UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

SABRINA DA COSTA QUEIROZ

O NÚMERO DE OURO: HISTÓRIA, MITOS E VERDADES E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

FORTALEZA- CEARÁ

2013

.

SABRINA DA COSTA QUEIROZ

O NÚMERO DE OURO: HISTÓRIA, MITOS E VERDADES E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery

Fortaleza-Ceará
2013

.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho

Bibliotecário (a) Leila Cavalcante Sátiro – CRB-3 / 544

Q3n Queiroz, Sabrina da Costa.

O número de ouro: história, mitos e verdades e suas aplicações na educação básica / Sabrina da Costa Queiroz. — 2013.

CD-ROM 90f. : il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.

"CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)".

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery.

1. Número de ouro. 2. Mitos e verdades. 3. Educação básica - Aplicalidade. I. Título.

CDD: 510

.

SABRINA DA COSTA QUEIROZ

O NÚMERO DE OURO: HISTÓRIA, MITOS E VERDADES E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 23 / 08 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery
Universidade Estadual do Ceará – UECE/PROFMAT

Prof. Dr. Francisco Luis Rocha Pimentel
Universidade Estadual do Ceará – UECE/PROFMAT

Prof. Dr. Alberto Flávio Alves Aguiar
Universidade Estadual do Ceará – UECE/PROFMAT

Prof. Dr. Marcelo Pinheiro Klein
Professor Emérito Universidade Federal do Ceará – UFC

.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado a oportunidade de realizar meus sonhos.

Ao meu filho João Eric e ao meu marido Célio por terem sido compreensivos estando ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus pais Falcão e Lourdes, e à minha irmã Jackeline pelo o apoio incondicional.

À diretora Gerline e às coordenadoras Iara e Amélia pelo apoio e por confiarem no meu trabalho.

Ao professor Guilherme Ellery pela sua dedicação e apoio para que esse trabalho fosse realizado.

Aos professores João Montenegro, João Marques, Cleiton e Othon pela contribuição nos ensinamentos das disciplinas desenvolvidas ao longo do curso.

Aos meus colegas de mestrado pela amizade e pela ajuda que me deram nessa caminhada.

Aos demais que contribuíram de forma significativa para a elaboração desse trabalho.

.

RESUMO

Esta dissertação trata do número de ouro, sua história, suas verdades e mitos e algumas aplicações desse número na Educação Básica. As pesquisas sobre o surgimento do número de ouro revelam que sua história está intimamente ligada ao possível uso desse número nas artes e nos projetos arquitetônicos criados desde a antiguidade. Alguns desses fatos são discutíveis e serão analisados ao longo do trabalho fazendo com que se tenha uma visão crítica do número de ouro a ser trabalhada com os alunos da Educação Básica. Para verificação ou questionamento de alguns fatos que envolvem o número de ouro são usados recursos computacionais simples que podem ser trabalhados facilmente com alunos, o que torna até mais atrativo o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos envolvidos. Assim percebe-se que a matemática pode ser uma disciplina crítica fazendo com que o aluno apresente indagações e procure por respostas levando-o a despertar para a pesquisa.

Palavras-chave: Número de Ouro; Mitos e Verdades; Aplicabilidade na Educação Básica.

Abstract

This thesis concerns the golden number, its history, its myths and truths and some applications of that number in Basic Education. Research on the rise in the golden number reveals that its history is closely linked to the possible use of this number in arts and architectural projects created since antiquity. Some of these facts are debatable and will be analyzed in this work thus generating, a critical view of the golden number to be crafted in Basic Education by students. For verification or arguing about some facts related to the golden number simple computational resources are used that can be easily worked with students, which makes even more attractive, the teaching-learning process of the content involved. Thus, realize that mathematics can be a critical discipline, causing the student to make questions and search for answers, leading them to wake up to survey.

Keywords: Golden Number; Myths and Truths; Applicability in Basic Education.

.

SUMÁRIO

.

.

.

LISTA DE FIGURAS

.

.

.

LISTA DE GRÁFICOS E QUADROS

.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho sobre o número de ouro apresenta uma descrição de como se deu seu surgimento, onde ele realmente é encontrado e algumas aplicações em conteúdos da Educação Básica.

O número de ouro, proporção áurea, número áureo ou proporção de ouro é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega ϕ (PHI), em homenagem ao escultor Phidias, com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618. Também é conhecido por razão áurea, razão de ouro, seção áurea, média e extrema razão, divina proporção, divina seção, divisão de extrema razão, proporção em extrema razão ou áurea excelência. O número de ouro é ainda frequentemente nomeado razão de Phidias.

Ao longo do estudo sobre sua história, depara-se com o número de ouro em várias obras artísticas e arquitetônicas, além de suas inúmeras aparições também na natureza. Um dos objetivos do trabalho é investigar se o número de ouro realmente está presente nos objetos dos quais muitas vezes é referida a sua presença. Para algumas dessas investigações é usado um recurso computacional conhecido por Geogebra. Criado por Markus Hohenwarter, o Geogebra é um software de matemática dinâmica criado para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino. Agrupa recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um mesmo ambiente. Assim, o Geogebra tem a vantagem didática de apresentar representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Sendo assim o trabalho apresenta cinco capítulos no seu desenvolvimento. O primeiro capítulo trata da história do número de ouro como é comumente divulgada. No segundo capítulo é feita uma explanação dos ambientes, objetos e seres nos quais se costuma afirmar que o número de ouro aparece. No terceiro capítulo são apresentados e analisados mitos e verdades sobre o número de ouro utilizando o Geogebra para algumas demonstrações necessárias de contestações do que foi exposto nos dois capítulos anteriores. No quarto capítulo são mostrados alguns aspectos algébricos e geométricos desse número. No quinto capítulo são trabalhados alguns conteúdos da Educação Básica que envolvem o número de ouro.

.

Vale ressaltar que o trabalho é resultado da leitura de inúmeros registros sobre a História da Matemática e sobre o seu uso desde a antiguidade, sendo acrescentados alguns desenvolvimentos elementares de matemática básica na composição do texto final.

.

1. HISTÓRIA DO NÚMERO DE OURO

Várias são as versões sobre o surgimento do número de ouro. É um número irracional de história enigmática, visto em vários elementos da natureza, assim como em estátuas e projetos arquitetônicos da Antiguidade. É representado pela letra grega Φ (Phi), devido ao fato de que o escultor grego Fídias (Phidias) utilizou-o em muitos de seus trabalhos.

1.1 Definição do Número de Ouro

O Número de Ouro é um número irracional que surge numa infinidade de elementos da natureza em forma de uma razão, sendo considerado por muitos como uma oferta de Deus ao mundo. Possui a seguinte definição algébrica:

$$\frac{p+q}{p} = \frac{p}{q} = \quad \Phi,$$

onde p e q são números reais positivos.

A igualdade nos dá $p=q\cdot\Phi$ que substituindo na parte esquerda obtém-se:

$$\frac{q\phi + q}{q\phi} = \frac{q\phi}{q}$$

Cancelando q e multiplicando Φ em ambos os lados tem-se:

$$\Phi^2 - \Phi - 1=0$$

que é uma equação quadrática da forma : $ax^2+bx+c=0$ em que a=1, b=-1 e c=-1. Agora, resolvendo essa equação quadrática se obtém como solução positiva o número:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618003398875$$

que é o número de ouro (Φ).

.

1.2 O Número de Ouro e sua História

O número de ouro, também conhecido por “razão áurea”, possui uma história que perde-se na antiguidade. No Egito, as Pirâmides de Gizé foram construídas levando em conta essa razão. O Papiro de Rhind (egípcio) datado aproximadamente no ano 1650 a.C. refere-se a uma “razão sagrada” que se acredita ser o número de ouro. Esta razão surge em muitas estátuas da antiguidade.

Entre os anos de 447 e 433 a. C., foi construído na Grécia o Parthenon Grego, uma das estruturas mais famosas do mundo antigo. Quando seu frontão triangular ainda estava intacto, suas dimensões podiam ser encaixadas quase exatamente em um retângulo áureo (HUNTLEY,1970, p. 69). Nesse retângulo, ao dividir-se a sua base pela sua altura obtêm-se o número de ouro.

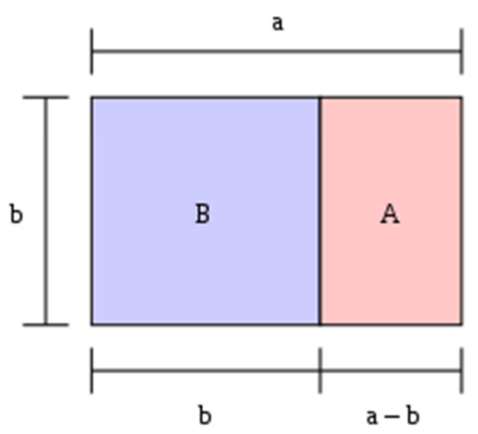


Figura 1: Retângulo áureo.

Figura 2: Parthenon Grego

.

Algumas versões sobre o surgimento do número de ouro afirmam que ele surgiu por acaso quando o matemático grego Euclides (370 a.C. a 275 a.C.) tentava descobrir a melhor maneira de dividir um segmento de reta em dois segmentos não congruentes, ou seja, que não possuem mesma medida. Depois de diversas tentativas, Euclides encontrou uma divisão, que classificou como a mais harmônica, dando a seguinte definição: “Um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre as medidas do maior trecho e do menor é igual a razão entre a medida do segmento todo e do trecho maior”.

O número áureo também está presente no pentagrama, símbolo da Irmandade Pitagórica. Pitágoras foi um filósofo e matemático grego que nasceu em Samos por volta de de 571 a.C. e morreu em Metaponto em torno de 497 a.C. . Pitágoras foi o fundador de uma escola de pensamento denominada em sua homenagem de Escola Pitagórica. Segundo o pitagorismo, a essência, princípio fundamental que forma todas as coisas é o número. Assim, Pitágoras e os pitagóricos investigaram as relações matemáticas e descobriram vários fundamentos da Física e da Matemática. O símbolo utilizado por essa escola foi o pentagrama, que, como descobriu Pitágoras, possui algumas propriedades interessantes. Uma dessas propriedades seria que o pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular; pelas interseções dos segmentos destas diagonais, é obtido um novo pentágono regular, que é proporcional ao original exatamente pela razão áurea (Gulberg, 1997).

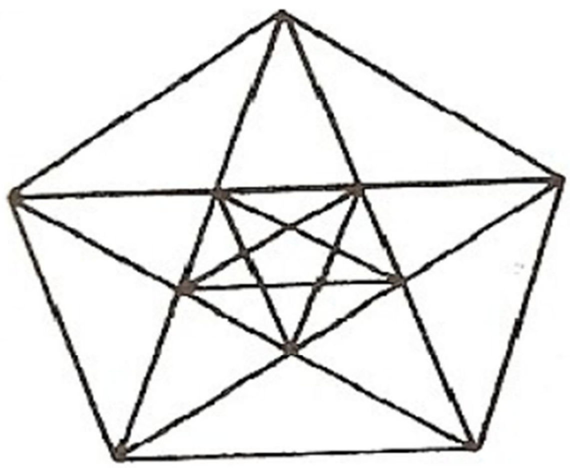


Figura 3: Pentagrama

.

1.3 Leonardo Da Vinci e o Número de Ouro

Leonardo di Ser Piero da Vinci nasceu em 1452, numa pequena cidade chamada Vinci. O seu talento artístico se revelou cedo, expondo sua excepcional habilidade para geometria, música e expressão artística. Reconhecendo suas capacidades, o seu pai, Ser Piero da Vinci, mostrou os desenhos do filho para Andrea del Verrocchio, grande mestre da renascença que ficou encantado com o talento de Leonardo e o tornou seu aprendiz.

Os pintores da época do Renascimento, e em particular Da Vinci, como ficou conhecido, recorreram a conceitos de Geometria Projetiva para criar seus quadros com um aspecto tridimensional. A obra prima "A Última Ceia" é um bom exemplo.

A nobreza dos desenhos de Leonardo da Vinci revela seus conhecimentos matemáticos, assim como a utilização da razão áurea como garantia de perfeição e beleza. É lembrado como matemático, apesar de não se concentrar na aritmética, álgebra ou geometria o tempo suficiente para fazer uma contribuição expressiva.

Entre as pinturas do renascimento destaca-se um dos quadros mais ilustres de Leonardo da Vinci: a Mona Lisa, onde pode-se observar a proporção áurea em diversas situações. Como por exemplo, ao se construir um retângulo em torno de seu rosto, vê-se que é um retângulo de ouro. Pode-se também subdividir este retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal e tem-se novamente um retângulo de ouro. As dimensões do quadro formam igualmente um retângulo de ouro.

.

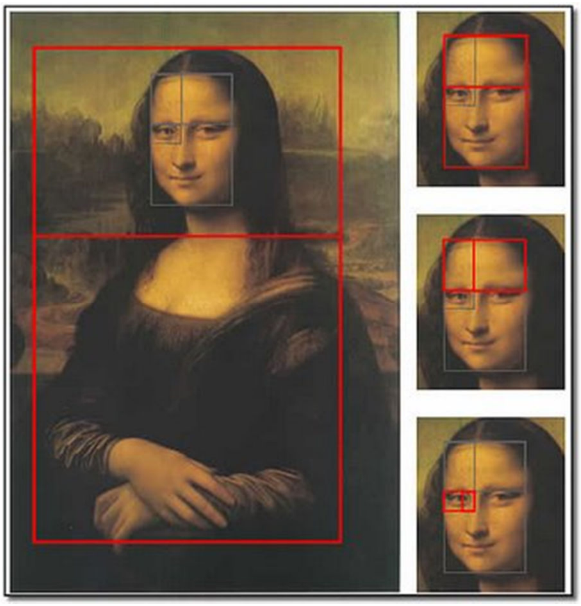


Figura 4: Mona Lisa e Retângulos Áureos

A Mona Lisa possivelmente é o retrato de Madona Lisa Gherardini, mulher de Francesco del Giocondo, um rico cidadão de Veneza, que o encomendou ao pintor. Por esse motivo o quadro também é chamado de A Gioconda. Suspeita-se, no entanto, que Leonardo tenha começado a pintura como um retrato da mulher do nobre, mas que depois o tornou na imagem que o pintor fazia da beleza perfeita.

A razão de ouro encontra-se também presente num trabalho inacabado de Da Vinci, S. Gerolamo, pintado por volta de 1483. A figura de S. Gerolamo inscreve-se perfeitamente num retângulo áureo que pode ser sobreposto ao desenho. Assume-se que tal fato não tenha acontecido por acaso, mas porque Leonardo construiu a figura de acordo com a seção de ouro, devido ao seu enorme interesse pela matemática e pela utilização desta em muitos dos seus trabalhos.

Figura 5: S. Gerolamo

.

1.4 Fibonacci e o Número de Ouro

O matemático italiano Leonardo de Pisa nasceu por volta de 1175 e ficou conhecido como Fibonacci (filho de Bonaccio). A partir da divulgação do livro Liber Abacci , em 1202, Fibonacci tornou-se famoso, principalmente devido aos diversos temas numéricos desenvolvidos nesse trabalho. Este livro contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e Álgebra da época e realizou papel fundamental no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes, pois por meio deste livro os europeus vieram a conhecer os algarismos hindus, também denominados arábicos. Em várias pesquisas relacionadas ao número de ouro observou-se que nesse livro encontra-se o problema dos pares de coelhos: “Quantos pares de coelhos é que vão existir daqui a um ano?”. O objetivo era responder a questão, respeitando as seguintes condições:

- No primeiro mês tem-se um coelho e uma coelha. Estes dois coelhos acabaram de nascer.
- Um coelho só atinge a maturidade sexual ao final de um mês.
- O período de gestação de um coelho é de um mês.
- Ao atingirem a maturidade sexual, a fêmea irá dar à luz todos os meses a um novo casal.
- Os coelhos nunca morrem.

A resposta deste problema envolve a série de números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... no qual cada número a partir do terceiro se obtém adicionando os dois números que lhe são imediatamente anteriores.

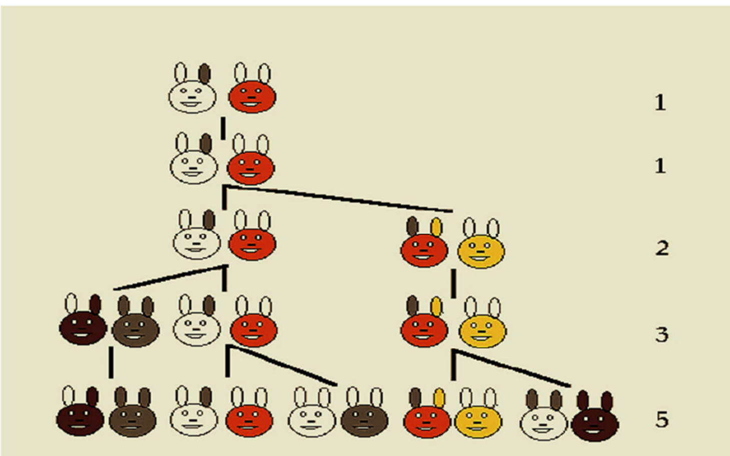


Figura 6: Esquema do Problema dos Coelhos.

.

Pode-se tomar de forma recorrente a definição desta sequência, para todo n natural, como segue:

$$u(1) = 1,\ u(2) = 1 \text{ e } u(n+1) = u(n-1) + u(n).$$

Esta sequência não é limitada superiormente, mas existe algo interessante; tomando as razões de cada termo pelo seu antecessor, obtém-se outra sequência numérica cujo termo geral é dado por:

$$F(n) = u(n+1) / u(n).$$

que é uma sequência limitada. Se considerarmos a sequência de Fibonacci como um conjunto da forma {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...} e a razão de cada número pelo seu antecessor, obteremos a sequência:

$$1/1 = 1,\ 2/1 = 2,\ 3/2 = 1.5,\ 5/3 = 1.666...,\ 8/5 = 1.6,...$$

Percebe-se o que ocorre quando se coloca estas razões sucessivas em um gráfico onde o eixo horizontal indica os elementos da sequência F_n.

