Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UMA TAREFA MATEMÁTICA DE FUNÇÃO AFIM NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO COM O USO DO CARNEIRO HIDRÁULICO

Márcio Lucas de Freitas

Brasília, DF: JUNHO/2024

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UMA TAREFA MATEMÁTICA DE FUNÇÃO AFIM NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO COM O USO DO CARNEIRO HIDRÁULICO

Márcio Lucas de Freitas

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Raquel Carneiro Dörr

Brasília – DF: Junho/2024

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

UMA TAREFA MATEMÁTICA DE FUNÇÃO AFIM NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO COM O USO DO CARNEIRO HIDRÁULICO

por

Márcio Lucas de Freitas

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Brasília, 03 de junho de 2024.

Comissão Examinadora:

Profa. D.ra Raquel Carneiro Dörr, UnB (Orientadora)

Profa. D.ra Regina da Silva Pina Neves, UnB (Membro Interno)

Prof (Membro Externo)

AGRADECIMENTO

A Deus, pela oportunidade que me foi concedida e pelo amparo ao longo da jornada.

À minha esposa, pelo apoio nos momentos difíceis e por toda a generosidade em compartilhar dos meus sonhos.

Aos meus filhos, sem os quais nada poderia ser feito, nem valeria a pena fazer.

Aos amigos, que sempre me deram forças e inspiração para não desistir.

Aos colegas mestrandos, que me incentivaram e apoiaram nos pontos de inflexão, em especial o amigo Paulo Reis.

Aos estudantes do CED Incra 08, que prontamente se dispuseram a ajudar e doar, generosamente, sua juventude tão revigorante.

Aos colegas e direção do CED Incra 08, que além do apoio, me mostraram vale à pena lutar pela educação.

Aos professores Regina da Silva Pina Neves e Rogério César dos Santos, que demonstraram a força que vem da simplicidade e humildade.

À minha orientadora, Raquel Carneiro Dörr, que com firmeza, otimismo e delicadeza, incansavelmente indicou o melhor caminho a seguir.

Se você quer construir um barco, não comece procurando madeira, cortando tábuas ou distribuindo tarefas, mas desperte no coração das pessoas o desejo pelo vasto e infinito mar.

Antoine de Saint-Exupéry

RESUMO

O papel transformador da escola, seja enquanto provedora de conhecimento ou espaço de interação, observação e aprendizado, mantém sua relevância inalterada, e talvez, em tempos pós-pandemia, sua importância seja ainda mais destacada. Esta dissertação de mestrado tem como objetivo geral investigar de que modo uma tarefa matemática na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) sobre o conceito de função afim com o uso do carneiro hidráulico contribui para a aprendizagem. A tarefa matemática vinculou o cálculo do volume de um reservatório à operação de um carneiro hidráulico, um dispositivo para bombear água, por meio de uma função afim. A tarefa matemática, que visava aproximar conhecimentos teóricos à prática da vida cotidiana, foi realizada em uma turma de estudantes do Ensino Médio regular em uma área rural de uma Região Administrativa do Distrito Federal. Como parte da atividade, exibimos o filme "O menino que descobriu o vento", baseado em uma história real que narra a jornada de um jovem aldeão que transforma a vida de sua comunidade por meio da educação. A fundamentação teórica desta dissertação baseou-se em contribuições de autores que investigam tarefas matemáticas no âmbito do Ensino Exploratório de Matemática (EEM). Os resultados obtidos indicam que as tarefas matemáticas vinculadas ao EEM desempenham um papel substancial no estímulo à participação e interação dos estudantes. Simultaneamente, elas despertam o interesse pela pesquisa e exploração da realidade em que vivem, tanto dos alunos quanto dos docentes. Esse enfoque prático e contextualizado não apenas fortalece a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também promove um engajamento mais profundo com o ambiente ao redor, tornando o aprendizado mais relevante e significativo.

Palavras-chave: Tarefas Matemáticas. Ensino Exploratório. Função afim. Carneiro hidráulico.

ABSTRACT

The transformative role of the school, whether as a provider of knowledge or as a space for interaction, observation, and learning, remains unchanged in its relevance, and perhaps, in post-pandemic times, its importance is even more highlighted. This master's dissertation aims to investigate how a mathematical task on the concept of linear functions, using a hydraulic ram pump in an exploratory approach, contributes to the learning. The mathematical task linked the calculation of the volume of a reservoir to the operation of a hydraulic ram, a device for pumping water, through a linear function. The mathematical task, aimed at bringing theoretical knowledge closer to practical everyday life, was carried out with a class of regular high school students in a rural area of an Administrative Region of the Federal District. As part of the activity, we showed the film "The Boy Who Harnessed the Wind," based on a true story that narrates the journey of a young villager who transforms the life of his community through education. The theoretical foundation of this dissertation was based on contributions from authors who investigate mathematical tasks in the context of exploratory teaching. The results obtained indicate that mathematical tasks linked to Exploratory Teaching play a substantial role in stimulating student participation and interaction. Simultaneously, they spark interest in research and exploration of the reality in which they live, both among students and teachers. This practical and contextualized approach not only strengthens the understanding of mathematical concepts but also promotes deeper engagement with the surrounding environment, making learning more relevant and meaningful.

Keywords: Mathematical tasks. Exploratory Teaching. Linear function. Hydraulic ram.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do professor-pesquisador e sua trajetória

O início da minha carreira como professor remonta a 1995, quando ainda cursava o primeiro ano da faculdade. Esse início precoce no campo educacional pode ser justificado pelo fato de, durante minha adolescência, ter exercido a função de datilógrafo em um cursinho preparatório para vestibular. Tal experiência propiciou-me a oportunidade de interagir com uma gama diversificada de professores. Todavia, destaco o impacto singular causado por um professor de Matemática de personalidade muito incomum, tanto pelas ideias que tinha quanto pela forma de expressá-las que despertaram em mim um apreço particular. Sua influência foi determinante na minha decisão de ingressar na carreira docente, embora tal escolha não tenha acontecido imediatamente.

Inicialmente, tentei seguir a carreira militar, desempenhando o papel de soldado no Corpo de Bombeiros Militar do Distrito Federal por um período de três anos. Entretanto, ao constatar que não me adequava ao estilo de vida na caserna, optei por desvincular-me do serviço militar

No segundo semestre de 1995, sob a influência e incentivo deste professor mencionado, dei início à minha experiência como professor temporário na então FEDF (Fundação Educacional do Distrito Federal), atualmente conhecida como SEEDF (Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal), lecionando para a 8ª série do Ensino Fundamental. Esta etapa foi marcada por desafios pessoais significativos. Fui designado para uma escola situada no setor P Sul, em Ceilândia. Permaneci nessa condição de professor contratado em caráter temporário até 1998, quando finalmente obtive aprovação em concurso público e tornei-me professor efetivo da SEEDF.

Em 1999, simultaneamente, fui contratado por uma escola católica confessional, assumindo o cargo de professor da então 5ª série, agora equivalente ao 6° ano. No ano seguinte, ingressei no Ensino Médio na mesma instituição de ensino. Permaneci atuando em ambas as instituições até me afastar temporariamente da SEEDF em 2001, quando pude dedicar-me exclusivamente à instituição de ensino privado. Foi nesse ambiente educacional que descobri a profundidade e nobreza inerentes à vocação docente. Considero esse período como um ponto de virada em minha carreira, a partir do qual comecei a colher os frutos de minha dedicação à educação, tanto em termos pessoais quanto profissionais. Mantive meu vínculo com essa escola por 19 anos, sempre em busca de novas metodologias, explorando diferentes abordagens e estabelecendo novos objetivos.

Em 2013, retornei à SEEDF como professor efetivo, onde permaneço até os dias atuais. Encerrei minha trajetória na escola particular em 2018, e acredito ser legítimo afirmar que obtive considerável êxito durante o período em que estive lá.

Durante os últimos 29 anos de minha trajetória profissional, dediquei-me ao Ensino Fundamental (do 6º ao 9º ano) e também ao Ensino Médio, sendo este último meu segmento educacional preferido.

Com o decorrer dos anos, passei a perceber e a compreender a instituição escolar como um ambiente fundamental para a formação dos indivíduos, equiparando-a, por assim dizer, a um jardim, no qual o docente assume o papel de jardineiro: semeia uma variedade de conhecimentos em todas as direções e, posteriormente, contempla a exuberância das flores que desabrocham.

A escolha de lecionar matemática deve-se ao fascínio que esta ciência exercia sobre mim, ao mesmo tempo em que me desafiava, explicava e conferia significado a inúmeras questões. Desejava tornar-me um instrumento para que outros indivíduos pudessem ser igualmente tocados, de modo que posso afirmar, com alegria, que experimentei essa satisfação (e ainda a experimento) ao longo de minha trajetória como educador.

Entre os desafios enfrentados no exercício docente, destaco o ensino de Probabilidades como o mais premente, ao passo que encontro particular satisfação em lecionar sobre funções, especialmente as exponenciais e logarítmicas.

Em 2021, durante o período da pandemia, tive a oportunidade de atuar em uma escola localizada na zona rural de Brazlândia, uma Região Administrativa do

Distrito Federal, próxima à minha residência. Tal proximidade motivou meu interesse em desenvolver este projeto em uma escola rural.

Em 2015, tomei ciência do Profmat (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Esse programa é uma iniciativa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), órgão vinculado ao Ministério da Educação (MEC) no Brasil. A CAPES é responsável pela coordenação e fomento da pós-graduação stricto sensu no país, englobando programas de mestrado e doutorado.

Em 2021, alcancei a aprovação no exame de admissão, ingressando no programa desenvolvido na Universidade de Brasília, UnB. As razões que me levaram a participar desse mestrado são diversas, das quais poderia citar o aprimoramento profissional, a busca por novas possibilidades e o desejo de conhecer pessoas que pudessem contribuir para o meu crescimento pessoal e profissional.

Ao longo do mestrado, tive a oportunidade de cursar a disciplina Tópicos de Matemática, na qual entrei em contato as tarefas matemáticas na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM). Essa experiência foi providencial, pois já ansiava aprofundar ainda mais esse conhecimento para diversificar minha prática pedagógica.

Na minha experiência profissional, sempre me deparei com as dificuldades dos estudantes no estudo das funções. Portanto, encontrei uma excelente oportunidade para conduzir uma pesquisa dedicada a apresentar alternativas para essa dificuldade, que pode impactar outros estudantes. É relevante destacar a satisfação ao ter acesso a esse conhecimento, pois esse era exatamente o meu objetivo ao ingressar no mestrado.

Este trabalho, portanto, busca desmitificar o estudo das funções, associando-as ao cálculo do volume do cilindro, apresentando a Matemática como ela era em seus primórdios – aplicada à prática (D´Ambrosio, 2014). Almejamos não apenas transmitir conceitos matemáticos, mas também transformar mentes e vidas. Nossa proposta também visa resgatar a autoestima dos discentes e redescobrir o valor da escola como instrumento de transformação social.

Optamos por utilizar um filme como ponto de partida, reconhecendo-o como uma ferramenta poderosa para envolver os estudantes e estimular reflexões. Conscientes do desafio que é unir esse propósito nobre à necessidade de rigor matemático, buscamos equilibrar a abordagem, mantendo a beleza e a poesia que a Matemática transcende.

Reconhecemos que este é um grande desafio, mas acreditamos que, ao integrar a Matemática à realidade e aos anseios dos estudantes, podemos impactar positivamente não apenas o aprendizado da disciplina, mas também a visão que os alunos têm da escola e do seu potencial transformador na sociedade.

1.2 Relevância do tema

Na visão de Lima (2017):

> [...] o programa de Matemática da primeira série do Ensino Médio tem como tema central as funções reais de uma variável real, estudadas sob o ponto de vista elementar, isto é, sem o uso do Cálculo Infinitesimal. Como preliminar a esse estudo e preparação para as séries subsequentes, são apresentadas noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números (naturais, inteiros, racionais e, principalmente, reais). (Lima, 2017, prefácio).

Com base nessa afirmação, cremos que a importância desse conteúdo durante o Ensino Médio, é muito grande, principalmente se ele for entendido como suporte para o Ensino Superior, em especial, o Cálculo Diferencial e Integral. Stewart (2013) argumenta que a compreensão das funções é um alicerce fundamental para a matemática e sua relevância na resolução de problemas do mundo real. As funções formam a base para compreender e descrever como variáveis se relacionam e como os sistemas se comportam. Elas permitem modelar fenômenos complexos, como o crescimento populacional, a propagação de doenças, o movimento de objetos, as taxas de reações químicas, entre outros.

No ensino superior, as funções desempenham um papel central e crítico, principalmente no Cálculo Diferencial, que é um ramo fundamental da Matemática de tamanha importância que Muniz Neto (2015), afirma que é simplesmente impossível traçar um panorama abrangente das diversas aplicações e desenvolvimentos científicos alicerçados no Cálculo. O mesmo autor elenca, sinteticamente, a importância do Cálculo em aplicações num grande número de fenômenos biológicos, físicos ou químicos, bem como processos econômicos ou na engenharia, sendo que todos eles utilizam o conceito de taxa de variação.

Logo, as funções e o Cálculo Diferencial estão intrinsecamente ligados, sendo ambas ferramentas essencias para entender e modelar o mundo ao nosso redor. Eles permitem a análise de como as quantidades mudam e fornecem um conjunto valioso de técnicas para resolver problemas em uma ampla gama de disciplinas.

Contudo, concordamos com De Souza e Da Costa (2019) quando afirmam que, apesar de sua importância, alguns estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem das funções e com Rezende e Nogueira (2020) que afirma que os estudantes também têm dificuldades com suas das generalizações. Para Garcia e Rodrigues (1998), a dificuldade de aprendizagem é classificada como um resultado abaixo do que se espera e está relacionada ao desenvolvimento da fala, escuta, leitura, escrita, raciocínio lógico e habilidades matemáticas.

Devido à grandeza e importância desse tema, foi desenvolvida uma tarefa matemática na perspectiva do EEM baseada nos estudos da professora-pesquisadora portuguesa Ana Paula Canavarro, na intenção de contribuir com a facilitação da aprendizagem desse conteúdo.

Em linhas gerais, conforme essa autora, o EEM é uma abordagem educacional que prioriza a investigação, a experimentação e a descoberta como pilares da aprendizagem matemática. Em contraste com o ensino tradicional, que se baseia na transmissão passiva de conhecimentos.

Devido a todo esse potencial, escolhemos o EEM como metodologia para este trabalho, conscientes que ele pode transformar a forma como os alunos a percebem e a compreendem, tornando-a mais envolvente e acessível**.** Isso atende à demanda atual por uma escola moderna e interessante para estudantes cada vez mais exigentes de estímulos e significados.

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é investigar de que modo uma tarefa matemática sobre o conceito de função afim em uma abordagem exploratória com o uso do carneiro hidráulico contribui para a aprendizagem. A pesquisa foi realizada com estudantes de uma escola da zona rural. A tarefa relaciona o volume de uma caixa d'água cilíndrica e o tempo necessário para preenchê-la. Pretende-se, assim, contribuir para a redução da distância entre a teoria e a prática, entre os conceitos e suas aplicações, assim como observa a resolução do Conselho Nacional de Educação Brasil (2010)

> Art. 36. A identidade da escola do campo é definida pela vinculação com as questões inerentes à sua realidade, com propostas pedagógicas que contemplam sua diversidade em todos os aspectos, tais como sociais, culturais, políticos, econômicos, de gênero, geração e etnia. (CNE, 2010, p. 12)

Como consequências desse objetivo geral, emergem três objetivos específicos. O primeiro consiste em apresentar uma aplicação prática do estudo da função, mais especificamente, das funções lineares.

O segundo objetivo específico é a aprendizagem matemática. A tarefa procura proporcionar aos estudantes a oportunidade de revisitar conteúdos de grande importância, tais como:

- Razões e proporções: Revisão de conceitos básicos de razão e proporção, resolução de problemas que envolvem proporcionalidade direta e inversa, aplicação de razões e proporções em diferentes contextos.
- Transformações de unidades de medida de volumes: Revisão das unidades de medida de volume, conversão entre diferentes unidades de

volume, resolução de problemas que envolvem conversão de unidades de volume.

- Cálculo do volume de um cilindro reto-retângulo: Revisão da fórmula para calcular o volume de um cilindro reto-retângulo, resolução de problemas que envolvem o cálculo do volume de cilindros.
- Conceito de função afim: Revisão do conceito de função afim, representação gráfica de funções afins, resolução de problemas que envolvem funções afins.
- Conceito de vazão: Revisão do conceito de vazão, cálculo da vazão em diferentes situações, resolução de problemas que envolvem o cálculo da vazão.

O terceiro objetivo específico surge ao aproximarmos a teoria da prática e, assim, indicar aos discentes o poder transformador que a escola possui, já que é um espaço, por excelência, de transmissão de conhecimento. Acreditamos que é um ato pedagógico evidenciar as contradições existentes no âmbito social, visando à sua superação. Ou seja, o educador não é responsável por criar os conflitos, mas sim por torná-los claros.

Para atingir os objetivos propostos, foram utilizados como principais instrumentos um carneiro hidráulico de produção artesanal e o filme "O Menino que Descobriu o Vento". Este trabalho apresenta, portanto, o planejamento, a execução e os resultados obtidos durante a aplicação de uma tarefa que desafiou os alunos a enxergarem a escola com outros olhos. Além disso, confirma a importância do EEM associado às tarefas matemáticas como excelentes alternativas ao ensino tradicional. Skovsmose caracteriza a educação matemática tradicional como uma prática que se baseia no paradigma do exercício, marcada pelo absolutismo burocrático, onde são estabelecidos de forma absoluta o que é certo e o que é errado, sem que sejam explicitados os critérios que orientam tais decisões." (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 26). Para MILANE (2021):

> nesses ambientes, o objetivo é treinar uma técnica e decorar conceitos e procedimentos via repetição. Os/As alunos/as ficam geralmente voltados para a lousa, o/a professor/a apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas, depois alguns exemplos e, em seguida, os/as alunos/as

> resolvem alguns exercícios, selecionados geralmente de livros didáticos, que possuem uma única resposta (MILANE,2021, p. 4).

Em suma, nosso objetivo geral é investigar de que modo uma tarefa matemática sobre o conceito de função afim em uma abordagem exploratória com o uso do carneiro hidráulico contribui para a aprendizagem, buscando integrar teoria e prática e praticando o que prevê o CNE, uma vez que a investigação será em instituição educacional localizada na zona rural.

Além disso, os objetivos específicos são os seguintes: apresentar uma aplicação prática da função linear e, assim, viabilizar momentos de aprendizagem da matemática; revisitar conteúdos matemáticos importantes e desenvolver nos estudantes uma maior confiança na escola. Tudo isso é apresentado tendo em mente que a aprendizagem matemática pode ser usada como ferramenta auxiliar nas diversas e complexas tomadas de decisão ao longo da vida.

A seção seguinte destaca os autores que serviram de base para a fundamentação teórica dessa pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Conceitos importantes no estudo das funções

Com base nas obras de Paiva (2009) e Dante (2010), podemos elencar importantes tópicos da área de estudo das funções, os quais são fundamentais para expressar fenômenos físicos, biológicos e sociais, conforme destacado por Dante (2010). Abaixo, apresentamos alguns conceitos importantes acerca das funções no Ensino Médio:

- Definição de Função: Uma função é uma relação matemática que associa cada elemento de um conjunto (domínio) a exatamente um elemento de outro conjunto (contradomínio ou imagem). Em outras palavras, para cada valor de entrada (x), há um único valor de saída (y).
- Variável Independente e Dependente: Na função, a variável independente (geralmente representada por "x") é aquela que você controla ou escolhe valores para, enquanto a variável dependente (geralmente representada por "y") é determinada pela função em relação aos valores de x.
- Notação de Função: Funções são frequentemente representadas usando uma notação específica, como $f(x)\, ou\, y = f(x)$, onde "f" é o nome da função e "x" é a variável independente.
- Gráfico de Função: O gráfico de uma função é uma representação visual da relação entre x e y. É uma maneira poderosa de visualizar como os valores de y mudam com os valores de x e identificar características importantes da função, como interceptações, crescimento e concavidade.
- Domínio e Contradomínio: O domínio de uma função é o conjunto de todos os valores possíveis de x para os quais a função está definida. O contradomínio é o conjunto de todos os valores possíveis de y que a função pode assumir.
- Funções Afim: Funções Afins são um tipo fundamental de função em que a relação entre x e y é uma linha reta. A forma geral de uma função linear é $y = mx + b$, onde "m" é a taxa de variação e "b" é a interceptação no eixo y.

- Funções Quadráticas: Funções quadráticas são outro tipo comum de função, onde a relação entre x e y é uma parábola. Elas têm a forma geral de $y = ax^2 + bx + c$, onde "a" determina a concavidade da parábola.
- Funções Exponenciais e Logarítmicas: Funções exponenciais (por exemplo, $y = 2^x$) e logarítmicas (por exemplo, $y = log(x)$ modelam crescimento exponencial e relações inversas, respectivamente, entre outros.
- Funções Trigonométricas: Funções trigonométricas como seno, cosseno e tangente desempenham um papel fundamental na modelagem de fenômenos cíclicos e ondulatórios.
- Transformações de Função: Os estudantes aprendem como realizar transformações em funções, como translações, reflexões e escalas, para alterar o seu comportamento e aparência em gráficos.
- Inversa de Função: A ideia de funções inversas é explorada, onde uma função é invertida para encontrar a função que desfaz suas ações.
- Problemas do Mundo Real: Funções são aplicadas a problemas do mundo real em áreas como física, economia e ciências naturais, demonstrando sua relevância prática.

Além da relevância matemática, concordamos com De Souza e Da Costa (2019), pois compreender a ideia de função desempenha um papel crucial no empreendedorismo, pois capacita os estudantes a reconhecerem padrões e antecipar resultados. Essa habilidade não só é valiosa no contexto empresarial, mas também se mostra de grande utilidade na gestão das finanças pessoais e familiares. Por exemplo, ao calcular o consumo de combustível durante uma viagem de carro para trabalho, escola ou lazer.

Essa proficiência também capacita os educandos a utilizarem eficientemente planilhas eletrônicas, as quais, segundo Dias (2013), são ferramentas essenciais que demandam o entendimento de fórmulas e associações entre células. Em suma, em consonância com o pensamento de Dante (2010) e Pacheco (2023), o aprendizado sobre funções oferece diversos benefícios àqueles que se dedicam a estudá-lo, extrapolando os limites da sala de aula para impactar positivamente diversos aspectos da vida cotidiana e profissional.

2.2 A Função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b \; para \; todo \; x \in \mathbb{R}$.

Também vale a pena destacar que os coeficientes *a* e *b* são chamados, respectivamente, de taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função e valor inicial da função e, onde b = f(0). O motivo de *a* ser assim chamado pode ser justificado da seguinte forma:

Sendo conhecidos $f(x_1) \; e \; f(x_2)$, pontos distintos, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad e \qquad f(x_2) = ax_2 + b$$

Sendo assim, podemos escrever:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

Portanto,

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_{2-} x_1}$$

2.3 A função linear

A tarefa matemática proposta supõe que a função, que modela a relação entre o volume de uma caixa d’água e a vazão de uma bomba hidráulica, é uma função linear, e, portanto, função afim, daí o título do nosso trabalho. Nesse tópico, vamos tratar do motivo desse entendimento.

