de-bayes/acesso em 29/06/2023**

Analisaremos o caso de Sally Clark por um ponto de vista não viesado.

Dos dados mencionados na citação anterior, temos que a probabilidade de um bebê morrer de SIDS era $\frac{1}{1300}$ e que um segundo bebê da mesma família morrer de SIDS era bem maior, de $\frac{1.}{100}$. Tais probabilidades nos mostram que os eventos são dependentes, contrariando a hipótese levantada pela promotoria, a qual se baseou no depoimento do doutor Meadow. Assim, temos que a probabilidade de duas crianças, de uma mesma família, terem morrido de SIDS é representada e obtida como:

$$P(1^{\underline{a}}SIDS \cap 2^{\underline{a}}SIDS) \ = P(1^{\underline{a}}SIDS) \cdot P(2^{\underline{a}}SIDS|1^{\underline{a}}SIDS)\frac{1}{1300} \cdot \frac{1}{100} \cong 0{,}0000077,$$

Lê-se:

i) $P(1^{\underline{a}}SIDS \cap 2^{\underline{a}}SIDS)$: probabilidade da primeira criança morrer de SIDS e da segunda criança morrer de SIDS.

ii) $P(1^{\underline{a}}SIDS)$: probabilidade da primeira criança morrer de SIDS.

iii) $P(2^{\underline{a}}SIDS|1^{\underline{a}}SIDS)$: probabilidade da segunda criança morrer de SIDS, dado que a primeira criança morreu de SIDS.

Representaremos $P(1^{\underline{a}}SIDS \cap 2^{\underline{a}}SIDS)$ por $P(SS) = 0{,}0000077$. Logo, a probabilidade do evento complementar, ou seja, a probabilidade de pelo menos um dos dois filhos não terem morrido de causa natural, representada por $P(\overline{SS})$, é de 1 - $0{,}0000077 = 0{,}9999923$. Fazendo o uso do Teorema de Bayes chegaremos em algo mais provável do ponto de vista matemático. Chamemos a hipótese "$SS$" como sendo a probabilidade dos dois filhos de Sally Clark terem morrido de SIDS. E, denotaremos por "$RR$" a probabilidade de ambas as crianças terem morrido de forma repentina e inesperada. Temos:

$$P(SS) = \frac{1}{1300} \cdot \frac{1}{100} \cong 0{,}0000077.$$

$$Portanto,$$

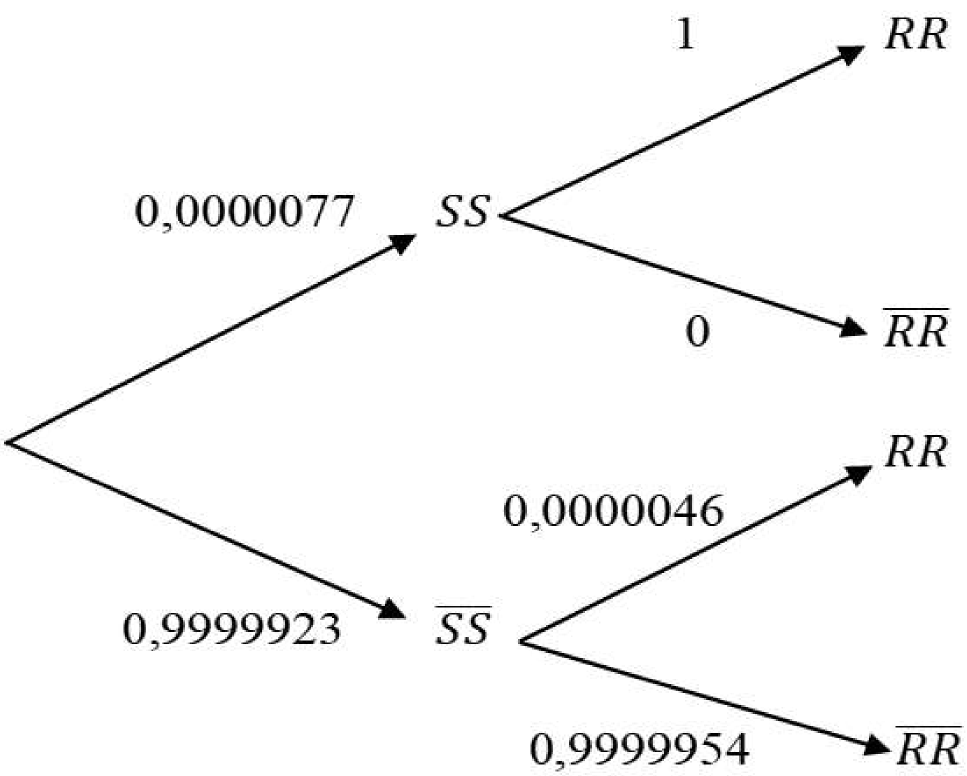
$$P(\overline{SS}) \ = 1 - 0{,}0000077 \ = 0{,}9999923.$$

