



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional



Função quadrática e equação do 2º grau: dificuldades ampliadas pela pandemia da Covid-19 e uma proposta de abordagem pelo método de resolução de problemas

Diego Wilson da Silva Neres

Brasília

2023

Diego Wilson da Silva Neres

Função quadrática e equação do 2º grau: dificuldades ampliadas pela pandemia da Covid-19 e uma proposta de abordagem pelo método de resolução de problemas

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Lineu da Costa Araújo Neto

Brasília
2023

Diego Wilson da Silva Neres

Função quadrática e equação do 2º grau: dificuldades ampliadas pela pandemia da Covid-19 e uma proposta de abordagem pelo método de resolução de problemas/ Diego Wilson da Silva Neres. – Brasília, 2023-
134 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Lineu da Costa Araújo Neto

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM, 2023.

1. Função quadrática. 2. Equação do 2º grau. 3. Resolução de problemas.
4. Ensino-Aprendizagem-Avaliação. 5. Ensino remoto. I. Lineu da Costa Araújo Neto. II. Universidade de Brasília. III. PROFMAT - SBM. IV. Título.

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Função quadrática e equação do 2º grau: dificuldades ampliadas pela pandemia da Covid-19 e uma proposta de abordagem pelo método de resolução de problemas

por

Diego Wilson da Silva Neres

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 22 de dezembro de 2023

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Lineu da Costa Araújo Neto- MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. André von Borries Lopes - ENM/UnB (Membro)

Prof. Dr. Rui Seimetz - MAT/UnB (Membro)

Dedico este trabalho a minha mãe Lucimar, ao meu pai Wilson (in memoriam) e a minha noiva Juliana. E também a todos os professores que venham a utilizar este estudo de algum modo.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por tudo.

A minha mãe Lucimar Neres, mulher inspiradora, guerreira, forte e determinada, pela educação que me deu, pelo apoio e amor incondicional e pelo incentivo aos estudos, o que me possibilitou realizar um de seus desejos, concluindo o mestrado.

Ao meu pai Wilson Neres (*in memoriam*) por ter feito tudo o que pôde em vida para dar oportunidade a mim e a meus irmãos de estudarmos e pela nossa formação humana. Porém, infelizmente, ele não pôde assistir às nossas formaturas de graduação, um de seus sonhos.

A minha noiva Juliana Pires por sempre estar ao meu lado e me incentivar a ingressar no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat). E, após o ingresso, por continuar me apoiando nos momentos difíceis, desde o início, durante a pandemia, até o final, durante a produção deste trabalho.

Aos meus irmãos Deivisson e David Neres por compartilharem comigo muitos momentos.

Ao Governo Federal, à Sociedade Brasileira de Matemática e à Universidade de Brasília pelo Profmat, do qual tive a honra de participar.

Ao professor Lineu Neto pela orientação e compreensão necessárias para a produção deste trabalho. Tive a honra de ser seu primeiro orientando de mestrado. Ele é um professor que admiro bastante desde a graduação, sendo uma das minhas referências de como ministrar aulas.

À ilustre banca presente na defesa desta dissertação, formada pelos professores André Lopes e Rui Seimetz. O André foi quem ministrou a disciplina mais apreciada por mim durante o mestrado e também se tornou mais uma importante referência para a minha formação. Já o Rui, um grande entusiasta da educação, foi o meu primeiro professor no curso de graduação em Matemática na UnB em 2003.

Aos coordenadores do Profmat-UnB Vinícius Ríspoli, Igor Lima e Theo Zapata pelo suporte durante o período em que estive no programa. Em especial, agradeço ao Igor pelo apoio imprescindível em momentos difíceis que passei durante o curso.

Ao apoio da equipe gestora do Centro de Ensino Fundamental 31 de Ceilândia por dar suporte durante o curso, me liberando quando necessário e me auxiliando com toda a documentação. Agradeço à diretora Rosimeire Cruz, à vice-diretora Michelline Araújo, ao supervisor pedagógico Elismar Araújo, à supervisora administrativa Clarice Marques, às coordenadoras pedagógicas Josimá Reis e Francimaria Nunes, bem como ao meu amigo Lourivaldo Junior, professor de matemática da escola que também me acompanhou neste processo.

Aos meus amigos e colegas de curso, com os quais tive várias conversas e discussões que ajudaram a me desenvolver, repensar e pensar em coisas novas.

E, por fim, a todos aqueles que torceram por mim todo esse tempo.

“Conhece-te a ti mesmo.”

Sócrates

Resumo

Este trabalho busca fornecer um panorama do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de funções quadráticas e equação do 2º grau por parte de um grupo de estudantes de uma escola pública do ensino médio do Distrito Federal durante o período de ensino híbrido imposto pela pandemia de Covid-19. O objetivo é analisar e diagnosticar dificuldades que possam ter surgido ou se ampliado devido ao ensino remoto, durante o isolamento social entre 2020 e 2021, por meio de uma pesquisa qualitativa realizada durante o período de transição do ensino híbrido para o 100% presencial. Também abordaremos a resolução de problemas e, em particular, a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação no processo de ensino da Matemática. Por fim, proporemos algumas atividades lúdicas motivadoras para introduzir partes do conteúdo de funções quadráticas e algumas situações-problema para serem abordadas após a apresentação de tais conteúdos.

Palavras-chave: Função quadrática. Equação do 2º grau. Resolução de problemas. Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Ensino remoto.

Abstract

This work aims to provide an overview of the teaching and learning process of quadratic functions and 2nd degree equation content by a group of students from a public high school in the Federal District during the time of hybrid teaching imposed by the Covid-19 pandemic. The purpose of this work, which was conducted during the transition from hybrid teaching to in-person teaching through qualitative research, is to analyze and diagnose difficulties that might have arisen or increased due to the remote teaching and social isolation between 2020 and 2021. In addition, we will address problem solving as a teaching methodology and, in particular, the Teaching-Learning-Assessment methodology for Mathematics teaching. At the end, we will recommend some ludic and motivating exercises in order to present parts of the quadratic functions content, and some math problems to be discussed after introducing such content.

Keywords: Quadratic function. 2nd degree equation. Problem solving. Teaching-Learning-Assessment. Remote teaching.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Tablete YBC 6967 e desenho explicativo	26
Figura 2 – Método de “cortar e colar” babilônico 1, primeira passagem	27
Figura 3 – Método de “cortar e colar” babilônico 1, segunda passagem	27
Figura 4 – Método de “cortar e colar” babilônico 1, terceira passagem	28
Figura 5 – Prova sem palavras: Completando o quadrado	37
Figura 6 – Prova sem palavras: Completando o quadrado através da diferença de quadrados	38
Figura 7 – Exemplo de método de completar quadrados	39
Figura 8 – Parábola	57
Figura 9 – Vértice da parábola	59
Figura 10 – Gráfico $f(x) = x^2$	60
Figura 11 – Coeficiente $a > 0$	60
Figura 12 – Coeficiente $a < 0$	61
Figura 13 – Gráficos família $f(x) = ax^2 + c, a > 0$	62
Figura 14 – Gráficos família $f(x) = ax^2 + c, a < 0$	63
Figura 15 – Gráfico de $f(x) = a(x - m)^2, a \neq 0$ e a translação horizontal	64
Figura 16 – Gráfico de $f(x) = a(x - m)^2 + k, a \neq 0$ e a translação horizontal e vertical	65
Figura 17 – Gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$	66
Figura 18 – Se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima	67
Figura 19 – Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo	67
Figura 20 – Gráficos família $f(x) = ax^2, a > 0$	68
Figura 21 – Gráficos família $f(x) = ax^2, a < 0$	68
Figura 22 – Gráficos comportamento do coeficiente b	69
Figura 23 – Coeficiente c	70
Figura 24 – Primeira pergunta da parte gráfica	73
Figura 25 – Segunda pergunta da parte gráfica	74
Figura 26 – Terceira pergunta da parte gráfica	74
Figura 27 – Quarta pergunta da parte gráfica	75
Figura 28 – Quinta pergunta da parte gráfica	75
Figura 29 – Sexta pergunta da parte gráfica	76
Figura 30 – Sétima pergunta da parte gráfica	76
Figura 31 – Oitava pergunta da parte gráfica	77
Figura 32 – Nona pergunta da parte gráfica	77
Figura 33 – Décima pergunta da parte gráfica	78
Figura 34 – Décima primeira pergunta da parte gráfica	78

Figura 35 – Primeira pergunta da parte de cálculo	80
Figura 36 – Segunda pergunta da parte de cálculo	80
Figura 37 – Terceira pergunta da parte de cálculo	81
Figura 38 – Quarta pergunta da parte de cálculo	81
Figura 39 – Quinta pergunta da parte de cálculo	82
Figura 40 – Sexta pergunta da parte de cálculo	83
Figura 41 – Sétima pergunta da parte de cálculo	84
Figura 42 – Esquema da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação	90
Figura 43 – Atividade proposta 1	91
Figura 44 – Atividade proposta 2	93
Figura 45 – Atividade proposta 3	94
Figura 46 – Atividade proposta 4	96
Figura 47 – Atividades lúdicas motivadoras propostas	97
Figura 48 – Situação-problema 4	100
Figura 49 – Situação-problema 5	101
Figura 50 – Situação-problema 6	103
Figura 51 – Seção de apresentação do formulário da pesquisa	117
Figura 52 – Opção 1	119
Figura 53 – Opção 2	119
Figura 54 – Opção 3	119

Sumário

	Introdução	19
1	REFERENCIAL TEÓRICO	25
1.1	Equação do 2º grau da Babilônia até hoje	25
1.2	Equações do 2º grau e alguns métodos de resolução	29
1.2.1	Equações do 2º grau incompletas	29
1.2.2	Equação do 2º grau com $b = 0$	30
1.2.3	Equação do 2º grau com $c = 0$	31
1.2.4	Equação do 2º grau com $b = c = 0$	33
1.3	Equações do 2º grau completas	34
1.3.1	Método da fatoração	35
1.3.2	Método de completar quadrados	37
1.3.3	Método da fórmula resolutiva da equação do 2º grau	40
1.3.4	Método da soma e do produto	43
1.3.5	Método da forma fatorada	44
1.3.6	Relações de Girard	45
1.3.7	Método de Po Shen Loh	46
1.3.8	Curiosidade para os coeficientes b e c com valor absoluto em sequência	50
1.4	Função Quadrática	54
1.4.1	Definição	54
1.4.2	Zero da função	55
1.4.3	Gráfico da Função Quadrática	57
1.4.4	Vértice da parábola	58
1.4.5	Gráfico da função definida por $f(x) = x^2$	59
1.4.6	Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2, a \neq 0$	60
1.4.7	Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + c, a \neq 0$ e a translação vertical	61
1.4.8	Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2, a \neq 0$ e a translação horizontal	63
1.4.9	Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2 + k, a \neq 0$	65
1.4.10	Gráfico da função definida por $ax^2 + bx + c$	66
1.4.10.1	Coeficiente a e o gráfico	67
1.4.10.2	Coeficiente b e o gráfico	68
1.4.10.3	Coeficiente c e o gráfico	70
2	METODOLOGIA	71
2.1	Descrição do artigo	71

2.2	Dificuldades de estudo no período pandêmico	72
2.3	Facilidade em entender a parte gráfica	73
2.4	Dificuldade com o coeficiente b na análise gráfica	79
2.5	Dificuldades com os cálculos	79
3	PROPOSTA PEDAGÓGICA	85
3.1	Resolução de problemas como método de ensino de Matemática . .	85
3.2	Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática	87
3.3	Atividades lúdicas motivadoras	90
3.4	Situações-problema	97
	Considerações Finais	105
	REFERÊNCIAS	107

APÊNDICES **115**

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DA PESQUISA 117

APÊNDICE B – FICHA DE ROTEIRO DA ATIVIDADE 1 127

APÊNDICE C – FICHA DE ROTEIRO DA ATIVIDADE 2 129

APÊNDICE D – FICHA DE ROTEIRO DA ATIVIDADE 3 131

APÊNDICE E – FICHA DE ROTEIRO DA ATIVIDADE 4 133

Introdução

A temática de equação do 2º grau e função quadrática é introduzida no 9º ano do ensino fundamental e aprofundada no 1º ano do ensino médio, com aplicações em várias áreas do conhecimento tais como Física, Economia, Engenharia, entre outras. Trata-se de um tópico que ocupa uma posição de destaque no currículo de Matemática, cuja importância é atestada pelos documentos oficiais que norteiam a elaboração das diretrizes curriculares e práticas pedagógicas para a educação básica em nosso país, a saber: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), no âmbito nacional, e o Currículo em Movimento da Educação Básica do Distrito Federal (DISTRITO FEDERAL, 2018, 2020), no âmbito da rede pública de ensino da capital federal.

De acordo com a BNCC, são habilidades associadas ao conteúdo de função quadrática, entre outras:

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. (BRASIL, 2018, p. 313)

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos. (BRASIL, 2018, p. 315)

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (BRASIL, 2018, p. 317)

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. (BRASIL, 2018, p. 317)

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 536)

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou

sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 537)

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. (BRASIL, 2018, p. 541)

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 541)

Já o Currículo em Movimento enfatiza os seguintes objetivos de aprendizagem associados a esse conteúdo:

(MAT09FG) Estruturar, gráfica e algebricamente, situações-problema de função polinomial do 2º grau, relacionando números expressos em tabelas e sua representação no plano cartesiano, para identificar padrões e criar conjecturas.

(MAT10FG) Delinear correspondência entre modelos algébricos e plano cartesiano ao elaborar gráficos de funções polinomiais de 2º grau. Por exemplo, em situações de lançamento oblíquo de objetos.

(MAT11FG) Estruturar, gráfica e algebricamente, situações-problema por meio de funções polinomiais de 1º e 2º graus, para a construção de modelos, visando a resolução de problemas em contextos diversos, com ou sem o apoio de tecnologias digitais.

(MAT12FG) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (DISTRITO FEDERAL, 2020, p.74)

Apesar de sua importância, não é incomum encontrar alunos com dificuldades acerca de equação do 2º grau e função quadrática, as quais foram potencializadas pelo distanciamento social e a consequente suspensão das aulas presenciais em março de 2020 em virtude da pandemia de Covid-19. Como consequência disso, estudantes e professores foram obrigados a aderir ao ensino remoto, como medida emergencial para tentar reduzir as perdas acadêmicas durante o período pandêmico.

Então, ficou a pergunta: as dificuldades do ensino de Matemática foram ampliadas pela pandemia de Covid-19?

Para responder a esse questionamento, neste trabalho iremos analisar se as dificuldades do ensino de Matemática acerca dos conteúdos de função quadrática e equação do 2º grau foram ampliadas pela pandemia de Covid-19 e propor atividades e situações-problema para abordar tais conteúdos pelo método de resolução de problemas.

Nesse contexto, o objetivo geral deste estudo é investigar o processo de ensino e aprendizagem desse importante tópico na modalidade de ensino remoto durante a pandemia de Covid-19 em turmas de ensino médio de uma escola da rede pública do Distrito Federal. Para atingir o objetivo geral almejado, vamos subdividi-lo nos seguintes objetivos específicos:

1. Verificar as impressões dos estudantes em relação ao ensino remoto;
2. Verificar eventuais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da parte gráfica do conteúdo de funções quadráticas;
3. Verificar eventuais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do parte algébrica do conteúdo de funções quadráticas.

Este trabalho de conclusão de curso está dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, será desenvolvido o referencial teórico associado ao estudo do objeto matemático desta pesquisa. Veremos uma breve abordagem histórica da equação do 2º grau como motivador do assunto. Também serão expostos métodos de resolução da equação do 2º grau incompletas e completas. E, por fim, será abordado o conteúdo de função quadrática.

No segundo capítulo, será apresentada a metodologia utilizada para a realização da pesquisa, culminando com a publicação do artigo “Função quadrática: uma análise da aprendizagem em tempos de pandemia numa escola pública do Distrito Federal”(NERES; BEZERRA; EVANGELISTA, 2023).

No terceiro capítulo, será apresentada como proposta pedagógica a utilização da metodologia de resolução de problemas para estimular e ajudar os alunos a tentar superar suas dificuldades acerca do conteúdo de equação do 2º grau e função quadrática.

Será apresentada ainda a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação, baseada em resolução de problemas, para posteriormente serem propostas atividades lúdicas motivadoras e situações-problema para serem utilizadas nos métodos de resolução de problemas e Ensino-Aprendizagem-Avaliação.

Por fim, no capítulo Considerações Finais será apresentada uma síntese deste trabalho, destacando-se os resultados da pesquisa realizada para verificar se foi atingido o objetivo geral, as conclusões referentes à hipótese de haver um aumento das dificuldades em relação ao conteúdo de função quadrática devido à pandemia e a proposta para a superação deste possível quadro como contribuição para desenvolvimento dos alunos e auxílio ao professor. Além disto, far-se-á uma recomendação para um aprofundamento e continuidade deste trabalho.

A fim de subsidiar nossa pesquisa, foi feito um levantamento no repositório de dissertações do Profmat, abrangendo o período de 2013 a 2023, que revelou um total de 104 trabalhos vinculados à palavra-chave “quadrática”. Além disso, identificaram-se 16 registros associados à palavra-chave “2º grau”, 31 registros relacionados à palavra-chave “pandemia” e 24 registros referentes à palavra-chave “ensino remoto”. Esses dados destacam a relevância das temáticas relacionadas à equação do 2º grau e à função quadrática, bem como a recente necessidade de abordar questões vinculadas à pandemia de Covid-19 e ao ensino remoto. Dentre esses estudos, 26 contribuições merecem destaque.

No que diz respeito à palavra-chave “2º grau”, merecem atenção as contribuições de Moraes (2023), Oliveira (2023) e Lopes Junior (2019), que abordam aspectos históricos e métodos de resolução da equação do 2º grau. Ressalta-se ainda os trabalhos de Coutinho (2016) e Souza (2023) por incorporarem a metodologia de resolução de problemas em seus estudos, sendo que este último também inclui o método Ensino-Aprendizagem-Avaliação.

Quando a palavra-chave é “quadrática”, sobressaem-se as pesquisas de Almeida (2020), Guedes (2019), Cutrim (2019), Barreto (2019), Quilles (2018), Silva (2017), Cannella (2016), Assis (2015), Menezes (2014), Abreu e Silva (2013), Soares (2013) e Sousa (2013), que exploram conceitos, aplicações, atividades práticas e a metodologia de resolução de problemas relacionados à função quadrática. Destaca-se ainda o trabalho de Silva (2019) por abordar as dificuldades dos estudantes com esse conteúdo.

No âmbito da palavra-chave “ensino remoto”, merecem atenção as contribuições de Diehl (2021), Dourado (2022), Filho (2023), Brandão (2023) e Ferreira (2023), que enfatizam as potencialidades do uso de tecnologias digitais nesse contexto bem como as

barreiras observadas durante a implementação dessa modalidade de ensino durante o cenário pandêmico. Esse último aspecto também foi abordado por Barbosa (2022), Maquiné (2022) e Comachio (2022), cujos trabalhos estavam associados à palavra-chave “pandemia”.

Observa-se, assim, um desenvolvimento progressivo nas temáticas de função quadrática e equação do 2º grau ao longo desses anos, com contribuições valiosas emergindo anualmente.

Nesse contexto, o diferencial de nosso estudo é oferecer uma abordagem que integra referencial teórico, pesquisa sobre possíveis dificuldades dos alunos, agravadas pela pandemia, e apresentação de atividades destinadas a abrandar esses obstáculos por meio da metodologia de resolução de problemas e do método Ensino-Aprendizagem-Avaliação.

Ressalta-se que o termo “dificuldades ampliadas pela pandemia da Covid-19”, expresso no título de nosso trabalho, refere-se às possíveis limitações que podem ter sido agravadas devido ao contexto pandêmico, fato que se observou em diversas áreas do conhecimento e práticas escolares.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

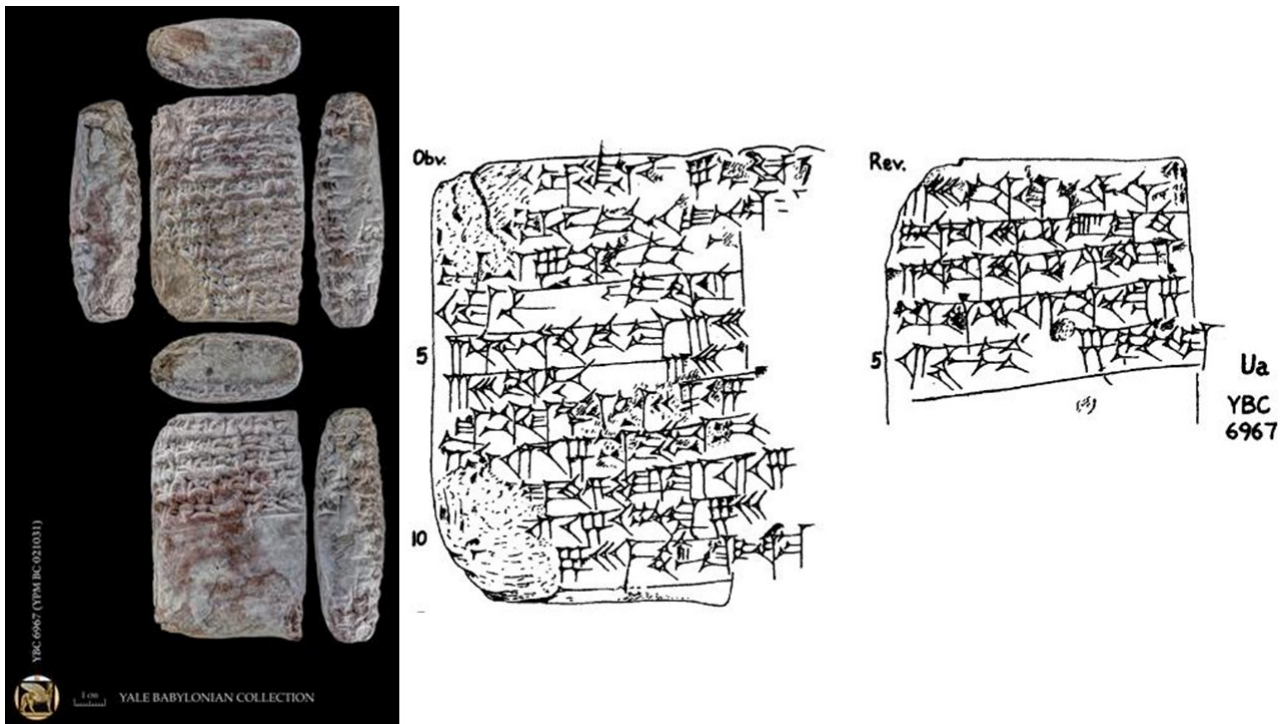
Neste capítulo abordaremos os conteúdos básicos de uma aula típica sobre função quadrática (definição, gráfico, existência e classificação das raízes da equação do 2º grau a partir do sinal do discriminante, fórmula de Bháskara, interseção da parábola com os eixos coordenados, eixo de simetria, concavidade, coordenadas do vértice, valor máximo, valor mínimo, entre outros). Esse estudo será iniciado pelo contexto histórico do surgimento da equação do 2º grau, com o intuito de trazer para os alunos uma noção da longa trajetória que foi necessária para o desenvolvimento de tal tópico até podermos estudá-lo em sala de aula hoje em dia, além de servir como elemento motivador para o assunto.

1.1 Equação do 2º grau da Babilônia até hoje

A função quadrática aparece em várias situações como problemas geométricos, físicos e de probabilidade, sendo um conceito de fundamental importância para o bom desenvolvimento de tantos outros. Mas, até chegarmos ao que estudamos hoje, foi um longo período de desenvolvimento por diferentes matemáticos de diversos povos e tradições matemáticas. Os primeiros registros de problemas que recaem em equações do 2º grau são de tabletas de barro babilônicas com escrita cuneiforme de até 4000 anos. Uma das principais características da matemática mesopotâmica era o procedimento de calcular grandezas que podiam ser medidas, o que está intimamente relacionado ao procedimento geométrico de “cortar e colar” (ROQUE, 2012, p. 39).

Alguns desses tabletas continham procedimentos para resolver problemas que envolviam determinar dois números conhecendo-se sua soma e seu produto, ou seja, que envolviam semi-perímetro e área de retângulos.

Figura 1 – Tablete YBC 6967 e desenho explicativo



Fonte: Yale Peabody Museum

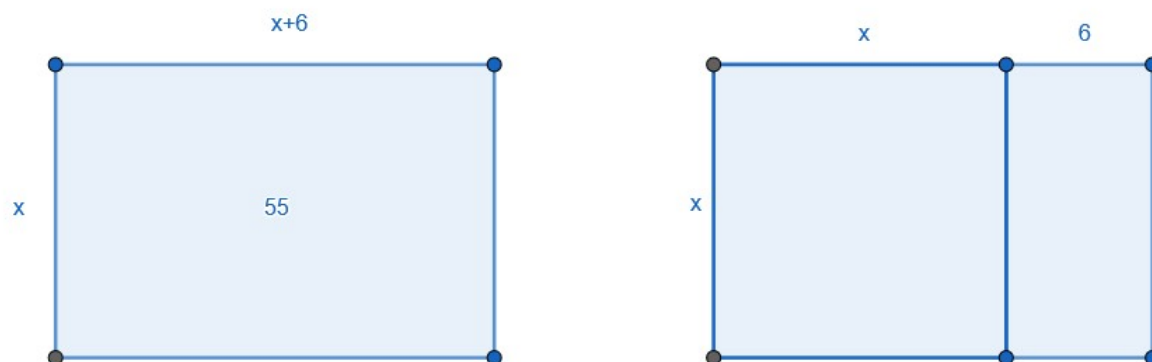
De acordo com Rosa (2008), o problema encontrado no tablete YBC 6967 (figura 1), escrito no dialeto *Akkadian* por volta do ano 1500 a.C., pode ser considerado um dos primeiros procedimentos nos quais os babilônios aplicaram métodos geométricos para resolver situações envolvendo equações quadráticas. E ele é enunciado do seguinte modo:

O comprimento de um retângulo excede a sua largura em sete unidades. Sabendo-se que a área do retângulo é de 60 unidades quadradas, determine o seu comprimento e a sua largura.