Lima (2017, p.79), traz três decorrências da definição de função afim citada anteriormente: a função identidade: $f(x) = x$; a função linear, $f(x) = ax$ e a função constante $f(x) = b$.

A função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. Contudo, na prática, como verificar se uma função é ou não linear? A resposta, segundo o renomado autor, é relativamente simples: basta verificar se a função atende o Teorema Fundamental da Proporcionalidade enunciado a seguir:

Seja $f: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = nf(x)$, para todo $todo\ n \in \mathbb{Z}\ e\ tod\ x \in \mathbb{R}$.

(2) $Pondo\ a = f(1), tem - se\ f(x) = ax,\ para\ todo\ x \in \mathbb{R}$.

$(logo\ f(cx) = cf(x)\ para\ qualquer\ c, x \in \mathbb{R}.)$

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)\ para\ qualquer\ y, x \in \mathbb{R}$.

A tarefa matemática propõe que a taxa de variação do volume de uma caixa d'água em função do tempo é a vazão do carneiro hidráulico, ou seja, $V\,(t) = v.t$, onde v é a vazão do carneiro e t, o tempo.

Para verificar, portanto, que a função proposta é uma função linear, ou seja, uma função afim, basta aplicar o teorema da proporcionalidade citado acima, que consiste em verificar apenas dois pontos:

1° : deve ser crescente ou decrescente;

2°: $f(nx) = nf(x)$, para todo $todo\ n \in \mathbb{Z}\ e\ tod\ x \in \mathbb{R}$.

No que diz respeito ao primeiro ponto, f ó obviamente crescente; em relação ao segundo ponto, podemos escrever:

$$V(x.t) = v.x.t = x.v.t = x.(v.t) = x\,.V(t)$$

Foi, então, esse o argumento usado pelo professor-pesquisador para mostrar aos alunos que a função utilizada na tarefa matemática é uma função afim; em outras palavras, o volume de água na caixa varia proporcionalmente ao tempo decorrido, contanto que a vazão do carneiro hidráulico seja constante.

2.4 A função Afim e os documentos norteadores

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que estabelece os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que todos os estudantes brasileiros devem desenvolver ao longo de sua educação básica. Ela foi instituída pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), em 2014, e sua versão final foi homologada em dezembro de 2017.

Esse documento busca definir um conjunto comum de aprendizagens fundamentais para garantir uma formação básica sólida a todos os alunos, independente da região do país em que estejam. Ela abrange as etapas da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Na página oficial do MEC (Ministério da Educação) podemos encontrar o objetivo principal da BNCC: " ser a balizadora da qualidade da educação no País por meio do estabelecimento de um patamar de aprendizagem e desenvolvimento a que todos os alunos têm direito."

Fonte:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/faq/#:~:text=Qual%20%C3%A9%20o%20objetivo%20da,todos%20os%20alunos%20t%C3%AAm%20direito. Acesso dia 27 /04/24.

Logo, o documento serve como referência para a elaboração dos currículos escolares por parte dos sistemas de ensino e das escolas, proporcionando maior coerência e alinhamento na educação básica brasileira. A BNCC destaca competências gerais que os alunos devem desenvolver, além de especificar os conhecimentos e habilidades esperados em cada etapa da educação.

No que diz respeito ao ensino de Matemática, ela aborda o estudo das funções nos anos finais do ensino fundamental (do 6º ao 9º ano) e no ensino médio.

Brasil (2018):

> COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos que podem emergir de experiências empíricas. Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais. Assim, ao formular conjecturas, mediante suas investigações, eles deverão buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não precisa ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve incluir também argumentos

> mais “formais”, sem que haja necessidade de chegarem à demonstração de diversas proposições. (BNCC, 2018, p. 524)

A partir dessa competência, podemos concluir que a BNCC prioriza:

- Compreensão dos conceitos: O documento enfatiza a importância de os alunos compreenderem os conceitos relacionados às funções, incluindo domínio, contradomínio, imagem, gráficos e propriedades.
- Resolução de Problemas: Os alunos devem ser capazes de resolver problemas que envolvem funções, aplicando esses conceitos para analisar situações do mundo real.
- Modelagem Matemática: A BNCC destaca a modelagem matemática como uma habilidade importante relacionada às funções, permitindo que os alunos apliquem o conhecimento matemático para representar e resolver problemas práticos.
- Gráficos de Funções: Os alunos devem aprender a interpretar e construir gráficos de funções, compreendendo como as características dos gráficos refletem o comportamento das funções.

Em resumo, a BNCC reconhece a importância do estudo das funções no currículo de matemática, destacando a compreensão conceitual, a resolução de problemas, a aplicabilidade no mundo real e as habilidades de comunicação relacionadas às funções. É evidente que nosso trabalho está alinhado com essa legislação, uma vez que visa satisfazer precisamente o que é descrito na competência 5 do texto oficial.

2.5 Os sólidos geométricos

2.5.1 Conceitos Fundamentais

Devido à importância do tema dentro do trabalho, decidimos destacar pontos importantes do estudo dos volumes de sólidos, que no Ensino Médio é parte do estudo da geometria espacial. De acordo Muniz Neto (2013), alguns conceitos fundamentais envolvidos no estudo dos volumes de sólidos incluem:

- Volume: O volume de um sólido é a quantidade tridimensional de espaço que ele ocupa. É uma medida da capacidade do sólido e é expresso em unidades cúbicas, como centímetros cúbicos (cm^3) ou metros cúbicos (m^3).
- Tipos de sólidos Geométricos: Existem diferentes tipos de sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Cada tipo de sólido tem uma fórmula específica para calcular seu volume.
- Prismas e Cilindros: O volume de um prisma ou cilindro pode ser calculado multiplicando a área da base pela altura. Por exemplo, o volume de um cubo é calculado multiplicando o comprimento da aresta pela área da base ($V = L^3$).
- Pirâmides e Cones: O volume de uma pirâmide ou cone é calculado multiplicando a área da base pela altura e, em seguida, dividindo por 3. A fórmula geral é V = (1/3) * Área da Base * Altura.
- Esferas: O volume de uma esfera é dado pela fórmula $V = (4/3) * \pi * \text{raio}^3$, onde π (pi) é uma constante matemática aproximadamente igual a 3,14159.
- Composição de Sólidos: Às vezes, é necessário calcular o volume de sólidos compostos, que consistem em duas ou mais formas geométricas. Para isso, pode-se dividir o sólido em partes menores, calcular o volume de cada parte e, em seguida, somar os volumes.
- Cálculos com Integrais (Cálculo Integral): Em casos mais complexos, especialmente quando as formas não são regulares, o cálculo de volumes pode envolver integração. Isso é comumente usado para calcular volumes de sólidos de revolução, como os gerados pela rotação de uma curva em torno de um eixo.
- Aplicações Práticas: O estudo dos volumes de sólidos tem diversas aplicações na vida real, como na engenharia, arquitetura, design de produtos, ciências naturais e muitas outras áreas. Por exemplo, o cálculo do volume é essencial para projetar recipientes, tanques, edifícios, estruturas, veículos e muito mais.
- Estudo de Propriedades Físicas: Além do volume, o estudo dos sólidos também inclui a análise de outras propriedades físicas, como a densidade,

que é a relação entre a massa e o volume de um sólido. Essas propriedades são cruciais em ciências como a física e a química.

- Visualização e Representação: O uso de gráficos, desenhos e modelos tridimensionais ajuda na visualização e compreensão dos sólidos e seus volumes. A representação visual é uma ferramenta valiosa para estudantes e profissionais que trabalham com geometria espacial.

A partir daí, podemos afirmar que o estudo dos volumes de sólidos é uma parte essencial da matemática e tem aplicações práticas significativas em diversas áreas. Compreender os conceitos fundamentais relacionados ao volume e às fórmulas específicas para diferentes sólidos geométricos é importante para resolver problemas do mundo real, como o problema proposto neste trabalho e realizar análises geométricas em situações variadas.

2.5.2 O volume do cilindro

O conceito de volume utilizado nesse trabalho é norteado pelo trabalho do professor Muniz Neto (2013), que apresenta o volume do cilindro da seguinte forma: $V(c) = \pi R^2 h$, onde R é o raio e h é a altura do cilindro. A justificativa dessa expressão vem da comparação entre um paralelepípedo P, de mesma altura h que um cilindro C, cuja base B é um paralelogramo de área igual à área do disco D, base do cilindro, e tal que $B\ e\ D$ estejam contidas em um mesmo plano α, com $C\ e\ P$ contidos em um mesmo semiespaço, dos que α determina. Se α' é um plano paralelo a $\alpha,$ a igualdade das alturas do cilindro e do paralelepípedo garante que $C\ \cap \alpha' \neq \emptyset$ se, e só se, $P \cap \alpha' \neq \emptyset$. Além disso, quando tal fato ocorre, tais interseções são respectivamente congruentes a $D\ e\ B$, logo, têm áreas iguais. Portanto, $V(C) = V(P) = A(B)h = A(D)h = \pi R^2 h$.

2.6 As dificuldades na aprendizagem de funções afins

Existe outro ponto importante a ser destacado no que se refere ao estudo das funções e do cálculo de volume, que também inspirou a realização deste trabalho: as dificuldades de aprendizagem por parte dos estudantes. Um indício dessa dificuldade é o desempenho dos estudantes brasileiros no PISA.

O PISA, sigla para Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, é um exame internacional que avalia o desempenho de alunos de 15 anos em três áreas: Leitura, Matemática e Ciências. O programa foi criado em 1997 pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) com o objetivo de :

- Comparar o desempenho dos alunos entre diferentes países: O PISA permite que os países comparem seus sistemas educacionais e identifiquem áreas que precisam de melhorias.
- Identificar os fatores que influenciam o desempenho dos alunos: O PISA coleta dados sobre o contexto socioeconômico dos alunos, o ambiente escolar e as práticas pedagógicas, o que permite identificar os fatores que influenciam o desempenho dos alunos.
- Monitorar o progresso da educação ao longo do tempo: O PISA é aplicado a cada três anos, o que permite monitorar o progresso da educação ao longo do tempo.
- O PISA é um dos exames internacionais mais importantes do mundo. Os resultados do PISA são utilizados por governos, escolas e professores para melhorar a qualidade da educação**.**

Os resultados do último exame ocorrido em 2022 colocaram o Brasil entre 62° e 69° lugar do ranking, num total de 70 países. As informações abaixo foram obtidas no site do MEC (Ministério da Educação):

> O desempenho médio brasileiro foi de 379 pontos em matemática. A pontuação é inferior à média do Chile (412), Uruguai (409) e Peru (391), ao passo que não há diferença estatisticamente significativa entre a média do Brasil, da Colômbia (383) e da Argentina (379). Dos estudantes brasileiros, 73% registraram baixo desempenho nessa disciplina (abaixo do nível 2). Esse nível é considerado pela OCDE o padrão mínimo para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania. Entre os países-membros da OCDE, o percentual dos que não atingiram o nível 2 foi de 31%. Apenas 1% dos brasileiros atingiu alto desempenho em matemática (nível 5 ou superior). (MEC, 2023)

Figura 1 – Resultados do PISA 2022

FONTE: MEC https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/2023/dezembro/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022. Acesso 03 de março de 2024

Os estudantes que participam do PISA devem resolver questões de interpretação, raciocínio lógico, álgebra, resolução de problemas, entre outros assuntos. Como estão na faixa etária do primeiro ano do Ensino Médio, podemos deduzir que os conteúdos apresentados neste trabalho estão entre aqueles que apresentam dificuldades de aprendizagem desses estudantes. Logo, um dos objetivos deste trabalho é apresentar alternativas para reduzir essas dificuldades.

Além das evidências do PISA, pesquisadores como De Souza Silva e Pereira (2023), Dos Santos Silva e Pitanga (2018) e Da Silva Santiago e De Souza (2022) também têm revelado as dificuldades dos estudantes do Ensino Médio acerca das funções afins. Esses pesquisadores mostram que algumas dessas dificuldades estão na linguagem e na representação das funções, como a representação gráfica e as generalizações. Outras dificuldades no ensino de funções afins incluem a não assimilação dos conceitos matemáticos relacionados, dificuldades na identificação do domínio, compreensão da função constante e dificuldades na conversão entre os registros de representação gráfica e algébrica da função afim Justulin; Pereira e Ferreira (2019). Entretanto, como observado por Duval (2011), a raiz dessas dificuldades é mais profunda. Não reside tanto nos conceitos matemáticos associados à função afim, mas sim na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro de representação gráfica e o registro da expressão algébrica.

Como podemos notar, há uma ampla área a ser explorada no que diz respeito às dificuldades enfrentadas pelos estudantes nesse campo do conhecimento. Por isso, nosso trabalho se propôs a contribuir com mais uma alternativa nessa direção.

2.7 O Ensino Exploratório de Matemática

O Ensino Exploratório de Matemática (EEM) é uma metodologia que ganhou destaque no século XX e desempenhou um papel significativo na promoção de abordagens modernas do ensino dessa disciplina.

Dentre os responsáveis, podemos citar o professor George Pólya (1887-1985). Ele enfatizou a resolução de problemas como uma ferramenta fundamental para o aprendizado matemático. Seu livro "How to Solve It" influenciou a abordagem de resolução de problemas no ensino de Matemática.

Mais recentemente, o professor João Pedro da Ponte, renomado educador matemático português, tem contribuído significativamente para o ensino e pesquisa em Educação Matemática. Ele é conhecido por seu trabalho em abordagens inovadoras e construtivistas no ensino de Matemática.

Além desses autores, têm especial relevância nesse trabalho a professora Canavarro, que já publicou diversos trabalhos a respeito do EEM.

Na visão de Oliveira, Menezes e Canavarro (2013):

> [...em contradição com o ensino direto, que está normalmente associado a uma aula de Matemática tradicional, o processo está muito centrado no professor, sendo a informação transmitida deste para os alunos. Ao contrário, no ensino exploratório, “a ênfase desloca-se da atividade ‘ensino’ para a atividade mais complexa ‘ensino-aprendizagem’” (Canavarro, 2013, p. 31)

A partir dessas ideias, podemos inferir que o EEM coloca o aluno no centro do processo de aprendizagem, incentivando-o a:

- Formular hipóteses
- Realizar experimentos
- Analisar dados
- Comunicar suas descobertas
- Aguçar sua capacidade de síntese e conclusão

Além dessas características, Canavarro ainda afirma que:

> Uma aula exploratória típica é geralmente estruturada em três ou quatro fases: a fase de "lançamento" da tarefa, a fase de "exploração" pelos alunos, e a fase de "discussão e sintetização" (Stein et al., 2008). Na primeira fase, o professor apresenta uma tarefa matemática à turma. A tarefa é frequentemente um problema ou uma investigação, exigindo interpretação por parte dos alunos. O professor deve assegurar, em poucos minutos, que estes entendem o que se espera que façam e que se sintam desafiados a trabalhar na tarefa. O professor tem também de organizar o desenvolvimento do trabalho pela turma, estabelecendo o tempo a dedicar às diferentes fases, gerindo os recursos a usar e definindo os modos de trabalho dos alunos. (Canavarro, 2011, p.256)

A partir das afirmações acima, fica evidente que uma aula exploratória tem uma estrutura bem diferente daquela usada numa aula tradicional. O simples fato do lançamento da pergunta inicial já coloca os estudantes em outra perspectiva, não mais como simples ouvintes, mas como descobridores de algo que lhes foi proposto.

Outro ponto a ser considerado numa aula exploratória é a comunicação entre docentes e discentes. Guerreiro at al (2015) afirmam que:

> O ensino-aprendizagem da Matemática que ocorre numa sala de aula é um processo eminentemente comunicativo. Esta comunicação pode ser conduzida tendo por base diversas perspectivas teóricas, que têm consequências na relação entre o professor e os alunos e na forma como o conhecimento matemático é ensinado e aprendido. (Guerreiro et al, 2015, p. 281)

Por essas e outras razões, Stein et al. (2008) afirmam que o EEM é uma atividade complexa e pode ser considerada difícil de ser colocada em prática por muitos professores. São variadas as etapas de preparação prévia e acompanhamento das atividades para se obter sucesso na aplicação de uma tarefa exploratória.

Canavarro (2011) afirma que:

> O ensino exploratório da Matemática não advoga que os alunos descobrem sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos ou lhes adivinham os nomes. Muito menos advoga que isso acontece enquanto o professor espera tranquilamente sentado pelos rasgos iluminados e criativos dos seus alunos — não que estes não os tenham quando lhes é dada oportunidade. (Canavarro, 2011, p. 11).

Em resumo, o EEM é uma metodologia que busca colocar o estudante no centro do processo de ensino-aprendizagem, incentivando-o a fazer suas próprias descobertas. Isso acontece em colaboração com outros colegas, sob a mediação ativa do professor, que não é um mero observador, mas um facilitador do diálogo e do desenvolvimento do pensamento matemático e da autonomia dos alunos. O objetivo é tornar a aprendizagem matemática mais acessível e prazerosa. No entanto, é importante ressaltar que essa abordagem não é fácil nem pouco exigente. Tanto o professor quanto os alunos devem investir tempo, esforço e dedicação para obter sucesso nesse processo.

2.8 Tarefas matemáticas

Para Ponte (2014)

> [...] as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. (Ponte, 2014, p. 16)

Mais adiante, o autor disserta sobre os aspectos das tarefas matemáticas,

> [...] existem duas dimensões fundamentais por elas apresentadas: o seu grau de desafio matemático - que depende da percepção de dificuldade da questão, sendo “reduzido” ou “elevado” - e o seu grau de estrutura - que pode variar entre os polos “aberto” e “fechado”. (Ponte, 2014, p. 20)

Ponte ainda destaca que o grau de estrutura fechado quer dizer que estão explícitas as informações para o estudante, que ele não precisa fazer nenhum esforço para obtê-las; por outro lado, a estrutura aberta exige um esforço para serem obtidas.

Finalmente, ele apresenta as diferenças entre exercício, problema, investigação e exploração:

> Um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido;
> Um problema é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado;
> Uma investigação é uma tarefa aberta com desafio elevado;
> Uma exploração é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos.
> (Ponte, 2014, p.21)

Por outro lado, Abrantes (1988), afirma que um problema é uma realidade em que o estudante não possui um caminho pronto a ser seguido, seja um procedimento ou um algoritmo, em contraposição ao exercício, onde isso acontece. Logo, a partir das ideias de Ponte (2014) e Abrantes (1988), podemos tirar algumas conclusões sobre essas possiblidades pedagógicas praticadas em sala pelos docentes de Matemática.

Exercícios:

- Propósito: Os exercícios são geralmente projetados para fornecer prática e consolidação de habilidades específicas, conduzem a um mesmo resultado e utilizam principalmente a prática da repetição como método de aprendizagem fato que pouco desafia o estudante.
- Formato: Têm uma estrutura mais direta e muitas vezes seguem um conjunto específico de passos ou procedimentos.

- Enfoque: Visam o desenvolvimento de habilidades técnicas, como a aplicação de fórmulas, a prática de algoritmos ou a memorização de fatos matemáticos e tem pouco espaço para a criatividade.

Problemas:

- Propósito: Os problemas matemáticos geralmente exigem uma abordagem mais analítica e visam a aplicação de conceitos e habilidades em contextos diversos. Exigem capacidade de análise e versatilidade do estudante.
- Formato: Podem ser apresentados em diversas formas, desde questões escritas até situações práticas do mundo real.
- Enfoque: Incentivam o raciocínio crítico, a formulação de estratégias e a busca de soluções. Podem ter várias soluções possíveis.

Investigação

- Propósito: têm um propósito mais amplo, buscando desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.
- Formato: Podem ser apresentadas em diferentes formatos, desde problemas mais complexos até atividades exploratórias.
- Enfoque: Incentivam a exploração, a descoberta e o pensamento criativo. Podem envolver discussões em grupo e colaboração.

Exploração

- Propósito: têm o objetivo de despertar o desejo de descobrir. Parafraseando Abrantes (1988): é um problema da vida real. Possibilita mais de uma forma de resolução.
- Formato: Possuem diversos formatos, normalmente fazem com que os estudantes procurem caminhos alternativos de solução.
- Enfoque: Incentivam a discussão, o debate, a troca de ideias.

Desta forma, concordamos com Ponte (2014) que a abordagem exploratória se baseia em tarefas matemáticas abertas e acessíveis à maioria dos estudantes, para que possam utilizar métodos próprios nas suas resoluções. Ponte (2014) destaca ainda que, a tarefa do tipo exploratória propicia o desenvolvimento do potencial criativo, da autoconfiança e da autonomia, uma vez que permite que o estudante utilize a experiência de vida e argumentos próprios para desenvolvê-la. Ressalta-se que o EEM deve ocorrer com a utilização de critérios e métodos que facilitem a aprendizagem matemática.

2.9 Fases da realização da tarefa matemática

Stein at al (2008) afirmam que devem ser seguidas de perto cinco práticas que proporcionam ao professor melhores condições para concluir boas discussões matemáticas no âmbito de uma tarefa exploratória. São elas:

Antecipar: prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa, bem como elencar estratégias - sejam corretas ou incorretas - que os alunos podem seguir, de modo a antever como reagir diante de questionamentos;

Monitorizar: observar e ouvir os alunos, avaliando a validade das ideias e resoluções aplicadas. Nessa etapa, o professor consegue perceber as barreiras encontradas pelos alunos e decidir em quais aspectos focar na discussão subsequente;

Selecionar: diante da monitorização dos grupos, o professor pode identificar quais resoluções e ideias são importantes partilhar com todo o grupo, a fim de direcionar a discussão para o objetivo final da atividade;

Sequenciar: simultaneamente à anterior, nesta etapa o professor deve decidir qual percurso de exploração das ideias dos alunos deve ser seguido, a fim de iniciar de forma mais acessível e direcionar progressivamente para resoluções que permitam generalizar os conceitos;

Estabelecer conexões: nessa etapa, o professor deve incentivar os alunos a analisarem as resoluções apresentadas, identificar o que deve ser priorizado e balizar quais conexões devem ser estabelecidas para consolidação do aprendizado.

Todas essas etapas foram criteriosamente observadas pelo professor-pesquisador durante a aplicação da tarefa e serão detalhadas no capítulo 4, que trata da aplicação da tarefa matemática. No entanto, é importante ressaltar que essas etapas desempenham um papel crucial para o sucesso da aplicação da tarefa matemática.

2.10 Algumas tarefas matemáticas no âmbito do Profmat da UnB

A metodologia das tarefas matemáticas pode ser aplicada em diversos níveis educacionais e em diferentes contextos. Um exemplo dessa versatilidade é o fato de que alguns alunos do Profmat da UnB, que atuam em realidades bastante diferentes, optaram por essa metodologia, como podemos observar nos exemplos a seguir.

Figueredo (2023) conduziu uma pesquisa que aborda o estudo, a observação, o desenvolvimento e análises acerca do uso de uma Tarefa Matemática em Educação Financeira com o objetivo de despertar a questão do consumo consciente. A tarefa foi elaborada em uma turma de 9º ano, seguindo a abordagem do EEM.

