Universidade de Brasília

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SEBASTIÃO VIEIRA DE FARIAS

O LADRILHAMENTO DO PLANO EUCLIDIANO NO ENSINO MÉDIO: CRIANDO PADRÕES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Brasília

2024

SEBASTIÃO VIEIRA DE FARIAS

O LADRILHAMENTO DO PLANO EUCLIDIANO NO ENSINO MÉDIO: CRIANDO PADRÕES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Simone Vasconcelos da Silva

Brasília

2024

SEBASTIÃO VIEIRA DE FARIAS

O LADRILHAMENTO DO PLANO EUCLIDIANO NO ENSINO MÉDIO: CRIANDO PADRÕES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Profa. Dra. Simone Vasconcelos da Silva - FUP/UnB (Orientadora)

Profa. Dra. Regina da Silva Pina Neves - MAT/UnB (Membro)

Profa. Dra. Rafaela Fernandes do Prado - IFB (Membro)

Prof. Dr. Theo Allan Darn Zapata - MAT/UnB (Suplente)

Dedico este trabalho à minha filha Ana Clara, por todo amor, compreensão e paciência. À minha esposa Dayane, pelo carinho e companheirismo de sempre.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela saúde e proteção, e por ter iluminado a minha mente nos momentos mais difíceis desta trajetória.

À minha filha Ana Clara Vieira Lemos, pelo amor, pela compreensão e pela confiança que sempre depositou em mim.

À minha companheira Dayane Marques de Carvalho, pessoa incrível, pela paciência, pelo incentivo e por ter confiado na realização deste trabalho.

A todos os meus familiares, pelo carinho e pela compreensão de não poder contar comigo em alguns momentos.

Aos meus amigos, que torceram por mim.

À professora Aretusa Araújo, pela gentileza de ter cedido uma turma para que eu fizesse a minha pesquisa.

Aos alunos participantes desta pesquisa, pela cooperação e colaboração.

À equipe gestora do Centro Educacional São Francisco, onde minha pesquisa foi realizada, por viabilizar este trabalho.

À Simone Vasconcelos da Silva, minha orientadora, por ter aceitado o desafio de me orientar nesta pesquisa; pelas sugestões e ensinamentos; por ter confiado e cobrado; pela paciência e amizade.

Aos professores do PROFMAT, Carlos Maber Carrión Riveros, Cleyton Hercules Gontijo, Jiazheng Zhou, José Eduardo Castilho, Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues, Mauro Luiz Rabelo, Raquel Carneiro Dörr, Regina da Silva Pina Neves, Ricardo Ramos Fragelli, Rogério César dos Santos, Rui Seimetz, Tatiane da Silva Evangelista e Wescley Well Vicente Bezerra, que muito contribuíram para a minha formação.

A todos os meus colegas do PROFMAT, pelas amizades e pelos momentos privilegiados estudos coletivos.

À Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal – SEEDF, por ter me concedido um afastamento remunerado para estudos, com o qual pude me dedicar a este trabalho com tranquilidade e lucidez.

À Universidade de Brasília – UnB e à Sociedade Brasileira de Matemática – SBM/PROFMAT, por terem me dado a oportunidade de cursar este mestrado.

“Eu quase que nada não sei. Mas desconfio de muita coisa.”

Grande Sertão: Veredas

João Guimarães Rosa

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho foi investigar a relevância e as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, aplicada ao conteúdo de pavimentações planas, com foco nos ladrilhamentos regulares e semirregulares. Para tal, foi realizado um estudo de caso com alunos de uma turma da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública localizada em São Sebastião/DF. Com ênfase na manipulação, exploração e investigação em sala de aula, a sequência didática aplicada partiu de um problema gerador, pensado e concebido com a intenção de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico/matemático através do ladrilhamento do plano euclidiano. O interesse pela metodologia de resolução de problemas nas aulas de matemática decorre do fato de haver eficácia comprovada na melhora no desempenho dos estudantes quando os professores a utilizam. Esta pesquisa teve uma abordagem qualitativa e a coleta de dados deu-se no decorrer do desenvolvimento das atividades, realizadas em dois encontros. Os resultados obtidos nesta investigação jogam luz acerca da postura dos alunos e do professor-pesquisador, quanto ao trabalho em grupos e ao enfrentamento de situações inusitadas através de uma nova abordagem de ensino. Apesar dos diversos desafios inerentes à proposta de trabalho desta pesquisa, enxerga-se nesta estratégia de ensino um caminho alternativo às abordagens ditas tradicionais. Desse modo, espera-se que esta pesquisa possa servir para consultas e reflexões sobre o ensino de Matemática centrado na resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Metodologia. Ladrilhamento. Ensino Médio.

ABSTRACT

The main goal of this work was to investigate the Mathematics Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving relevance and contributions, applied to the content of flat paving, with a focus on regular and semi-regular tiles. To this end, a case study was carried out with students from a 2nd grade high school class at a public school located in São Sebastião/DF. With emphasis on manipulation, exploration and investigation in the classroom, the didactic sequence applied started from a generating problem, thought and conceived with the intention of promoting the development of geometric/mathematical thinking through the Euclidean plane's tiling. The interest in problem-solving methodology in mathematics classes arises from the fact that it has proven effectiveness in improving student performance when teachers use it. This research had a qualitative approach and data collection took place during the development of activities, carried out in two meetings. The results obtained in this investigation shed light on the attitude of the students and the teacher-researcher regarding working in groups and facing unusual situations through a new teaching approach. Despite the various challenges inherent to the work proposal of this research, this teaching strategy is seen as an alternative path to so-called traditional approaches. In this way, it is hoped that this research can serve for consultations and reflections on Mathematics teaching focused on problem solving.

Keywords: Problem Solving. Methodology. Tiling. High school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C	antes de Cristo
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EF04MA13	13ª habilidade do 4º ano de Matemática do Ensino Fundamental
EF06MA14	14ª habilidade do 6º ano de Matemática do Ensino Fundamental
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
NCTM	*National Council of Teacher of Mathematics*
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
REMAT	Revista Eletrônica da Matemática
UNESP	Universidade Estadual de São Paulo
RP	Resolução de Problemas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Mosaico é uma arte ou técnica que consiste em recobrir uma superfície qualquer com materiais tais como pedras, azulejos, ladrilhos e outras peças com as quais se formam figuras ou desenhos.

Ladrilhar ou pavimentar é o ato de recobrir artificialmente uma superfície sem que haja espaços vazios, nem sobreposições entre as peças utilizadas. Essas peças ou tesselas cobrem ou pavimentam a superfície cujo padrão resultante é um mosaico. Noutros termos, mosaico é o resultado de uma pavimentação ou ladrilhamento[1].

Os mosaicos estão presentes na civilização humana em diversos períodos, culturas e localidades. Ao observar essa arte em tapetes, paredes, pisos ou calçadas é possível perceber a presença de diversos conceitos matemáticos (padrões geométricos) que despertam a curiosidade e podem ser utilizados como um recurso educacional para o desenvolvimento de habilidades e competências em Matemática.

Existem diferentes formas de organização da aprendizagem matemática. A metodologia de resolução de problemas é uma delas. É usual se pensar que a resolução de problemas em matemática consiste em estudar um conteúdo e aplicá-lo na resolução de exercícios contextualizados, porém a metodologia de resolução de problemas apresentada neste trabalho se difere deste modelo, já que o problema é o ponto de partida para o estudo dos conceitos matemáticos.

Além de uma proposta de abordagem para o estudo de ladrilhamento do plano euclidiano através da resolução de problemas, este trabalho apresenta ainda um estudo de caso, investigando detalhadamente as etapas previstas na metodologia. Utilizando materiais manipuláveis como recurso pedagógico, buscou-se com esta pesquisa aprofundar o conhecimento sobre a interação do público-alvo, isto é, estudantes do Ensino Médio, com o desenvolvimento de habilidades centradas na resolução de problemas. Em outras palavras, o objetivo foi, com este estudo, investigar a relevância e a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático (geométrico) via processo de ensino e aprendizagem de geometria euclidiana no tocante às pavimentações planas, com foco nos ladrilhamentos regulares e semirregulares.

[1] Os dois primeiros parágrafos desta introdução são uma síntese de Barbosa (1993, p. 1-6).

Este trabalho está dividido em seis capítulos. O primeiro, onde está assentada a Introdução, consta um breve relato da trajetória acadêmica e profissional do autor; o objeto da pesquisa e justificativa; o problema de pesquisa e os objetivos.

O Capítulo 2, com o título Resolução de Problemas, faz uma panorâmica em relação ao tema, trazendo à tona concepções sobre o que é um problema; a resolução de problemas, enquanto metodologia de ensino de Matemática, em um contexto histórico e algumas concepções sobre essa temática; ele se encerra com a metodologia proposta nesta pesquisa.

O Capítulo 3, intitulado Ladrilhamento do Plano, apresenta um estudo das pavimentações do plano euclidiano com foco nos ladrilhamentos regulares e semirregulares.

O Capítulo 4, intitulado Metodologia, apresenta e justifica as escolhas metodológicas que norteiam este trabalho, o contexto da pesquisa, a sequência didática e os instrumentos de coleta de dados.

O Capítulo 5, intitulado Encontros e Relatos, apresenta um passo a passo referente à parte prática deste estudo e ao processo de construção de conhecimento através da aplicação da estratégia metodológica estudada nesta pesquisa.

Por último, no Capítulo 6, constam as Considerações Finais, cujo objetivo é apresentar algumas reflexões e apontamentos à luz das conclusões tiradas a partir da engrenagem entre a literatura estudada e o trabalho desenvolvido em sala de aula.

1.1 Trajetória Acadêmica e Profissional

Todo professor tem em sua bagagem relatos interessantes vivenciados ao longo de sua trajetória. Desafios, descobertas, alegrias e o prazer de poder compartilhar com o outro um pouco de conhecimento são elementos que fazem parte do caminho acadêmico e profissional percorrido por cada um de nós.

Da teoria à prática, dos bancos da universidade à experiência de sala de aula. Dos mestres que foram fontes de inspiração às diversas metodologias de ensino e aprendizagem pensadas e aplicadas. Dos axiomas e teoremas às resoluções de problemas. Das frustrações às cortinas que se abrem e revelam um mundo de possibilidades a cada dia. Dos erros às mudanças de rota via aprimoramento profissional. Esse repertório constitui, pelo menos em parte, o universo educacional do professor de matemática.

