Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

O INCENTRO COMO PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO QUE RELACIONA GEOMETRIA PLANA E EXTREMOS DE FUNÇÕES REAIS

Ruthyelen Cristina Machado de Freitas

Brasília
2024

Ruthyelen Cristina Machado de Freitas

O INCENTRO COMO PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO QUE RELACIONA GEOMETRIA PLANA E EXTREMOS DE FUNÇÕES REAIS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Universidade de Brasília – UNB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Rogério César dos Santos

Brasília

2024

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O INCENTRO COMO PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO QUE RELACIONA GEOMETRIA PLANA E EXTREMOS DE FUNÇÕES REAIS

por

Ruthyelen Cristina Machado de Freitas

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção de grau de

Mestre em Matemática

Brasília, 12 de junho de 2024

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rogério César dos Santos – FUP/UnB (Orientador) (Membro)

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo – FUB/UnB (Membro interno)

Prof. Dr. Mateus Gianni Fonseca – IFB (Membro externo)

AGRADECIMENTOS

Como expressar suficientemente minha gratidão a Deus pelo dom da vida e por colocar ao meu lado pessoas tão especiais?

Minha família é verdadeiramente meu porto seguro, e para eles vai meu mais sincero agradecimento. Obrigado pela paciência incansável, pelo carinho incondicional, pelo acolhimento constante. Ah! minha querida mãe, seu amor é incomparável. Quantas vezes você esteve ao meu lado, oferecendo seu colo nos momentos mais difíceis, preparando aquela “comidinha” que só você sabe fazer, alimentou a minha força. A você, mãe, dedico todo o meu amor.

Ao meu companheiro querido, Fabio, sua paciência infinita foi essencial. Sem você ao meu lado, com toda sua calma que eu confesso não ter e que ainda preciso aprender, este trabalho não seria possível. Meu coração transborda de gratidão por você.

Aos amigos queridos, em especial Gustavo, Glaucia, Gorete, Marcelle e Michelle, meu agradecimento por todos os momentos maravilhosos que compartilhamos. Mesmo nos períodos em que os estudos me mantiveram distante, vocês estiveram presentes, oferecendo apoio e renovando minhas energias.

Aos meus alunos, meu mais profundo respeito. Vocês me trazem felicidade. A escola é meu lar, e é para vocês que dedico todo esse aprendizado.

Ao meu Professor, Rogério, desde os dias da graduação, você é um exemplo de sabedoria e humildade. Agradeço por toda sua orientação e apoio.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que contribuíram para esta etapa em minha vida.

“Nossa maior fraqueza está em desistir. O caminho mais certo de vencer é tentar mais uma vez”

Thomas Edison

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo explorar o incentro como ponto crítico de uma função, revisando conteúdos de geometria plana e de funções reais relacionados. O estudo apresentará uma proposta de atividade, uma sequência didática a ser aplicada no Ensino Médio, na tentativa de potencializar o estudo da Matemática. Foi desenvolvida por meio de uma pesquisa bibliográfica e com uma abordagem qualitativa. Reconhecendo a relevância das tecnologias no ensino, o GeoGebra foi utilizado como ferramenta para auxiliar o desenvolvimento da atividade, onde a tecnologia se põe a favor do aluno. A proposta busca uma abordagem prática e visualmente estimulante para revisar conceitos oriundos da álgebra e da geometria, incentivando a participação ativa dos alunos. Ao destacar a importância da resolução de problemas, questões e propostas no processo de ensino-aprendizagem utilizando o software GeoGebra, percebe-se sua função prática por ser lúdico e facilitar o aprendizado da Matemática de maneira acessível e envolvente, sem deixar de lado seus princípios teóricos fundamentais, para proporcionar uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Geometria Plana; Extremos de Funções Reais; Máximos e Mínimos; Incentro e Ex-incentro; Ensino da Matemática; GeoGebra; Sequência Didática.

ABSTRACT

This dissertation aims to explore the incenter as a critical point of a function, reviewing topics in plane geometry and related real functions. The study proposes an activity, a didactic sequence intended for high school, to enhance Mathematics education. It was developed through bibliographic research with a qualitative approach. Recognizing the importance of technology in education, GeoGebra was used as a tool to aid in activity development, leveraging technology in favor of student learning. The proposal adopts a practical and visually stimulating approach to review concepts from algebra and geometry, encouraging active student participation. By emphasizing the significance of problem-solving, questions, and proposals in the teaching-learning process using GeoGebra software, its practical role is highlighted for its ludic nature and ability to facilitate accessible and engaging Mathematics learning, while retaining essential theoretical principles to provide meaningful learning.

.

Keywords: Plane Geometry; Extrema of Real Functions; Maxima and Minima; Incenter and Excenter; Mathematics Education; GeoGebra; Didactic Sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio vai além de simplesmente transmitir fórmulas e teoremas. Ele desempenha um papel vital no desenvolvimento intelectual dos alunos, promovendo o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a compreensão da aplicação prática da Matemática em diferentes contextos. Ao revisitar e reforçar os conceitos fundamentais, promover o raciocínio lógico e integrar a Matemática de forma interdisciplinar, o ensino de Matemática no Ensino Médio prepara os alunos para enfrentar os desafios do mundo moderno e contribuir de forma significativa para a sociedade.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC

> [...] No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018a, p. 471)

E em consonância com a BNCC, o Currículo em Movimento do Novo Ensino Médio do Distrito Federal, traz que

> A área de Matemática e suas Tecnologias visa, principalmente, possibilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e argumentativo do estudante, a fim de mostrar que o processo do descobrimento matemático é algo vivo e em desenvolvimento. Para tanto, é necessário traçar um conjunto de objetivos que permitem colocar em prática essa premissa e subsidiar um planejamento interdisciplinar entre as áreas do conhecimento. (FEDERAL, 2020, p. 79).

Esta dissertação propõe uma didática com estratégias que utilizam ferramentas tecnológicas, visando auxiliar professores de Matemática do Ensino Médio na revisão de conteúdos de geometria e funções reais, com foco no estudo do incentro como ponto crítico de uma função. Inclui reflexões sobre o ensino de matemática por meio da resolução de problemas. Reconhecendo a importância das ferramentas tecnológicas no ensino, foi escolhido o uso do software GeoGebra, que integra geometria, álgebra e cálculo de maneira dinâmica e interativa.

Além disso, a motivação para desenvolver esta dissertação foi impulsionada pela participação nas edições 21ª e 22ª do Curso de Difusão de Conhecimento, intitulado "*Curso de GeoGebra*", oferecido pela Universidade Estadual do Paraná. Durante o curso, foi possível vivenciar o significativo potencial do software GeoGebra e sua capacidade de transformar o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Ao destacar a relevância da resolução de problemas, questões e propostas no processo de ensino-aprendizagem utilizando o software GeoGebra, percebe-se sua função prática por ser lúdico e assim facilitar o aprendizado da Matemática de maneira acessível e envolvente, sem deixar de lado seus princípios teóricos fundamentais.

Na literatura da área de Educação Matemática e em documentos oficiais, como e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998), (Lorenzato; Vila, 1993), (Polya, 1978) e (Antunes, 1998), também destaca a resolução de problemas com essencial no ensino-aprendizagem da matemática, pois promove o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico, permitindo que os alunos compreendam e apliquem conceitos de forma prática e significativa. Esta abordagem ativa incentiva a investigação, a criatividade e a autonomia, ajudando os estudantes a desenvolverem habilidades para resolver problemas complexos e reais. Além disso, ao enfrentar desafios e buscar soluções, os alunos reforçam seu entendimento teórico e ganham confiança em suas capacidades matemáticas, preparando-se melhor para futuros estudos e situações do dia a dia.

Nessa perspectiva, para o Ensino da Matemática, e da revisão contínua dos conteúdos os alunos podem consolidar o que aprenderam e identificar áreas que ainda precisam de aprimoramento. A prática regular não apenas fortalece a memória dos alunos, mas também ajuda a desenvolver sua capacidade de raciocínio lógico.

A combinação de uma abordagem interdisciplinar com o uso de tecnologias no ensino de Matemática contribui significativamente para a compreensão da disciplina. Dado que a Matemática está intrinsecamente relacionada a diversas outras áreas do conhecimento, integrar seus conceitos em contextos interdisciplinares não apenas beneficia os alunos ao demonstrar a aplicação prática da Matemática, mas também destaca sua relevância em diferentes campos de estudo.

O estudo pressupõe que a compreensão da linguagem matemática colabora para o desenvolvimento da aprendizagem em matemática, ademais a metodologia escolhida utiliza a tecnologia para aprimorar a interpretação desses dados matemáticos pelos alunos. Nesse sentido, foi realizada uma pesquisa bibliográfica de abordagem qualitativa, que argumenta os resultados do estudo por meio de análises e percepções, visando compreender como os alunos assimilam a linguagem geometria plana e funções reais estudadas no Ensino Médio. Logo, o instrumento utilizado na análise será a proposta de uma sequência didática, utilizando a resolução do problema o incentro como ponto crítico de uma função, analisando o problema resolvido dentro do software Geogebra.

Para que o leitor se prepare antecipadamente quanto ao uso do GeoGebra na aplicação da sequência didática proposta, será incluído no apêndice um guia detalhado passo a passo para a construção do problema.

OBJETIVOS

Objetivo Geral: Explorar o incentro como ponto crítico de uma função, revisando conteúdos de geometria plana e de funções reais relacionados. O estudo apresentará uma proposta a ser aplicada no Ensino Médio, com uma abordagem dinâmica e interativa, utilizando a plataforma GeoGebra para visualização dos conceitos geométricos.

Objetivos Específicos:

a) Revisar conceitos tais como: o estudo de triângulos e casos de congruência de triângulos; estudo da bissetriz; um dos pontos notáveis do triângulo, o incentro; máximos e mínimos de funções, em especial funções quadráticas;
b) Solucionar um problema de extremos de uma função relacionados ao incentro e o ex-incentro de um triângulo;
c) Mostrar a importância de se trabalhar com ferramentas tecnológicas, softwares, em sala de aula;
d) Conhecer o GeoGebra, suas ferramentas e funcionalidades;
e) Apresentar uma Sequência Didática a ser aplicada com alunos no Ensino Médio.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 Geometria Significativa e Interativa no Ensino Médio

O estudo da geometria no ensino médio é uma etapa importante para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, e autores renomados da literatura educacional têm sublinhado a importância de abordagens interativas e significativas para facilitar essa aprendizagem.

Jean Piaget, um dos principais teóricos do desenvolvimento cognitivo, argumenta que a aprendizagem é um processo ativo em que os alunos constroem conhecimento a partir de suas experiências. No contexto da geometria, isso implica que os estudantes devem ser incentivados a explorar conceitos geométricos por meio de atividades práticas e interativas. Piaget sugere que "o conhecimento não é uma cópia da realidade, mas uma construção do espírito humano" (Piaget, 1972). Portanto, o ensino da geometria deve ir além da memorização de fórmulas e teoremas, promovendo um ambiente onde os alunos possam descobrir e experimentar.

A aprendizagem interativa enfatiza a participação ativa dos alunos no processo educacional, com atividades colaborativas e envolventes que incentivam a interação com o conteúdo, colegas e professores. Piaget também reconheceu a importância da interação, embora seu foco fosse mais nas interações com o ambiente do que com outras pessoas. Ele acreditava que os alunos aprendem melhor através da descoberta e da exploração ativa, onde eles podem experimentar e testar suas hipóteses. Piaget sugeriu que "o conhecimento é uma construção contínua" e que os alunos devem estar ativamente engajados no processo de aprendizagem para construir e reconstruir seus conhecimentos (Piaget, 1972).

Lev Vygotsky, outro influente pensador, enfatiza a importância da interação social no processo de aprendizagem. Segundo Vygotsky, "o aprendizado desperta processos internos de desenvolvimento que são capazes de operar somente quando a criança está em interação com pessoas em seu ambiente e em cooperação com seus pares" (Vygotsky, 1978). No ensino da geometria, isso pode ser traduzido em atividades colaborativas, onde os alunos trabalham juntos para resolver problemas geométricos, compartilhando suas ideias e estratégias. Esse tipo de aprendizagem interativa ajuda a consolidar o entendimento e a aplicação dos conceitos geométricos.

Embora Vygotsky não use explicitamente o termo "aprendizagem significativa", suas ideias sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) são compatíveis com esse conceito. Vygotsky sugere que a aprendizagem é mais eficaz quando ocorre dentro da ZDP, onde o aluno pode desenvolver novos conhecimentos e habilidades com a ajuda de um mediador, como um professor ou colega mais experiente. Isso implica uma conexão com conhecimentos prévios e um processo de construção de significado.