Para facilitar os cálculos, vamos usar um exemplo semelhante para exemplificar o método de “cortar e colar” babilônico:

O comprimento de um retângulo excede a sua largura em seis unidades. Sabendo-se que a área do retângulo é de 55 unidades quadradas, determine o seu comprimento e a sua largura.

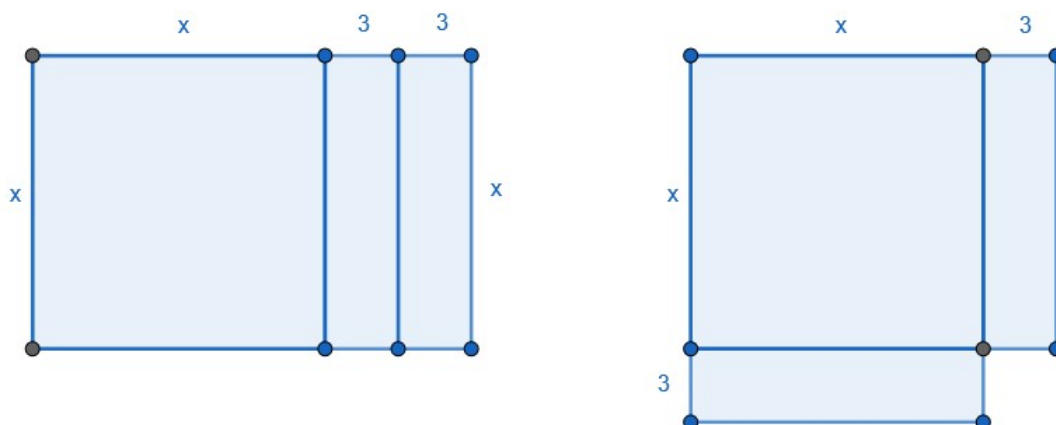
Figura 2 – Método de “cortar e colar” babilônico 1, primeira passagem



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Na figura 2 temos um retângulo de lados x e $x + 6$ e área igual a 55 unidades quadradas. Na passagem para a figura 3, temos o retângulo dividido em duas partes: um quadrado de lados medindo x unidades de comprimento e um retângulo de lados medindo x e 6 unidades de comprimento.

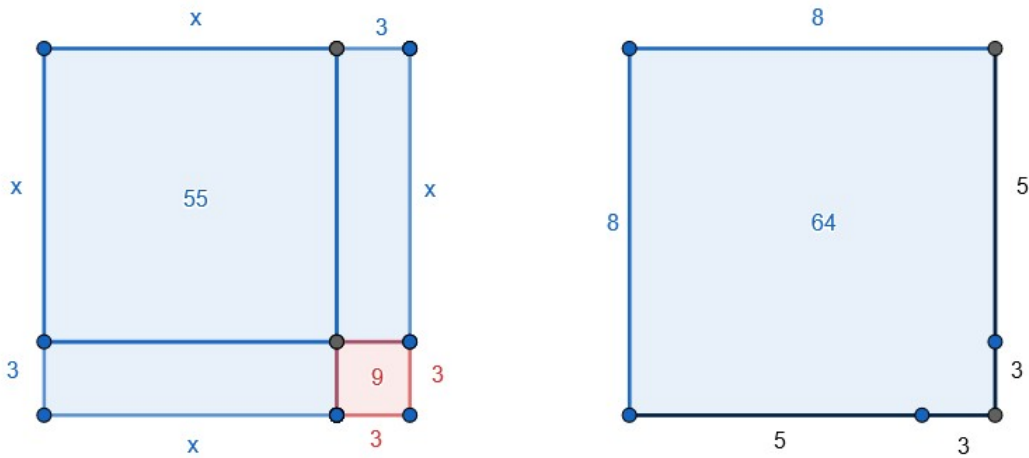
Figura 3 – Método de “cortar e colar” babilônico 1, segunda passagem



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Depois o retângulo de lados x e 6 é subdividido em outros dois retângulos com lados medindo x e 3 unidades de comprimento. E, na sequência, esses retângulos menores são realocados um em cada lado do quadrado de lado x . Assim, temos uma figura de mesma área que a original, porém faltando um pedaço para ser um quadrado perfeito.

Figura 4 – Método de “cortar e colar” babilônico 1, terceira passagem



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Completando este pedaço que estava faltando, incluiremos um pequeno quadrado de lados medindo 3 unidades de comprimento e 9 unidades quadradas de área, que, somadas às 55 unidades quadradas originais, nos darão agora ao todo 64 unidades quadradas.

Portanto, teremos um quadrado perfeito com 64 unidades quadradas de área, logo seu lado é de 8 unidades de comprimento. Então, o valor do lado desconhecido x será igual a 5 unidades de comprimento.

Este método é conhecido como *completar quadrados*, que, além de ser um método para encontrar soluções positivas para alguns problemas, será uma das formas usadas para se encontrar a *fórmula resolutiva da equação do 2º grau* que é usada atualmente, a qual é conhecida como fórmula de Bháskara.

Nascido em 1114 na Índia, Bháskara II publicou o livro *Bija Ganita*, o qual continha enunciados numéricos e métodos retóricos de solução padronizados para certos problemas matemáticos (ROQUE, 2012, p. 239). Traduzidos para a notação matemática moderna, alguns desses métodos seriam os embriões da fórmula resolutiva da equação do 2º grau que leva o seu nome.

Na Idade Média, os árabes também usavam métodos retóricos de solução de problemas matemáticos. Al-Khwarizmi, em seus livros *al-jabr* e *al-muqabala*, enunciava seis problemas possíveis e seus métodos de solução retóricos contendo quantidades desconhecidas e radicais, os quais seriam vistos hoje como casos particulares de uma equação

genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ (ROQUE, 2012, p. 254-257). Somente no século XVI, com François Viète, a fórmula resolutive da equação do 2º grau passou a ser formalizada utilizando letras como incógnitas e coeficientes genéricos. Segundo Boyer (1974, p. 223), Viète introduziu uma convenção de representar quantidade supostamente desconhecida, ou indeterminada, por vogal e grandezas ou números supostamente conhecidos ou dados por consoantes. Isso equivale a dizer que “se Viète tivesse adotado outros simbolismos já existentes em seus dias, ele poderia ter escrito todas as equações quadráticas na forma única $BA^2 + CA + D = 0$, em que A é a incógnita e B , C e D são os parâmetros”. (BOYER, 1974, p. 223)

1.2 Equações do 2º grau e alguns métodos de resolução

A equação canônica do segundo grau é da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, em que o coeficiente a multiplica x^2 , o coeficiente b multiplica x e o coeficiente c é chamado de *constante* ou *termo independente*.

Para o bom estudo da função quadrática, é necessário que os conceitos e técnicas de resolução da equação do 2º grau estejam bem fixados e entendidos. Nesse sentido, é necessário fazer uma revisitação do conteúdo visto no ensino fundamental II, a fim de diminuir as dificuldades dos alunos com relação às diferentes formas de solução de uma equação do segundo grau, seja ela completa ou incompleta. Ao apresentar uma variedade de possibilidades de resolução da equação do 2º grau, incluindo um método alternativo que será proposto como desafio aos estudantes, estaremos enfatizando habilidades que serão necessárias no desenvolvimento de cálculos mais complexos que poderão aparecer no decorrer dos estudos desses alunos para os vestibulares e até mesmo durante o ensino superior.

Para atingir tal objetivo, e com o desejo de fornecer aos alunos um amadurecimento gradual de suas habilidades matemáticas, é recomendável desenvolver as demonstrações de tais fórmulas, pois, nessas demonstrações, há passagens de cálculo que são bastante úteis em resoluções de problemas.

1.2.1 Equações do 2º grau incompletas

Começaremos revisando as resoluções de cada forma incompleta da equação do 2º grau, pois cada uma delas possui sua maneira específica de resolução, que, particular-

mente, são mais fáceis que a utilização da fórmula resolvente ou qualquer outro método.

1.2.2 Equação do 2º grau com $b = 0$

A equação do 2º grau com $b = 0$ é do tipo $ax^2 + c = 0$, e sua resolução segue o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= \frac{-c}{a} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \end{aligned}$$

É importante lembrar que, neste tipo de equação incompleta, caso haja solução real, teremos duas soluções com mesmo valor absoluto, a menos de sinal.

Vejamos algumas situações diferentes que pode-se apresentar como exemplos do desenvolvimento da resolução de tal equação:

Situação 1: A forma mais simples com $b = 0$ é aquela em que $a = 1$.

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= 0 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Situação 2: Progredindo em dificuldade, utilizaremos $a \neq 1$.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 27 &= 0 \quad (: 3) \\ x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Situação 3: Agora vamos inverter os sinais de a e c das situações 1 e 2.

$$\begin{aligned} -5x^2 + 50 &= 0 \quad (: 5) \\ -x^2 + 10 &= 0 \\ x^2 &= 10 \\ x &= \pm\sqrt{10} \end{aligned}$$

Situação 4: Finalmente, vamos visualizar o que ocorre quando os sinais de a e c são iguais.

$$\begin{aligned}4x^2 + 16 &= 0 \quad (: 4) \\x^2 + 4 &= 0 \\x^2 &= -4 \\x &= \pm\sqrt{-4}\end{aligned}$$

Logo, não existe solução real.

Após apresentar essas diferentes situações, pode-se instigar os alunos a perceberem a observação que vem em seguida.

Observação: Para haver solução real em uma equação do 2º grau com $b = 0$ é necessário que os sinais de a e c sejam distintos.

1.2.3 Equação do 2º grau com $c = 0$

A equação do 2º grau com $c = 0$ é do tipo $ax^2 + bx = 0$, e sua resolução segue o seguinte algoritmo:

$$ax^2 + bx = 0$$

Colocando x em evidência, temos:

$$x(ax + b) = 0$$

Assim,

ou

$$x = 0$$

ou

$$ax + b = 0.$$

E isolando x em $ax + b = 0$, temos:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Da mesma maneira que na seção anterior, iremos progredir a dificuldade das situações para os alunos irem se adaptando às diferentes formas em que a equação pode estar expressa.

Situação 1: Os coeficientes a e b possuem um fator em comum.

$$3x^2 - 12x = 0$$

Colocando o fator em comum em evidência, temos:

$$3x(x - 4) = 0$$

Assim,

ou

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

ou

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

Situação 2: Os coeficientes a e b são primos entre si.

$$2x^2 + 5x = 0$$

Colocando x em evidência, temos:

$$x(2x + 5) = 0$$

ou

$$x = 0$$

ou

$$2x + 5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

As situações 1 e 2 servem para fazer o aluno perceber que o elemento essencial a ser colocado em evidência é a incógnita x , podendo haver fatores em comum ou não nos coeficientes.

Situação 3: Utilizando frações em algum coeficiente.

$$-4x^2 + \frac{3}{5}x = 0$$

Colocando x em evidência, temos:

$$x\left(-4x + \frac{3}{5}\right) = 0$$

ou

$$x = 0$$

ou

$$\begin{aligned} -4x + \frac{3}{5} &= 0 \\ -4x &= -\frac{3}{5} \quad (-1) \\ x &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

É importante sempre utilizar exemplos em que apareçam frações, pois é uma dificuldade recorrente entre o alunato.

1.2.4 Equação do 2º grau com $b = c = 0$

A equação do 2º grau com $b = c = 0$ é do tipo $ax^2 = 0$, e sua resolução segue o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} ax^2 &= 0 \\ a.x.x &= 0 \end{aligned}$$

A única possibilidade de $x.x = 0$ é apenas se

$$x = 0$$

Nesta seção as situações com coeficientes variados servem apenas para os alunos perceberem que a solução sempre será igual a zero, independentemente do valor de a ,

desde que ele seja diferente de zero.

Situação 1:

$$\begin{aligned}10x^2 &= 0 \\x^2 &= 0 \\x &= 0\end{aligned}$$

Situação 2:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x^2 &= 0 \\x^2 &= 0 \cdot \frac{2}{3} \\x^2 &= 0 \\x &= 0\end{aligned}$$

Situação 3:

$$\begin{aligned}\sqrt{6}x^2 &= 0 \\x^2 &= 0 \\x &= 0\end{aligned}$$

1.3 Equações do 2º grau completas

A equação do 2º grau completa é do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a, b, c \neq 0$.

Nesta seção, iremos apresentar a sua resolução pelo método de completar quadrados, que vimos anteriormente no exemplo do exercício babilônico, pelo método da fatoração e pelo método da fórmula resolutive da equação do 2º grau. Além disso, também veremos a sua resolução pelo método de Po Shen Loh e outras técnicas de manipulação da equação.

A nossa intenção, com isso, é explorar as possibilidades de ações para resolver as equações do 2º grau completas, desenvolvendo habilidades importantes para o amadurecimento matemático do estudante.

1.3.1 Método da fatoração

O método da fatoração consiste em fatorar os termos da equação a fim de encontrarmos um trinômio quadrado perfeito e o substituímos por um quadrado da soma ou da diferença, resolvendo, assim, a equação.

Lembremos dos seguintes produtos notáveis que serão necessários para este método:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Situação 1: Equação com coeficiente $a = 1$ e coeficiente $b < 0$, em que é gerado um quadrado da diferença.

$$x^2 - 4x + 4 = 9$$

Pela fórmula do produto notável do quadrado da diferença, temos:

$$(x - 2)^2 = 9$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{9}$$

$$x - 2 = \pm 3$$

$$x = 2 \pm 3$$

Logo,

$$x_1 = 2 + 3 \Rightarrow x_1 = 5$$

e

$$x_2 = 2 - 3 \Rightarrow x_2 = -1$$

Situação 2: Equação com coeficiente $a = 1$ e coeficiente $b > 0$, em que é gerado um quadrado da soma.

$$x^2 + 10x + 25 = 16$$

Pela fórmula do produto notável do quadrado da soma, temos:

$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= 16 \\ x + 5 &= \pm\sqrt{16} \\ x + 5 &= \pm 4 \\ x &= -5 \pm 4\end{aligned}$$

Logo,

$$x_1 = -5 + 4 \Rightarrow x_1 = -1$$

e

$$x_2 = -5 - 4 \Rightarrow x_2 = -9$$

Exemplo 3: Equação com coeficiente $a \neq 1$.

$$4x^2 - 12x + 36 = 25$$

Colocando o fator comum 4 em evidência, temos:

$$4(x^2 - 6x + 9) = 25$$

Pela fórmula do produto notável do quadrado da diferença, temos:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 &= \frac{25}{4} \\ x - 3 &= \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \\ x - 3 &= \pm\frac{5}{2} \\ x &= 3 \pm \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Logo,

$$x_1 = 3 + \frac{5}{2} = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2}$$

e

$$x_2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}$$

Como podemos observar, este é um método interessante de ser utilizado quando temos casos em que o coeficiente c está decomposto como soma ou diferença de quadrados perfeitos.

1.3.2 Método de completar quadrados

O método de completar quadrados pode ser utilizado quando o método da fatoração não é tão explícito para o utilizarmos. Inicialmente, pensamos de forma geométrica a equação e, assim, completamos a parte que falta ao quadrado, acrescentando este valor à equação. Depois, basta resolver a equação pelo método da fatoração.

Tal método está baseado no seguinte raciocínio (LIMA et al., 2013, p. 49):

Sabemos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Portanto, $a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$. *Completar quadrados* é escrever uma expressão do tipo $x^2 + 2bx$ sob a forma $x^2 + 2bx = (x+b)^2 - b^2$. Em geral, o coeficiente 2 não aparece explicitamente. Então, fazemo-lo aparecer: $x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot x$, portanto $x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$, ou seja:

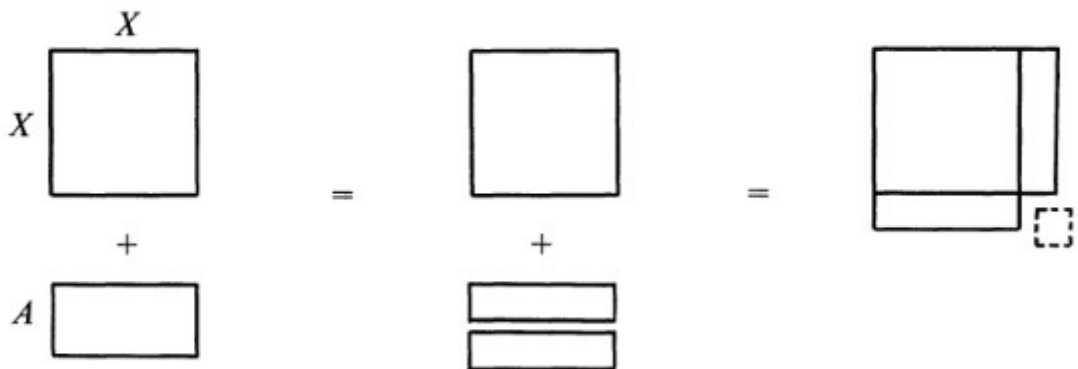
$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

Uma forma alternativa em que podemos verificar visualmente este raciocínio é a seguinte prova sem palavras de Gallant (1983, p. 110):

Figura 5 – Prova sem palavras: Completando o quadrado

**Proof without words:
Completing the square**

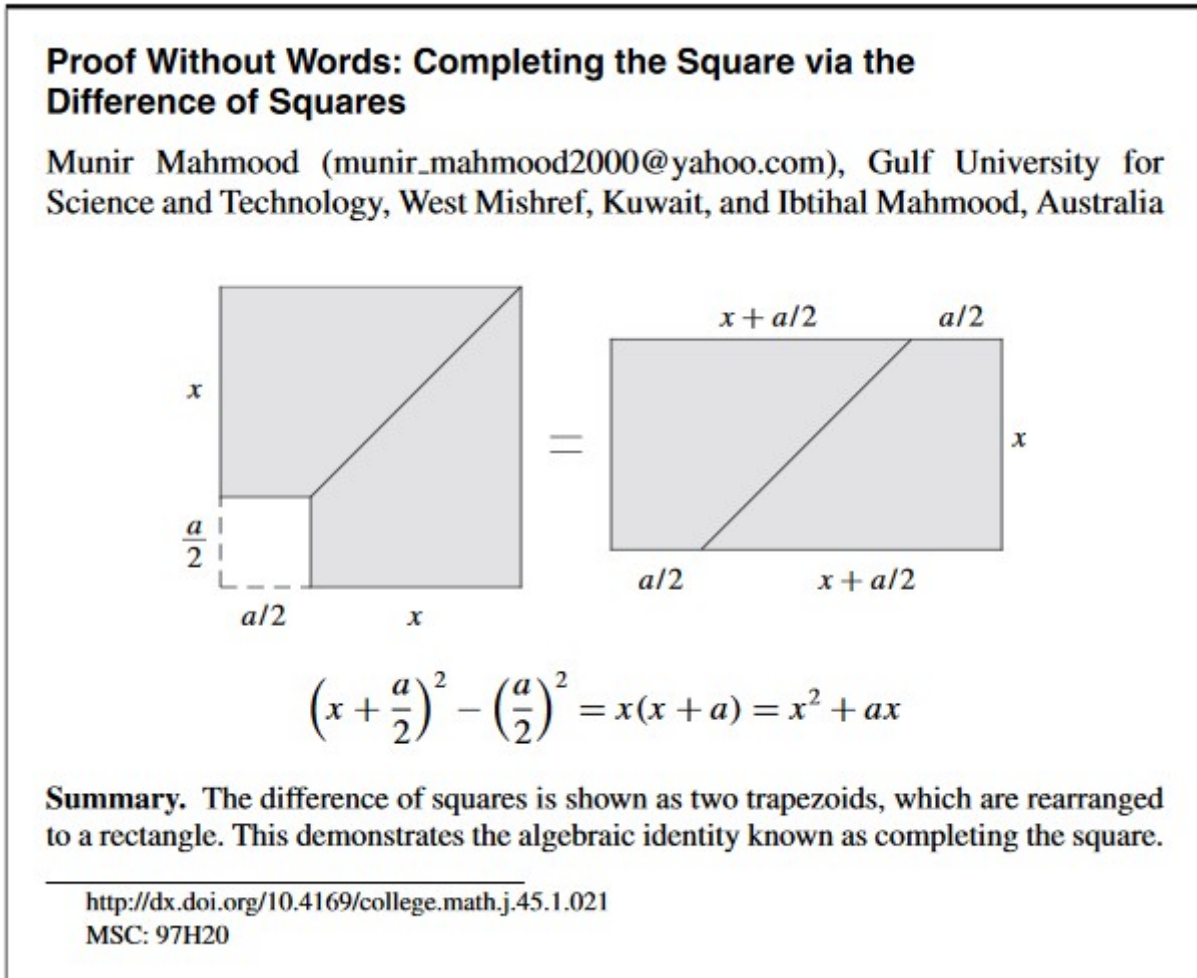
$$X^2 + AX = (X + A/2)^2 - (A/2)^2$$



—CHARLES D. GALLANT
St. Francis Xavier University
Antigonish, Nova Scotia

Uma outra forma alternativa em que podemos verificar visualmente este raciocínio é a seguinte prova sem palavras de Mahmood e Mahmood (2014, p. 21):

Figura 6 – Prova sem palavras: Completando o quadrado através da diferença de quadrados



Fonte: Mathematical Association of America

A tradução do texto abaixo da demonstração na figura 6 é a seguinte:

Resumo: A diferença de quadrados é mostrada como dois trapézios, que são rearranjados para um retângulo. Isso demonstra a identidade algébrica conhecida como completar o quadrado.

Exemplo com desenho:

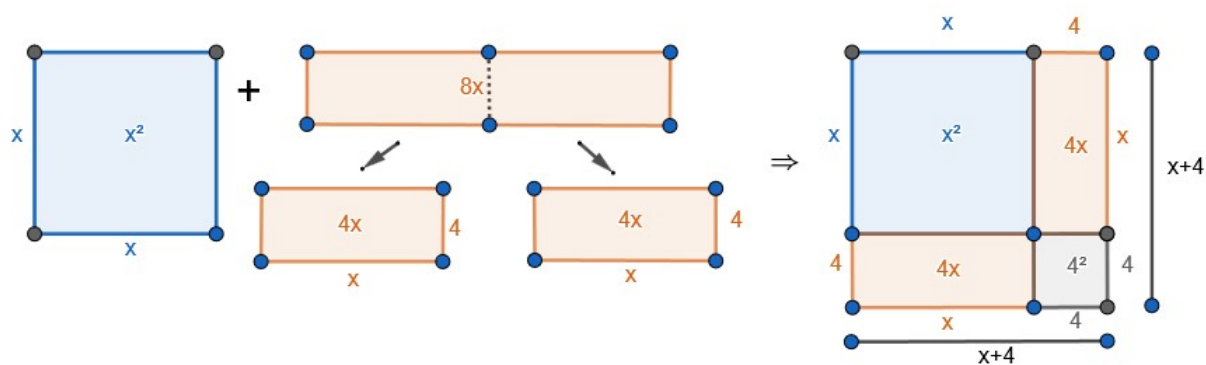
$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

Isolando o termo independente, temos:

$$x^2 + 8x = -7$$

Do ponto de vista geométrico, temos:

Figura 7 – Exemplo de método de completar quadrados



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Do ponto de vista algébrico, temos:

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 &= -7 + 4^2 \\ (x + 4)^2 &= -7 + 16 = 9 \\ (x + 4)^2 &= 9 \\ x + 4 &= \pm\sqrt{9} \\ x + 4 &= \pm 3 \\ x &= -4 \pm 3 \end{aligned}$$

Logo,

$$x_1 = -4 + 3 \Rightarrow x_1 = -1$$

e

$$x_2 = -4 - 3 \Rightarrow x_2 = -7$$

Exemplo sem desenho:

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

O principal termo a se reparar para este método é o termo $b.x$, pois buscamos encontrar nele o termo $\pm 2.a.b$ do trinômio quadrado perfeito.

Para completar quadrados, precisamos identificar os fatores a e b do trinômio quadrado perfeito na equação e depois acrescentar em ambos os lados da equação o valor necessário para completar o quadrado do termo b do trinômio quadrado perfeito. Daí vem o nome de “completar quadrados” do método.

$$x^2 + 2.4.x + 7 = 0$$

Observe que de 7 para $16 = 4^2$ falta 9 para completar o quadrado. Portanto, adicionando 9 em ambos os lados da equação, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2.4.x + 7 + 9 &= 0 + 9 \\ x^2 + 2.4.x + 4^2 &= 9 \end{aligned}$$

Uma vez completado o quadrado, recorreremos ao método da fatoração para resolver a equação. Assim,

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 &= 9 \\ x + 4 &= \pm\sqrt{9} \\ x + 4 &= \pm 3 \\ x &= -4 \pm 3 \end{aligned}$$

Logo,

$$x_1 = -4 + 3 \Rightarrow x_1 = -1$$

e

$$x_2 = -4 - 3 \Rightarrow x_2 = -7$$

Portanto, o método de completar quadrados amplia a capacidade de resolução do método da fatoração, pois permite que seja escrito em forma de quadrado da soma ou da diferença de dois termos um trinômio que não seria possível pelo método da fatoração.

1.3.3 Método da fórmula resolutiva da equação do 2º grau

O método da fórmula resolutiva da equação do 2º grau, em virtude de sua simplicidade, é o método mais utilizado para resolver rapidamente a equação do 2º grau. Tal fórmula é conhecida popularmente no Brasil como “fórmula de Bháskara”, em homenagem ao matemático indiano do século XII, embora os babilônios já possuíssem métodos

práticos conhecidos para a resolução da equação do 2º grau, como vimos anteriormente.

A fórmula resolutiva da equação do 2º grau é dada pelo seguinte enunciado:

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. A solução x é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a qual pode ser reescrita como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação. Nesse caso, se $\Delta \geq 0$, então existe solução real, e se $\Delta < 0$, então existem duas soluções complexas conjugadas.