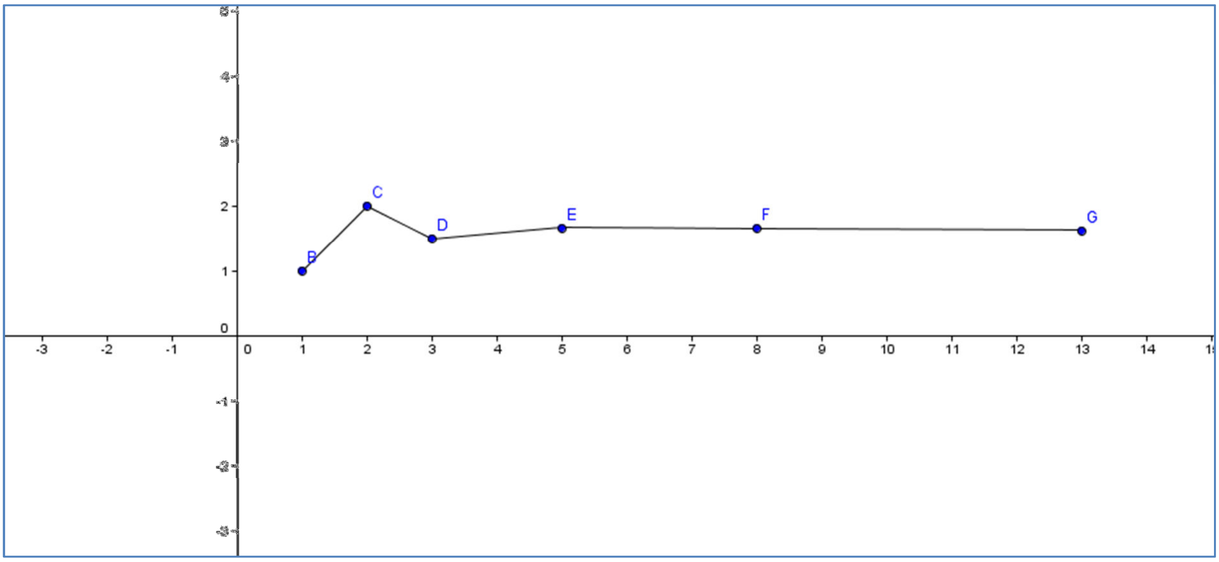


Gráfico 1: Distribuição relativa das razões sucessivas de cada número da sequência de Fibonacci pelo seu antecessor.

As razões vão se aproximando do número de ouro. Ou seja, quando n tende a infinito, o limite é exatamente o número de ouro.

1.5 Le Corbusier e o Número de Ouro

Charles-Edouard, mais conhecido por Le Corbusier, natural da Suíça, passou a maior parte da sua vida na França. Como arquiteto teve grande influência na arquitetura moderna.

Entre os anos de 1942 e 1948, Le Corbusier desenvolveu um sistema de medição que ficou conhecido por Modulor. O sistema surgiu do desejo de não converter ao sistema métrico decimal as unidades como pés e polegadas. Ao invés disso, Le Corbusier passou a usar como referência as medidas modulares baseadas nas proporções de um indivíduo imaginário (inicialmente com 1,75 m e mais tarde com 1,83 m de altura). O sistema foi mais tarde elaborado baseando-se na proporção áurea e na sequência de Fibonacci.

A criação do Modulor foi de suma importância nos períodos pós-guerra, já que na época havia uma grande necessidade de abrigar um número considerável de pessoas no menor espaço possível, e a existência do Modulor tornou viável a construção de grandes blocos habitacionais na Europa.

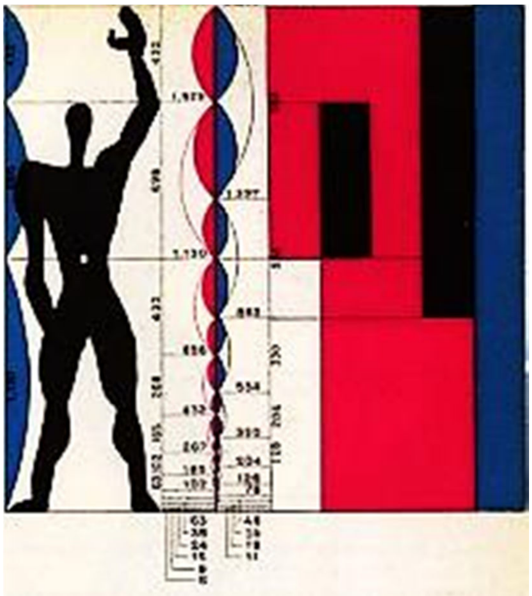


Figura 7: Modulor

.

O sistema Modulor pode ser observado em muitos dos edifícios projetados por Le Corbusier, especialmente na Chapel de Notre Dame du Haut, santuário para a Igreja Católica Romana em Ronchamp.

Figura 8: Chapel de Notre Dame du Haut

.

2. ONDE SE PODE ENCONTRAR O NÚMERO DE OURO

Apesar da origem do número de ouro ter se perdido na antiguidade, tem-se exemplos da razão áurea no antigo Egito, na Grécia, nas obras de Leonardo da Vinci, na sequência desvendada por Fibonacci, e em muitas outras situações e citações. Pode-se observar sua presença na natureza, na arte, na literatura, na música e na arquitetura.

O número de ouro é rotulado por muitos estudiosos como símbolo da harmonia e pode ser encontrado em nosso cotidiano.

O retângulo de ouro, que expressa movimento e beleza, foi utilizado por vários artistas, entre eles, Leonardo da Vinci e mais recentemente por Le Corbusier, como já registrado nesse trabalho.

2.1 O Número de Ouro na Arte

A proporção áurea foi usada em muitas obras de arte. O quadro “O Nascimento de Vênus” é uma pintura de Sandro Botticelli que representa a deusa Vênus surgindo do mar como mulher adulta. Nesse quadro, Vênus está na proporção áurea. Esta proporção estaria ali empregada com a intenção do autor de representar a perfeição da beleza.

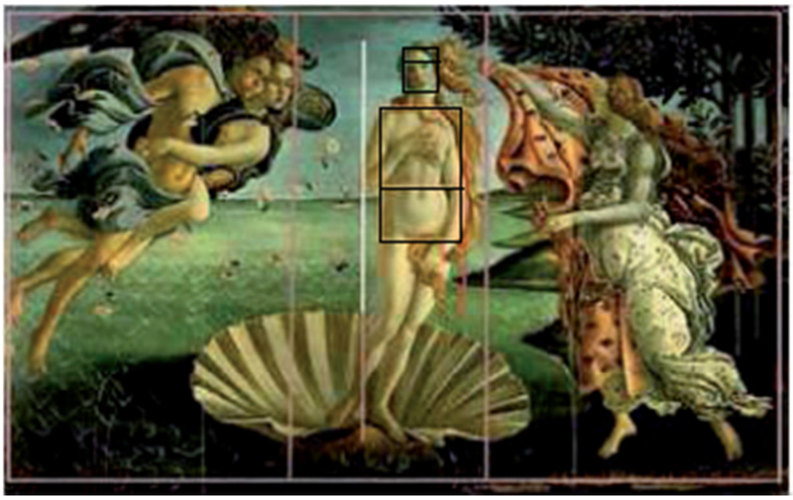


Figura 9: O Nascimento de Vênus

.

Em “O Sacramento da Última Ceia”, pintura realizada por Salvador Dalí em 1955, as dimensões do quadro estão numa razão áurea. Salvador Dalí construiu este quadro surrealista baseando-se nos estudos de Leonardo da Vinci (que pintou uma das mais famosas Santas Ceias). Esta obra é uma representação moderna da famosa “A Última Ceia” de Leonardo da Vinci.

Figura 10: O Sacramento da Última Ceia por Salvador Dalí

2.2 O Número de Ouro na Literatura

Na literatura, o número de ouro encontra uma aplicação extraordinária no poema épico grego “Ilíada”, de Homero, que narra os acontecimentos ocorridos no período de pouco mais de 50 dias durante o décimo e último ano da Guerra de Troia. A proporção entre as estrofes maiores e menores dessa obra dá um número próximo a 1,618, o número de ouro.

Pode-se citar também a obra poética do escritor Luís Vaz de Camões, “Os Lusíadas”. Considerada a epopeia portuguesa por excelência foi publicada pela primeira vez em 1572 no período literário do classicismo, tendo como ação central a descoberta do caminho marítimo para a Índia por Vasco da Gama. Luís de Camões colocou a chegada à Índia no ponto que divide a obra na razão de ouro, ou seja, faz uma relação ideal entre as partes e o todo, numa perfeita proporção.

.

Na obra Eneida, poema épico latino que conta a saga de Eneias, um troiano que é salvo pelos gregos em Troia, o seu escritor Virgílio construiu a razão áurea com as estrofes maiores e menores.

2.3 O Número de Ouro na Música

Na música, encontra-se a razão áurea em composições de Mozart, Bethoveen (Quinta e Nona Sinfonia), Schubert e outros. Pode-se verificar a utilização da proporção áurea até mesmo na construção de instrumentos, como o violino.

Os violinos Stradivarius, produzidos pelo mestre Antônio Stradivari, são os mais famosos e valiosos do mundo. Um Violino Stradivarius de 1720 foi comprado num leilão em Novembro de 1990 por 1,7 milhão de dólares.

Um dos segredos da qualidade dos Violinos Stradivarius é que Stradivari construía-os em simetria perfeita segundo o número de ouro. Ele se baseava no conceito de que quando uma linha segmento é dividida em duas partes de tal modo que a razão entre o segmento inteiro e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a parte menor, essa relação é a chamada relação áurea, e o número obtido é o número de ouro.

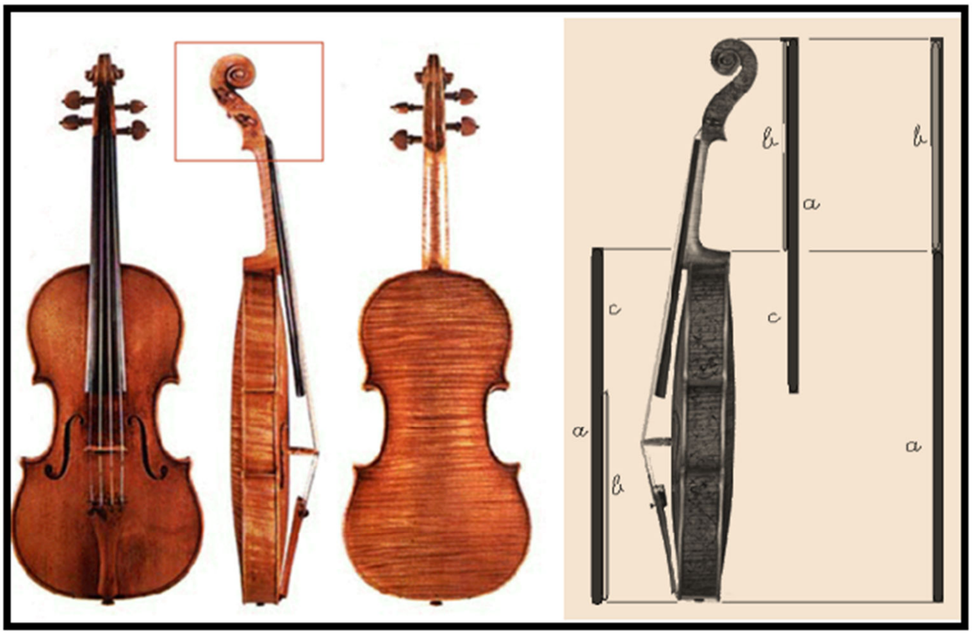


Figura 11: Violino Strativarius de Cremonese

.

2.4 O Número de Ouro na Arquitetura

Além de pintores renomados, arquitetos famosos também tomaram a razão áurea como parâmetro para a construção de suas obras. Tal recurso foi usado nas obras do grego Phídias e do suíço Le Corbusier, como já foi mencionado neste trabalho.

Mesmo em projetos arquitetônicos mais recentes, ainda se encontram artistas e arquitetos que utilizam o retângulo áureo. Por exemplo, o edifício-sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova Iorque, na qual há três retângulos áureos dispostos horizontalmente.

Figura 12: Sede da ONU

2.5 O Número de Ouro na Natureza

O número de ouro e a espiral áurea aparecem na natureza, no comportamento da refração da luz, no crescimento das plantas, nas espirais das galáxias, nos átomos, nos marfins de elefantes, nas ondas do oceano, furacões e em outros fenômenos.

.

Espiral logarítmica é uma curva que forma com todas as retas, situadas no seu plano e passando por um ponto fixo desse plano, um ângulo constante. Seu nome vem da expressão de uma de suas equações:

$$\theta = \log_b (r/a)$$

onde *r* é o raio da espiral , *a* é o raio associado para $\theta = 0$ e b fator de crescimento.

Uma espiral áurea, também conhecida como espiral dourada, é uma espiral logarítmica com valor específico para o fator de crescimento b. Seu nome vem do princípio que o raio da espiral aumenta entre os rolamentos conforme ocorra o afastamento do centro sem alterar sua forma.

b= ln □ /90, se θ é medido em graus

e

b= ln □ / (π/2), se θ é medido em radianos.

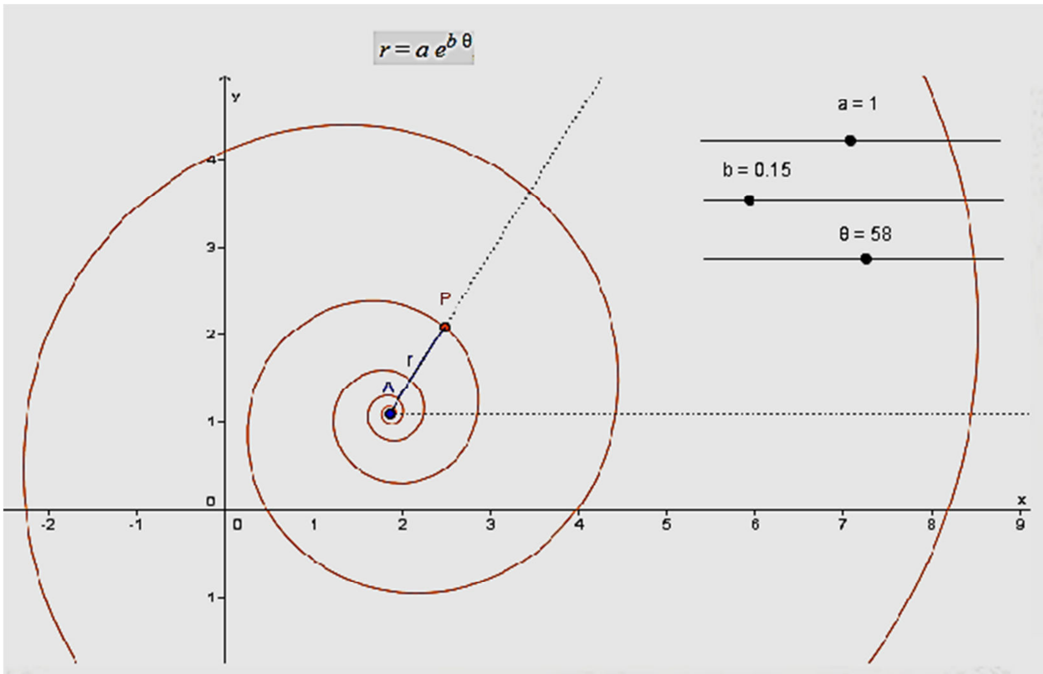


Figura 13: Espiral Logarítmica Feita no Geogebra

.

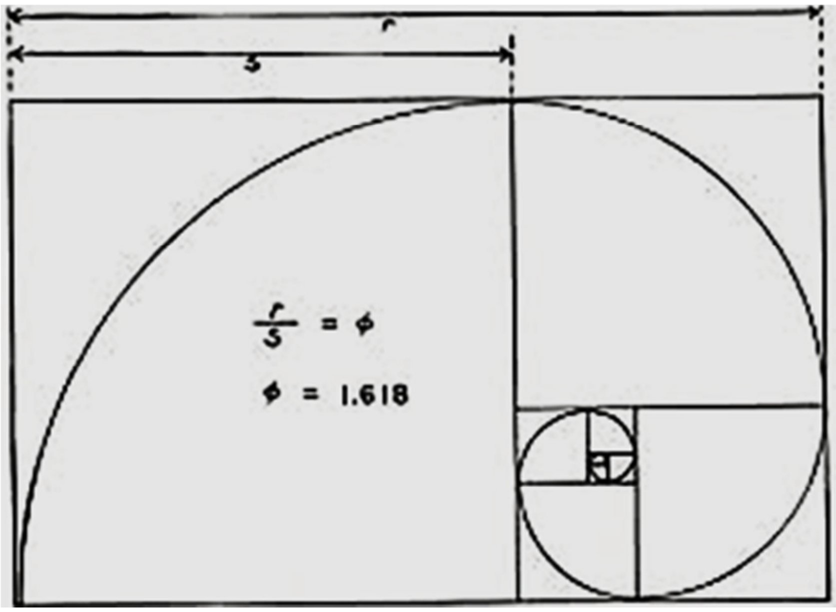


Figura 14: Espiral Áurea Dentro do Retângulo de Ouro

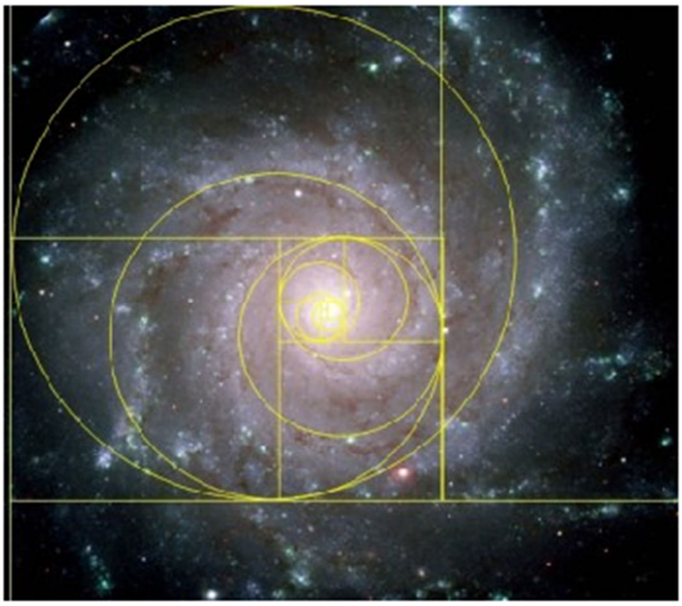


Figura 15: Via Láctea

Pode-se afirmar que o modelo de desenvolvimento de muitas plantas e os números de Fibonacci se relacionam. Um exemplo é a planta *Achillea ptarmica*, uma espécie de planta com flores brancas que desabrocham de junho a agosto nas regiões alpinas do norte da Alemanha e onde a razão do crescimento de seus galhos segue a sequência de Fibonacci (Lívio 2007, p.79-145).

.

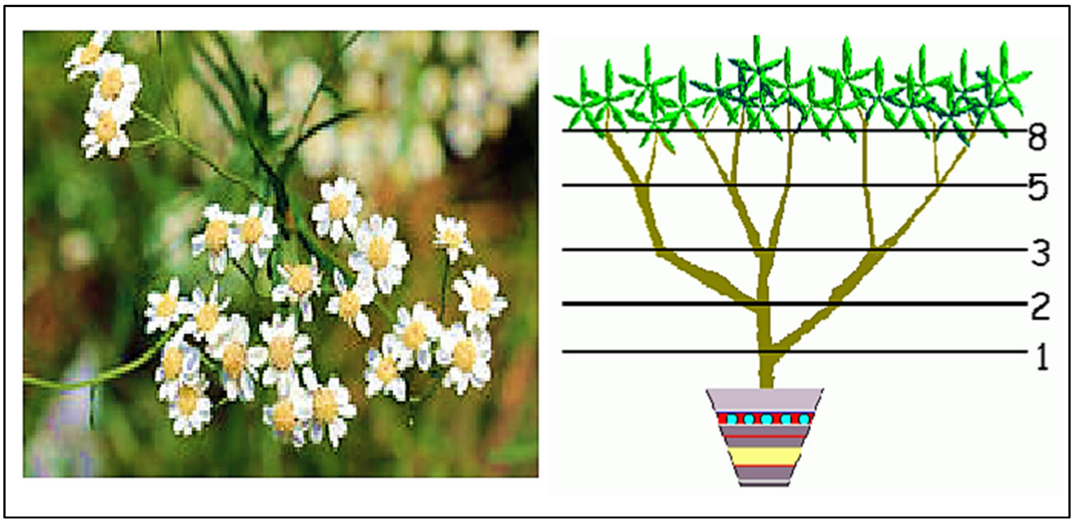


Figura 16: *Achillea ptarmica* e sua Razão de Crescimento.