David Ausubel, conhecido por sua teoria da aprendizagem significativa, afirma que "a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação se relaciona de maneira substantiva e não-arbitrária com o que o aprendiz já sabe" (Ausubel, 1968). Aplicando esse princípio ao ensino da geometria, os professores devem conectar novos conceitos geométricos ao conhecimento prévio dos alunos, tornando o conteúdo relevante e compreensível. Por exemplo, ao revisar o estudo dos triângulos e das funções reais, os professores podem associar esses conceitos a situações do cotidiano, como a construção de pontes e edifícios, a navegação por GPS, o cálculo de juros compostos, e a modelagem de crescimento populacional, entre outros, o que facilita a compreensão e a aplicação prática.

Bruner defendeu que a aprendizagem é um processo ativo e que a educação deve ser estruturada de forma que o aluno seja levado a descobrir por si mesmo os fatos e relacionamentos. Ele introduziu a ideia de aprendizagem por descoberta, onde os alunos interagem com o material e entre si para construir seu próprio entendimento. Bruner disse que "a educação é o processo de facilitar a descoberta" (Bruner, 1961).

Esses teóricos fornecem uma base sólida para a implementação de métodos de ensino interativos e significativos na geometria. Incorporando suas ideias, os educadores podem criar um ambiente de aprendizagem onde os alunos se sentem motivados a participar ativamente e a construir um entendimento profundo dos conceitos geométricos, preparando-os melhor para desafios futuros tanto na academia quanto na vida cotidiana.

1.2 O Uso de Tecnologias no Ensino da Matemática

No contexto educacional contemporâneo, a incorporação das tecnologias digitais no ensino tem se destacado como uma ferramenta potente para promover uma educação mais dinâmica. Com essa abordagem é possível aprimorar as experiências matemáticas dos alunos e pode facilitar uma compreensão mais abrangente dos conceitos matemáticos, outro aspecto relevante é a postura do professor em relação à tecnologia. Quando o docente está convencido de sua utilidade, tende a utilizá-la de maneira mais eficaz em suas aulas, conforme destacado por Lavicza et al. (2020). Esse enfoque encontra-se respaldo nos documentos oficiais de educação, no Plano Nacional de Educação (PNE), uma das metas que menciona a incorporação das tecnologias digitais no ensino é a Meta 7, que se refere à qualidade da educação básica. A estratégia 7.15 dessa meta especificamente aborda a inclusão digital.

> Garantir, no prazo de um ano de vigência deste PNE, a partir da publicação deste documento, a implementação de programas de acesso a computadores e internet de alta velocidade, para alunos e professores da rede pública de ensino básico, bem como a utilização de tecnologias da informação e da comunicação na prática pedagógica, como meio de promover a inclusão digital. (Lei nº 13.005, 2014, Art. 7.15).

O uso das tecnologias no Ensino Médio pode contribuir significativamente para aprimorar a experiência educacional dos estudantes. Em particular, a atenção especial ao software GeoGebra e à diversidade de suas ferramentas, as quais se revelam como instrumentos facilitador para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos e científicos.

Hohenwarter et al. (2008) enfatiza o papel significativamente importante para o ensino de matemática utilizando o GeoGebra, software de código aberto que pode ser amplamente utilizado em ambientes educacionais ao redor do mundo, pois oferece uma gama variada de recursos que possibilitam a exploração interativa de conceitos matemáticos e científicos. Sua interface intuitiva e acessível permite aos estudantes manipular objetos geométricos, representações gráficas e equações de forma dinâmica, proporcionando uma compreensão mais profunda e concreta dos conteúdos abordados.

Entre as diversas ferramentas disponíveis no GeoGebra, destacam-se as funcionalidades de geometria dinâmica, cálculo simbólico, representação de funções, estatística e probabilidade, entre outras. Essa diversidade de recursos possibilita a adaptação do software a diferentes necessidades e contextos de ensino, tornando-o uma ferramenta versátil e abrangente para o desenvolvimento de atividades pedagógicas inovadoras.

Diante desse panorama, a proposta desta dissertação visa explorar o potencial do Geogebra como uma ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem no Ensino Médio. Por meio da utilização deste software, pretende-se não apenas revisitar e consolidar os conceitos aqui discutidos, mas também proporcionar aos estudantes a oportunidade de explorar, experimentar e construir conhecimentos de forma ativa e autônoma.

Assim, ao integrar o GeoGebra como recurso pedagógico, esta dissertação busca não apenas enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, mas também contribuir para uma educação mais participativa e significativa para os estudantes do Ensino Médio.

1.2.1 O que é o GeoGebra?

O termo "GeoGebra" é uma combinação de "Geo" que se refere à geometria e "Gebra" que é uma abreviação de "Álgebra". Este software educacional integra diversos campos da Matemática em uma única plataforma interativa, desenvolvida para facilitar o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos tanto para estudantes quanto para professores, de maneira dinâmica e intuitiva.

> O GeoGebra é um software específico de Matemática voltado para o estudo de Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística. Ele é conhecido como um software de Matemática dinâmica por proporcionar movimentações e modificações do objeto matemático construído, permitindo, assim, o desenvolvimento de processos investigativos nas diferentes frentes estudadas, graças à interconexão que possui entre geometria, álgebra e planilha de cálculo. (BONJORNO, 2020b, p.183).

O software foi criado por Markus Hohenwarter, um professor de Matemática austríaco, em 2001. Hohenwarter desenvolveu o GeoGebra com o objetivo de oferecer uma ferramenta que pudesse integrar diferentes áreas da Matemática, permitindo que os usuários explorassem conceitos e relações matemáticas de maneira visual e interativa.

Desde sua criação, o GeoGebra vem ganhando popularidade em escolas e instituições educacionais ao redor do mundo devido à sua versatilidade e capacidade de adaptação a diferentes níveis de ensino e conteúdos matemáticos. O software está disponível gratuitamente para download em várias plataformas, incluindo computadores desktop, dispositivos móveis e navegadores da web, tornando-o acessível a uma ampla gama de usuários.

Ao longo dos anos, o GeoGebra passou por várias atualizações e aprimoramentos, incorporando novos recursos e funcionalidades para atender às necessidades em constante evolução de educadores e estudantes. Sua comunidade ativa de usuários e desenvolvedores continua a contribuir para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do software, garantindo que ele permaneça como uma ferramenta relevante para o ensino e aprendizagem da Matemática.

1.3 Sequência Didática

Um dos desafios de um professor é planejar de modo a garantir um período de aprendizado efetivo para a turma. Escolher quais conteúdos abordar e como apresentá-los é essencial para o sucesso do trabalho. Embora a tarefa possa ser complexa, algumas orientações são fundamentais. Um bom planejamento deve estar alinhado com o projeto político-pedagógico (PPP) da escola e a proposta curricular, proporcionando desafios que permitam a progressão dos alunos de um conhecimento básico para um mais avançado. Com as diretrizes anuais claras, o professor pode dividi-las em propostas bimestrais e semanais, organizando-as para cumprir o planejado.

Esta dissertação propõe uma sequência didática. Segundo ZABALA (2010),

> As sequências de ensino-aprendizagem ou sequências didáticas são a maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática. Assim, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizam e, sobretudo, pelo sentido que adquirem sobre uma sequência orientada para a construção de objetivos educacionais. As sequências podem fornecer pistas acerca da função que cada uma das atividades tem na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, por seguinte, valorizar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir. (ZABALA, 2010, pág. 179).

A proposta estará estruturada nessa atividade de estudo, que permite organizar o processo de ensino-aprendizagem de maneira coerente e progressiva, facilitando a compreensão e a assimilação de conteúdos pelos alunos.

2 METODOLOGIA

A metodologia desta dissertação foi fundamentada na pesquisa bibliográfica. A pesquisa bibliográfica é uma abordagem essencial para a construção do conhecimento científico, pois envolve a identificação, localização, avaliação e síntese de informações provenientes de fontes escritas. Este tipo de pesquisa permite uma compreensão concreta e contextualizada do tema em estudo.

A pesquisa bibliográfica é um tipo de pesquisa científica, que, conforme Gil (2002), "é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". A pesquisa científica, de maneira geral, busca produzir conhecimento sistemático e organizado, utilizando métodos rigorosos para investigar fenômenos e responder questões específicas. Esta investigação pode ser empírica, envolvendo a coleta e análise de dados primários, ou teórica, como no caso da pesquisa bibliográfica, que se concentra na análise crítica de fontes secundárias.

A pesquisa bibliográfica, para Fonseca (2002), é realizada

> [...] a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002, p. 32).

Para a realização desta pesquisa, foram consultadas diversas fontes, incluindo livros, artigos científicos, teses e dissertações, além de publicações eletrônicas de renomadas bases de dados acadêmicas. O processo de revisão da literatura incluiu a seleção criteriosa de materiais relevantes, a leitura crítica dos textos, e a síntese das informações obtidas. Dessa forma, a pesquisa bibliográfica proporcionou uma base sólida para o desenvolvimento das discussões e conclusões desta dissertação.

Para Severino (2007), a pesquisa bibliográfica realiza-se pelo:

> [...] registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utilizam-se dados de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir de contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos (SEVERINO, 2007, p. 122).

Além de mapear o estado da arte sobre o tema, a pesquisa bibliográfica permitiu a identificação de metodologias e abordagens pedagógicas previamente utilizadas no ensino de conceitos matemáticos e científicos. Esta análise foi fundamental para a elaboração de propostas inovadoras e para a contextualização das atividades sugeridas.

Segundo Marconi e Lakatos (2003), a pesquisa bibliográfica "busca conhecer e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado sobre um determinado assunto, tema ou problema". Assim, ao realizar um levantamento abrangente das publicações relevantes, esta dissertação assegura que as propostas apresentadas são fundamentadas em conhecimento sólido e comprovado, e contribui para a continuidade do desenvolvimento científico na área de ensino da matemática.

3 CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Com o intuito de situar o leitor no tocante ao que será trabalhado nesta dissertação, seguem algumas definições e teoremas prévios que serão importantes para embasar o projeto proposto.

3.1 Congruência de triângulos

Dizemos que dois triângulos são congruentes, com o símbolo $\equiv$, se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.

Assim, dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que os ângulos e os lados de um sejam ordenadamente congruentes aos ângulos e aos lados do outro.

Conforme Dolce, et al. (2005), para verificar se dois triângulos são congruentes existem os seguintes critérios, chamados casos de congruências de triângulos:

a) Caso *LAL*: se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles;
b) Caso *ALA*: se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacente;
c) Caso *LLL:* se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados;
d) Caso LAA_O: se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado.

3.2 Bissetriz de um ângulo

Definição: (NETO, 2013) "Dado um ângulo $\angle AOB$, a bissetriz de $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos iguais. Neste caso, dizemos que $\overrightarrow{OC}$ bissecta $\angle AOB$. Assim,

$$\overrightarrow{OC} \text{ bissecta } \angle AOB \iff A\hat{O}C = B\hat{O}C\text{”.}$$

3.3 Lei dos cossenos

(NETO, 2013) "Se ABC é um triângulo de lado $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$

A lei dos cossenos é amplamente empregada ao longo de toda a dissertação, apresenta-se a seguir sua demonstração, como um adicional de curiosidade".

Proposição: Seja H o pé da altura relativa ao lado AC e h seu comprimento. Consideremos $\hat{A} < 90°$, $\hat{A} = 90°$ e $\hat{A} > 90°$:

a) $\hat{A} < 90°$: neste caso (figura 1), o ponto H está entre A e C , e sabendo que $\overline{AH} = c\cos\hat{A}$ e $h = c\,\text{sen}\,\hat{A}$ e aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo BCH, obtemos:

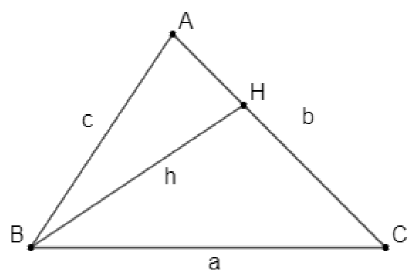

Figura 1 - Lei dos Cossenos: caso Â<90°
Fonte: Neto, 2013.