Após concluir o bacharelado e a licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Goiás – UFG, iniciei a minha trajetória profissional em 2000 como contrato temporário em

Goiânia. Em 2004, fui aprovado e efetivado como professor de Matemática da Secretaria de Estado da Educação do Estado de Goiás. Trabalhei nessa cidade cinco anos e meio com o Ensino Médio. Nesse período, e inspirado nos mestres de outrora, ministrei minhas aulas seguindo as metodologias das aulas que tive quando cursei o Ensino Médio. Mesmo com alguns ajustes metodológicos e muita dedicação, percebi que os meus alunos não estavam atingindo o nível de aprendizado adequado. A frustração bateu à porta, mas o desalento não me dominou.

Fui em busca de alternativas. Queria, pois, desenvolver um ensino de Matemática em que o aluno fosse capaz de raciocinar e montar estratégias na resolução de problemas e, tão importante, compreendesse o significado do que estava aprendendo.

A alegria do professor, creio, está diretamente ligada ao desenvolvimento do seu aluno. Nesse sentido, procurei alternativas metodológicas com o intuito de propor problemas relacionados ao cotidiano. A partir daí, percebi que as aulas gradativamente ficaram mais produtivas. Mas não deixei de usar o livro didático, pois eu o vejo como uma ferramenta pedagógica extremamente importante na formação do aluno. Todavia, procurei desenvolver atividades em sala de aula que, à medida do possível, levassem o aluno a dar sentido ao que estava sendo ensinado.

Em 2009, fui aprovado no concurso da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal. Dessa vez, com um pouco mais de experiência, comecei uma nova caminhada profissional com um público mais jovem e com outro currículo. Trabalhei, inicialmente, na etapa final do Ensino Fundamental. Foi uma experiência maravilhosa, com muitos desafios e aprendizado. O olhar atento e a curiosidade das crianças me fizeram refletir sobre como eu poderia retribuir às expectativas em relação ao ensino de Matemática. Os alunos nesse nível de ensino geralmente gostam de resolver problemas. O cenário era favorável para o desenvolvimento da metodologia de resolução de problemas. Nessa época, eu já aplicava esse tipo de metodologia, mas sem ter muita clareza sobre qual concepção de ensino fazia parte da minha prática.

Em 2012, voltei a trabalhar com o Ensino Médio no Centro Educacional São Francisco, localizado em São Sebastião/DF. Pensando em desenvolver um trabalho de excelência, desenvolvi em sala de aula estratégias metodológicas visando uma melhor compreensão na arte de resolver problemas.

Ao longo do meu percurso profissional, percebi o quão importante é fazer com que o aluno perceba o significado daquilo que está aprendendo. Para isso, ele precisa pensar, experimentar, investigar e criticamente relacionar a Matemática da escola com a da vida.

De 2010 a 2012, fiz uma especialização na Universidade de Brasília – UnB para professores de Matemática. Inspirado nas metodologias adotadas pelos professores, senti a necessidade de rever algumas estratégias de ensino quanto aos métodos e abordagens que eu estava utilizando. Notei que, a partir daí, o ambiente de aprendizagem ficou mais agradável nas minhas aulas.

Da minha experiência de sala de aula, constatei que os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades em resolver problemas de Matemática, em especial, os de geometria, relacionados ao mundo real. Será que a Geometria, nesse nível de ensino, foi preterida em relação aos outros tópicos da Matemática? Por que as metodologias adotadas não propiciaram um aprendizado adequado?

No meu percurso profissional, notei que a Geometria no Ensino Médio, não raras vezes, é revestida de abstração com ênfase na memorização de fórmulas. Talvez, por isso, essa área da Matemática é considerada difícil e destituída de significado para o aluno.

Nesse sentido, acredito, desenvolver atividades nas aulas de Geometria à luz de uma metodologia que permita ao aluno, investigar, manipular, experimentar e trabalhar em equipe possibilita o desenvolvimento do raciocínio geométrico que o leve a compreender as coisas ao seu redor.

Com o objetivo de aprofundar os meus conhecimentos em Matemática e conhecer novas metodologias de ensino, ingressei-me no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT em 2022.

Afastado da sala de aula desde o início deste mestrado, e depois de muitos momentos privilegiados de estudos, reflito e vejo que além do diploma de graduação e do certificado de especialização em Matemática, as inquietações de décadas de experiência juntamente com a formação recebida neste mestrado fortificaram a construção da minha identidade profissional.

Do exposto acima e com o intuito de compreender e apresentar uma metodologia alternativa para o ensino de Geometria, comecei a estudar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

1.2 O Objeto de Pesquisa e Justificativa

Neste trabalho, o objeto de pesquisa referente à Geometria plana é o ladrilhamento do plano euclidiano por polígonos regulares e semirregulares. Quanto à Metodologia de Resolução de Problemas, o nosso objeto de estudo é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-

Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta pelas pesquisadoras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato.

O objeto de pesquisa neste estudo é fruto da união dos dois temas citados no parágrafo anterior.

Um trabalho de pesquisa visa trazer à tona questões que causam insatisfação ao pesquisador e, ao mesmo tempo, propor soluções à essas indagações.

A curiosidade relativa a um objeto de pesquisa está ligada aos mais variados desejos humanos. A minha curiosidade tem, em especial, uma forte ligação às lacunas detectadas ao longo do meu percurso profissional no ensino de Matemática em geral e, em particular, em tópicos da Geometria, como por exemplo o ladrilhamento do plano euclidiano.

Ocupando um lugar de destaque na atividade matemática, a resolução de problemas tem sido indicada pelos educadores matemáticos como uma estratégia de ensino de fundamental importância na construção de novos conhecimentos. Corroborando com esta afirmação, Ortigão (2009) afirma que:

> As escolas, mesmo as de uma mesma rede, produzem impacto diferenciado na vida escolar e no futuro dos seus alunos. Franco, Sztajn e Ortigão (2007), com base nos dados do SAEB 2001, demonstraram por meio de análise multinível que, quando os professores enfatizam resolução de problemas em suas aulas de Matemática, os estudantes tendem a apresentar desempenhos melhores nesta disciplina, o que resulta em uma apropriação melhor do conhecimento de Matemática pelos alunos (ORTIGÃO, 2009, p. 119).

A temática Resolução de Problemas sempre foi, no meu universo acadêmico e profissional, um fenômeno que tem me causado, inquietude, fascínio e entusiasmo.

Segundo Morais e Onuchic (2014, p. 17-34), a literatura relacionada ao tema revela que problemas de matemática têm seu lugar de destaque há muito tempo no ensino e no currículo de matemática escolar; debates e orientações referentes ao papel da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da matemática ganharam impulso no Brasil, mais precisamente, a partir da década de 80.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (1998), na seção A resolução de problemas e o ensino/aprendizagem de Matemática dizem que

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Todavia, tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de

> aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos (BRASIL, 1998, p. 39-40).

O trecho citado acima nos faz refletir sobre o papel da resolução de problemas, enquanto estratégia de ensino, nos currículos atuais.

Será que as coisas mudaram ao longo dessas mais de duas décadas?

Apesar dos avanços alcançados ao longo desses anos, percebo que os estudantes do Ensino Médio que tive contato, tanto durante a pesquisa quanto na minha experiência profissional, ainda não estão acostumados a resolver problemas, pois quando são postos diante de situações desafiadoras e inusitadas, em geral, não conseguem mobilizar recursos para o enfrentamento de tais situações. Isso indica que, possivelmente, eles já se acostumaram com um ensino pautado pela oralidade do professor, isto é, se a tarefa já está quase pronta, restam-lhes pouco a fazer. Em outras palavras, estão acostumados com um processo de ensino onde os problemas são apresentados de tal forma que basta aplicar uma fórmula ou um procedimento para resolvê-los.

A aprendizagem, nessa perspectiva, se manifesta de maneira mecânica e passiva, pois não estimula o estudante ao interesse investigativo.

A Geometria é uma das partes mais importantes da Matemática. Segundo os PCN (1998), no Ensino Fundamental,

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc (BRASIL, 1998, p. 51).

Uma das habilidades preconizadas pela BNCC (2018) é a de que os estudantes do Ensino Médio sejam capazes de

> Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados (BRASIL, 2018, p. 545).

Segundo Toledo (2018), que utilizou em sua pesquisa a metodologia que escolhemos para este estudo, é preciso mesclar o uso de metodologias alternativas com o ensino tradicional e, no tocante ao seu trabalho, afirma:

> A sua elaboração permitiu que a autora pudesse aprender e aprofundar seus conhecimentos em relação aos conteúdos apresentados e sua prática em sala de aula,

> rompendo paradigmas de ensinar a matemática iniciando com a teoria e finalizando com a resolução de problemas (TOLEDO, 2018, p. 112).

De acordo com Vargas (2019), a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, utilizada em seu trabalho, possibilitou a inserção dos estudantes no processo de construção dos conceitos, tornando-os construtores de seus conhecimentos. Ela, em suas considerações, reitera que:

> A pesquisa nos revelou que, quando exploramos os conteúdos matemáticos através da resolução de problemas, o estudante é instigado a buscar uma solução. Nessa busca, progride na própria construção do conhecimento, pois precisa interpretar o problema, construir estratégias, analisá-las e argumentá-las, e dessa forma, reconhece que é capaz de pensar por si mesmo (VARGAS, 2019, p. 116).

Mello (2018), referindo-se a metodologia citada no parágrafo anterior afirma que:

> (...) o enfrentamento de situações adversas, trouxe resultados bastante satisfatórios e animadores, pois a maioria dos alunos demostrou ter conquistado certa autonomia, criticidade e comprometimento com sua aprendizagem, e, não obstante, os que ainda não conseguiram plenamente, deram os primeiros passos nesse sentido (MELLO, 2018, p. 102).

Junior et al (2021)[2] ao analisarem os trabalhos de dissertação na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e dissertações – BDTD referentes à resolução de problemas no Ensino Médio no período de 2016 a 2021, revelam que,

> (...) a maior parte dos trabalhos utiliza a abordagem de ensino de Matemática através da resolução de problemas, fortemente subsidiada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (JUNIOR; SOUZA; POSSAMAI, 2021, p. 1-21).

Na referida pesquisa há uma revisão sistemática sobre a forma que a resolução de problemas é abordada no contexto das aulas de Matemática no Ensino Médio.

A relevância da temática Resolução de Problema, os apontamentos presentes na literatura consultada e a minha experiência de mais de 20 anos de magistério, creio, justificam o interesse por esta pesquisa.

Esta dissertação apresenta os resultados de um estudo de caso sobre o objeto de estudo da pesquisa, ou seja, o ensino de Geometria através da resolução de problemas utilizando materiais manipuláveis (polígonos regulares) na construção de pavimentações planas.