A proporção de abelhas fêmeas em comparação com abelhas machos numa colmeia é de 1,618.

Nos girassóis da família *Compositae* as sementes formam dois conjuntos de espirais logarítmicas que tanto curvam para a esquerda como para a direita. O curioso é que os números de espirais em cada direção são (quase sempre) números vizinhos na sequência de Fibonacci. Da mesma forma ocorre com as pinhas (atas).

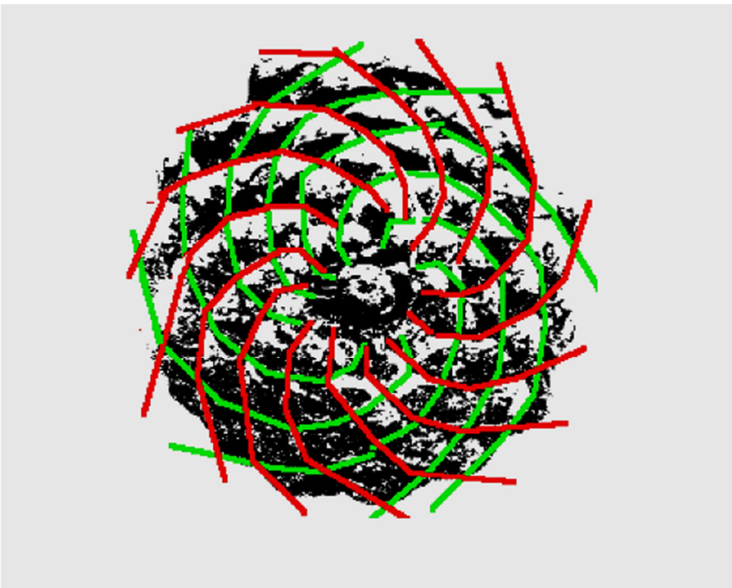


Figura 17: Esquema das Espirais de uma Pinha

.

Também se deve citar os Náutilos, animais que vivem no sudoeste do Oceano Pacífico. A proporção em que cresce o raio do interior da concha do Caramujo Náutilos é uma razão áurea**.**

Figura 18: Moluscos Náutilos Vistos em Seção

2.6 O Número de Ouro no Corpo Humano

As proporções áureas presentes no corpo humano foram representadas pelo “Homem Vitruviano”, obra de Leonardo Da Vinci.

O Homem Vitruviano é um desenho famoso que acompanhava as notas que Leonardo da Vinci fez por volta de 1490 em um de seus diários. Descreve uma figura masculina desnuda separadamente e simultaneamente em duas posições sobrepostas com os braços inscritos num círculo e num quadrado. A cabeça é calculada como sendo um oitavo da altura total. Algumas vezes, o desenho e o texto são chamados de Cânone das Proporções.

.

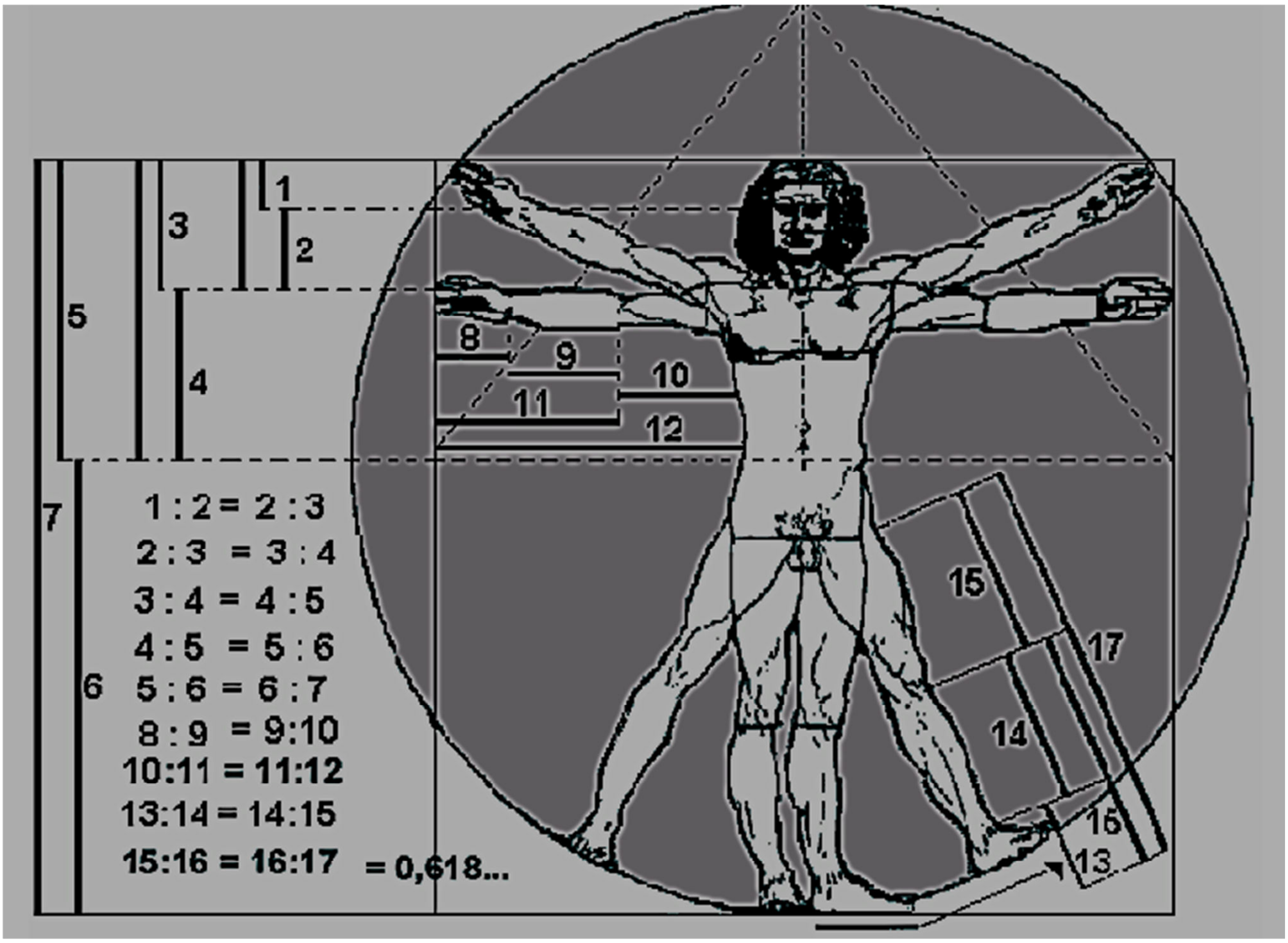


Figura 19: Representação do Homem por Leonardo Da Vinci.

Proporções áureas no corpo humano[1]:

- A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça.
- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão.
- A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax.
- A medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo.
- A medida da dobra central até a ponta dividido e da segunda dobra até a ponta.
- A medida do seu quadril até o chão e a medida do seu joelho até o chão.
- O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta.

[1]Disponível em < http://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea>. Acesso em janeiro de 2013.

.

3. NÚMERO DE OURO: MITO OU VERDADE?

Não há dúvida de que o número de ouro tem algumas propriedades matemáticas interessantes. Ele surge nas medições do pentagrama, nos cinco sólidos platônicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) e em outros conteúdos da matemática. A afirmação de que as razões dos termos sucessivos da sequência de Fibonacci tendem a razão áurea também é matematicamente correta.

Passando da Matemática para a Natureza, tudo o que se diz sobre o papel desempenhado pela razão de ouro no crescimento das plantas tem sido verificado correto.

A natureza parece favorecer a proporção áurea. Mas não exclusivamente. O Náutilo faz crescer a sua concha de uma forma que se segue uma espiral logarítmica, mas será que essa espiral é áurea?

Existe a hipótese de que Leonardo Da Vinci tenha usado a proporção áurea em algumas de suas obras. Embora não haja prova concreta contra tal hipótese, não se observam evidências para que seja verdadeira. O mesmo ocorre em outras obras conhecidas, como a pintura La Parade de Cirque do francês Georges Pierre Seurat e no quadro “O Nascimento de Vênus” de Sandro Botticelli.

Há alegações de que as pirâmides egípcias e algumas tumbas egípcias foram construídas usando a proporção áurea. Mas será que existem evidências para apoiar estas alegações? Da mesma forma será que existe alguma evidência para apoiar a alegação de que algumas tábuas de argila e pedra indicam que os babilônios sabiam sobre a razão de ouro?

Para fazer algumas verificações acerca do número de ouro pode-se utilizar um software matemático bastante conhecido e divulgado, o Geogebra.

O Geogebra é uma aplicação que permite trabalhar a geometria, a álgebra e o cálculo. A principal diferença entre esta aplicação e outras de geometria dinâmica é a possibilidade de se poder introduzir vários comandos de modo rápido e eficiente. Tem a capacidade de usar variáveis para números, vetores e pontos, achar derivadas e integrais de funções. Professores e alunos podem usar o Geogebra para demonstrar teoremas

.

geométricos. Nos projetos de educação é muito utilizado como uma TIC (Tecnologia da Informação e Comunicação). Recebeu vários prêmios de software educacional na Europa e nos EUA como: Prêmio Nacional de Liderança em Tecnologia 2010 (Washington DC, EUA), Prêmio Internacional de Software Livre categoria Educação (Soisson, França), Prémio Europeu de Software Acadêmico (Ronneby, Suécia), Prêmio Tecnologia 2009 (San Jose, Califórnia, EUA) e tantos outros.

3.1 O Número de Ouro em Desenhos e Pinturas: Verdade ou Mentira?

Desde a antiguidade o número de ouro é aplicado na arte. Ele traduz uma das proporções geométricas mais conhecidas e utilizadas nas pinturas, esculturas e arquitetura. A seguir, são verificadas algumas dessas utilizações do número de ouro.

3.1.1 Mona Lisa

Tendo como objetivo a perfeição em seus quadros, da Vinci esbanjou harmonia através de retângulos áureos em sua famosa criação. Ao observar na figura 20 o retângulo inserido em torno do rosto de Mona Lisa, com dimensões 4,1 cm por 2,533 cm é obtido como razão o número 1,618, sendo, portanto, um retângulo áureo. Ainda no mesmo retângulo, se pode traçar uma linha horizontal na altura do eixo dos olhos da imagem, subdividindo-a em um quadrado e um retângulo áureo. São percebidas proporções áureas em outras partes do corpo de Mona Lisa, como da altura do pescoço até o final do busto, e da altura deste, até o umbigo, além das próprias dimensões da tela.

Observando novamente a figura 20 onde estão indicados alguns retângulos áureos no quadro de Mona Lisa pode-se notar que eles estão dispostos de maneira que não marcam regiões de interesse específico especial. Além disso, não se observam registros indicando que Leonardo da Vinci tenha usado o número de ouro ao pintar a Mona Lisa.

.

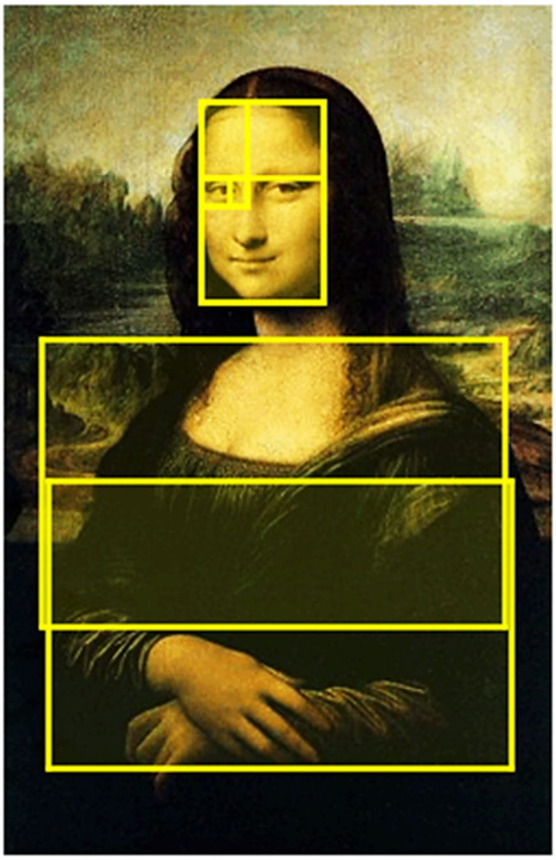


Figura 20: Mona Lisa e Retângulos Áureos

3.1.2 O Homem Vitruviano

O Homem Vitruviano é um conceito apresentado numa famosa passagem do arquiteto romano Marcus Vitruvius na sua série de dez livros intitulados de De Architectura, um tratado de arquitetura em que, no terceiro livro, ele descreve as proporções do corpo humano masculino. Tal conceito é considerado um conjunto de regras (cânone) das proporções do corpo humano masculino.

Vitruvius apresentou o cânone tanto de forma textual quanto através de desenhos. Porém, durante a Idade Média, à medida que os documentos originais perdiam-se e a obra passava a ser copiada, a descrição gráfica se perdeu. Durante o Renascimento, com a redescoberta dos textos clássicos, uma série de tratadistas, artistas e arquitetos se colocaram a dispor para interpretar os textos vitruvianos com a finalidade de reproduzirem novas representações gráficas. Dentre elas, a mais famosa e hoje propagada é a de Leonardo Da Vinci.

.

Na figura 21, onde tem-se a ilustração “O Homem Vitruviano” de Leonardo Da Vinci, são indicados dois segmentos que quando divididos tem-se como resultado a razão áurea. Mas, observe que, como o umbigo é desenhado como uma pequena região circular e não um ponto, outras divisões próximas a razão áurea poderiam ser utilizadas. Também é importante salientar que Leonardo da Vinci criou O Homem Vitruviano para ilustrar suas notas sobre o trabalho do arquiteto romano Marcus Vitruvius e o número de ouro não está presente nestas notas.

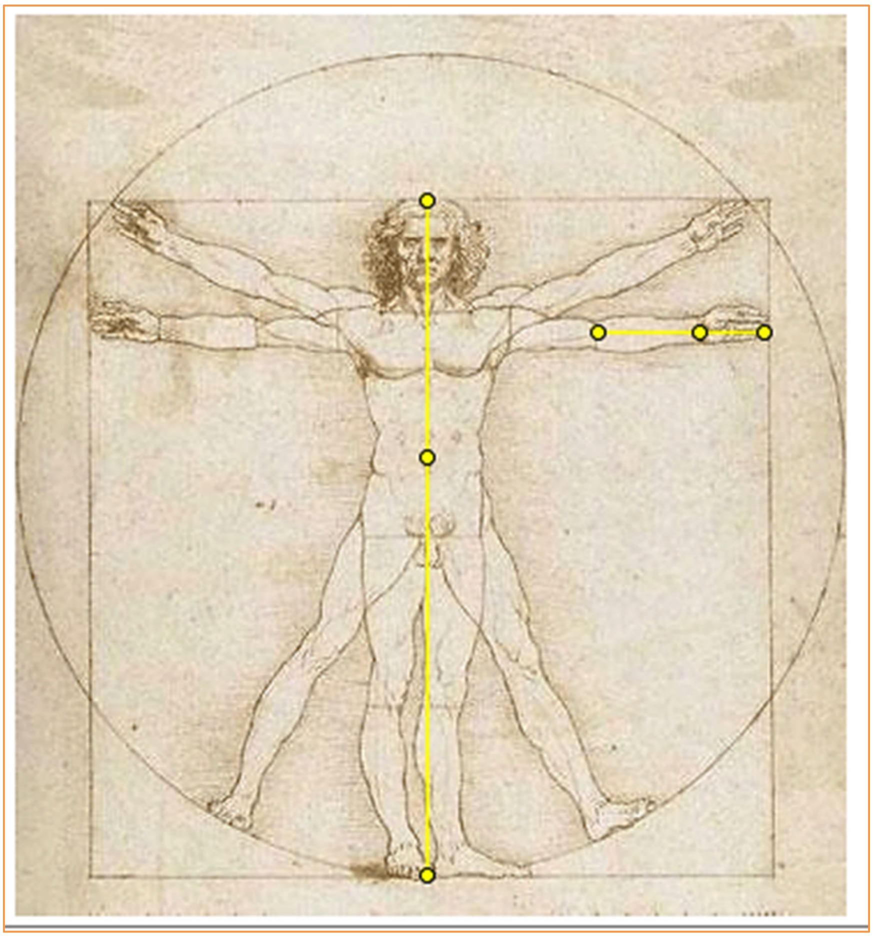


Figura 21: O Homem Vitruviano por Leonardo da Vinci

A seguir é calculada a razão k = CD/AB nos casos considerados por Vitruvius, que estão descritos na tabela a seguir. Para o cálculo do valor de k, é utilizado o Geogebra como recurso.

.

CD	AB
Altura.	Comprimento dos braços estendidos.
Altura.	Distância entre a raiz do cabelo e a linha do queixo.
Altura.	Largura máxima dos ombros.
Altura.	Distância do topo da cabeça para a linha inferior do queixo.
Altura.	Distância do topo da cabeça para a linha dos mamilos.
Altura.	Distância do cotovelo para a axila.
Altura.	Distância do cotovelo para a ponta da mão.
Altura da cabeça.	Distância da linha do queixo para o nariz.
Altura.	Comprimento da mão.
Altura da face.	Distância da raiz do cabelo para a linha das sobrancelhas.
Altura.	Distância do topo da cabeça até a linha inferior do pescoço.

Quadro 1: Distribuição dos elementos anatômicos considerados por Vitruvius.

.

- O comprimento dos braços estendidos de um homem é igual a sua altura.