Por outro lado, a probabilidade de uma mãe assassinar seu bebê é de $\frac{30}{650000}$. Já o duplo assassinato tinha uma probabilidade 10 vezes inferior. Esses dados foram retirados da citação anterior. Dessa forma, a probabilidade de ambas as crianças terem morrido de forma repentina e inesperada $(P(RR))$ é de $P(RR) = \frac{30}{650000} \cdot \frac{1}{10} \cong 0{,}0000046$.

Denotaremos por $P(RR|SS)$ a probabilidade de as crianças terem morrido de forma repentina e inesperada dado que morreram de SIDS e por $P(RR|\overline{SS})$ a probabilidade das crianças terem morrido de forma repentina e inesperada dado que não morreram de SIDS (caso que a promotoria equiparou a assassinato).

Seja $P(SS|RR)$ a probabilidade de as duas crianças terem morrido de SIDS dado que morreram de forma repentina e inesperada. Analisando o diagrama de árvore a seguir e aplicando o Teorema de Bayes, temos:

Figura 9 - Diagrama de árvore 2




Fonte: autoria própria

Notações:

$SS$: Duas mortes de SIDS;

$\overline{SS}$: Ao menos uma das duas mortes não foi de SIDS;

$RR$: Duas mortes repentinas e inesperadas;

$\overline{RR}$: Ao menos uma das mortes não foi por causa repentina e inesperada.

$$P(SS|RR) = \frac{1 \cdot 0{,}0000077}{1 \cdot 0{,}0000077 + 0{,}9999923 \cdot 0{,}0000046} \cong 0{,}62 = 62\%.$$

Portanto, concluímos que era mais provável que os dois filhos de Sally Clark tenham morrido de SIDS.

Para tornar a interpretação do problema menos abstrata e mais objetiva, vamos recalcular a probabilidade solicitada no problema utilizando uma amostra representativa ao invés de aplicar o Teorema de Bayes

Tabela 6 - Caso Sally Clark

| **Amostra 1.300.000 pessoas** | |
|---|---|
| Duas mortes seguidas por SIDS ($SS$):<br>***Mortes por SIDS são consideradas repentinas***<br>$\frac{1}{1300} \cdot \frac{1}{1300} \cdot 1.300.000 = 100,$<br>número de mortes repentinas e inesperadas por causas naturais (inocência). | Duas mortes seguidas com pelo menos uma sem ter sido por SIDS ($\overline{SS}$):<br>$\mathbf{\frac{30}{650.000} \cdot \frac{1}{10} \cdot 1.299.900 \cong 60},$<br>número de casos em que a mãe comete duplo assassinato. |
| Total de mortes repentinas e inesperadas:<br>$100 + 60 = 160$, destes, em $100$ casos a mãe é inocente. | |

Fonte: Autoria própria

Portanto, a probabilidade de Sally Clark ser inocente, dado que as duas crianças morreram de causas repentinas e inesperadas é de:

$$P(SS|RR) = \frac{100}{160} = 0{,}625 = 62{,}5,\%.$$

Logo, era mais provável que os filhos de Sally Clark tenham morrido por SIDS.