O fato de escrevermos o discriminante separadamente é para organizar melhor a resolução, além de possibilitar saber antecipadamente quantas soluções reais teremos.

Vamos agora demonstrar tal fórmula resolutiva, de acordo com Lima *et al.* (2006, p. 136, com adaptações):

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{bx}{a} &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

Completando quadrados, temos:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Substituindo o trinômio quadrado perfeito pelo quadrado da soma de dois termos, temos:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Isolando a incógnita x , temos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vejamos dois exemplos de utilização da referida fórmula.

Exemplo 1:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{+5 \pm 1}{2}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{+5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

e

$$x_2 = \frac{+5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Exemplo 2:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4.3.1 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2.3} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{-4+2}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

e

$$x_2 = \frac{-4-2}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

1.3.4 Método da soma e do produto

O método da soma e do produto, como é popularmente conhecido, geralmente é passado aos alunos como uma curiosidade ou mesmo um “macete” para se resolver algumas equações do 2º grau de maneira rápida e com cálculos mentais.

Com frequência, tal método é apresentado aos alunos como se fosse uma “relação mágica”, a qual aparece sem maiores explicações para a resolução de algumas equações do 2º grau. E, quando é explicado aos estudantes, mostram-se apenas as relações para se aplicar depois o suposto macete, desconsiderando que é realmente um método de resolução da equação de 2º grau. Vamos agora apresentar tal método.

Sejam x_1 e x_2 as soluções reais de uma equação do 2º grau. Considere $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 \cdot x_2$ a soma e o produto de tais raízes, respectivamente. Assim,

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e

$$p = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2+b\sqrt{\Delta}-b\sqrt{\Delta}-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Portanto,

$$s = -\frac{b}{a}$$

e

$$p = \frac{c}{a}.$$

Vejam os dois exemplos de utilização do método da soma e do produto.

Exemplo 1. Com coeficiente $a = 1$:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ s = \frac{-b}{a} &= -\frac{(-5)}{1} = 5 \\ p = \frac{c}{a} &= \frac{6}{1} = 6 \end{aligned}$$

Para encontrar as possibilidades de $x_1 \cdot x_2 = 6$, faz-se necessário verificar quais combinações somadas da fatoração do 6 são iguais a 5.

Assim, $6 = 1.6$, $6 = 2.3$, $6 = (-1)(-6)$ ou $6 = (-2)(-3)$.

Logo, a única possibilidade é $6 = 2.3$, pois $2 + 3 = 5$.

Portanto, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

Exemplo 2. Com coeficiente $a \neq 1$:

$$\begin{aligned}x^2 - 8x - 10 &= 0 \\s = \frac{-b}{a} &= -\frac{(-8)}{2} = +\frac{8}{2} = 4 \\p = \frac{c}{a} &= -\frac{10}{2} = -5\end{aligned}$$

Para encontrar as possibilidades de $x_1.x_2 = -5$, faz-se necessário verificar quais combinações somadas da fatoração do -5 são iguais a 4.

Assim, $-5 = (-1).5$ ou $-5 = 1.(-5)$.

Logo, a única possibilidade é $-5 = (-1).5$, pois $(-1) + 5 = -1 + 5 = 4$.

Portanto, $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$.

1.3.5 Método da forma fatorada

O método da forma fatorada do trinômio do 2º grau é uma ferramenta muito útil no desenvolvimento de diversos problemas.

Lembremos que $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $p = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$, com x_1 e x_2 soluções reais da equação do 2º grau. Então,

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= ax^2 + \frac{a}{a}.bx + \frac{a}{a}.c \\&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\&= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2) \\&= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1.x_2) \\&= a(x - x_1)(x - x_2)\end{aligned}$$

Portanto, a forma fatorada do trinômio do 2º grau é dada por

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Vejamos a aplicação da referida fórmula utilizando os mesmos exemplos da seção anterior.

Exemplo 1:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Se $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$ são raízes da equação, então

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

é a forma fatorada do trinômio.

Exemplo 2:

$$2x^2 - 8x - 10 = 0$$

Se $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são as raízes da equação, então

$$2x^2 - 8x - 10 = 2(x - (-1))(x - 5) = 2(x + 1)(x - 5)$$

é a forma fatorada do trinômio.

O método da forma fatorada é uma técnica que pode ser utilizada em situações de simplificação de frações envolvendo polinômios.

1.3.6 Relações de Girard

Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, um polinômio do 2º grau.

Então, pela forma fatorada, temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Dividindo ambos os lados por a , temos:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - x_2x - x_1x + x_1 \cdot x_2 \\x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\end{aligned}$$

Comparando os termos da igualdade, temos:

$$\begin{cases} -(x_1 + x_2) &= \frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{cases}$$

Esse sistema de equações, conhecido como *relações de Girard* para um polinômio do 2º grau, relaciona os coeficientes e as raízes da equação e é a origem do método da soma e do produto.

Ainda que nem todos os métodos de resolução da equação do 2º grau sejam apresentados formalmente aos estudantes, é de extrema importância mostrar a sua origem a fim de estimular o amadurecimento matemático daqueles alunos que estiverem dispostos a aprofundar o seu conhecimento. Nesse sentido, o professor deve ter o cuidado para não gerar prejuízo aos estudantes com mais repertório matemático, tentando equilibrar conteúdo geral para todos e aspectos mais avançados para essa parte do corpo estudantil.

1.3.7 Método de Po Shen Loh

O método de Po Shen Loh é uma forma de resolução criada pelo professor Po Shen Loh e publicada em 2019 com o intuito de resolver a equação do 2º grau sem a necessidade de decorar fórmulas, apenas manipulando a equação utilizando as *relações de Girard* e produtos notáveis. Mas, no fim das contas, sua solução recai na fórmula resolutive, mas apresentada de maneira diferente.

Vamos agora demonstrar tal método, de acordo com Loh (2019), com adaptações.

Seja $x^2 + bx + c = 0$ uma equação do 2º grau com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a = 1$.

Pelas *relações de Girard*, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -b \\ x_1 \cdot x_2 &= c \end{cases}$$

Como $x_1 + x_2 = -b$, então podemos escrever:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{b}{2} + \lambda \\ x_2 = -\frac{b}{2} - \lambda \end{cases}$$

em que λ é uma quantidade desconhecida.

Usando a relação $x_1 \cdot x_2 = c$, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2} + \lambda\right) \left(-\frac{b}{2} - \lambda\right) = c$$

Fazendo $m = -\frac{b}{2}$, temos:

$$(m + \lambda)(m - \lambda) = c$$

Pelo produto notável $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, temos:

$$\begin{aligned} m^2 - \lambda^2 &= c \\ \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda^2 &= c \\ \frac{b^2}{4} - \lambda^2 &= c \end{aligned}$$

Reorganizando, temos:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4} - c &= \lambda^2 \\ \lambda^2 &= \frac{b^2 - 4c}{4} \\ \lambda &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} \\ \lambda &= \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \end{aligned}$$

O sinal de λ é indiferente na substituição em x_1 e x_2 , alterando apenas a ordem das soluções. Assim, é desnecessário o sinal de \pm à frente da raiz quadrada para λ .

Portanto,

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \lambda \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

e

$$x_2 = -\frac{b}{2} - \lambda \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Obtemos, assim, a mesma fórmula resolutive clássica, mas com $a = 1$. E, caso tenhamos uma equação com $a \neq 0$ e $a \neq 1$, basta dividirmos todos os termos pelo valor de a para recairmos no mesmo desenvolvimento.

Este método pode ser usado como desafio para estimular os alunos a pensar a solução da equação do 2º grau além do método “tradicional”.

Vejamos dois exemplos de utilização do referido método.

Exemplo 1:

$$x^2 + 7x + 2 = 0$$

Pelas *relações de Girard*, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2} + \lambda \\ x_2 = -\frac{7}{2} - \lambda \end{cases}$$

Pela relação do produto das raízes, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{7}{2} + \lambda\right) \left(-\frac{7}{2} - \lambda\right) = 2$$

Pelo produto notável $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, temos:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - \lambda^2 &= 2 \\ \frac{49}{4} - \lambda^2 &= 2 \end{aligned}$$

Reorganizando, temos:

$$\begin{aligned} \frac{49}{4} - 2 &= \lambda^2 \\ \lambda^2 &= \frac{49-8}{4} \\ \lambda^2 &= \frac{41}{4} \\ \lambda &= \pm \sqrt{\frac{41}{4}} \end{aligned}$$

Se escolhermos λ positivo, teremos:

$$x_1 = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}$$

e

$$x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Agora, se escolhermos λ negativo, teremos:

$$x_1 = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}$$

e

$$x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Portanto, é indiferente a escolha do sinal de λ , pois teremos as mesmas raízes.

Exemplo 2:

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

Pelas *relações de Girard*, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -8 \\ x_1 \cdot x_2 = 7 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{8}{2} + \lambda = -4 + \lambda \\ x_2 = -\frac{8}{2} - \lambda = -4 - \lambda \end{cases}$$

Pela relação do produto das raízes, temos:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= 7 \\ (-4 + \lambda)(-4 - \lambda) &= 7 \\ (-1)(\lambda - 4)(\lambda + 4) &= 7 \end{aligned}$$

Pelo produto notável $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ e multiplicando por -1 ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4^2 &= -7 \\ \lambda^2 &= 16 - 7 \\ \lambda^2 &= 9 \\ \lambda &= \pm\sqrt{9} \\ \lambda &= \pm 3 \end{aligned}$$

Como a escolha do sinal de λ é indiferente, utilizaremos λ positivo.

Assim,

$$x_1 = -4 + 3 = -1$$

e

$$x_2 = -4 - 3 = -7.$$

O método de Po Shen Loh pode ser utilizado para se fazer uma revisão de produtos notáveis e das *relações de Girard*, o que ajuda na fixação desses conteúdos que recorrentemente aparecem em diversos problemas. Portanto, é recomendável que tal método seja apresentado aos alunos.

1.3.8 Curiosidade para os coeficientes b e c com valor absoluto em sequência

A curiosidade que veremos nesta seção foi apresentada em uma aula da disciplina “Polinômios e Equações Algébricas” (MA38), do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), para situações específicas da equação do 2º grau com o coeficiente $a = 1$ e os coeficientes $b, c \in \mathbb{N}$. Aqui a ideia discutida naquela aula será expandida.

Situação 1: Seja dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que $a = 1$, $b = m$ e $c = -(m + 1)$, com $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned} x^2 + mx - (m + 1) &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= m^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(m + 1)] = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-m \pm \sqrt{(m+2)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-m \pm (m+2)}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{-m+m+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

e

$$x_2 = \frac{-m-m-2}{2} = \frac{-2m-2}{2} = -m - 1 = -(m + 1)$$

Situação 2: Seja dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que $a = 1$, $b = -m$ e $c = -(m + 1)$, com $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}x^2 - mx - (m + 1) &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-m)^2 - 4.1.[-(m + 1)] = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-(-m) \pm \sqrt{(m+2)^2}}{2.1} = \frac{m \pm (m+2)}{2}\end{aligned}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{m+m+2}{2} = \frac{2m+2}{2} = m + 1$$

e

$$x_2 = \frac{m-m-2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Situação 3: Seja dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que $a = 1$, $b = m$ e $c = m - 1$, com $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}x^2 + mx + (m - 1) &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= m^2 - 4.1.(m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-m \pm \sqrt{(m-2)^2}}{2.1} = \frac{-m \pm (m-2)}{2}\end{aligned}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{-m+m-2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

e

$$x_2 = \frac{-m-m+2}{2} = \frac{-2m+2}{2} = -m + 1 = -(m - 1)$$

Situação 4: Seja dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que $a = 1$, $b = -m$ e $c = (m - 1)$, com $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}x^2 - mx + (m - 1) &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-m)^2 - 4.1.(m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-(-m) \pm \sqrt{(m-2)^2}}{2.1} = \frac{m \pm (m-2)}{2}\end{aligned}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{m+m-2}{2} = \frac{2m-2}{2} = m - 1$$

e

$$x_2 = \frac{m-m+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Para os casos de termos o coeficiente $a = 1$, o valor absoluto do coeficiente c como sucessor do valor absoluto do coeficiente b e o coeficiente c negativo, com o coeficiente b podendo ser positivo ou negativo (situações 1 e 2), teremos as soluções da seguinte maneira: uma raiz será $+1$ ou -1 , a depender do sinal do coeficiente b (se $b > 0$, então a raiz será $+1$; e se $b < 0$, então a raiz será -1), e a outra raiz será o valor numérico de c com o sinal resultante da combinação dos sinais de b e c (se $b > 0$, então a raiz será $+c$; e se $b < 0$, então a raiz será $-c$).

Exemplo para a situação 1:

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -16$$

são as raízes desta equação.

Prova real:

$x_1 = 1$	$x_2 = -16$
$1^2 + 15 \cdot 1 - 16 = 0$	$(-16)^2 + 15 \cdot (-16) - 16 = 0$
$1 + 15 - 16 = 0$	$256 - 240 - 16 = 0$
$16 - 16 = 0$	$256 - 256 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Exemplo para a situação 2:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 5$$

são as raízes desta equação.

Prova real:

$x_1 = -1$	$x_2 = 5$
$(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 0$	$5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 0$
$1 + 4 - 5 = 0$	$25 - 20 - 5 = 0$
$+5 - 5 = 0$	$25 - 25 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

E para os casos de termos o coeficiente $a = 1$, o valor absoluto do coeficiente c como antecessor do valor absoluto do coeficiente b e o coeficiente c positivo, com o coeficiente b podendo ser positivo ou negativo (situações 3 e 4), teremos as soluções da seguinte maneira: uma raiz será $+1$ ou -1 , a depender do sinal do coeficiente b (se $b > 0$, então a raiz será -1 ; e se $b < 0$, então a raiz será $+1$), e a outra raiz será o valor numérico de c com o sinal resultante da combinação dos sinais de b e c (se $b > 0$, então a raiz será $-c$; e se $b < 0$, então a raiz será $+c$).

Exemplo para a situação 3:

$$x^2 + 9x + 8 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = -8$$

são as raízes desta equação.

Prova real:

$x_1 = -1$	$x_2 = -8$
$(-1)^2 + 9(-1) + 8 = 0$	$(-8)^2 + 9 \cdot (-8) + 8 = 0$
$1 - 9 + 8 = 0$	$64 - 72 + 8 = 0$
$+9 - 9 = 0$	$72 - 72 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Exemplo para a situação 4:

$$x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 11$$

são as raízes desta equação.

Prova real:

$x_1 = 1$	$x_2 = 11$
$1^2 - 12 \cdot 1 + 11 = 0$	$11^2 - 12 \cdot 11 + 11 = 0$
$1 - 12 + 11 = 0$	$121 - 132 + 11 = 0$
$+11 - 11 = 0$	$132 - 132 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Essas curiosidades podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula como desafio aos estudantes antes de serem demonstradas. E, depois de demonstradas, o professor pode pedir aos alunos para verificar o que aconteceria caso $a = -1$. Os estudantes poderão observar que caso $a = -1$ e os sinais dos coeficientes b e c forem opostos aos que verificamos, as soluções serão exatamente iguais aos resultados já demonstrados.

Além disso, o professor pode frisar que tais relações são úteis para ajudar os alunos mais atentos a encontrar as raízes desse tipo de equação do 2º grau de forma mais veloz, podendo ajudá-los em situações em que o tempo é primordial tais como o ENEM e os vestibulares diversos pelo país.

1.4 Função Quadrática

1.4.1 Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* ou *função polinomial do 2º grau* quando existem números reais a , b e c , com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas:

1. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, em que $a = 3$, $b = 2$ e $c = 1$;
2. $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$, em que $a = 5$, $b = -3$ e $c = 4$;
3. $f(x) = -7x^2 - 2x + 5$, em que $a = -7$, $b = -2$ e $c = 5$;
4. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, em que $a = -1$, $b = 4$ e $c = -1$;
5. $f(x) = 3x^2 + 6$, em que $a = 3$, $b = 0$ e $c = 6$.

1.4.2 Zero da função

Dada uma função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$ são chamadas de *raízes* ou *zeros* da função polinomial do 2º grau.

Os valores das *raízes* da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais podem ser obtidas, de forma geral, por meio da fórmula resolutiva da equação do 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

em que

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

é chamado de *discriminante* da função quadrática.

A quantidade de zeros reais da função quadrática é determinada pelo sinal do discriminante Δ :

- Se $\Delta > 0$, então há duas raízes reais distintas;
- Se $\Delta = 0$, então há duas raízes reais iguais (isto é, uma raiz real dupla);
- Se $\Delta < 0$, então não há raízes reais.

Além da fórmula resolutiva da equação do 2º grau, pode-se utilizar qualquer um dos outros métodos já apresentados para se encontrar as *raízes* da função quadrática, de acordo com a conveniência que o estudante julgar ser melhor. E a habilidade para se escolher o melhor método será desenvolvida com a resolução de diversas equações, de mais de uma maneira, até que ele perceba determinados detalhes de cada equação que o permitam escolher um método mais rápido de resolução.

Vejamos três exemplos de como encontrar as raízes reais de uma função quadrática a partir do sinal do discriminante:

Exemplo 1:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 1 &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{-4+2}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

e

$$x_2 = \frac{-4-2}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

Logo, $x_1 = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = -1$ são as raízes da equação.

Exemplo 2:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{4+0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{4-0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Logo, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ é uma raiz dupla da equação.

Exemplo 3:

$$2x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 25 - 32 = -7$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{2 \cdot 2} \notin \mathbb{R}$$

Logo, não existem raízes reais para a equação.

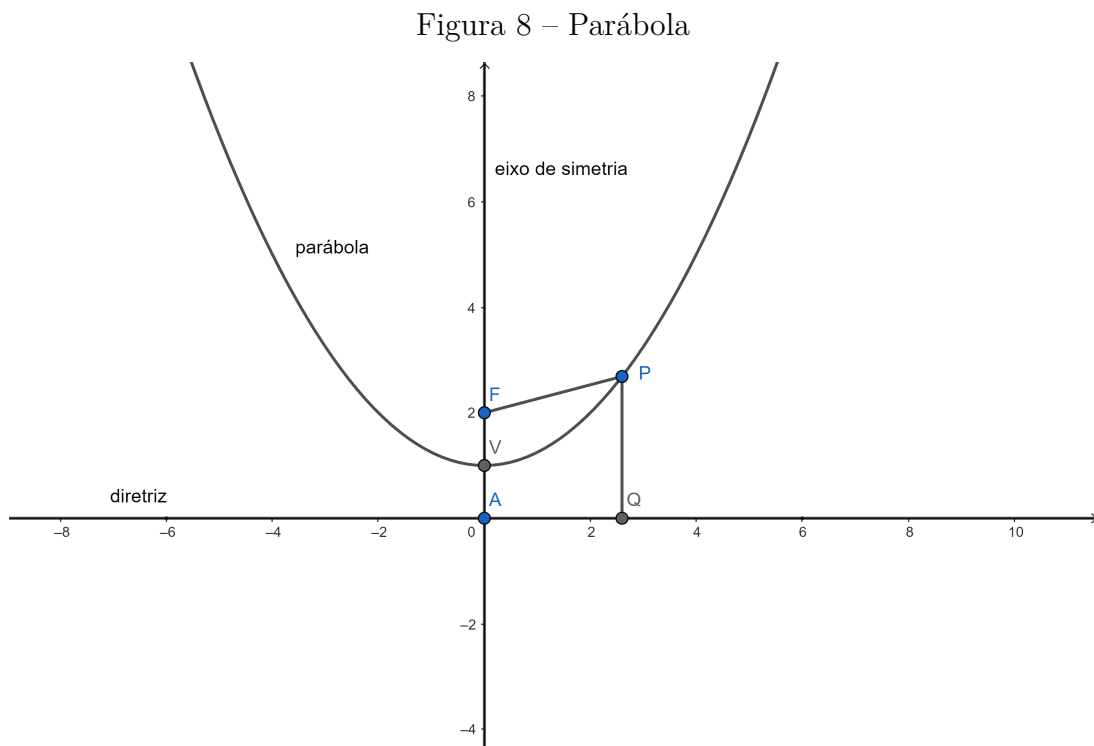
1.4.3 Gráfico da Função Quadrática

Definição: Sejam \mathcal{L} uma reta e F um ponto do plano não pertencente a \mathcal{L} . A *parábola* \mathcal{P} de foco F e diretriz \mathcal{L} é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a \mathcal{L} :

$$\mathcal{P} = \{P \mid d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}.$$

A *reta focal* l da parábola \mathcal{P} é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz. Tal reta é chamada de *eixo da parábola*. O ponto V da parábola \mathcal{P} que pertence à reta focal e é o ponto médio entre o foco F e o ponto de interseção A entre a reta focal l e a diretriz \mathcal{L} é o *vértice* de \mathcal{P} . Nesse caso, o número $2p = d(F, \mathcal{L}) = d(F, A)$ é o parâmetro da parábola \mathcal{P} , de modo que $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$.

Além do mais, toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal, conforme a figura a seguir.



Fonte: Produzido pelo próprio autor

1.4.4 Vértice da parábola

Pode-se mostrar que o gráfico referente à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola. Nesse caso, as abscissas dos pontos em que a parábola “corta” o eixo- x são exatamente as raízes de $f(x) = 0$.

Como a parábola é simétrica em relação a seu eixo de simetria passando sobre o vértice V , e sabendo que os pontos de mesma altura também são simétricos, basta encontrarmos o ponto médio entre as raízes x_1 e x_2 para sabermos a coordenada x do vértice.

Assim,

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ x_v &= \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} \\ x_v &= \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} \\ x_v &= \frac{-2b}{2a} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Agora, para obtermos o valor da coordenada y do vértice, basta calcular a imagem de $x_v = -\frac{b}{2a}$ pela função.

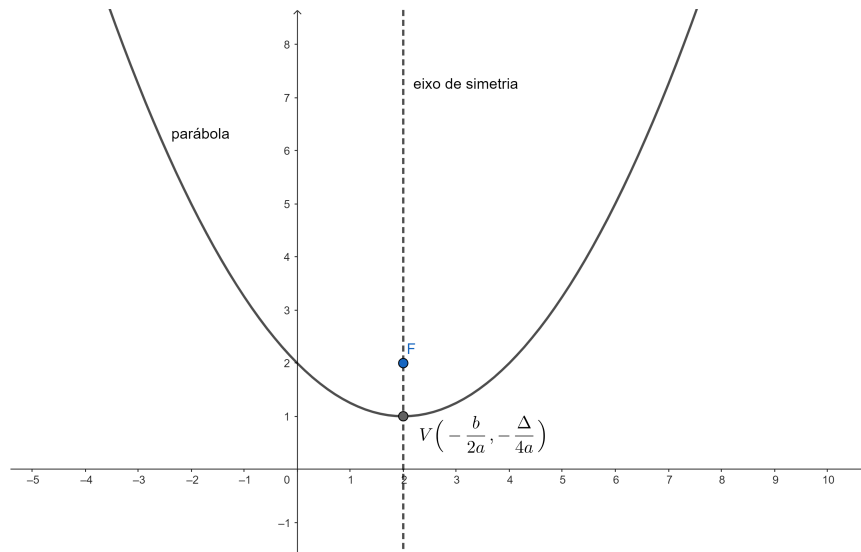
Então,

$$\begin{aligned} y_v &= ax_v^2 + bx_v + c \\ y_v &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ y_v &= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\ y_v &= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{2ab^2}{4a^2} + \frac{4a^2c}{4a^2} \\ y_v &= \frac{a(b^2 - 2b^2 + 4ac)}{4a^2} \\ y_v &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ y_v &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são dadas por:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Figura 9 – Vértice da parábola



Fonte: Produzido pelo próprio autor

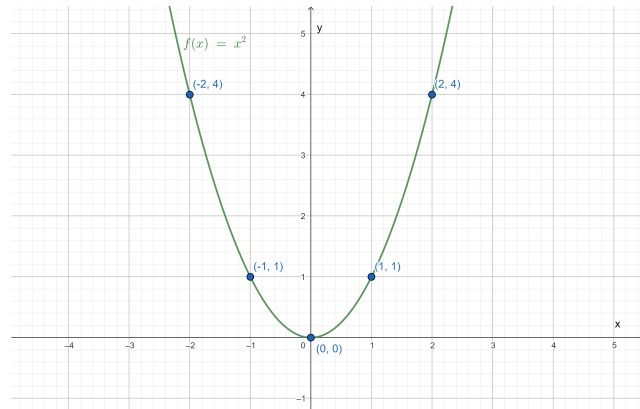
A ordenada do vértice da parábola determina o valor máximo ou o valor mínimo da função quadrática, dependendo de a concavidade estar voltada para baixo ou para cima, respectivamente.

1.4.5 Gráfico da função definida por $f(x) = x^2$

Como já deve ter sido estudado no 9º ano do ensino fundamental II, para se construir o gráfico de uma função começamos atribuindo alguns valores para x e encontramos os respectivos valores para y por meio da lei de formação da função. Dessa forma, construímos uma tabela com tais pares ordenados, os quais devem ser plotados no plano cartesiano.