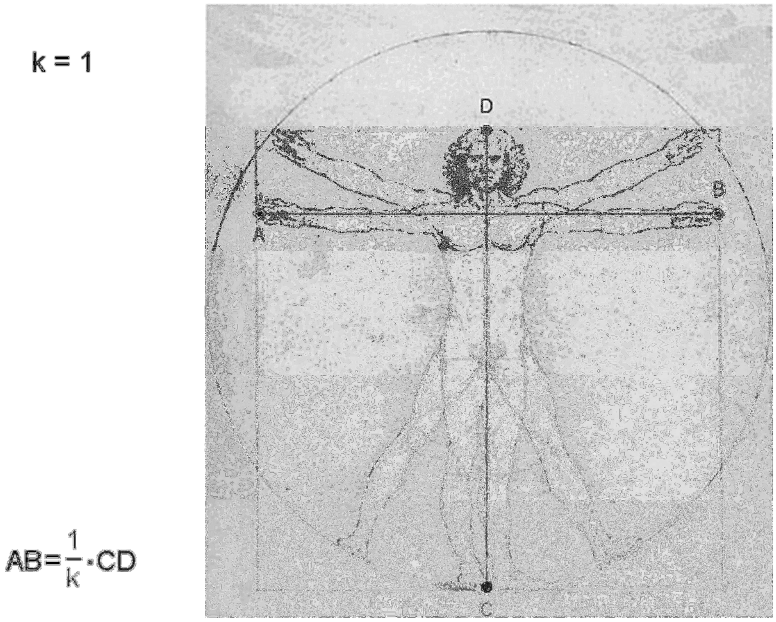


Figura 22: Razão entre Altura e Comprimento dos Braços Estendidos. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

- A distância entre a raiz do cabelo e a linha do queixo é um décimo da altura de um homem.

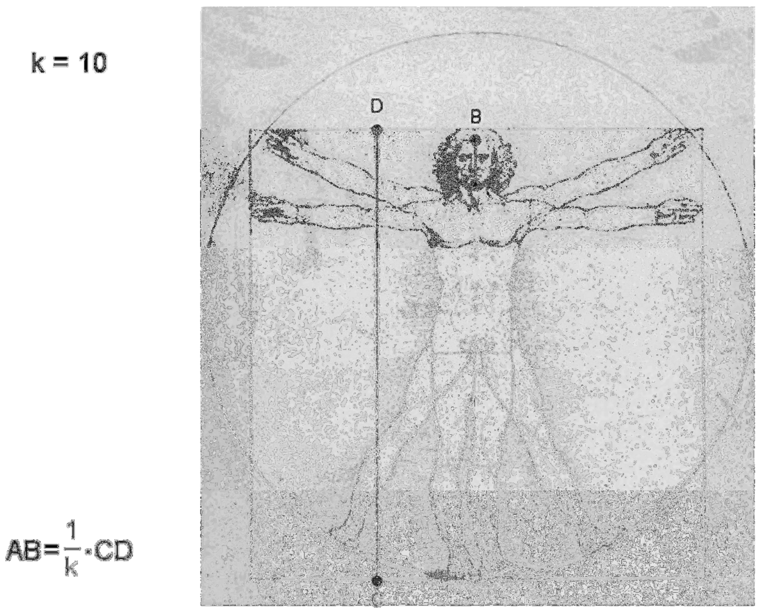


Figura 23: Razão entre a Altura e a Distância da Raiz do Cabelo até a Linha do Queixo. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

.

- A largura máxima dos ombros é um quarto da altura de um homem.

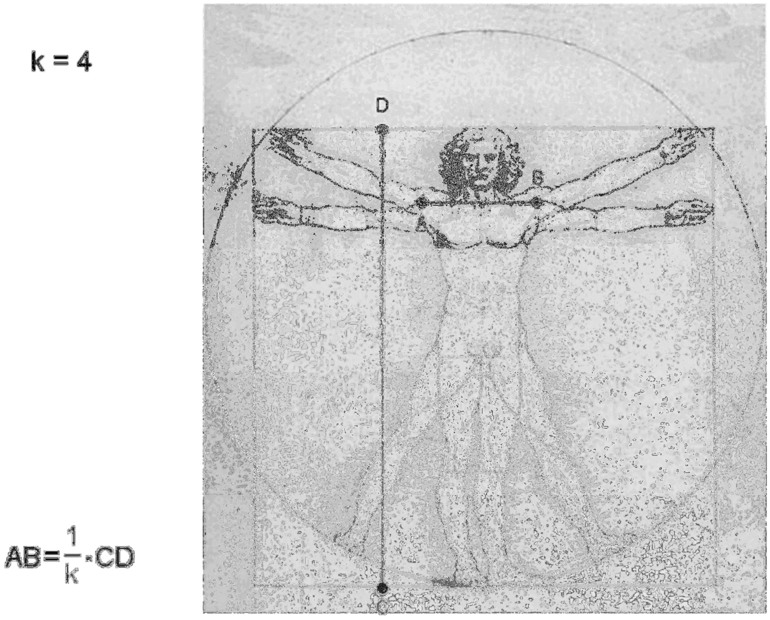
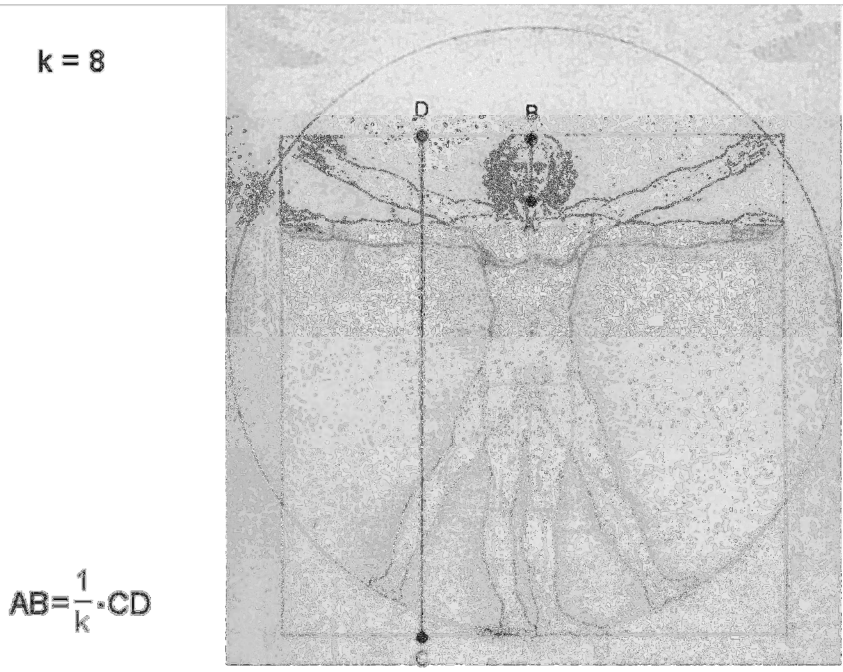


Figura 24: Razão entre a Altura e a Largura Máxima entre os Ombros. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

- A distância do topo da cabeça para a linha do queixo é um oitavo da altura de um homem.



.

Figura 25: Razão entre a Altura e a Distância do Topo da Cabeça para a Linha do Queixo. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

.

- A distância do topo da cabeça para a linha dos mamilos é um quarto da altura de um homem.

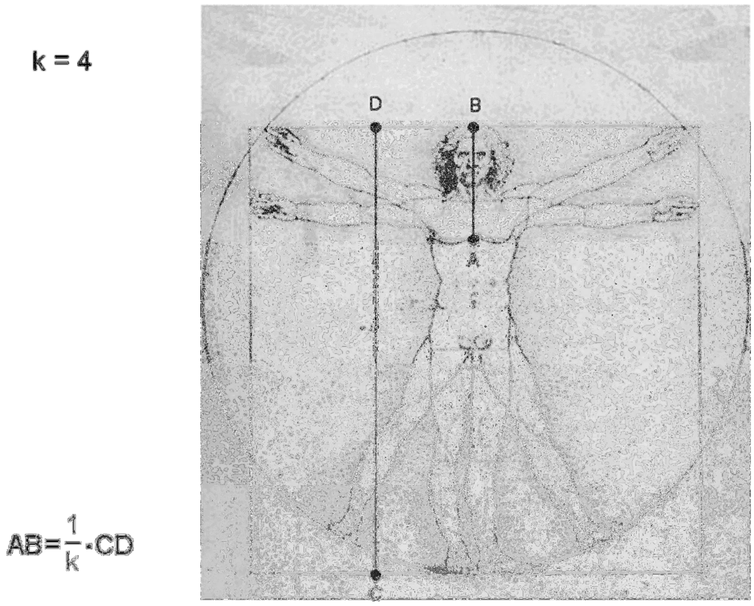


Figura 26: Razão entre a Altura e a Distância do Topo da Cabeça para a Linha dos Mamilos. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

- A distância do cotovelo para a axila é um oitavo da altura de um homem.

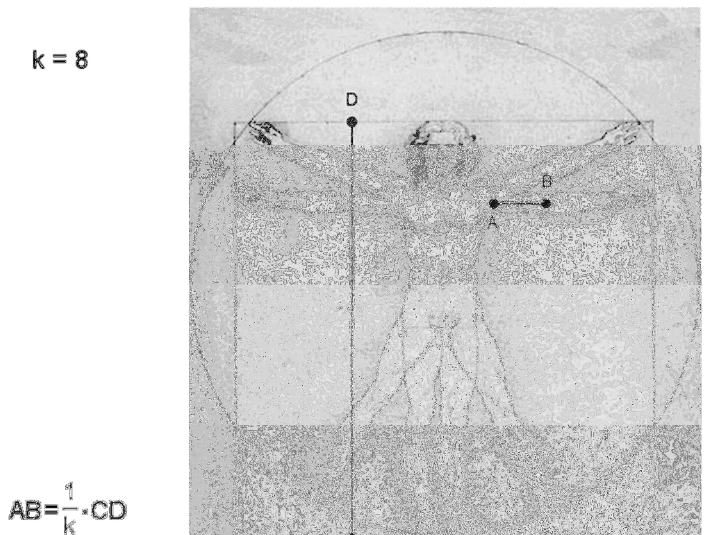


Figura 27: Razão entre a Altura e a Distância do Cotovelo para as Axilas. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

.

- A distância do cotovelo para a ponta da mão é um quarto da altura de um homem.

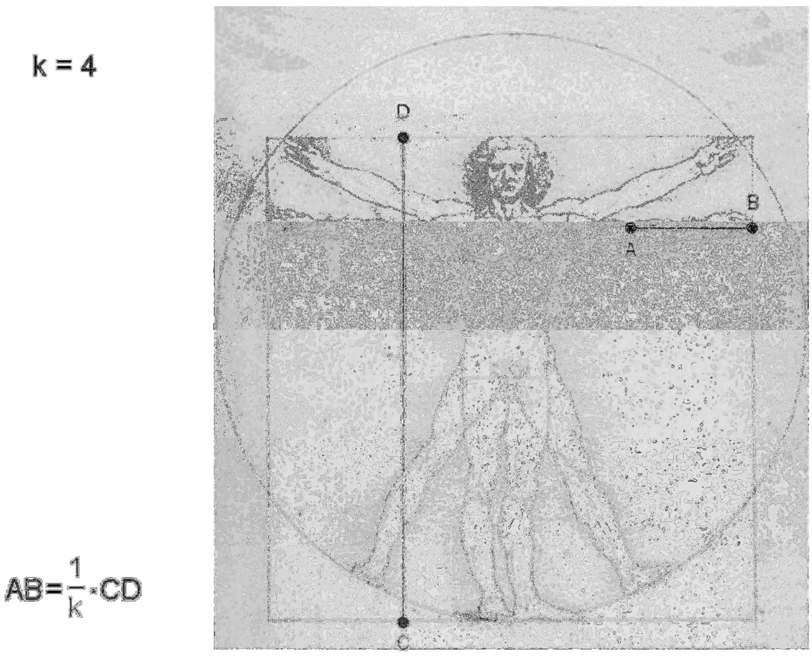


Figura 28: Razão entre a Altura e a Distância do Cotovelo para a Ponta da Mão. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

- A distância da linha do queixo para o nariz é um terço da altura da cabeça.

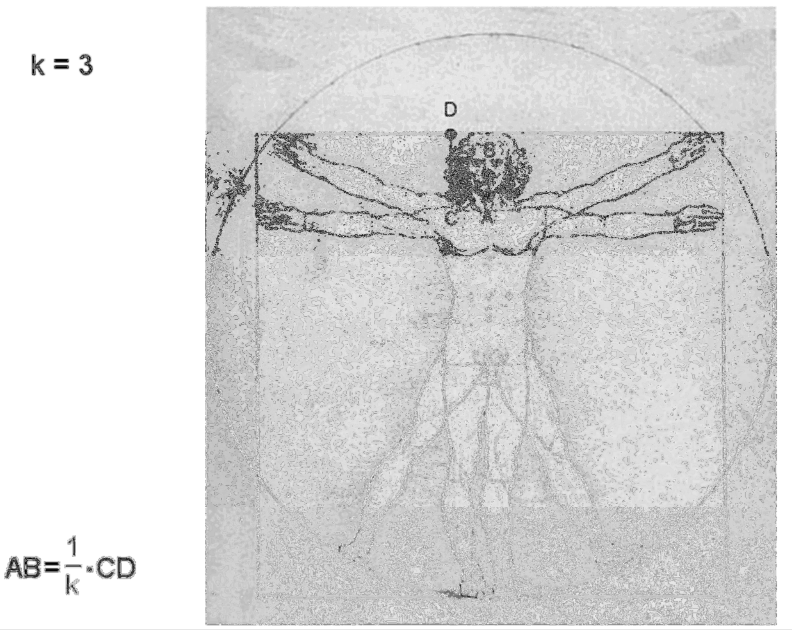


Figura 29: Razão entre a Altura da Cabeça e a Distância da Linha do Queixo para o Nariz. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

.

- O comprimento da mão é um décimo da altura de um homem.

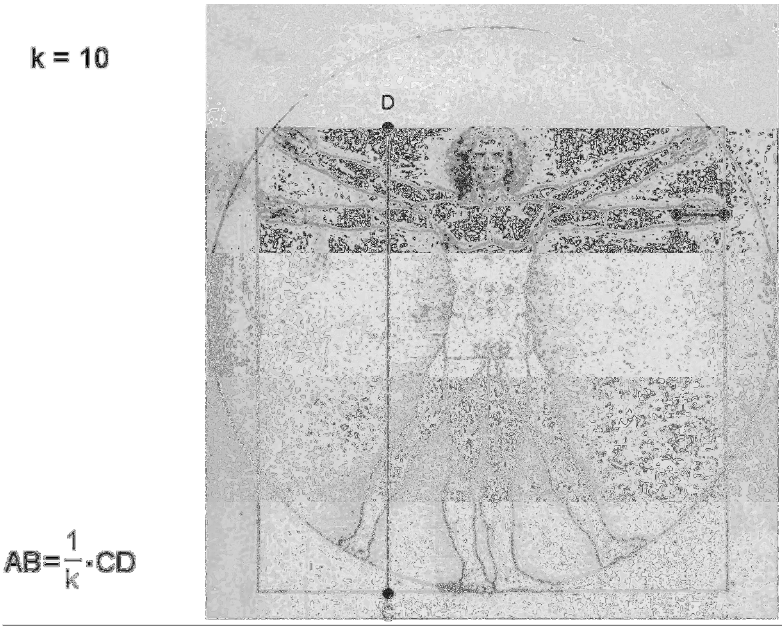


Figura 30: Razão entre a Altura e o Comprimento da Mão. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

- A distância da raiz do cabelo para a linha das sobrancelhas é um terço da altura da face.

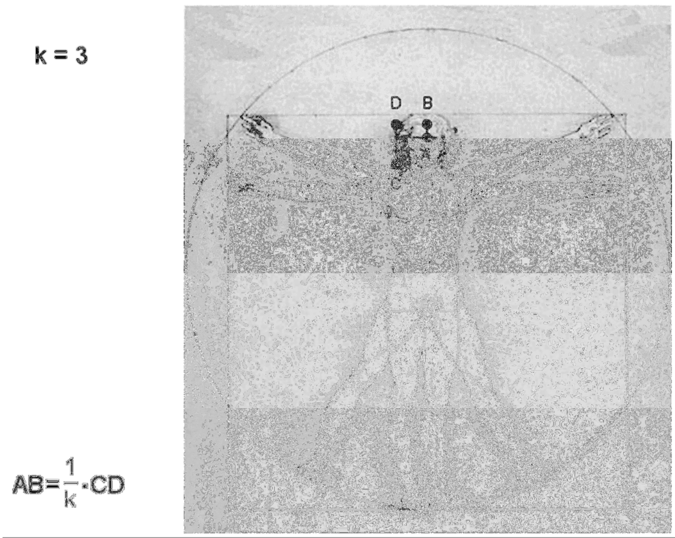


Figura 31: Razão entre a Altura da Face e a Distância da Raiz do Cabelo para a Linha das Sobrancelhas. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

.

- A distância do topo da cabeça até a linha inferior do pescoço é um sexto da altura de um homem.

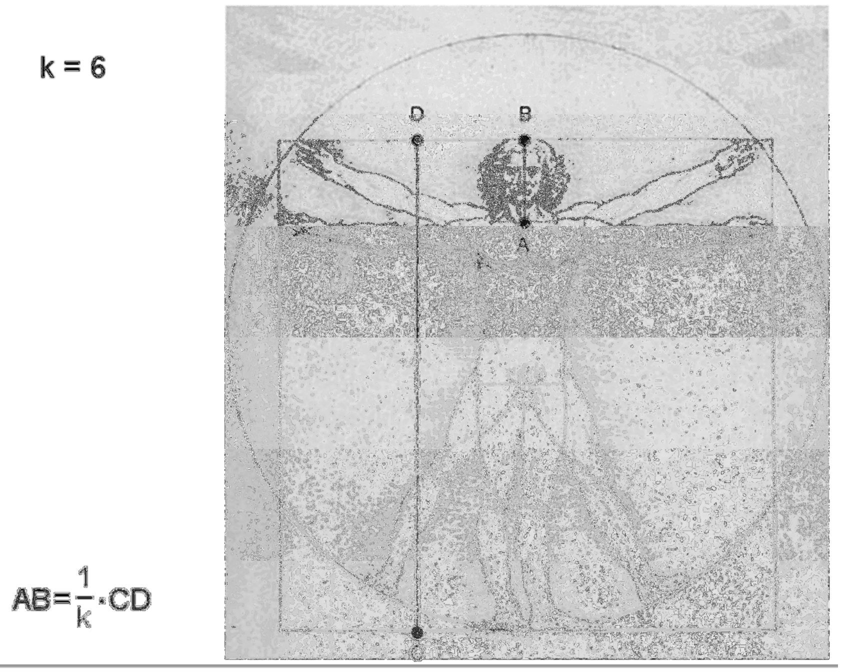


Figura 32: Razão entre a Altura e a Distância do Topo da Cabeça até a Linha Inferior do Pescoço. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

3.1.3 San Gerolamo

Outra obra também muito conhecida de Leonardo Da Vince em que supostamente aparece o número de ouro é a pintura San Gerolamo, uma pintura (não concluída) em óleo sobre painel (103 × 75 cm) mantida na Pinacoteca do Vaticano.

Supostamente não existe nenhum registro que indique que Da Vince tenha usado o número de ouro nessa obra. Na figura 33 está indicado o retângulo áureo que presumidamente San Gerolamo possui. Observe que o braço de San Gerolamo teve que ficar de fora do retângulo.

.