Da mesma forma, Cerqueira (2023) buscou analisar o desenvolvimento de tarefas matemáticas por estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) do terceiro segmento, o que equivale ao Ensino Médio, da rede pública de ensino do Distrito Federal, com o objetivo de verificar aspectos que indiquem aprendizagem referentes ao raciocínio combinatório.

Por fim, gostaríamos de citar o trabalho de Santos (2023), que realizou um estudo com o objetivo geral de compreender o EEM e sua abordagem na EJA, por meio da análise dos registros e das participações dos estudantes nas tarefas matemáticas relacionadas aos conteúdos envolvendo números inteiros e racionais. Participaram deste estudo duas turmas da EJA do segundo segmento, nas 7ª e 8ª etapas.

Ao observarmos os trabalhos, podemos concluir que o uso de tarefas matemáticas associadas ao EEM mostrou-se bastante eficaz. Nos registros dos docentes, foi relatado um impacto em suas rotinas pedagógicas a partir da implementação dessa metodologia (Dörr; Neves; Ribeiro, 2023) .

A partir dos conceitos apresentados por de Abrantes (1988); Ponte (2014) e Canavarro (2011) e das experiências realizadas pelos professores acima descritas, decidimos construir uma tarefa matemática na perspectiva do EEM por acreditar que essa metodologia seria ideal para associar o conhecimento teórico das funções e do volume dos sólidos geométricos à vida cotidiana dos estudantes da zona rural, que é o objetivo geral do nosso trabalho.

3 METODOLOGIA

3.1 Caracterização da pesquisa

Para Godoy (1995), a pesquisa qualitativa difere da quantitativa, que se concentra em dados numéricos e na análise estatística. No enfoque qualitativo, o objetivo principal é explorar, descrever e compreender as nuances e os significados subjacentes aos eventos, comportamentos e experiências humanas. Em resumo, busca-se compreender e interpretar o objeto de estudo em sua totalidade, valorizando a análise do processo e sua relevância. Segundo o autor, o enfoque qualitativo de uma pesquisa se caracteriza pelos seguintes aspectos:

- o pesquisador atua como o principal instrumento obtendo dados diretamente do ambiente estudado: A pesquisa qualitativa não busca medir ou quantificar variáveis específicas, mas sim explorar e descrever fenômenos em profundidade. Ela procura compreender as perspectivas, motivações e contextos das pessoas envolvidas.
- não requer o uso de técnicas estatísticas, sendo essencialmente descritivo: Os dados coletados na pesquisa qualitativa são frequentemente dados qualitativos, como entrevistas, observações, grupos focais, diários pessoais, documentos, registros históricos e artefatos culturais. Esses dados são ricos em detalhes e contexto.
- seu foco não está primariamente no resultado final da pesquisa, mas sim no processo e na interpretação do significado dos fenômenos estudados: A análise dos dados qualitativos é interpretativa e subjetiva. Os pesquisadores exploram padrões emergentes, temas e significados subjacentes nos dados. Isso frequentemente envolve a codificação e categorização dos dados.
- Amostragem Intencional: Em vez de usar amostragem aleatória, a pesquisa qualitativa muitas vezes usa amostragem intencional, na qual os participantes ou casos são selecionados com base em critérios específicos que são relevantes para o estudo.
- Contexto e Ambiente Natural: A pesquisa qualitativa muitas vezes é conduzida em ambientes naturais, nos quais os participantes interagem de

maneira autêntica com seu ambiente. Isso permite uma compreensão mais profunda do contexto em que ocorrem os fenômenos estudados.

- Flexibilidade e Abertura: Os pesquisadores qualitativos mantêm uma abordagem aberta e flexível, permitindo que novos temas e descobertas surjam durante o processo de pesquisa.
- Construção Teórica: A pesquisa qualitativa pode contribuir para a construção teórica em um campo, fornecendo insights e perspectivas que podem levar ao desenvolvimento ou revisão de teorias.
- Narrativas e Histórias: Muitas vezes, os dados qualitativos incluem narrativas e histórias pessoais que fornecem insights valiosos sobre a experiência humana.

Nesse trabalho, a opção pela pesquisa qualitativa deu-se em função da própria natureza do objeto pesquisado. A tarefa matemática, na perspectiva do EEM, envolve os elementos mencionados, especialmente a coleta de dados realizada em grupo (sala de aula), a análise interpretativa, a coleta intencional, o ambiente natural, a flexibilidade e a abertura. Não há dúvidas de que a pesquisa qualitativa é uma abordagem valiosa para explorar as questões complexas da aplicação de uma tarefa matemática e compreender as nuances ocorridas na sala de aula durante a sua execução. Ela permitiu que o professor-pesquisador se aprofundasse nas experiências e perspectivas dos estudantes, oferecendo *insights* valiosos para compreender o que se desenrolou durante a aplicação da tarefa matemática.

3.2 Sujeitos e cenário da pesquisa

A aplicação da tarefa matemática ocorreu entre os meses de agosto e setembro de 2023, no CED INCRA 08, localizado na zona rural de Brazlândia, região administrativa de Brasília-DF. A escolha dessa escola foi motivada pelo fato de o professor já ter trabalhado na instituição, conhecendo, portanto, os colaboradores, a direção, a coordenação, os professores e os estudantes envolvidos.

A realização da tarefa matemática contou com a participação de 20 estudantes do Ensino Médio do turno vespertino, com idades entre 16 e 18 anos, sendo 10 do gênero feminino e 10 do gênero masculino.

Para a execução da atividade, foram utilizados diferentes espaços dentro da própria escola, como o pátio, sala de aula e auditório.

Dentre os vinte estudantes, 19 residem na zona rural, enquanto apenas um é proveniente da zona urbana. Em média, as residências estão a uma distância de 5 km da escola. A maioria dos estudantes chega à instituição por meio do transporte escolar ou público. Alguns vão a pé ou utilizam bicicleta, enquanto outros são acompanhados pelos responsáveis até o local. Esses dados foram coletados pelo professor-pesquisador no dia da realização da tarefa matemática. O gráfico apresenta a distribuição de idades entre os estudantes que participaram da tarefa matemática.

Gráfico 1 - Idades dos estudantes

Fonte - autor

O prédio onde funciona a escola pertence ao INCRA (Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária) e foi construído em 1968. A escola iniciou as suas atividades em 1969, como Escola Rural INCRA 08, atendendo o Ensino Fundamental (anos iniciais), em 1977 seu nome foi alterado para Escola Classe INCRA 08. Em 1980 passou a ser conhecida como Centro de Ensino de 1º Grau

INCRA 08. Em 1996, passou a ser chamada de Centro de Ensino Fundamental INCRA 08 e finalmente em 2013, passou a ser chamada Centro Educacional INCRA 08.

O CED INCRA 08 foi durante 38 anos a única escola da região, sendo que a escola mais próxima estava situada a 10 km na cidade de Brazlândia, em 2006 foi construída uma nova escola - Escola Classe 01 do INCRA 08.

Atualmente, o CED INCRA 08 recebe alunos de Ensino Fundamental – anos finais (6º ao 9º ano) e Ensino Médio, divididos em 02 turnos (matutino e vespertino). Considerada escola rural, a Instituição tem em sua clientela alunos oriundos de acampamentos sem-terra, bem como filhos de caseiros de áreas rurais dos “INCRAs” 06; 07 e 08, que dependem de transporte escolar para realizar o trajeto campo-escola-campo.

3.3 Planejamento da tarefa matemática

3.3.1 A criação da tarefa

A criação da tarefa levou cerca de três meses. O desafio inicial era desenvolver uma atividade que conectasse as funções afins com a realidade da zona rural onde estavam inseridos os estudantes. Nosso objetivo era apresentar uma tarefa que despertasse o interesse científico e que também pudesse ser realizada em suas casas, que, em muitos casos, também funcionam como locais de trabalho dos alunos: as chácaras do Incra 08.

O grande inspirador desse trabalho foi o filme "O Menino que Descobriu o Vento", que se passa na zona rural e tem um estudante como protagonista. No enredo, o adolescente encontra uma solução para bombear água de um poço e, assim, resolver o problema da fome na aldeia. A partir dessa história, baseada em fatos reais, surgiu a ideia de construir um carneiro hidráulico e usá-lo para bombear água de um ponto mais baixo para outro mais alto, simulando o bombeamento da água de uma fonte que pode ser um rio, um lago ou um poço para uma caixa d’água, facilitando assim o entendimento da relação entre a vazão do carneiro hidráulico e o volume da caixa d’água cilíndrica.

Nessa fase, foram necessárias algumas pesquisas sobre como construir o carneiro hidráulico, os custos de construção e a viabilidade do equipamento em sua utilização prática, além da funcionalidade em uma simulação escolar, como aquela que pretendíamos realizar.

Após a confirmação da viabilidade do projeto, a decisão de prosseguir com a tarefa foi formalmente tomada. Subsequentemente, foram definidos os conteúdos matemáticos a serem abordados, estabelecer os objetivos desejados com a atividade e desenvolver o referencial teórico relativo ao trabalho.

3.3.2 As antecipações da tarefa matemática

Terminada a fase anterior, seguiu-se a criação das antecipações. Conforme já citado, Stein (1988) e Canavarro (2011) dão especial destaque à importância das antecipações nas tarefas matemáticas. A seguir estão apresentadas as antecipações feitas pelo professor-pesquisador visando prever os questionamentos dos estudantes para melhor atuar no momento da realização da tarefa:

1. Como faço para começar?
2. Devo usar a regra de três?
3. Capacidade é a mesma coisa que volume?
4. Posso usar o valor 3,14 para o “pi”?
5. Como calcular uma “fração diária”?
6. O que fazer com a informação do consumo diário da família?
7. Como calcular porcentagens?
8. O que é uma generalização? Como obtê-la?
9. Posso fazer do meu jeito?
10. Devo considerar apenas dias completos? Ou posso responder usando os decimais?

As mediações previstas para cada uma dessas antecipações foram as seguintes:

1. Releia a tarefa e conversem entre si para decidir a estratégia de resolução a ser seguida;
2. Sim, a regra de três pode e deve ser usada em várias situações na resolução das questões;
3. Procurem relembrar os significados das palavras "capacidade" e "volume", e em seguida façam uma comparação entre esses significados para determinar se tratam da mesma coisa
4. A escolha da aproximação do valor de Pi deve ser feita considerando o nível de precisão exigido pelo trabalho. Essa decisão deve ser tomada em conjunto pelo grupo, levando em conta os objetivos e as necessidades específicas do projeto.
5. Uma fração é construída com uma “parte” chamada numerador e um “todo”. Procurem identificar qual é cada um desses elementos dentro da tarefa.
6. O consumo da família deve ser considerado no momento de calcular o volume de água acumulado pelo carneiro dentro da caixa d’água.
7. As porcentagens são frações cujo denominador é igual a 100, logo procure escrever uma fração e depois realize operações que busquem esse resultado.
8. A generalização no pensamento matemático ocorre quando um processo é realizado para padronizar resultados válidos para todos os possíveis cenários. Para alcançá-la, é necessário garantir que sempre que um procedimento matemático for realizado, o resultado será conforme previsto.
9. Sim, pode fazer do seu jeito, contudo, garanta que os resultados serão sempre aqueles esperados.
10. O ideal é utilizar os decimais, contudo, se não for possível por algum motivo, pode apresentar os resultados apenas usando dias completos..

As antecipações se mostraram bastante eficazes, pois todas elas surgiram durante a realização dos trabalhos. Os questionamentos mais comuns foram os de número 1, 2, 4, 8 e 9.

3.4 O planejamento das ações

Concluídas as etapas anteriores, chegou o momento do planejamento das ações para realização da tarefa matemática. As etapas para construção e desenvolvimento da tarefa foram definidas da seguinte maneira:

1. Definição das datas de aplicação;
2. Escolha da escola e das turmas para a aplicação da tarefa.
3. Obtenção das autorizações necessárias para a realização da tarefa.
4. Providenciar todo o material necessário para a realização da tarefa, tais como aparelhos eletrônicos, formulários, questionários, adequação dos espaços, etc.
5. Aquisição e construção do carneiro hidráulico;
6. Aplicação da tarefa.

Quanto à aplicação da tarefa em sala de aula, as etapas e o tempo necessário foram definidos da seguinte forma:

- Apresentação do filme "O menino que descobriu o vento" (110 minutos)
- Discussão sobre o filme (10 minutos)
- Responder o questionário sobre o filme (10 minutos)
- Formação dos grupos (5 minutos)
- Apresentação da situação-problema (5 minutos)
- Esclarecimento de dúvidas quanto à situação-problema (10 minutos)
- Resolução da situação-problema (25 minutos)
- Análise das estratégias apresentadas (10 minutos)
- Conclusão (10 minutos)
- Aplicação do questionário após a tarefa.

3.4.1 A preparação para a exibição do filme

O menino que descobriu o vento”, uma produção de 2019 da empresa americana “Netflix”, baseada em uma história real inspiradora. É uma emocionante jornada que nos leva à remota aldeia de Wimbe, no ano de 2001, no Malawi, África. A trama gira em torno de William Kamkwamba, um jovem talentoso que, apesar das adversidades, sonha em criar um futuro melhor para sua família e sua comunidade

Figura 2 - Foto de divulgação do filme

Fonte: Netflix

No auge de uma severa crise de fome que assola a região e ameaça a vida de todos, William se vê obrigado a abandonar a escola devido à falta de recursos financeiros. No entanto, sua sede de conhecimento o leva a explorar livros e manuais na biblioteca local. Ao aprender sobre energia e eletricidade, William tem uma ideia ousada: construir um moinho de vento para gerar eletricidade e bombear água para as plantações, fornecendo assim uma nova chance de vida às suas terras secas. Esse recurso transforma a realidade de toda a vila, uma proposta que se assemelha ao objetivo da tarefa matemática. A escolha do filme visa, portanto, enriquecer a atividade e sensibilizar os estudantes sobre a aplicação real da matemática na solução de problemas do dia a dia.

Para a apresentação do filme aos estudantes, foram necessários diversos preparativos, desde a reserva do local adequado - o auditório da própria escola - até o apoio fornecido pelos servidores da instituição. Além disso, foi preciso providenciar os equipamentos eletrônicos e garantir que estivessem prontos para a exibição no horário e local determinados. Como a duração do filme ultrapassava o limite de duas aulas, também foi necessário solicitar a liberação da turma pelo professor responsável pela aula seguinte.

3.4.2 Preparação dos questionários a serem aplicados

No planejamento, foram previstos dois questionários a serem aplicados aos estudantes: um após a exibição do filme e outro após a conclusão da tarefa. As respostas dos estudantes serão apresentadas no capítulo 5, onde faremos análises dos resultados obtidos.

O propósito dos questionários era realizar uma avaliação qualitativa da atividade. Por isso, as perguntas foram elaboradas de forma a observar tanto o objetivo geral quanto os objetivos específicos da tarefa. Além disso, buscamos formular perguntas que possibilitassem inferir conclusões sobre o trabalho realizado.

A imagem dos questionários tal qual foram aplicados está apresentada no anexo 1. A seguir, está a transcrição dos questionamentos feitos aos estudantes:

DADOS PESSOAIS

1. GÊNERO: (   ) MASCULINO (   ) FEMININO
2. IDADE ______________
3. RESIDE EM ÁREA: (   ) URBANA   (   ) RURAL

SOBRE O FILME: “O menino que descobriu o vento”

4. Você já tinha assistido ao filme?
5. No filme, a escola tem um papel fundamental na vila. Você também se sente da mesma forma em relação à sua escola?
6. Você acredita que o estudo da matemática pode te ajudar a resolver problemas do cotidiano assim como no filme?
7. Você confia no seu próprio poder de transformar as realidades em sua volta?

3.4.3 Justificativas das perguntas do questionário após o filme

As questões 1, 2 e 3 do questionário tinham como propósito conhecer melhor o público-alvo e analisar separadamente as respostas dos estudantes para cada questionamento.

A pergunta 4, 'Você já tinha assistido ao filme?', teve o intuito de avaliar se a escolha do filme para a tarefa foi adequada, pois se a maioria dos estudantes já o conhecesse, poderia ser interessante considerar outro filme ou estratégia para uma futura aplicação da tarefa.

A questão 5, 'No filme, a escola tem um papel fundamental na vila. Você também se sente da mesma forma em relação à sua escola?', buscou investigar como os estudantes percebem a importância da escola, visando promover ações que estimulem a valorização do ambiente escolar.

A pergunta 6, 'Você acredita que o estudo da matemática pode te ajudar a resolver problemas do cotidiano, assim como no filme?', teve como objetivo explorar a relação dos estudantes com a matemática, compreendendo sua visão e a importância dessa disciplina em suas formações pessoais e acadêmicas. Essa pergunta também foi usada como parâmetro de comparação, uma vez que o segundo questionário voltaria a tratar da relação dos estudantes com a matemática e, sendo assim, haveria possibilidade de verificar o impacto da atividade matemática na relação entre os estudantes e a disciplina.

A questão 7, 'Você confia no seu próprio poder de transformar as realidades ao seu redor?', buscou investigar a autoestima dos estudantes, especialmente em relação à matemática, visando propor ações que contribuam para melhorar ou transformar a forma como eles se percebem em relação ao mundo ao seu redor.

Assim como planejado, um segundo questionário, cuja imagem consta do apêndice 2, deveria ser aplicado logo após o término da aplicação da tarefa. A seguir, estão transcritas as perguntas propostas, cujas respostas serão analisadas no capítulo 4 desse trabalho. Note-se que a parte inicial solicitava as mesmas informações que o questionário anterior, essa repetição era necessária uma vez que o primeiro questionário foi aplicado de forma presencial e o segundo de forma online, logo, assim sendo, não haveria como averiguar o perfil dos estudantes, a não ser perguntando novamente.

3.4.4 Construção do Carneiro Hidráulico

Uma parte essencial da tarefa consistia na fabricação desse dispositivo, cuja importância pode ser considerada fundamental. O carneiro hidráulico é um equipamento simples e eficiente empregado na agricultura para a irrigação de pequenas áreas cultivadas. Este sistema representa uma alternativa economicamente viável e ecologicamente sustentável para o abastecimento de água às plantações, sem depender exclusivamente de fontes de energia não renováveis, tais como eletricidade ou combustíveis fósseis.

Figura 3 - Carneiro Hidráulico

Fonte: autor

Para a construção do dispositivo, foi necessário realizar pesquisas no YouTube, a fim de adquirir o conhecimento necessário para garantir o funcionamento perfeito do equipamento. Este processo representou um grande desafio, exigindo várias experimentações até que o dispositivo operasse de maneira adequada. No entanto, a construção e o sucesso funcional do carneiro hidráulico foram extremamente gratificantes.

A lista a seguir apresenta os componentes necessários para a fabricação do carneiro hidráulico. As peças foram adquiridas pelo próprio professor-pesquisador e encontradas facilmente em lojas especializadas em produtos hidráulicos.

- Válvula fundo poço: dispositivo que tem o papel de aríete e provoca um choque mecânico na coluna de água;
- Válvula de retenção: essa peça “obriga” a água a fluir num único sentido, impedindo que tome o fluxo contrário ao desejado;
- Um registro para iniciar ou parar o funcionamento do carneiro;
- Conexões para unir as várias peças do carneiro;
- Tubos e mangueiras para conduzir a fonte de água até o carneiro e deste até a base de armazenamento.

O custo do carneiro utilizado foi de R$ 250,00, a tabela mostra o valor de cada peça utilizada na montagem do carneiro:

Tabela 1 - Custo do carneiro hidráulico

Custo do carneiro hidráulico		
1	Tubo de PVC	R$ 30,00
2	Registro de PVC	R$ 25,00
3	Válvula de sucção	R$ 80,00
4	Válvula de retenção	R$ 70,00
5	Conecções de PVC	R$ 25,00
6	Base de madeira	R$ 20,00
7	Total	R$ 250,00

Fonte: autor

Para funcionar, o carneiro precisa ser posicionado abaixo do nível do reservatório de onde se quer bombear a água, pode ser um rio, um córrego, um lago, etc. Quanto maior a distância de instalação melhor a pressão da coluna de água e mais longe será a capacidade de bombeamento do carneiro.

Assim que a coluna de água entra em contato com a válvula fundo de poço ela inicia o movimento de “batida”, pois foi adaptada com uma mola que faz com que o pêndulo faça um movimento de subida e descida, esse movimento produz um som característico como o de dois carneiros quando dão cabeçadas um no outro disputando a liderança de um rebanho ou o acasalamento com uma fêmea, daí o nome do instrumento.

O choque mecânico faz com que a água atravesse a válvula de retenção e vá se acumulando num tubo que serve como compressor de ar. Não tendo outra saída e pressionada pelo ar comprimido na ponta do cano, a água é bombeada para fora do cano e direcionada para o local desejado por meio de tubos de PVC ou mangueiras plásticas.

O carneiro hidráulico caseiro é uma solução sustentável e de baixo custo para a irrigação de cultivos em áreas rurais, aproveitando a energia cinética da água em movimento para mover a bomba. Esse sistema não depende de eletricidade ou combustíveis fósseis, o que o torna uma alternativa ambientalmente amigável para a agricultura local. No entanto, é importante notar que a eficiência e a capacidade de irrigação desse sistema dependem da disponibilidade e da quantidade de água na fonte.

Devido à sua versatilidade e custo relativamente baixo, o carneiro hidráulico foi selecionado para integrar a tarefa matemática. Conforme apresentado no Capítulo 1, um dos objetivos da tarefa era impactar a vida cotidiana dos estudantes, e o carneiro hidráulico se mostrou ideal para isso devido à sua facilidade de construção e instalação.

Agora que tratamos da metodologia utilizada, e das etapas de preparação avançaremos para a discussão da aplicação da tarefa nos próximos capítulos. Posteriormente, nos dedicaremos à análise dos resultados obtidos a partir dessa intervenção pedagógica

4 APLICAÇÃO DA TAREFA MATEMÁTICA

4.1 A exibição do filme

Após solicitação junto à direção da escola e em acordo com o professor regente, a aplicação da tarefa pôde ser realizada no final do mês de agosto de 2023. Inicialmente, os estudantes assistiram à primeira parte do filme no auditório da escola, conforme planejado. No entanto, devido a problemas técnicos, a segunda parte foi exibida depois, na sala de aula, utilizando um aparelho de projeção.

Após a conclusão da exibição, realizou-se uma discussão, conforme o planejamento, na própria sala de aula sobre os pontos principais do filme. O professor incentivou os estudantes a compartilharem suas percepções, permitindo a participação de todos. Inicialmente, houve certa timidez, com apenas o professor falando nos primeiros minutos. No entanto, após algum tempo, os estudantes começaram a expressar suas impressões, sentimentos e perspectivas sobre o filme.

Alguns comentários dos alunos foram: 'Achei o filme muito interessante, especialmente a coragem do garoto em enfrentar as dificuldades e vencer'; 'Nunca tinha assistido ao filme, mas gostei muito de ver como a ciência foi usada para resolver um problema real'; 'O filme me fez refletir sobre a realidade das pessoas na África e sobre como podemos ajudá-las'; 'Ele me fez pensar na quantidade de pessoas que não têm acesso à água potável, até mesmo aqui no Brasil, e como isso é uma realidade triste', disse outro estudante.