Então, para $f(x) = x^2$, temos:

x	$y = f(x) = x^2$	(x, y)
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$

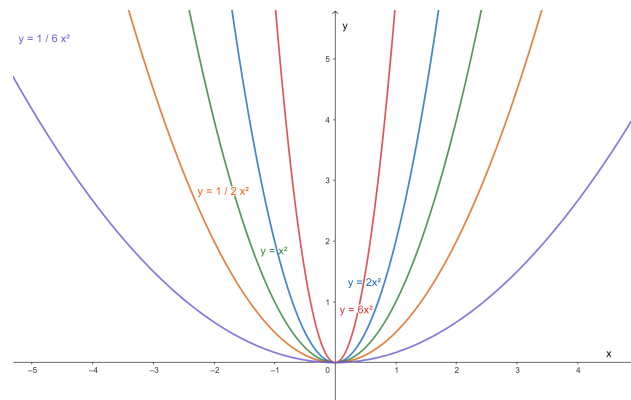
Figura 10 – Gráfico $f(x) = x^2$ 

Fonte: Produzido pelo próprio autor

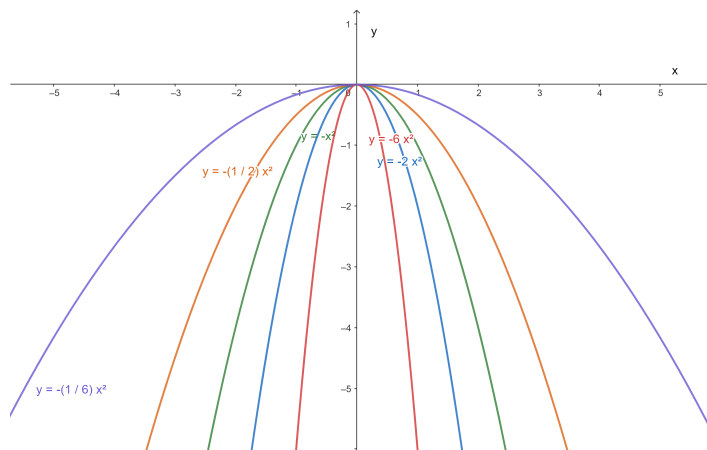
Observe que a curva é *simétrica* em relação ao eixo-y, isto é, se (a, b) pertence à curva, então $(-a, b)$ também pertencerá, pois $f(x) = x^2$ é uma *função par*, ou seja, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Além disso, o domínio dessa função é o eixo real x e sua imagem é o eixo real y tal que $y \geq 0$.

1.4.6 Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

Para uma melhor observação do comportamento das funções do tipo $f(x) = ax^2$, vejamos os gráficos de tais funções com coeficientes $a = 1$, $a = 2$, $a = 6$, $a = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{6}$, para visualizar o comportamento com $a > 0$, e com coeficientes $a = -1$, $a = -2$, $a = -6$, $a = -\frac{1}{2}$ e $a = -\frac{1}{6}$, para visualizar o comportamento com $a < 0$.

Figura 11 – Coeficiente $a > 0$ 

Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 12 – Coeficiente $a < 0$ 

Fonte: Produzido pelo próprio autor

Podemos observar que:

- quando $a > 0$, a concavidade da curva é voltada para cima, o menor valor assumido pela função é zero, e ela não tem valor máximo, pois é ilimitada superiormente;
- quando $a < 0$, a concavidade da curva é voltada para baixo, o maior valor assumido pela função é zero, e ela não tem valor mínimo, pois é ilimitada inferiormente;
- o vértice é o ponto $(0, 0)$ e o eixo de simetria é a reta $x = 0$;
- quanto maior for o valor absoluto de a , menor será a abertura do gráfico, e quanto menor for o valor absoluto de a , maior será a abertura do gráfico;
- os gráficos de $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a'x^2$, em que a e a' são valores opostos, são simétricos em relação ao eixo-x.

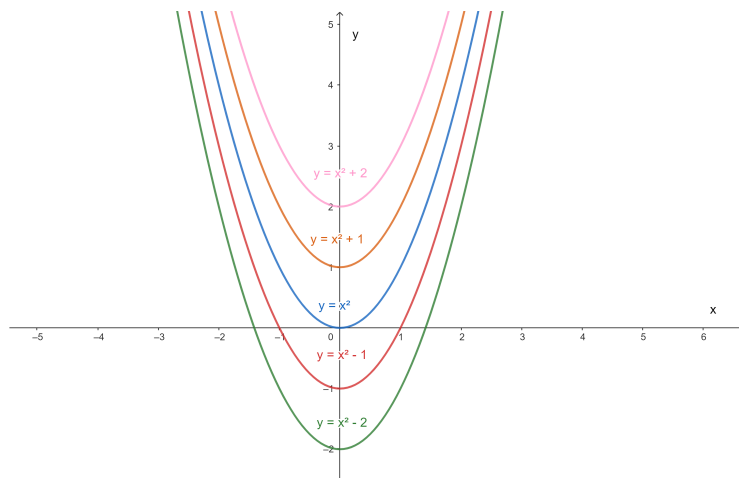
Portanto, o coeficiente a nos informa, em suma, a concavidade da parábola e o seu grau de abertura.

1.4.7 Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$ e a translação vertical

Do mesmo modo que para $f(x) = ax^2$, construiremos vários gráficos de funções do tipo $f(x) = ax^2 + c$ sobre o mesmo plano cartesiano a fim de observarmos o seu comportamento:

- a. $g(x) = x^2 - 2$
- b. $h(x) = x^2 - 1$
- c. $f(x) = x^2 + 0$
- d. $r(x) = x^2 + 1$
- e. $s(x) = x^2 + 2$

Figura 13 – Gráficos família $f(x) = ax^2 + c$, $a > 0$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Observemos comparativamente os demais gráficos com relação ao gráfico de $f(x) = x^2$, em cor azul ao centro. Em todos os gráficos o eixo de simetria é $x = 0$, com vértices, respectivamente, em $V(0, -2)$ para $g(x) = x^2 - 2$, $V(0, -1)$ para $h(x) = x^2 - 1$, $V(0, 0)$ para $f(x) = x^2$, $V(0, 1)$ para $r(x) = x^2 + 1$ e $V(0, 2)$ para $s(x) = x^2 + 2$.

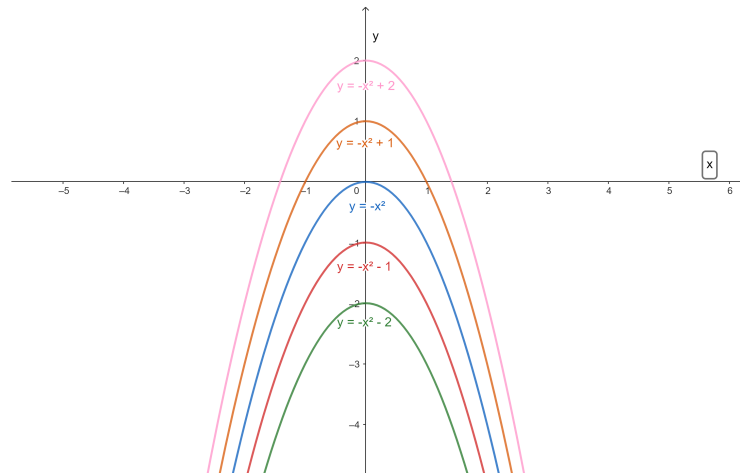
Logo, de modo geral, para $a > 0$ o *valor mínimo* da função $f(x) = x^2 + c$ é a ordenada c do vértice $V(0, c)$.

Agora, construiremos os gráficos simétricos aos gráficos anteriores:

- a. $g'(x) = -x^2 - 2$
- b. $h'(x) = -x^2 - 1$
- c. $f'(x) = -x^2 + 0$
- d. $r'(x) = -x^2 + 1$

e. $s'(x) = -x^2 + 2$

Figura 14 – Gráficos família $f(x) = ax^2 + c, a < 0$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Agora, observemos comparativamente os demais gráficos simétricos com relação ao gráfico de $f'(x) = -x^2$, em cor azul ao centro. Em todos os gráficos o eixo de simetria é $x = 0$, com vértices, respectivamente, em $V(0, -2)$ para $g'(x) = -x^2 - 2$, $V(0, -1)$ para $h'(x) = -x^2 - 1$, $V(0, 0)$ para $f'(x) = -x^2$, $V(0, 1)$ para $r'(x) = -x^2 + 1$ e $V(0, 2)$ para $s'(x) = -x^2 + 2$.

Logo, de modo geral, para $a < 0$ o *valor máximo* da função $f(x) = -x^2 + c$ é a ordenada c do vértice $V(0, c)$.

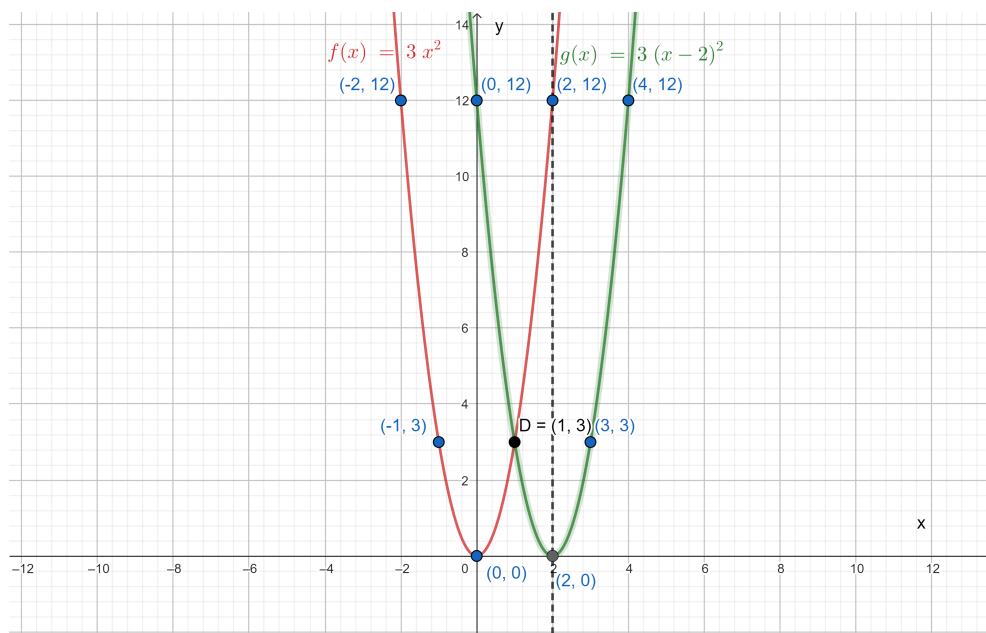
Reparemos, também, que os gráficos do tipo $f(x) = ax^2 + c$ são *deslocamentos verticais* do gráfico de $g(x) = ax^2$, em que o coeficiente c indica se o deslocamento é para cima ou para baixo, em c unidades, além de ser a ordenada do ponto onde o gráfico passa pelo eixo-y.

1.4.8 Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2$, $a \neq 0$ e a translação horizontal

Vamos construir os gráficos de $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 3(x - 2)^2$, por meio de tabelas, para entendermos suas características:

x	$f(x) = 3x^2$	$g(x) = 3(x - 2)^2$
-2	$f(-2) = 3(-2)^2 = 12$	$g(-2) = 3(-2 - 2)^2 = 48$
-1	$f(-1) = 3(-1)^2 = 3$	$g(-1) = 3(-1 - 2)^2 = 27$
0	$f(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$	$g(0) = 3(0 - 2)^2 = 12$
1	$f(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$	$g(1) = 3(1 - 2)^2 = 3$
2	$f(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$	$g(2) = 3(2 - 2)^2 = 0$
3	$f(3) = 3 \cdot 3^2 = 27$	$g(3) = 3(3 - 2)^2 = 3$
4	$f(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$	$g(4) = 3(4 - 2)^2 = 12$

Figura 15 – Gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$, $a \neq 0$ e a translação horizontal



Fonte: Produzido pelo próprio autor

O eixo de simetria de $f(x) = 3x^2$ é $x = 0$ e o eixo de simetria de $g(x) = 3(x - 2)^2$ é $x = 2$, ou seja, o gráfico de $g(x)$ é obtido a partir do gráfico de $f(x)$ por meio de um deslocamento horizontal de 2 unidades para a direita.

Sendo assim, de modo geral, temos:

- o gráfico da função $f(x) = a(x - m)^2$, $a \neq 0$, é obtido a partir do gráfico de $g(x) = ax^2$ por meio de um *deslocamento horizontal* de m unidades (se $m > 0$, então o deslocamento é para a direita e se $m < 0$, então o deslocamento é para a esquerda);
- o vértice é o ponto $V(m, 0)$, de modo que o eixo de simetria da parábola é $x = m$.

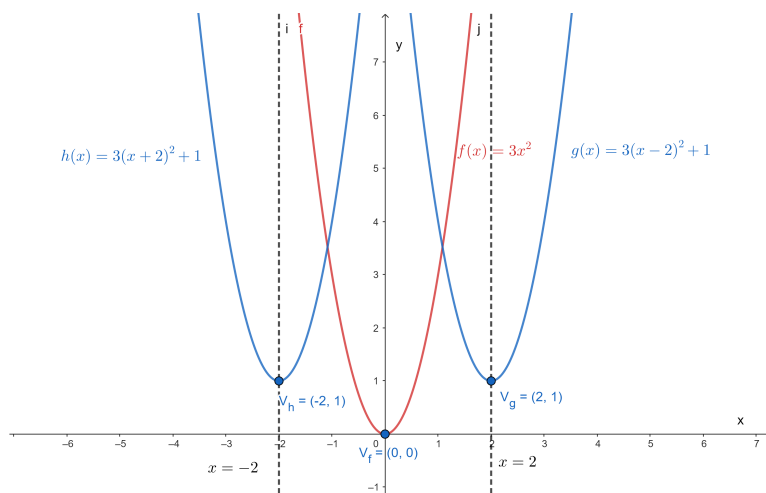
1.4.9 Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2 + k$, $a \neq 0$

O gráfico de $f(x) = a(x - m)^2 + k$, $a \neq 0$ e $m, k \in \mathbb{R}$, é obtido a partir do gráfico de $g(x) = ax^2$ por meio de uma combinação entre $h(x) = a(x - m)^2$ e $r(x) = ax^2 + k$. Ou seja, em $f(x) = a(x - m)^2 + k$ há uma translação vertical de k unidades, para cima (se $k > 0$) ou para baixo (se $k < 0$), e uma translação horizontal de m unidades, para a direita (se $m > 0$) ou para a esquerda (se $m < 0$). Além disso, o seu eixo de simetria é $x = m$.

Exemplo:

Considere $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$ e $h(x) = 3(x + 2)^2 + 1$ funções quadráticas. Pelos gráficos, podemos observar que:

Figura 16 – Gráfico de $f(x) = a(x - m)^2 + k$, $a \neq 0$ e a translação horizontal e vertical



Fonte: Produzido pelo próprio autor

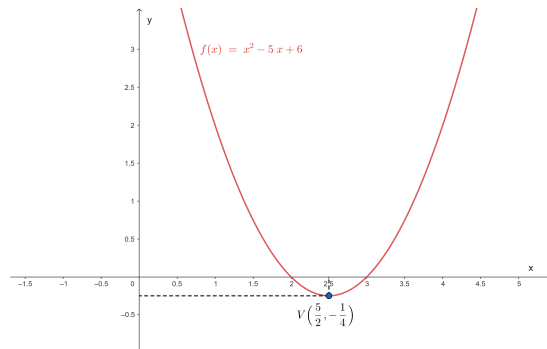
- em $f(x) = 3x^2$ o eixo de simetria é $x = 0$, o vértice é $V(0, 0)$ e não há translação vertical nem horizontal;
- em $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$ o eixo de simetria é $x = 2$, o vértice é $V(2, 1)$, há uma translação vertical de uma unidade para cima e uma translação horizontal de duas unidades para a direita;
- em $h(x) = 3(x + 2)^2 + 1$ o eixo de simetria é $x = -2$, o vértice é $V(-2, 1)$, há uma translação vertical de uma unidade para cima e uma translação horizontal de duas unidades para a esquerda.

Podemos observar também que os valores de m e k são as coordenadas do vértice da parábola $f(x) = a(x - m)^2 + k$, $a \neq 0$, em que $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$.

Exemplo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 5x + 6 \\ f(x) &= x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + 6 + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} \\ f(x) &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 6 - \frac{25}{4} \\ f(x) &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{24-25}{4} \\ f(x) &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Figura 17 – Gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Portanto, neste caso, a parábola tem concavidade voltada para cima ($a > 0$), há uma translação vertical de $\frac{1}{4}$ unidades para baixo ($k < 0$), há uma translação horizontal de $\frac{5}{2}$ unidades para a direita ($m > 0$), o eixo de simetria é $x = \frac{5}{2}$ e o vértice é $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

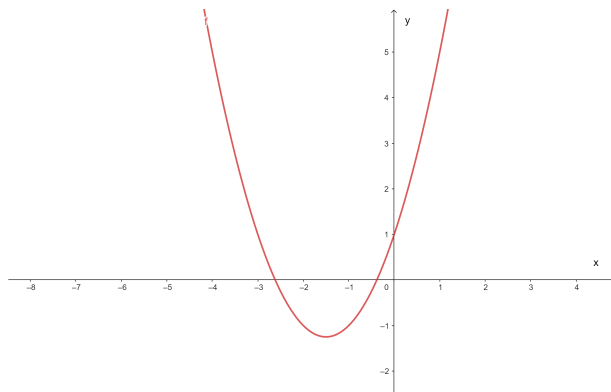
1.4.10 Gráfico da função definida por $ax^2 + bx + c$

Até o momento, vimos os efeitos dos coeficientes a e c no gráfico da parábola, bem como o fato de o movimento de translação horizontal estar indiretamente envolvido com o coeficiente b , pois, ao expandirmos o termo $a(x - m)^2$ da translação horizontal, aparecerá um termo referente ao termo bx da função quadrática.

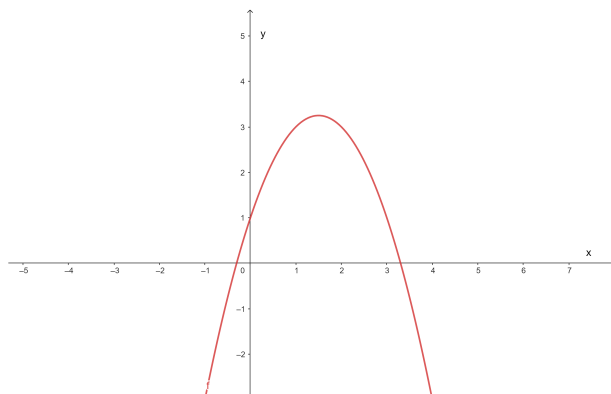
Agora, veremos os efeitos de cada coeficiente de $f(x) = ax^2 + bx + c$ no gráfico da função quadrática.

1.4.10.1 Coeficiente a e o gráfico

O coeficiente a da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é responsável pela concavidade e pela abertura da parábola, como vimos na seção 1.4.6.

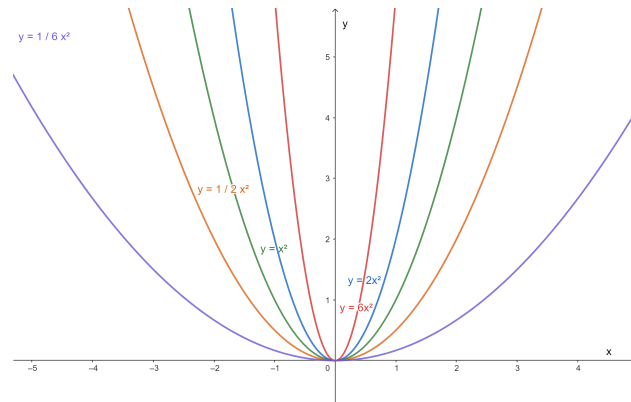
Figura 18 – Se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima

Fonte: Produzido pelo próprio autor

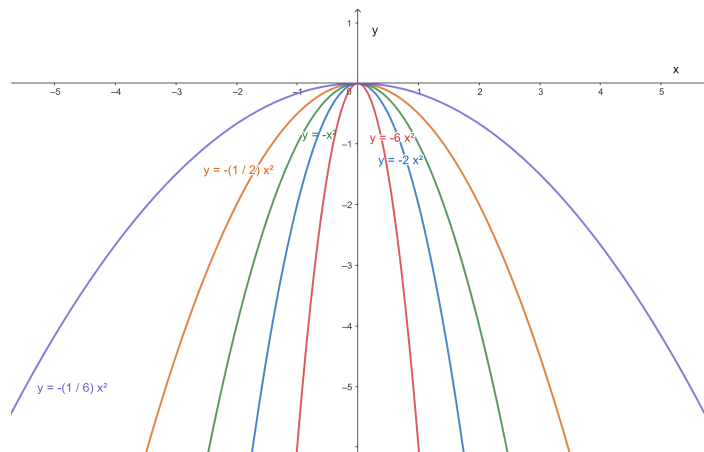
Figura 19 – Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo

Fonte: Produzido pelo próprio autor

Além disso, o coeficiente a nos informa sobre a abertura da parábola: quanto maior for a menor será a abertura e quanto menor for a maior será a abertura da parábola, independentemente se $a > 0$ ou $a < 0$.

Figura 20 – Gráficos família $f(x) = ax^2$, $a > 0$ 

Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 21 – Gráficos família $f(x) = ax^2$, $a < 0$ 

Fonte: Produzido pelo próprio autor

1.4.10.2 Coeficiente b e o gráfico

O coeficiente b é o menos explorado na análise gráfica da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pois normalmente se leva em conta apenas a concavidade e onde a parábola intercepta o eixo- y , além dos zeros da função para o eixo- x .

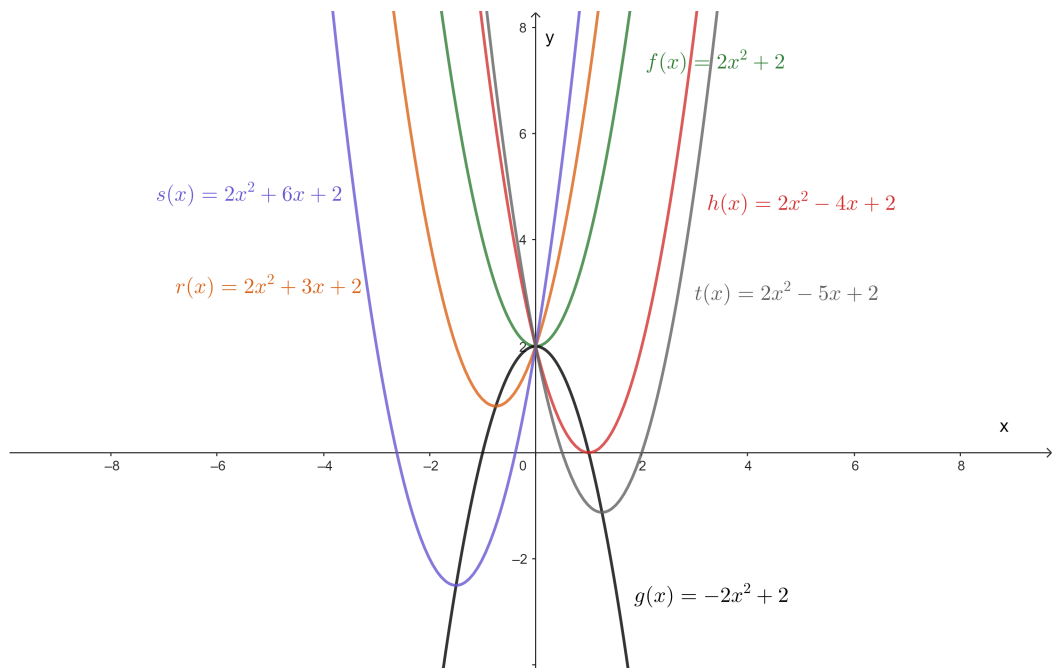
Mas, ao analisarmos o comportamento do vértice $V(x_v, y_v)$ de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, observamos um comportamento interessante que nos mostrará o efeito do coeficiente b para o gráfico da parábola de $f(x)$.

Consideremos uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, e o seu vértice $V(x_v, y_v)$. Manipulando a coordenada y_v de $V(x_v, y_v)$, temos:

$$\begin{aligned}
 V(x_v, y_v) &= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) \\
 &= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right) \\
 &= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right) \\
 &= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b}{2a} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{a} + c \right) \\
 &= \left(-\frac{b}{2a}, -a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + c \right) \\
 &= (x_v, -ax_v^2 + c)
 \end{aligned}$$

A consequência gerada a partir da relação $V(x_v, y_v) = (x_v, -ax_v^2 + c)$ é um gráfico formado por todos os vértices $V(x_v, y_v)$ da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando fixamos a e c e variamos b . No caso particular da família de parábolas dada por $y = x^2 + bx + 1$ em Souza, Paulovich e Nascimento (1999, p. 9), o lugar geométrico dos vértices das parábolas obtidas é a parábola $y = -x^2 + 1$, que é um caso específico de nossa generalização. E este gráfico é congruente à função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e simétrico em relação ao eixo horizontal $y = c$ a $g(x) = ax^2 + c$, como podemos observar na figura a seguir:

Figura 22 – Gráficos comportamento do coeficiente b



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Portanto, o coeficiente b no indica se a parábola intercepta o eixo- y no ramo crescente ou decrescente da parábola. Se $b > 0$, o vértice da parábola estará do lado esquerdo

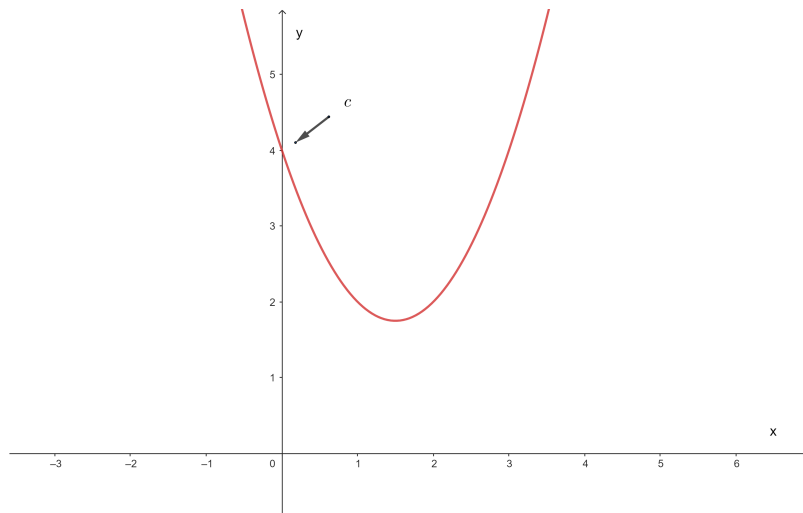
do eixo-y, logo a parábola interceptará o eixo-y em seu ramo crescente; e se $b < 0$, o vértice da parábola estará do lado direito do eixo-y, logo a parábola interceptará o eixo-y em seu ramo decrescente, como pode ser visto na figura 22.