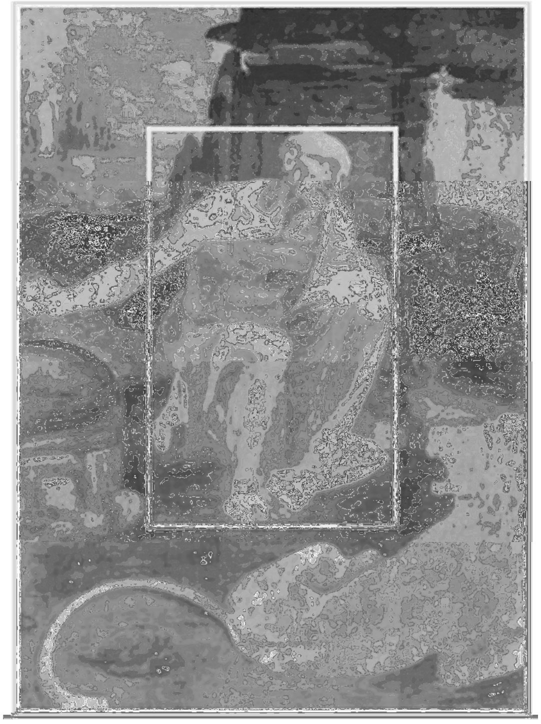


Figura 33: San Gerolamo

3.1.4 La Parade de Cirque

Mais uma das obras citadas em conter o número de ouro é a pintura La Parade de Cirque do francês Georges Pierre Seurat. Na figura 34 estão indicados dois retângulos áureos que supostamente fazem parte da pintura La Parade de Cirque. Eles parecem delimitar duas regiões de interesse, mas suas posições são imprecisas, outros retângulos não áureos poderiam limitar estas regiões e além do mais, parecem não existem inscrições que indiquem que Georges Pierre Seurat tenha usado o número de ouro ao pintar La Parade de Cirque.

.

Figura 34: La Parade de Cirque

3.1.5 Der Mensch das Mass aller Dinge

Na ilustração Der Mensch das Mass aller Dinge contida no livro Bauordnungslehre de Ernst Neufert, o número de ouro realmente está presente. Pode-se observar exemplos nas figuras 35, 36, 37 e 38. Nelas está representado o segmento AB e o ponto X que divide esse segmento na razão áurea. Tais representações foram feitas com auxílio do Geogebra.

.

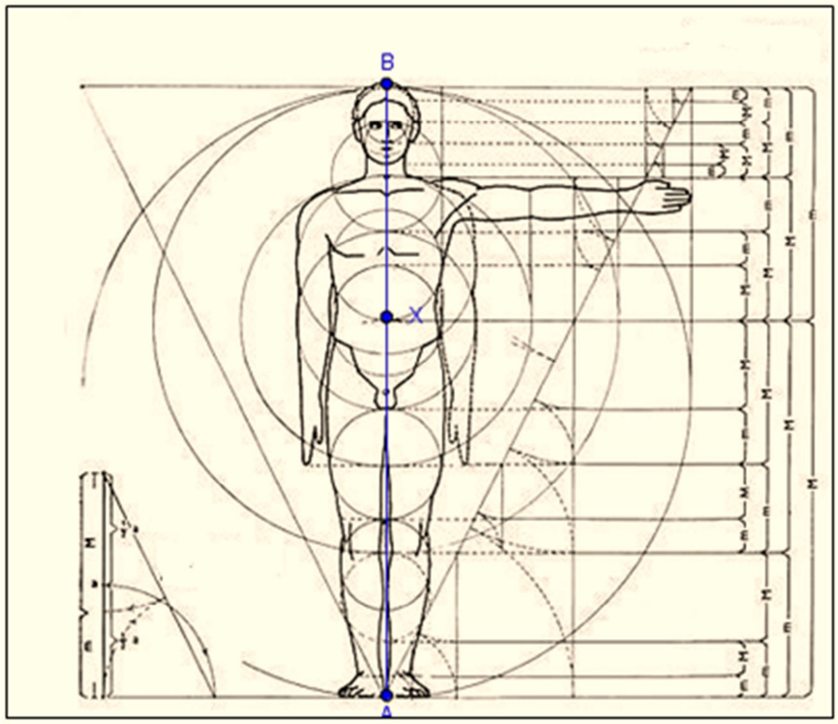


Figura 35: Razão Áurea por Ernst Neufert. Disponível em:
< http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

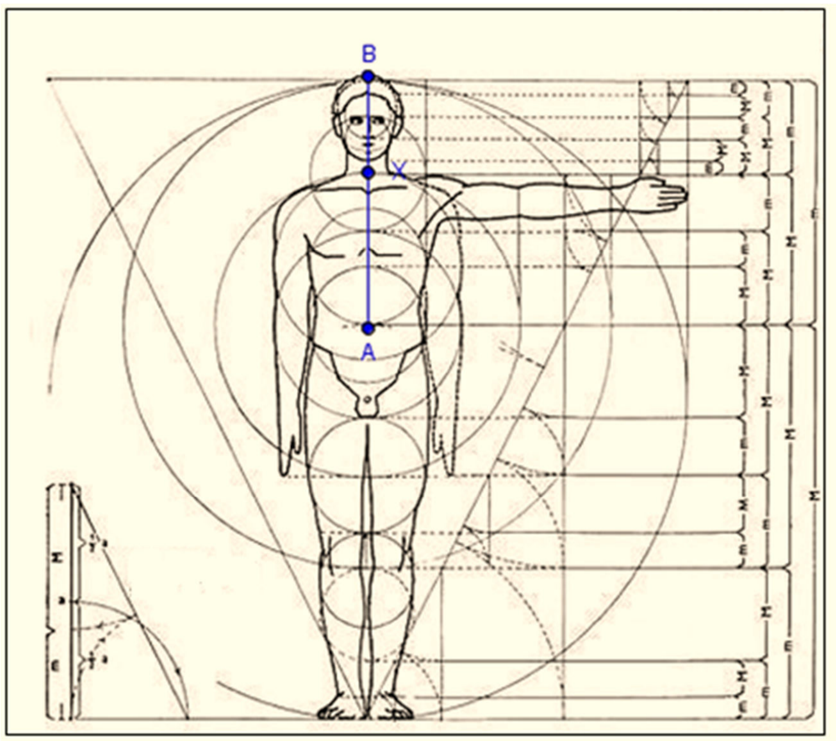


Figura 36: Razão Áurea por Ernst Neufert (2). Disponível em:
< http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

.

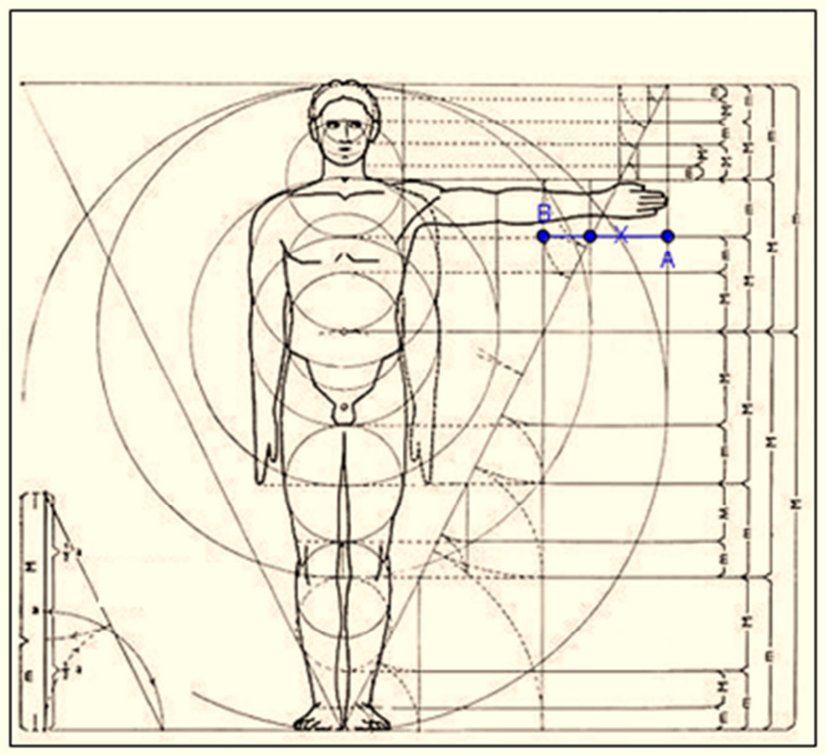


Figura 37: Razão Áurea por Ernst Neufert (3). Disponível em:
< http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

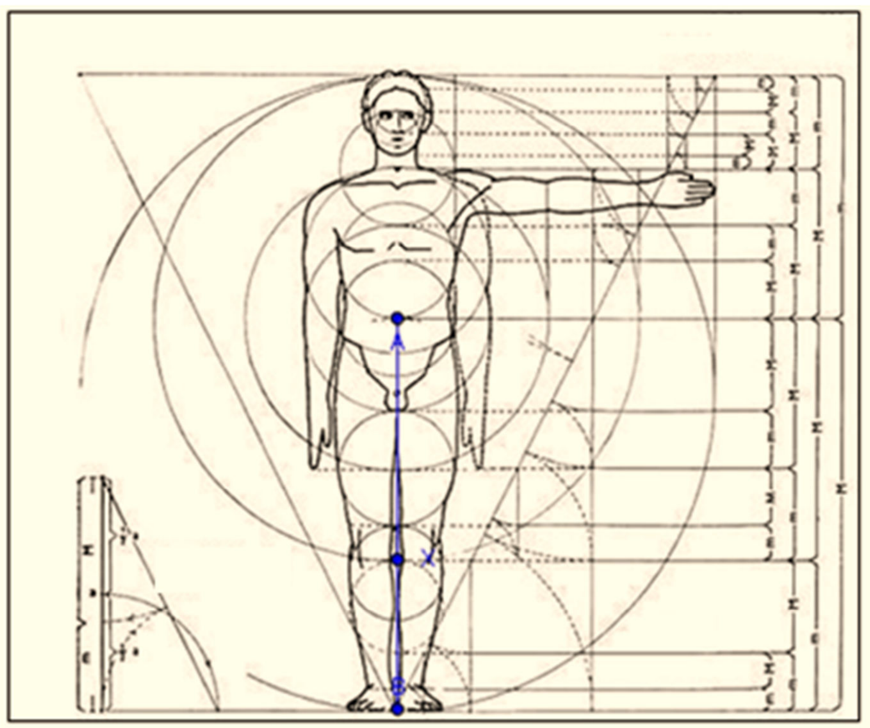


Figura 38: Razão Áurea por Ernst Neufert (4). Disponível em:
< http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

.

3.2 O Número de Ouro em Conchas de Náutilos: Verdade ou Mentira?

Um dos exemplos de seres vivos no qual supostamente está presente o número de ouro são os náutilos, onde se afirma que sua concha tem o formato de uma espiral áurea.

Com a ajuda do Geogebra, pode-se fazer um teste simples, utilizando várias conchas de náutilos. Na figura 39, a espiral laranja é uma espiral áurea. Pode-se tentar mover os pontos A e B parar ajustar o seu formato ao formato da concha. Mas isso não é possível**.** Para se obter melhores aproximações do formato da concha, é necessário usar fatores de crescimento *b* diferentes daquele que define uma espiral áurea.

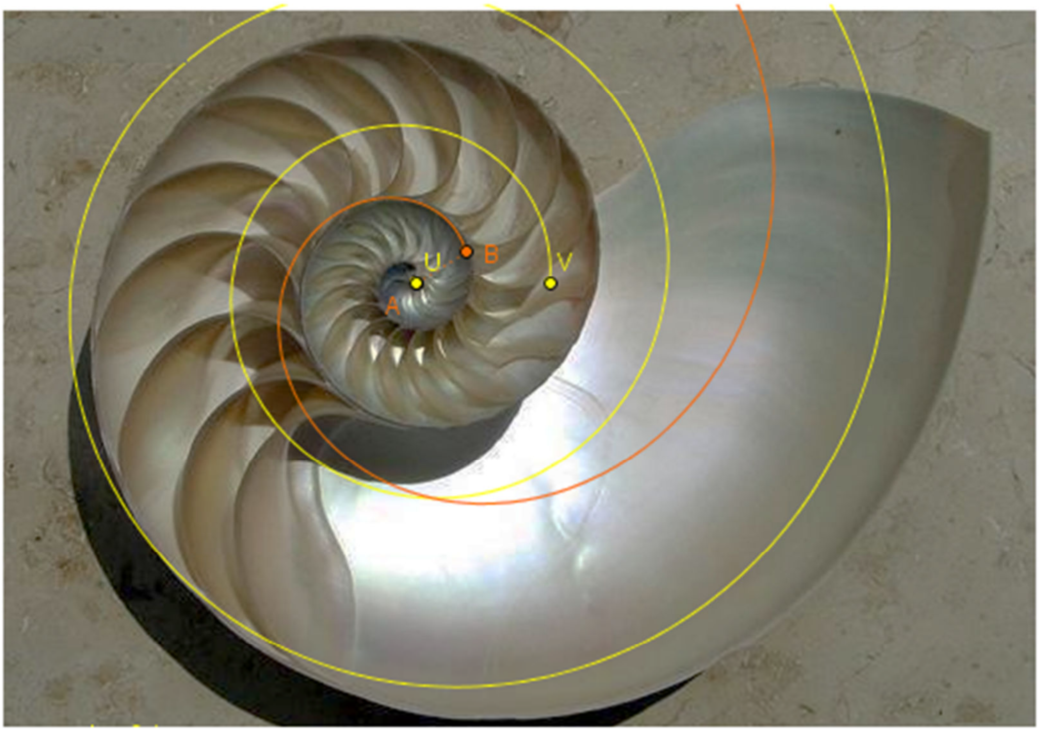


Figura 39: Concha de Náutilo e a Espiral Áurea (feita com auxílio do Geogebra). Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

.

4. ASPECTOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS DO NÚMERO DE OURO

O número de ouro atrai a atenção de muitos não só por fazer parte de diversos elementos da natureza, arquitetura, pinturas e outras aplicações. Esse número apresenta propriedades matemáticas bastante curiosas, fazendo com que se torne um número ainda mais interessante.

4.1 Média e Extrema Razão

Segundo o geômetra Euclides, um segmento de reta (parte da reta compreendida entre dois de seus pontos que são chamados extremos) está dividido em média e extrema razão se a razão entre o menor e maior dos segmentos for igual à razão entre o maior e o segmento todo (onde razão é uma relação de duas grandezas de um mesmo tipo).

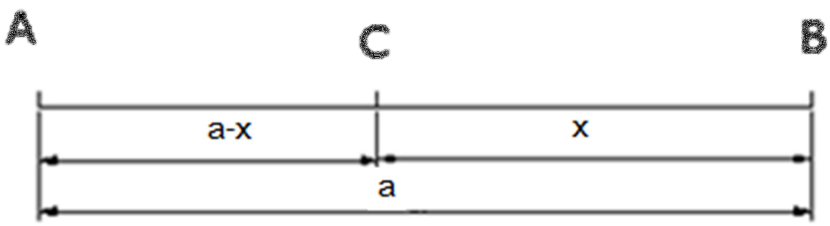


Figura 40: Ponto C Dividindo o Segmento AB em Média e Extrema Razão.

A construção da razão áurea equivale à resolução de uma equação quadrática. Observando a figura 40, pela propriedade da razão áurea tem-se que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

.

Multiplicando médios e extremos tem-se a equação:

$$x^2 = a^2 - ax,$$

que é uma equação de segundo grau, cuja raiz positiva é

$$, \quad x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Logo,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

que é o número de ouro.

Provavelmente os pitagóricos utilizaram algum processo geométrico para descobrir a construção da razão áurea. A forma de resolução geométrica dessa proporção encontrada no livro Os Elementos de Euclides, mostra que, dado um segmento AB, constrói-se o quadrado ABA'B' e em seguida, marca-se o ponto médio M de AA'. Prolonga-se o segmento AA' e constrói-se a circunferência com centro em M e raio MB'. Marca-se o ponto C que é a interseção da circunferência com a semirreta AA' e constrói-se o quadrado de lado A'C. O prolongamento do lado DD' determina o ponto X em AB que divide o segmento na razão desejada.

.

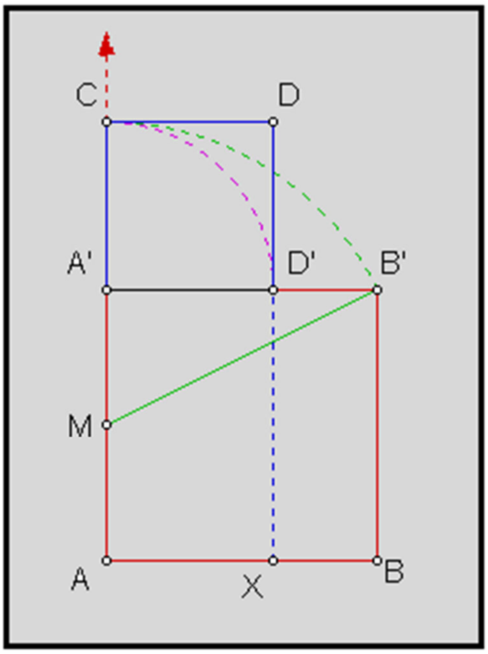


Figura 41: Construção geométrica do Segmento Áureo

A justificativa desta construção é baseada na aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo MA'B'. Fazendo AB = a e MC = d e aplicando o Teorema de Pitágoras tem-se: (observando que MC=MB')

$$d^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$d = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

Daí obtém-se:

$$A'C = \frac{\sqrt{5}\,a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Fazendo, a=1:

$$A'C = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = AX$$

.

Assim,

$$XB = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Portanto,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

que é o número de ouro.

4.2 Propriedades do Número de Ouro

Para encontrar o valor para o número de ouro (Φ,) toma-se o segmento *CB* = *x* e *AC* = *1* (figura 40). Desta forma, usando a definição de razão extrema e média, tem-se:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \quad \Rightarrow \; x^2\text{-}x\text{-}1=0.$$

As duas soluções para a equação são:

$$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots \text{ e } x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6180339887\ldots$$

A solução positiva desta equação é a Razão Áurea, denominada por □ e a solução negativa será denominada por φ.

Agora observe que elevando □ ao quadrado temos □ ^{2} = 2,6180339887... e o seu inverso □ $^{-1}$ = 0,6180339887..., ou seja, o número de ouro tem as propriedades de produzir seu quadrado somente somando 1 e o seu recíproco subtraindo 1. Ou seja:

□ ^{2} = □ +1

e

.

$$\square^{-1} = \square - 1.$$

Usando as propriedades das raízes da equação quadrática tem-se o produto e a soma das raízes, então:

$$x' \cdot x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

ou seja, $\square . \varphi = -1$.

Daí tem-se que $-\varphi$ é inverso de □ e também que:

$$x' + x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

ou seja, $\square + \varphi = 1$.