*Mais comentários a respeito do Caso Sally Clark podem ser vistos pelo link* https://youtu.be/crcYTNmpvr8 *videoaula produzida como recurso educacional vinculado a esta dissertação.*

### 3.2.2 O Caso Collins

Em uma manhã do ano de 1964, por volta das 11h30, Juanita Brooks caiu no chão logo após ser empurrada por uma mulher loura, a qual subtraiu de Juanita a bolsa que ela usava. John Bass, testemunha do ocorrido, avistou uma mulher jovem, de rabo de cavalo louro, descer uma viela e adentrar em um carro amarelo. O carro acelerou de maneira brusca e ao passar perto da testemunha, esta percebeu que o motorista era um homem negro que usava barba e bigode. Diante das características, um policial foi a casa de um casal tido como suspeito chamado de Malcolm e Janet Collins. Ao interrogar o casal, o policial percebeu que Janet era branca, tinha cabelos louros escuros presos em um rabo de cavalo e que Malcolm era afro-americano, tinha bigode, porém estava de barba feita.

Os Collins foram acusados de roubo em segundo grau no tribunal estadual. Para reforçar as evidências, o promotor do caso, Ray Sinetar, chamou o Dr. Edward O. Thorp, jovem professor de matemática da Universidade Estadual do Novo México em Las Cruces para prestar um depoimento a respeito da chance matemática do casal ser inocente. O professor, em discurso, utilizou a regra do produto de probabilidades a partir de dados não convincentes a respeito do crime. Essas suposições incluíam:

**Axioma 1** Homem negro de barba: uma em dez.
**Axioma 2** Homem de bigode: uma em quatro.
**Axioma 3** Mulher branca de cabelo louro: uma em três.
**Axioma 4** Mulher de rabo de cavalo: uma em dez.

**Axioma 5** Casal interracial num carro: uma em mil.

**Axioma 6** Carro amarelo: uma em dez.

**SNHNEPS, Leila; COLMEZ, Coralie. A matemática nos tribunais - Uso e abuso dos números em julgamentos - Editora: Zahar; 1ª edição (5 junho 2014)**

Com esses dados, o professor calculou a probabilidade combinada de todos esses eventos. O absurdo matemático acontecido no caso Collins foi validado por um professor de matemática. Mais uma vez, de forma displicente, não fora dada a importância ao conceito de eventos independentes. Baseado nos dados oferecidos pela promotoria, o professor, de forma equivocada, utilizou a regra do produto de probabilidades para eventos independentes. Ora, basta pensarmos que homens barbudos geralmente usam bigodes, sendo assim a probabilidade de um homem ter barba e bigode não é igual a probabilidade de um homem ter barba multiplicada pela probabilidade de ter bigode. Dessa maneira, os eventos barba e bigode não seriam totalmente independentes. Multiplicar probabilidades de eventos dependentes como se fossem independentes gera um resultado errôneo e exagerado.

Utilizaremos as seguintes notações para os eventos:

- $HN_b$: Homem negro com barba
- $HB$: Homem com bigode
- $MB_{rc}$: Mulher branca com "rabo de cavalo"
- $B_{cl}$: Mulher branca com cabelo louro
- $CA$: Carro amarelo
- $IR$: Casal inter-racial no carro

Vejamos o erro probabilístico cometido no caso Collins:

$$P(HN_b \cap HB \cap MB_{rc} \cap MB_{cl} \cap CA \cap IR) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{12.000.000}.$$

A promotoria não mostrou nenhuma evidência dos dados fornecidos, na verdade, foram apenas suposições. O promotor usando um argumento probabilístico falacioso argumentou que era pouquíssimo provável, uma chance em doze milhões, de encontrar um casal com todas as características apresentadas, logo, uma vez encontrado, a chance de ser o casal que cometera o roubo era muito grande, ou seja, matematicamente é dizer que dado que o suspeito é inocente, a chance de apresentar as evidências do crime é de uma em 12.000.000, portanto é mais provável que o casal seja culpado. Mais uma vez o equívoco probabilístico da falácia do promotor, a interpretação correta seria a de caso os suspeitos apresentassem evidências do crime, qual a chance de serem inocentes. Assim, no tribunal de primeira instância o júri, baseado numa probabilidade equivocada, condenou o casal Collins por roubo em segundo grau.