Foi nesse momento da tarefa que o professor-pesquisador discutiu com os estudantes o poder transformador do conhecimento. Através de exemplos pessoais e de outros relatos de personagens conhecidas do grande público, o docente procurou mostrar aos alunos que o conhecimento é uma poderosa arma de transformação social, mas assim como qualquer arma deve ser usada corretamente.

Após essa discussão, os alunos responderam o primeiro dos dois questionários que seriam aplicados durante a execução da Tmatemática. O questionário foi impresso em folha de papel tamanho A4 e entregue um para cada estudante. O tempo gasto para respondê-lo foi de aproximadamente 10 minutos, visto que muitos alunos responderam apenas com 'sim' ou 'não', como será detalhado no capítulo dedicado à análise dos resultados.

4.2 A apresentação do carneiro hidráulico

Após a aplicação do questionário, os estudantes foram convidados a se deslocar para o pátio, onde já havia sido montado previamente o carneiro hidráulico para uma simulação. Na simulação, foi utilizado um tonel de 200 litros como fonte de água, posicionado sobre uma mesa. O carneiro hidráulico foi colocado no chão e a mangueira de saída de água foi fixada acima do nível do tonel, de modo a demonstrar claramente sua capacidade de bombear água. No entanto, apesar dos esforços, a vazão de água não atingiu o esperado, sendo este um ponto a ser melhorado em futuras aplicações da experiência.

Ao chegar ao local, os estudantes mostram-se curiosos e animados com o estranho dispositivo. O professor-pesquisador então lhes apresentou o equipamento, dizendo seu nome, sua função e capacidade motora. Após a apresentação do carneiro, sob olhares desconfiados, realizou-se uma demonstração prática do funcionamento do equipamento. Durante essa apresentação, a água foi bombeada pelo carneiro do tonel e armazenada em uma garrafa PET de 2 litros. O professor ressaltou essa particularidade como ponto de partida para a atividade a ser realizada posteriormente na sala de aula, enfatizando sua importância para a atividade proposta.

Essa etapa da aula teve duração de cerca de 20 minutos. Enquanto observavam o funcionamento, os estudantes aproveitaram para fazer diversas perguntas relacionadas ao princípio de funcionamento do carneiro hidráulico, incluindo sua potência, custo de fabricação, possíveis aplicações e outras questões pertinentes. O professor regente respondeu prontamente a todas as perguntas, promovendo um diálogo esclarecedor.

Além disso, os estudantes foram convidados a estimar o tempo necessário para que o carneiro hidráulico preenchesse completamente uma garrafa PET. Ressalta-se que essa parte da atividade teria uma grande importância na etapa seguinte. Portanto, o professor regente insistiu nesse ponto. No entanto, o professor-pesquisador não pediu a ninguém para cronometrar o tempo. Essa decisão foi proposital, uma vez que a intenção era permitir que cada grupo trabalhasse com uma estimativa de tempo diferente.

É preciso registrar que esse foi um momento de grande empolgação para os estudantes e também para o professor, pois finalmente o dispositivo estava em pleno funcionamento. Pelos comentários dos estudantes, notava-se que também eles estavam admirados que uma combinação tão simples de peças poderia produzir um resultado tão grande e com tamanha capacidade de utilização, especialmente, na agricultura.

Um dos momentos mais divertidos foi quando um estudante perguntou a quanto tempo o carneiro havia sido inventado, ao que o professor pediu que os estudantes fizessem estimativas, inicialmente, sugeriram 1000 anos antes de Cristo, o professor disse que era bem mais recente, então sugeriram 1000 depois de Cristo, “continuem chegando mais perto”, disse o professor, “1200”, disseram, “1500”, “um pouco mais” acrescentou o professor, até que chegaram no século XVIII, que foi o ano em que foi inventado o carneiro, pelo francês Jaques E. Montgolfier, em 1796, é o que afirmar Ykeda (2019), em sua pesquisa.

Outro ponto de interesse foi a inevitável conexão do dispositivo com o filme que tinham acabado de assistir. Os docentes perceberam que, assim como no filme, aquele dispositivo era capaz de realizar a mesma façanha. Segundo o relato dos próprios estudantes, foi como se o filme se tornasse realidade. Esse ponto foi muito importante para a tarefa que se realizaria logo em seguida.

4.3 Apresentação da tarefa matemática

De volta à sala de aula, após a apresentação e demonstração do carneiro hidráulico, foi solicitada, conforme o planejamento, a formação de quatro grupos compostos por 05 estudantes cada, uma que foram denominados como Grupos 1, 2, 3 e 4, com a participação dos estudantes presentes. A formação dos grupos deu-se de forma aleatória, sem nenhuma intervenção importante do professor, essa prática foi proposital, pois assim, os estudantes se agruparam de acordo com sua conveniência. Apenas um pequeno grupo resistiu, mas em seguida cedeu aos apelos do professor para se juntarem aos grupos já formados.

Para tornar a atividade mais dinâmica, o professor ofereceu uma caixa de chocolates como prêmio para o grupo que conseguisse responder corretamente às seis questões que seriam apresentadas. Em seguida, apresentou aos estudantes duas caixas de chocolate de fabricantes diferentes. Essa ação gerou grande entusiasmo entre os alunos, cumprindo exatamente o objetivo dessa intervenção.

Então, o professor entregou a tarefa matemática, cuja cópia está no apêndice C e cujo conteúdo está reproduzido abaixo. A atividade foi entregue uma por grupo, sendo que o professor solicitou que os estudantes fizessem a leitura e verificassem se havia alguma dúvida.

ROTEIRO
1. Apresentação da situação-problema; (5 minutos)
2. Questionamentos a partir do situação-problema; (10 minutos)
3. Resolução da situação-problema; (25 minutos)
4. Análise das estratégias apresentadas e discussão coletiva (10 minutos)
5. Conclusão (10 minutos)
Suponha que um carneiro hidráulico nas mesmas condições do apresentado foi instalado em uma chácara com o intuito de abastecer uma caixa d’água com formato cilíndrico cujo raio mede 1 metro e cuja altura é de 2,5 metros. A caixa é utilizada para atender uma família que consome 600 litros de água por dia.
SITUAÇÃO-PROBLEMA

1. Diga qual a quantidade de água que o carneiro seria capaz de bombear para a caixa em um dia.
2. Encontre a capacidade da caixa em litros.

3.	Descubra a fração diária que a caixa é preenchida pelo carneiro hidráulico.
4.	Qual o percentual da caixa estaria preenchido após 3 dias? e após 7 dias?
5.	Faça uma generalização para obter o percentual de água na caixa a qualquer momento.
6.	Encontre em quantos dias a caixa estaria completamente cheia.

Após a leitura da tarefa matemática, surgiram algumas dúvidas descritas a seguir, juntamente com as respostas fornecidas pelo professor-pesquisador.

Questionamento 1. “Professor qual a forma de registro das respostas, pode ser a lápis? Pode ser no caderno? Temos que registrar os cálculos?” Ao que o professor respondeu: “pode ser a lápis ou caneta; o rascunho poderia ser no caderno, mas o registro final deveria ser feito no local apropriado na própria atividade.

Questionamento 2. “Professor, podemos consultar o livro didático, os cadernos e outros apontamentos?

A resposta do professor foi: “sim, podem consultar qualquer material que vocês tenham à disposição”.

Questionamento 3. “Professor, podemos utilizar celulares para pesquisas online?

A resposta: “sim, podem fazer consultas utilizando aparelhos eletrônicos”;

Questionamento 4. “Professor, podemos consultar os membros dos outros grupos?”

E o professor respondeu: “não convém nesse momento, conversem com os membros de seus grupos, haverá uma oportunidade para a troca de ideias com toda a turma”.

Esclarecidas todas as dúvidas iniciais quanto à forma que deveria ser realizado o trabalho, foi solicitado que cada grupo trabalhasse na resolução das questões, conforme orientado pelo professor regente.

4.4 Desenvolvimento da Tarefa Matemática

Esse foi um ponto muito importante. Juntos, professor e estudantes repassaram cada etapa de maneira que todos compreendessem que o fator tempo era extremamente valioso e que precisavam obedecer ao planejamento, pois, do contrário, haveria falta de tempo, o que deveria ser evitado a todo custo.

Após a concordância de todos, a atividade teve início. Enquanto essa etapa estava em desenvolvimento, o professor regente circulava entre os grupos, esclarecendo dúvidas e oferecendo auxílio aos estudantes, garantindo que a tarefa fosse desenvolvida de acordo com o ritmo das discussões e do entendimento dos alunos.

Dois dos quatro grupos iniciaram imediatamente os debates para a resolução da atividade. Em cada um desses grupos, um estudante liderou as discussões, apresentou ideias e alternativas para a resolução. Nos outros dois grupos, isso não aconteceu naturalmente: foi preciso o auxílio do professor para que o grupo desse início aos trabalhos. Tudo isso será detalhado mais adiante.

Ao mesmo tempo em que respondia aos questionamentos, o professor observava o desenvolvimento dos trabalhos procurando seguir os passos indicados por Stein et al (2008) descritos no referencial teórico. Essa prática aconteceu durante toda a realização da tarefa, enquanto circulava entre os grupos, o professor estava atento às dúvidas dos estudantes. Além disso, foi preciso intervir várias vezes convidando os grupos menos estimulados a realizarem a tarefa, as dúvidas e as intervenções do professor serão apresentadas no capítulo sobre a análise dos resultados. Desse momento da realização da tarefa, gostaríamos de descrever as seguintes fases:

<u>Antecipar</u>: Foi de grande importância realizar as antecipações. Prever as indagações dos estudantes e como respondê-las sem atrapalhar o sentido exploratório da atividade – ou seja, sem impedir que os estudantes façam as descobertas por si mesmos – só é possível se o trabalho de antecipação for bem feito.

<u>Selecionar</u>: Apesar de serem apenas quatro grupos, devido às solicitações intensas e à exigência considerável do professor, não foi difícil selecionar os trabalhos para apresentação. Isso se deve ao destaque notável de dois grupos na realização da tarefa. No entanto, mesmo que a seleção tenha sido fácil nesse caso específico, é crucial ressaltar a importância dessa etapa. Uma seleção discreta é essencial, pois pode evitar constrangimentos ou descrença por parte dos estudantes que não conseguiram desenvolver a tarefa tão rapidamente quanto os outros grupos.

<u>Sequenciar</u>: Essa também foi uma tarefa fácil, pois o professor selecionou apenas dois grupos para a apresentação, logo, decidiu de antemão qual seria a ordem de apresentação dos trabalhos. Mais uma vez, vale à pena dizer que essa também é uma atividade muito importante por parte do professor, pois ao apresentar os trabalhos numa ordem que seja mais interessante, o ganho pedagógico é muito grande.

<u>Estabelecer conexões</u>: Por fim, essa etapa aconteceu naturalmente quando o professor sequenciou bem os trabalhos a serem apresentados. As ideias do primeiro grupo complementaram as do segundo. Não foi possível estabelecer uma relação métrica entre os resultados, pois cada grupo utilizou uma estimativa diferente, mas mesmo assim, foi possível conectar as ideias e discuti-las com muito proveito durante a apresentação dos trabalhos.

O tempo estimado para a resolução das questões era de 25 minutos, mas essa previsão não se concretizou. Mesmo os grupos mais avançados não haviam concluído a tarefa após esse tempo, e os grupos mais lentos ainda não tinham conseguido resolver completamente nem mesmo a primeira questão. O professor então propôs aos estudantes a concessão de mais 10 minutos, após os quais a tarefa seria recolhida e a etapa seguinte iniciada.

Após o término do tempo, os registros dos estudantes foram recolhidos pelo professor, que parabenizou a todos pelo empenho em resolver as questões propostas. O professor notou que alguns estudantes estavam um tanto quanto frustrados por não terem obtido o desempenho desejado, ao que ele interveio mais uma vez, dizendo que respeitassem seus limites e seus momentos e que valorizassem as conquistas que alcançaram.

4.5 Discussões coletivas

Terminado o tempo definido para os estudantes desenvolverem o que foi solicitado, o professor-pesquisador solicitou que os estudantes se voltassem ao quadro branco, onde ocorreria a discussão das questões e sua posterior resolução. Os estudantes atenderam prontamente à instrução.

Na primeira pergunta feita pelo professor nessa etapa, ele indagou aos alunos sobre a experiência até o momento: questionou sobre a compreensão, satisfação ao resolver a atividade, grau de dificuldade e tempo dedicado a cada etapa. Cada questionamento foi respondido de forma espontânea pelos estudantes, que afirmaram que a compreensão foi tranquila, o grau de dificuldade foi mediano a alto e o tempo de resolução foi um pouco apertado, mas ainda possível realizar a tarefa no tempo proposto, respectivamente.

Em seguida, o professor apresentou as ideias do primeiro grupo selecionado, escrevendo no quadro e solicitando que os demais alunos criticassem as ideias apresentadas. Foi um momento de grande valia, pois os próprios estudantes do grupo perceberam que cometeram alguns erros, e suas reações causaram risos nos demais estudantes. O mesmo ocorreu com o outro grupo e, por isso, podemos afirmar que foi um momento descontraído, apesar de muito enriquecedor do ponto de vista pedagógico.

Também é importante ressaltar que mesmo os grupos que não conseguiram evoluir muito na resolução participaram desse momento da aula, ora sorrindo, ora sugerindo, ora demonstrando que haviam compreendido que a tarefa não era tão difícil, concretizou-se nesse momento a importância da discussão das ideias apresentada por Canavarro:

> “Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico suscitado pela exploração da tarefa: Identificar representações produtivas para obter generalizações e estabelecer conexões com aprendizagens anteriores.” (Canavarro, 2012, p. 253)

Após esse momento riquíssimo, o professor deu início à sistematização dos conceitos. A seguir, apresentamos a resolução esperada de cada uma das perguntas da tarefa matemática.

O primeiro ponto a ser considerado é o tempo estimado para que o carneiro enchesse a garrafa PET de 2 litros, essa decisão era variável, ou seja, cada grupo estimou um valor diferente para esse tempo, logo os resultados seriam diferentes. O professor optou por mostrar as duas opções escolhidas pelos dois trabalhos selecionados, ou seja, o grupo 2 estimou um tempo de 6 minutos, enquanto o grupo 3 estimou um tempo de 3 minutos. Muito importante destacar que a escolha da dedução do tempo era necessária para caracterizar o aspecto exploratório da tarefa, ou seja, a partir das diferentes inferências, os estudantes poderiam perceber que a observação de fenômenos e o registro dos acontecimentos são parte importante do processo de construção do conhecimento.

QUESTÃO 01. *Diga qual a quantidade de água que o carneiro seria capaz de bombear para a caixa em um dia.*

Esperava-se que os estudantes utilizassem uma regra de 3 simples, considerando um dia com 24 horas, e, portanto, 1440 minutos:

Estimativa de tempo de 3 minutos

3 minutos – 2 litros

1440 minutos - X

$$X = \frac{1440 * 2}{3}$$

$$\boxed{X = 960\ litros}$$

Estimativa de tempo 6 minutos

6 minutos – 2 litros

1440 minutos - X

$$X = \frac{1440 * 2}{6}$$

$$X = \frac{2880}{6}$$

$$X = 480$$

Durante a resolução dessa questão, o professor abordou o conceito de vazão dado pela CBHSF (Comitê da Bacia do São Francisco)

“Vazão é o volume de fluido que passa por uma seção por determinado período de tempo. Tratando-se de água, essa seção pode ser um rio, canal, estação de tratamento e até residência. Um cálculo específico é utilizado para medir a vazão de um rio, que considera a área e o tempo.”

Em hidrologia e hidráulica, por exemplo, a vazão de um rio representa o volume de água que flui por uma seção transversal desse rio em um determinado intervalo de tempo, como litros por segundo ou metros cúbicos por segundo. Já na área de engenharia, a vazão pode ser usada para descrever o fluxo de líquidos através de tubulações ou sistemas, sendo uma medida importante para o dimensionamento de sistemas hidráulicos, controle de processos industriais, entre outros, além disso, o professor recordou os estudantes sobre o princípio da regra de 3 simples, e sua utilização na conversão de horas para minutos, e vice-versa.

QUESTÃO 02. *Encontre a capacidade da caixa em litros.*

Esperava-se que os estudantes utilizassem conhecimentos prévios acerca do cálculo do volume do cilindro reto e, usassem a aproximação de 3,14 para o valor de Pi.

$$V = \pi . r^2 . h$$

$$V = 3{,}14 . 1^2 . 2{,}5$$

$$V = 7{,}85\ m^3$$

$$V = 7850\ litros$$

Na resolução dessa parte da questão, o professor relembrou aos estudantes o conceito de volume e suas diversas aplicações. É importante destacar que os estudantes já estavam familiarizados com esses conceitos, uma vez que já haviam assistido aulas sobre esse conteúdo. Além disso, enfatizou-se que o valor usualmente utilizado, "3,14", é apenas uma aproximação do valor de Pi, que é, na verdade, um número irracional, ou seja, decimal, infinito e não periódico. Nesse momento, surgiram várias dúvidas entre os estudantes, como, por exemplo, o que é um número periódico, tornando-se um momento privilegiado de diálogo e esclarecimentos entre o professor e a turma. Foi também nesse momento que o professor trouxe à tona a definição de litro, tão importante para compreender a relação entre metros cúbicos e litros.

Litro (L): O litro é outra unidade de medida de volume no sistema métrico. É definido como a capacidade de um cubo que tem 10 centímetros de lado em todas as direções. Em termos matemáticos, 1 litro é igual a 0,1 metro × 0,1 metro × 0,1 metro, o que resulta em um volume de 0,001 metro cúbico.

QUESTÃO 03 – *Descubra a fração diária que a caixa é preenchida pelo carneiro hidráulico.*

Para responder essa questão era necessário que os estudantes utilizassem as respostas das questões anteriores e esperava-se que levassem em consideração o consumo diário de 600 litros da família, e, portanto, calculassem a razão entre a vazão calculada na questão anterior subtraída pelo consumo da família e a capacidade da caixa d'água. No primeiro caso, como a vazão calculada era de 960 litros por dia, podemos escrever:

960 – 600 = 360 litros por dia onde o volume total é 7850 litros, logo:

$$fração\ diária = \frac{360}{7850} = 0{,}046\ litro$$

No segundo caso, cuja vazão calculada foi de 600 litros por dia, o volume era suficiente apenas para o consumo diário, logo não haveria fração de preenchimento.

Nesse caso, esperava-se que os estudantes concluíssem que não seria possível calcular a fração, pois a vazão não seria suficiente nem mesmo para o consumo.

Foi assim que os estudantes dos dois grupos perceberam que haviam cometido um erro, pois não levaram em consideração o consumo diário de 600 litros da família e que, por esse motivo, as respostas a partir desse ponto estavam viciadas com um erro, uma vez que o desenvolvimento das próximas etapas dependia diretamente desse resultado.

QUESTÃO 04 - Qual *o percentual da caixa estaria preenchido após 3 dias? e após 7 dias?*

Esperava-se que os estudantes fizessem uma tabela a partir do resultado anterior para encontrar os valores pedidos.

Tabela 2 - Respostas esperadas da questão 04

Número de dias	Fração da caixa	Resultado
1	**0,046*1**	**4,6%**
3	**0,046*3**	**13,8 %**
7	**0,046*7**	**32,2 %**

Fonte: autor

Foi esse o momento ideal para que o professor relembrasse o conceito de função afim e também de função linear. Ele se apropriou desse conceito para demonstrar aos estudantes como o número de dias e o percentual da caixa preenchido por água se relacionavam por meio de uma expressão matemática. Os estudantes puderam constatar por meio desse exemplo prático como as duas grandezas (dias e volume) alteravam-se mutuamente, ou seja, à medida que uma delas variava a outra também variava seguindo um padrão rígido. Durante esse esclarecimento, vários outros exemplos foram dados para ratificar e fixar essa ideia tão importante a respeito do estudo das funções.

QUESTÃO 05 . *Faça uma generalização para obter o percentual de água na caixa a qualquer momento.*

Esperava-se que os estudantes utilizassem o resultado anterior para perceber que bastava multiplicar o fator encontrado na questão 03 pelo número de dias.

$$\boxed{P(d) = 4{,}6\% * d}$$

$$onde\ P(d)\ representa\ o\ percentual\ e\ d\ \text{é}\ o\ n\text{ú}mero\ de\ dias.$$

Essa questão foi apresentada pelos estudantes como a mais exigente da tarefa. Essa constatação pode estar relacionada à falta de hábito em generalizar observações para transformá-las em conclusões. No entanto, procurar por padrões é uma estratégia poderosa para resolver problemas, e a busca pela expressão da generalidade é, por si só, uma atividade de resolução de problemas.

Considerando que a generalização está associada ao pensamento algébrico, aos símbolos matemáticos e à linguagem algébrica, Tinoco (2011, p. 51) afirma que “[...] é na passagem da linguagem corrente para a algébrica que reside a maior dificuldade dos alunos iniciantes em Álgebra”. Portanto, incentivar os estudantes a explorar padrões e entender a importância da generalização pode contribuir significativamente para o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas.

Após a resolução, porém, os estudantes demonstraram uma certa frustação consigo mesmos, pois julgaram ser uma questão simples e que poderiam tê-la resolvido. Nesse ponto, o professor interviu dizendo que a generalização matemática é um processo que deve ser aprendido e desenvolvido, e, portanto, eles não deveriam se aborrecer, mas ao contrário, iniciar esse processo de desenvolvimento.

QUESTÃO 06. *Encontre em quantos dias a caixa estaria completamente cheia*.

Esperava-se que os estudantes utilizassem o resultado anterior e igualassem $P(d)$ a 100%: .

$$P(d) = 4{,}6\% * d$$

$$100\% = 4{,}6\% * d$$

$$P(d) = 4{,}6\% * d$$

$$\frac{100\%}{4{,}6\%} = \frac{4{,}6\% * d}{4{,}6\%}$$

$$\boxed{d = 21{,}7}$$

Seria uma grata surpresa se os estudantes analisassem esse resultado e concluíssem que

1 dia – 24 horas

0,7 – X horas

$$X = \frac{0{,}7 * 24}{1} = 16{,}8$$

e ainda

60 minutos – 1 hora

X – 0,8 hora

$$X = \frac{0{,}8 * 60}{1} = 48\,minutos$$

ou seja, a partir das 16h48 do 22° dia desde o início da contagem, a caixa estaria completamente cheia, caso o consumo diário de 600 litros do 22° dia se desse antes desse horário.

Durante a solução desse último ponto, o professor deixou claro que havia outros caminhos para a resolução desse item, e que apesar do equívoco dos resultados apresentados, os dois grupos que conseguiram chegar até esse ponto haviam apresentado um raciocínio correto para calcular o tempo necessário para que a caixa estivesse completamente cheia, essa afirmação revelou-se importante para a autoestima dos estudantes. Como afirmam Ponte e Pereira (2018) :

> É esta diversidade de ações do professor, possibilitadas pela tarefa proposta, que permite que processos de raciocínio matemático surjam nos momentos de discussão coletiva. Neste estudo, os momentos em que emergem processos de raciocínio matemático na discussão coletiva representam uma parte significativa dessa discussão, o que vai bastante além do referido por Brodie (2010) que classifica estes momentos como raros. Os princípios de design parecem assim contribuir para que, nas discussões coletivas, surjam processos de raciocínio matemático centrais como a generalização e a justificação (Ponte & Pereira, 2018, p. 798)

4.6 Conclusão da tarefa matemática

Após a conclusão das explanações, ocorreu o momento da "premiação", ou seja, da entrega dos bombons para os vencedores. Obviamente, a intenção sempre foi distribuir os chocolates para todos os estudantes envolvidos, e assim aconteceu após os agradecimentos do professor pela colaboração, empenho e dedicação dos estudantes em realizar tudo o que foi proposto.