O Número de Ouro possui ainda outras propriedades curiosas:

a) Somando-se duas potências inteiras consecutivas de □ tem-se como resultado a próxima potência de □. Como $\square = 1 + \square^{-1}$, então $\square^2 = 1 + \square$. Daí segue-se:

$\square + \square^2 = \square . (1 + \square) = \square . \square^2 = \square^3$;
$\square^2 + \square^3 = \square^2 . (1 + \square) = \square^2 . \square^2 = \square^4$;
$\square^3 + \square^4 = \square^3 . (1 + \square) = \square^3 . \square^2 = \square^5$;...;
$\square^n + \square^{n+1} = \square^n . (1 + \square) = \square^n . \square^2 = \square^{n+2}$
Portanto, $\square^n + \square^{n+1} = \square^{n+2}$

b) O mesmo acontece com as potências de expoente inteiro negativo. Como
$\square = 1 + \square^{-1}$, segue-se:

$\square^{-2} + \square^{-1} = \square^{-1} . (1 + \square^{-1}) = \square^{-1} . \square = \square^0$;

$\square^{-3} + \square^{-2} = \square^{-2} . (1 + \square^{-1}) = \square^{-2} . \square = \square^{-1}$;

$\square^{-4} + \square^{-3} = \square^{-3} . (1 + \square^{-1}) = \square^{-3} . \square = \square^{-2}$;...;

.

$\square^{n} + \square^{n+1} = \square^{n+1} \,.\, (1+ \square^{-1}) = \square^{n+1} \,.\, \square = \square^{n+2}$

Portanto, $\square^{n} + \square^{n+1} = \square^{n+2}$

c) A soma de todas as potências com expoentes inteiros negativos e base □ produz o próprio □. Considerando n □ N, onde N é o conjunto dos números naturais incluindo o zero, tem-se:

$(\square^{-1}+\square^{-2}) + (\square^{-3}+\square^{-4}) + (\square^{-5}+\square^{-6}) + \ldots$, de onde,

$=\square^{0}+\square^{-2}+\square^{-4}+\square^{-6}+\ldots+\square^{-2n}+ \ldots = 1 + \square^{-2}.(\square^{0}+\square^{-2}+\square^{-4}+\ldots).$

Substituindo a expressão $\square^{0}+\square^{-2}+\square^{-4}+\ldots$ pela letra k, obtemos:

$$k=1+ \phi^{2}k \;\Rightarrow\; k-1=\phi^{2}k \;\Rightarrow \phi^{2} \,.\, \frac{k}{k-1} = 1 \;\Rightarrow\; \phi^{2} = \frac{k-1}{k} \;\Rightarrow\; \phi^{2} = 1- \frac{1}{k} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi^{2} = \phi^{2} + \phi^{1} - \frac{1}{k} \;\Rightarrow\; \phi^{1} = \frac{1}{k} \;\Rightarrow\; k=\phi$$

Sendo $\square^{0} + \square^{-2} + \square^{-4} + \ldots = k = \square$, tem-se:

$(\square^{-1} + \square^{-2}) + (\square^{-3} + \square^{-4}) + (\square^{-5} + \square^{-6}) +\ldots =$

$= \square^{0} + \square^{-2} + \square^{-4} + \square^{-6} + \ldots =$

$= 1 + \square^{-2}(\square^{0} + \square^{-2} + \square^{-4} + \ldots) =$

$= 1 + \square^{-2}. \square =$

$= 1+ \square^{-1} =$

$= \square$

Portanto, $\square^{-1} + \square^{-2} + \square^{-3} + \square^{-4} + \square^{-5} + \square^{-6} + \ldots = \square$

Ou seja, a soma infinita dos termos de uma Progressão Geométrica de razão $\square^{-1}$ é □.

.

d) Considerando-se a sequencia crescente das potências inteiras positivas do número de ouro tem-se como resultado outra sequência cujos coeficientes do termo irracional $\sqrt{5}$ formam a sequência de Fibonacci (Gulberg,1997).

$$□ = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

$$□^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$$

$$□^3 = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}+4)$$

$$□^4 = \frac{1}{2}(3\sqrt{5}+7)$$

$$□^5 = \frac{1}{2}(5\sqrt{5}+11)$$

$$□^6 = \frac{1}{2}(8\sqrt{5}+18)$$

$$□^7 = \frac{1}{2}(13\sqrt{5}+29)$$

$$□^8 = \frac{1}{2}(21\sqrt{5}+47)$$

$$□^9 = \frac{1}{2}(34\sqrt{5}+76)$$

4.2.1 Outras Aplicações Matemáticas do Número de Ouro

Pode-se também encontrar o número de ouro determinando o valor da expressão $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$. Para determinar o valor desta expressão considere que o seu valor é igual a *x* (x é um número real, pois a expressão com radicais indica que x é o limite de uma sequência positiva crescente e limitada, portanto, convergente).

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, obtém-se:

$$x^2 = 1 \quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$$

Substituindo $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ por *x* temos a equação:

$$x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Mas esta é exatamente a equação que define o número de ouro, portanto, conclui-se que como $x > 1$, o valor de *x* é igual a □.

.

Outra maneira de representar o número , desta vez envolvendo fração, é através de fração contínua. Considere a expressão:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

Denotando o seu valor por *x*, tem-se:

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

Nota-se que o denominador da segunda parcela é o próprio *x*, portanto:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Ao multiplicar os dois membros por x, obtêm-se:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Novamente é encontrada a equação que define o número de ouro. Logo, como a fração contínua é maior do que 1, ela é igual a .

4.3 Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

No Livro Líber Abacci de Fibonacci, é apresentado no capítulo 12, De solutionibus multarum positarum questionum quas erraticas appellamus (A solução de problemas diversos), o problema dos pares de coelhos que já foi citado neste trabalho, no capítulo 1. Foi visto também que a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci tende ao número de ouro quando n vai para o infinito. A seguir, tem-se a justificativa de tal fato.

.

Proposição: A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci tende ao número de ouro quando n vai para o infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Demonstração:

Considere a sequência $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ com n>1 em que F_n são termos da sequência de Fibonacci.

Teorema: Tem-se que r_n, com $n \geq 1$, é dada recursivamente por:

$$r_1 = 1 \text{ e } r_n = \frac{1}{F_{n-1}} + 1,\ n \geq 2$$

Demonstração: A partir da sequência anterior, dada por:

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

lembrando que: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ segue-se:

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{F_{n-1}}$$

Por meio da relação anterior, nota-se que o limite r da sequência r_n, caso exista, é solução da equação $r^2 - r - 1 = 0$, que tem uma única raiz positiva.

De fato, do Teorema anterior sabe-se que $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ logo,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r_{n-1}} + 1\right)$$ ou seja,

$r = \frac{1}{r} + 1$, em que $r^2 + r + 1 = 0$.

.

Como $r_n \geq 0$, para todo n, conclui-se que:

$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618...

Como a sequência r_n é convergente, então seu limite é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.4 Triângulo Áureo

Um triângulo é dito áureo quando é um triângulo isósceles (triângulo que possui dois lados com mesma medida) no qual a divisão do comprimento de um dos lados iguais pelo da base é o número de ouro. Os ângulos de um triângulo áureo medem 36°, 72° e 72°.

Demonstração:

A razão do raio do círculo circunscrito de um decágono regular para um dos lados desse decágono é a razão áurea (fato este demonstrado no subcapítulo 4.7).

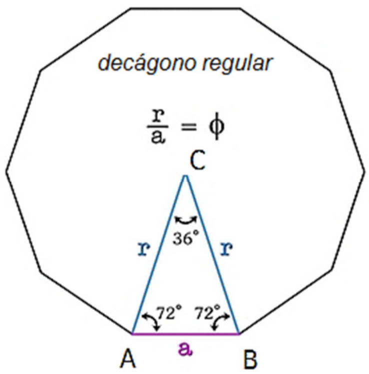


Figura 42: Decágono Regular e o Triângulo Áureo ABC

Observando-se a figura 42, vê-se que o ângulo C mede 36°, pois como a figura é dividida em 10 triângulos congruentes e a soma dos ângulos centrais é 360°, tem-se que cada um mede 36°. Observa-se também que o triângulo ABC é isósceles, logo os ângulos da base medem 72° cada.

.

Traçando-se uma bissetriz num de seus dois ângulos de 72°, surge um novo triângulo, semelhante ao maior, e repetindo a operação, isso acontece infinitas vezes e esta mesma bissetriz divide o lado oposto em média e extrema razão. Vale ressaltar que dois triângulos são semelhantes se os três ângulos são ordenadamente congruentes e se os lados homólogos são proporcionais.

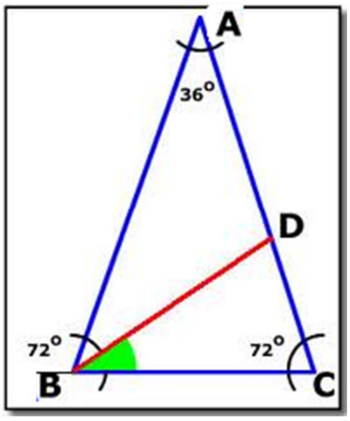


Figura 43: Triângulo Áureo

Considere o triângulo ABC da figura 43, se tem que AB=AC. Seja D a interseção da bissetriz do ângulo B com o lado AC. O ponto D divide o segmento AC em média e extrema razão.

Demonstração:

Sejam AB=AC=a e BC=b. Se BD é bissetriz do ângulo B = 72°, então se obtêm dois novos triângulos isósceles, ΔABD e ΔBDC, este por sua vez é semelhante ao ΔABC.

Do ΔBDC (isósceles) temos BD=AD=b, logo AC=a=AD+DC ⇒DC=AC-DC ⇒ DC=a-b.

Da semelhança entre os triângulos ABD e BDC tem-se:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \quad \Rightarrow$$

.

$$b^2 = a^2 - ab \Rightarrow$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{b}{a}$$

Fazendo $m = \frac{b}{a}$, obtém-se $m^2 + m - 1 = 0$. De onde tem-se que:

$$m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Conclui-se então que o ponto D divide o segmento AC em média e extrema razão.

4.5 Retângulo Áureo

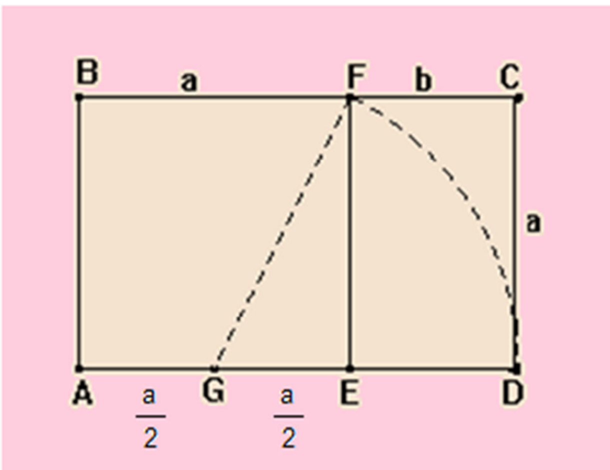


Figura 44: Retângulo Áureo ABCD

.

Em geometria, o retângulo de ouro surge do processo de divisão em média e extrema razão, de Euclides. Ele é assim chamado porque ao dividir-se a base desse retângulo pela sua altura, obtêm-se o número de ouro.

Qualquer retângulo ABCD, como o da figura 44 é áureo se satisfizer a propriedade seguinte: se dele estabelecer um quadrado, como ABFE, o retângulo restante CDEF, será semelhante ao retângulo original. Pode-se explicar esta semelhança pela relação:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Multiplicando os dois lados da equação por (a.b) tem-se:

$$\frac{(a+b).a.b}{a} = \frac{a\cdot.a\cdot.b}{b}$$

$$a.b + b^2 = a^2$$

$$b^2 = a.(a-b)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Pela relação anteriormente descrita, nota-se que ao destacar o retângulo menor da figura 44 e dele estabelecer um quadrado, como CIFJ, como mostrado na figura 45, este será semelhante ao retângulo CDEF. Vê-se então que a semelhança se mantém:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

.

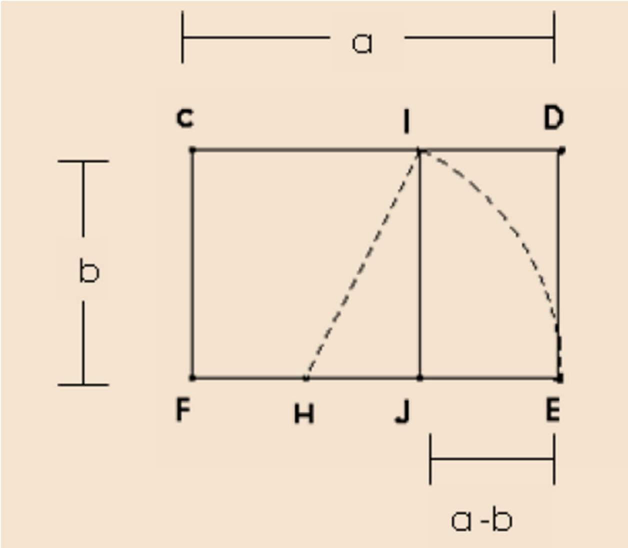


Figura 45: Retângulo Áureo CDEF

4.6 O Pentágono Regular e o Número de Ouro

O número de ouro está presente em alguns polígonos regulares. Considerando-se um pentágono regular, a razão entre a diagonal D e o lado L do pentágono é o número de ouro.

Para demonstrar essa razão é necessário mostrar dois resultados (fatos) a seguir descritos:

Fato 1- O triângulo ABE’ e ACD são semelhantes.

Para provar que os triângulos ABE´ e ACD são semelhantes, será provado que seus ângulos são iguais. Para isso é traçada uma sequência de figuras:

.

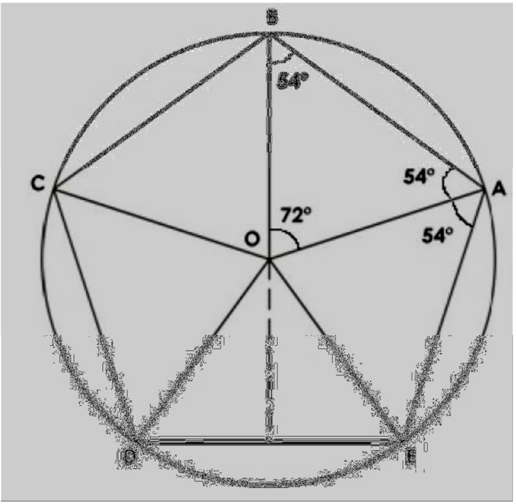


Figura 46: Pentágono Regular Inscrito na Circunferência

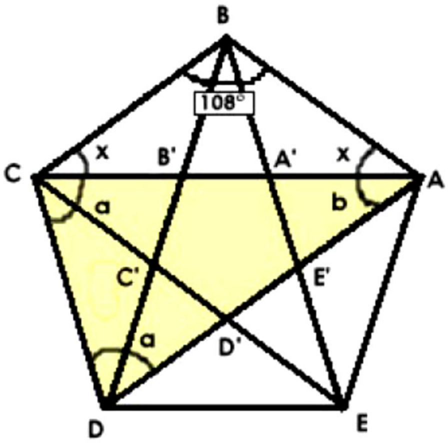


Figura 47: Pentágono Regular e suas Diagonais.

Primeiro, calcula-se os ângulos a, b, x marcados na figura 47:

(I) x+x+108°=180°
x=36°

(II) a=108°-36°
a= 72°

(III) b+72°+72°=180°
b= 36°

.

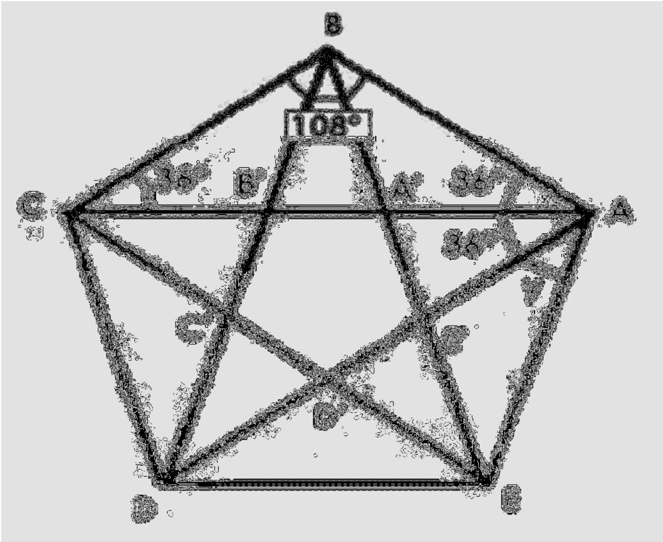


Figura 48: Pentágonos Regulares ABCDE e A'B'C'D'E'

Calculando o ângulo Y marcado na figura 48 é visto que: y+36°+36°=108°, logo y= 36°. Este é o ângulo entre qualquer um dos lados e a diagonal.

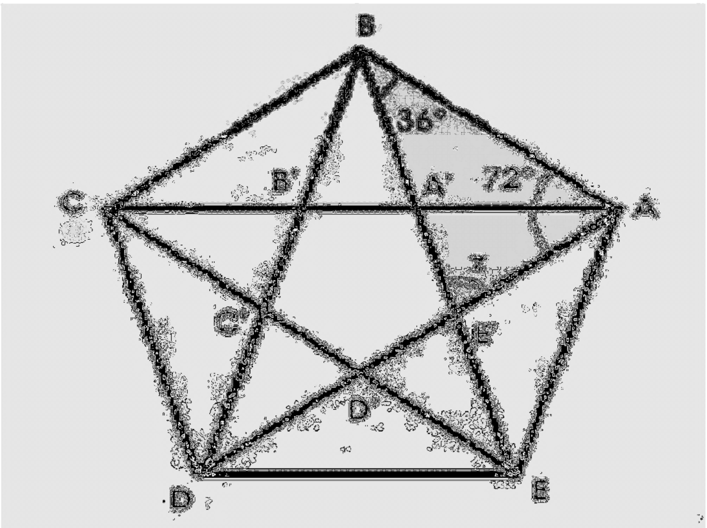


Figura 49: Pentágono ABCDE e Triângulo ABE'

Calculando o ângulo Z marcado na figura 49 tem-se: Z = 180 – 72 – 36 = 72°.

.

Constata-se que os triângulos ABE’ e ACD são semelhantes, pois os três ângulos são congruentes.

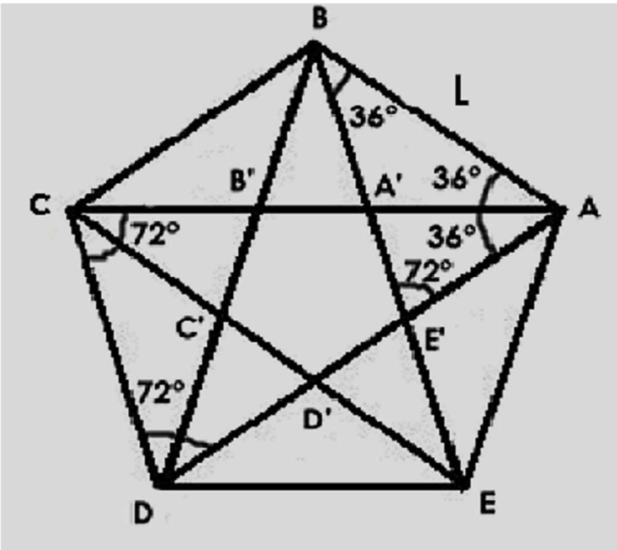


Figura 50: Pentágono ABCDE e os Triângulos Semelhantes ABE’ e ACD

Fato 2- DE’= AB = L (lado do pentágono)

Já foi mostrado que o triângulo ABE’ é isósceles e é de fácil constatação que o triângulo BDE’ também é isósceles.