1.4.10.3 Coeficiente c e o gráfico

O coeficiente c nos indica onde a parábola intercepta o eixo-y.

O ponto onde a parábola intercepta o eixo-y é o ponto $(0, c)$, pois quando $x = 0$ temos $y = f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$.

Figura 23 – Coeficiente c



Fonte: Produzido pelo próprio autor

2 METODOLOGIA

Neste capítulo detalharemos os procedimentos metodológicos utilizados em nosso trabalho visando responder às questões norteadoras contempladas no objetivo geral e nos objetivos específicos. Em particular, serão apresentados os passos de desenvolvimento da pesquisa que culminaram no artigo “Função quadrática: uma análise da aprendizagem em tempos de pandemia numa escola pública do Distrito Federal” (NERES; BEZERRA; EVANGELISTA, 2023), o qual visava verificar a percepção de alunos do ensino médio dessa escola com relação ao ensino remoto e suas possíveis dificuldades no processo de aprendizagem do conteúdo de funções quadráticas, que porventura possam ter surgido ou se amplificado por essa modalidade de ensino, devido ao isolamento social causado pela pandemia de Covid-19.

2.1 Descrição do artigo

A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa, que é um

processo de pesquisa [que] envolve as questões e os procedimentos que emergem, os dados tipicamente coletados no ambiente do participante, a análise dos dados indutivamente construída [...] e as interpretações feitas pelo pesquisador acerca do significado dos dados (CRESWELL, 2010, p. 26, adendo nosso).

Segundo Creswell (2010, p. 206),

os métodos qualitativos mostram uma abordagem diferente da investigação acadêmica do que aquela dos métodos da pesquisa quantitativa. A investigação qualitativa emprega diferentes concepções filosóficas, estratégias de investigação e métodos de coleta, análise e interpretação dos dados. Embora os processos sejam similares, os procedimentos qualitativos baseiam-se em dados de textos e imagem, têm passos singulares na análise dos dados e se valem de diferentes estratégias de investigação.

Como estratégia de investigação e método de coleta de dados, foi realizado um levantamento de informações por meio de um questionário implementado em um formulário eletrônico na plataforma *G-Suite*, do *Google*, posteriormente chamado de *Google Workspace*, que a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF) utilizou como

ambiente virtual de interação escolar durante o período pandêmico.

Tal formulário, disponibilizado no Apêndice A, foi respondido, de forma anônima e on-line, por 171 estudantes do 1º, 2º e 3º anos do ensino médio de uma escola pública do Distrito Federal, no período de 7 a 26 de outubro de 2021. Ele estava estruturado em três seções, a saber: “Sobre o desenvolvimento do conteúdo”, com seis perguntas; “Sobre a parte gráfica”, com onze perguntas; e “Sobre a parte de cálculo”, com sete perguntas. Tais questões contemplavam as impressões dos estudantes com relação à modalidade de ensino remoto, seus conhecimentos em relação à parte gráfica da função quadrática e sua capacidade de obter os zeros da função quadrática, entre outras habilidades. As perguntas apresentavam opções de resposta variadas para marcação, sendo que nas seções que abordavam os conteúdos a serem analisados havia, em todas as questões, os itens “Vi o conteúdo, mas não sei responder” e “Não vi o conteúdo”, para distinguir os alunos que não respondiam corretamente daqueles que admitiam ter dificuldade com o conteúdo e preferiam não responder.

Com base nas informações levantadas pela pesquisa, faremos a seguir a análise de tais dados.

2.2 Dificuldades de estudo no período pandêmico

No tocante à seção “Sobre o desenvolvimento do conteúdo” do formulário, dos 171 estudantes que o preencheram, 149 (87,1%) estudavam no 3º ano do ensino médio.

Quando perguntados se já haviam estudado o conteúdo de funções quadráticas na escola, 160 (93,6%) responderam afirmativamente, dos quais 18,1% apenas na modalidade de ensino remoto, 52% também presencialmente e 29,8% apenas na modalidade de ensino presencial.

Quando perguntados se consideravam as aulas remotas produtivas durante o período totalmente on-line, 10,5% responderam afirmativamente, 40,4%, negativamente, e 49,1% as consideraram parcialmente produtivas.

De posse desses dados, vê-se que a grande maioria dos estudantes considerou improdutiva ou parcialmente produtiva a modalidade de ensino remoto. Nesse sentido, é importante ressaltar que a adoção de aulas on-line explicitou a desigualdade social exis-

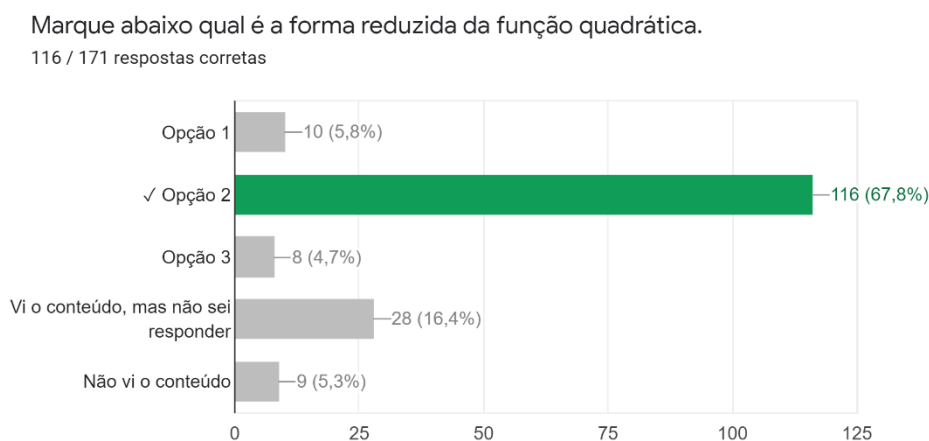
tente entre escola pública e particular. Enquanto as escolas particulares tiveram, em geral, mais facilidade em adaptar-se ao ensino remoto por terem mais recursos e alunos com maior uniformidade ao acesso a meios tecnológicos como notebook, celular e internet, as escolas públicas contemplavam estudantes dos mais variados níveis socioeconômicos, inclusive aqueles sem qualquer aparelho eletrônico necessário para acessar e acompanhar o conteúdo digital.

Outro fator importante a ser lembrado é que apenas o acesso ao conteúdo de forma remota não pressupõe sucesso no processo de ensino e aprendizagem, pois fatores emocionais e motivacionais também podem ter influenciado no desinteresse dos alunos durante a pandemia.

2.3 Facilidade em entender a parte gráfica

No que concerne à seção “Sobre a parte gráfica” do formulário, a primeira pergunta pedia para marcar a alternativa que representava a forma reduzida de uma função quadrática, em que a opção 1 era a forma reduzida de uma função afim e a opção 3, a forma reduzida de uma função cúbica. A figura a seguir mostra que 67,8% do total de alunos respondeu corretamente à questão.

Figura 24 – Primeira pergunta da parte gráfica

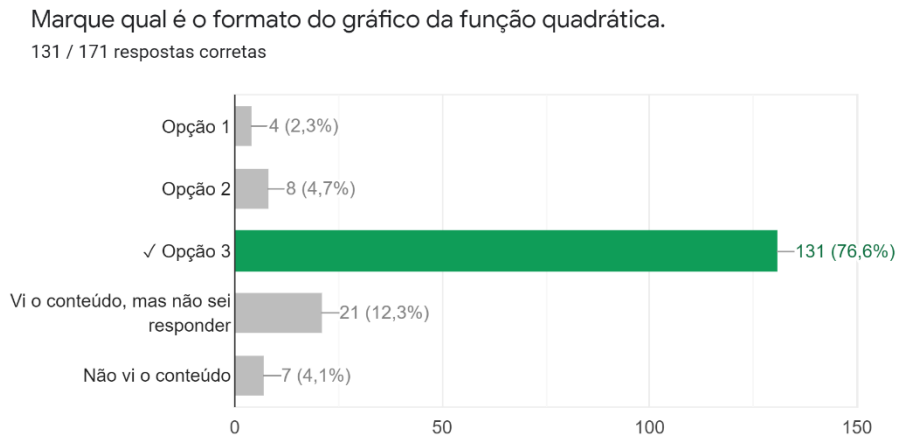


Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Na segunda pergunta, pedia-se para marcar qual era o formato do gráfico de uma função quadrática, listado juntamente com o gráfico de uma função afim (opção 2) e o gráfico de uma função cúbica (opção 1). Conforme a figura seguinte, 76,6% marcaram a

opção 3 corretamente.

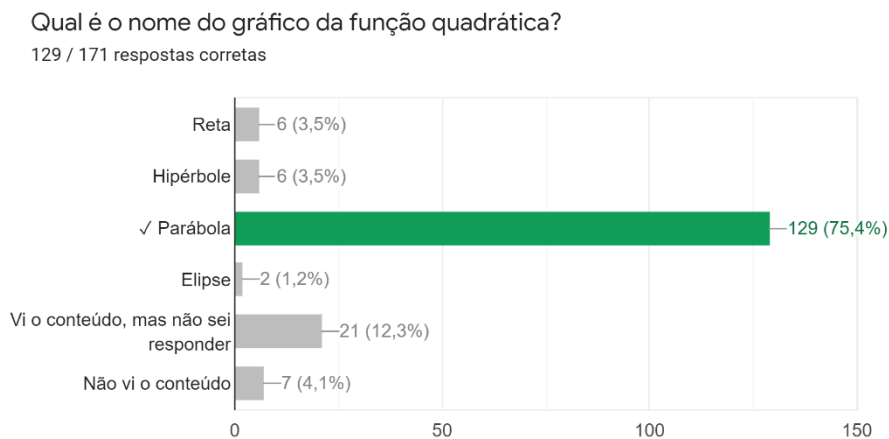
Figura 25 – Segunda pergunta da parte gráfica



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Já a terceira pergunta pedia para marcar o nome do gráfico da função quadrática, com 75,4% dos alunos marcando a opção correta (parábola).

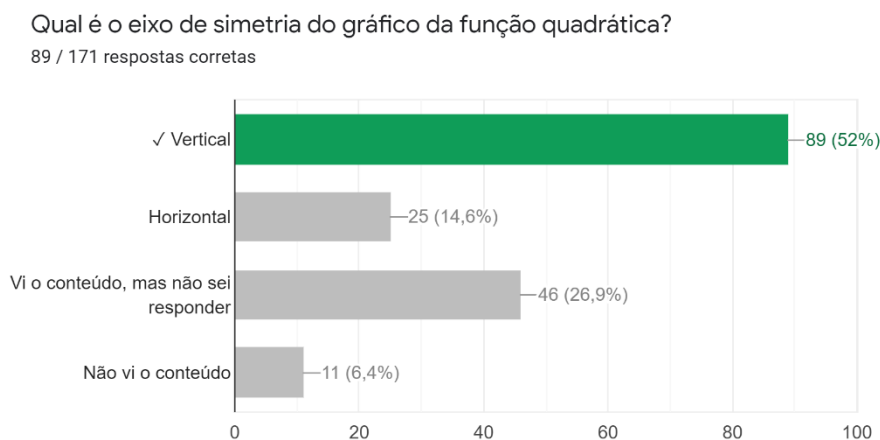
Figura 26 – Terceira pergunta da parte gráfica



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

A quarta pergunta referia-se à posição do eixo de simetria da parábola e apenas 52% marcaram a opção correta (vertical).

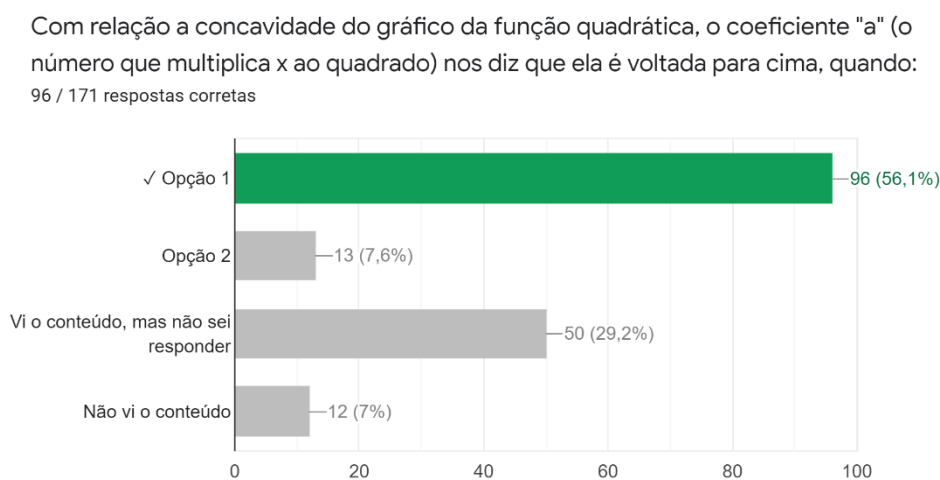
Figura 27 – Quarta pergunta da parte gráfica



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Na quinta e sexta perguntas, foi pedida a relação entre a concavidade do gráfico da função quadrática e o coeficiente a da função. Na quinta pergunta, quando ela era voltada para cima, 56,1% responderam corretamente. Já na sexta pergunta, quando ela era voltada para baixo, 57,9% marcaram a opção correta.

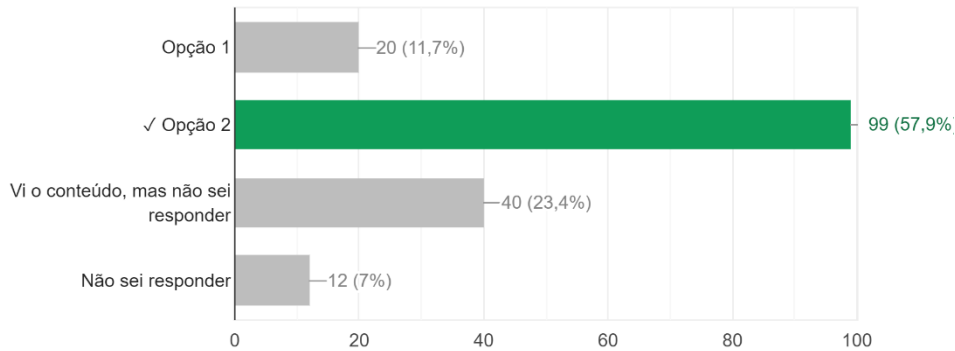
Figura 28 – Quinta pergunta da parte gráfica



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Figura 29 – Sexta pergunta da parte gráfica

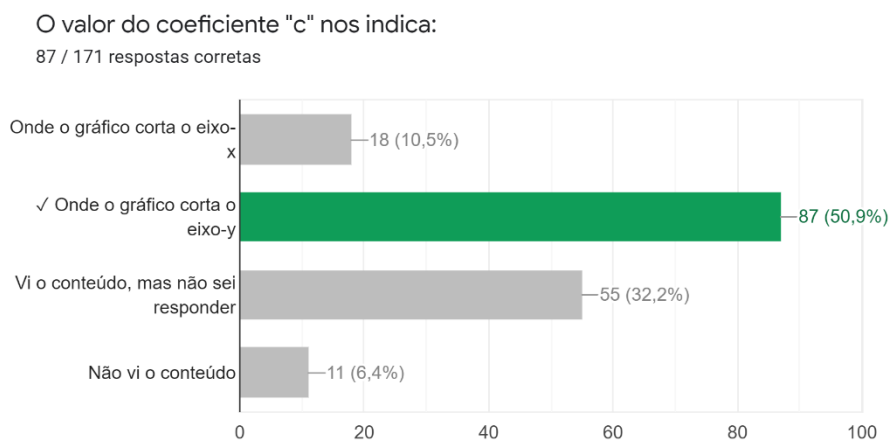
Com relação a concavidade do gráfico da função quadrática, o coeficiente "a" (o número que multiplica x ao quadrado) nos diz que ela é voltada para baixo, quando:
99 / 171 respostas corretas



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Na sétima pergunta, buscou-se verificar o que o coeficiente c indicava, e apenas 50,9% marcaram a opção correta (onde a parábola “corta” o eixo- y).

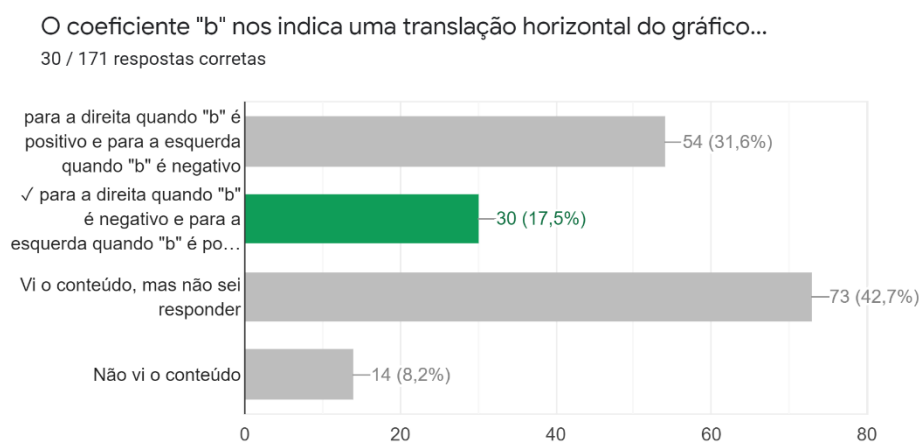
Figura 30 – Sétima pergunta da parte gráfica



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Na oitava pergunta, foi pedido para se responder que tipo de translação horizontal o coeficiente b indicava, e, infelizmente, apenas 17,5% souberam responder corretamente (para a direita quando b é negativo e para a esquerda quando b é positivo).

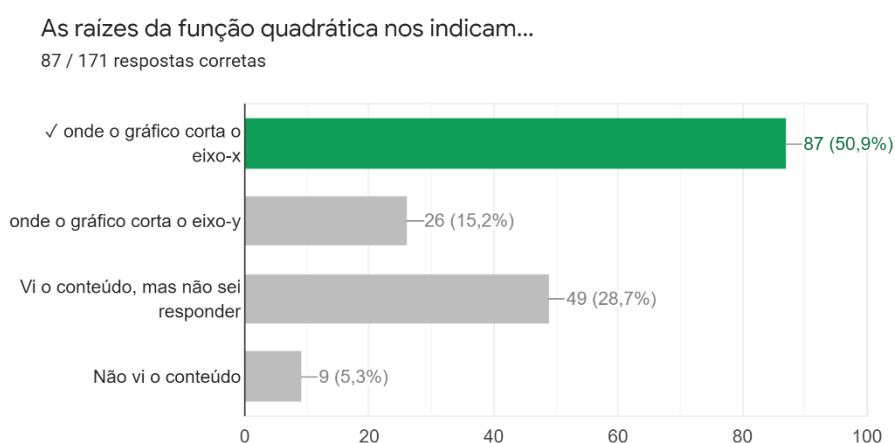
Figura 31 – Oitava pergunta da parte gráfica



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Na nona pergunta, buscou-se saber o entendimento do papel desempenhado pelas raízes em relação ao gráfico da função quadrática, e 50,9% marcaram a opção correta (onde o gráfico "corta" o eixo-x), mesmo índice de acerto da sétima pergunta.

Figura 32 – Nona pergunta da parte gráfica

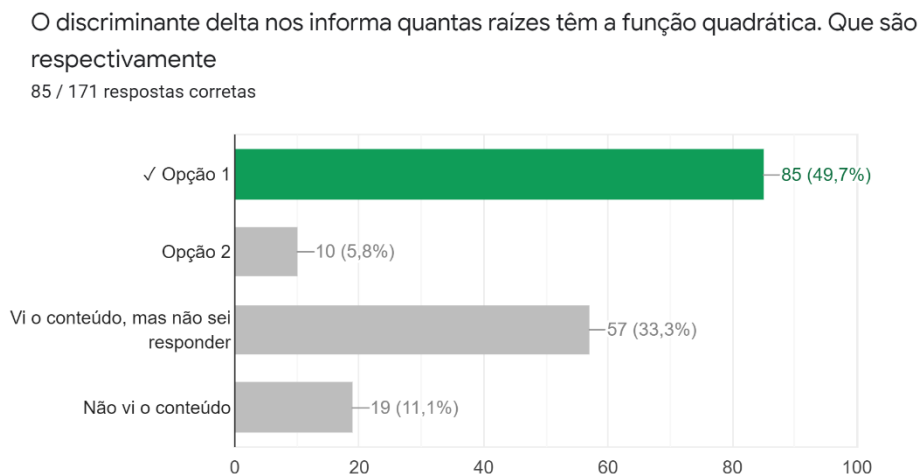


Fonte: Produzido pelo primeiro autor

A décima e a décima primeira perguntas eram referentes ao discriminante Δ da função quadrática. A décima pergunta queria saber se os alunos conseguiriam indicar a relação correta do sinal do discriminante Δ com as raízes da função quadrática, e aproximadamente metade (49,7%) respondeu corretamente. Já a décima primeira pergunta

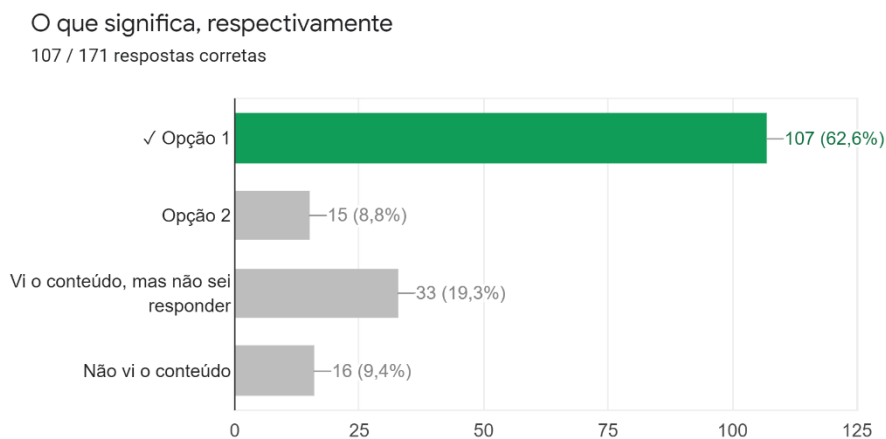
buscava verificar se os alunos saberiam entender a linguagem simbólica $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$ em relação ao seu significado em língua portuguesa, e 62,6% souberam responder corretamente.

Figura 33 – Décima pergunta da parte gráfica



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Figura 34 – Décima primeira pergunta da parte gráfica



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Portanto, da análise das questões de 1 a 3, percebemos que a maioria dos alunos conseguiu identificar corretamente a forma reduzida, o formato e nome do gráfico da função quadrática, sendo baixos os percentuais dos itens “Vi o conteúdo, mas não sei

responder” e “Não vi o conteúdo”. Já nas perguntas de 4 a 7 e de 9 a 11, o nível de acerto esteve na faixa de 50,0% a 60,0%, enquanto o item “Vi o conteúdo, mas não sei responder” esteve próximo dos 30,0%. Tais percentuais indicam que o nível de conhecimento dos estudantes relativamente aos principais aspectos da parte gráfica (conceitos de eixo de simetria, relação do coeficiente a com a concavidade da parábola, papel do coeficiente c no gráfico da função, raízes e discriminante) é razoável, mas aquém do que se esperaria de alunos na etapa final da educação básica.

2.4 Dificuldade com o coeficiente b na análise gráfica

O papel do coeficiente b no gráfico da função quadrática, tema da questão 7 da seção “Sobre a parte gráfica”, foi o único aspecto que ficou abaixo da média de acertos, com o baixíssimo índice de 17,5% de acerto. Além disso, o fato de 42,7% dos alunos terem marcado a opção “Vi o conteúdo, mas não sei responder” permite inferir que o coeficiente b (e, por conseguinte, a ideia de translação horizontal) deve ser pouco explorado ou trabalhado muito rapidamente em exemplos e exercícios durante as aulas, podendo ser visto como o coeficiente menos importante na análise gráfica.

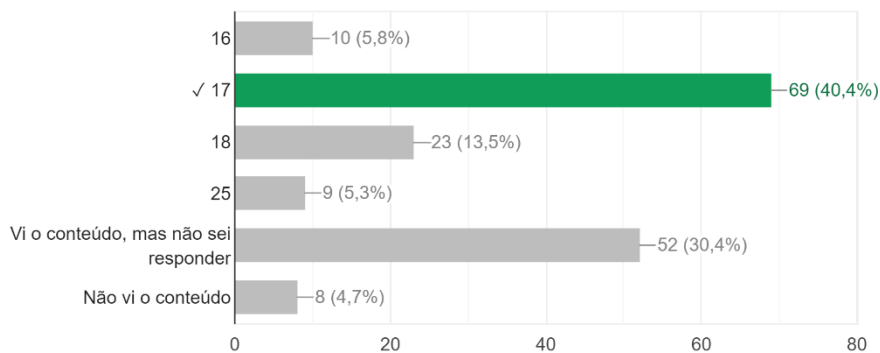
2.5 Dificuldades com os cálculos

Acerca da seção “Sobre a parte de cálculo” do formulário, a primeira e a segunda perguntas pediam para marcar o valor do discriminante Δ de uma função quadrática. Na primeira pergunta, 40,4% responderam corretamente e 30,4% marcaram a opção “Vi o conteúdo, mas não sei responder”. Na segunda pergunta foi pedido o mesmo, mas agora na função os coeficientes a e b eram frações. Agora apenas 6,4% responderam corretamente, enquanto 52% marcaram a opção “Vi o conteúdo, mas não sei responder”. Tal percentual é bastante preocupante, mostrando a necessidade de haver revisões anualmente sobre operações com frações, em todos os anos letivos a partir de sua apresentação, sejam eles no fundamental II ou no ensino médio.

Figura 35 – Primeira pergunta da parte de cálculo

Para a função quadrática dada abaixo marque a opção correspondente ao valor do delta.