### 3.2.3 O caso O. J Simpson

Orenthal James Simpson foi acusado formalmente, em outubro de 1995, pelos assassinatos de Nicole Brown, sua ex-esposa, e do garçom Ron Goldman. Os dois foram brutalmente mortos a facadas. Mais tarde, Simpson se apresentou à polícia como inocente e passou a estampar telejornais e revistas como o réu no que foi chamado de “Julgamento do Século”. Os advogados de defesa utilizaram como prova decisiva as luvas encontradas na cena do crime, que não cabiam nas mãos de OJ Simpson. A promotoria apresentou evidências de que Simpson havia tido comportamento violento com sua esposa, querendo estabelecer um *link* entre esse comportamento e o homicídio investigado. A defesa argumentou que para cada 2.500 mulheres violentadas por seus parceiros, apenas uma ia a óbito, sustentando uma argumentação de que o histórico violento com sua esposa era irrelevante para a discussão sobre o homicídio. Enquanto a maioria dos casos de abuso conjugal não termina em assassinato, a maioria dos casos de assassinato do cônjuge tem um histórico de abuso conjugal.

> Na defesa, o renomado advogado Alan Dershowitz, usando um argumento estatístico falacioso (falácia do defensor nesse caso), convenceu os jurados. Segundo ele, uma vez que é baixíssima a proporção (1 em 2.500 ou 0,04 %) das mulheres abusadas que são depois assassinadas pelo seu abusador, o argumento do promotor era estatisticamente irrelevante. Dershowitz sabia o que estava fazendo e inverteu a lógica do promotor. Uma vez que Nicole foi assassinada, a pergunta correta seria: se uma mulher foi assassinada, qual é a probabilidade de que ela tenha sido vítima de seu abusador? E não qual a probabilidade que uma mulher vítima de violência seja assassinada? Na lógica correta para o caso, a situação muda radicalmente, pois 90% das mulheres assassinadas nos EUA são vítimas de seu abusador.
>
> https://www.onacional.com.br/opiniao,47/2023/07/06/entendendo-a-falacia-do-promotor,125927 – acesso em 19/12/2023.

A defesa de O. J. Simpson usou do argumento falacioso invertendo a interpretação matemática para a probabilidade condicional. Não só uma vez foi citado neste trabalho a diferença das probabilidades $P(A|B)$(lê-se: probabilidade do evento $A$ ocorrer sabendo que o evento $B$ ocorreu) e $P(B|A)$(lê-se: probabilidade do evento $B$ ocorrer sabendo que o evento $A$ ocorreu).

Em sua oratória, advogado Alan Dershowitz convenceu os jurados que a probabilidade do seu cliente ter cometido o crime de assassinato era irrelevante, pois, invertendo o raciocínio matemático mostrou ao júri que, proporcionalmente, apenas uma mulher era assassinada a cada 2500 abusadas pelos seus companheiros, o que corresponde a 0,04%.

Assim, a defesa questionou: “Qual é a probabilidade que uma mulher vítima de violência seja assassinada?”. Matematicamente, a defesa usou a probabilidade de o abusador da vítima ter cometido o crime de assassinato dado que tal pessoa assassinada fosse vítima do seu abusador.

$$P(mulher\ assassinada|vítima\ do\ seu\ abusador) = \frac{1}{2500} = 0{,}04\%.$$

O questionamento matemático perante o júri, deveria ter sido que “uma mulher foi assassinada, qual a probabilidade de que ela tenha sido vítima do seu abusador?”

Nos Estados Unidos da América, no ano de 1995, 9 a cada 10 mulheres assassinadas eram vítimas dos seus abusadores.

$$P(vítima\ do\ seu\ abusador|mulher\ assassinada) = \frac{9}{10} = 90\%.$$

A diferença entre as duas probabilidades citadas é gritante. Porém, o que foi mostrado ao júri foi a probabilidade de 0,04% fazendo parecer pouco provável o acusado ter assassinado a sua ex-mulher.