$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2 = h^2 + (b - \overline{AH})^2$$
$$= \left(c\,\text{sen}\,\hat{A}\right)^2 + (b - c\cos\hat{A})^2$$

$$= b^2 + c^2(\text{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}) - 2bc \cos \hat{A}$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

onde, na penúltima igualdade, utilizamos a relação fundamental da trigonometria, $\text{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$.

b) $\hat{A} = 90°$: neste caso, $\cos \hat{A} = 0$ e segue do teorema de Pitágoras que $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

c) $\hat{A} > 90°$: neste caso (figura 2), o vértice de A pertence ao segmento CH, lembrando que H é o pé da altura relativa ao vértice B sobre a reta suporte de AC. Como $B\hat{A}H = 180° - \hat{A}$, sabendo que no triângulo BHA, $\overline{AH} = c \cos(180° - \hat{A}) = -c \cos \hat{A}$ e $h = c \,\text{sen}(180° - \hat{A}) = c \,\text{sen}\, \hat{A}$ e aplicando novamente o teorema de Pitágoras ao triângulo BCH, obtemos

$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2 = h^2 + (b + \overline{AH})^2$$
$$= (c \,\text{sen}\, \hat{A})^2 + (b - c \cos \hat{A})^2$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

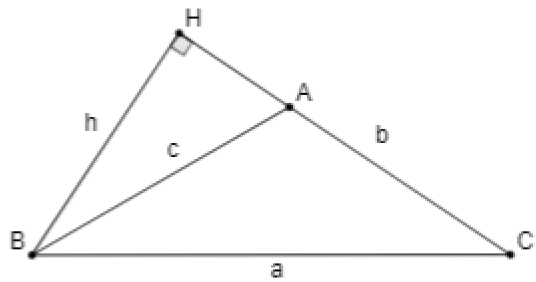

Figura 2 - Lei dos Cossenos: caso Â>90º
Fonte: Neto, 2013.

Analogamente, podemos obter $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$.

Portanto nos três casos, em qualquer triângulo ABC, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

■

3.4 Incentro de um triângulo

(NETO, 2013) “As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, que é o incentro do triângulo”.

Proposição: Sejam r, s e t, respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo ABC (figura 3) e I o ponto de interseção das retas r e s. Como $I \in r$, segue da caracterização das bissetrizes como Lugar Geométrico, que I equidista dos lados AB e AC de ABC. Analogamente, $I \in s$ garante que I equidista de AB e BC e, assim, concluímos que I equidista de AC e de BC. Então, usando novamente a referida caracterização das bissetrizes, concluímos que I pertence à bissetriz do ângulo $\angle C$, ou seja, à reta t. Assim, r, s e t concorrem em I.

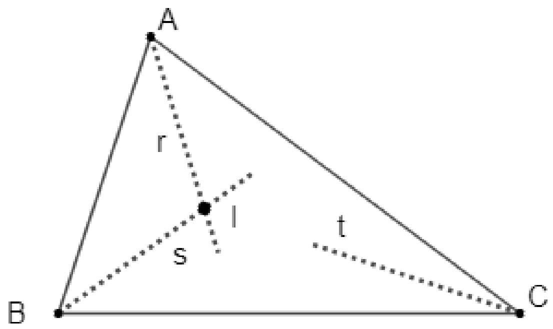

Figura 3 - Incentro de um triângulo.
Fonte: Neto, 2013.

3.5 Ex-incentro de um triângulo

(NETO, 2013) “Em todo triângulo ABC, existe um único círculo tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC. Tal círculo é o círculo ex-inscrito ao lado BC e seu centro é o ex-incentro de ABC relativo à BC (ou ao vértice A) ”.

Proposição: Sejam (figura 4) r e s as bissetrizes externas dos vértices B e C do triângulo ABC e I_a seu ponto de interseção. Como $I_a \in r$ e r é bissetriz do ângulo externo em B, segue que

$$d(I_a, \overleftrightarrow{BC}) = d(I_a, \overleftrightarrow{AB}).$$

Do mesmo modo, uma vez que $I_a \in s$, concluímos que $d(I_a, \overleftrightarrow{BC}) = d(I_a, \overleftrightarrow{AC})$. Denotando por r_a a distância comum de I_a às retas suportes dos lados de ABC, segue que o círculo de centro I_a e raio r_a tangencia BC e os prolongamentos de AB e AC.

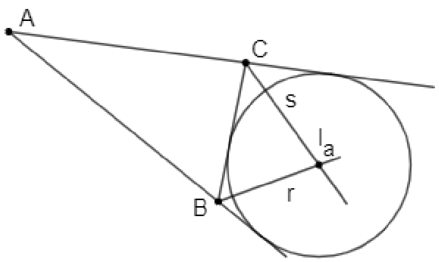

Figura 4 - Ex-Incentro relativo ao ângulo Â do triângulo ABC.
Fonte: Neto, 2013.

3.6 Ponto de Máximo e de Mínimo

Os pontos de máximo e mínimo de funções são conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Vamos definir cada um deles.

Um ponto de máximo (respectivamente (resp.) ponto de mínimo) de uma função é um ponto onde o valor da função é o maior (resp. menor) possível em um determinado intervalo ou em todo o domínio da função. Um ponto (x, y) é um ponto de máximo (resp. mínimo) se y é maior (resp. menor) ou igual a qualquer outro valor de y no domínio de x. Graficamente, um ponto de máximo (resp. ponto de mínimo) pode ser visualizado como o ponto mais alto (resp. ponto mais baixo) em um gráfico de uma função.

Conforme destacado por Neto et al. (2022), para uma função $f(x)$, uma condição necessária, mas não suficiente, para que um ponto seja de máximo ou de mínimo, é que $f'(x) = 0$, ou seja, a derivada da função é igual a zero, ou então $f'(x)$ não existe. Esses pontos são chamados de pontos críticos da função.

Além disso, é importante notar que os pontos de máximo e mínimo podem ser locais ou globais:

Dada uma função $f: A \to \mathbb{R}$, e dado um intervalo I contido em A, dizemos que $c \in I$ é ponto de máximo local (resp. mínimo local), quando $f(c) \geq f(x)$ (resp. $f(c) \leq f(x)$), para todo $x \in I$.

Assim, máximos e mínimos locais são pontos onde a função alcança um valor extremo em um intervalo específico, mas não necessariamente o valor máximo ou mínimo em todo o domínio da função.

Já máximos e mínimos globais são pontos onde a função alcança o valor máximo ou mínimo em todo o seu domínio.

4 RESULTADOS E DISCURSSÕES

Com o intuito de fortalecer e aplicar os conhecimentos adquiridos pelos alunos do Ensino Médio na área de geometria plana e das funções reais, o presente trabalho visa não apenas estudar o teorema principal, a seguir, que aborda o ponto crítico de uma função definida geometricamente nos triângulos, mas também apresentar uma Sequência Didática para esse estudo, utilizando o software GeoGebra.

4.1 O Incentro e o Ex-incentro como Soluções para um Problema de Extremos

Teorema: Dado um triângulo ABC e AT bissetriz do ângulo A, com o ponto X sobre essa bissetriz AT, os valores extremos da razão $\frac{BX}{CX}$ ocorrem no incentro e no ex-incentro de ABC.

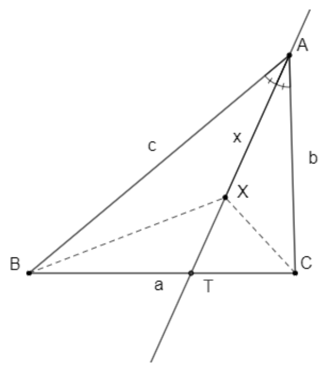

Figura 5 -Triângulo ABC e a bissetriz AT.
Fonte: Bialostocki, A.; Bialostocki, D.,2011

Demonstração: usando a lei dos cossenos, temos que:

$$BX^2 = x^2 + c^2 - 2.x.c.\cos\frac{\hat{A}}{2} \text{ e } CX^2 = x^2 + b^2 - 2.x.b.\cos\frac{\hat{A}}{2}.$$

Vamos definir a função $g(x)$ da seguinte forma:

$$g(x) = \frac{BX^2}{CX^2} = \frac{x^2 + c^2 - 2xc.\cos\frac{\hat{A}}{2}}{x^2 + b^2 - 2xb.\cos\frac{\hat{A}}{2}}. \quad (1)$$

Vamos precisar do seguinte lema, para continuarmos a demonstração.

Lema: Dada a função $f(x)$, tal que $f(x)$ tem ponto de máximo em x_0 e se $F(x)$ é crescente, então a função $F(f(x))$ também tem ponto de máximo em x_0.

Demonstração: Como $f(x)$ tem ponto de máximo em x_0, então $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall\, x$ do domínio de f, e como $F(x)$ é crescente, então $F(f(x_0)) \geq F(f(x))$, $\forall\, x$ do domínio de f.

Logo $(Fof)(x_0) \geq (Fof)(x)$ e $\therefore$ (Fof) tem máximo em x_0, como queríamos demonstrar.

■

Agora se, $g(x) = \frac{BX^2}{CX^2}$ e $F(x) = \sqrt{x}$, com $x \geq 0$, e se x_0 é ponto de máximo de $g(x) = \frac{BX^2}{CX^2}$ então $F\big(g(x_0)\big) = \sqrt{\left(\frac{BX}{CX}\right)^2} = \frac{BX}{CX}$, isto é, x_0 também é ponto de máximo de $\frac{BX}{CX}$. O mesmo ocorre com o mínimo. Sendo assim, para estudarmos os pontos críticos de $\frac{BX}{CX}$, basta estudarmos os pontos críticos de $g(x) = \left(\frac{BX}{CX}\right)^2$.

4.2 Valores Extremos da Função $g(x)$

A derivada de $g(x)$ em (1), usando a regra do quociente, é dada por:

$$g'(x) = \frac{\left(2x - 2c.\cos \hat{A}/_2\right).\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos \hat{A}/_2\right)}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos \hat{A}/_2\right)^2} - \frac{\left(x^2 + c^2 - 2xc.\cos \hat{A}/_2\right).\left(2x - 2b\cos \hat{A}/_2\right)}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos \hat{A}/_2\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ g'(x) = \frac{2x^3 + 2b^2x - 2x^2b.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} - 2x^2c.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} - 2b^2c.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} + 4bcx.\cos^2{}^{\hat{A}}/_{2}}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2} - \frac{\left(2x^3 - 2x^2b.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} + 2xc^2 - 2bc^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} - 2x^2c.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} + 4bcx.\cos^2{}^{\hat{A}}/_{2}\right)}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2}$$

Simplificando os termos, somando e substituindo $2bcx$, obtemos:

$$\Rightarrow\ g'(x) = \frac{-2bx^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} + 2b^2x + (2bcx) - 2b^2c.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} + 2cx^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2} + \frac{-(2bcx) - 2c^2x + 2bc^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ g'(x) = \frac{-2bx^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} + 2b(b+c)x - 2b^2c.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} + 2cx^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2} + \frac{-2c(b+c)x + 2bc^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ g'(x) = \frac{-2b\left(x^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} - (b+c)x + bc.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2} + \frac{2c\left(x^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} - (b+c)x + bc.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ g'(x) = \frac{-2(b-c).\left[x^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} - (b+c)x + bc.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right]}{\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2}. \qquad (2)$$

Como os pontos de máximo e de mínimo da função $g(x)$, se dão quando $g'(x) = 0$ em (2) e temos que $\left(x^2 + b^2 - 2xb.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right)^2 \neq 0$, pois tornaria a equação impossível.

Assim, para $g'(x) = 0$, temos $-2(b - c) = 0$ ou $\left[x^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} - (b + c)x + bc.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right] = 0$.

i) Se $-2(b - c) = 0$, então $\frac{BX}{CX}$ é constante.

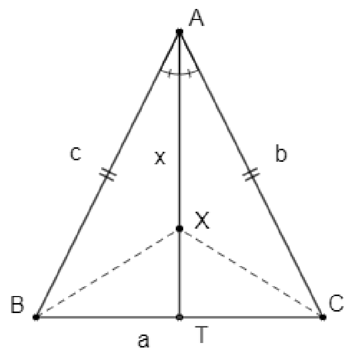

Figura 6 - Triângulo ABC, com $c = b$.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Demonstração: Como $b = c$, então o triângulo ABC é isósceles e $\hat{B} = \hat{C}$. Pelo caso de congruência de triângulos LAL, sabendo que AT é bissetriz do ângulo Â e $B\hat{A}T \equiv C\hat{A}T$ então temos que, $BT = CT$ e $B\hat{T}X = C\hat{T}X$.