69 / 171 respostas corretas

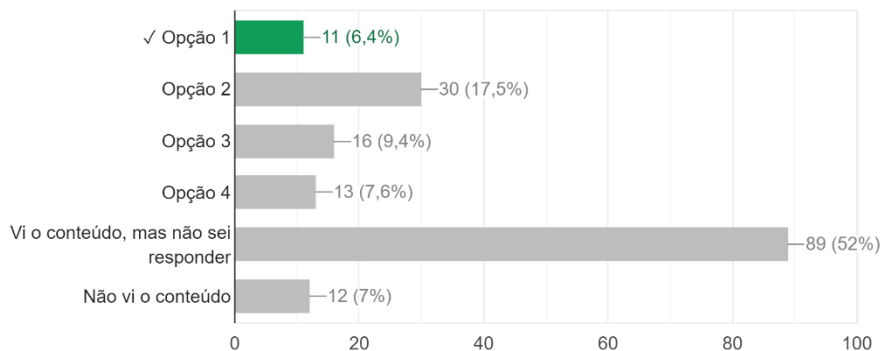


Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Figura 36 – Segunda pergunta da parte de cálculo

Para a função quadrática dada abaixo marque a opção correspondente ao valor do delta.

11 / 171 respostas corretas



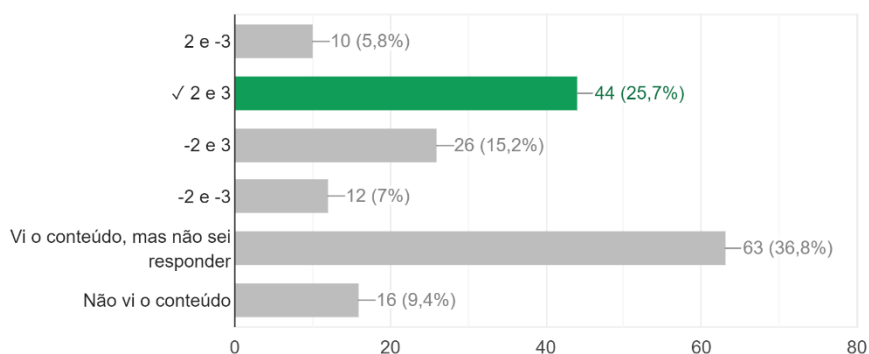
Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Na terceira pergunta foi pedido para se encontrar as raízes de uma função quadrática pelo método da soma e do produto. Apenas 25,7% dos alunos souberam responder corretamente, com 36,8% marcando a opção “Vi o conteúdo, mas não sei responder”. Assim, ficou evidenciado que procedimentos de resolução da equação de 2º grau que requerem imaginação em detrimento de memorização de fórmulas são pouco explorados pelo professor em sala de aula.

Figura 37 – Terceira pergunta da parte de cálculo

Para a função quadrática dada abaixo, utilizando a regra da soma e do produto, marque a opção correspondente as raízes da função:

44 / 171 respostas corretas



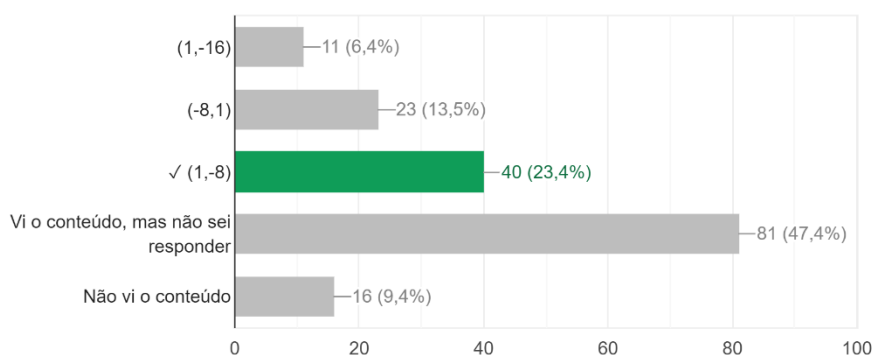
Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Na quarta questão os alunos tiveram que encontrar as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática, com as igualdades de x_v e y_v dadas, bastando apenas substituir nas fórmulas. Apenas 23,4% acertaram, com 47,4% marcando a opção “Vi o conteúdo, mas não sei responder”. Isso mais uma vez reforça a grande dificuldade que os alunos têm em trabalhar com frações.

Figura 38 – Quarta pergunta da parte de cálculo

Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção que corresponde as coordenadas do vértice da função:

40 / 171 respostas corretas



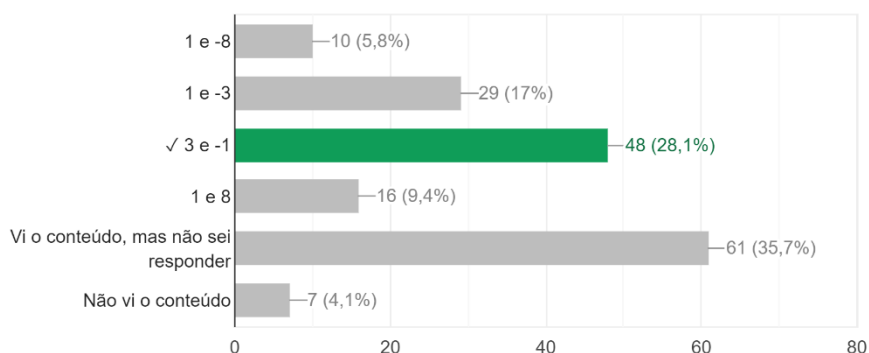
Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Na quinta pergunta buscou-se verificar se os alunos encontrariam as raízes de uma

função quadrática com a fórmula resolvente dada. Apenas 28,1% reponderam corretamente, enquanto 35,7% marcaram a opção “Vi o conteúdo, mas não sei responder”.

Figura 39 – Quinta pergunta da parte de cálculo

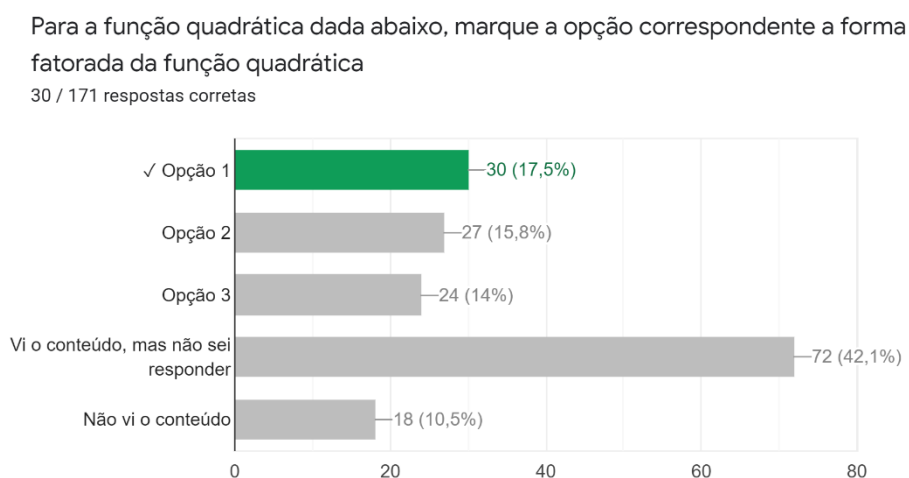
Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção que corresponde as raízes da função utilizando a Fórmula resolvente da função do 2º grau (“Fórmula de Baskara”)
48 / 171 respostas corretas



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Já a sexta questão buscava verificar se os alunos saberiam escrever uma função quadrática em sua forma fatorada. Apenas 17,5% souberam responder corretamente, enquanto 42,1% marcaram a opção “Vi o conteúdo, mas não sei responder”. Isso já era esperado e compreensível visto que os alunos apresentaram severas dificuldades em encontrar as raízes de uma função quadrática.

Figura 40 – Sexta pergunta da parte de cálculo



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

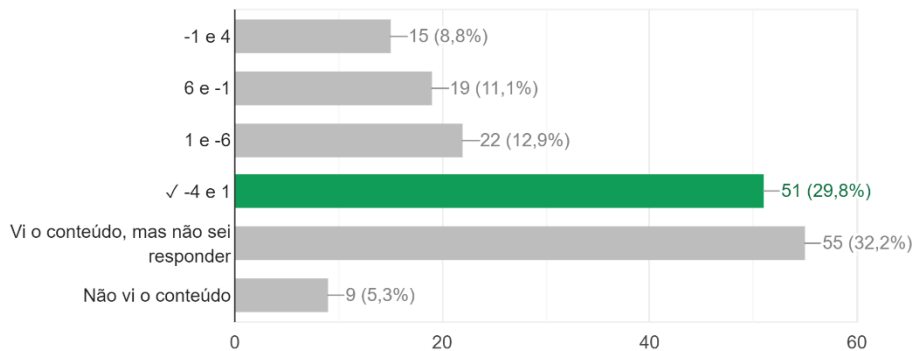
Finalmente, na sétima pergunta também buscou-se verificar se os alunos encontrariam as raízes de uma função quadrática com a fórmula resolvente dada. Apenas 29,8% responderam corretamente, enquanto 32,2% marcaram a opção “Vi o conteúdo, mas não sei responder”.

Os valores apresentados na quinta e sétima perguntas são bastante preocupantes, pois supõe-se que a resolução utilizando a fórmula de Bháskara fosse algo mais natural, pela repetição em exemplos e exercícios em sala de aula.

Figura 41 – Sétima pergunta da parte de cálculo

Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção que corresponde as raízes da função utilizando a Fórmula resolvente da função do 2º grau ("Fórmula de Baskara")

51 / 171 respostas corretas



Fonte: Produzido pelo primeiro autor

Esta parte da pesquisa demonstra que há uma dificuldade extrema por parte dos estudantes em cálculos que deveriam ser considerados simples para o grau de escolaridade em que eles se encontram. Apesar de no momento da pesquisa eles estarem em ensino remoto, as habilidades necessárias de cálculo para resolver tais problemas são do ensino fundamental II. O baixo desempenho dos alunos pode indicar que a cultura de aversão à Matemática venha justamente dessa dificuldade na realização de contas. Este triste panorama deveria ser de interesse dos gestores da educação, mas, infelizmente, é deixado para atuações individuais de professores, em projetos pessoais.

Logo, é necessário buscar formas de estimular os estudantes a compreender os conteúdos de Matemática, em seus diversos níveis. Para tanto, uma metodologia que pode ser utilizada em sala de aula é a resolução de problemas, como veremos no próximo capítulo.

3 PROPOSTA PEDAGÓGICA

Neste capítulo desenvolveremos uma sequência didática como proposta de intervenção pedagógica almejando uma abordagem diferenciada e inovadora do conteúdo de funções quadráticas. Tal abordagem será baseada na metodologia de resolução de problemas e, em particular, na metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Acreditamos que a utilização de situações-problema e de atividades lúdicas motivadoras para introduzir o conteúdo de funções quadráticas possa servir de contraponto ao método tradicional de ensino por meio de aulas expositivas e, com isso, auxiliar os alunos na superação das dificuldades relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem dessa temática, as quais foram descritas no capítulo anterior.

3.1 Resolução de problemas como método de ensino de Matemática

A resolução de problemas como método de ensino de Matemática é abordada de forma recorrente nos documentos oficiais que norteiam a elaboração das diretrizes curriculares e propostas pedagógicas para a educação básica em nosso país.

Segundo as Orientações Curriculares para o ensino médio no âmbito das Ciências da Natureza, da Matemática e suas Tecnologias,

(...) é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; e saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69)

Já o Currículo em Movimento da Educação Básica do Distrito Federal enfatiza que

aprender a pensar matematicamente não pressupõe saber resolver uma lista de exercícios, mas adentrar num conjunto diversificado de situações contextualizadas, provocativas e reflexivas. As formas de resolver situações apresentadas pela escola tornam-se possibilidades, dentre outras possíveis. O importante é que a aprendizagem matemática seja fruto de experiências provocadas pela escola e que os registros, argumentações e sistematizações sejam, antes de tudo, de autoria dos estudantes como sujeitos de suas próprias aprendizagens. (DISTRITO FEDERAL, 2018, p. 154)

Desta forma, a busca de apresentação dos conteúdos de forma menos mecanizada e mais voltada para a participação dos estudantes, bem como a busca de dar significado para aquele conhecimento, é algo que deve ser incentivado cada vez mais no processo de ensino de Matemática. Para tanto, no que se refere ao ensino, aprendizagem e conhecimento matemático na perspectiva da Educação Matemática, é preciso para o professor:

- ver o estudante como construtor do próprio conhecimento, compreendendo que ele o faz a partir de vivências experienciadas em contextos sociais diversos, e, no espaço escolar, especialmente, calcado em situações propostas e mediadas pelo professor;
- desenvolver uma prática que oportunize o gosto pela aprendizagem da Matemática;
- dar autonomia ao sujeito que aprende para gerir seu próprio processo de aprendizagem, de forma a contribuir com o desenvolvimento integral do cidadão;
- perceber-se como parte de uma cultura e de um mundo em constante transformação, o que demanda um processo contínuo de formação.” (DISTRITO FEDERAL, 2018, p. 152-153)

Nesse sentido,

uma das alternativas metodológicas possíveis para que a aprendizagem matemática se realize de modo lúdico, reflexivo e crítico é a utilização de situações-problema. A resolução de situações-problema que fazem parte do contexto da vida dos estudantes corrobora sobremaneira para a construção permanente de conceitos e para o desenvolvimento de procedimentos próprios. Na resolução de situações-problema, deve-se buscar a socialização de diferentes processos utilizados pelos estudantes num contexto de partilha e construção conjunta do saber. (DISTRITO FEDERAL, 2018, p. 154)

A temática de resolução de problemas também aparece em vários trechos ao longo

da BNCC. Segundo este documento, uma das competências gerais da educação básica é

exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas”. (BRASIL, 2018, p. 9)

3.2 Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática é uma metodologia baseada em resolução de problemas introduzida pela pesquisadora Lourdes de la Rosa Onuchic, líder do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), formado em 1992 na Universidade Estadual Paulista (Unesp).

De acordo com Onuchic e Allevato (2021, p.47), “a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador”.

Portanto, a participação do professor na aprendizagem do aluno é algo primordial, pois é ele quem vai direcioná-lo na aquisição das habilidades necessárias para a construção do conhecimento matemático baseado em resolução de problemas.

Segundo Possamai e Silva (2020, p.11), em aulas tradicionais de Matemática, os problemas são apresentados em pequenos textos que buscam criar contextos para a aplicação de conteúdos previamente ensinados, em que o processo consiste em ler o enunciado, extrair os dados do problema e, por fim, resolvê-los por meio da aplicação de procedimentos previamente ensinados pelo professor. Já “a resolução de problemas enquanto metodologia possibilita que o estudante seja protagonista de sua aprendizagem, tornando-se um problematizador dos procedimentos matemáticos, desenvolvendo confiança em fazer Matemática, curiosidade, criticidade, perseverança e poder de argumentação.” (POSSAMAI; SILVA, 2020, p.13)

Portanto, o professor deve ter um cuidado todo especial em não fornecer previamente todo o processo de resolução do problema, transformando-o, com isso, em apenas um exercício de fixação. Logo, a metodologia de resolução de problemas e, em especial, a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática é uma ferramenta

recomendada para a introdução de determinados conteúdos por meio de atividades motivadoras antes da formalização do conteúdo pelo professor.

Para subsidiar o uso de tal metodologia em sala de aula por parte do professor, o GTERP sugere o seguinte roteiro de atividades (ONUCHIC, 2012; ONUCHIC; ALLEVATO, 2021):

1. **Proposição do problema:** Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento matemático. Esse problema será chamado problema-gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema proposto ainda não deve ter sido trabalhado em sala de aula;
2. **Leitura individual:** Entregar uma cópia do problema a ser resolvido para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura individualmente;
3. **Leitura em conjunto:** Formar pequenos grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
 - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo e levando-os a interpretar o problema;
 - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, busque uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
4. **Resolução do problema:** De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo, o que os conduzirá na construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula;
5. **Observar e incentivar:** Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Assim, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
 - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador e acompanhando suas explorações, ajudando-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que possam

surgir no decurso da resolução (notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias, entre outros), a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

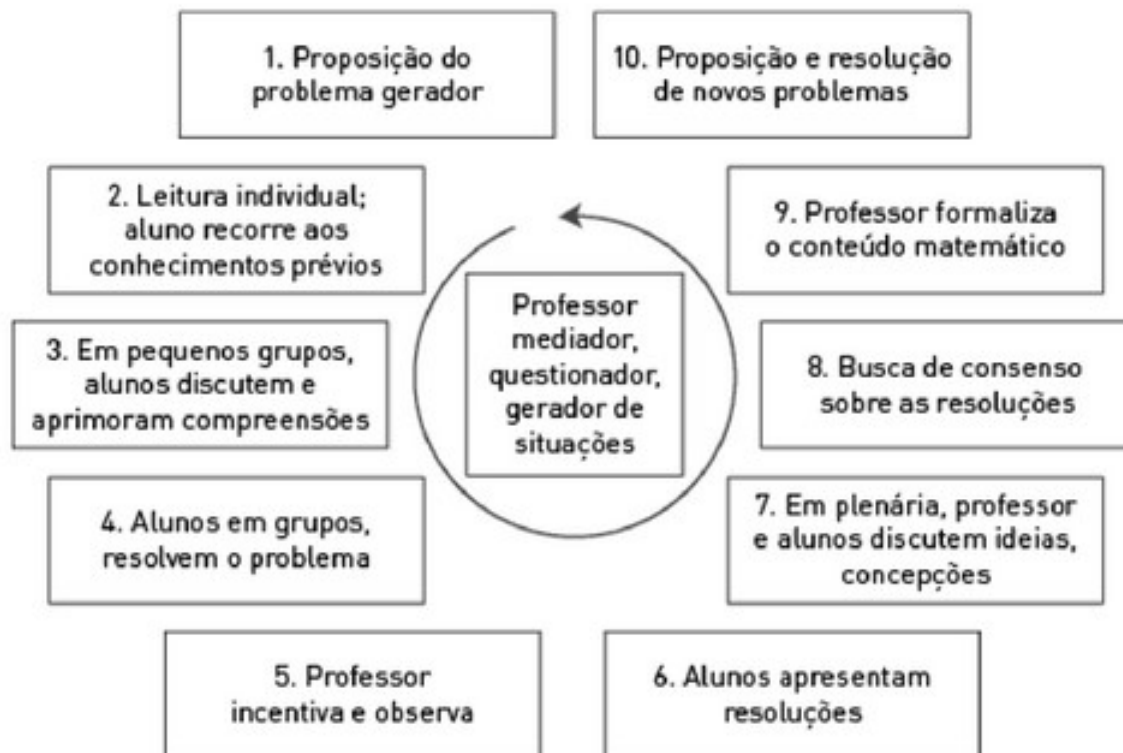
6. **Registro das resoluções na lousa:** Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam;

7. **Plenária:** Para esta etapa, todos os alunos são convidados a discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem;

8. **Busca de consenso:** Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor incentiva toda a classe a chegar a um consenso sobre o resultado correto;

9. **Formalização do conteúdo:** Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática –, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Figura 42 – Esquema da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação



Fonte: Produzido por Onuchic e Allevato, 2021, p.51

3.3 Atividades lúdicas motivadoras

Nesta seção apresentaremos quatro propostas de atividades lúdicas motivadoras, buscando empregar a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação para introduzir conteúdos referentes a gráficos de funções quadráticas e seu comportamento, fornecer uma aplicação importante da parábola, motivar o conceito de completar quadrados e construir o conceito de otimização.

Atividade 1: Plano cartesiano com material descartável

Objetivo: Visualizar com material concreto a curva do gráfico da função quadrática (parábola) e observar os efeitos dos coeficientes a , b e c no gráfico, conforme os objetivos e as habilidades expressos na Introdução.

Material:

- Caixas de ovos grandes;
- Pedacos de barbante;

- Tampas de garrafa PET, em coleções de cores variadas (duas ou três cores diferentes);
- Ficha de roteiro direcionador com instruções para o desenvolvimento da atividade (Ver Apêndice B).

Distribuição dos alunos: Em grupos de 3 a 5 alunos.

Descrição da atividade:

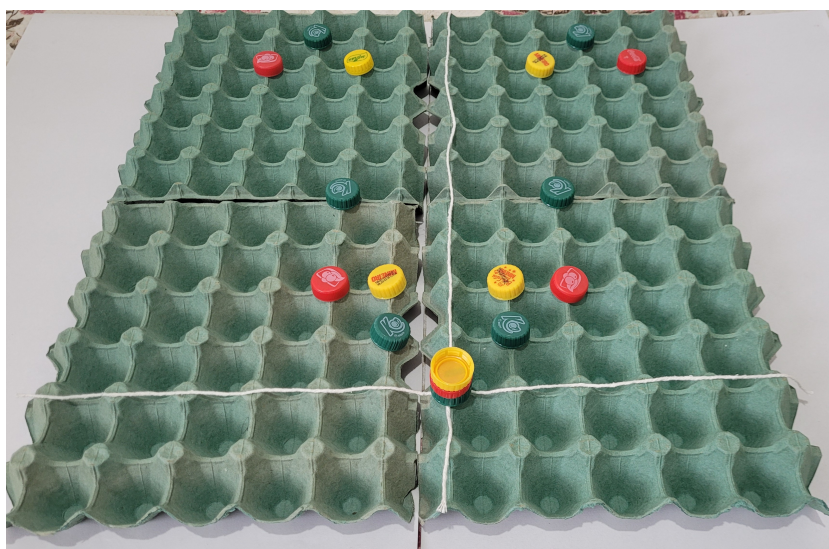
Com os alunos dispostos em grupos, entregar 4 caixas de ovos, duas tiras grandes de barbante e jogos de tampas de garrafa PET em duas ou três cores diferentes.

Com as caixas de ovos, montar a “malha quadriculada” e, com os barbantes, montar o eixo-x e o eixo-y de forma adaptada para cada função.

Com a ficha de roteiro, montar uma tabela de pares ordenados para cada função dada e plotar os pontos de cada função, com as tampas de mesma cor, respondendo ao que se pede.

Dessa forma, fazer com que os alunos, orientados pelas funções dadas na ficha, percebam as características de cada coeficiente a , b e c da função quadrática, observando de forma gradativa a alteração de seus comportamentos.

Figura 43 – Atividade proposta 1



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Atividade 2: Parábola reflexiva

Objetivo: Verificar visualmente a propriedade reflexiva da parábola, conforme os objetivos e as habilidades expressos na Introdução.

Material:

- Folha quadriculada ou cartolina quadriculada;
- Tiras de caixa tetrapack ou tiras de papel cartão enrolado de papel alumínio;
- Tampas de garrafa PET;
- Caneta laser;
- Ficha de roteiro direcionador com instruções para o desenvolvimento da atividade (Ver Apêndice C).

Distribuição dos alunos: Em grupos de 3 a 5 alunos.

Descrição da atividade:

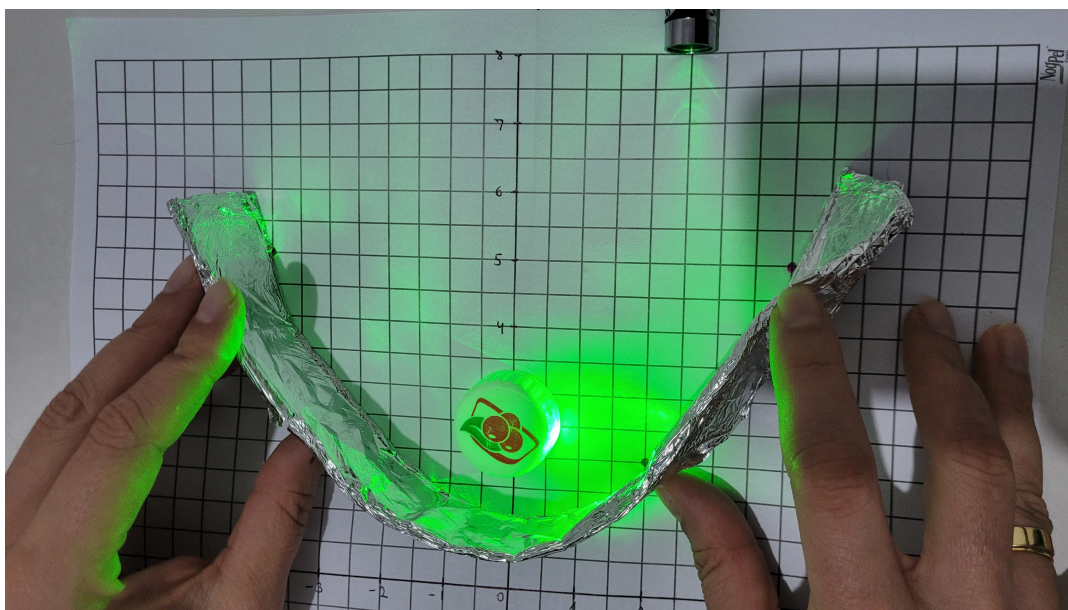
Com os alunos dispostos em grupos, distribuir a folha quadriculada (ou a cartolina quadriculada) ou pedir para que desenhem uma malha quadriculada. Nesta folha, desenhar um plano cartesiano.

Na ficha de roteiro, calcular alguns pontos de uma função quadrática, dada previamente e montar uma tabela de pares ordenados da função dada com o ponto focal da função também dado.

Os alunos irão plotar os pontos da tabela e o ponto focal no plano cartesiano. No ponto focal, traçar uma reta paralela ao eixo-y e colocar a tampa de garrafa PET. Um ou dois alunos irão pegar a tira reflexiva e a colocarão sobre os pontos obtidos na tabela, tentando fazer uma curva suave.

Então, um aluno posicionará o laser em posições paralelas ao eixo focal da parábola e disparará o fecho do laser. O objetivo é verificar que, independentemente da posição do disparo, desde que paralelo ao eixo focal, o fecho do laser refletirá na curva da parábola e incidirá na tampa de garrafa, que é o ponto focal, verificando essa característica importante da parábola.