---

[2] Artigo publicado na Revista Eletrônica da Matemática – REMAT. Disponível em: https://doi.org/10.35819/remat2021v7iespecialid5514. Acesso em 5 jun. 2023.

1.3 Problema de Pesquisa

A literatura apreciada nesta pesquisa relativa à resolução de problemas jogou luz às inquietações ligadas à minha prática docente. E essa engrenagem me levou a elaborar a seguinte pergunta diretriz:

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, traz contribuições para os alunos do Ensino Médio no que diz respeito à construção do conhecimento geométrico via ladrilhamento do plano? Se sim, quais são as contribuições? Existem limitações ou condições adequadas para a implementação do método em sala de aula?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

Investigar a relevância e as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático via processo de ensino e aprendizagem de geometria euclidiana no tocante às pavimentações planas com ênfase nos ladrilhamentos regulares e semirregulares.

1.4.2 Objetivos Específicos

O intuito dos objetivos listados abaixo é contribuir para o alcance do objetivo geral. Nesse sentido, tem-se:

- Elaborar problemas sobre a pavimentação do plano euclidiano;
- Acompanhar o processo de resolução de problemas desenvolvido pelos estudantes;
- Examinar o processo de ensino e aprendizagem de geometria referente aos ladrilhamentos regulares e semirregulares;
- Traçar um paralelo entre os problemas do mundo real com os da semirrealidade que são explorados na sala de aula;

- Coletar informações, refletir e relatar o processo de desenvolvimento da metodologia em questão, apontando os pontos positivos e/ou negativos dessa estratégia pedagógica.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> "Uma boa explicação pode ser entendida, um bom exemplo fala melhor à aprendizagem, mas a descoberta fixa entendimento e aprendizagem."
>
> Ruy Madsen Barbosa

Este capítulo se inicia com uma discussão sobre o que é um problema, na seção 2.1. Em seguida é apresentado o contexto histórico da metodologia de Resolução de Problemas até a sua inserção nos currículos escolares, nas seções 2.2 e 2.3. Detalha as 4 etapas desta metodologia, segundo o precursor, George Polya, na seção 2.4; apresenta e analisa as três concepções de ensino de Resolução de Problemas, na seção 2.5 e, por fim, destaca a metodologia de Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato que foi utilizada na realização desta pesquisa, na seção 2.6.

2.1 O que é um Problema?

> "Caminhante, não há caminho. Faz-se caminho ao andar."
>
> Antônio Machado

Uma vez que a presente pesquisa tem como eixo central a metodologia de ensino focada na resolução de problemas, faz-se necessário aprofundar conhecimento a respeito das concepções do que é um problema.

Selecionamos alguns autores e os seus pontos de vista quanto ao tema desta seção.

A pergunta é: o que é um problema?

> Um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução (KANTOWSKI, 1981, p.19 apud ABRANTES, 1989, p. 3).

A definição de problema na citação precedente revela que o conceito de problema, nessa concepção, é relativo, isto é, se o aluno já conhece métodos, técnicas e/ou fórmulas relativos à situação proposta, essa será um exercício e não um problema.

Há ainda, nessa concepção, uma crítica quanto às limitações da prática de resolução de exercícios, como descrito a seguir:

> O valor educativo dos exercícios não será nulo, mas é claramente limitado à prática de utilização de uma ou várias regras previamente conhecidas. Resolver muitos exercícios não contribui para desenvolver capacidades de raciocínio ou estratégias de resolução de problemas (ABRANTES, 1989, p. 3).

Além disso, o autor, da citação acima, destaca que:

> Na vida real, somos confrontados com problemas de que não podemos conhecer antecipadamente a solução e, muitas vezes, não sabemos mesmo se essa solução existe. Ora, este é um tipo de situação que deveria inspirar actividades de aprendizagem no âmbito da Matemática escolar (ABRANTES, 1989, p. 6).

Mais adiante, no mesmo artigo, o autor conclui, em suas considerações, que:

> O alargamento de perspectivas sobre o que é um problema e a clarificação de ideias sobre o que é a resolução de problemas no contexto escolar são aspectos decisivos de uma imperiosa renovação do Ensino da Matemática. Proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem problemas, numa larga variedade de situações, é uma ideia-chave para [que] a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva significativa (ABRANTES, 1989, p. 10).

Outra concepção sobre o tema é a seguinte:

> Um problema é definido aqui como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de solução (HIEBERT et al, 1997 apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Adjacente à essa concepção, Van de Walle (2009) lista algumas características de um problema voltado para a aprendizagem matemática, das quais, destacamos duas:

> O problema deve começar onde os alunos estão. O projeto ou seleção de tarefas deve levar em consideração a compreensão atual dos estudantes. Eles devem ter as ideias apropriadas para se envolver e resolver o problema e, ainda assim, considerá-lo desafiante e interessante. Os estudantes devem considerar a tarefa algo que faça sentido (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).
>
> O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender. Ao resolver o problema ou fazer a atividade, os alunos devem estar preocupados principalmente em dar significado à matemática envolvida e, assim, desenvolver sua compreensão sobre essas ideias (VAN DE WALLE, 2009, p. 58).

Polya (1985), expressa seu entendimento sobre problema da seguinte maneira:

> Temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo. Quando temos um desejo que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos nos meios de satisfazê-lo e assim se põe um problema. A maior parte da nossa atividade pensante, que não seja simplesmente sonhar acordado, se ocupa daquilo que desejamos e dos meios para obtê-lo, isto é, de problemas (POLYA, 1985, p.13).

De acordo com Onuchic (1999):

> Um problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver. (...) o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Dante (2000, p.9 apud ALLEVATO, 2005, p. 40) expressa sua concepção de maneira sucinta, afirmando que "um problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la."

Em outro momento, Dante (2009), que é um dos seguidores das ideias de Polya, ressalta que:

> Intuitivamente, todos nós temos uma ideia do que seja um problema. De maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo. O que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro. Por exemplo, se o pneu da bicicleta de Beto nunca furou e ele não sabe o que fazer nessa situação – e quer resolvê-la, pois gosta de andar de bicicleta, então esse é um problema para ele. Mas sabe que nesse caso deve procurar uma borracharia e que há uma bem próxima dali, a situação não chega a ser um problema, pois não exigirá um processo de reflexão para solucioná-la (DANTE, 2009, p. 11).

As diferentes concepções sobre o que é um problema, trazidas à tona nesta seção, convergem para, digamos, uma mesma interpretação. Ou seja, na visão desses autores, problema é aquilo que desafia a curiosidade do aluno e o coloca para agir diante de uma situação inusitada. Em outras palavras, "o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada" (BRASIL, 1998, p. 41).

Após "ouvir" o nosso referencial teórico, a concepção que adotamos nesta pesquisa, sobre o tema, é a de que, uma situação é um problema se o aluno deseja resolvê-la, mas não possui, a priori, ferramenta apropriada que o conduza à solução.

Vimos, nesta seção, algumas concepções do que é um problema na literatura relativa à resolução de problemas. Logo adiante, vamos em busca de conhecimento sobre o papel da resolução de problemas no ensino de Matemática, seu objetivo e concepções relativas a esse tema.

2.2 Resolução de Problemas: Contexto Histórico

Desde o início dos tempos, o homem com sua capacidade de pensar, sempre quis compreender o mundo ao seu redor, seja por necessidades práticas ou por deleite intelectual.

No currículo de Matemática escolar, segundo Onuchic (1999),

> Problemas de matemática têm ocupado um lugar central no currículo de matemática escolar desde a Antigüidade. Registros de problemas matemáticos são encontrados na história antiga egípcia, chinesa e grega, e são, ainda, encontrados problemas em livro-texto de matemática dos séculos XIX e XX. Segundo Stanic & Kilpatrik (1990, p. 4), o principal ponto a ser considerado, nos exemplos por eles colocados, é que neles é assumida uma visão muito limitada da aprendizagem de resolução de problemas (ONUCHIC, 1999, p. 199).

A Resolução de Problemas (RP)[3], como abordagem metodológica, teve início na primeira metade do século XX. Estudos na área apontam que a RP se configurou como teoria inicialmente nos EUA com os trabalhos de George Polya, com destaque para as ideias presentes em seu livro *How to Solve it,* cuja primeira edição data de 1945. Nesse trabalho, o autor apresentou uma sequência de quatro fases[4] para se resolver um problema. A RP, a partir daí, ganha relevância naquele país e em outras partes do mundo.

Referindo-se a Polya e ao seu livro citado acima, Morais e Onuchic (2014) destacam que,

> A pesquisa de Polya sobre RP transcende as quatro fases apresentadas em duas páginas desse livro. Sua preocupação estava voltada para a melhoria das habilidades da resolução de problemas pelos estudantes e, para que isso ocorresse, era preciso que os professores se tornassem bons resolvedores de problemas e que estivessem interessados em fazer de seus estudantes também bons resolvedores (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 23).

Avanços substanciais referentes à RP só aconteceram recentemente, como descrito por Onuchic (1999),

> A importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou exercício mental (ONUCHIC, 1999, p. 203).

A autora, da referência acima, reitera que o ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos 60. No entanto, ela adverte que

> Em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares têm início na década de 1970. Embora grande parte da

[3] Em consonância com a literatura consultada, a “resolução de problemas”, enquanto teoria, será escrita com “R” e “P” maiúsculos.

[4] Há uma síntese dessas quatro fases na seção 2.4.

> literatura hoje conhecida em Resolução de Problemas tenha sido desenvolvida a partir dos anos 70, os trabalhos de George Polya datam de 1944. A partir do final de 1960, a metodologia de investigação, utilizando sessões de resolução de problemas em grupo e com os alunos se manifestando em voz alta, se tornou prática comum. O período de 1962 a 1972 marcou a transição de uma metodologia de investigação de natureza quantitativa para uma qualitativa. De modo geral, os estudos em Resolução de Problemas preocuparam-se inicialmente, período anterior a 60, com o desempenho bem-sucedido da obtenção da solução de problemas. Não houve preocupação como processo. Para desenvolver sua capacidade em resolução de problemas, a criança deveria exercitar-se exaustivamente na solução de uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo. O ensino de resolução de problemas limita-se ao ensino da busca de solução, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta. Posteriormente, período 60-80, a preocupação voltou-se para o processo envolvido na resolução de problema e, assim, centrando o ensino no uso de diferentes estratégias (ANDRADE, 1998, apud ONUCHIC, 1999, p. 203-204).