Por fim, pelo mesmo caso de congruência, $B\hat{T}X \equiv C\hat{T}X$ e $BX = CX$.

Assim, para qualquer ponto X em AT, a relação $\frac{BX}{CX} = 1$, ou seja, é constante.

■

Logo, para $b = c$ os valores extremos da relação $\frac{BX}{CX}$ ocorrem em toda reta suporte AT, em particular, no incentro e no ex-incentro do triângulo ABC, já que o resultado é uma constante.

ii) Se $\left[x^2.\cos{}^{\hat{A}}/_{2} - (b + c)x + bc.\cos{}^{\hat{A}}/_{2}\right] = 0$, então $x = \frac{s-a}{\cos{}^{\hat{A}}/_{2}}$ ou $x = \frac{s}{\cos{}^{\hat{A}}/_{2}}$, em que $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo ABC.

Demonstração: Desenvolvendo a equação do 2º grau, tem-se que:

$$x = \frac{(b+c) \pm \sqrt{(b+c)^2 - 4bc.\cos^2 \hat{A}/_2}}{2.\cos \hat{A}/_2}. \tag{3}$$

Como $(b+c)^2 - 4bc.\cos^2 \hat{A}/_2 = b^2 + 2bc + c^2 - 4bc\cos^2 \hat{A}/_2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(2.\cos^2 \hat{A}/_2 - 1\right)$ e sabendo que $\cos\left(\hat{A}/_2 + \hat{A}/_2\right) = 2.\cos^2 \hat{A}/_2 - 1$, temos que $b^2 + c^2 - 2bc\left(2.\cos^2 \hat{A}/_2 - 1\right) = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A} = a^2$, pela lei dos cossenos.

Assim, substituindo em (3)

$$x = \frac{b + c \pm \sqrt{a^2}}{2.\cos \hat{A}/_2} = \frac{b + c \pm a}{2.\cos \hat{A}/_2}. \tag{4}$$

Portanto, substituindo em (4)

$$x' = \frac{b + c - a}{2.\cos \hat{A}/_2} = \frac{\frac{a+b+c}{2} - a}{\cos \hat{A}/_2} = \frac{s - a}{\cos \hat{A}/_2} \tag{5}$$

e

$$x'' = \frac{b + c + a}{2.\cos \hat{A}/_2} = \frac{\frac{a+b+c}{2}}{\cos \hat{A}/_2} = \frac{s}{\cos \hat{A}/_2}. \tag{6}$$

■

4.3 Incentro e Ex-incentro como Valores Extremos de $g(x)$

Agora, considere uma circunferência inscrita no triângulo ABC, com Y, Z e W tangentes aos lados AC, AB e BC respectivamente, I o seu incentro e $\bar{x} = AI$. (Ver Figura 7)

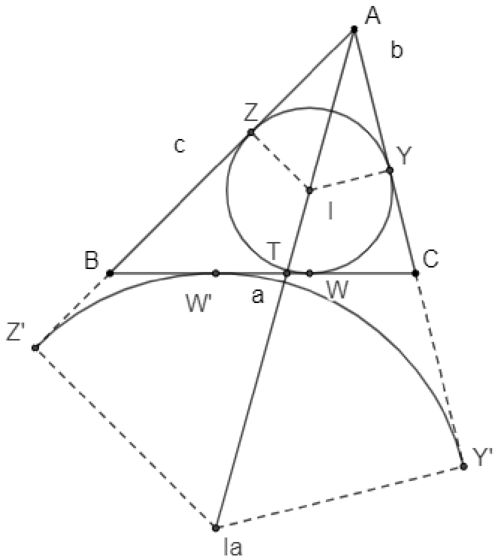

Figura 7 - O Incentro I e o Ex-incentro I_a.
Fonte: Bialostocki, A.; Bialostocki, D.,2011

Sabendo que o perímetro é

$$a + b + c = (BW + WC) + (AZ + ZB) + (AY + YC) \tag{7}$$

e por congruência de triângulos, LAA_O, $AZ = AY$, $YC = WC$ e $ZB = BW$. Logo substituindo em (7),

$$a + b + c = 2\left(AY + \overbrace{WC + BW}^{a}\right) \Rightarrow \overbrace{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}^{s} = AY + a \Rightarrow \tag{8}$$

$$\mathrm{AY} = \mathrm{s} - \mathrm{a}.$$

Como na figura 7, e usando razão trigonométrica, com $0 < \frac{\hat{A}}{2} < \frac{\pi}{2}$, no triângulo AIY, tem-se que:

$$\cos \hat{A}/_2 = \frac{AY}{AI}. \tag{9}$$

Então, como $AI = \bar{x}$ e substituindo (8) em (9) tem-se que,

$$AI = \bar{x} = \frac{AY}{\cos \hat{A}/_2} = \frac{s-a}{\cos \hat{A}/_2}.$$

Desse modo, o valor extremo da relação $\frac{BX}{CX} = \frac{s-a}{\cos \hat{A}/_2}$ ocorre quando o ponto X coincide com o incentro do triângulo ABC.

Agora, vamos ao ex-incentro.

Tendo em vista a figura 7 e que os segmentos CI_a e BI_a são bissetrizes dos ângulos $Z'\hat{B}C$ e $Y'\hat{C}B$, e considerando ainda $\bar{\bar{x}} = AI_a$ onde I_a é ex-incentro de ABC relativo ao lado BC e Y', Z' e W' os pontos de tangência do círculo ex-inscrito. Tem-se, respectivamente, que $BW' = BZ'$ e $CY' = CW'$.

Como,

$$\begin{cases} AY' = \overbrace{AY + YC}^{b} + \overbrace{CY'}^{CW'} \\ AZ' = \overbrace{AZ + BZ}^{c} + \overbrace{BZ'}^{BW'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AY' = b + CW' \\ AZ' = c + BW' \end{cases} \Rightarrow AY' + AZ' = b + c + \overbrace{CW' + BW'}^{a}$$

$$\Rightarrow AY' + AZ' = a + b + c. \qquad (10)$$

Sabendo que os triângulos $AI_aY' \equiv AI_aZ'$, pelo caso de congruência LAA_O então $AY' = AZ'$ e tem-se por (10) que $AY' = AZ' = \frac{a+b+c}{2} = s$.

Como na figura 7, e usando a razão trigonométrica do cosseno anterior, tem-se que $\cos \hat{A}/_2 = \frac{AY'}{AI_a}$. Então,

$$AI_a = \bar{\bar{x}} = \frac{AY'}{\cos \hat{A}/_2} = \frac{s}{\cos \hat{A}/_2}.$$

Desse modo, o valor extremo da relação $\frac{BX}{CX} = \frac{s}{\cos \hat{A}/_2}$ ocorre quando o ponto X coincide com o ex-incentro do triângulo ABC.

■

Portanto, os valores extremos, $\frac{s-a}{\cos \hat{A}/_2}$ e $\frac{s}{\cos \hat{A}/_2}$, da relação $\frac{BX}{CX}$ ocorrem quando o ponto X coincide com o incentro e o ex-incentro, respectivamente, de ABC.

Note que em (1) $g(x) = \frac{BX^2}{CX^2}$, então podemos reescrever na forma $\sqrt{g(x)} = \frac{BX}{CX}$. Porém, substituindo x pelo valor de x' de (5), que ocorre quando o ponto X coincide com o incentro, temos $\sqrt{g(x')} = \sqrt{g\left(\frac{s-a}{\cos \hat{A}/2}\right)}$. Associando (1) e (5) temos que $g\left(\frac{s-a}{\cos \hat{A}/2}\right) = \frac{BI^2}{CI^2}$, então $\sqrt{g\left(\frac{s-a}{\cos \hat{A}/2}\right)} = \sqrt{\frac{BI^2}{CI^2}}$ e portanto $\sqrt{g(x')} = \frac{BI}{CI}$.

De forma análoga, para (1) e (6), que ocorre quando o ponto X coincide com o ex-incentro, temos que $\sqrt{g(x'')} = \sqrt{g\left(\frac{s}{\cos \hat{A}/2}\right)} = \sqrt{\frac{{BI_a}^2}{{CI_a}^2}} = \frac{BI_a}{CI_a}$.

4.4 Associação dos valores de Máximo e de Mínimo da função $g(x)$ para o Incentro ou o Ex-incentro do triângulo ABC

A seguir, vamos classificar esses dois valores extremos encontrados.

É importante notar (ver figura 8) que considerando AT, CZ e BY as bissetrizes do triângulo ABC, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ os ângulos $Z\hat{B}T$ e $Y\hat{C}T$, respectivamente, e que ZI e YI são raios da circunferência inscrita do mesmo triângulo, e usando novamente razão trigonométrica, com $0 < \frac{\hat{B}}{2} < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \frac{\hat{C}}{2} < \frac{\pi}{2}$, tem-se que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{ZI}{BI} \\ \operatorname{sen}\dfrac{\hat{C}}{2} = \dfrac{YI}{CI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BI = \dfrac{ZI}{\operatorname{sen}\hat{B}/2} \\ CI = \dfrac{YI}{\operatorname{sen}\hat{C}/2} \end{cases} \Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}/2}{\operatorname{sen}\hat{B}/2}. \tag{11}$$

Note também a relação a seguir para o ex-incentro. Com BI_a e CI_a bissetrizes dos ângulos $Z'\hat{B}T$ e $Y'\hat{C}T$, respectivamente, e com $Z'I_a$ e $Y'I_a$ raios da circunferência externa tangente ao lado BC do triângulo ABC. Utilizando o arco complementar, $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, tem-se que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{180-\hat{B}}{2} = \dfrac{Z'I_a}{BI_a} \\ \operatorname{sen}\dfrac{180-\hat{C}}{2} = \dfrac{Y'I_a}{CI_a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{Z'I_a}{BI_a} \\ \cos\dfrac{\hat{C}}{2} = \dfrac{Y'I_a}{CI_a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BI_a = \dfrac{Z'I_a}{\cos \hat{B}/2} \\ CI_a = \dfrac{Y'I_a}{\cos \hat{C}/2} \end{cases} \Rightarrow \tag{12}$$

$$\frac{BI_a}{CI_a} = \frac{\cos \hat{C}/2}{\cos \hat{B}/2}.$$

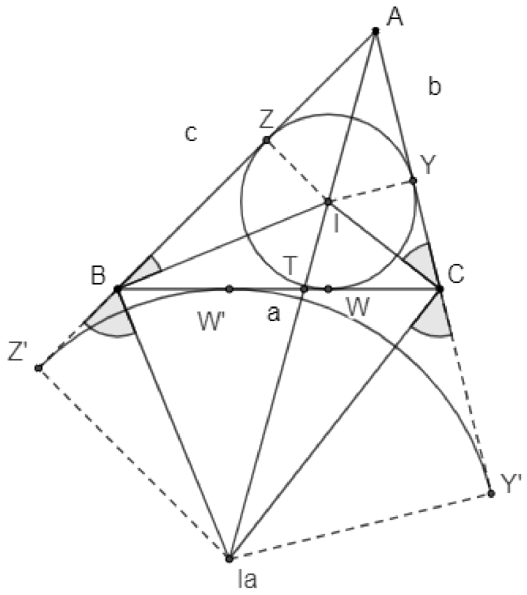

Figura 8 – Bissetrizes AT, CZ, BY, BI_a e CI_a.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Agora, suponha que $\frac{BI}{CI} > \frac{BI_a}{CI_a}$, por (11) e (12), tem-se que:

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{C}/2}{\operatorname{sen}\hat{B}/2} > \frac{\cos\hat{C}/2}{\cos\hat{B}/2} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C}/2 \,.\cos \hat{B}/2 - \operatorname{sen} \hat{B}/2 \,.\cos \hat{C}/2 > 0.$$

Usando a adição de arcos do seno da diferença, $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \,.\cos b - \operatorname{sen} b \,.\cos a$, assim:

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\hat{C}/2 - \hat{B}/2\right) > 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2}\right) > 0.$$

Logo,

i) Se $c > b$, então a relação $\frac{BI}{CI}$ é o valor de máximo da função $g(x)$ e consequentemente $\frac{BI_a}{CI_a}$ é o valor de mínimo;

De forma análoga se $\frac{BI_a}{CI_a} > \frac{BI}{CI}$ então, pelas mesmas condições, sen $\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) > 0$.

ii) Se $c < b$, então a relação, $\frac{BI_a}{CI_a}$ é o valor de máximo da função $g(x)$ e consequentemente $\frac{BI}{CI}$ é o valor de mínimo.