Assim que a entrega dos chocolates foi concluída, o professor solicitou à turma que colaborasse mais uma vez preenchendo o formulário online, onde poderiam contribuir um pouco mais com a atividade. Os estudantes concordaram com a solicitação, e assim a aula chegou ao seu fim.

4.7 Questionário após a tarefa matemática

A última atividade realizada em sala foi o pedido do professor-pesquisador para que os estudantes respondessem a um segundo questionário, agora de forma online. A resolução se daria de forma individual e posteriormente, infelizmente nem todos os 20 estudantes responderam ao questionário. Para esse segundo formulário, o método escolhido foi o Google formulários cujo link foi encaminhado aos estudantes da turma pela aluna representante da sala via WhatsApp, uma cópia desse formulário é apresentada no apêndice D, além disso, ele está transcrito a seguir:

PESQUISA 2A

1. Gênero

   ( ) masculino
   ( ) feminino

2. Idade

   ----

3. Sua residência é na área:

   ( ) urbana
   ( ) rural

4. Descreva, por favor, como foi a aula de hoje para você: aprendeu alguma coisa? (use o campo “outros” para dizer o que aprendeu)

   ( ) sim

   ( ) não

   ( ) outros

5. Na aula de hoje relembrou algum conceito? (use o campo “outros” para dizer o que relembrou)

   ( ) sim

   ( ) não

   ( ) outros

6. Marque as alternativas que descrevem a experiência da aula: (pode marcar quantas quiser e use o campo “outros” se quiser acrescentar mais alguma característica)

   ( ) cansativa

   ( ) descontraída

   ( ) interessante

   ( ) sem importância

   ( ) diferente

   ( ) emocionante

   ( ) outros

7. O que você achou do nível de dificuldade da atividade proposta?

   ( ) baixo

( ) médio

( ) alto

( ) muito alto

( ) outro

8. Você acha que houve relação entre o filme e a aula proposta pelo professor?

( ) sim

( ) não

( ) outro

9. Você tem alguma sugestão de como melhorar a aula?

____

4.7.1 Justificativa das Perguntas

As perguntas de número 1, 2 e 3 tinham como objetivo conhecer melhor o perfil dos estudantes, ressaltando que o formulário não tinha identificação. Conforme fora explicado anteriormente, havia necessidade de repetir a identificação, pois os questionários foram aplicados em momentos distintos.

A pergunta número 4, “Você acha que aprendeu alguma coisa na aula de hoje?”, tinha como objetivo verificar a aprendizagem do estudante e avaliar a eficácia da tarefa matemática aplicada.

A pergunta número 5, “Na aula de hoje, você relembrou algum conceito?”, tinha como objetivo verificar se os conceitos reapresentados na aula, como porcentagens, regra de três, cálculo de volumes, conversão de medidas, foram absorvidos de forma eficiente pelos estudantes. Caso contrário, seria necessária uma intervenção nesse sentido.

A pergunta número 6, “Marque dentre as alternativas, como foi a experiência da aula”, seguida de algumas alternativas, como "cansativa", "interessante", "diferente", tinha como objetivo coletar o impacto da tarefa matemática na perspectiva dos estudantes e fazer ajustes para uma próxima aplicação da tarefa.

A pergunta número 7, “O que você achou do nível de dificuldade da tarefa?”, tinha por objetivo atestar a impressão do professor durante a realização da tarefa e também identificar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, procurando adaptar da melhor forma a tarefa matemática às capacidades dos estudantes envolvidos.

A pergunta número 8, “Você acha que houve relação entre o filme e a atividade proposta pelo professor?”, tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiram perceber a relação entre os vários elementos da aula, tornando a experiência deles a melhor possível ao enxergarem a conexão entre os diferentes momentos da aula.

A pergunta número 9, “Você tem alguma sugestão de como melhorar a experiência da aula?”, tinha por objetivo colocar o estudante no papel de criador de conteúdo, fazendo com que ele se torne sujeito da atividade e não apenas participante. Além disso, ouvir os estudantes é sempre uma ótima maneira de aprimorar a prática pedagógica para futuras aplicações.

4.8 Respostas dos estudantes após o filme

A seguir, apresentamos respostas dadas pelos estudantes no questionário aplicado logo após o filme. Conforme já foi relatado, as perguntas 1, 2 e 3 tinham como objetivo conhecer melhor o grupo que era formado por 10 meninos e 10 meninas com idades entre 16 e 18 anos. Dos 20 estudantes, 19 residem em zona rural e apenas 1 estudante reside em zona urbana.

A segunda parte do questionário que tratava sobre o filme tinha como perguntas:

PERGUNTA 4. “Você já tinha assistido ao filme?” essa pergunta obteve as seguintes respostas:

Tabela 3 – Quantidade de estudantes por gênero

	Meninos	meninas	Total
Não	7	7	14
Sim	3	3	6

Fonte: autor

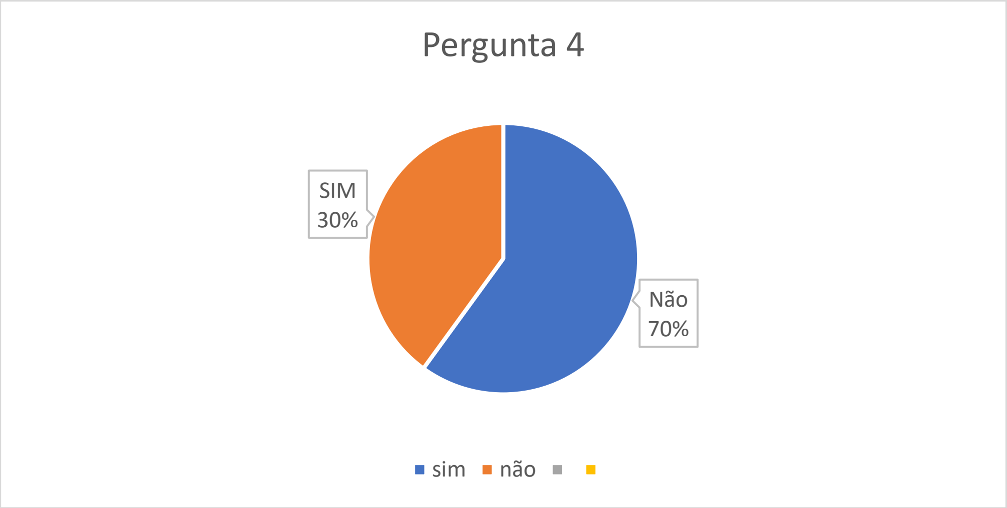


Gráfico 2 - Respostas da pergunta 04

Fonte: autor

Portanto, a escolha do filme mostrou-se interessante, uma vez que 70% dos estudantes ainda não conheciam o filme. Esse fator é importante, pois ao surpreender os adolescentes, é possível “desarmá-los”. E mesmo os que afirmaram conhecer o filme, disseram que gostam da trama e, portanto, valia à pena voltar a vê-lo.

PERGUNTA 5: “No filme, a escola tem um papel fundamental na vila. Você também se sente da mesma forma em relação à sua escola?” as respostas para essa pergunta foram:

Tabela 4 - Respostas da pergunta 05 por gênero

	Meninos	Meninas	Total
Sim	3	9	12
Não	7	1	8

Fonte: autor

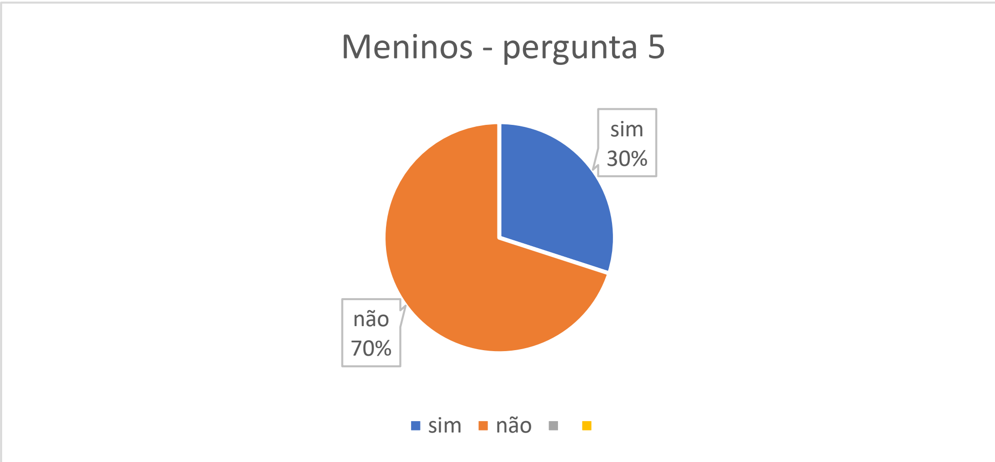


Gráfico 3 - Resposta da pergunta 05 – meninos

Fonte: autor

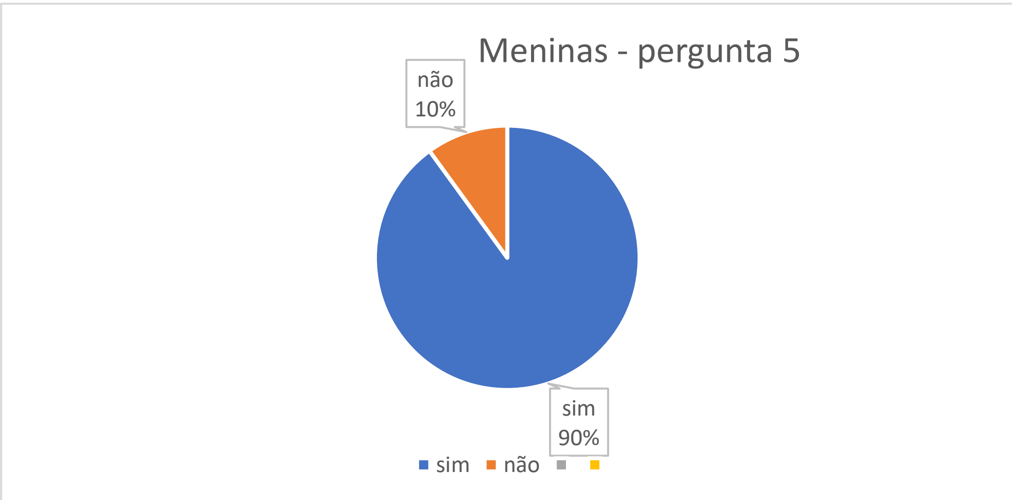


Gráfico 4 - Resposta da pergunta 05 – meninas

Fonte: autor

É interessante observar que, entre as meninas, o grau de satisfação com a escola é de 90%, enquanto entre os meninos é de apenas 40%. Contudo, considerando o total de estudantes, 60% acredita que a escola desempenha um papel transformador. Seria relevante, em trabalhos futuros, investigar se essa disparidade é frequente ou ocasional, local ou generalizada, entre outros aspectos. De maneira geral, parece que já existia, antes da realização desta tarefa, um nível considerável de confiança na escola por parte dos estudantes.

PERGUNTA 6: “Você acredita que o estudo da matemática pode te ajudar a resolver problemas do cotidiano assim como no filme?”

Tabela 5 - Respostas da pergunta 06

	Meninos	Meninas	total
Sim	9	8	17
Não	0	0	0
Sim parcial	1	2	3

Fonte: autor

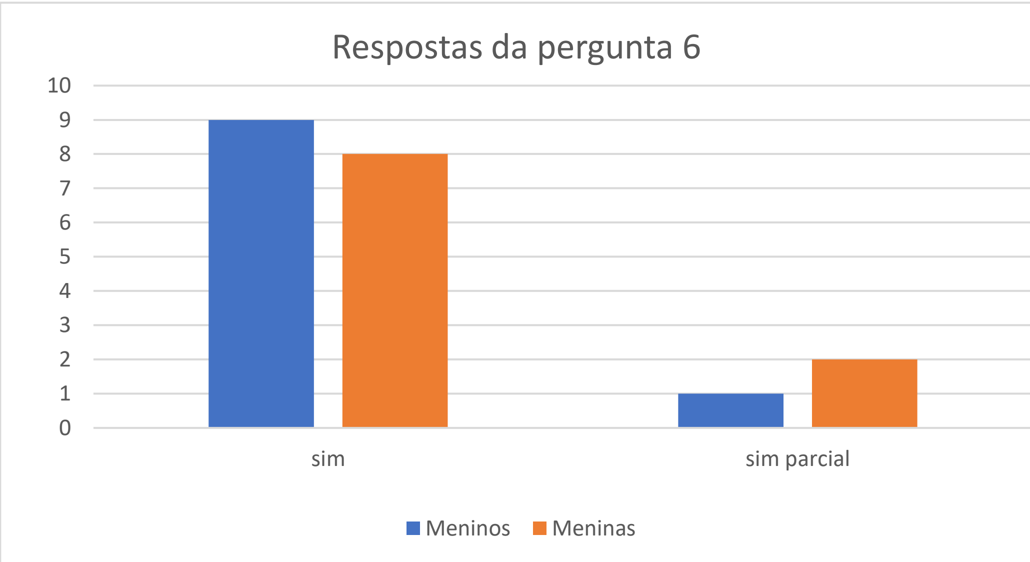


Gráfico 5 - Respostas da pergunta 06

Fonte: autor

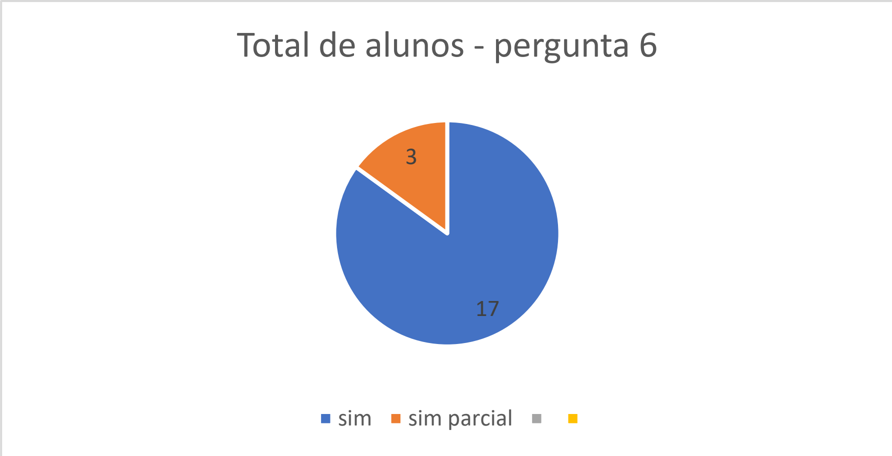


Gráfico 6 - Total de alunos

Fonte: autor

Para essa pergunta, todas as respostas foram positivas, ou seja, todos os alunos acreditam que o estudo da matemática pode ajudá-los de alguma forma. Esse dado é importante, pois revela que há uma grande confiança por parte dos estudantes na disciplina, certamente essa confiança tem papel importante na relação ensino-aprendizagem.

PERGUNTA 7: “Você confia no seu próprio poder de transformar as realidades em sua volta?” para essa pergunta, as respostas foram as seguintes:

Tabela 6 - Respostas da questão 07

	Meninos	Meninas	Total
Sim	8	6	14
Não	2	4	6

Fonte: autor

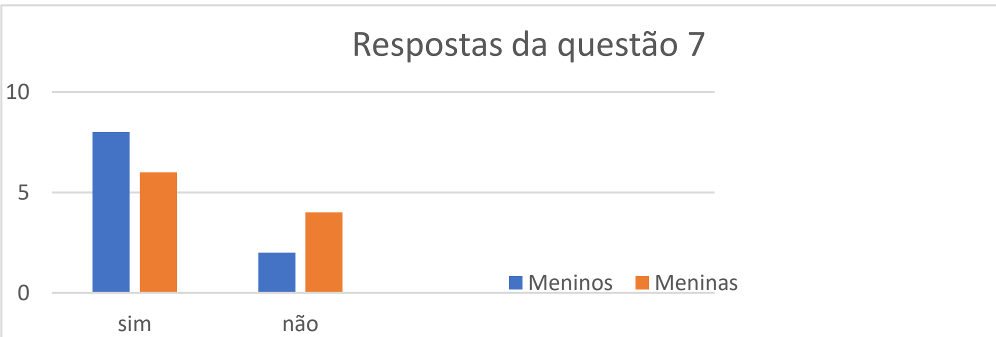


Gráfico 7 - Respostas da pergunta 07

Fonte: autor

Nesse ponto, nota-se que uma parte considerável (3/10) não confia em si como agente transformador. Principalmente para esse grupo, a atividade teve um efeito importante de enxergar que eles têm poder de transformação e, além disso, que a Matemática também pode ser um instrumento de transformação, tanto em suas vidas quanto na sociedade.

4.9 Respostas do questionário após a tarefa

Assim como o primeiro questionário, a parte inicial tinha a função de reconhecer os sujeitos da pesquisa. Ao todo, foram 11 respostas, sendo 9 meninas e 2 meninos, todos moradores de zona rural com idades entre 16 e 17 anos. É importante lembrar que esse questionário foi respondido separadamente e de forma online, logo foi necessário realizar novamente as perguntas iniciais. Além disso, note-se também que o número de respostas foi inferior ao primeiro questionário, que ocorreu de forma presencial.

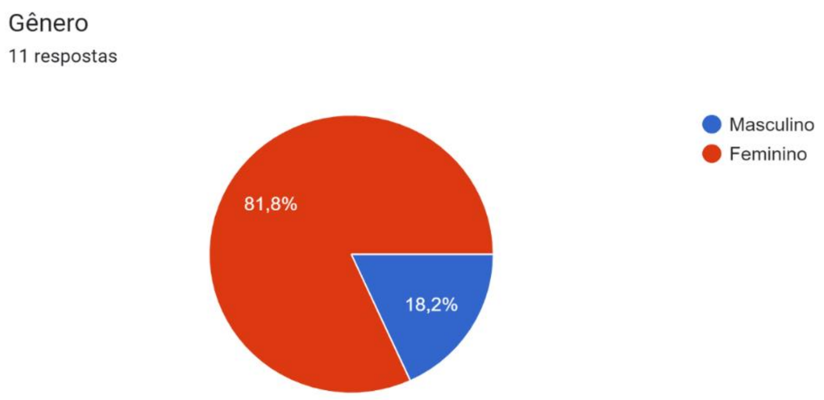


Gráfico 8 - Respostas por gênero

Fonte: autor

No apêndice A, encontram-se as respostas literais dos estudantes. Vamos apresentar os gráficos referentes às respostas para cada pergunta. Para facilitar o entendimento, vamos novamente transcrever as perguntas já citadas anteriormente:

PERGUNTA 1:A partir das respostas, pode-se concluir que todos os alunos aprovaram a experiência, com relatos enfáticos sobre o valor e o alcance da vivência.

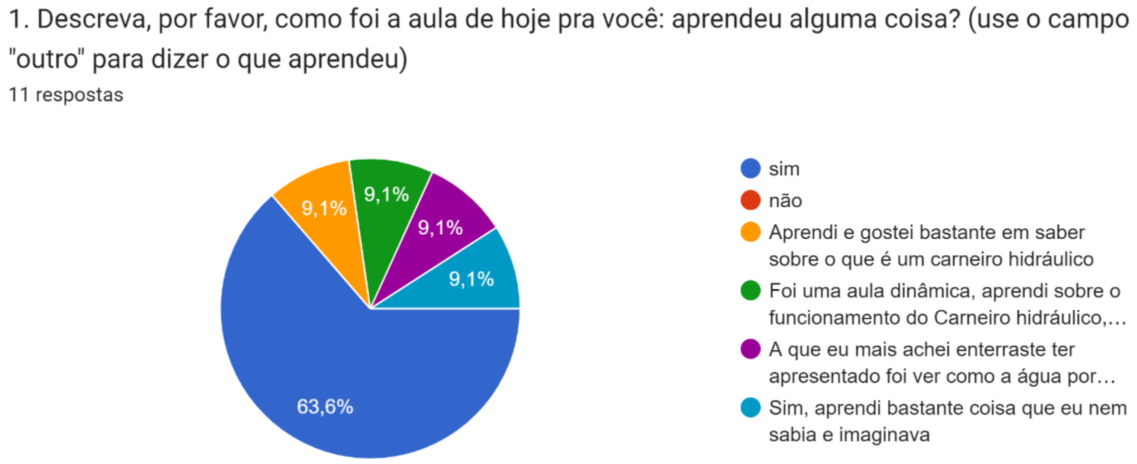


Gráfico 9 - Respostas da pergunta 01

Fonte: autor

relatos verbais dos alunos, levaram-nos a concluir que a experiência do EEM foi muito bem aceita pelos alunos.

PERGUNTA 2 - Apesar da maioria dos estudantes terem dito que não relembraram nada, a impressão professor-pesquisador na hora da discussão coletiva foi outra, contudo, muitos estudantes atestaram que houve aprendizado.

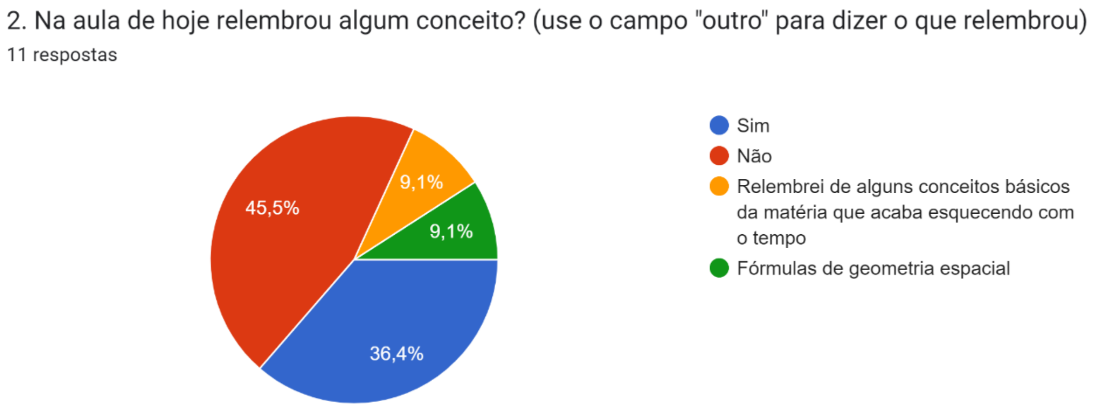


Gráfico 10 - Respostas da pergunta 02

Fonte: autor

PERGUNTA 3 – As respostas indicaram que a experiência foi muito bem aceita pelos estudantes. Nota-se que o adjetivo “interessante” apareceu tem todas as respostas, o que leva a crer que, o ensino da Matemática na perspectiva do EEM é bastante eficaz quando se propõe a envolver os estudantes e proporcionar-lhes meios de desenvolver suas habilidades e seu raciocino lógico -matemático.