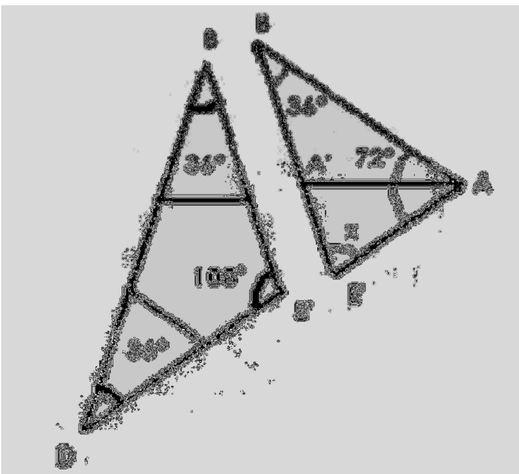


Figura 51: Triângulos Isósceles BDE’ e ABE’.

.

Logo DE'= BE'= AB = L.

Agora é possível mostrar que a razão entre a diagonal D e o lado L do pentágono é o número de ouro.

Do resultado 1, obtêm-se a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AE'}$$

Pelo resultado 2 é observado que: AB = CD = L, AC = D, AE´= AD – DE´= D – L. Ou seja,

$$\frac{D}{L} = \frac{L}{D-L}$$

Consequentemente:

$$L^2 = D^2 - DL.$$

Fazendo:

$$\frac{D}{L} = x$$

obtêm-se:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

A raiz positiva desta equação é o número

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,16180399...$$

que é o número de ouro.

.

4.7 Decágono Regular e o Número de Ouro

Decágono é um polígono de dez vértices, dez lados e dez ângulos. Um fato de conhecimento dos antigos geômetras era que a razão do raio do círculo circunscrito de um decágono regular para um dos lados desse decágono é a razão áurea.

Observe a seguir o cálculo do lado de um decágono regular em função do raio da circunferência circunscrita ao polígono.

Seja AB o lado de um decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R.

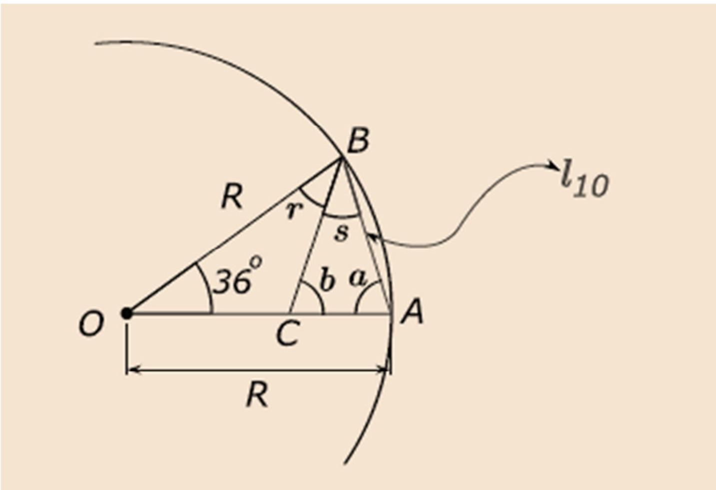


Figura 52: Triângulo ABO onde Segmento AB é Lado do Decágono Regular Inscrito numa Circunferência de Centro O e Raio R

O ângulo central AÔB é tal que:

$$m(A\hat{O}B) = \frac{360^0}{10} = 36^0$$

No triângulo isósceles AÔB, o ângulo A e o ângulo B de medidas a e (r + s) valem cada um:

.

$$\frac{180^0 - 36^0}{2} = 72^0$$

Traçando a bissetriz BC do ângulo B, temos:

$$r = s = \frac{72^0}{2} = 36^0$$

então, o triângulo OBC é isósceles e o segmento OC=BC .

No Δ ABC temos que b = 180° − 36° − 72° = 72° ⇒ ABC é isósceles ⇒

AB=BC=OC=L_{10}

Usando o Teorema da bissetriz interna que diz que em qualquer triângulo a bissetriz de um triângulo interno estabelece no seu lado oposto os dois segmentos proporcionais aos lados desse mesmo ângulo, tem-se:

$$\Rightarrow \quad \frac{OC}{OB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$$

$$\Rightarrow l_{10}^2 = R^2 - R \cdot l_{10} \Rightarrow l_{10} = (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{R}{2}$$

Portanto a razão entre R e l_{10} é o número de ouro.

.

4.8 Icosaedro Regular e o Número de Ouro

Como foi visto, o retângulo de ouro e o pentágono são dois objetos geométricos onde aparece o número de ouro. Estes dois objetos estão também presentes de uma forma surpreendente no icosaedro regular. O icosaedro é um poliedro regular com 20 faces, cada uma das quais é um triângulo equilátero.

Se três retângulos de ouro se intersectam simetricamente, e cada um deles, perpendicularmente aos outros dois, os seus 12 vértices formam os vértices de um icosaedro regular.

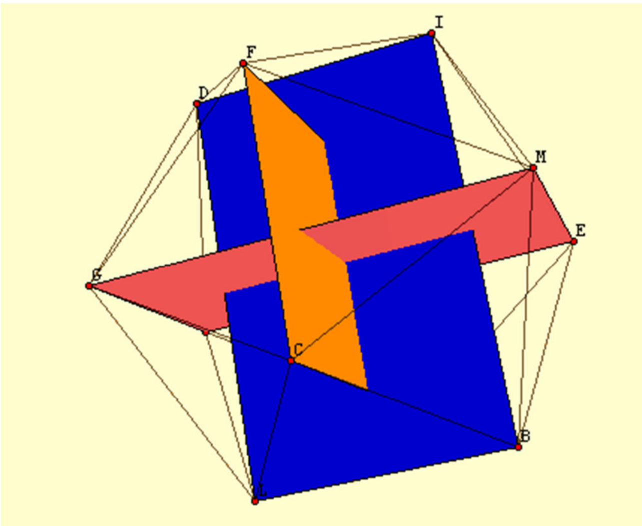


Figura 53: Três Retângulos Áureos Inscritos no Icosaedro Regular, Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>

As seguintes coordenadas cartesianas definem os vértices de um icosaedro centrado na origem:

(0, ±1, ± □)

(±1, ± □, 0)

(±□, 0, ±1)

Onde □ = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão áurea.

.

5. O NÚMERO DE OURO E ALGUMAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

No processo de ensino-aprendizagem, uma questão relevante, que merece atenção, é a relação entre a teoria e a prática. O número de ouro é um assunto complexo, que pode ser vistos em vários conteúdos da educação básica e de diversos aspectos, podendo ser tratado de forma dinâmica, aumentando o interesse dos alunos pelo conteúdo abordado.

5.1 O Surgimento dos Números Irracionais

Número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são números reais, mas não racionais. O conjunto dos números irracionais é representado pelo símbolo $\mathbb{I}$.

Existem dois tipos de números irracionais, os números reais algébricos irracionais e os números reais transcendentes.

Os números reais algébricos irracionais são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Exemplos:

$$\sqrt{5}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Os primeiros vestígios do conceito de número irracional remontam ao conceito de incomensurabilidade. Dois segmentos são comensuráveis quando existe uma unidade comum na qual podem ser medidos de forma exata.

A primeira descoberta de um número irracional é comumente atribuída a Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras. Ele teria criado uma demonstração de que a raiz de 2 é um número irracional. Contudo, Pitágoras considerava que a raiz de 2 "desacreditava" a perfeição dos números, e dessa forma, não poderia existir. Mas ele não conseguiu contestar os argumentos de Hipaso com a lógica, e a lenda diz que Pitágoras condenou seu seguidor ao afogamento.

.

A partir de então os números irracionais entraram no anonimato e foi só com Eudoxo de Cnido que eles voltaram a ser estudados pelos gregos. O décimo livro da série Os elementos de Euclides é dedicado à classificação de números irracionais.

Somente em 1872 o matemático alemão Dedekind (de 1831 a 1916) fez entrar na Aritmética, em termos rigorosos, os números irracionais, os quais a geometria sugerira há mais de vinte séculos.

Dentre os números irracionais, podemos destacar o número de ouro, que possui diversas versões a respeito do seu surgimento, como foi destacado no capítulo 1.

5.2 Segmentos e Construções Geométricas

Na geometria, um segmento de reta é o conjunto dos pontos da reta que ficam entre dois outros pontos chamados de extremos.

A palavra segmento quer dizer parte, pedaço. Vem do latim "segmentum", que significa "corte". Na linguagem comum costuma-se dizer que segmento é uma parte da reta que tem começo e fim.

Figura 54: Segmento de reta AB

5.2.1 Construindo o Segmento Áureo por Meio de Régua e Compasso

Segmento áureo é o segmento resultante da divisão de outro segmento AB em média e extrema razão.

.

Dado um segmento AB qualquer, obtém-se o ponto médio de AB da seguinte forma:

1. Com centro do compasso em A e em B traçam-se circunferências de mesmo raio que se interceptam como mostra a figura 55, ligando os pontos onde os arcos se interceptam se obtém um novo segmento cuja interseção com o segmento AB é o ponto médio deste.

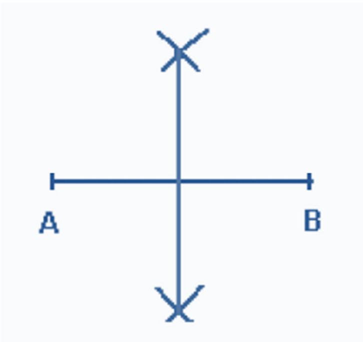


Figura 55: Divisão do Segmento AB em Duas Partes Congruentes.

2. Usando régua e compasso, se esboça uma reta perpendicular a AB, pelo ponto B com metade do comprimento de AB;

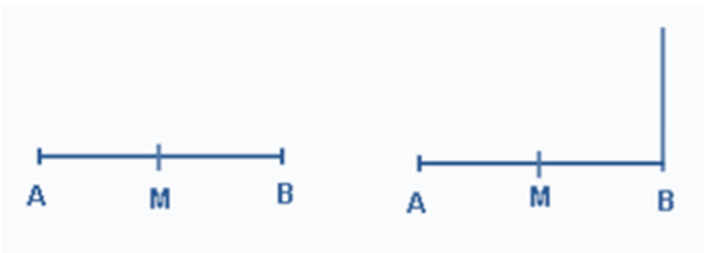


Figura 56: Construção de Reta Perpendicular no Ponto B do Segmento AB.

3. Com o compasso traça-se uma circunferência com centro em B e raio BM que intercepta a perpendicular no ponto C.

.

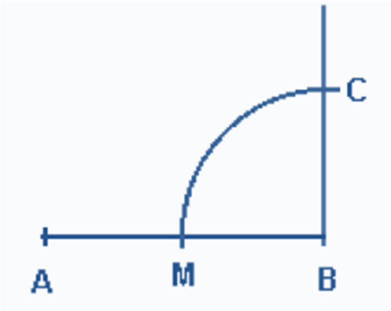


Figura 57: Traço da Circunferência de Centro B e Raio BM.

4. O novo segmento BC é metade do segmento AB e perpendicular ao mesmo. Unindo os pontos A e C obtemos um triângulo ABC;

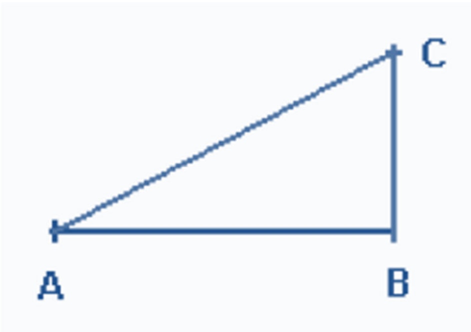


Figura 58: Construção do Triângulo ABC

5. Com o centro do compasso em C abrindo até B, marca-se um novo ponto (D) em AC (hipotenusa do triângulo);

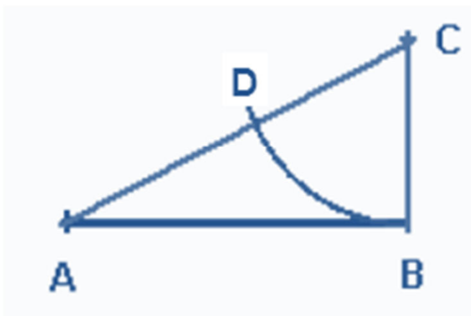


Figura 59: Marcação do Ponto D sobre Hipotenusa AC

.

6. Com o centro do compasso no vértice A, abrindo até D marca-se em AB o ponto E. Este é o ponto que divide o segmento AB em média e extrema razão.

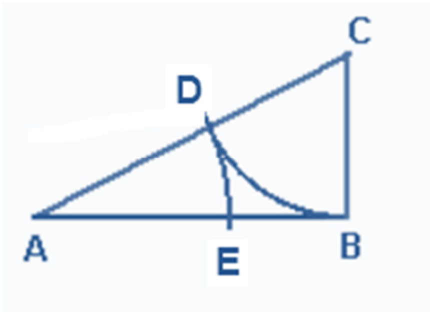


Figura 60: Marcação do Ponto E que divide o segmento AB em Média e Extrema Razão.

Verificação:

De fato, sendo AB=1, temos:

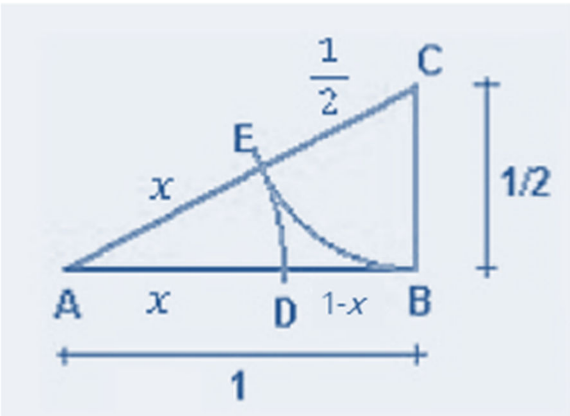


Figura 61: Triângulo ABC de Catetos de 1 cm e ½ cm.

Como o triângulo ABC é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras obtemos:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

.

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Cuja solução positiva é $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Daí obtém-se que a razão entre os segmentos AD e DB é o número de ouro.

5.3 Razões e Proporções

Em matemática, razão é uma relação entre duas grandezas de um mesmo tipo expressa geralmente como "*a* para *b*", a: b ou *a*/*b*, e algumas vezes é representada aritmeticamente como um quociente adimensional das duas quantidades que indica quantas vezes o primeiro número contém o segundo.

5.3.1 Notação e Terminologia

A razão entre os dois números A e B pode ser expressa como:

- A razão de A para B
- A está para B
- A: B
- Um número racional que é o quociente da divisão de A por B

Os números A e B são algumas vezes chamados de termos, sendo A o antecedente e B o consequente.

.

5.3.2.Razão de Duas Grandezas

A razão de duas ou mais grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que expressam as suas medidas numa mesma unidade. Grandezas são características dos objetos possíveis de serem comparadas e cujas medidas podem ser adicionadas, subtraídas ou divididas uma pela outra.

Assim, o conceito de razão nos permite fazer comparações de grandezas entre dois números.

5.3.3 Proporção

A igualdade entre razões denomina-se proporção.

Os números a, b, c e d, todos diferentes de zero, formam nesta ordem, uma proporção se, e somente se, a razão a : b for igual à razão c : d.

Indicamos esta proporção por:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Os termos a e d são chamados de extremos e os termos b e c de meios.

5.3.4 Proporção entre Segmentos

Dois segmentos são proporcionais a outros dois segmentos se a razão dos dois primeiros segmentos é igual à razão dos outros dois.

Exemplo: $\frac{AB}{CA} = \frac{A'B'}{C'D'}$

.

5.3.5 Razão Áurea

A razão áurea é definida algebricamente como:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi .$$

A partir da definição obtemos o seguinte resultado (positivo):

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618003398875$$

que é o número de ouro.

5.4 Função Quadrática

Função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, é qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais constantes e $a \neq 0$.

São exemplos de funções quadráticas:

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde a = 3, b = - 4 e c = 1

2. $f(x) = x^2 -1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1

3. $f(x) = x^2 - x - 1$, onde a = 1, b = -1 e c = -1

5.4.1 Zeros de uma Função Quadrática

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c , a \neq 0,$$

.

os números reais x tais que f(x) = 0.

Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais podem ser obtidas utilizando-se a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - x - 1$, onde a = 1, b = -1 e c = -1, ao calcular suas raízes, tem-se que:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-1)}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

onde a solução positiva $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro.

5.4.2 Gráfico da Função Quadrática

A parábola representa o gráfico da função quadrática. Mas este gráfico pode ter algumas variações.

- **Concavidade**

A concavidade é a abertura da parábola. O sentido da concavidade depende do coeficiente *a*, se este for superior a 0, ou seja, positivo, ela é voltada para cima, caso seja negativo ela é voltada para baixo.

.

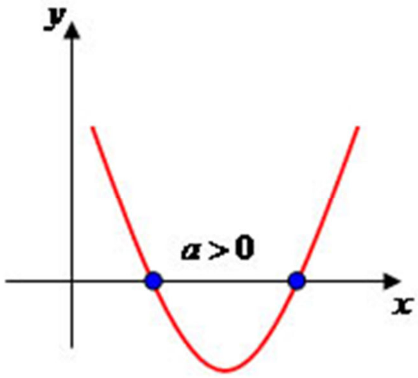


Gráfico 2: Representação da Concavidade de Parábola Voltada para Cima.

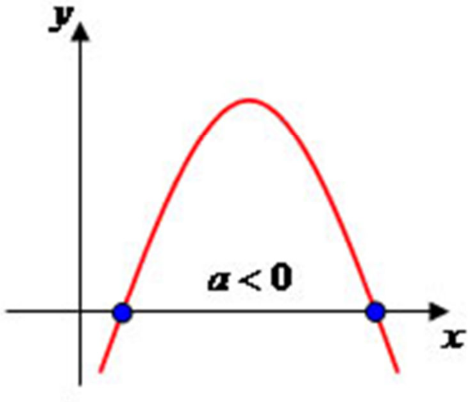


Gráfico 3: Representação da Concavidade de Parábola Voltada para Baixo.

- **Intersecção da parábola com os eixos x**

Sabendo-se que $\Delta=b^2-4ac$, o estudo do sinal de Δ determina a intersecção com o eixo dos x.

Esta intersecção se dá quando o f(x)=y=0. Logo, os pontos no eixo x são as raízes da função.

Quando o $\Delta > 0$, existem duas raízes reais distintas e haverá dois pontos de intersecção com o eixo x.