4.5 Exemplos de Aplicação do problema proposto

Para elucidar os resultados anteriores do problema inicial, serão encontrados os valores de máximo e de mínimo, da razão $\frac{BX}{CX}$, em alguns exemplos.

Seguem os exemplos:

4.5.1 Considere o triângulo ABC, com $b = 5$, $c = 6$ e $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ (ver figura 9)

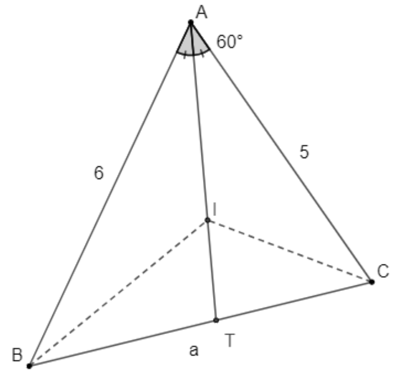

Figura 9 - Triângulo ABC, com $b = 5$, $c = 6$ e $\hat{A} = \pi/3$.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Pela lei dos cossenos $a^2 = 5^2 + 6^2 - 2.5.6.\cos\frac{\pi}{3}$, assim $a = \sqrt{31}$.

Usando ainda a lei dos cossenos, tem-se que os valores de $\cos\hat{C}$ e de $\cos\hat{B}$, pois $6^2 = 5^2 + \left(\sqrt{31}\right)^2 - 2.5.\sqrt{31}.\cos\hat{C}$ e $5^2 = 6^2 + \left(\sqrt{31}\right)^2 - 2.6.\sqrt{31}.\cos\hat{B}$. Logo, $\cos\hat{C} = \frac{2\sqrt{31}}{31}$ e $\cos\hat{B} = \frac{7\sqrt{31}}{62}$.

Como $c > b$ então, pelos resultados já obtidos, $\frac{BI}{CI} > \frac{BI_a}{CI_a}$, e assim,

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{C}/_2}{\operatorname{sen}\hat{B}/_2} > \frac{\cos\hat{C}/_2}{\cos\hat{B}/_2}. \tag{13}$$

Agora usando as identidades $\cos{}^{a}/_{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$ e $\cos{}^{a}/_{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$, assim,

Tem-se: $\cos\frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{7\sqrt{31}}{62}}{2}} \cong 0{,}902391$, $\operatorname{sen}\frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{7\sqrt{31}}{62}}{2}} \cong 0{,}430918$, $\cos\frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{2\sqrt{31}}{31}}{2}} \cong 0{,}824382$, e $\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{31}}{31}}{2}} \cong 0{,}566034$.

Desse modo, substituindo em (13)

$$\frac{0{,}566034}{0{,}430918} > \frac{0{,}82438}{0{,}902391} \Rightarrow 1{,}3135 > 0{,}9135$$

Ou seja, $\frac{BI}{CI}$ é o máximo da função $g(x)$ quando $c > b$.

4.5.2 Considere o triângulo ABC, com $b = 5$, $c = 3$ e $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ (ver figura 10)

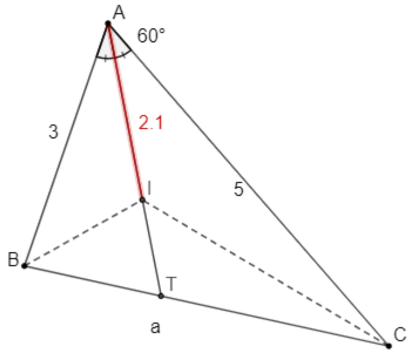

Figura 10 - Triângulo ABC, com $b = 5$, $c = 3$ e $\hat{A} = \pi/3$.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

De forma análoga ao exemplo anterior, sabendo que $\cos\hat{C} = \frac{7\sqrt{19}}{38}$, $\cos\hat{B} = \frac{\sqrt{19}}{38}$, $\cos\frac{\hat{B}}{2} \cong 0{,}746561$, $\operatorname{sen}\frac{\hat{B}}{2} \cong 0{,}665317$, $\cos\frac{\hat{C}}{2} \cong 0{,}949462$ e $\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2} \cong 0{,}313883$ tem-se que:

$$\frac{0{,}313883}{0{,}665317} > \frac{0{,}949462}{0{,}746561} \Rightarrow 0{,}47178 > 1{,}27178, \text{ Absurdo!}$$

Ou seja, $\frac{BI}{CI} < \frac{BI_a}{CI_a}$, logo $\frac{BI}{CI}$ é o mínimo da função $g(x)$ quando $c < b$.

4.5.3 Considere a função $g(x)$ e os seus Pontos de Máximo e de Mínimo

O gráfico da Figura 11 mostra, através do GeoGebra com acesso pelo link: *https://www.geogebra.org/classic/h4gm7ddh*, os pontos de máximo e de mínimo da função $g(x)$. Onde as abscissas x de cada um dos dois pontos são os valor de $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ (valores do tamanho dos segmentos AI e AI_a respectivamente; ver na figura 7) que podem ser obtidos pelas equações $\frac{s-a}{\cos \hat{A}/_2}$ e $\frac{s}{\cos \hat{A}/_2}$, como demonstrado anteriormente, e as ordenadas y de cada um dos pontos são os quadrados dos valores de máximo e mínimo da razão $\frac{BX}{CX}$, uma vez que a função $g(x) = \frac{BX^2}{CX^2}$.

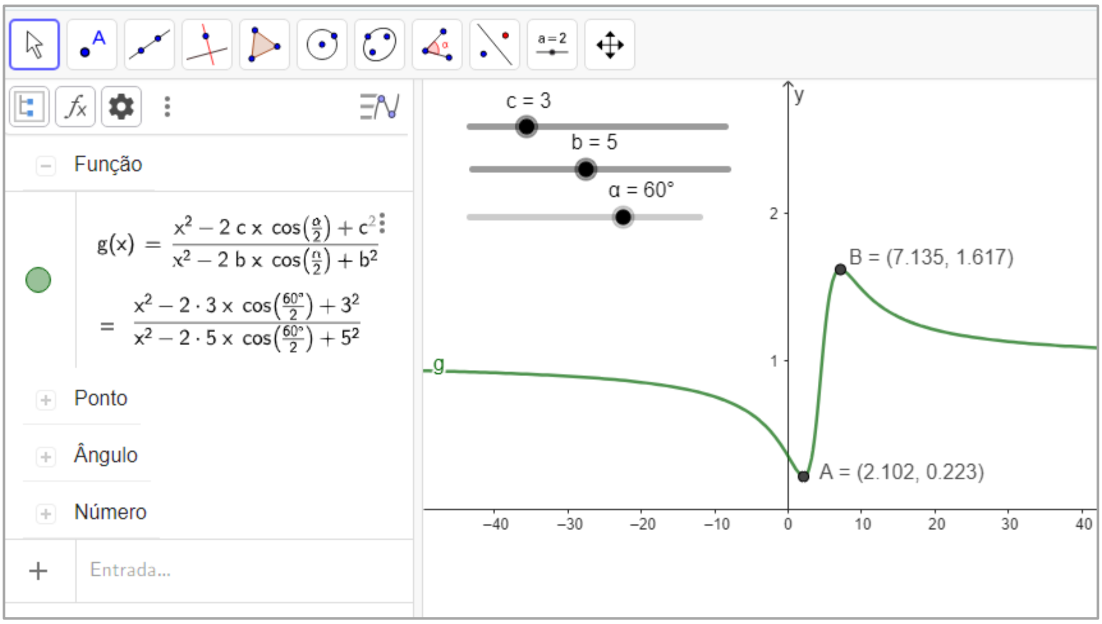

Figura 11 - Pontos de Máximo e de Mínimo da função g(x).
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Note que o ponto A, por exemplo, é o ponto de mínimo da função $g(x)$, a sua abscissa é o valor $\bar{x} \cong 2{,}1$, como mostra a figura 10, e raiz quadrada da sua ordenada $\sqrt{y} \cong \sqrt{0{,}223} \cong 0{,}472$ que é o valor de mínimo, mostrado no exemplo anterior (item 2.4.2).

Observe que é possível alterar os valores de b, c e o ângulo A no gráfico da figura 11, elucidando as demonstrações do item 2.3 seções i) e ii) e também os exemplos anteriores (itens 2.4.1 e 2.4.2).

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO INCENTRO COMO PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO

5.1 Apresentação

Muitos alunos, especialmente aqueles no 3º ano do Ensino Médio, estão se preparando para ingressar no Ensino Superior e, consequentemente, alcançar seus objetivos profissionais. Nesta etapa crucial da educação básica, é fundamental revisar e reforçar os conhecimentos adquiridos ao longo dos anos de estudo. Essa revisão visa consolidar uma aprendizagem de forma mais significativa, preparando os alunos não apenas para os desafios acadêmicos imediatos, mas também para o sucesso futuro no mercado de trabalho. É importante que os alunos estejam em contato constante com o conteúdo que provavelmente será abordado nos exames vestibulares, garantindo assim sua preparação adequada para o ingresso nas universidades.

Além de despertar o interesse dos alunos pelas áreas de estudo propostas, esse processo pode orientá-los a descobrir áreas de interesse que poderão ser exploradas em graduações futuras e, consequentemente, em suas futuras carreiras profissionais.

5.2 Identificação

Autora: Ruthyelen Cristina Machado de Freitas

Disciplina: Matemática

Tema: Explorando valores de máximos e de mínimos de uma função dada, com auxílio do GeoGebra

Série/Ano: 3º ano do Ensino Médio

Aulas previstas: 10 horas/aulas

5.3 Objetivo Geral

Revisar e consolidar conceitos de geometria plana, com foco específico no estudo do triângulo. Pretende-se explorar os pontos notáveis do triângulo, em específico o incentro, além dos círculos inscrito e ex-inscrito. Além disso, busca-se compreender os valores de máximo e mínimo de funções.

A abordagem será dinâmica e interativa, empregando a plataforma GeoGebra para visualização dos conceitos geométricos.

5.4 Desenvolvimento

5.4.1 1ª Etapa: Introdução ao software GeoGebra

Objetivo específico: Apresentar as funcionalidades do GeoGebra, proporcionando aos alunos uma introdução sobre como explorar conceitos geométricos, como a construção do triângulo, suas medições e análises;

Tempo estimado: 2 horas/ aulas

Recursos Didáticos: Computador com acesso à internet; Projetor ou tela para demonstração.

Metodologia:

Apresentar o software GeoGebra, sua interface e, adicionalmente, exemplificar algumas ferramentas por meio de construções simples, a fim de elucidar suas funcionalidades e a maneira como facilita a visualização de conceitos matemáticos.

a) Apresentação do software GeoGebra aos estudantes;

   Mostrar que o GeoGebra é uma plataforma de software educacional amplamente utilizada, projetada para oferecer uma abordagem interativa e dinâmica ao estudo da Matemática. A ferramenta é multifuncional permitindo a visualização e manipulação de objetos matemáticos, como gráficos, equações e figuras geométricas, proporcionando uma compreensão mais profunda e intuitiva dos conceitos.

E que através do GeoGebra, os usuários têm a capacidade de explorar relações matemáticas complexas de forma interativa, observando instantaneamente como as mudanças de parâmetros afetam as representações visuais. Isso não apenas facilita a compreensão conceitual, mas também promove a descoberta ativa e a experimentação, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento crítico e da resolução de problemas.

Além disso, comentar que o GeoGebra é uma ferramenta versátil, sendo amplamente utilizada em uma variedade de campos acadêmicos e profissionais, incluindo Matemática, ciências naturais, engenharia e economia. Sua interface intuitiva e suas capacidades de visualização avançadas tornam-no uma escolha ideal para investigações matemáticas, modelagem de dados e análise de fenômenos complexos.

Portanto, os estudantes devem entender que o GeoGebra não só oferece uma maneira eficaz de estudar Matemática, mas também abre portas para a exploração e aplicação de conceitos matemáticos em contextos do mundo real.

b) Apresentação da interface e das funcionalidades do GeoGebra.

No Geogebra:

i) Mostrar as Janelas Básicas Iniciais: Área de Álgebra; Área de Gráficos; Barra de Ferramentas; Entrada e Barra de Propriedades ou Barra Lateral de Propriedades;
ii) Criar construções simples através da Barra de Ferramentas;
iii) Mostrar que as construções podem também ser feitas digitando o comando no campo de Entrada;
iv) Mostrar que nas construções é possível modificar cores, espessura de linhas e transparência. Assim como retirar eixos do plano cartesiano, retirar a malha de fundo, entre outros;

v) Mostrar como criar e usar a ferramenta "*Controle Deslizante*" mostrando a aplicação na visualização de funções, em específico nas funções de 2º grau.