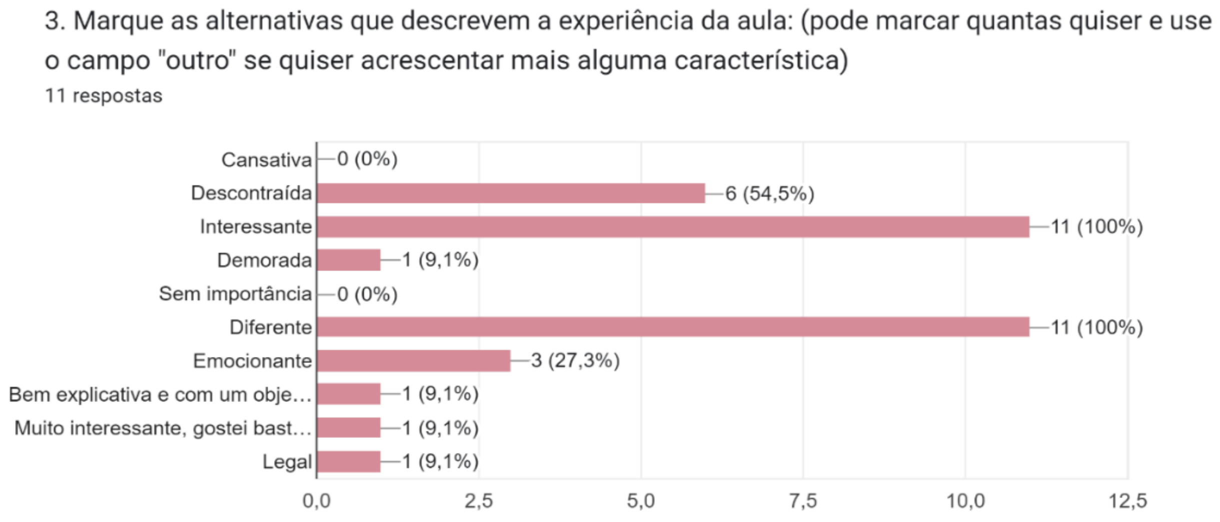


Gráfico 11 - Respostas da pergunta 03

PERGUNTA 4 - Ao analisarmos o percentual de acertos nas resoluções e na produção dos grupos 1 e 4, juntamente com as respostas desta questão, surge uma suspeita de discordância. No entanto, parece que o nível de dificuldade da tarefa foi adequadamente estabelecido, o que poderia viabilizar sua repetição em edições futuras.

Gráfico 12 - Respostas da pergunta 04

PERGUNTA 5 - As respostas indicam que os estudantes absorveram a ideia da tarefa matemática de proporcionar uma relação entre o filme, o conteúdo matemático e a vida cotidiana de cada, se for realmente o caso, poderíamos afirmar que a tarefa matemática obteve êxito nesse quesito.

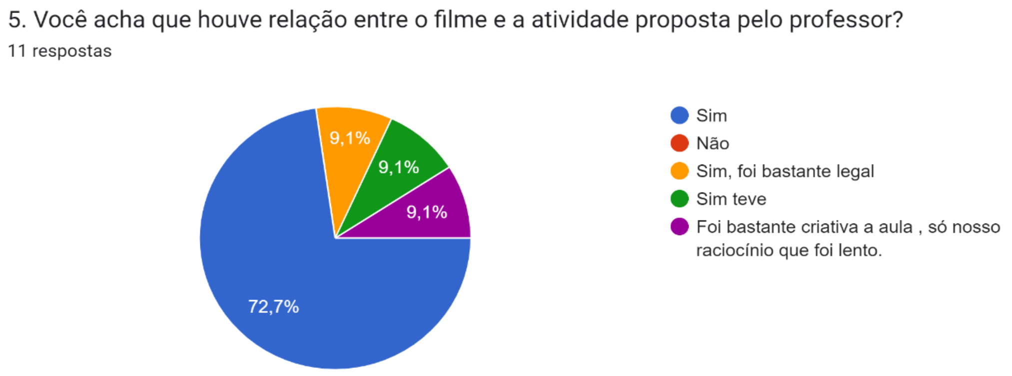


Gráfico 13 - Respostas da pergunta 05

Fonte: autor

PERGUNTA 6 – "Você tem alguma sugestão de como melhorar a experiência da aula? " Abaixo, apresentamos as respostas literais dos estudantes.

Não, eu gostei bastante do jeito que funcionou
Não
Com aulas mais explicativas
Não , a aula foi muito boa
Não, gostei da aula do senhor! Consegui entender tudo e achei bem dinâmica! Parabéns!
não
Melhorar os comandos das questões
Ser mais prática
Tentar colocar a água pra descer de um ponto mais alto pra ter mais pressão
Não, assim está ótima a aula.
Nenhuma,foi excelente a aula

As respostas indicam um alto grau de satisfação, contudo elas revelam alguns pontos que podem ser melhorados numa futura aplicação da tarefa matemática, como por exemplo, a sugestão que diz: “melhorar os comandos das questões”.

5 ANÁLISE DOS REGISTROS DOS ESTUDANTES

Neste capítulo, vamos examinar cuidadosamente os apontamentos feitos por cada um dos quatro grupos envolvidos na tarefa matemática, analisando seus registros e buscando tirar conclusões tanto para o trabalho atual quanto para futuras versões. Para facilitar a compreensão, vamos transcrever novamente as questões da tarefa matemática:

SITUAÇÃO - PROBLEMA

Suponha que um carneiro hidráulico nas mesmas condições do apresentado foi instalado em uma chácara com o intuito de abastecer uma caixa d'água com formato cilíndrico cujo raio mede 1 metro e cuja altura é de 2,5 metros. A caixa é utilizada para atender uma família que consome 600 litros de água por dia.

1. Diga qual a quantidade de água que o carneiro seria capaz de bombear para a caixa em um dia.
2. Encontre a capacidade da caixa em litros.
3. Descubra a fração diária que a caixa é preenchida pelo carneiro hidráulico.
4. Qual o percentual da caixa estaria preenchido após 3 dias? E após 7 dias?
5. Faça uma generalização para obter o percentual de água na caixa a qualquer momento.
6. Encontre em quantos dias a caixa estaria completamente cheia.

5.1 Análise dos registros do Grupo 1

O único registro entregue pelo grupo é a figura abaixo. Eles não utilizaram rascunho e não descreveram suas discussões detalhadamente, então as principais informações sobre sua produção estão nas anotações do professor. A figura refere-se à resolução da questão 01 da tarefa matemática.

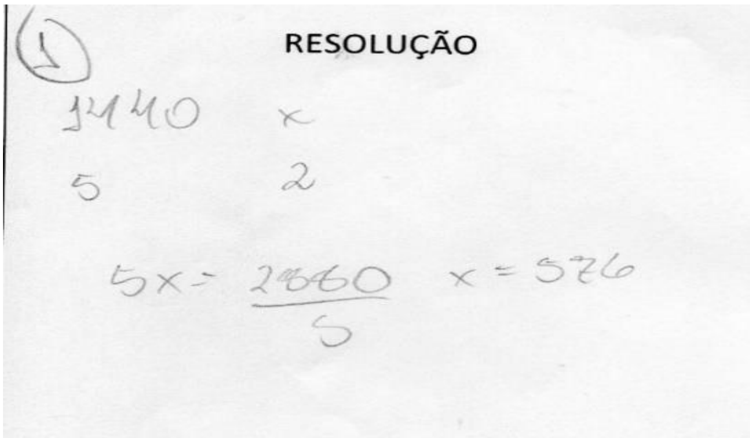


Figura 4 - Registros do grupo 01

Fonte: autor

O grupo encontrou dificuldades para 1iniciar a tarefa matemática, mas isso não significa falta de motivação ou interesse; eles simplesmente tiveram dificuldade em encontrar os caminhos de forma rápida. O professor teve que se aproximar frequentemente e questioná-los para iniciar a resolução dos trabalhos. Ao perceber a dificuldade, o professor perguntou: 'Por onde devemos começar?'. Os estudantes responderam prontamente: 'Boa pergunta!', seguido de risos.

Em seguida, o professor questionou se havia uma maneira, mesmo que trabalhosa, de determinar a quantidade de água que o carneiro pode colocar na caixa. A resposta foi: 'Basta marcar a hora e esperar para ver a quantidade de água'. 'Exato', disse o professor, 'então, o ponto de partida envolve a quantidade de água e o tempo, concordam?'. Após essa intervenção, o professor se afastou, permitindo que discutissem o assunto. No entanto, ao retornar, ainda não haviam conseguido avançar.

O professor novamente questionou: 'Será necessário encher toda a caixa ou é possível fazer uma previsão observando uma quantidade menor?' Os estudantes concordaram entre si com olhares trocados. Novamente, o professor se afastou para que pudessem trabalhar. Quando retornou, o impasse persistia. O professor então trouxe à memória: 'Pensem na garrafa PET e no tempo que levou para enchê-la!' Finalmente, o grupo começou a vislumbrar uma solução. No entanto, os membros estavam tímidos e inseguros, enfrentando dificuldades para expressar suas ideias. Apesar dos esforços do professor em incentivar a participação, a produção deles permaneceu limitada. A cada visita do professor, novas ideias eram introduzidas, mas o mistério em torno da proporção ainda persistia.

Após várias intervenções e um longo tempo decorrido, o professor optou por indicar o uso de uma proporção como abordagem para resolver a questão. Finalmente, os cálculos começaram. No entanto, surgiu um novo problema: não tinham certeza sobre os dados ou a ordem correta dos elementos na proporção. Para começar, fizeram a seguinte tentativa:

$$5\,minutos \quad \rightarrow \quad 2\,litros$$

$$24\,horas \quad \rightarrow \quad X\,litros$$

$$X = \frac{24 * 2}{5}$$

$$X = \frac{48}{5} = 9{,}6\,litros$$

Ao perceber o equívoco de não utilizarem as unidades corretas, o professor questionou: “Será que esse resultado faz sentido? Se em 5 minutos o carneiro enche 2 litros, será possível que em um dia inteiro ele encha apenas 9,6 litros na caixa?” Os estudantes concordaram que algo estava errado. O professor persistiu: “Observem as unidades, lembrem-se de que devem ser as mesmas.” Após essa orientação, eles corrigiram o cálculo:

$$5\,minutos \quad \rightarrow \quad 2\,litros$$

$$1440\,minutos \quad \rightarrow \quad X\,litros$$

$$X = \frac{1440 * 2}{5}$$

$$X = \frac{2880}{5} = 576\,litros$$

e concluíram que a vazão diária seria 576 litros.

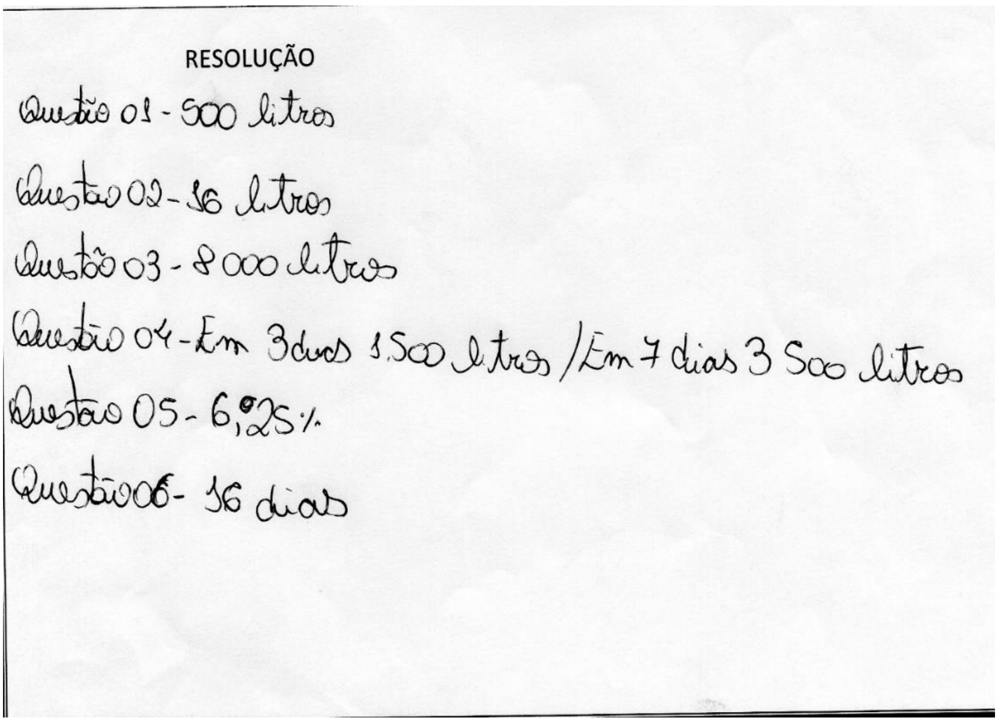
No entanto, mesmo com essa correção, os estudantes ainda não conseguiram analisar esse resultado para perceber que não seria suficiente para atender o consumo diário da família, estabelecido em 600 litros.

5.1.1 Observação sobre os registros do grupo 1

O grupo 01 enfrentou diversas dificuldades na realização da tarefa matemática. Inicialmente, mostraram-se muito inseguros ao expressar suas ideias, sendo atrapalhados pela timidez. No entanto, mesmo diante desses obstáculos, demonstraram interesse, empenho e esforço para superar as barreiras da comunicação e da limitação do conhecimento matemático. Por conta disso, acreditamos que a tarefa foi bem-sucedida para esses estudantes.

5.2 Análise dos registros do grupo 2

O grupo 2 optou por entregar as respostas no espaço próprio e também entregou o seu rascunho, que utilizaremos para analisar sua produção, além dos registros escritos do professor.


RESOLUÇÃO

Questão 01 - 500 litros

Questão 02 - 16 litros

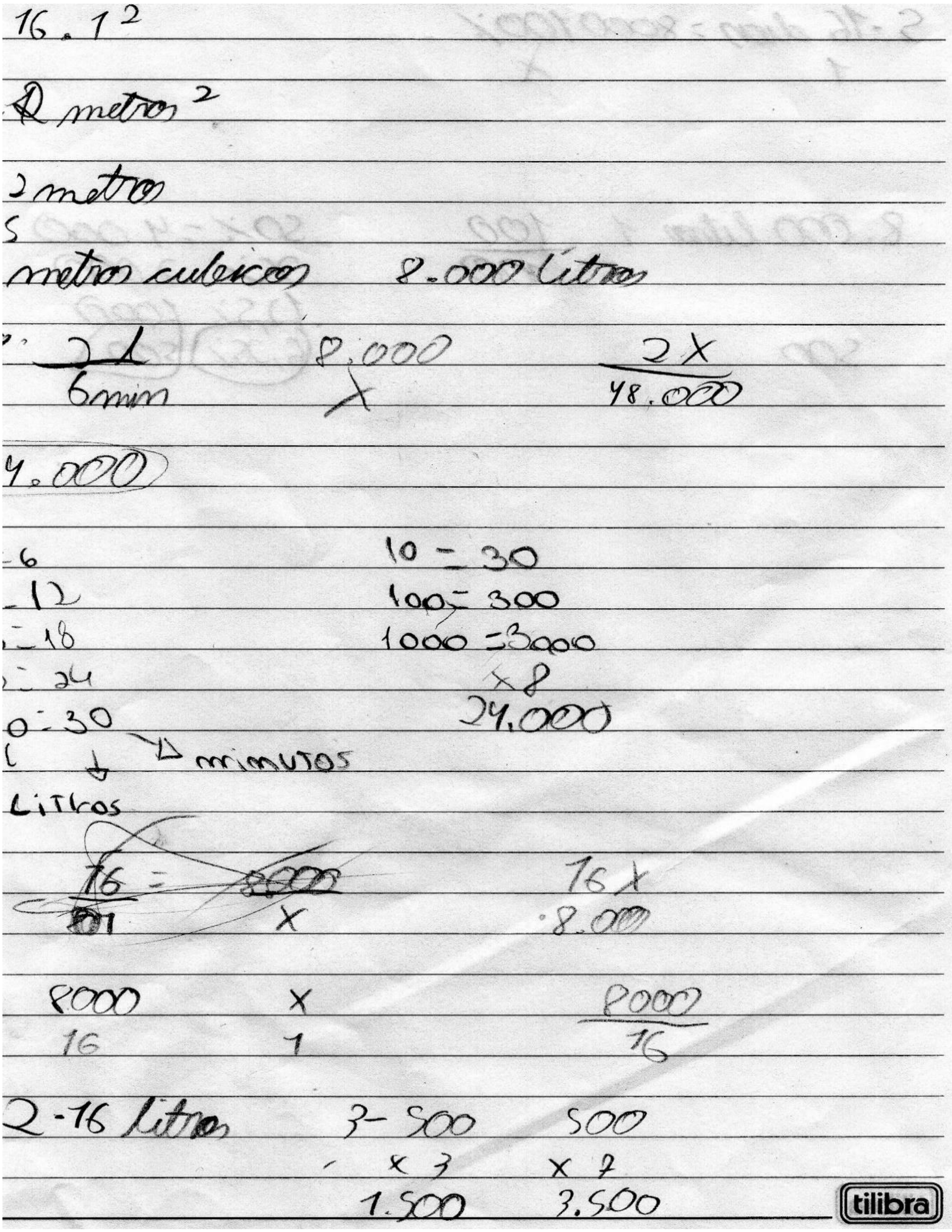
Questão 03 - 8 000 litros

Questão 04 - Em 3 dias 1.500 litros / Em 7 dias 3 500 litros

Questão 05 - 6,25%

Questão 06 - 16 dias

Figura 5 - Registro do grupo 02



16 . 1²

metros²

2 metros

5

metros cubicos 8.000 litros

2 L / 6min 8.000 / X 2X / 48.000

4.000

6
12
18
24
30

10 = 30
100 = 300
1000 = 3000
x 8
24.000

minutos

Litros

16 / 01 = 8000 / X 16X = 8.000

8000 X / 16 1 8000 / 16

2 - 16 litros 7 - 500 500
x 3 x 7
1.500 3.500

Figura 6 - Registro do grupo 02

Fonte: autor

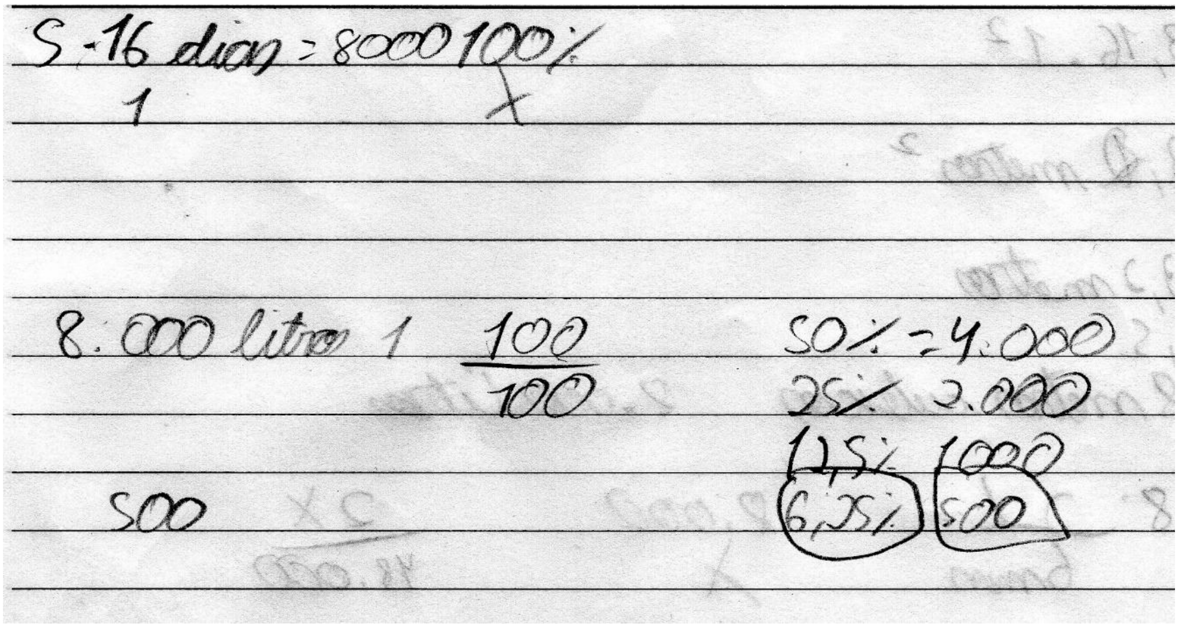


Figura 7 - Registro do grupo 02 - verso

5.2.1 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 01

O grupo 2 demonstrou grande empenho e motivação durante a aplicação da tarefa matemática. Imediatamente após o início, começaram a discutir qual seria o caminho para responder à primeira questão. Surgiram várias ideias, mas preferiram usar um caminho lógico, fazendo o seguinte raciocínio: se foram necessários 6 minutos para encher 2 litros, logo, seriam necessários 12 minutos para 4 litros; 18 minutos para 6 litros; 24 minutos para 8 litros e 30 minutos para 10 litros, a partir daí, concluíram que em 300 minutos (multiplicando por 10) haveria 100 litros e em 3000 minutos (novamente multiplicando por 10) haveria 1000 litros e como um dia possui aproximadamente 1500 minutos (1440, na verdade) dividiram esse último resultado por 2 e concluíram que após um dia haveria 500 litros de água na caixa d'água. Não obstante o equívoco, pois o valor correto que deveriam ter chegado era de 480 litros, vale à pena destacar o raciocínio lógico por detrás do mecanismo utilizado pelos estudantes.

Enquanto monitorava, o professor optou por não interferir nesse processo de raciocínio na esperança que o grupo percebesse por si só o equívoco, porém mesmo após as intervenções feitas por ele, o grupo insistiu em responder 500 litros, ao que o professor optou por não interferir e garantir que percebessem o equívoco durante a discussão geral no quadro.

5.2.2 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 02

O grupo 2 demonstrou conhecimento ao considerar que capacidade e volume são sinônimos. Após uma breve discussão, chegaram à conclusão de que o volume poderia ser calculado utilizando a fórmula $V = \pi . r^2 . h$, onde V é o volume, r é o raio e h é a altura do cilindro. A discussão em torno do valor de π foi interessante. Inicialmente, alguns membros do grupo afirmaram que π era exatamente 3,14. Quando questionado sobre isso, o professor respondeu: “Esse é um número irracional! O que isso significa?” Após um momento de reflexão, os estudantes responderam: “Significa que ele é infinito”, e o professor continuou: “Como assim?” Um dos alunos explicou: “O número de casas decimais após a vírgula é infinito”. O professor elogiou a resposta e questionou: “Então, quais são as quatro primeiras casas decimais?” Após consultarem a calculadora científica, responderam: “3,1416”. O professor confirmou: “Correto”. “Então, quantas casas decimais devemos usar?” perguntou novamente, e os estudantes responderam: “Quantas quisermos!” O professor concordou: “Exatamente”.

Decidiram, portanto, utilizar a aproximação de 3,2. Após esse diálogo, alguns alunos comentaram: “Finalmente entendi por que chamamos Pi de 3,14!” E assim, resolveram a questão 02 com base nesse entendimento:

$$V = \pi . r^2 . h$$

Apesar da escolha pouco convencional feita pelo grupo, o professor optou por não intervir no resultado, permitindo que os estudantes, por meio de discussões coletivas, percebessem o equívoco na sua aproximação. A decisão do professor visava reforçar a natureza exploratória da tarefa. Ele queria que, ao se depararem com um resultado mais próximo da realidade, os estudantes compreendessem que, no processo científico, a busca pela verdade está diretamente relacionada à escolha da margem de erro, à precisão dos equipamentos de cálculo utilizados e às intenções dos pesquisadores. Todas essas escolhas exercem influência nos resultados finais.