Para $\Delta=0$, a função tem duas raízes reais iguais e tangencia o eixo do x.

.

E finalmente com $\Delta<0$, a função não possui raízes reais e a parábola não tem interseção com o eixo x.

- **Coordenadas do vértice**

O vértice da parábola corresponde ao ponto mais extremo dela. É definido pelas seguintes coordenadas:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Finalmente com as coordenadas do vértice e as regras acima descritas a confecção do gráfico se torna fácil.

Vejamos agora o gráfico da função $f(x)= x^2-x-1$

1° passo: Concavidade para cima, pois $a>0$.

2° passo: Possui duas raízes reais distintas pois, $\Delta> 0$.

3° passo: Suas raízes são: 1-□ e □.

.

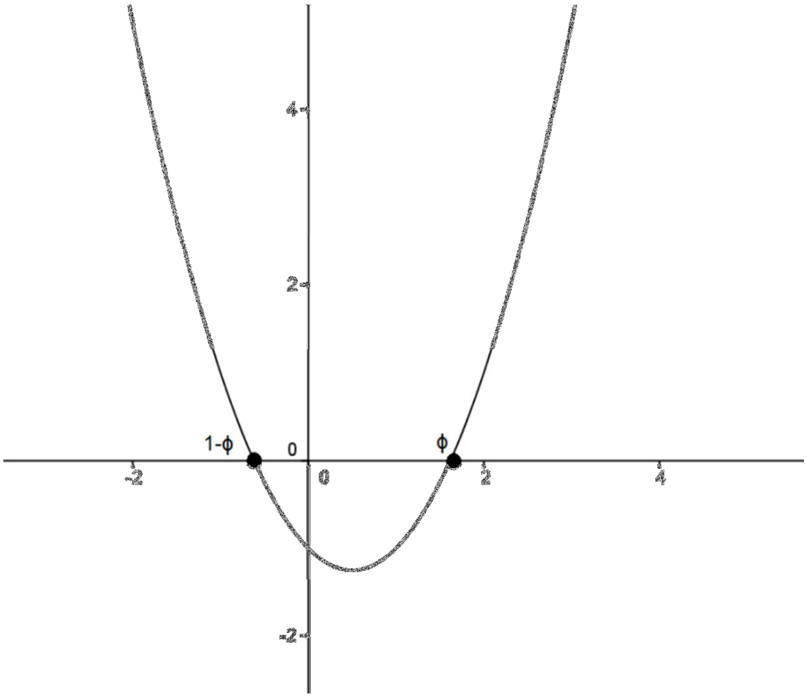


Gráfico 4: Função f(x)= x^2-x-1

5.5 Triângulos

Triângulo é uma a figura geométrica plana que ocupa o espaço interno limitado por três linhas retas que concorrem, duas a duas, em três pontos diferentes formando três lados e três ângulos internos que somam 180°. Podemos também definir triângulo como sendo a união de três pontos não colineares (pertencente a um plano, em decorrência da definição dos mesmos), por três segmentos de reta.

O triângulo é o único polígono que não possui diagonal e cada um de seus ângulos externos é suplementar do ângulo interno adjacente.

Os triângulos mais simples são classificados de acordo com os limites das proporções relativas de seus lados e de seus ângulos internos:

.

- Um triângulo equilátero possui todos os lados congruentes, é também equiângulo, todos os seus ângulos internos são congruentes sendo, portanto, classificado como um polígono regular.

- Um triângulo isósceles possui pelo menos dois lados com mesma medida e dois ângulos congruentes. Num triângulo isósceles, o ângulo formado pelos lados congruentes é chamado ângulo do vértice. Os demais ângulos denominam-se ângulos da base e são congruentes.

- Em um triângulo escaleno, as medidas dos três lados são diferentes. Os ângulos internos de um triângulo escaleno também possuem medidas diferentes.

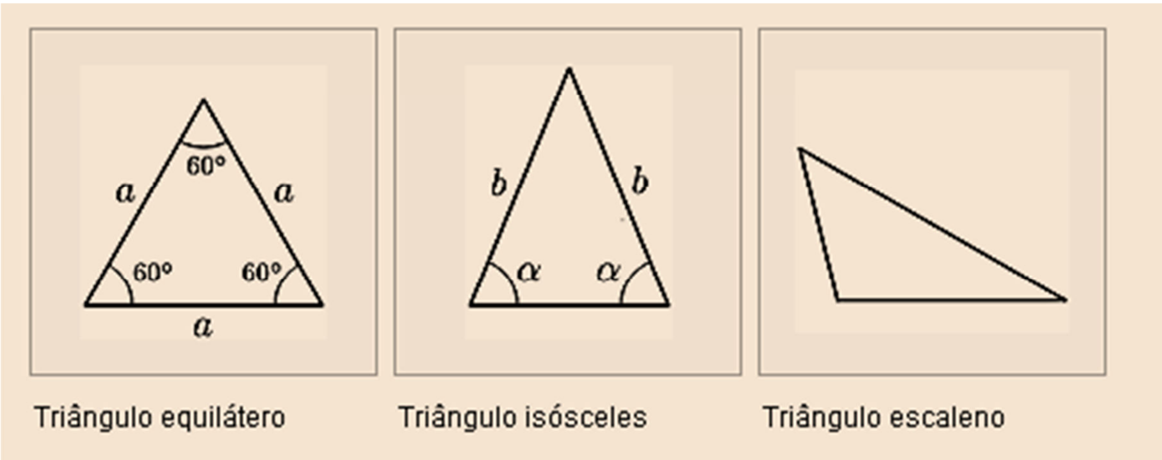


Figura 62: Tipos de Triângulos

5.5.1 Triângulo Áureo

Um triângulo é dito triângulo de ouro, ou triângulo áureo, quando é um triângulo isósceles no qual a divisão do comprimento de um dos lados iguais pelo da base é o número de ouro. Os ângulos de um triângulo de ouro medem 36°, 72° e 72°.

A partir desta definição, temos o seguinte teorema: Em um triângulo isósceles com ângulos de 72°,72° e 36° , a bissetriz interna de um dos ângulos de 72° divide o lado oposto em média e extrema razão.

.

Demonstração:

Considere o triângulo ABC com tais propriedades, de forma que os ângulos B e C meçam 72°, então temos que AB=AC.

Seja D a bissetriz do ângulo B com o lado AC. Afirma-se que o ponto D divide o lado AC em média e extrema razão.

De fato, sejam AB=AC=a e BC=b. Se BD é bissetriz do ângulo B, então se tem dois novos triângulos isósceles ∆ABD e ∆BDC que por sua vez é semelhante ao ∆ABC, observe que os ângulos internos e correspondentes são respectivamente congruentes.

Do ∆BDC tem-se BD=BC=b. Como o ponto D pertence ao lado AC, então pode-se dizer que AC=AD+DC.

Do ∆ABD tem-se BD=AD=b, portanto AC=a=AD+DC, logo DC=a-b.

Das semelhanças entre os triângulos ABD e BDC tem-se:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

$$b^2 = a^2 - ab$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{b}{a}$$

Fazendo m= $\frac{b}{a}$ obtém-se: $m^2+m-1=0$. Cuja raiz positiva é:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Logo, $\frac{a}{b}$ = □.

Conclui-se então que o ponto D divide o segmento AC em média e extrema razão.

.

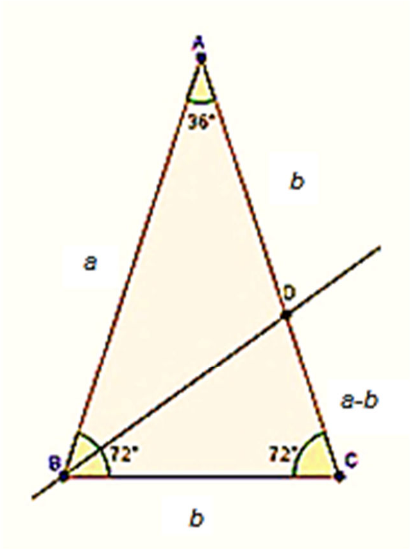


Figura 63: Triângulo Áureo

5.6 Retângulo

Um retângulo é um paralelogramo cujos lados formam ângulos retos entre si e que, por esse motivo, possui dois lados paralelos verticalmente e os outros dois paralelos horizontalmente.

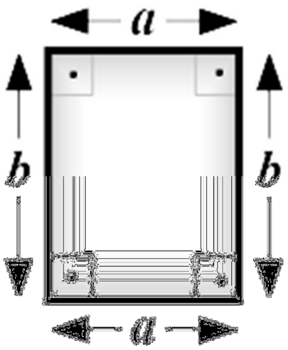


Figura 64: Retângulo

5.6.1 Retângulo Áureo

O retângulo áureo surge do processo de divisão em média e extrema razão, de Euclides. Ele é assim denominado visto que ao dividir-se a base desse retângulo pela

.

sua altura, obtêm-se o número de ouro. Possui a seguinte propriedade: se o dividir em um quadrado e em outro retângulo, o novo retângulo será semelhante ao original.

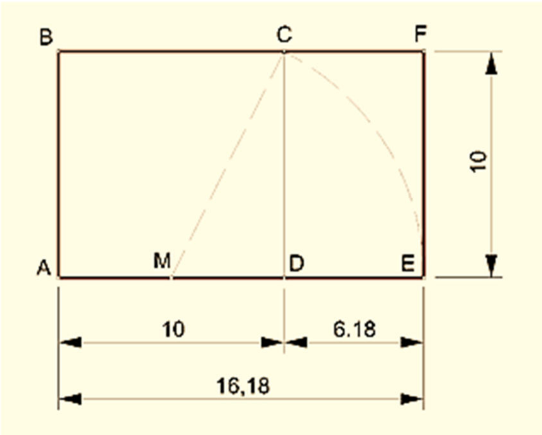


Figura 65: Processo de Construção do Retângulo de Ouro com Medidas.

5.6.2 O Retângulo Áureo e sua Construção

1. Constrói-se um quadrado qualquer ABCD, de tal modo que AB corresponda a sua base. Este quadrado tem lado de medida a.
2. Marca-se o ponto médio M de AB.
3. Traça-se uma reta perpendicular a M, dividindo o quadrado em dois retângulos.
4. Escolhe-se um desses retângulos, nesse caso, diga-se aquele com base AM. Traça-se sua diagonal, passando por M.
5. Constrói-se uma semirreta a partir de M, contendo o segmento AM.
6. Constrói-se uma circunferência com centro em M e raio MD. Nomeia-se de E a interseção da circunferência com a semirreta.
7. Constrói-se um novo retângulo, utilizando os pontos C,B,E como vértices.

.

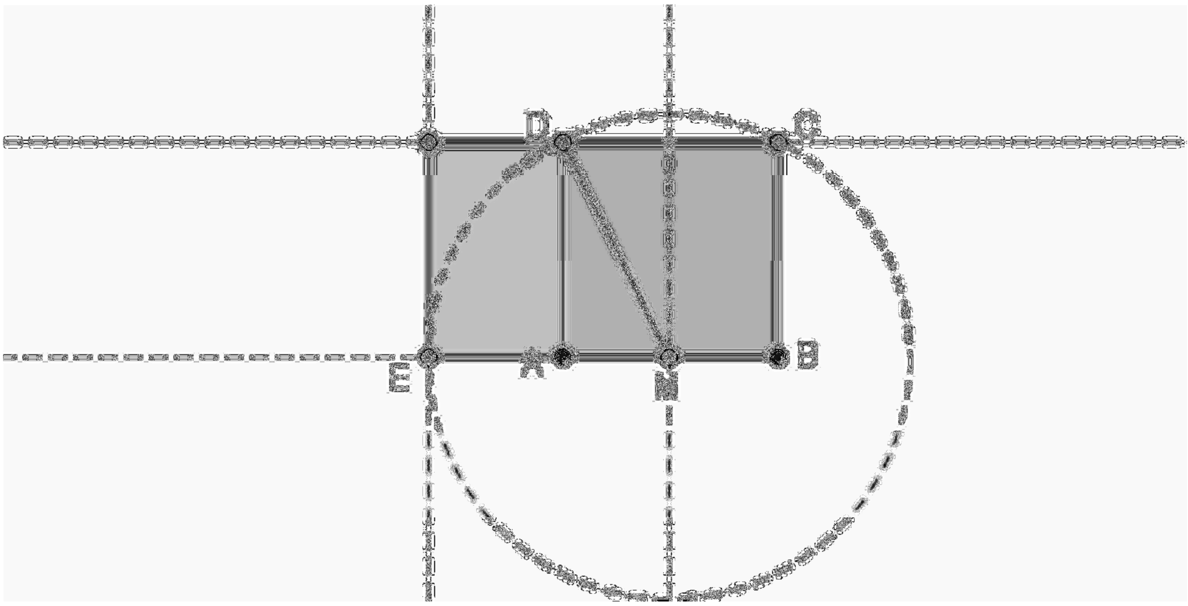


Figura 66: Construção do Retângulo Áureo

5.7 Triângulo Retângulo e Progressões Geométricas

Triângulo retângulo é um triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo que mede 90°. É composto por quatro principais elementos:

- Catetos;
- Hipotenusa;
- Altura relativa à hipotenusa;
- Projeções dos catetos.

.

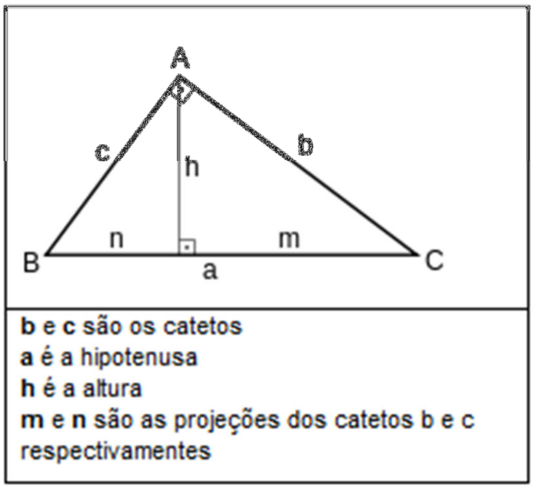


Figura 67: Triângulo Retângulo

Neste triângulo é válido o Teorema de Pitágoras que diz que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Uma progressão geométrica (P.G.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante, chamada de razão da progressão geométrica.

Assim, será verificado que um triângulo retângulo pode ter os lados em progressão geométrica e qual é o valor da razão (q>1) dessa progressão.

Observando-se a figura 68, tem-se o triângulo retângulo ABC de lados x, x.q e $x.q^2$ termos de uma P.G. de razão q >1.

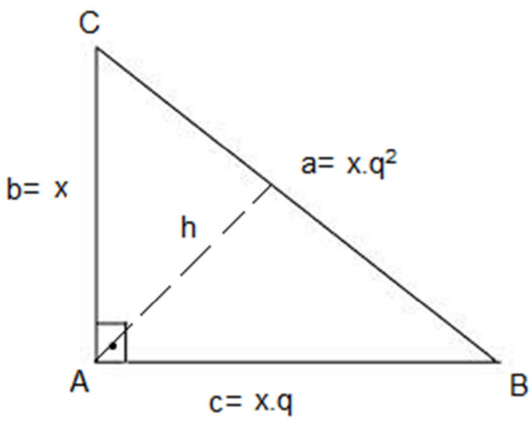


Figura 68: Triângulo Retângulo com lados em P.G.

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se:

.

$$x^2+(x.q)^2=(x.q^2)^2$$

$$x^2+x^2.q^2=x^2.q^4$$

$$q^4-q^2-1=0$$

Resolvendo a equação obtida (biquadrada), tem-se:

$$q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad =\square$$

Ou seja, a razão $q=\sqrt{\square}$.

Agora, veja-se o valor da altura h relativa a hipotenusa.

Uma das relações métricas do triângulo retângulo afirma que o produto entre a hipotenusa e a altura relativa a ela é igual ao produto dos catetos. Logo:

$$ah=bc$$

$$h=bc/a$$

Sendo $b=x$, $c=x.q$ e $a=x.q^2$ tem-se que:

$$h= \frac{x \cdot x \cdot q}{x \cdot q^2} = \frac{x}{q}$$

Portanto, conclui-se que h,b,c,a (elementos do triângulo ABC) são termos de uma P.G de razão q=.$\sqrt{\phi}$.

.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No momento em que foi proposto conhecer um pouco mais sobre o número de ouro, não era conhecido exatamente o tamanho do desafio, visto que o número de ouro é apresentado em muitos contextos.

A sua história é um pouco confusa, não se sabe ao certo quando ocorreu seu surgimento ou sua descoberta, talvez o que torne esse número mais atraente. Pode-se perceber que a razão áurea não é somente uma forma de relacionar a matemática ao mundo real, mas também é a representação da vida através de um número.

Fato interessante são as contestações feitas em torno das situações onde supostamente o número de ouro está presente, trazendo assim um estímulo para a pesquisa em torno do assunto.

Sua ligação com a natureza traz uma interdisciplinaridade para o tema, podendo o mesmo ser trabalhado na Educação Básica por várias disciplinas e de várias formas..

Assim fica a certeza de que na natureza e em muitas situações matemáticas estarão presentes envolvimentos do número de ouro, além das abordadas neste trabalho, visto que o alvo do mesmo não foi analisar o assunto até a exaustão.

.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARTISTAS MATEMÁTICOS, matemáticos artistas. Disponível em < http://www.educ.fc.ul.pt> Acesso em: 15 de janeiro de 2013

2. BOYER, Carl B. História da matemática/Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2.ed. São Paulo: Edgard Blücler,1996.

3. GEOGEBRA, manual e tutorial. Disponível em <http://wiki.geogebra.org:>

4. GULLBERG, Jan. Mathematics from the Birth of Numbers, London 1997.

5. HUNTLEY, H. E. A Divina Proporção - Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática. Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1985.

6. LIMA, Elon Lages. Curso de Análise.Vol.1, 11.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

7. LIVIO, Mario, 1945 – Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente. Tradução Marco Shinobu Matsumura 2ª Edição Rio de Janeiro: Record, 2007.

8. MATEMÁTICA, MÍDIAS DIGITAIS E DIDÁTICA, número de ouro. Disponível em <http://www6.ufrgs.br/espmat/> Acesso em: 12 de fevereiro de 2013

9. O NÚMERO DE OURO, matemática: números e operações. Disponível em <http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html> Acesso em: 03 de janeiro de 2013

10. PRADIANO- Revista Matemática Aplicada à Vida. Número1/2

11. "Proportion" New International Encyclopedia, Vol. 19 2nd ed. (1916) Dodd Mead & Co.

12. "Ratio" The Penny Cyclopedia vol. 19, The Society for the Diffusion of Useful Knowledge (1841) Charles Knight and Co., London.

.

13. RIVERA, Félix ; NEVES, Juarenze; GONÇALVES, Dinei (1986). Traçados em Desenho Geométrico. Rio Grande: editora da Furg.

14. VIANNA, João José Luiz. Elementos de Arithmetica. 15 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1914.

15. WENTWORTH, George; SMIHT, David Eugene; HARPER, Herbert Druery (1922). "Ratio and Proportion" Fundamentals of practical mathematics.