Na década de 1970 aconteceu o primeiro encontro para se discutir a RP como abordagem metodológica. De acordo com Morais e Onuchic (2014),

> Em maio de 1975 ocorreu o primeiro “Seminário de Pesquisa sobre Resolução de Problemas em Educação Matemática”, que teve cinco encontros ao longo do ano, na Universidade da Georgia, reunindo pessoas que já estavam profundamente envolvidas com a pesquisa em RP havia mais de cinco anos. De acordo com Lester (1994), mais do que um simples evento, esse Seminário estimulou o nível de colaboração entre pesquisadores em Educação Matemática que não havia existido antes e que, nos cinco anos que o antecederam, uma massa crítica de pesquisadores ativamente engajados no estudo de RP em Matemática estava se formando (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 25).

Na década de 1980 a RP, como abordagem metodológica, tem forte presença nos currículos escolares nos EUA e em outras partes do mundo.

> Apesar das dificuldades, comuns em contextos de mudança, na década de 1980 muitas pesquisas foram produzidas com ênfase na RP (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 29).

O movimento da RP chegou ao Brasil nessa época e, posteriormente, como descrito na próxima seção, ganhou espaço e influência nos currículos escolares deste país.

2.3 A Resolução de Problemas nos Currículos Escolares

A temática Resolução de Problemas (RP) tem, nas últimas décadas, ocupado um lugar de destaque nos estudos e pesquisas referentes às estratégias metodológicas voltadas ao desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e, além disso, ela é, nas orientações curriculares, uma das protagonistas da atividade matemática.

Destacaremos mais adiante, sob a luz da literatura estudada, três tipos de abordagem de ensino de resolução de problemas. Antes disso, vale salientar que os debates sobre a resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem de matemática ganharam corpo e relevância em vários países entre 1980 e 1990. A publicação do documento "*An Agenda for Action – recommendations for School sigla Mathematics of the 1980s*" pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM)[5] dos Estados Unidos da América jogou luz ao tema.

> No ano de 1980, o documento "Uma Agenda para Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980, publicado pelo NCTM, propôs que Resolução de Problemas fosse o foco da matemática escolar nos anos 1980. O trabalho com RP deveria considerar "[...] aplicação da matemática ao mundo real, servindo à teoria e à prática de ciências atuais e emergentes, e resolvendo questões que ultrapassassem as fronteiras das ciências matemáticas" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2014, p. 28).

Mais adiante as autoras relatam que

> As publicações do NCTM não se resumiram ao documento "Uma Agenda para Ação" [...]. Em 1995, foi publicado Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar e, no ano 2000, os Princípios e Padrões para a Matemática Escolar, conhecido como Standards 2000 (Padrões 2000). Embora tenham sido publicados no ano 2000, os Standards 2000 refletem o trabalho empregado pelo NCTM ao longo de duas décadas (1980 e 1990) e trazem, além de uma importante fundamentação teórica constituída desde a década de 1970, através de pesquisas arbitradas, uma série de orientações para o professor de Matemática de sala de aula [...]. Esses documentos desempenharam, inclusive, um papel importantíssimo na implementação, sistematização e divulgação da RP no currículo escolar americano, com reflexos em currículos do mundo inteiro (ONUCHIC; ALLEVATO, 2014, p. 30-31).

Tendo como referência os documentos publicados pelo NCTM, foram elaborados no Brasil os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, 1998 e 1999) que estabelecem referenciais quanto a organização dos conteúdos e, dentre outros, a forma de abordagem na prática escolar. E, no tocante ao ensino de Matemática no Ensino Médio, preconizam a resolução de problemas como ponto de partida nas aulas para estimular o pensamento, propiciando, dessa forma, a construção ou a ampliação de conhecimentos.

Criada em 2018, a BNCC – Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo que abarca, com os devidos ajustes, os PCN, e passou a ser a referência balizadora nacional dos currículos e propostas pedagógicas.

---

[5] *NCTM - National Council of Teacher of Mathematics.*

Com um olhar no que já foi construído no Ensino Fundamental, a BNCC estabelece que

> [...] a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 528-529).

Em consonância com o propósito acima, o Currículo em Movimento do Novo Ensino Médio do Distrito Federal (2020, p. 82) considera que

> Uma metodologia que pode auxiliar nesse processo de formação é a de resolução de problemas, sendo ela uma das estratégias para o desenvolvimento da autonomia e do protagonismo, especialmente quando são utilizados problemas abertos. Isto é, problemas que admitem diversas possibilidades de respostas, as quais podem ser obtidas por meio de múltiplos métodos de solução, incluindo-se aqueles criados pelos estudantes no momento da resolução (SARDUY, 1987). Recomenda-se, também, oportunizar aos estudantes, além da resolução de problemas, a experiência de formulá-los, possibilitando assim explorar uma determinada situação ou então aspectos de um problema previamente conhecido (ENGLISH, 1997).

Esse mesmo Currículo, mais adiante, ressalta à luz do que foi exposto aqui que

> Tanto a resolução de problemas como as investigações apelam à imaginação e à criatividade, requerendo capacidades que se situam muito para além do cálculo e da memorização de definições e procedimentos. Essas capacidades, frequentemente designadas de "ordem superior", surgem associadas à comunicação, ao espírito crítico, à modelação, à análise de dados, às demonstrações e a outros processos de natureza metacognitiva (ABRANTES, 1995). A ênfase dada a tais capacidades apoia-se em muitos argumentos, desde os que sublinham o seu papel formativo no desenvolvimento intelectual do indivíduo e na sua preparação para uma cidadania crítica e consciente até na análise sobre investigações matemáticas de cunho utilitário, relacionadas às possíveis necessidades matemáticas dos empregos do futuro (DISTRITO FEDERAL, CURRÍCULO EM MOVIMENTO DO NOVO ENSINO MÉDIO, 2020, p. 148).

Em outro momento na BNCC, quando se trata de competências para o ensino de Matemática, a RP se mostra com ferramenta essencial na construção de conhecimento.

Destacamos a seguir algumas dessas competências:

> (1) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> (2) Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> (3) Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> (4) Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018, p. 267).

Vale ainda ressaltar que nos PCN (1998) “A resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser resumida nos seguintes princípios:”

> (1) a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> (2) o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> (3) aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
> (4) um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> (5) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998, p. 40-41).

As concepções sobre o ensino de Matemática e a RP, presentes nos documentos citados nesta seção, trazem à tona orientações no sentido de que o conhecimento nessa área não pode estar desvinculado de um fazer matemático, de um processo de investigação e exploração.

2.4 Polya e a Heurística na Resolução de Problemas

> "Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar a sua curiosidade e fizer funcionar a sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta."
>
> George Polya

O matemático e pesquisador húngaro George Polya (1887-1985) se destacou como uma referência mundial no contexto do ensino de Matemática com ênfase em processos heurísticos[6] e na Resolução de Problemas (RP).

A partir da década de 1940, já nos Estados Unidos da América, Polya, com suas palestras e trabalhos publicados, passou a ser reconhecido como uma das principais figuras em RP a nível internacional.

Morais e Onuchic (2014)[7], corroborando com os dois parágrafos precedentes, afirmam:

> George Polya nasceu na Hungria, mas sua pesquisa sobre Resolução de Problemas (RP) ganhou forma nos Estados Unidos quando assumiu uma vaga como professor titular na Universidade de Stanford. O currículo de Polya até sua ida a Stanford é muito amplo (...). Em 1942, atuando como professor em Stanford (USA), Polya passou a ser reconhecido como a maior autoridade em RP naquele país e em todo o mundo, sendo conhecido por suas palestras, cursos e artigos publicados sobre o tema (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 22).

O que é heurística? De acordo com o dicionário Aurélio (2010, p. 397), heurística é o "conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou à resolução de problemas."

Polya (2006) apresenta a ideia de heurística da seguinte forma:

> Heurística, Heurética ou "Ars inveniendi" era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia e à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. **O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção**. Alguns indícios desse estudo podem ser encontrados em trabalhos dos comentaristas de Euclides. A este respeito, Pappus tem uma passagem particularmente interessante. As mais famosas tentativas de sistematização da heurística devem-se a Descartes e a Leibniz, ambos grandes matemáticos e filósofos. Bernard Bolzano apresentou notável descrição pormenorizada da Heurística. O presente livro é uma tentativa de reviver este estudo de forma moderna e modesta. (...) Heurístico, adjetivo, significa "que serve para descobrir" (POLYA, 2006, p. 99, grifo nosso).

[6] Relativo ou próprio da heurística; que serve para a descoberta ou a investigação de fatos (HOUAISS, 2011, p. 497).

[7] Capítulo 1 do livro Resolução de Problemas: Teoria e prática (2014).

Na sequência, o autor escreve:

> Heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informações, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da Heurística deve levar em conta, tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas. Não deve esquecer aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística. Neste estudo, não devemos descurar nenhum tipo de problema, e sim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independentemente do assunto específico do problema. O estudo da Heurística tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática (POLYA, 2006, p. 99-100).

.

Em 1945 foi publicado o livro A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático[8], onde, Polya propõe uma metodologia de resolução de problemas. O autor, no livro em questão, apresenta uma sequência de quatro etapas (ou fases) no processo de resolução de problemas matemáticos: compreender, plano, execução, retrospecto.

Faremos aqui uma síntese dessas quatro etapas.

1ª) <u>Compreensão do Problema</u> (é preciso compreender o problema):

Nessa etapa, estágio preparatório, procura-se identificar com clareza os elementos principais do problema e a relação que há entre eles. É o momento de esboçar desenhos, esquemas, tabelas etc. Faz-se necessário um plano.

Alguns exemplos de questionamentos inerentes à etapa de compreensão do problema são: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

2ª) <u>Estabelecimento de um Plano</u> (encontre a conexão entre os dados e a incógnita):

Uma vez compreendido o problema, é hora de planejar a solução, ou seja, é preciso pensar em estratégias plausíveis que projete luz à solução do problema.

Nesta etapa, de acordo com Polya:

> Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita.

---

[8] Título em inglês: "How to solve it: a new aspect of mathematical method". Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

> O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de plano. [...] as boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimento previamente adquiridos (POLYA, 2006, p. 7).

Tendo estabelecido um plano, é o momento de executá-lo.

Alguns exemplos de reflexões sobre a etapa de estabelecimento de um plano são: Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato.

3ª) Execução do Plano (execute o seu plano):

Nesta etapa, que aparentemente é mais simples que a anterior, coloca-se o plano em ação. É, digamos, um roteiro à luz das estratégias pensadas.

> Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. Para conseguir isso é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo. [...] Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o de que mais se precisa (POLYA, 2006, p. 10).