Portanto, utilizando o argumento da falácia do promotor, o advogado de defesa induziu o júri ao erro e em 17 de julho de 1995, O. J. Simpson foi inocentado das acusações de homicídio, com base na dúvida razoável.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A expectativa é que esta dissertação seja acessível aos alunos do ensino médio e sirva de material de apoio a professores para a aplicação do conteúdo de teoria de probabilidade. Outros públicos, que também estudam este conteúdo, como candidatos a concursos públicos, advogados e profissionais da área da saúde também podem se beneficiar deste trabalho. É importante salientar que os conceitos de porcentagem, teoria dos conjuntos e análise combinatória são pré-requisitos essenciais para um bom entendimento de Teoria de Probabilidade.

A importância do conhecimento probabilístico é fundamental para evitar erros "grotescos" quando a matemática é utilizada como argumento para auxiliar em decisões que podem influenciar o destino das pessoas. A independência entre eventos não pode ser ignorada, como já ocorreu em tribunais de justiça. O respeito e a imparcialidade devem ser primordiais em casos nos quais a probabilidade é utilizada como ferramenta para fundamentar tomadas de decisões em situações complexas, como mencionadas aqui. O caso de Sally Clark foi um erro com consequências graves. Na verdade, a matemática não pode ser o fator determinante em uma condenação. A Falácia do Promotor pode não ser só um erro intuitivo, mas também um erro malicioso.

Exemplos variados do Teorema de Bayes foram apresentados e solucionados neste trabalho. Tal teorema é de suma importância para evitar que erros sejam cometidos. É necessário que o tema "Teoria de Probabilidade" seja abordado de forma detalhada no ensino médio. A Teoria Axiomática de Andrey Kolmogorov precisa ser incluída nos livros de educação básica, pois amplia e define com mais exatidão a definição clássica de Laplace.

Estudar probabilidade desenvolve o raciocínio lógico e desperta o interesse do aluno em medir incertezas, bem como em solucionar problemas reais.

## REFERÊNCIAS

BAYER, Arno *et al.* **Probabilidade na Escola**. III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005, Canoas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN,, P. A. **Estatística Básica**. São Paulo: Editora Saraiva, 2013 (8ª Edição). Magalhães, MN; Lima, ACP.

CARVALHO, D. L.; LOPES, Celi; OLIVEIRA, C.; **Concepções e Atitudes em Relação à Estatística.** Anais da Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística - Desafios para o Século XXI". Florianópolis, 1999.

COOKE, Roger Lee. ***Andrey Nikolayevich Kolmogorov: Russian mathematician.*** Encyclopaedia Britannica, 21 abril 2023. Disponível em: https://www.britannica.com/topic/General-Theory-of-Measure-and-Probability-Theory. Acesso em 23 dez 2023.

CUNHA, Gilberto. **Entendendo a falácia do promotor**. Jornal O Nacional, 06 julho 2023. Disponível em: https://www.onacional.com.br/opiniao,47/2023/07/06/entendendo-a-falacia-do-promotor,125927. Acesso em 19 dezembro 2023

DE QUEIROZ, Cileda. **Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?**. REVEMAT-Revista Eletrônica de Matemática, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

JAMES, Barry R. **Probabilidade: Um curso em nível intermediário.** 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

KAHNEMAN, Daniel. **Rápido e devagar: duas formas de pensar**. Objetiva, 2012.

LAPLACE, P.-S. ***Essai Philosophique sur les Probabilités***, . 6. Ed. Paris: Bachelier, imprimeur-libraire,1840. Disponível em: https://archive.org/details/essaiphilosophiq00lapluoft/page/ii/mode/2up. Acesso em 19 dezembro 2023.

KREMER, William. **Do doctors understand test results?.** BBC News, 7 julho 2014. Disponível em: https://www.bbc.com/news/magazine-28166019, Acesso em 22 abr. 2024.

MEYER, Paul L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Livros Técnicos e Científicos, 1982.

MORGADO, Augusto César *et al*. **Análise Combinatória e Probabilidade:** com as soluções dos exercícios. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

OLIVEIRA, M. A. **Probabilidade e estatística: um curso introdutório**. 1. Ed. Brasília: Editora IFB, 2011. V. 1. 166p.