Avaliação: A avaliação será realizada pelo docente por meio da observação da interação e participação dos alunos durante a aula, além de considerar as anotações feitas pelos discentes sobre a aula.

5.4.2 2ª Etapa: Revisão dos conceitos com o auxílio do GeoGebra

Objetivo específico: Revisar e fortalecer conhecimentos sobre o triângulo e seus pontos notáveis, com foco especial no incentro e no ex-incentro. Será destacada a relação entre esses pontos e algumas das propriedades trigonométricas correspondentes, integrando-as ao estudo de máximos e mínimos. Isso visa consolidar a compreensão dos alunos sobre esses importantes conceitos da geometria plana.

Tempo estimado: 4 horas/ aulas

Recursos Didáticos: Computador com acesso à internet; Projetor ou tela para demonstração.

Metodologia:

a) Revisar conceitos de bissetriz, incentro e ex-incentro de um triângulo, círculo inscrito, pontos de máximos e de mínimos de uma função, com o auxílio do GeoGebra:

i) Criar um triângulo ABC, criar suas bissetrizes e seu círculo inscrito. Na ocasião cabe revisar e refletir sobre a definição desses conceitos com ajuda da visualização proporcionada pelo GeoGebra. Lembrando ainda de observar a existência do incentro como ponto de união das bissetrizes e centro do círculo inscrito;

ii) Criar, a partir do triângulo ABC um círculo tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC, relembrando que tal círculo é o círculo ex-inscrito ao lado BC e que seu centro é o ex-incentro de ABC

relativo à BC (ou ao vértice A). Assim como no item anterior é de suma importância, à medida que for criando cada passo da construção ir revisando os seus respectivos conteúdos e se possível variar a construção inicial ou utilizar a ferramenta "*Controle Deslizante*", para alterar as medidas da figura e assim também alterar a sua posição e a posição do ex-incentro.

Obs.: É interessante mostrar que o círculo tangente pode ser feito a partir de qualquer lado do triângulo ABC.

iii) Criar equações quadráticas e equações senoidais para ilustrar de forma gráfica os conceitos de valores e pontos de máximo e mínimo de uma função. Podendo variar os valores de algumas constantes para facilitar a compreensão das mudanças visuais que o software proporciona.

b) Explicar a problemática desta dissertação.

Explicar o teorema: dado um triângulo ABC e AT bissetriz do ângulo A, com o ponto X sobre essa bissetriz AT, os valores extremos da relação $\frac{BX}{CX}$ ocorrem no incentro e no ex-incentro de ABC. Mostrando a variação do ponto X usando o GeoGebra.

Avaliação: A avaliação será realizada pelo docente por meio da observação da interação e participação dos alunos durante a aula, além de considerar as anotações feitas pelos discentes sobre a aula.

5.4.3 3ª Etapa – Atividade de constatação de resultados

Objetivo específico: Aplicar o conhecimento teórico através de atividades demonstrativas com o GeoGebra, onde os alunos serão desafiados a resolver problemas que envolvam os conteúdos mencionados anteriormente. Essas atividades permitirão que os alunos visualizem conceitos discutidos em sala de aula, reforçando sua compreensão e habilidades de resolução de problemas;

Tempo estimado: 2 horas/ aulas

Recursos Didáticos: Computador com acesso à internet; Projetor ou tela para demonstração.

Metodologia:

Os alunos irão encontrar os valores de máximo e mínimo (extremos), através das equações dadas $E_1 = \frac{\text{sen}\hat{C}/_2}{\text{sen}\hat{B}/_2}$ e $E_2 = \frac{\cos\hat{C}/_2}{\cos\hat{B}/_2}$;

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula, bem como através da realização da atividade proposta.

5.4.4 4ª Etapa - Correção e interpretação dos resultados obtidos na atividade proposta aos alunos, através do GeoGebra.

Objetivo específico: Estimular a criatividade dos alunos, incentivando-os a explorar diversas abordagens para resolver os problemas propostos e despertar o interesse no software GeoGebra, para que, posteriormente, possam experimentar suas ferramentas.

Tempo estimado: 1 horas/ aulas

Recursos Didáticos: Computador com acesso à internet; Projetor ou tela para demonstração.

Metodologia:

a) Mostrar, através da figura criada, que os valores de máximo de mínimo ocorrem quando o ponto X se encontra no incentro e o ex-incentro do triângulo, com valores iguais aos encontrados pelos alunos nas equações E_1 e E_2;

b) Mostrar que os valores de máximo e de mínimo estão associados ao incentro ou ao ex-incentro, dependendo das medidas dos lados b e c do triângulo.

Avaliação: A avaliação será realizada pelo docente por meio da observação da interação e participação dos alunos durante a aula, além de considerar as anotações feitas pelos discentes sobre a aula.

5.4.5 5ª Etapa: Avaliação Final

Objetivo específico: Avaliar a eficácia do GeoGebra como ferramenta de estudo em sala de aula, promovendo a compreensão de conceitos matemáticos e o engajamento dos alunos no processo de aprendizagem.

Tempo estimado: 1 hora/ aula

Recursos Didáticos: Computadores com acesso à internet; Formulário Online.

Metodologia:

Através de um formulário, coletar as opiniões dos alunos sobre a atividade proposta. Tais como:

a) Estava familiarizado com o GeoGebra? Qual é a sua opinião sobre ele?
b) Quais foram os principais conhecimentos adquiridos durante a sessão?
c) Qual foi a sua impressão sobre a atividade apresentada?
d) Você considera o GeoGebra uma ferramenta útil para fins educacionais?

Avaliação: A avaliação se dará através de um formulário online, sobre as aulas estudadas nesta sequência didática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar esta pesquisa, proponho aos colegas professores que repensem as estratégias de ensino da Matemática diante dos desafios contemporâneos enfrentados no ambiente escolar. Como professora há bastante tempo em escolas públicas, tenho testemunhado a crescente desmotivação dos alunos em relação aos estudos, especialmente na disciplina de Matemática, que muitos consideram excessivamente complexa. O advento e a proliferação dos dispositivos tecnológicos nas salas de aula se tornaram uma realidade inegável, e a distração causada pelas redes sociais durante as aulas é um obstáculo constante ao aprendizado.

A proibição do uso de celulares em sala de aula, embora tenha sido uma medida adotada em muitas instituições de ensino, revela-se uma batalha contínua e desgastante, muitas vezes desviando o foco do ensino propriamente dito. É inegável que estamos diante de uma nova realidade educacional, na qual métodos tradicionais de ensino, baseados exclusivamente em quadro e giz, são cada vez mais inadequados para captar a atenção de uma geração imersa na cultura digital.

Diante desse cenário, a utilização de recursos tecnológicos durante as aulas pode emergir como uma alternativa promissora para engajar os alunos e tornar a Matemática mais acessível e menos intimidadora. O software GeoGebra, em particular, destaca-se como uma ferramenta versátil que combina álgebra e visualização gráfica, oferecendo possibilidades que vão desde a criação de jogos até a exploração de conceitos matemáticos complexos de forma interativa.

É importante ressaltar, no entanto, que o uso de aplicativos e recursos tecnológicos não constitui uma solução isolada para os desafios educacionais enfrentados atualmente. O papel fundamental do professor como facilitador do processo de ensino e aprendizagem não pode ser subestimado. A escolha criteriosa das estratégias pedagógicas mais adequadas, alinhadas aos objetivos educacionais, continua sendo crucial.

Ao associar o estudo do incentro como ponto crítico de uma função com o uso do GeoGebra, este trabalho demonstrou a dinamicidade e uma proposta interessante de atividade no intuito de uma abordagem interativa no ensino da matemática. É inegável que o potencial do GeoGebra vai muito além do escopo deste estudo, oferecendo oportunidades para explorar uma ampla gama de conteúdos matemáticos de forma envolvente e eficaz.

Por fim, sugere-se que uma proposta mais abrangente para a aplicação deste estudo no Novo Ensino Médio, dentro dos itinerários formativos, seria a implementação de uma disciplina eletiva dedicada a esse contexto, a ser realizada prioritariamente no laboratório de informática. Essa abordagem permitiria um tempo mais extenso para explorar e integrar os conceitos discutidos anteriormente, utilizando as ferramentas do GeoGebra. Durante essa disciplina, os alunos teriam a oportunidade de familiarizar-se com o software, aprender a manipulá-lo e aplicá-lo não apenas aos conteúdos mencionados anteriormente, mas também a outros temas de seu interesse, de forma criativa e autônoma. Isso não apenas reforçaria os conceitos aprendidos, mas também incentivaria a exploração e a experimentação ativa, contribuindo para uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos e suas aplicações.

Em suma, o presente estudo reafirma a importância de uma abordagem inovadora e tecnologicamente orientada para o ensino da Matemática, visando não apenas a compreensão dos conceitos, mas também o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo dos alunos, preparando-os para os desafios do mundo contemporâneo.

Por fim, como um tema para estudos futuros, a aplicação em sala de aula emerge como uma continuidade natural desta pesquisa. Como educadores, é fundamental reservar espaço em nossas aulas para a exploração do novo e do desafiador. Considerando que os alunos estão cercados por recursos tecnológicos, é oportuno aproveitar esse cenário para enriquecer as experiências de aprendizagem. Integrar ferramentas como o GeoGebra pode não apenas promover um entendimento mais profundo dos conceitos matemáticos, mas também estimular o engajamento e a interatividade em sala de aula. Assim, a adoção de novas tecnologias pode ser uma estratégia eficaz para melhorar significativamente a qualidade do ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D. P. (1968). ***Educational Psychology: A Cognitive View***. Holt, Rinehart and Winston.

BIALOSTOCKI, A.; BIALOSTOCKI, D. **The Incenter and an Excenter as Solutions to an Extremal Problem**. Forum Geometricorum, Volume 11, 2011, p. 9–12. Disponível em: https://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201102.pdf. Acesso em: [05/05/2024].

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRUNER, J. S. (1961). ***The Act of Discovery***. Harvard Educational Review.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar** - Volume 9: Geometria Plana. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

DISTRITO FEDERAL. **Currículo em Movimento da Educação Básica**: Ensino Médio. Brasília: Secretaria de Educação do Distrito Federal, 2022.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo**, SP: Atlas, 2002.

HOHENWARTER, M. et al. **Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra**. In: ICME 11 – 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico, 2008.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo, SP: Atlas 2003.

LAVICZA, Z. et al. **Integrating STEM-related Technologies into Mathematics Education at a Large Scale**. International Journal for Technology in Mathematics Education, [S.l.], v. 27, n. 1, 2020.

LEI nº 13.005, de 25 de junho de 2014. **Plano Nacional de Educação - PNE** 2014-2024. Brasília: Presidência da República. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. Volume I. São Paulo: Editora HARBRA Ltda, 1994.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo -** Coleção PROFMAT. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

NETO, A. C. M. **Geometria** - Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

PIAGET, J. (1972). ***Psychology and Epistemology: Towards a Theory of Knowledge***. Penguin.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. São Paulo, SP: Cortez, 2007

VELASCO, F. C. **O uso de animações por meio do software Geogebra no ensino de geometria analítica**. Brasília, 2023. Universidade de Brasília – UNB, Departamento de Matemática - MAT PROFMAT - SBM. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7397&id2=171056704. Acesso em: [05/05/2024].

VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind in Society: **The Development of Higher Psychological Processes***. Harvard University Press.

ZABALA, A.; ARNAU, L. (2014). **Como aprender e ensinar competências** [recurso eletrônico] (C. H. L. Lima, Trad.; M. G. S. Horn, Rev. Téc.). Porto Alegre: Penso. (Editado como livro impresso em 2010).

APÊNDICE: PASSOS PARA A VERIFICAÇÃO DO INCENTRO COMO PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO NO GEOGEBRA

I) Cadastro e Login no GeoGebra

Para utilizar o GeoGebra, é necessário realizar um cadastro online. Acesse o site do GeoGebra (https://www.geogebra.org/) em seu navegador preferido, a versão utilizada nesta dissertação foi a 6.0.840.0. Em seguida, clique em "Entrar no Sistema" e depois em "Criar uma Conta". Preencha os campos obrigatórios, como e-mail, nome de usuário e senha. Certifique-se de usar um e-mail válido, pois o GeoGebra enviará um e-mail de confirmação. Após aceitar os termos de serviço e a política de privacidade, clique em "Criar Conta". Confirme sua conta por meio do e-mail de confirmação recebido após o registro.