Por fim, é hora de verificar se a resposta encontrada está de acordo com o que foi proposto no problema. Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

4ª) Retrospecto ou verificação (examine a solução obtida):

Este é um momento muito importante, pois através de um olhar crítico lançado no passo a passo da resolução é possível ver se há erros de cálculos ou se é preciso melhorar os argumentos.

De acordo com Polya (2006):

> Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chagados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas (POLYA, 2006, p. 12).

A etapa de retrospecto ou verificação é caracterizada por análises do tipo: É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema?

Convém ressaltar que a BNCC (2018) traz, na Competência Específica 3, as etapas de resolução de problemas de Polya, como referenciado a seguir.

> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada (BRASIL, 2018, p. 545).

2.5 Resolução de Problemas: Concepções de Ensino

Com o intuito de buscar uma melhor compreensão a respeito do ensino centrado na resolução de problemas, faremos, nesta seção, uma síntese de três concepções referentes a esse tema:

- ensinar **sobre** a resolução de problemas;
- ensinar **para** a resolução de problemas; e
- ensinar **através** da resolução de problemas.

Referenciadas, em especial, pelos trabalhos de Allevato (2005) e Allevato e Onuchic (2014), vamos apresentar as características dessas três abordagens evidenciando os detalhes que há em cada uma delas.

2.5.1 Ensinar Sobre a Resolução de Problemas

Essa perspectiva corresponde a ensinar os alunos a resolver problemas. Para isso, faz-se necessário o uso de estratégias e procedimentos que são essenciais na resolução de problemas.

Nessa concepção, o desenvolvimento das atividades matemáticas em sala de aula está estruturado em estratégias, isto é, há um molde, um passo a passo a ser seguido. A resolução de problemas, sob essa ótica, corresponde, segundo Allevato (2005, p. 48) a um novo conteúdo.

Referindo-se ao ensino de matemática durante o período da Matemática Moderna, nas décadas de 60 e 70, a autora destaca que:

> O quadro de insucesso configurado levou pesquisadores e educadores matemáticos a buscar alternativas para o ensino de Matemática. Voltaram-se, então, os olhos à resolução de problemas. As heurísticas ganharam força, constituindo-se em listas de sugestões e estratégias gerais, independentes do assunto particular. Elas auxiliavam a fazer aproximações, compreender um problema e dispor, eficientemente, os recursos para resolvê-lo. Portanto, foi sedimentada a crença de que era preciso ensinar os estudantes a resolver problemas ou, o que é o mesmo, ensinar sobre resolução de problemas (ALLEVATO, 2005, p. 49).

Como referenciado na citação precedente, há, nesse tipo de abordagem, um destaque às heurísticas como norteadoras do processo de resolução de problemas. Nesse sentido, Allevato (2005, p. 52) observa que “a repetição de uma estratégia ou técnica operatória, mesmo que realizada corretamente, não garante a compreensão do conceito ou conteúdo matemático envolvido.”

Sob essa ótica, conclui-se que a beleza da descoberta é preterida em detrimento de um roteiro de estratégias bem definido.

2.5.2 Ensinar Para a Resolução de Problemas

Nesta concepção, o ensino de Matemática precede à resolução de problemas, isto é, após a introdução de um conceito matemático, do desenvolvimento de algumas habilidades e domínio de técnicas, o professor propõe problemas aos alunos. Como exemplo, as habilidades EF04MA13 e EF06MA14 na BNCC (2018) se referem a esta concepção.

Em sua análise, Allevato (2005) adverte:

> Essa é a visão que considera a Matemática como utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo. Nessa concepção o professor concentra-se no modo como a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas. Ele se preocupa com a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto para problemas em outros contextos, ou seja, ele ensina para a resolução de problemas (ALLEVATO, 2005, p. 52-53).

Nesse modelo de abordagem, o foco do professor é ensinar os conceitos da Matemática, suas técnicas e algoritmos para, posteriormente, serem aplicados na resolução de problemas. A aprendizagem, nessa visão, tende a ficar fragmentada e, consequentemente, cria obstáculos para o aluno entender o significado daquilo que ele está fazendo.

Exercícios de aplicação e fixação ao final dos capítulos, nos livros didáticos, são exemplos de utilização desta concepção de RP.

2.5.3 Ensinar Através da Resolução de Problemas

A ênfase na Matemática Escolar na década de 1980, através do documento balizador Uma Agenda para a Ação (NCTM, 1980), era a resolução de problemas. Acontece que, nessa época, não havia um entendimento sobre a forma que o tema seria trabalhado na prática escolar. Infere-se daí que a divergência de ideias se justifica como explicitado no trecho: A "falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de 'resolução de problemas ser o foco da Matemática escolar' " (SCHROEDER e LESTER, 1989, apud ALLEVATO, 2005, p. 55)

Essa concepção de ensino tem algumas características interessantes como podemos ver na citação a seguir:

> A terceira concepção apontada por Hatfield (1978) e, posteriormente, por Schroeder e Lester (1989), refere-se ao ensino de Matemática através da resolução de problemas. Ressalte-se, novamente a inserção da Matemática na expressão, com o intuito de retirar o foco exclusivamente da resolução de problemas (como ocorre com o ensino sobre Resolução de Problemas). Na realidade consideramos que a expressão "através" – significando "ao longo", "no decurso" – enfatiza o fato de ambas, Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente. Essa perspectiva era, ainda, bastante incipiente no final da década de 80 e se consolidou a partir de vários trabalhos desenvolvidos pelo NCTM, os quais culminaram com a publicação dos Standards 2000 (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 38).

O ensino através da resolução de problemas e as ideias construtivistas caminham, de certo modo, sobre o mesmo eixo de sustentação. Em síntese, conectamos essas ideias.

Referindo-se ao ensino de Matemática à luz das ideias construtivistas, Santos (2002, p.14) faz uma colocação que converge com as características da concepção em análise nesta seção quando observa que "De uma certa maneira, a idéia[9] construtivista se apoia no próprio processo histórico de construção do conhecimento científico, cujos objetos foram sendo construídos como respostas a problemas específicos". E reitera que,

> esse modelo coloca o aluno na situação de alguém que precisa resolver um certo problema mas que não possui a ferramenta necessária (ou mais econômica) para fazê-lo; nessa situação, não existe outra solução, para o sujeito, que [não seja] construir essa ferramenta que permite a resolução de seu problema, numa situação análoga àquela vivida no processo de construção dos conceitos científicos (SANTOS, 2002, p.14 apud ALLEVATO, 2005, p. 56).

---

[9] Grafia preservada do texto original.

Schroeder e Lester (1989), segundo Allevato (2005, p. 56), chamam essa concepção de "ensino via resolução de problemas" e reforçam que ela seja considerada não somente como um dos objetivos de se ensinar Matemática, mas principalmente, como um meio de fazê-lo.

Em seguida, e referindo aos autores citados no parágrafo anterior, Allevato (2005) observa que:

> Ao analisar os aspectos relevantes das diferentes maneiras de abordar esse assunto, eles ressaltam que o ensino via resolução de problemas é a abordagem mais coerente com as recomendações do NCTM, segundo as quais: (1) habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas, (2) o desenvolvimento de processos de pensamento de ordem superior deve ser estimulado através de experiências em resolução de problemas, e (3) o ensino de Matemática deve ocorrer, por investigação orientada, em um ambiente de resolução de problemas (ALLEVATO, 2005, p.56).

Refletindo sobre a ideia de ação no contexto do ensino de Matemática e sob a ótica da visão construtivista, Santos (2002) enfatiza que,

> (...) a aquisição de novos conhecimentos está estreitamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo; em matemática costumamos dizer que o aluno aprende pela resolução de problemas, e não escutando o professor relatar o objeto em sua aula. Assim, para que o sujeito resolva seu problema, ele não pode ficar em uma situação passiva; é preciso que ele tente sua resolução (SANTOS, 2002, p.14).

2.5.4 Reflexão sobre as Concepções de Resolução de Problemas

O leitor deve ter notado que há, nas entrelinhas, algo sutil entre as três concepções abordadas nesta seção. Nesse sentido, julgamos pertinente reexaminá-las destacando algumas características evidenciadas em cada uma delas, com descritas a seguir no quadro 1.

Quadro 1 – Concepções sobre Resolução de Problemas

O ensino de Matemática e a Resolução de Problemas	
Concepções	Características/Objetivos
Ensinar **sobre** a resolução de problemas	• Centrada em procedimentos e métodos como estratégias para resolver problemas; • A ênfase está nas heurísticas; • A resolução de problemas é algo peculiar que deve ser ensinado assim como conceitos e algoritmos; • Levar o aluno a ser bom resolvedor de problemas.

Ensinar **para** a resolução de problemas	• O aluno deve aprender matemática em sala de aula para, posteriormente, saber aplicá-la em contextos diversos; • A ênfase está no conteúdo de Matemática; • O professor, inicialmente, "ensina" os conceitos/conteúdos e técnicas operatórias; depois, como aplicação, propõe problemas aos alunos; • O foco é aprender Matemática para saber usá-la.
Ensinar **através** da resolução de problemas	• A resolução de problemas é um meio de ensinar Matemática, ou seja, é uma metodologia de ensino; • O problema é ponto de partida para a aprendizagem de novos conceitos/conteúdos; • O ensino de Matemática deve ocorrer, por investigação orientada, em um ambiente de resolução de problemas; • Os alunos devem ser levados a pensar matematicamente; • Desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer Matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e autoestima dos estudantes.

Fonte: Elaborado pelo autor

Notamos, do exposto acima, que o ensino através da resolução de problemas abarca, e não exclui, as demais concepções (sobre e para). De fato, como afirma Allevato (2005): "(...) Isto significa que, quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto **sobre** resolução de problemas, quanto aprendem Matemática **para** resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática **através** da resolução de problemas" (ALLEVATO, 2005, p. 61, grifo da autora).

Antes de encerrar esta seção, julgamos oportuno apresentar um breve resumo referente ao tempo e às ideias associadas às concepções aqui analisadas.

Na literatura consultada sobre o tema, aprender Matemática para a resolução de problemas “[...] foi a ideia dominante de Resolução de Problemas, anterior ao Movimento da Matemática Moderna, e é utilizada até os dias de hoje” (DINIZ, 2001, p. 99-101).

Ensinar sobre resolução de problemas é, como na análise de Allevato (2005), considerado um conteúdo à parte, isto é, um novo conteúdo “e tem sido associada às opções de ensino feitas após a Matemática Moderna” (ALLEVATO, 2005, p. 48).