Figura 44 – Atividade proposta 2



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Atividade 3: Método babilônico para calcular a área de um retângulo

Objetivo: Materializar o método de completar quadrados, conforme os objetivos e as habilidades expressos na Introdução.

Material:

- Folhas retangulares de tamanhos variados;
- Um pedaço de linha de pipa ou barbante;
- Lápis ou caneta;
- Pedaço de régua pequeno e tesoura;
- Ficha de roteiro direcionador com instruções para o desenvolvimento da atividade (Ver Apêndice D).

Distribuição dos alunos: Em grupos de 3 a 5 alunos.

Descrição da atividade:

Cada grupo de alunos receberá uma folha retangular com a medida de sua área escrita em seu interior e a ficha de roteiro para seguir as instruções da atividade.

Pedir para que dobrem o retângulo formando um quadrado e um retângulo menor. Deixe que usem a criatividade para isto. Como sugestão, com o lápis amarrado em uma

ponta da linha, marcar dois arcos de círculo nos vértices de um dos lados menores e dobrar a folha nas posições marcadas do arco de círculo no lado maior. Ou dobrar diagonalmente um vértice ao lado maior, dobrando em seguida o retângulo excedente.

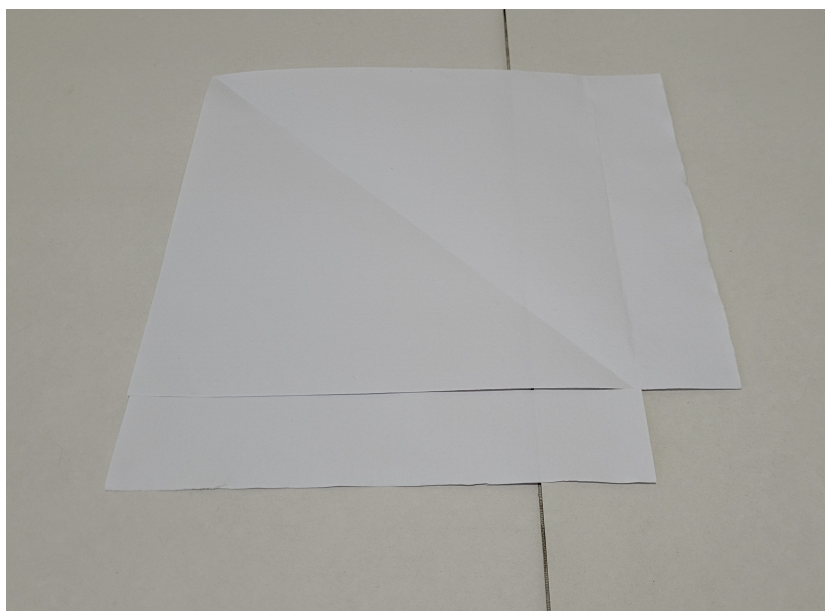
Com o pedaço de régua, pode-se fazer apenas uma única medida, no caso, na parte dobrada, e tomar nota. Dobrar este pedaço ao meio, no mesmo sentido que o da primeira dobra.

Posteriormente, um aluno recorta o pedaço dobrado mais externo e o posiciona no outro lado do retângulo, observando que falta um pedaço para completar o quadrado. Este pedaço será um quadrado menor.

Como se sabe a medida da primeira dobra, o aluno deverá perceber que a medida da segunda dobra é a metade da medida da primeira dobra, de modo a calcular a área do quadrado pequeno e tomar nota.

Observar que a nova figura é um quadrado e calcular a sua área somando a medida de área anotada com o valor da área do quadrado pequeno descoberto. Observar também que, se multiplicar as medidas do lado desta figura, obtém-se o valor da soma anotada. Por fim, fazer o cálculo da equação do 2º grau incompleta para descobrir o lado menor e, conseqüentemente, o maior lado do retângulo original.

Figura 45 – Atividade proposta 3



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Atividade 4: Área máxima de um retângulo formado por um barbante em malha quadriculada

Objetivo: Observar que as áreas dos retângulos de mesmo perímetro se comportam como uma função quadrática, conforme os objetivos e as habilidades expressos na Introdução.

Material:

- Barbantes de tamanhos variados amarrados nas pontas, formando o perímetro de um retângulo;
- Geoplano, se disponível, folha quadriculada, cartolina quadriculada ou caixas de ovos;
- Ficha de roteiro direcionador com instruções para o desenvolvimento da atividade (Ver Apêndice E).

Distribuição dos alunos: Em grupos de 3 a 5 alunos.

Descrição da atividade:

Com os alunos dispostos em grupos, distribuir um geoplano, folha quadriculada, cartolina quadriculada ou caixas de ovos e dois ou três barbantes, com tamanhos variados, para cada grupo, juntamente com a ficha de roteiro da atividade.

Com a ficha de roteiro, direcionar o raciocínio dos alunos de modo a verificar que, alterando as medidas dos retângulos, altera-se o tamanho de sua área. Observar também que haverá outra disposição das medidas dos lados do retângulo que terá a mesma área de alguma medida verificada anteriormente, exceto uma única disposição que será a área máxima buscada.

Com o auxílio de uma tabela montada por eles mesmos durante a atividade, fazer os alunos perceberem, então, que há uma simetria com relação às medidas e ao formato. Com esta tabela, montar um gráfico, percebendo, assim, que se trata do gráfico de uma função quadrática.

Ao final, mostrar algebricamente como chegar a esse valor máximo da área, mostrando também sua função.

Depois de entendido o raciocínio, os outros barbantes serão utilizados para os alunos verificarem outras áreas máximas.

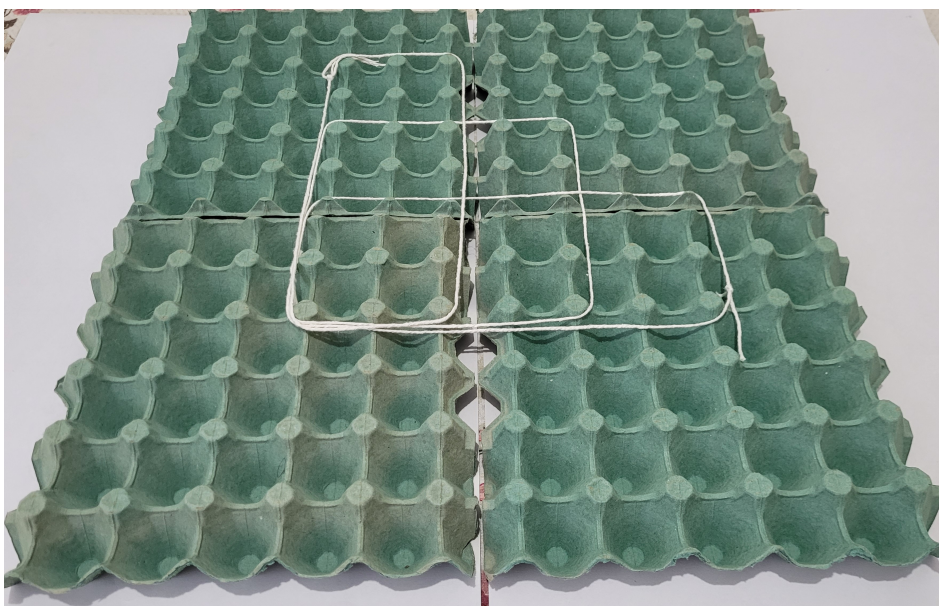
Exemplo com barbante de 40 cm:

Resolução algébrica:

$$\begin{aligned}f(x) &= x(20 - x) = 20x - x^2 \\x_v &= -\frac{b}{2a} = \frac{-20}{2 \cdot (-1)} = 10 \\y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-20^2}{4 \cdot (-1)} = \frac{400}{4} = 100\end{aligned}$$

Concluir que o valor máximo da área é obtido pelo valor da coordenada y do vértice da parábola.

Figura 46 – Atividade proposta 4



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 47 – Atividades lúdicas motivadoras propostas



Fonte: Produzido pelo próprio autor

3.4 Situações-problema

As situações-problema são exemplos ou exercícios propostos para apresentar o conteúdo visto em sala de aula aplicado de alguma forma à realidade, sejam eles problemas que são resolvidos completamente utilizando o conteúdo específico estudado ou problemas em que o conteúdo estudado é utilizado como ferramenta no desenvolvimento da solução a ser buscada.

Tais situações-problema podem ser utilizadas como estímulo aos estudantes para ver a funcionalidade do conteúdo por eles estudado. Além do mais, o professor pode evitar as famosas perguntas “Isso serve para quê?” ou “Quando vou utilizar isso em minha vida?”. Ainda que possam parecer, em um primeiro momento, provocadoras, tais perguntas podem ser utilizadas pelos professores como um elemento de direcionamento a uma aplicação prática ou curiosidade matemática em que o conteúdo estudado em sala de aula possa ser apresentado de forma prática.

Nesta seção apresentamos seis situações-problema referentes a equações do 2º grau e funções quadráticas.

Situação-problema 1: Número de ouro: Cortar um segmento de reta dado em extrema e média razão.

Trata-se da Proposição 30 do Livro 6 de Os Elementos de Euclides (2009, p. 263-264), adaptada de Sodré (2013).

Dizemos que um segmento AB é dividido em média e extrema razão por um ponto C quando $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$.

Se $AB = a$ e $CB = x$, então $AC = a - x$.

Seja r a razão das frações equivalentes, ou seja, $r = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$.

Reescrevendo $r = \frac{a}{a-x}$, temos:

$$r = \frac{a}{a-x} = \frac{a-x+x}{a-x} = \frac{a-x}{a-x} + \frac{x}{a-x} = 1 + \frac{x}{a-x}$$

E como r também é equivalente a $r = \frac{a-x}{x}$, então $\frac{1}{r} = \frac{x}{a-x}$.

Logo,

$$r = 1 + \frac{x}{a-x} = 1 + \frac{1}{r}$$

Assim,

$$\begin{aligned} r - 1 &= \frac{1}{r} \\ r(r - 1) &= 1 \\ r^2 - r - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Esta equação do 2º grau nos gerará o famoso *número de ouro* para sua solução positiva $r = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sendo que o professor pode resolvê-la utilizando qualquer um dos métodos apresentados neste trabalho.

Situações-problema como esta servem de motivação para aplicações práticas do nosso objeto de estudo, procurando criar maior simpatia e curiosidade dos alunos pelo conteúdo. Em particular, tal situação pode ser utilizada para ilustrar aos alunos que a solução dessa equação do 2º grau está presente em nosso dia a dia, aparecendo nas proporções de nosso corpo, nas plantas, na arquitetura e na arte, entre outros.

Situação-problema 2: Dentre os retângulos de área dada A, determinar o que tem menor perímetro (adaptado de Paterlini, 1997, p. 38).

Se a e b são as dimensões do retângulo, então $A = ab$ e o perímetro é dado por:

$$2a + 2b = 2a + 2\frac{A}{a}$$

Considerando a função $P(x) = 2a + 2b = 2a + 2\frac{A}{a}$, com $x > 0$, devemos determinar o ponto x em que P assume o seu valor mínimo.

Um valor y está na imagem de P se existir solução para a equação $2x + 2\frac{A}{x} = y$, com $x > 0$. Essa equação equivale a $2x^2 - yx + 2A = 0$, a qual tem solução real se $y^2 - 16A \geq 0$, ou seja, se $y \leq -4\sqrt{A}$ ou $y \geq +4\sqrt{A}$. Considerando que $P(x) > 0$ para $x > 0$, a imagem de P é $[4\sqrt{A}, +\infty)$. Logo, $4\sqrt{A}$ é o menor valor de P .

Para determinar o retângulo de menor perímetro, resolvemos a equação $2a + 2\frac{A}{a} = 4\sqrt{A}$ em a , obtendo $a = \sqrt{A}$, de modo que o retângulo deve ser um quadrado.

Situação-problema 3: Teorema de Pitágoras e estrutura de teto

Na montagem de uma estrutura de teto de madeira para sustentação do telhado de um imóvel, sabe-se que cada ripa de madeira em que o telhado será instalado mede 7 metros de comprimento, e que a viga de sustentação das ripas tem 12 metros de comprimento e forma um triângulo isósceles. Sabendo que cada ripa apoia a extremidade da viga com uma sobra de 40 centímetros, qual deverá ser o tamanho da madeira a ser colocada como sustentação na posição da altura desse triângulo, dando sustentação e rigidez a essa estrutura?

Resolução:

Como a madeira de sustentação dessa estrutura está na altura do triângulo isósceles, então a madeira de comprimento h fará um ângulo reto com a viga de sustentação das ripas. Logo, teremos um triângulo retângulo de hipotenusa 7 m e catetos 6 m e h m, respectivamente. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$7^2 = h^2 + 6^2$$

que nada mais é do que uma equação do 2º grau incompleta com $b = 0$. Portanto,

$$h^2 = 7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$$

Assim,

$$h = \sqrt{13} \simeq 3,60 \text{ m}$$

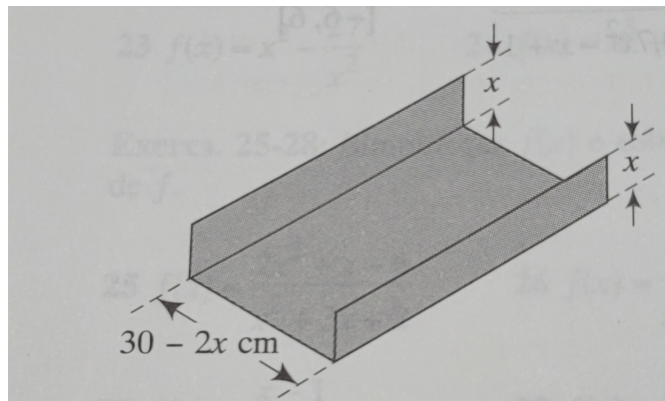
Portanto, a madeira a ser colocada na altura dessa estrutura deverá ter aproximadamente 3,60 m.

Situação-problema 4: Função quadrática e maximização da capacidade de uma calha

Resolução de Swokowski (1994, p. 264), adaptada para o ensino médio:

De uma longa folha retangular de metal de 30 cm de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à folha. Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado de modo que a calha tenha capacidade máxima?

Figura 48 – Situação-problema 4



Fonte: Livro Cálculo com Geometria Analítica, Swokowski (1994, p. 264)

A capacidade será máxima quando a área do retângulo de lados x e $30 - 2x$ for máxima.

Denotando esta área por $f(x)$, temos:

$$f(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2$$

Como $0 \leq 2x \leq 30$, o domínio de f é o intervalo $0 \leq x \leq 15$. Se $x = 0$ ou $x = 15$, não se forma nenhuma calha, pois a área do retângulo seria $f(0) = 0 = f(15)$.

Como $f(x) = 30x - 2x^2$ é uma função quadrática com $a < 0$, então a concavidade do seu gráfico é voltada para baixo, de modo que a abscissa do vértice da parábola nos indica o ponto de máximo da função. Assim,

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-30}{2 \cdot (-2)} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7,5$$

e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-30^2 + 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)} = \frac{-900}{-8} = 112,5.$$

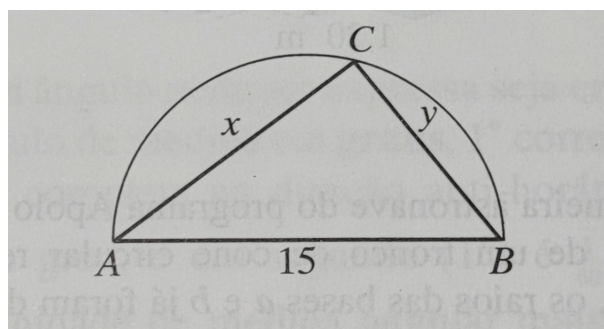
Portanto, a área máxima será $112,5 \text{ cm}^2$ quando a coordenada x do vértice é $x = 7,5 \text{ cm}$, ou seja, $f(7,5) = 112,5$. Assim, devem ser dobrados $7,5 \text{ cm}$ de cada lado para obtermos a capacidade máxima da calha.

Situação-problema 5: Teorema de Pitágoras e problema de máximo em um triângulo inscrito num semicírculo.

Resolução de Swokowski (1994, p. 31), adaptada para o ensino médio:

Considere o triângulo ABC inscrito em um semicírculo de diâmetro 15, conforme a figura a seguir:

Figura 49 – Situação-problema 5



Fonte: Livro Cálculo com Geometria Analítica, Swokowski (1994, p. 31)

(a) Se x é o comprimento do lado AC , expresse o comprimento y do lado BC como função de x , e o indique seu domínio. (Sugestão: O ângulo ACB é reto.)

(b) Expresse a área do triângulo ABC como função de x .

(Extra) Qual é a área máxima do triângulo ABC ?

(a) Considere $AC = x$, $CB = y$ e $AB = 15$. Como o triângulo ABC é reto em C , então trata-se de um triângulo retângulo. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}15^2 &= y^2 + x^2 \\ y^2 &= 225 - x^2 \\ y &= \sqrt{225 - x^2}.\end{aligned}$$

Consideramos apenas o valor positivo, pois se trata de uma medida.

Denotando o comprimento y em função de x , temos:

$$f(x) = \sqrt{225 - x^2}.$$

Assim, o domínio de f é o intervalo $0 < x < 15$ (x não pode ser 0 ou 15, pois com esses valores não seriam formados triângulos).

(b) A área do triângulo retângulo ABC em função de x é dada por:

$$A(x) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot f(x)}{2} = \frac{x \sqrt{225 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2(225 - x^2)}}{2}$$

Portanto,

$$A(x) = \frac{\sqrt{225x^2 - x^4}}{2}.$$

(c) Queremos encontrar, agora, o valor de x para o qual a área do triângulo ABC seja máxima, o que equivale a encontrar o valor de x para o qual o radicando é máximo. Como a expressão $225x^2 - x^4$ é biquadrada, fazendo $t = x^2$ e denotando o radicando como uma função g de t , temos:

$$g(t) = 225t - t^2$$

Como $g(t) = 225t - t^2$ é uma função quadrática com $a < 0$, então a concavidade do seu gráfico é voltada para baixo, de modo que a abscissa do vértice da parábola nos indica o ponto de máximo da função. Assim,

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-225}{2 \cdot (-1)} = \frac{225}{2}$$

Como $t = x^2$, então $\frac{225}{2} = x^2$. Logo, $x = \sqrt{\frac{225}{2}}$. Portanto, $x = \frac{15\sqrt{2}}{2} \simeq 10,6$.

Então,

$$A\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{225\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^4}}{2} = \frac{\frac{15^2}{2}}{2} = \frac{15^2}{2^2} = 56,25 \text{ unidades quadradas.}$$

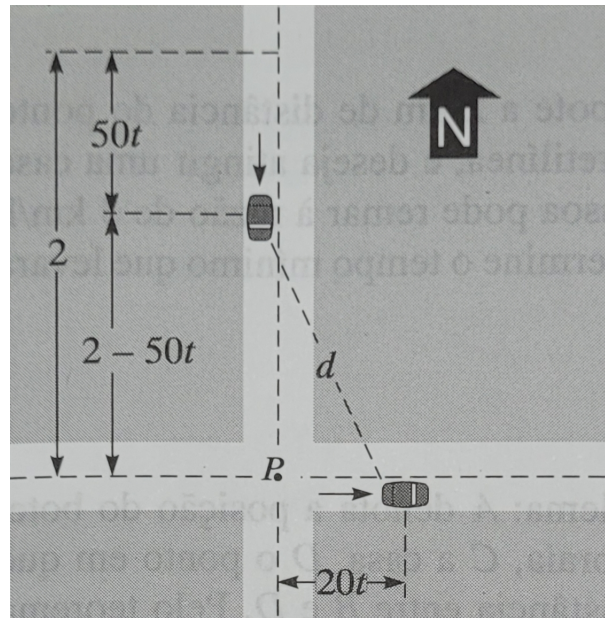
Portanto, $A\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right) = 56,25$ unidades quadradas é a área máxima do triângulo ABC .

Situação-problema 6: Função quadrática e máximos e mínimos

Resolução de Swokowski (1994, p. 269), adaptada para o ensino médio:

Uma rodovia Norte-Sul intercepta outra rodovia Leste-Oeste em um ponto P . Um automóvel passa por P às 10h, dirigindo-se para o leste a 20 km/h. No mesmo instante, outro automóvel está a 2 km ao norte de P e se dirige para o sul a 50 km/h. Determine o instante em que os automóveis estão mais próximos um do outro, e aproxime a distância mínima entre eles.

Figura 50 – Situação-problema 6



Fonte: Livro Cálculo com Geometria Analítica, Swokowski (1994, p.2 69)

A figura ilustra as posições típicas dos dois automóveis. Se t denota o número de horas após 10h, então o veículo mais lento está a $20t$ km a leste de P . O veículo mais rápido, por sua vez, está a $50t$ km ao sul de sua posição às 10h e, assim, sua distância a P é $2 - 50t$. Pelo teorema de Pitágoras, a distância d entre os automóveis é dada por:

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (2 - 50t)^2 + (20t)^2 \\
 d &= \sqrt{(2 - 50t)^2 + (20t)^2} \\
 &= \sqrt{4 - 200t + 2500t^2 + 400t^2} \\
 &= \sqrt{4 - 200t + 2900t^2}
 \end{aligned}$$

Queremos achar o instante t em que d tem seu menor valor, o que ocorrerá quando o radicando $f(t) = 4 - 200t + 2900t^2$ for mínimo.

Como $f(t) = 4 - 200t + 2900t^2$ é uma função quadrática com $a > 0$, então a concavidade do seu gráfico é voltada para cima, de modo que a abscissa do vértice da parábola nos indica o ponto de mínimo da função. Assim,

$$t_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-200)}{2 \cdot 2900} = \frac{200}{5800} = \frac{1}{29}$$

e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(-200)^2 + 4 \cdot 2900 \cdot 4}{4 \cdot 2900} = \frac{-40000 + 46400}{11600} = \frac{6400}{11600} = \frac{16}{29}$$

Portanto, f tem ponto de mínimo em $t = \frac{1}{29}$ e $f\left(\frac{1}{29}\right) = \frac{16}{29}$.

Como t varia no intervalo $[0, \infty)$ e $f(0) = 4$, não há máximo nem mínimo nas extremidades. Conseqüentemente, os automóveis estarão mais próximos um do outro a $\frac{1}{29}$ horas (ou aproximadamente 2,07 minutos) após as 10h. Portanto, a distância mínima será

$$d = \sqrt{f\left(\frac{1}{29}\right)} = \sqrt{\frac{16}{29}} \simeq 0,74 \text{ km.}$$

Considerações Finais

Quando iniciamos este trabalho de pesquisa, constatamos que uma quantidade considerável dos estudantes apresentavam dificuldades no conteúdo de função quadrática e equação do 2º grau, principalmente na parte referente aos cálculos, estes em um nível maior do que o esperado. Logo, seria importante investigar se ocorreu uma ampliação dessas dificuldades devido à pandemia de Covid-19.

Nesse contexto, o presente trabalho de pesquisa teve como objetivo geral verificar se poderia ter havido uma ampliação dessas dificuldades durante o período pandêmico. A partir dos dados coletados, concluímos que, de fato, tal objetivo foi contemplado, pois efetivamente ocorreu um aumento dessas dificuldades devido à pandemia.

Para atingir tal objetivo geral, o subdividimos em três objetivos específicos, a saber:

1. Verificar as impressões dos estudantes em relação ao ensino remoto;
2. Verificar eventuais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da parte gráfica do conteúdo de funções quadráticas;
3. Verificar eventuais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do parte algébrica do conteúdo de funções quadráticas.

Com relação ao primeiro objetivo específico, verificou-se que a grande maioria dos alunos considerou as aulas remotas improdutivas ou pouco produtivas.

Já em relação ao segundo objetivo específico, verificou-se que havia um certo entendimento em relação à parte gráfica por parte dos alunos, à exceção de um tópico específico (o papel do coeficiente b da função quadrática) em que eles apresentavam grande dificuldade.

Finalmente, em relação ao terceiro objetivo específico, verificou-se que havia um grande obstáculo em relação aos cálculos envolvidos na função quadrática, em especial quando envolviam frações.

A pesquisa partiu da hipótese de que poderia haver um aumento das dificuldades em relação ao conteúdo de função quadrática devido à pandemia, já que, com o ensino remoto, os estudantes não teriam o mesmo contato com o conteúdo quanto teriam se estivessem em sala com o professor. A hipótese foi confirmada pelo desempenho abaixo do esperado em relação às dificuldades em analisar os aspectos gráficos da função quadrática e, em especial, às dificuldades em relação aos seus cálculos.

Devemos considerar, ainda, que possíveis situações decorrentes do isolamento social poderiam ocasionar uma menor adesão ao ensino remoto tais como morte de familiares, depressão e ansiedade, fragilidade socioeconômica etc.

Como proposta para facilitar o entendimento dos alunos e torná-los protagonistas da construção do próprio conhecimento, foi sugerida a utilização do método de resolução de problemas e a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação para que houvesse uma construção coletiva do entendimento dos conceitos abordados com mediação do professor neste processo.

Dentre as limitações de nossa investigação, é importante salientar a impossibilidade de reavaliar os estudantes participantes da pesquisa pela aplicação do método de resolução de problemas e da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação no ensino de Matemática, pois a maioria deles cursava o último ano do ensino médio na época, impedindo, assim, uma análise complementar com a utilização dos métodos apresentados neste trabalho.

Como recomendação para um aprofundamento e uma continuidade deste trabalho, sugerimos, num primeiro momento, a realização de uma pesquisa de campo com estudantes do 1º ano do ensino médio em dois grupos de análise: uma turma (ou mais) utilizando o método tradicional de aulas expositivas e outra turma (ou mais) utilizando a metodologia de resolução de problemas. O objetivo é verificar se há variações significativas de aprendizado comparando-se os dois métodos de ensino. Num segundo momento, na turma de pior desempenho em que foi utilizado o método tradicional, aplicar a metodologia de resolução de problemas e comparar com os resultados obtidos no primeiro momento com o método tradicional para verificar se ocorre uma melhora no entendimento do conteúdo.