Depois de se registrar, para acessar o GeoGebra, volte à página inicial do GeoGebra e clique em "Entrar no Sistema". Insira seu e-mail e senha cadastrados e clique em "Entrar no Sistema" para acessar sua conta.

II) Áreas básicas do Geogebra

O software apresenta uma variedade de disposições e janelas, conforme figura 12, das quais destacaremos aquelas relevantes para este trabalho.

a) *Barra de Ferramentas*: esta barra contém ícones representando diversas ferramentas e comandos do GeoGebra, tais como criação de pontos, retas, funções e figuras. Oferece acesso rápido a muitas funcionalidades do software;
b) *Campo de Entrada*: é onde os comandos podem ser digitados;
c) *Área de Álgebra*: exibe coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos através do campo de entrada. O GeoGebra gera automaticamente representações gráficas para o que é inserido nessa área;

d) *Área de Gráficos*: esta é a seção principal da interface, onde as representações gráficas de objetos matemáticos são mostradas. Aqui, é possível desenhar, mover e interagir com objetos geométricos e funções;

e) *Barra de Propriedades ou Barra Lateral de Propriedades*: permite ajustar e personalizar as propriedades dos objetos matemáticos criados, incluindo cores, estilos e nomes.

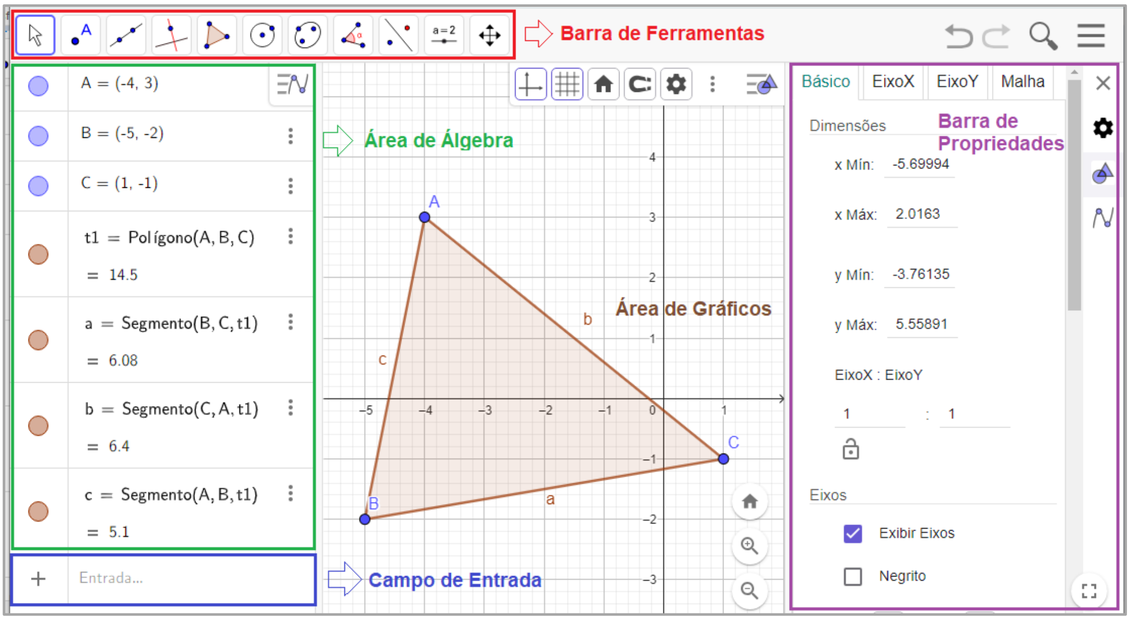

Figura 12 - Áreas básicas do GeoGebra.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

As janelas apresentadas na Figura 12 podem ser modificadas em termos de visualização ou tamanho, adaptando-se ao estilo do trabalho desejado.

III) Construções básicas para o desenvolvimento do projeto

Cabe destacar que o GeoGebra oferece uma ampla gama de recursos e abordagens para o desenvolvimento de um mesmo projeto. Neste contexto, serão apresentados alguns desses recursos relevantes para a aplicação desta dissertação, de maneira simplificada, a fim de permitir que os alunos do Ensino Médio possam aprender de forma rápida e, facilitando assim a assimilação, revisão e reforço dos conteúdos desejados. Outro ponto importante é que, além da criação de figuras, é possível gerar pontos, retas, funções e outros elementos para auxiliar na construção da figura desejada. Esses elementos podem ser ocultados, se necessário, bastando clicar com o botão direito sobre o objeto e desmarcar a opção "Exibir Objeto".

i. <u>Construção de um Triângulo</u>

Na Barra de Ferramentas, clicar no quinto ícone, da esquerda para direita, e em seguida na opção *Polígono* (figura 13). A funcionalidade *Polígono* permite a construção de polígonos utilizando pontos já existentes na Área de Gráficos ou criando novos pontos durante o uso da ferramenta. Para criar um triângulo, em específico, basta selecionar a ferramenta *Polígono* e clicar em três pontos desejados na Área de Gráficos. A construção é concluída ao clicar novamente no ponto inicial da construção.

Caso queira criar pontos previamente, basta clicar no segundo ícone da Barra de Ferramentas, da esquerda para direita, e em seguida clicar na Área de Gráficos.

Entre outras formas, há a possibilidade de construir um triângulo digitando comandos no Campo de Entrada. Para isso, utiliza-se a seguinte sintaxe:

Polígono(<Ponto>,<Ponto>,<Ponto>)

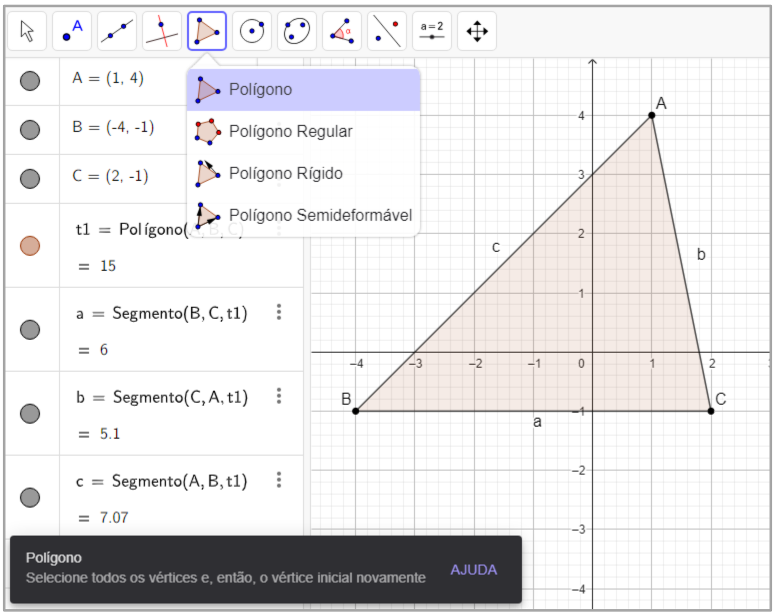

Figura 13 - Triângulo ABC.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Quando criamos um objeto no GeoGebra, como um triângulo, uma reta ou um ponto, eles são exibidos na Área de Gráficos com diferentes atributos, tais como cor, espessura da linha e transparência, que são definidos automaticamente pelo programa. No entanto, o usuário tem a opção de modificar essas características de acordo com suas preferências, através da Barra de Propriedades. Também é possível, ocultar os eixos de plano cartesiano e a malha da Área de Gráficos.

ii. <u>Construção de uma Bissetriz no Triângulo ABC</u>

Para construir uma bissetriz no triângulo ABC, na Barra de Ferramentas, clicar no quarto ícone, da esquerda para direita, e em seguida na opção *Bissetriz*. Ao selecionar esse ícone, clique nos dois lados adjacentes ao ângulo que deseja bissecta, seja o ângulo Â ou qualquer outro. É relevante destacar que o software criará duas retas, uma bissetriz e uma perpendicular a essa, passando pelo respectivo vértice, conforme ilustrado na figura 14.

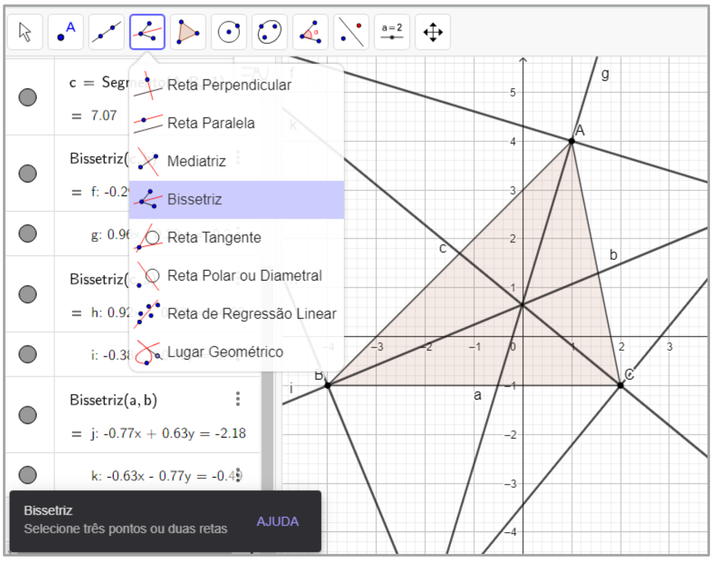

Figura 14 - Bissetrizes no triângulo ABC.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Como o incentro do triângulo ABC é a interseção das suas bissetrizes internas, para marcá-lo, no segundo ícone da Barra de Ferramentas, selecione a opção *Interseção de dois objetos* e em seguida clique em quaisquer duas bissetrizes internas. Repetir esse processo a partir do ângulo escolhido para marcar o ex-incentro do triângulo ABC, a partir de suas respectivas bissetrizes.

Para manter a figura organizada, utilize a opção *Segmento de Retas* disponível no terceiro ícone da Barra de Ferramentas. A partir dos vértices do triângulo ABC, construa segmentos até o seu incentro e o seu ex-incentro. Em seguida, desmarque todas as bissetrizes na Janela de Álgebra. Isso ajudará a manter a clareza da figura, como mostrado na figura 15.

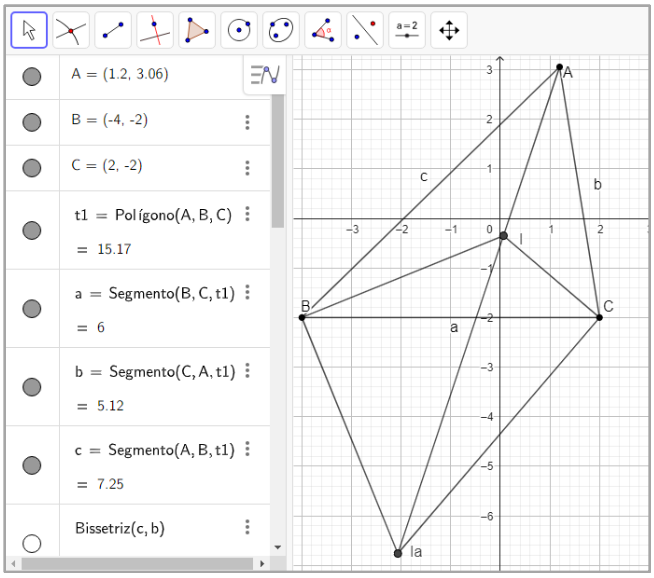

Figura 15 - Incentro e ex-incentro no triângulo ABC.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

iii. <u>Construção do Círculo inscrito e do Círculo externo ao lado BC do triângulo ABC</u>

Para construção do círculo inscrito no triângulo ABC pode-se construir uma reta perpendicular a qualquer um dos lados do triângulo. Se desejar, também pode construir as três retas perpendiculares aos lados a, b e c que passam pelo incentro do triângulo ABC. Para fazer isso, selecione o quarto ícone da Barra de Ferramentas, da esquerda para direita, em seguida clicar na opção *Reta Perpendicular*. Ao selecionar esse ícone clique no ponto que será o centro do círculo, que neste caso é o incentro do triangulo ABC e em seguida clique na reta à qual deseja adicionar a reta perpendicular.