Na década de 1980, como dissemos na seção 2.3, vários trabalhos com ênfase na resolução de problemas foram surgindo. Neles, novas perspectivas quanto ao desenvolvimento de habilidades em relação ao tema vieram à tona.

Allevato (2005) destaca que:

> Emergem, então, idéias sobre a possibilidade de considerar a resolução de problemas como um meio de ensinar Matemática. Nessa época, elas vieram associadas à retomada das idéias do construtivismo, segundo as quais os estudantes não mais são considerados como recipientes vazios a serem preenchidos, através da aprendizagem, com informações fragmentadas e desconexas. Antes, são seres pensantes aos quais deve-se proporcionar, através do ensino, oportunidades de interpretar situações ou problemas e de relembrar conhecimentos anteriores a fim de construir novos conhecimentos (ONUCHIC,1999, 2003a; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004; SANTOS, 2002 apud ALLEVATO, 2005, p. 55).

Diversas publicações do NCTM apresentaram importantes contribuições nessa área, mas foi com os Standards 2000 que o ensino de matemática via resolução de problemas passou a ser pensada sob uma nova perspectiva.

De acordo com Onuchic e Allevato (2011),

> Foi, de fato, a partir dos Standards 2000 que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 79-80).

Assim, a concepção de ensino (e aprendizagem) de Matemática através da resolução de problemas ganha consistência, enquanto metodologia, a partir dos Standards 2000.

Na próxima seção, vamos apresentar à luz da literatura apreciada nesta pesquisa a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de Problemas.

2.6 A Metodologia de Resolução de Problemas Utilizada na Pesquisa

Foi escolhida para ser utilizada na realização desta pesquisa a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esta metodologia é fruto dos trabalhos desenvolvidos pelo GTERP[10] e tem como lideranças as pesquisadoras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato, que são expoentes no Brasil sobre o tema.

É importante ressaltar que esta estratégia metodológica é um dos tipos de abordagem de ensino via RP e o seu estudo nesta seção se justifica, pois foi com essa estratégia que esta pesquisa foi desenvolvida.

Há no cerne dessa perspectiva de ensino uma intencionalidade como explicitado na referência:

> A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador. Desse modo, nessa Metodologia, a avaliação é realizada durante a resolução de problemas, integrando-se ao ensino com vista a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 43).

Essa metodologia de ensino, centrada na resolução de problemas, se apresenta como inovadora no sentido de se contrapor a um ensino assentado na memorização, repetição de procedimentos algorítmicos e, entre outros, na resolução de exercícios de fixação.

> Nessa Metodologia, o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 44).

O trabalho em sala de aula com essa metodologia, de acordo com a sugestão de Allevato e Onuchic (2014, p. 45-46), deve ser organizado em dez etapas:

> (1) Proposição do problema – O professor seleciona ou elabora um problema e propõe aos alunos, ou aceita um problema proposto pelos próprios alunos. Esse problema inicial é chamado problema gerador, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula.
>
> (2) Leitura individual – Recebendo seu problema impresso, cada aluno faz sua leitura do problema. A ação, nessa etapa, é do aluno; ao ler individualmente, tem a

[10] GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas. Esse grupo desenvolve suas atividades na UNESP-Rio Claro, com encontros semanais, desde 1992 (ONUCHIC et al, 2014, p. 11).

> possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto.
>
> (3) Leitura em conjunto – Os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. O professor ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários, mas ainda as ações são realizadas, essencialmente, pelos alunos. Nessa fase, exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender.
>
> (4) Resolução do problema – Os alunos, em seus grupos, tentam resolver o problema gerador, que lhes conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. A ação dos alunos volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.
>
> (5) Observar e incentivar – O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e incentivando a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos.
>
> (6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são solicitados a fazer o registro de suas resoluções na lousa (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Diante desse “painel de soluções”, o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender seus pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo a aprimorar a apresentação (escrita) da resolução.
>
> (7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
>
> (8) Busca de consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.
>
> (9) Formalização do conteúdo – O professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações se for o caso.
>
> (10) Proposição e resolução de novos problemas – Novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos alunos. Eles possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores.

Descrevemos aqui, na íntegra, as dez etapas sugeridas pelas autoras. Todavia, por uma questão de tempo e logística, fizemos um agrupamento dessas dez etapas para o nosso estudo em sala de aula e ficou estruturada como descrito a seguir.

Etapa 1: Apresentação, Compreensão e Execução do Problema Gerador (1)

- A turma é dividida em grupos; (3)
- É feita a leitura do problema[11], individual e coletivamente; (2 e 3)
- O professor ajuda os grupos na compreensão do problema; (3)
- Os alunos, em seus grupos, tentam resolver o problema; (4)
- O professor incentiva os alunos a testar suas ideias, sem fornecer sugestões. (5)

Etapa 2: Discussão e análise coletiva da resolução do problema gerador

- Os grupos, através de seus representantes, registram suas resoluções na lousa; (6)
- Os alunos analisam e discutem as resoluções expostas pelos colegas na lousa; (7)
- O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos; (7)
- Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. (8)

Etapa 3: Síntese e Formalização do Conteúdo

- O professor registra na lousa uma apresentação formal do conteúdo estruturado em linguagem matemática; (9)
- Após as etapas anteriores, os alunos estão diante do novo conteúdo. (9)

Etapa 4: Proposição e resolução de novos problemas

- Novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos alunos; (10)
- O professor verifica se os alunos compreenderam os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido na aula precedente. (10)

[11] Cada aluno recebe previamente uma cópia impressa do problema gerador.

3 LADRILHAMENTO DO PLANO

Neste capítulo há, inicialmente, uma explanação sobre alguns tipos de pavimentação; em seguida, é apresentado o conceito de mosaico juntamente com figuras de artes decorativas. Na sequência vem o conceito de pavimentação lado-lado, seção 3.1. Na seção 3.2, há uma síntese da pavimentação de Escher. Nas duas seções seguintes, vamos, do ponto de vista matemático, em busca de padrões geometricamente possíveis para a existência de mosaicos regulares (seção 3.3) e semirregulares (seção 3.4).

O objetivo aqui é apresentar alguns tipos de pavimentação. Embora sabendo que seria inviável trabalhar na parte prática desta pesquisa todos os tipos aqui mencionados, trazemos à tona aqueles que de fato foram utilizados e os que julgamos pertinentes para futuros trabalhos em sala de aula, ou seja, uma sugestão de continuação deste trabalho.

Antes de listarmos tais tipos de pavimentação, apresentamos ao leitor alguns conceitos que julgamos importantes para uma melhor compreensão das seções que compõem este capítulo, pois, além da beleza do ponto de vista artesanal, busca-se, com tais conceitos, padrões geométricos possíveis.

Mosaico é um tipo de arte decorativa formada por um conjunto embutido de pequenas peças tais como pedra, azulejo, vidro, que formam figuras com as mais variadas funções. Os mosaicos, segundo Barbosa (1993, p.1), são conhecidos desde os tempos antigos. Estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônia, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que não raro permaneceram até os dias atuais. Como ilustração do que foi descrito aqui, apresentamos as figuras 1, 2, 3 e 4.

Figura 1 - Recorte do Estandarte de Ur – Paz

Fonte: https://www.britishmuseum.org/explore/highlights/highlight_objects/me/t/the_standard_of_ur.aspx. Acesso em 14 mar. 2024.

A figura 1 representa um recorte de um lado do Estandarte de Ur. A descrição desse artefato é apresentada logo a seguir.

O Estandarte de Ur[12] é uma peça sumeriana, da antiga Mesopotâmia, de cerca de 2.600 a.C. Esse mosaico é considerado por muitos historiadores como o mais antigo que se tem conhecimento. A figura 2 mostra os lados dessa peça.

Figura 2 - O Estandarte de Ur: Guerra e Paz

Fonte: https://www.britishmuseum.org/explore/highlights/highlight_objects/me/t/the_standard_of_ur.aspx. Acesso em 14 mar. 2024.

Em *The British Museum*[13], encontramos a seguinte descrição (ilustrada na figura 2):

[12] É uma peça de madeira de forma trapezoidal, medindo, aproximadamente, 50 cm de comprimento, 22 cm de altura, 11,60 cm de largura (na extremidade da base) e 5.60 de largura (na extremidade do topo).

[13] https://www.britishmuseum.org/collection/object/W_1928-1010-3. Acesso em 14 mar. 2024.

> "O Estandarte de Ur", decorado nas quatro faces com incrustações de cenas em mosaico de conchas, calcário vermelho e lápis-lazúli, incrustadas em betume [figura 2]. Um lado mostra uma cena de guerra; um exército sumério com carroças de rodas e infantaria ataca o inimigo; os prisioneiros são levados até um indivíduo maior, que está acompanhado por guardas e tem sua própria carroça esperando atrás dele. O outro lado mostra cenas de homens trazendo animais, peixes, etc., possivelmente como saque ou tributo; no topo, os mesmos grandes banquetes individuais com outros homens; eles são entretidos à direita por um cantor e um homem tocando lira. Os painéis finais triangulares mostram outras cenas; o objeto foi encontrado esmagado, mas já foi restaurado e as amostras foram retidas (Tradução nossa).

Outra importante arte decorativa, com painéis de ladrilhos vitrificados, é o "Leão do portão de Ishtar" de meados do primeiro milênio a.C., cuja ilustração encontra-se na figura 3.

Segundo Garcia (2013)[14] "A Porta de Ishtar foi construída pelo Rei da Babilônia Nabucodonosor II por volta de 575 a.C. Era o oitavo portão da cidade da Babilônia (no atual Iraque) e era a entrada principal para a cidade." O leão simbolizava os poderes da deusa babilônica Ishtar.

Figura 3 - O leão do portão de Ishtar

Fonte:

https://www.metmuseum.org/pt/art/collection/search/322586#:~:text=Quando%20Nabucodonosor%20mandou,de%20Ano%20Novo. Acesso em 28 mar. 2024

De acordo com a autora, "A frente da porta está adornada com tijolos esmaltados com filas alternadas de dragões e touros. Os animais são decorados com azulejos amarelos e castanhos, enquanto os tijolos que os rodeiam são azuis."

Julgamos pertinente, também, trazer para esta explanação inicial o lindo e famoso Calçadão de Copacabana. Esse mosaico está ilustrado na figura 4.

[14] Extraído de: https://www.worldhistory.org/trans/pt/1-272/porta-de-ishtar/. Acesso em 29 mar. 2024.

Figura 4 - Calçadão de Copacabana

Fonte: Sebastião Marinho / Agência O Globo. Acesso em 14 mar. 2024.