REFERÊNCIAS

ABREU E SILVA, R. **Funções quadráticas e suas aplicações no ensino médio**. 2013. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

ALMEIDA, E. A. **Funções Quadráticas: ensino e aplicações**. 2020. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2020.

ASSIS, V. H. D. **Características da função quadrática e a metodologia de resolução de problemas**. 2015. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto, 2015.

BARBOSA, C. F. C. **O ensino de Matemática em tempos de pandemia pelo coronavírus: um olhar sobre o aprendizado dos alunos**. 2022. 96 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2022.

BARRETO, N. S. **Resolução de problemas: a conexão entre Matemática e Física por meio da função afim e quadrática**. 2019. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2019.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRANDÃO, A. K. C. **Os impactos do ensino remoto sobre a aprendizagem matemática**. 2023. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Piauí, Teresina, 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 10 set. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC, 2018, 600 p.

Disponível em: <BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 10 set. 2023.

CANELLA, C. M. d. S. B. **Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio**. 2016. 168 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2016.

COMACHIO, E. **O processo educacional no Estado de Santa Catarina em 2020 durante a pandemia da Covid-19, com enfoque ao ensino-aprendizagem em matemática**. 2022. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2022.

COUTINHO, R. P. **Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau**. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CUTRIM, G. E. B. **Função quadrática na modelagem matemática no lançamento de foguete de garrafa PET com alunos do 1º ano do ensino médio**. 2019. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2019.

DIEHL, I. V. **O ensino remoto e suas implicações no ensino da Matemática**. 2021. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2021.

DISTRITO FEDERAL. **Currículo em Movimento do Distrito Federal: Ensino Fundamental Anos Iniciais - Anos Finais**. Brasília, SEEDF, GDF, 2. ed, 2018, 310 p.

Disponível em: < https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Curriculo-em-Movimento-Ens-Fundamental_17dez18.pdf >. Acesso em: 10 set. 2023.

DISTRITO FEDERAL. **Currículo em Movimento do Novo Ensino Médio**. Brasília, SEEDF, GDF, 2020, 208 p.

Disponível em: < <https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2019/08/Curriculo->

em-Movimento-do-Novo-Ensino-Medio-V4.pdf>. Acesso em: 10 set. 2023.

DOURADO, M. R. **Estratégias e Desafios no Ensino e Aprendizagem de Matemática no Contexto do Ensino Remoto Emergencial**. 2022. 71 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

FERREIRA, E. S. **Desafios no ensino remoto de matemática durante a pandemia de Covid-19: uma análise das estratégias mediadas por plataformas digitais**. 2023. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2023.

FILHO, C. R. L. **Recursos digitais utilizados nas aulas de matemática no ensino remoto: dificuldades e potencialidades no ensino médio**. 2023. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Piauí, Teresina, 2023.

GALLANT, C. D. "Proof without Words: Completing the Square". **Mathematics Magazine**, v. 56, n. 2, 1983, p. 110. Disponível em: JSTOR, <https://doi.org/10.2307/2690382>. Acesso em: 10 jan. 2024.

GUEDES, E. G. **A equação quadrática e as contribuições de Bháskara**. 2019. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do ensino médio**. v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LOH, P. S. A simple proof of the quadratic formula. **Arxiv**, 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1910.06709>. Acesso em: 10 out. 2023.

LOPES JUNIOR, E. P. **A História da Equação do 2º grau ao longo dos séculos**.

2019. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

MAQUINÉ, C. C. **Desafios do professor de Matemática no período de pandemia causada pela Covid-19**. 2022. 52 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, 2022.

MENEZES, R. C. **Funções quadráticas, contextualização, análise gráfica e aplicações**. 2014. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

MORAES, A. G. **As diferentes formas de resolver equações polinomiais do 2º grau**. 2023. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Pará, Bragança, 2023.

MAHMOOD, M.; MAHMOOD, I. "Proof without Words: Completing the Square via the Difference of Squares". **The College Mathematics Journal**, v. 45, n. 1, p. 21, 2014. Disponível em: JSTOR, <https://doi.org/10.4169/college.math.j.45.1.021>. Acesso em: 10 jan. 2024.

NERES, D. W. S.; BEZERRA, W. W. V.; EVANGELISTA, T.S. Função quadrática: uma análise da aprendizagem em tempos de pandemia numa escola pública do Distrito Federal. **Revista Educação Pública**. Rio de Janeiro, v. 23, n. 30, 8 de agosto de 2023. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/23/29/funcao-quadratica-uma-analise-da-aprendizagem-em-tempos-de-pandemia-numa-escola-publica-do-distrito-federal>. Acesso em: 10 set. 2023.

OLIVEIRA, L. M. S. **Estratégias para ensino e aprendizagem de funções polinomiais do 1º e 2º grau em turmas de 9º ano do ensino fundamental II**. 2023. 125 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2023.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Resolução de problemas: teoria e prática**. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021.

ONUCHIC, L. R. **A Resolução de problemas na Educação Matemática: onde estamos e para onde iremos?**. In: **IV Jornada Nacional de Educação Matemática**.

XVII Jornada Regional de Educação Matemática. Universidade de Passo Fundo, Rio Grande do Sul, 2012. Disponível em:

<http://anaisjem.upf.br/download/cmp-14-onuchic.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2023.

PATERLINI, R. R. Técnicas de máximos e mínimos. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 35, p. 34-38, 1997.

Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/35/6.htm>. Acesso em: 10 out. 2023.

POSSAMAI, J. P.; SILVA, V. C. Comunicação matemática na resolução de problemas. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. 1-15, 2020. Disponível em:

<https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id277>. Acesso em: 10 nov. 2023.

QUILLES, A. L. G. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de função quadrática na perspectiva da resolução de problemas**. 2018. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, M. Uma solução geométrica babilônia. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 67, p. 1-3, 2008. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/67/3.html>. Acesso em: 10 out. 2023.

SILVA, H. L. **Função quadrática: investigar os conhecimentos que os alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática**. 2019. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

SILVA, M. P. **Equações e funções quadráticas: aplicações e uma coletânea de problemas**. 2017. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2017.

SOARES, J. H. S. **Função Quadrática**. 2013. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

SODRÉ, L. O. **O número 142857 e o número de ouro: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas**. 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

SOUZA, A. R.; PAULOVICH, L.; NASCIMENTO, M. C. Vértices de famílias de parábolas. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 41, p. 7-11, 1999. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/41/2.htm>. Acesso em: 10 out. 2023.

SOUZA, B. V. **Problemas do 2º grau: uma proposta de sequências didáticas sob a perspectiva da metodologia de resolução de problemas**. 2023. 144 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2023.

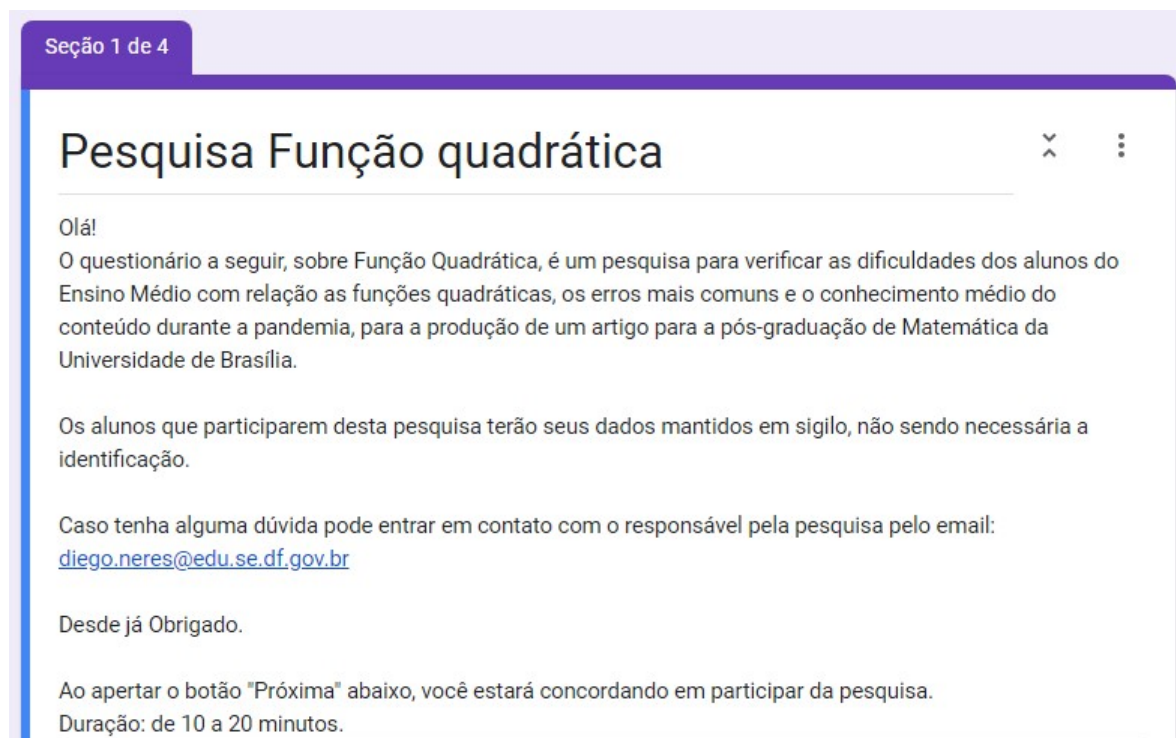
SOUSA, F. A. L. **Funções quadráticas: estudo do gráfico das funções quadráticas**. 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

Apêndices

APÊNDICE A – Questionário da pesquisa

Figura 51 – Seção de apresentação do formulário da pesquisa



The image shows a screenshot of a web form titled "Pesquisa Função quadrática". The form is presented in a purple-themed window. At the top left, it says "Seção 1 de 4". The main title "Pesquisa Função quadrática" is centered at the top. Below the title, there is a greeting "Olá!" followed by a paragraph explaining the purpose of the questionnaire: to verify the difficulties of students in the Ensino Médio with quadratic functions, common errors, and their knowledge during the pandemic, for a research article for a postgraduate program in Mathematics at the University of Brasília. A second paragraph states that the data will be kept confidential. A third paragraph provides contact information for the researcher, Diego Neres, via email at diego.neres@edu.se.df.gov.br. A fourth paragraph says "Desde já Obrigado." and a fifth paragraph explains that clicking the "Próxima" button indicates agreement to participate, with a duration of 10 to 20 minutes.

Fonte: Produzido pelo próprio autor

Seção “Sobre o desenvolvimento do conteúdo”:

Primeira pergunta:

Qual é a sua série atualmente?

1. 1º ano
2. 2º ano
3. 3º ano

Segunda pergunta:

Você já estudou o conteúdo de funções quadráticas na escola?

- Sim
- Não

Terceira pergunta:

Você viu o conteúdo em qual modalidade de ensino?

- Apenas presencial
- Apenas remoto
- Remoto e presencial

Quarta pergunta:

O professor pôde desenvolver o conteúdo com tempo adequado?

- Sim
- Não
- Não sei opinar

Quinta pergunta:

O professor conseguiu desenvolver os principais pontos do conteúdo?

- Sim, completamente
- Não, teve pouco tempo
- Apenas parcialmente

Sexta pergunta:

Você considerou que as aulas remotas foram produtivas durante o período totalmente on-line?

- Sim
- Não
- Parcialmente

Seção “Sobre a parte gráfica”:

Por favor, responda às questões sem pesquisar, para mostrar uma real situação do conteúdo. Obrigado!

Primeira pergunta:

Marque abaixo qual é a forma reduzida da função quadrática.

- Opção 1 $f(x) = ax + b$

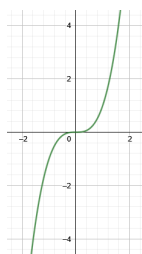
- Opção 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Opção 3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Segunda pergunta:

Marque qual é o formato do gráfico da função quadrática.

- Opção 1

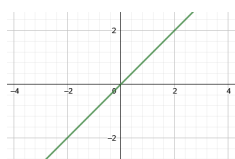
Figura 52 – Opção 1



Fonte: Produzido pelo próprio autor

- Opção 2

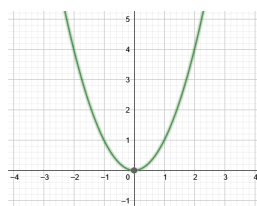
Figura 53 – Opção 2



Fonte: Produzido pelo próprio autor

- Opção 3

Figura 54 – Opção 3



Fonte: Produzido pelo próprio autor

- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Terceira pergunta:

Qual é o nome do gráfico da função quadrática?

- Reta
- Hipérbole
- Parábola
- Elipse
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Quarta pergunta:

Qual é o eixo de simetria do gráfico da função quadrática?

- Vertical
- Horizontal
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Quinta pergunta:

Com relação à concavidade do gráfico da função quadrática, o coeficiente “a” (o número que multiplica x ao quadrado) nos diz que ela é voltada para cima quando

- Opção 1: $a > 0$
- Opção 2: $a < 0$
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Sexta pergunta:

Com relação à concavidade do gráfico da função quadrática, o coeficiente “a” (o número que multiplica x ao quadrado) nos diz que ela é voltada para baixo quando

- Opção 1: $a > 0$

- Opção 2: $a < 0$
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Sétima pergunta:

O valor do coeficiente “c” nos indica

- onde o gráfico corta o eixo-x
- onde o gráfico corta o eixo-y
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Oitava pergunta:

O coeficiente “b” nos indica uma translação horizontal do gráfico

- para a direita quando “b” é positivo e para a esquerda quando “b” é negativo
- para a direita quando “b” é negativo e para a esquerda quando “b” é positivo
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Nona pergunta:

As raízes da função quadrática nos indicam

- onde o gráfico corta o eixo-x
- onde o gráfico corta o eixo-y
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Décima pergunta:

O discriminante delta nos informa quantas raízes têm a função quadrática. Nesse sentido, é correto afirmar que

- Opção 1

$\Delta > 0 \Rightarrow$ possui duas raízes reais

$\Delta = 0 \Rightarrow$ possui uma raiz real

$\Delta < 0 \Rightarrow$ não possui raízes reais

Opção 2

$\Delta > 0 \Rightarrow$ não possui raízes reais

$\Delta = 0 \Rightarrow$ possui uma raiz real

$\Delta < 0 \Rightarrow$ possui duas raízes reais

Vi o conteúdo, mas não sei responder

Não vi o conteúdo

Décima primeira pergunta:

O que significa, respectivamente, “ $\Delta > 0$ ”, “ $\Delta = 0$ ” e “ $\Delta < 0$ ”?

Opção 1

Δ ser positivo

Δ ser igual a zero

Δ ser negativo

Opção 2

Δ ser negativo

Δ ser igual a zero

Δ ser positivo

Vi o conteúdo, mas não sei responder

Não vi o conteúdo

Seção “Sobre a parte de cálculo”:

Faça um rascunho para te auxiliar nos cálculos.

Primeira pergunta:

Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção correspondente ao valor do delta.

$$f(x) = x^2 - 5x + 2$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

- 16
- 17
- 18
- 25
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Segunda pergunta:

Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção correspondente ao valor do delta.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - 3$$
$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

- Opção 1: $\frac{70}{9}$
- Opção 2: $\frac{22}{9}$
- Opção 3: $\frac{34}{3}$
- Opção 4: $\frac{22}{3}$
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Terceira pergunta:

Para a função quadrática dada abaixo, utilizando a regra da soma e do produto, marque a opção correspondente às raízes da função.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$
$$\text{soma : } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$\text{produto : } x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

- 2 e -3
- 2 e 3
- 2 e 3
- 2 e -3

- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Quarta pergunta:

Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção que corresponde às coordenadas do vértice da função.

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$$
$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

- (1, -16)
- (-8, 1)
- (1, -8)
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Quinta pergunta:

Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção que corresponde às raízes da função, utilizando a fórmula resolutiva da equação do 2º grau (“Fórmula de Bháskara”).

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

- 1 e -8
- 1 e -3
- 3 e -1
- 1 e 8
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

Sexta pergunta:

Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção correspondente à forma fatorada da função quadrática $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, com raízes x_1 e x_2 . Escreva a forma fatorada de $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

- Opção 1: $f(x) = 2(x - 3)(x + 1)$

-
- Opção 2: $f(x) = 2(x - 3)(x - 1)$
 - Opção 3: $f(x) = 2(x + 3)(x - 1)$
 - Vi o conteúdo, mas não sei responder
 - Não vi o conteúdo

Sétima pergunta:

Para a função quadrática dada abaixo, marque a opção que corresponde às raízes da função, utilizando a fórmula resolutive da equação do 2º grau (“Fórmula de Bháskara”).

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

- 1 e 4
- 6 e -1
- 1 e -6
- 4 e 1
- Vi o conteúdo, mas não sei responder
- Não vi o conteúdo

APÊNDICE B – Ficha de roteiro da Atividade 1

Atividade 1: Plano cartesiano com material descartável

Dica: Distribuem as funções para os membros do grupo, montando as tabelas dos pares ordenados para agilizar o processo e poder discutir entre si com maior tempo.

Siga os passos a seguir para desenvolver a atividade.

1. Organize as caixas de ovos de modo a montar uma grande malha quadriculada e coloque um barbante sobre os eixos de simetria da forma que melhor se adapte aos pares ordenados que serão encontrados.
2. Monte uma tabela e escreva as coordenadas dos pares ordenados da função $f(x) = x^2$ para os valores $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.
3. Coloque tampinhas de mesma cor nas posições do plano cartesiano.
4. Descreva o que o grupo observou com relação à forma que o gráfico assume.
5. Monte uma tabela e escreva as coordenadas dos pares ordenados da função $f(x) = -x^2$ para os valores $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.
6. Coloque tampinhas de mesma cor nas posições do plano cartesiano.
7. Descreva o que o grupo observou com relação à forma que o gráfico assume.
8. Com base em suas observações, descreva o que acontece quando troca-se o sinal de x^2 .
9. Monte uma tabela e escreva as coordenadas dos pares ordenados da função $f(x) = 2x^2$ para os valores $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.
10. Coloque tampinhas de mesma cor nas posições do plano cartesiano.
11. Descreva o que ocorre com o gráfico quando o coeficiente a é maior que 1.
12. Monte uma tabela e escreva as coordenadas dos pares ordenados da função $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ para os valores $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ e $x = 4$.

13. Coloque tampinhas de mesma cor nas posições do plano cartesiano.
14. Descreva o que ocorre com o gráfico quando o coeficiente a é maior que 0 e menor que 1.
15. Monte uma tabela e escreva as coordenadas dos pares ordenados da função $f(x) = x^2 + 1$ para os valores $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1$ e $x = 2$.
16. Coloque tampinhas de mesma cor nas posições do plano cartesiano.
17. Descreva que tipo de movimento o gráfico faz ao adicionar um coeficiente $+1$.
18. Monte uma tabela e escreva as coordenadas dos pares ordenados da função $f(x) = x^2 - 1$ para os valores $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1$ e $x = 2$.
19. Coloque tampinhas de mesma cor nas posições do plano cartesiano.
20. Descreva que tipo de movimento o gráfico faz ao adicionar um coeficiente -1 .
21. Com base em suas observações, descreva o que acontece quando varia-se o coeficiente c da função quadrática.
22. Monte uma tabela e escreva as coordenadas dos pares ordenados da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ para os valores $x = -3, x = -2, x = -1, x = 0$ e $x = 1$.
23. Coloque tampinhas de mesma cor nas posições do plano cartesiano.
24. Descreva que tipo de movimento o gráfico faz ao adicionar o termo $2x$.
25. Com base em suas observações, descreva o que acontece quando acrescenta-se um termo bx positivo na função quadrática.
26. Monte uma tabela e escreva as coordenadas dos pares ordenados da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ para os valores $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$ e $x = 3$.
27. Coloque tampinhas de mesma cor nas posições do plano cartesiano.
28. Descreva que tipo de movimento o gráfico faz ao adicionar o termo $-2x$.
29. Com base em suas observações, descreva o que acontece quando acrescenta-se um termo bx negativo na função quadrática.
30. Testem funções, a escolha do grupo, com valores diferentes para os coeficientes a, b e c para verificar se as observações do grupo estão de acordo com o resultado encontrado.

APÊNDICE C – Ficha de roteiro da Atividade 2

Atividade 2: Parábola reflexiva

Siga os passos a seguir para desenvolver a atividade.

1. Desenhe um plano cartesiano na malha quadriculada.
2. A função $y = \frac{x^2+4}{4}$ tem como foco o ponto $A = (0, 2)$. Calcule os valores de y para $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, $x = 4$ e $x = -4$ na tabela.

x	y

3. Represente os pares ordenados formados no plano cartesiano.
4. Desenhe uma curva suave que passe por todos os pares ordenados representados.
5. Qual é o nome da curva visualizada?
6. O eixo de simetria passa por qual valor de x ? Trace uma linha por este valor, paralela ao eixo- y .
7. O ponto focal está sobre qual eixo?
8. Coloque sobre o ponto focal um objeto circular (tampinha de garrafa, borracha etc). Sobre os pontos representados, um aluno segura a tira reflexiva fazendo uma curva suave passando pelos pontos.
9. Outro aluno deve acender o laser de modo paralelo ao eixo de simetria em outro valor de x .
10. Observe o fenômeno que acontece e descreva abaixo.
11. Varie paralelamente a posição do laser em relação ao eixo de simetria e observe o fenômeno. Descreva abaixo o que foi observado.

12. Repita o processo para as funções a seguir e escreva a conclusão final do grupo:
 $y = \frac{x^2+16}{8}$, com foco $B = (0, 4)$, e $y = \frac{x^2-4x+8}{4}$, com foco $C = (2, 2)$.
13. Escreva a conclusão do grupo.

APÊNDICE D – Ficha de roteiro da Atividade 3

Atividade 3: Método babilônico para calcular a área de um retângulo

Siga os passos a seguir para desenvolver a atividade.

1. Com a folha de papel retangular, com o valor de sua área escrita em seu interior, discutam em grupo uma maneira de formar um quadrado. (Dica: Pode adaptar o barbante e o lápis para formar um compasso adaptado, pode usar dobradura. Sejam criativos.)
2. Dobre a folha na marcação que cria o quadrado.
3. Quais são as figuras formadas?
4. Com o pedaço de régua, o grupo pode fazer uma única medida no lado maior do retângulo para descobrir seu comprimento. Escreva quanto foi medido.
5. Dobre o retângulo formado ao meio, no mesmo sentido da primeira dobra, que separa em duas partes a folha.
6. Recorte esta última dobra e a posicione no lado maior do retângulo. Qual é o tamanho do lado menor desta tira (sem usar a régua, apenas por observação do que já foi feito)?
7. Qual é o formato da figura se completada?
8. Qual é o formato da figura que completa a figura maior, de modo que ela seja um polígono regular?
9. O grupo conhece o nome de algum método de cálculo que remete ao fato de completar uma figura regular?
10. Calculem a área da figura menor que está faltando para completar a folha.
11. Some o valor encontrado ao número que representa a área do retângulo.
12. Observe que será formado um quadrado completo em que seu lado mede o comprimento do lado, desconhecido, do quadrado formado pela dobradura adicionado à medida encontrada no passo 6. Calcule a área deste quadrado maior, utilizando x para representar a medida do lado do quadrado menor.

13. Foi necessário utilizar algum produto notável para resolver o passo 12?
14. Qual tipo de equação foi necessário resolver para achar o valor de x ?
15. Quais são as medidas dos lados do retângulo original?
16. Verifique se a resposta do grupo está correta multiplicando estes valores e comparando com o valor da área do retângulo indicado dentro do retângulo. A resposta foi a mesma?

Sugestão de medidas para os retângulos: 28 cm x 20 cm, 20 cm x 14 cm, 25 cm x 15 cm e 27 cm x 19 cm. De preferência, medidas inteiras no início. Após entendida a lógica, pode-se utilizar qualquer medida.

APÊNDICE E – Ficha de roteiro da Atividade 4

Atividade 4: Área máxima de um retângulo formado por um barbante em uma malha quadriculada

Siga os passos a seguir para desenvolver a atividade.

1. Com a malha quadriculada, o grupo deve formar retângulos conforme pedido.
2. Disponha o barbante ou linha sobre a malha quadriculada de modo a formar retângulos e anote na tabela os dados obtidos. Considere como comprimento a medida horizontal e como largura a medida vertical da figura formada.
3. Varie as medidas do comprimento e largura de 1 em 1 unidade de medida do comprimento máximo e largura mínima para o comprimento mínimo e largura máxima.
4. Complete a tabela a seguir com os dados observados. Conte a quantidade de quadrados na horizontal e escreva na primeira coluna. Conte a quantidade de quadrados na vertical e escreva na segunda coluna. Conte a quantidade de quadrados dentro da figura e escreva na terceira coluna.

Comprimento	Largura	Área
máximo	0	0
...	...	área máxima
0	máximo	0

Observação: Explicar a montagem da tabela e entregá-la em branco para o preenchimento do grupo.

5. Descreva o que o grupo percebeu, com relação à medida da área, quando a medida do comprimento diminui enquanto a medida da largura aumenta.
6. Descreva o que o grupo percebeu, com relação a disposição dos retângulos, quando a medida do comprimento diminui enquanto a medida da largura aumenta.
7. Qual é a área máxima encontrada? Qual é a figura geométrica formada para se atingir esta medida?

8. Desenhe um gráfico com as medidas das colunas do comprimento ou da largura como variável x e a coluna da área como variável y .
9. Qual é o gráfico que é representado por esses valores? Há simetria?
10. Observe quais são as coordenadas do vértice do gráfico. O que elas representam?
11. Faça o mesmo processo para outro barbante ou linha de tamanho diferente.

Sugestão para medidas de barbantes: 20, 30 e 40 unidades de medida, a depender da escala da malha quadriculada.