Após construir a reta perpendicular, marque o ponto de interseção entre essa reta e o lado selecionado do triângulo ABC. Em seguida, na Área de Álgebra, desmarque a reta perpendicular e crie um círculo usando o sexto ícone da Barra de Ferramentas, selecionando a opção "*Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*". O centro desse círculo será o incentro do triângulo ABC, e o outro ponto será o ponto já criado pela interseção da reta perpendicular com o lado do triângulo, conforme ilustrado na figura 16.

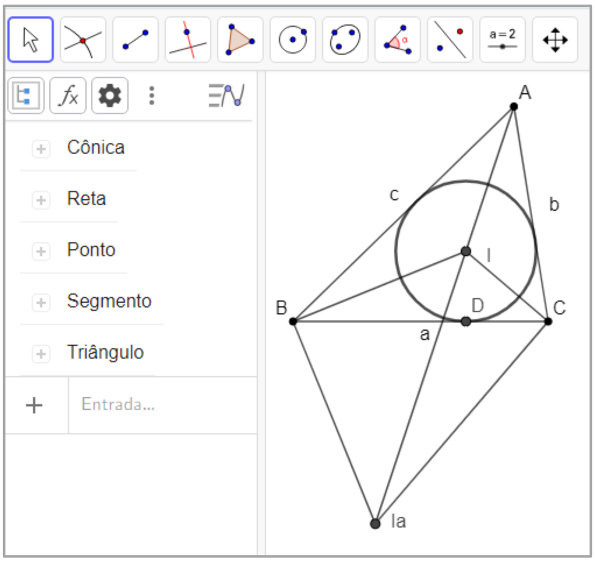

Figura 16 - Círculo inscrito no triângulo ABC.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

A construção do círculo externo tangente ao lado BC do triângulo ABC segue um processo análogo, bastando escolher o lado do triângulo onde deseja posicioná-lo. Isso é feito de maneira semelhante ao método utilizado para o círculo inscrito. (Ver figura 17)

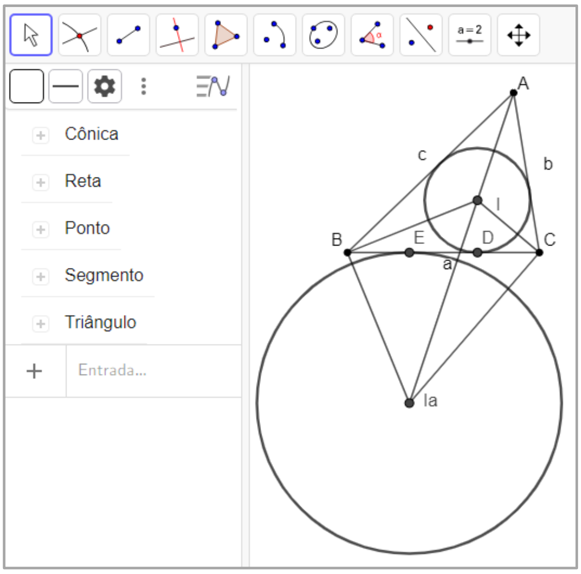

Figura 17 - Círculo inscrito e círculo externo tangente ao lado BC do triângulo ABC.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Vale destacar que é possível organizar a Área de Álgebra conforme a necessidade, utilizando seus ícones. No exemplo da figura anterior, figura 17, a Área de Álgebra foi organizada por "*Tipo de Objeto*".

Por fim, uma sugestão interessante para aprimorar a visualização da figura 18 seria prolongar os segmentos AB e AC do triângulo ABC de modo que eles tangenciem o círculo externo, que é tangente ao lado BC. A partir desses pontos de tangência, criar um arco e ocultar o círculo externo. Em seguida, criar segmentos, que são exatamente raios do círculo externo, para completar o setor circular.

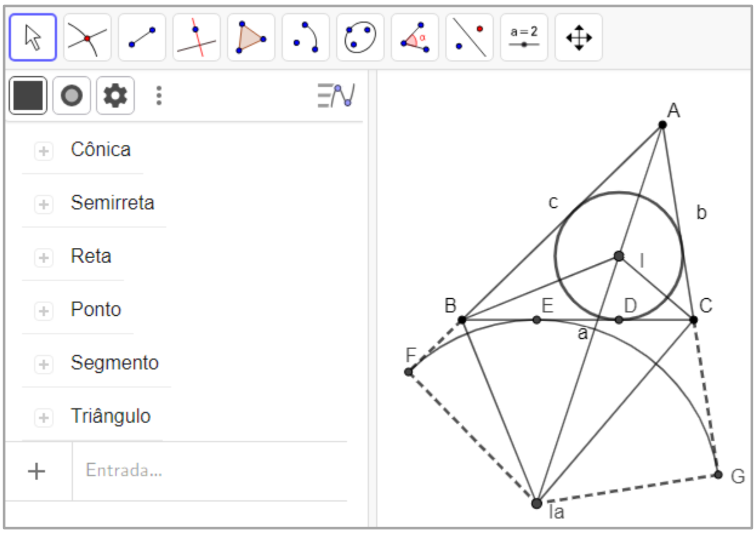

Figura 18 - Círculos inscrito e ex-inscrito do triângulo ABC.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

iv. <u>Utilização da ferramenta Texto para visualização dos resultados</u>

Na Barra de Ferramentas, clique no décimo ícone, da esquerda para direita, e em seguida selecione a ferramenta "*Texto*". Essa função possibilita a criação de uma caixa de texto para inserir observações ou exibir resultados da Área de Álgebra na Área de Gráficos do GeoGebra.

Para visualização do projeto deste trabalho, podemos construir uma semirreta AI, Figura 19, e um ponto X sobre essa mesma reta, de forma que o ponto X se desloque pela semirreta criada com o arrastar do mouse.

Após criar os segmentos BX e CX, na Área de Álgebra podemos agora construir a função que dará o valor da razão $\frac{BX}{CX}$, e irá variar de acordo com a posição do ponto X. Podemos criar as equações para calcular os valores $\frac{\text{sen}\hat{C}/_2}{\text{sen}\hat{B}/_2}$ e $\frac{\cos\hat{C}/_2}{\cos\hat{B}/_2}$.que nos darão a razão $\frac{BX}{CX}$ quando o ponto X coincide, respectivamente, com o incentro e com ex-incentro do triangulo ABC, vistos que são os valores de máximo ou mínimo da razão.

Então, utilizando a ferramenta “texto” colocamos o resultado das equações na *Área de Gráficos* onde podemos visualizar e interagir com os resultados.

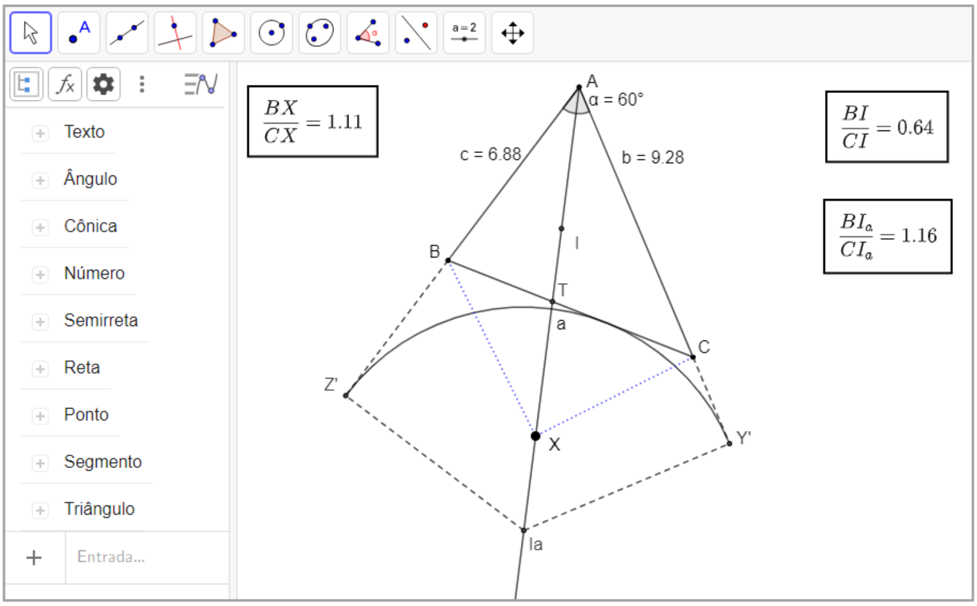

Figura 19 - Valores Máximos e Mínimos.
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Assim podemos interagir com os resultados para diversas posições do ponto X, podendo ser verificado através do link: <u>*https://www.geogebra.org/classic/k44ruvv8.*</u> Permitindo a visualização dos resultados obtidos no estudo do projeto.

Para facilitar o posicionamento dos pontos A, B e C na Área de Gráficos é possível criar “*Controles Deslizantes”* para alterar com mais facilidade as coordenas x e y de cada ponto.

Na Barra de Ferramentas, clique no décimo ícone, contando da esquerda para a direita, e em seguida selecione a ferramenta "*Controle Deslizante*". Para utilizá-la, basta clicar em qualquer lugar na Área de Gráficos para criar o Controle Deslizante. Esta funcionalidade permite a criação de Controles Deslizantes que podem variar valores em uma determinada faixa. Você pode definir o intervalo e o valor inicial do Controle

Deslizante nas suas opções. Uma vez criado, o Controle Deslizante pode ser movido para alterar os valores e observar as mudanças em tempo real nos objetos dependentes. Experimente criar um Controle Deslizante para variar os parâmetros de uma equação ou para controlar o tamanho de uma figura geométrica. A versatilidade desta ferramenta torna-a uma valiosa aliada na exploração e compreensão de conceitos matemáticos.

No exemplo representado na figura 20, foram criados seis Controles Deslizantes para serem aplicados nas coordenadas dos três pontos A, B e C do triângulo ABC. Este método oferece uma alternativa para a construção de triângulos, permitindo ajustar as posições dos vértices de forma dinâmica e interativa.

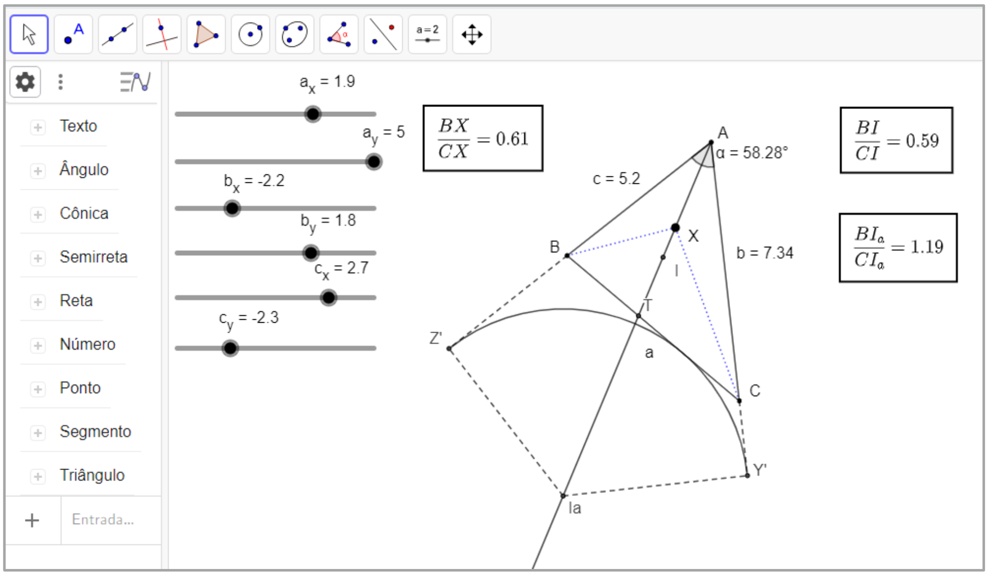

Figura 20 - Controles Deslizantes que reposicionam o Triângulo ABC
Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

A construção anterior pode ser acessada através do link *https://www.geogebra.org/classic/nrxczx43*.

É importante ressaltar que, ao construir a figura, o professor pode explorar e revisar todos os conceitos matemáticos mencionados nos objetivos de maneira dinâmica, aproveitando as funcionalidades que o GeoGebra oferece aos seus alunos. Através dessa abordagem interativa, os alunos podem não apenas melhorar a compreensão dos conceitos, mas também aprofundar seu entendimento e consolidar seu aprendizado. Além disso, a experiência proporcionada pelo GeoGebra permite que os alunos explorem diferentes abordagens e desenvolvam habilidades de resolução de problemas, incentivando-os a criar várias outras atividades para enriquecer ainda mais sua aprendizagem.