O Calçadão de Copacabana foi redesenhado em 1970 pelo artista plástico e paisagista Roberto Burle Marx, que inverteu a posição do desenho, deixando as ondas de pedra paralelas às ondas do mar.

É interessante notar, como bem observado por Barbosa (1993), que:

> A construção de mosaicos, ainda que não difícil do ponto de vista artesanal, em certos casos reflete em seus padrões uma intersecção curiosa e atraente com a imaginação geométrica, às vezes inconsciente, mas de relacionamento matemático não trivial nem fácil (BARBOSA, 1993, p.1).

Segundo Dante (2020), “Ladrilhar (ou pavimentar) é recobrir uma superfície com regiões limitadas por figuras geométricas planas regulares ou irregulares (os ladrilhos), colocadas uma ao lado da outra, sem espaços vazios e sem sobreposição entre elas.” Desse modo, a pavimentação do plano[15] consiste em recobri-lo inteiramente com figuras planas sem que haja superposições nem espaços vazios entre elas.

É preciso que recordemos, neste momento, o conceito de polígono.

Segundo Barbosa (1993, p.2), “Uma linha poligonal simples fechada separa o plano em três conjuntos de pontos do plano: uma região interior, uma região exterior e a própria

[15] É claro que, efetivamente, na prática não conseguiremos uma pavimentação do plano, pois nunca a completaríamos, mas podemos obtê-la idealmente (BARBOSA, 1993, p.3).

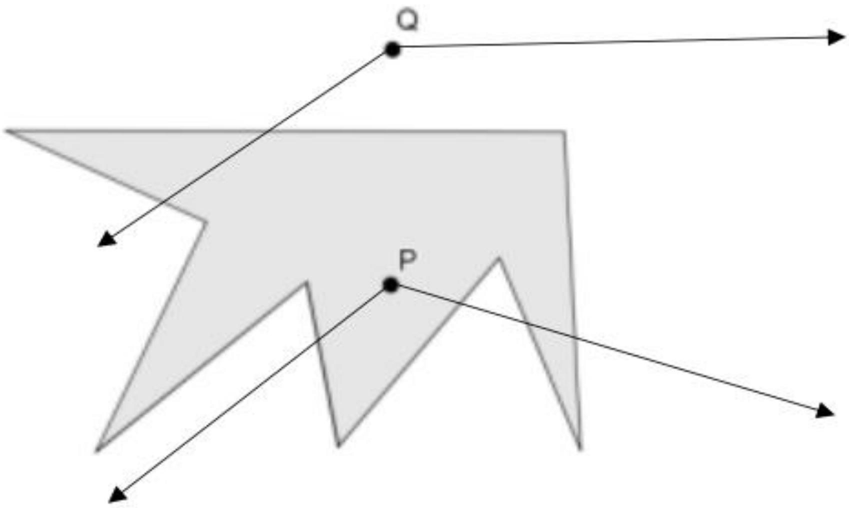
poligonal. (...) A união do interior com a fronteira é chamada de **polígono** ou região poligonal simples fechada."

E ainda, de acordo com o autor,

> Um conjunto de pontos do plano é **interior** se, e só se, para qualquer ponto da região, toda semi-reta[16] de origem no ponto que não passa em vértice da poligonal tem um número ímpar de pontos em comum com a poligonal. O conjunto de pontos não pertencentes ao interior ou à poligonal é o **exterior**, cujas semi-retas possuem número par em comum com a poligonal. (...) À poligonal chamamos de fronteira (BARBOSA, 1993, p. 2).

Na figura 5, P é ponto interior, pois toda semirreta com origem nesse ponto tem um número ímpar de pontos em comum com a poligonal. Já o ponto Q é exterior, pois toda semirreta com origem em Q possui um número par de pontos em comum com a poligonal.

Figura 5 - Linha poligonal simples e fechada



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com Barbosa (1993, p.3): "Um conjunto de polígonos é uma pavimentação do plano se, e só se, o conjunto de polígonos cobre sem cruzamentos o plano."

Para esse autor, a palavra *cobre* significa que todo ponto do plano pertence a pelo menos um polígono. Já o termo *sem cruzamento* significa que toda intersecção de dois polígonos tem área nula.

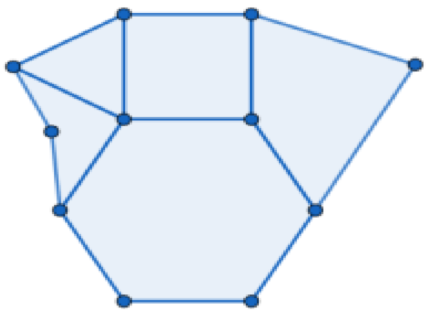
Doravante, no desenvolvimento dos textos referentes ao tema deste capítulo, usaremos os termos ladrilhamento ou pavimentação ou mosaico ou, ainda, tesselação como significado de recobrimento do plano euclidiano.

[16] Grafia mantida do original.

3.1 Pavimentação Lado-Lado

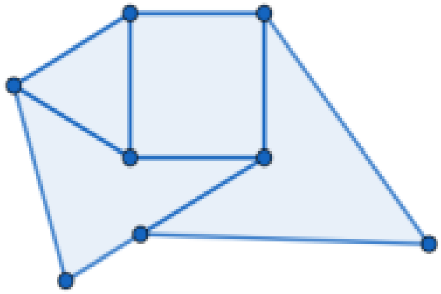
Segundo Barbosa (1993, p. 4), “Uma pavimentação é lado-lado se, e somente se, toda aresta é lado comum a dois polígonos. Resulta, portanto, que todo nó[17] na fronteira de um polígono da pavimentação é vértice do polígono.” A figura 6 ilustra o conceito desse tipo de pavimentação.

Figura 6 - Recorte de pavimentação lado-lado



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7 - Recorte de pavimentação não lado-lado



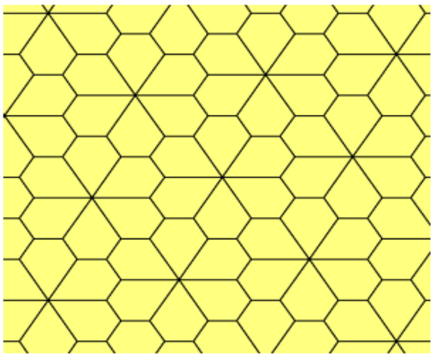
Fonte: Elaborada pelo autor

Vale ressaltar que todas as pavimentações a serem apresentadas nesta seção são do tipo lado-lado.

3.1.1 Pavimentações Monoédricas

Uma pavimentação lado-lado é denominada monoédrica quando é formado por um único tipo de polígono, não necessariamente regular, como ilustrado na figura 8 a seguir.

Figura 8 - Pavimentação monoédrica



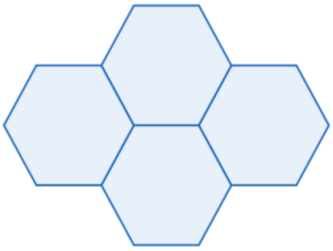
Fonte: Smigly (2017). Acesso em 14 set. 2023.

[17] Os vértices dos polígonos são os nós da pavimentação. Todavia, a fronteira de um polígono pode ter mais nós que vértices, isso acontece nas pavimentações que não são lado-lado (figura 7).

3.1.1.1 Pavimentações Regulares

Uma pavimentação é regular quando é formada por polígonos regulares de um único tipo e congruentes entre si. Esse tipo de pavimentação está ilustrado na figura 9.

Figura 9 - Pavimentação regular



Fonte: Elaborada pelo autor

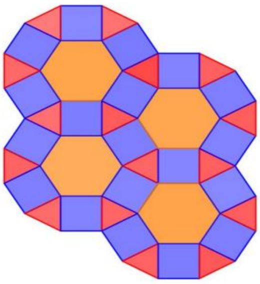
Note que as pavimentações regulares são um subtipo de pavimentações monoédricas, pois há, em sua formação, apenas um tipo de polígono.

A notação de uma configuração, como apresentada nesta subseção, é utilizada para ladrilhamentos por polígonos regulares, em que os números se referem à quantidade de lados de cada polígono e a ordem se refere à configuração em torno de um ponto, como ilustramos na figura 11.

3.1.2 Pavimentações Semirregulares

A pavimentação semirregular é um tipo de pavimentação que tem em sua formação polígonos regulares de dois ou mais tipos diferentes e, além disso, as configurações em torno de cada nó se repetem em toda a extensão do plano. Como exemplo, apresentamos a figura 10:

Figura 10 - Pavimentação semirregular

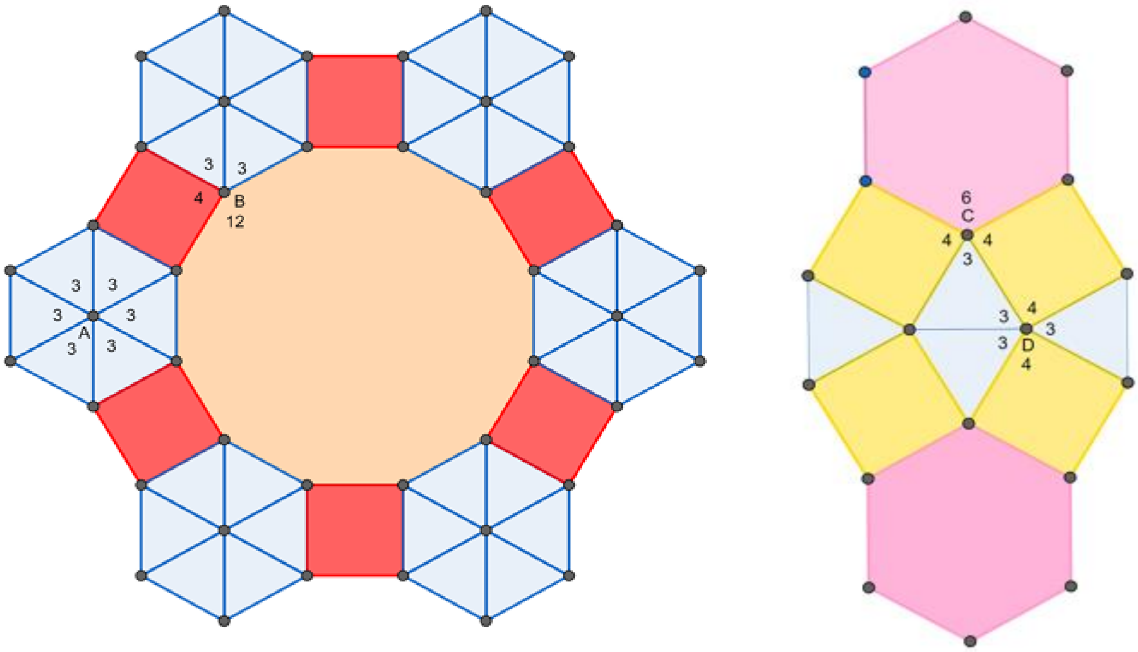


Fonte: Elaborada pelo autor

3.1.3 Pavimentações Demirregulares

A pavimentação demirregular é formada por polígonos regulares de mais de um tipo e mais de uma configuração na sua constituição. Apresentamos na figura 11 dois exemplos desse tipo de pavimentação.