Também é relevante mencionar a discussão que surgiu em relação ao resultado obtido. Após determinarem a capacidade como sendo de 8 metros cúbicos, surgiu a necessidade de converter esse valor para litros. Durante as conversas, um dos membros do grupo lembrou de uma experiência anterior, onde aprendeu com seu tio que a conversão de metros cúbicos para litros bastava multiplicar por 1000. Com base nisso, concluíram que a caixa teria uma capacidade de 8.000 litros.

Os colegas expressaram dúvidas em relação a essa afirmação e pediram a intervenção do professor. O professor questionou o estudante: 'Em que seu tio trabalha?' O estudante respondeu: 'Ele trabalha cuidando de piscinas.' O professor continuou: 'Por que seu tio precisa desse conhecimento?' O estudante explicou: 'Ele precisa calcular o volume de água na piscina para aplicar os produtos corretamente!' O professor concordou: 'Muito interessante! Seu tio está correto, e, portanto, você também está!' Com essa validação, todos os outros membros do grupo aplaudiram o estudante, que ficou orgulhoso por ter acertado a resposta da questão. Assim, concluíram que o volume da caixa era V = 8 * 1000 = 8000 litros.

5.2.3 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 03

A resposta do grupo para essa questão foi “16 litros”. Não há registros detalhados sobre a resolução da questão deixados pelo grupo, mas uma possibilidade é que eles tenham utilizado o seguinte raciocínio: dado que a capacidade da caixa é de 8000 litros e a vazão é de 500 litros por dia (resultado obtido na questão 01), concluíram que 8000 divididos por 500 resultaria em 16. No entanto, o cálculo correto deveria ser o inverso, ou seja, 500 divididos por 8000, que é igual a 5/80, equivalente a 0,0625 ou 6,25%.

Além disso, é crucial enfatizar que para o correto cálculo dessa questão, era necessário levar em consideração o consumo diário da família, que era de 600 litros. Com essa vazão de 500 litros por dia, o carneiro seria insuficiente até mesmo para atender ao consumo da família. Logo, não haveria preenchimento diário de nenhuma fração da caixa pela vazão do carneiro, e que, portanto, a família deveria ser alertada quanto à necessidade de se obter um dispositivo de bombeamento de água mais eficaz, poderiam, inclusive, sugerir uma vazão a partir da necessidade de água dessa família, mas, infelizmente, não foi o que aconteceu, porém, apesar do equívoco, houve aprendizado nesse momento da exposição, em concordância com (Abrahão, 2007):

> É de fundamental importância que no processo de construção dos conceitos pela criança, os erros sejam considerados como degraus para futuros acertos. Isto porque estes erros estão indicando o que a criança está pensando e é nisso que o professor deve deter-se: no pensar do aluno a fim de compreendê-lo e assim poder desafiá-lo a encontrar outras respostas. (Abrahão, 2007, p.190)

Mais uma vez, o professor preferiu não intervir na decisão do grupo, permitindo que o erro fosse corrigido durante a discussão coletiva. Essa decisão se alinha ao estudo de Canavarro, que destaca a importância de permitir que os alunos cometam erros e aprendam através desses erros durante o processo de aprendizagem.

5.2.4 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 04

A partir da resposta obtida na questão 01 (500 litros por dia), o grupo decidiu usar o seguinte raciocínio: 1 dia são 500 litros, logo 3 dias são 1500 litros e 7 dias são 3500 litros. Dentro do contexto, as respostas apresentadas pelo grupo estão parcialmente corretas, não estão completamente corretas, pois a questão pedia os percentuais, e além disso, o mais importante é que o grupo não levou em consideração o consumo diário de 600 litros da família. Logo, as respostas deveriam ser as seguintes (sem considerar o consumo):

$$em\ 3\ dias:$$

$$\frac{1500\ (volume\ após\ 3\ dias)}{8000\ (volume\ total)} = \frac{15}{80} = 18{,}75\%$$

$$em\ 7\ dias$$

$$\frac{3500\ (volume\ após\ 7\ dias)}{8000\ (volume\ total)} = \frac{35}{80} = 43{,}75\%$$

Nota-se que apesar das respostas incompletas, os estudantes demonstraram uma boa capacidade de raciocínio lógico e chegaram aos resultados até mesmo com certa facilidade. Como já foi dito, essa questão era um “trampolim”, ou seja, ela tinha o objetivo de preparar a generalização que seria pedida na questão seguinte.

5.2.5 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 05

Eleita por todos os estudantes como a questão mais difícil da tarefa, os estudantes do grupo não conseguiram resolvê-la. No entanto, vale à pena analisar a resposta apresenta de 6,25%. O raciocínio utilizado foi o seguinte: como o volume total era de 8000 litros, (resultado da questão 03) a metade disso, ou seja, 4000 litros, representava 50% do total; subsequentemente, a metade de 4000 litros, equivalente a 25%, correspondia a 2000 litros; continuando a redução pela metade, 12,5% equivalia a 1000 litros; por fim, a metade de 1000, 500 litros, resultava em 6,25%, que era a capacidade diária do carneiro. A partir daí, bastava entender que a expressão pedida poderia ser obtida apenas fazendo uma relação entre o volume e o número de dias:

$$\boxed{V(d) = 0{,}0625 * d}$$

Contudo, mesmo que conseguissem chegar a esse resultado, ainda faltaria desconsiderar os 600 litros diários de consumo da família. Essa abordagem demonstra que eles desenvolveram um raciocínio interessante, que com um pouco mais de tempo e esforço poderia resultar na resposta correta.

5.2.6 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 06

Inicialmente, esperava-se que os estudantes resolvessem essa questão a partir da questão anterior, da seguinte forma:

$$V(d) = 0{,}0625 * d$$

$$100\% = 0{,}0625 * d$$

$$\frac{100\%}{0{,}0625} = \frac{0{,}0625}{0{,}0625} * d$$

$$d = 16\ dias$$

Contudo, o grupo usou uma regra de três para responder à questão, o raciocínio foi o seguinte:

$$1\ dia \ \ \rightarrow 6{,}25\%$$

$$X\ dias\ \rightarrow 100\%$$

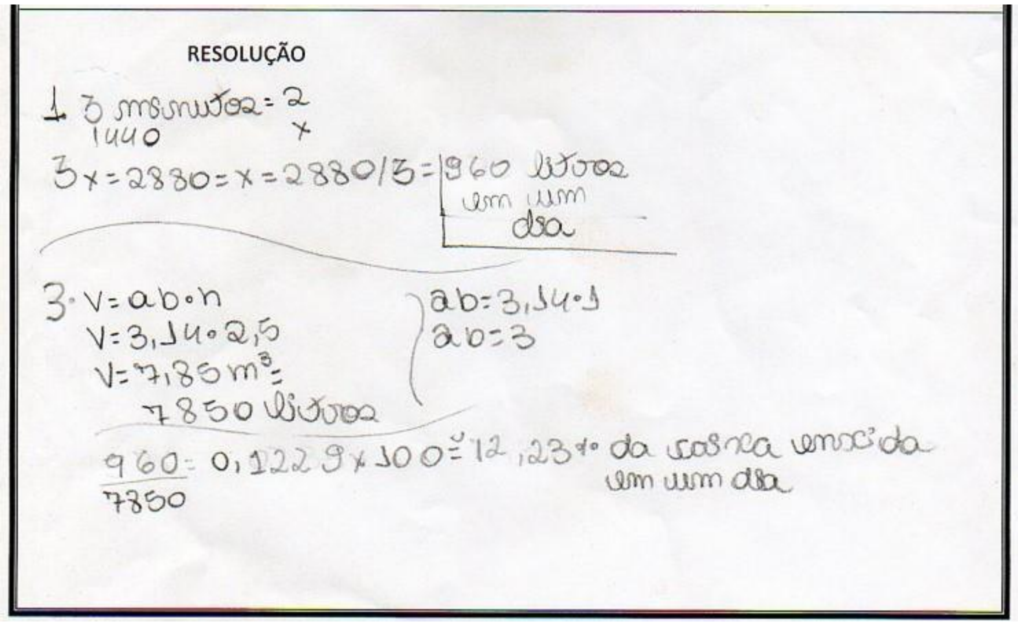
$$X = \frac{100 * 1}{6{,}25} = 16\ dias$$

Mais uma vez, insistimos que esse resultado só estaria correto se não houvesse o consumo de 600 litros diários. Não obstante, a capacidade de raciocínio lógico dos estudantes deve ser louvada, além do fato de demonstrarem conhecimento das razões e proporções.

De modo geral, o desempenho do grupo 02 foi excelente. Eles se mostraram entusiasmados com a tarefa matemática, evidenciando empenho, conhecimento, interesse e participação ativa. Demonstraram habilidades sólidas de análise e resolução de problemas, além de dominar conceitos anteriores, como função, vazão e volume. Concluíram cinco das seis questões dentro do prazo estabelecido. Durante a realização da tarefa, houve um diálogo significativo entre os membros do grupo, permitindo a troca de ideias e a expressão matemática de seus pensamentos

5.3 Análise dos registros do grupo 3

O grupo 3 utilizou a própria folha para registrar seus resultados e não entregou seus rascunhos. Assim como o grupo 2, os estudantes desse grupo se mostraram bastante motivados para a realização da tarefa, e da mesma forma, assim que foi dado o comando, iniciaram as atividades de resolução



RESOLUÇÃO

1. 3 minutos = 2
1440 — x

$3x = 2880 = x = 2880/3 = 960$ litros em um dia

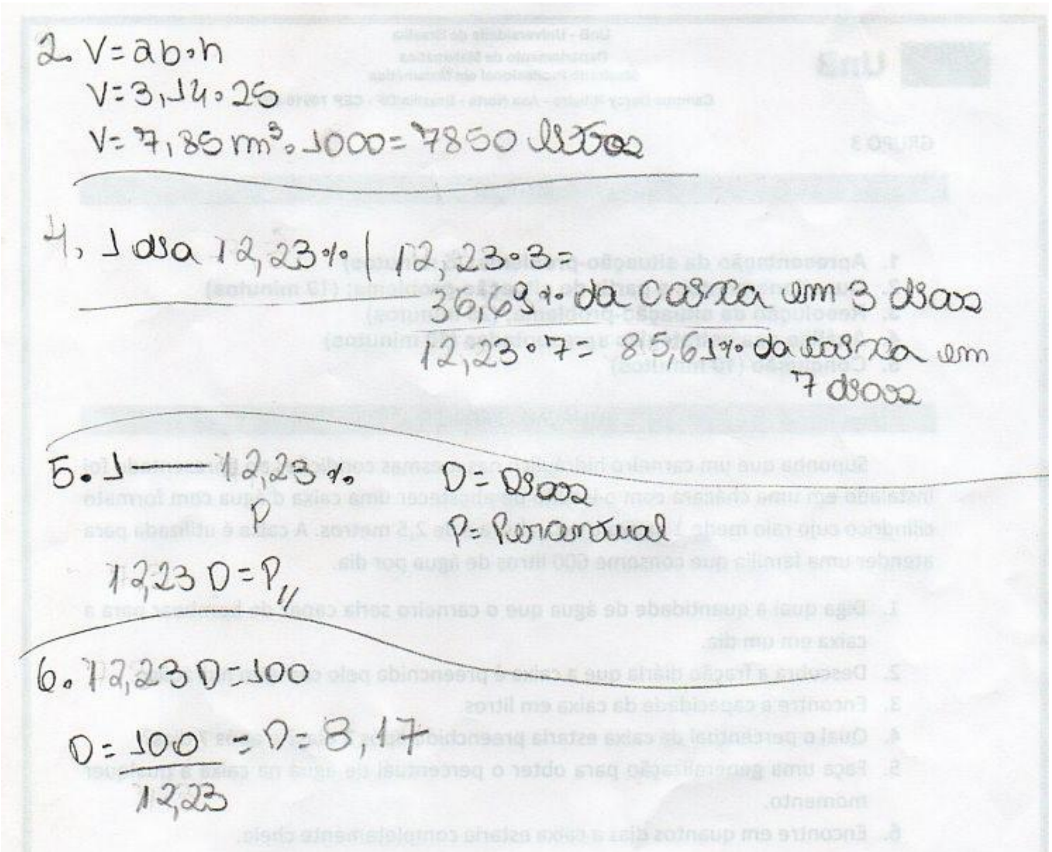
3. $V = ab \cdot h$
$V = 3{,}14 \cdot 2{,}5$
$V = 7{,}85\ m^3 =$
7850 litros

$ab = 3{,}14 \cdot 1$
$ab = 3$

$\frac{960}{7850} = 0{,}1229 \times 100 \cong 12{,}23\%$ da caixa enchida em um dia

Figura 8 - Registros do grupo 03

Fonte: autor



2. $V = ab \cdot h$
$V = 3{,}14 \cdot 25$
$V = 7{,}85\ m^3 \cdot 1000 = 7850$ litros

4. 1 dia 12,23% | $12{,}23 \cdot 3 =$ 36,69% da caixa em 3 dias
$12{,}23 \cdot 7 =$ 85,61% da caixa em 7 dias

5. 1 — 12,23%   D = Dias
P   P = Percentual
$12{,}23\,D = P$

6. $12{,}23\,D = 100$
$D = \frac{100}{12{,}23} = D = 8{,}17$

Figura 9 - Registros do grupo 03

5.3.1 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 01

Inicialmente, o grupo enfrentou certa dificuldade em determinar o ponto de partida para resolver a questão e procurou orientação do professor. Este, por sua vez, encorajou os estudantes a adotar uma abordagem simples e natural em relação ao problema, utilizando as informações disponíveis para encontrar a resposta. A partir desse direcionamento, o grupo decidiu considerar um tempo de 3 minutos para que o carneiro enchesse a garrafa PET de 2 litros e aplicou uma regra de três simples para chegar ao resultado correto.

$$3\ minutos\ \rightarrow 2\ litros$$

$$1440\ minutos\ \rightarrow X\ litros$$

$$X = \frac{2 * 1440}{3} = 960\ litros\ em\ um\ dia$$

5.3.2 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 02

Para a resolução dessa questão, os alunos unanimemente sugeriram utilizar a fórmula do volume, provando entenderem que volume e capacidade são sinônimos. Também demonstraram dominar o assunto, pois não tiveram dificuldades em enunciar a fórmula usada no Ensino Médio para o cálculo do volume de um cilindro e calcularam a capacidade da seguinte forma:

$$V = ab.h$$

$$V = 3{,}14 * 1 * 2{,}5$$

$$V = 7{,}85\ m^3$$

No grupo atual, assim como no anterior, houve um debate sobre o valor de Pi a ser utilizado. O professor solicitou que os estudantes compartilhassem o que sabiam sobre esse número. Um dos estudantes afirmou: 'É um número irracional, ou seja, é infinito e não periódico.' O professor respondeu: 'Excelente.' Ele então perguntou aos estudantes se lembravam dos primeiros números após a vírgula decimal, e em coro, responderam: '3,14.' O professor concordou, mas questionou o que aconteceria se utilizassem mais casas decimais. Novamente, os estudantes responderam: 'Quanto mais números usarmos, mais próximo do resultado chegaremos.' O professor afirmou: 'Muito bem. Vocês concordam que essa é uma decisão do grupo? E que ela depende do grau de precisão que desejam alcançar?' Os estudantes concordaram, e assim decidiram utilizar a aproximação de 3,14.

Assim como o grupo 2, eles também enfrentaram certa dificuldade em converter metros cúbicos em litros, solicitando a assistência do professor para realizar a conversão de maneira correta. Ao se aproximar do grupo, o professor questionou: “O que vocês se lembram sobre isso?” Um dos estudantes respondeu: “Existe uma relação entre litros e centímetros cúbicos, eu acho.” O professor estimulou a resposta: “Quase isso.” O aluno se autocorrigiu: “1 litro equivale a decímetro cúbico?” O professor confirmou: “Exatamente.” O estudante percebeu: “Ah, então basta multiplicar a quantidade de litros por mil, certo, professor?” O mestre respondeu: “Sim.” Dessa forma, a solução final apresentada foi: V = 7,85*1000= 7850 litros.

5.3.3 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 3

A resolução apresentada pelo grupo foi excelente, realizaram exatamente o que era esperado. A única exceção a isso foi o fato de não terem levado em consideração o consumo diário de 600 litros, assim como o grupo 2. Nesse caso também, o professor não realizou nenhuma intervenção, esperando esclarecer o equívoco durante a discussão em grupo. Ele apenas observou o trabalho enquanto monitorava a tarefa matemática. Eis como resolveram o problema: a partir do resultado obtido na questão 01 (960 litros) e do resultado obtido na questão 02 (7850 litros) montaram a seguinte divisão:

$$\frac{960}{7850} = 0{,}1229$$

Esse resultado foi reescrito na forma percentual, chegando a 12,29% da caixa preenchida a cada dia.

Vale à pena lembrar que o resultado correto seria $\frac{960-600}{7850} \cong 0{,}046 = 4{,}6\%$ preenchida diariamente.

5.3.4 Observações sobre o desenvolvimento QUESTÃO 04

Mais uma vez a resolução da questão pelo grupo seguiria conforme o esperado, não fosse o problema do consumo de 600 litros diários. A partir do resultado anterior, eles obtiveram a resposta para o problema.

$$1\ dia \rightarrow 12{,}23\%\ da\ caixa$$

$$3\ dias\ \rightarrow 12{,}23\% * 3 = 36{,}69\%\ da\ caixa$$

$$7\ dias\ \rightarrow 12{,}23\% * 7 = 85{,}61\%\ da\ caixa$$

Os resultados esperados eram:

$$1\ dia \rightarrow 4{,}6\%\ da\ caixa$$

$$3\ dia \rightarrow 4{,}6\% * 3 = 13{,}8\%\ da\ caixa$$

$$7\ dias\ \rightarrow 4{,}6\% * 7 = 32{,}2\%\ da\ caixa$$

Apesar da discordância, os resultados apresentados pelo grupo foram ótimos: a capacidade de organizar as ideias; de manipular os dados e interpretá-los foram realmente muito interessantes.

5.3.5 Observações sobre o desenvolvimento QUESTÃO 05

Apesar de ser considerada a questão mais difícil da tarefa matemática, o grupo conseguiu apresentar uma solução para o problema. No entanto, o resultado apresentado não está totalmente correto devido ao uso da informação da questão 02 (que continha um erro). Não obstante, é importante destacar que a solução apresentada demonstrou que os integrantes do grupo possuem uma boa compreensão do conceito de função e como esse conceito foi aplicado neste caso.

O raciocínio do grupo foi o seguinte: o percentual total é igual ao percentual diário multiplicado pela quantidade de dias. P(d) = 12,25%.d

5.3.6 Observações sobre o desenvolvimento QUESTÃO 06

Mais uma vez o grupo demonstrou domínio dos conteúdos e compreensão do que pedia a tarefa matemática, pois apesar do equívoco já mencionado, eles apresentaram a solução esperada para o problema, ou seja, a partir do resultado da questão anterior, substituíram P(d) por 100%, logo:

$$P(d) = 12{,}25\%.d$$

$$100\% = 12{,}25\%.d$$

$$\frac{100\%}{100\%} = \frac{12{,}25\%.d}{100\%}$$

$$d = 8{,}17\ dias$$

A resposta poderia ser ainda mais completa, transformando a fração 0,17 dias em horas, da seguinte maneira:

$$1\ dia\ \rightarrow 24\ horas$$

$$0{,}17\ dias\ \rightarrow x\ horas$$

$$x = 24 * 0{,}17 = 4{,}08$$

Ou seja, seriam necessários oito dias e 4 horas para que a caixa ficasse completamente cheia (desconsiderando, nesse caso, o consumo diário de 600 litros).

De maneira geral, o grupo 03 se destacou ao apresentar as melhores respostas, demonstrando um excelente conhecimento matemático prévio. Além disso, mostraram-se versáteis, organizados, eficientes, eficazes e muito participativos. Os membros do grupo colaboraram intensamente, compartilhando diversas ideias e conhecimentos. O resultado final apresentado por eles foi extremamente encorajador.

5.4 Análise dos registros do grupo 4

Assim como o grupo 1, o grupo 4 também apresentou dificuldades para a realização da tarefa, apesar das constantes intervenções do professor, eles apenas conseguiram resolver a questão 01. Apesar de serem também muito tímidos e inseguros, havia um integrante no grupo que se destacou pelo esforço em resolver a tarefa e envolver os demais membros.

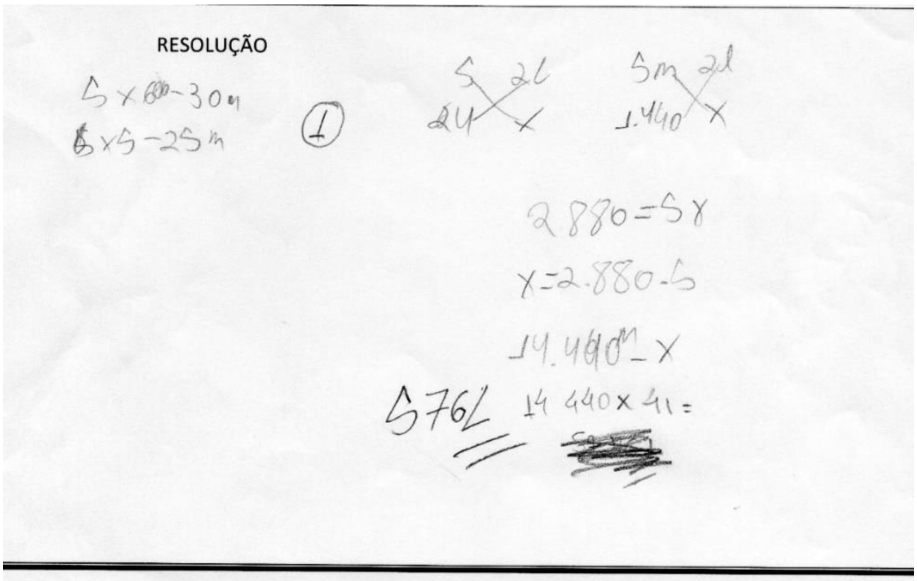


Figura 10 – Registros do grupo 04

Fonte: autor

Ao iniciarem o trabalho, passaram vários minutos tentando encontrar um ponto de partida sem sucesso. Pediram ajuda ao professor, que ao chegar no grupo, lhes fez a seguinte pergunta: “Por onde devemos começar?” Ao que responderam: “É exatamente o que queremos saber”, entre sorrisos. O professor, então, mais uma vez, sugeriu que pensassem em uma forma muito simples de determinar quanto tempo levaria até a caixa d’água ficar completamente cheia. Eles responderam que bastava marcar o tempo e esperar. “Correto”, disse o professor, “mas será que precisamos esperar a caixa encher?” questionou novamente. Eles hesitaram por um momento e depois disseram: “Se soubermos a relação entre a quantidade de água e o tempo, podemos prever.” “Muito bem”, disse novamente o professor, “é esse o ponto de partida. Lembrem-se do tempo gasto para encher a garrafa PET!” Iniciou-se uma discussão sobre o tempo em questão. Ao retornar ao grupo, o professor foi informado de que a estimativa de tempo escolhida pelo grupo era de 5 minutos.

Com base nessa informação, o grupo iniciou um debate sobre como poderiam chegar ao resultado, mas sem conseguir sucesso, chamaram novamente o professor. “Devemos fazer uma multiplicação?” perguntaram. “Sim”, disse o professor, “mas é preciso tomar certos cuidados”, e foi assim que eles perceberam que a resposta poderia ser obtida por meio de uma proporção.

Sua primeira tentativa não levou em consideração a diferença entre horas e minutos, e ao chegar ao resultado 9,6 não sabiam como interpretá-lo:

$$5\ minutos \rightarrow 2\ litros$$

$$24\ horas\ \rightarrow x\ litros$$

$$x = \frac{24 * 2}{5} = 9{,}6$$

Eles pediram, mais uma vez, a intervenção do professor. “Qual a unidade de medida?” perguntou ele, mas os estudantes não conseguiram responder. O professor insistiu: “Horas ou minutos?” Novamente, a resposta foi “Não sabemos”. O professor concluiu: “Realmente, não dá para saber, pois vocês usaram duas unidades diferentes. Para ter certeza, precisam utilizar a mesma unidade: horas ou minutos!” Após essa intervenção, decidiram transformar 24 horas em minutos, chegando a 1440, e então, refizeram os cálculos. Porém, cometeram um pequeno equívoco como se pode notar na imagem da resolução entregue pelo grupo, o professor interviu mais uma vez e, apesar de não terem alterado os cálculos, registraram a resposta correta.

$$5\ minutos \rightarrow 2\ litros$$

$$1440\ minutos\ \rightarrow x\ litros$$

$$X = \frac{1440 * 2}{5} = \frac{2880}{5} = 576\ litros$$

Assim que chegaram a esse resultado, o professor lhes perguntou: “o que podemos concluir a partir desse resultado?” ele esperava que a resposta fosse: “que um carneiro com essa vazão, não é capaz nem mesmo de suprir o consumo diário da família” , mas os estudante não conseguiram chegar a essa conclusão sozinhos e, enquanto ainda não tinham começado a resolver a questão 02, o tempo estipulado chegou ao fim.

5.4.1 Observações sobre o desenvolvimento da QUESTÃO 01

Vale muito à pena ressaltar que parece que houve aprendizado por parte do grupo, pois claramente recordaram conceitos importantes como o da razão e proporção e também fizeram uma ligação entre esse conteúdo e a prática.

Os estudantes relataram ainda que ficaram muito impactados com a descoberta da parte deles da existência de um dispositivo como o carneiro hidráulico e que iriam pesquisar para aprender mais sobre essa novidade, logo, podemos concluir que houve aprendizado por parte dos estudantes.

6 Considerações finais

Ao longo desta dissertação, buscamos investigar de que modo uma tarefa matemática sobre o conceito de função linear, utilizando um carneiro hidráulico em uma abordagem do Ensino Exploratório de Matemática, contribui para a aprendizagem dos estudantes. Partindo do objetivo geral, surgiram objetivos que visavam evidenciar o papel transformador da escola tanto como provedora de conhecimento quanto como espaço de interação, observação e aprendizado.

Após todas as etapas da tarefa matemática concluídas, é inevitável concordar com pesquisadores como De Sousa Silva e Pereira (2021), Dos Santos Silva e Pitanga (2012) e Da Silva Santiago et al. (2022) quando dissertam sobre as dificuldades encontradas no estudo da função afim. No grupo de alunos onde a pesquisa foi realizada, no início da atividade, uma grande parte demonstrou dificuldades em organizar as suas ideias. Identificar por que essas dificuldades surgiram merece um estudo mais aprofundado. No entanto, verificamos, com base nos relatos verbais e nos registros escritos dos estudantes, que a prática ajudou muitos deles a tornar isso um pouco mais fácil, pois a metodologia usada os organizou divididos em grupos onde a discussão e o diálogo eram privilegiados.

Foi muito interessante notar que já no debate inicial, alguns discentes em alguns grupos assumiram a liderança, manipulando e interpretando os dados apresentados, o que trouxe inspiração para os demais.

De maneira geral, os grupos 2 e 3 se destacaram ao apresentar as melhores respostas, demonstrando um excelente conhecimento matemático prévio. Além disso, mostraram-se versáteis, organizados, eficientes, eficazes e muito participativos. Os membros do grupo colaboraram intensamente, compartilhando diversas ideias e conhecimentos. O resultado final apresentado por eles foi extremamente encorajador.

Outro ponto que merece destaque foi o domínio apresentado por muitos estudantes dos conteúdos matemáticos pré-requisitos exigidos. Foi gratificante notar que a prática contribuiu para fortalecer a compreensão de como as funções atuam como conectores entre grandezas, neste caso, entre a vazão do carneiro e o volume da caixa d'água nos estudantes. É verdade que os estudantes dos grupos 1 e 4 apresentaram várias lacunas de conteúdo; contudo, parece que a prática os ajudou, como os próprios estudantes relataram nos questionários aplicados após a tarefa.

É necessário pontuar ainda sobre a dificuldade de generalização, que era o um ponto crucial da atividade e acabou por revelar-se a maior fragilidade de todos os grupos, uma vez que nenhum deles conseguiu concluir corretamente a questão. De fato, como afirmam Da Silva Pitanga e Santiago (2022), generalizar é um desafio a ser enfrentado pelos educadores matemáticos. A prática, porém, trouxe resultados animadores também nesse quesito, pois no momento da discussão coletiva, o professor-pesquisador notou uma maior afinidade, um melhor entendimento, uma maior aproximação por parte dos discentes do que numa situação de aula tradicional. Nesse momento, o paradigma do exercício de Skosomove deixou clara a sua veracidade.

Quanto às discussões matemáticas interessantes, devemos destacar aquela que se deu sobre o número Pi. Claramente, muitos estudantes ainda não haviam compreendido bem o que significava usar sua aproximação. Não entendiam, inclusive, de onde o número surgia e nem por que seu valor mais conhecido é 3,14. Durante a realização da tarefa, e de modo especial durante as discussões coletivas, a surpresa e a gratificação nos seus registros verbais levaram a crer que houve aprendizado matemático, fato confirmado pelos aplausos espontâneos que surgiram após a discussão.

Com relação aos níveis cognitivos de Ponte (2014), cremos que a tarefa apresentou questões de nível reduzido (questões de 01 a 04) e uma questão de nível elevado (questão 05), justamente a questão que exigia uma generalização. Em relação à estrutura, a tarefa realizada foi aberta, uma vez que os resultados obtidos tinham que ser encontrados pelos estudantes.

Quanto ao filme, os relatos indicam que houve uma sensibilização em relação à temática, alcançando relativo sucesso no objetivo de aproximar os estudantes da problematização proposta pelo nosso trabalho. Também se evidenciou o êxito em desafiá-los a refletir sobre as aplicações e a importância dos conteúdos matemáticos na sua vida cotidiana.

É interessante registrar, porém, que alguns pontos da atividade poderiam ser alterados. Quanto ao tempo de exibição do filme, talvez seja mais adequado usar partes específicas do filme como motivador para a tarefa, ao invés de exibir o filme completo, pois na trama existem outros elementos que não têm relevância para a atividade matemática.

Outro ponto muito positivo foi a utilização do carneiro hidráulico, pois fez com que a aula assumisse uma atmosfera científica, de exploração e descobrimento. Pudemos notar nos alunos algo positivo, uma espécie de despertar para a prática de pesquisar, descobrir e inventar. A temática do filme - um relato inspirador de um adolescente que, utilizando os conhecimentos adquiridos na escola, pôde transformar a realidade de sua vila - juntamente com a presença do carneiro hidráulico, motivou os estudantes envolvidos na atividade matemática a perceberem que também são capazes de realizar grandes feitos.

Além disso, o fato do carneiro hidráulico ter sido fabricado pelo próprio professor-pesquisador deixou muitos alunos surpresos e entusiasmados com a possibilidade de construírem eles mesmos seus dispositivos. Uma alteração a ser considerada seria permitir que cada grupo realizasse sua própria medição do tempo que o carneiro leva para preencher a garrafa PET, e assim, evitar equívocos com os cálculos, como os que foram notados durante a resolução da tarefa. Outra melhoria seria aumentar a eficiência do carneiro hidráulico; uma vazão maior seria mais favorável para a experiência.

Uma outra inovação a ser considerada é o tempo de resolução das questões. Ele precisa ser revisto, pois são exigidos raciocínios e pré-requisitos que muitos docentes não conseguem entregar de forma imediata. Por isso, deixar um pouco mais de tempo para essa parte da tarefa matemática seria bastante vantajoso.

Em relação as ambições iniciais da aprendizagem matemática da tarefa, cremos que foram alcançadas parcialmente, considerando que um dos objetivos era proporcionar aos estudantes uma melhor compreensão do conceito de função afim, em especial a função linear suas aplicações e comportamento, com o auxílio do carneiro hidráulico Embora nem todas as dificuldades dos estudantes sobre o assunto tenham sido totalmente superadas, os resultados apresentados e, destacados nos relatos anteriores, permitem crer que o conteúdo foi assimilado e apreendido pelos alunos, especialmente no que diz respeito à aplicação prática dos conceitos matemáticos sobre função e também sobre volume.

Outro ponto a ser destacado é a evidência de eficácia no uso da metodologia do EEM. Notavelmente, os estudantes se envolveram bastante na tarefa matemática proposta, sentindo-se desafiados e oferecendo respostas razoavelmente bem elaboradas, demonstrando perceber um maior significado na aprendizagem. É verdade que, por outro lado, essa metodologia é exigente, uma vez que tanto professores quanto alunos não estão habituados a ela; no entanto, mostrou-se uma excelente alternativa para a prática docente no ensino da Matemática.

Diante do exposto, podemos afirmar que existem indícios de que a tarefa matemática na perspectiva do EEM facilitou em vários aspectos a aprendizagem sobre aplicação prática dos conceitos teóricos sobre a função afim; não só facilitou a compreensão dos alunos, mas também os envolveu de maneira mais profunda com o conteúdo. Este estudo mostrou que conectar o aprendizado matemático a situações do cotidiano promove um engajamento mais significativo, permitindo aos estudantes enxergar a relevância da matemática em suas vidas diárias e nas diversas decisões que enfrentarão ao longo de suas jornadas.

É imprescindível ressaltar que a metodologia das tarefas matemáticas associadas ao EEM teve um impacto significativo na experiência do professor-pesquisador, pois é sempre desafiador criar ambientes de aprendizagem que propiciem fundamentar o pensamento matemático e que contribua para que os discentes alcancem significados em suas aprendizagens, como afirmam Döor , Neves e Ribeiro (2023) e, nesse sentido, as tarefas matemáticas trouxeram uma excelente alternativa a essas dificuldades enfrentadas pelo docente na sua prática pedagógica cotidiana.

Embora todo o processo de formação percorrido tenha sido enriquecedor, é inegável que conhecer e aplicar essa metodologia contribuiu de forma substancial para os objetivos que o professor-pesquisador almejava ao iniciar esse processo: aprimoramento e evolução profissional. É certo que outras experiências surgirão a partir do que foi vivenciado e aprendido ao longo desse período.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, Paulo. Um (bom) problema (não) é (só).. **Educação e Matemática**, n. 8, p. 7-35, 1988.

ABRAHÃO, M. H. **Avaliação e erro construtivo libertador: uma teoria – Prática includente em Educação***.* Porto Alegre,: EDIPUCRS. 2007.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base (mec.gov.br). Acesso em: 04/10/2023.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil**, Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2019. Disponível em: Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil - MEC . Acesso em: 26 jun. 2022.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Conselho Nacional de Educação. Câmara da Educação Básica. **Resolução n. 4, de 21 de novembro de 2018**. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 2018. Disponível em: https://prograd.ufu.br/sites/prograd.ufu.br/files/media/documento/resolucao_cne ceb_no_4_de_13_de_julho_de_2010. Acesso em 29/06/2024.

CANAVARRO, A.P. **Ensino exploratório de matemática: Prática e desafios.** Educação e Matemática, Lisboa, n. 115, p. 11-27, 2011. Disponível em https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/117/119. Acesso em: 20 de setembro de 2023.

CANAVARRO, A.P. O caso de Célia: Prática e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-27, 2012. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/117/119. Acesso em: 30 de outubro de 2023.

CERQUEIRA, Elisângela Fernandes. **Tarefas matemáticas de combinatória na educação de jovens e adultos: uma abordagem exploratória**. 2023.

DA SILVA SANTIAGO, Paulo Vítor; DE SOUSA, Renata Teófilo; ALVES Francisco Régis Vieira. O ensino de funções do 1° grau por meio da gamificação com o Escape Factory. **Educitec-Revista de estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, v. 8, p. e178822-e178822, 2022.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Papirus Editora, 2014.

DANTE, Luis Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Matemática Ensino Médio. São Paulo. Ed. Ática,, v. 1, 2010.

DE SOUZA, Carlos Antonio; DA COSTA, Nielce M. Lobo. **Um estudo envolvendo funções exponenciais e logarítimicas em uma formação continuada**. Disponível em: https://repositorio.pgsscogna.com.br/bitstream/123456789/24248/1/UNIAN%20-%20Carlos%20Antonio%20de%20Souza.pdf. Acesso em 05 de março.

DIAS, Fabrício Ferreira. **O uso da planilha eletrônica Calc no ensino de matemática no primeiro ano do ensino médio**. 2013. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/5888. Acesso em 05 de março,

DE SOUZA SILVA, Kelly; PEREIRA, Lucília Batista Dantas. **O ensino de função afim por meio da resolução de problemas**. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 12, n. 27, p. 228-250, 2023. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7306. Acesso em 10 de abril.

DÖRR, Raquel Carneiro; NEVES, Regina da Silva Pina; RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a Construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 16, n. 42, p. 1-27, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/18819. Acesso em: 06/06/2024.

DOS SANTOS SILVA, Flaviana; PITANGA, Jonathas. **Sequência de ensino: uma proposta de resolução de problemas na integração do software Geogebra no estudo da função afim no 9º ano**. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 3, n. 1, p. 1-16, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/7293. Acesso em 20/11/2023.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Méricles Thadeu. **Gráficos e equações: a articulação de dois registros**. REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

FIGUEIREDO, Danielly de Souza. **Educação financeira na perspectiva do ensino Exploratório**: concepção, desenvolvimento e análise de uma tarefa matemática. 2023.

GARCÍA, Jesus Nicasio; RODRIGUES, Jussara Haubert. **Manual de dificuldades de aprendizagem: linguagem, leitura, escrita e matemática**. 1998.

GODOY, Arilda Schmidt. **A pesquisa qualitativa e sua utilização em administração de empresas**. Revista de administração de empresas, v. 35, p. 65-71, 1995.

GUERREIRO, A.; FERREIRA, R. S. T.; MENEZES, L.; MARTINHO, M. H. **Comunicação na sala de aula: a perspectiva do ensino exploratório da Matemática**. Revista Zetetiké, n. 44, v. 23, p. 279-295, 2015. Disponível em: Universidade do Minho: Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática (uminho.pt). Acesso em: 12 maio 2023.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. 1ª edição . Rio de Janeiro: **Sociedade Brasileira de matemática**,2017,p.84.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Lisboa, p. 13-27, 2014. Disponível em https://www.researchgate.net/profile/Joao-Ponte-2/publication/275409996_Tarefas_no_ensino_e_na_aprendizagem_da_Matematica/links/553c10ff0cf245bdd76674b4/Tarefas-no-ensino-e-na-aprendizagem-da-Matematica.pdf. Acesso em 26/02/2024.

JUSTULIN, Andresa Maria; PEREIRA, Fernando Francisco; FERREIRA, Amanda da Silva. **Representação gráfica de Funções: uma análise das principais dificuldades de alunos do Ensino Médio**. REnCiMa. Revista de Ensino de Ciéncias e Matemática, v. 10, n. 6, p. 301-318, 2019.

MILANI, Raquel. **Transformar exercícios em cenários para investigação: uma possibilidade de inserção na educação matemática crítica**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 13, n. 31, p. 1-18, 2020.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria. Rio de Janeiro: **SBM**, 2013.

NETO, Antônio Caminha Muniz. Fundamentos de Cálculo. 1ª edição. Rio de Janeiro: **Sociedade Brasileira de Matemática**, 2015, p.11

OLIVEIRA, H., MENEZES, L., & CANAVARRO, A. P. (2013). **Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência**. Quadrante, 22(2), 29–54. https://doi.org/10.48489/quadrante.22895

PAIVA, Manoel. matemática Paiva/Manoel Paiva. São Paulo: **Moderna**, 2009.

PACHECO, T. E. A. **Relato de experiência em sala de aula: a importância da matemática problematizada para o aprendizado**. Revista Acervo Educacional, v. 5, p. e12511, 26 mar. 2023

PONTE, J. P., & Pereira. (2018). **Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design**. p. 798. doi: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02. Acesso em 03/10/2023.

REZENDE, Veridiana; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; CALADO, Tamires Vieira. **Função afim na educação básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas**.

Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 13, n. 2, p. 50, 2020.

SANTOS, Danilo Pereira dos. **Ensino exploratório e a aprendizagem dos números inteiros e racionais: experiência na Educação de Jovens e Adultos (EJA)**. 2024.

STEIN, Mary Kay; ENGLE, Randi A.; SMITH, Margaret S.; HUGLES, Elizabeth k. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell**. Mathematical thinking and learning**. n.10, p.313-340, 2008.Disponível em: Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell: Mathematical Thinking and Learning: Vol 10, No 4 (tandfonline.com). Acesso 12 out. 2023.

STEWART, J. Cálculo (Vol. 2). **Cengage Learning**. São Paullo:2013.

TINOCO, L. A. Álgebra: pensar, calcular, comunicar. 2ª edição. Rio de Janeiro.2011.Projeto fundão.

YKEDA, Gustavo Eiji; DA SILVA BARBOSA, Fernando; DEL PINO, Miguel Angel Isaac Toledo. Estudo do rendimento de bombeamento para um protótipo de carneiro hidráulico de PVC. **Revista Agrogeoambiental**, v. 11, n. 1, 2019.

8 APÊNDICES

8.1 Apêndice A – questionário após o filme

ROTEIRO

1. Apresentação da situação-problema; (5 minutos)
2. Questionamentos a partir do situação-problema; (10 minutos)
3. Resolução da situação-problema; (25 minutos)
4. Análise das estratégias apresentadas (10 minutos)
5. Conclusão (10 minutos)

SITUAÇÃO - PROBLEMA

Suponha que um carneiro hidráulico nas mesmas condições do apresentado foi instalado em uma chácara com o intuito de abastecer uma caixa d'água com formato cilíndrico cujo raio mede 1 metro e cuja altura é de 2,5 metros. A caixa é utilizada para atender uma família que consome 600 litros de água por dia.

1. Diga qual a quantidade de água que o carneiro seria capaz de bombear para a caixa em um dia.
2. Encontre a capacidade da caixa em litros.
3. Descubra a fração diária que a caixa é preenchida pelo carneiro hidráulico.
4. Qual o percentual da caixa estaria preenchido após 3 dias? e após 7 dias?
5. Faça uma generalização para obter o percentual de água na caixa a qualquer momento.
6. Encontre em quantos dias a caixa estaria completamente cheia.

RESOLUÇÃO

8.2 Apêndice B – questionário após a tarefa

PESQUISA 2A

* Indica uma pergunta obrigatória

1. Gênero *

   Marcar apenas uma oval.

   ◯ Masculino
   ◯ Feminino

2. Idade *

   ____

3. Sua residência é na área *

   Marcar apenas uma oval.

   ◯ Urbana
   ◯ Rural

4. 1. Descreva, por favor, como foi a aula de hoje pra você: aprendeu alguma coisa? (use o campo "outro" para dizer o que aprendeu) *

   Marcar apenas uma oval.

   ◯ sim
   ◯ não
   ◯ Outro: ____________________

5. 2. Na aula de hoje relembrou algum conceito? (use o campo "outro" para dizer o que relembrou) *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Outro: ______________________

6. 3. Marque as alternativas que descrevem a experiência da aula: (pode marcar quantas quiser e use o campo "outro" se quiser acrescentar mais alguma característica) *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Cansativa
- [ ] Descontraída
- [ ] Interessante
- [ ] Demorada
- [ ] Sem importância
- [ ] Diferente
- [ ] Emocionante
- [ ] Outro: ______________________

7. 4. O que você achou do nível de dificuldade da atividade proposta? *

Marcar apenas uma oval.

- Baixo
- Médio
- Alto
- Muito alto
- Outro: ______________________

8. 5. Você acha que houve relação entre o filme e a atividade proposta pelo professor? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Outro: ______________________

9. 6. Você tem alguma sugestão de como melhorar a experiência da aula? *

____
____
____
____
____

8.3 Apêndice C – respostas literais dos estudantes

PERGUNTA 1 – O QUE ACHOU DA AULA DE HOJE?

sim
sim
sim
A que eu mais achei enterraste ter apresentado foi ver como a água por conta do ar e a preção
sim
Sim, aprendi bastante coisa que eu nem sabia e imaginava

Por meio das respostas, pode-se concluir que a atividade proposta pelo professor conseguiu despertar o interesse dos estudantes.

PERGUNTA 2 - Na aula de hoje relembrou algum conceito? (use o campo "outro" para dizer o que relembrou)

Sim
Não
Relembrei de alguns conceitos básicos da matéria que acaba esquecendo com o tempo
Sim
Fórmulas de geometria espacial
Sim
Não
Não
Sim
Não
Não

PERGUNTA 3

Marque as alternativas que descrevem a experiência da aula: (pode marcar quantas quiser e use o campo "outro" se quiser acrescentar mais alguma característica)

Descontraída, Interessante, Diferente, Emocionante

Descontraída, Interessante, Demorada, Diferente
Interessante, Diferente, Bem explicativa e com um objetivo bem definido
Descontraída, Interessante, Diferente
Descontraída, Interessante, Diferente, Emocionante
Interessante, Diferente, Emocionante
Interessante, Diferente
Descontraída, Interessante, Diferente
Descontraída, Interessante, Diferente
Interessante, Diferente, Muito interessante, gostei bastante.
Interessante, Diferente, Legal

PERGUNTA 4 –

O que você achou do nível de dificuldade da atividade proposta?

Médio
Médio
Médio
Baixo
Médio
Médio
Médio
Alto
Alto
Alto
Médio

Aprendi e gostei bastante em saber sobre o que é um carneiro hidráulico
sim
sim
sim
Foi uma aula dinâmica, aprendi sobre o funcionamento do Carneiro hidráulico, relembrei fórmulas de cálculo, trabalhei a interpretação e compreensão de situação problema e obrigada pela experiência! Foi muito boa a aula, consegui compreender tudo.

PERGUNTA 5

Você acha que houve relação entre o filme e a atividade proposta pelo professor?

Sim, foi bastante legal
Sim
Sim
Sim teve
Sim
Sim
Sim
Sim
Sim
Foi bastante criativa a aula , só nosso raciocínio que foi lento.
Sim