Figura 11 - Pavimentação demirregular



$(3,3,3,3,3,3;\ 3,3,4,12)$ $(3,4,6,4;\ 3,3,4,3,4)$

Fonte: Elaborada pelo autor

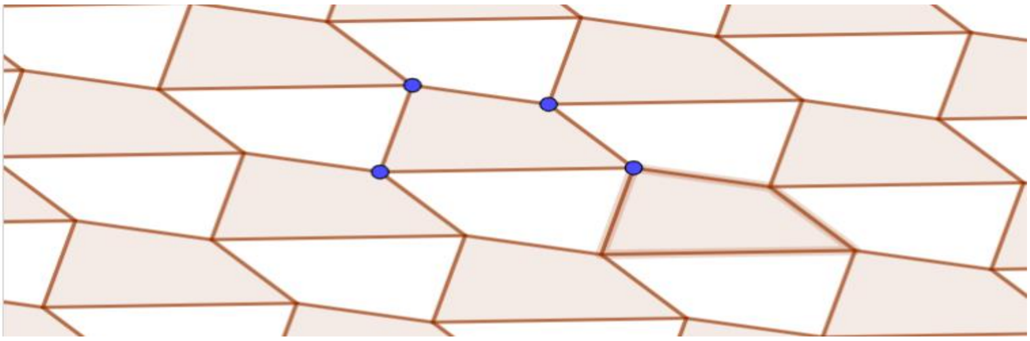
O primeiro ladrilhamento, ilustrado na figura acima, foi gerado pela combinação das configurações (3, 3, 3, 3, 3, 3) e (3, 3, 4, 12) ao redor, respectivamente, dos pontos A e B. Já o segundo, deu-se através da combinação das configurações (3, 4, 6, 4) e (3, 3, 4, 3, 4) ao redor, respectivamente, dos pontos C e D.

<u>Nota</u>: quando a pavimentação do plano ocorre através da combinação de duas configurações, como nos dois exemplos precedentes, diz-se que tal pavimentação é do tipo 2-uniforme. Neste caso, a notação separa as duas configurações por um símbolo de ponto e vírgula.

3.1.4 Pavimentações Formadas por Polígonos Irregulares

As pavimentações, além das já mencionadas anteriormente, podem ser formadas por polígonos irregulares. Ilustramos a seguir, figura 12, uma pavimentação desse tipo[18].

Figura 12 - Pavimentação formada por polígonos irregulares



Fonte: *https://www.geogebra.org/m/hex6m7y6*. Acesso em 01 jan. 2024.

Os quadriláteros que compõem essa pavimentação não são regulares, mas são congruentes entre si, isto é, são réplicas, por exemplo, do quadrilátero com vértices em destaques[19].

3.1.4.1 Mosaicos de Penrose: Uma tesselação não periódica

O físico e matemático britânico Roger Penrose desenvolveu um trabalho com mosaicos não periódicos utilizando, para isso, o dart (dardo) e a kite (pipa), que são dois polígonos obtidos de cortes em um losango.

Segundo Santos (2006),

> (...) Roger Penrose, aficcionado[20] por recreações matemáticas, percebeu que é possível pavimentar uma superfície plana de maneira não periódica, utilizando apenas dois quadriláteros irregulares denominados kite e dart. Esses quadriláteros podem ser construídos a partir do pentágono regular (SANTOS, 2006, p. 49).

Em sua pesquisa, Leitão (2015, p. 39) acrescenta: “Admirador das obras de Escher, Penrose dedicou-se ao estudo das pavimentações, investigando a existência, ou não, de ladrilhos que pavimentassem o plano, sem gerar repetição de padrão”.

---

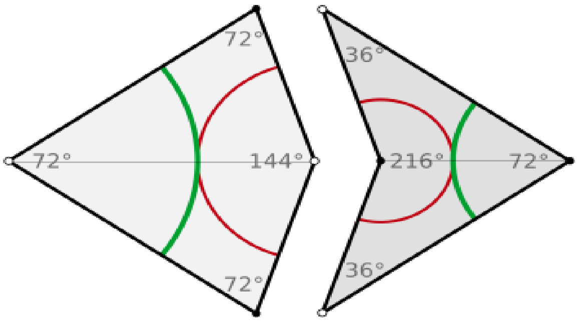
[18] Para se ter uma visão mais ampla sobre esse tipo de pavimentação, sugerimos a leitura de Barbosa (1993, p. 64-81)

[19] Para a construção da pavimentação em questão, os vértices, em destaque no quadrilátero, foram movimentados em relação à figura original.

[20] Grafia mantida do original.

Um dos tipos de losango utilizado por Penrose, como na figura 13, possui ângulos internos medindo 72° e 108°.

Figura 13 - Dardo e pipa de Penrose



Fonte:
https://www.ime.usp.br/~dsmigly/ensino/palestras/Tessela%C3%A7%C3%B5es%20pentagonais%20e%20mosaicos%20de%20Penrose.pdf. Acesso em 01 jan. 2024.

A pipa e o dardo, juntos, formam o famoso e interessante mosaico de Penrose. Todavia, para construí-lo, é preciso seguir um passo a passo como descrito no parágrafo a seguir.

"Uma regra para formar o mosaico de Penrose consiste em colocar pontos de duas cores diferentes nos vértices dos dardos e das pipas com a convenção que somente podem coincidir vértices da mesma cor. O matemático John Horton Conway propôs como estratégia para a construção do mosaico de Penrose pintar arcos circulares de cores diferentes nas peças; a união dos lados somente é permitida se resulta na união de arcos da mesma cor."[21]

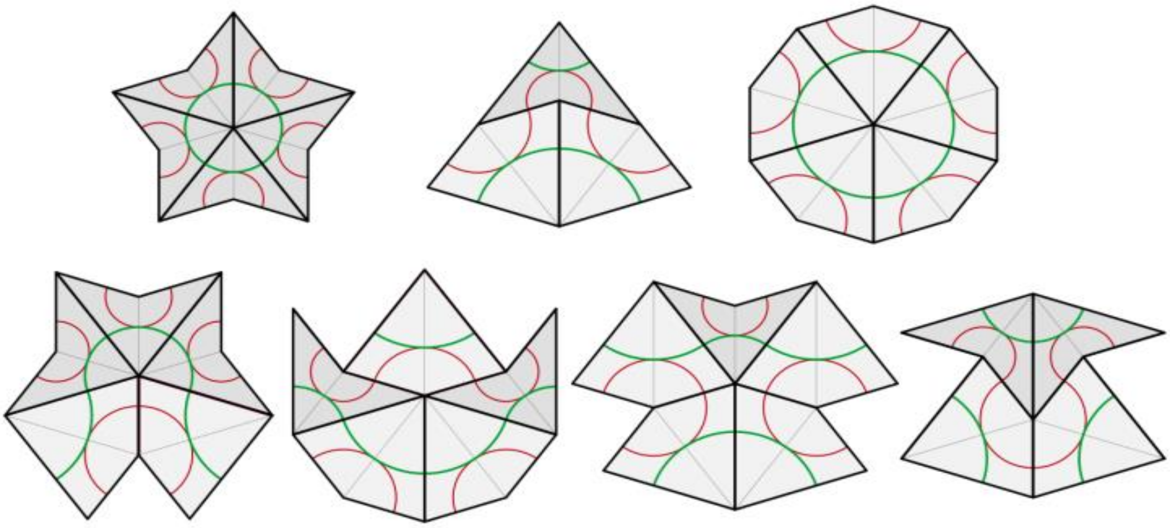
Figura 14 - Pipa e Dardo de Penrose

Fonte: https://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/06APRESENTACAO.pdf. Acesso em 01 jan. 2024.

Há, de acordo com as regras acima mencionadas, sete configurações possíveis para o ajuste dos polígonos dardo e pipa de Penrose ao redor de um vértice, como ilustrado na figura 15.

[21] Tesselações pentagonais e mosaicos de Penrose, SMIGLY (2017). Acesso em 15 set. 2023.

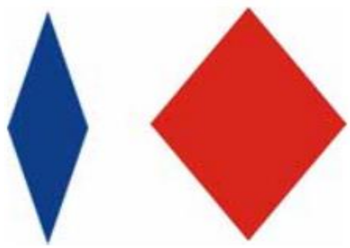
Figura 15 - Sete padrões dos polígonos dardo e pipa de Penrose.



Fonte:https://www.ime.usp.br/~dsmigly/ensino/palestras/Tessela%C3%A7%C3%B5es%20pentagonais%20e%20mosaicos%20de%20Penrose.pdf . Acesso em 01 jan. 2024.

Em relação ao losango utilizado por Penrose em suas tesselações, vale ressaltar que, segundo Mello (2010, p. 67-68), essas tesselações são obtidas a partir de dois tipos de losango, um estreito (azul) e outro largo (vermelho), cujos ângulos internos em um medem, respectivamente, 36° e 144° e, no outro, 108° e 72°.

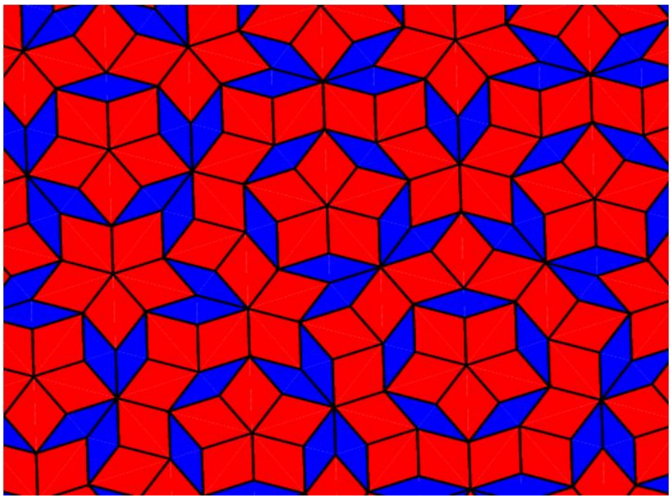
Figura 16 - Os dois polígonos de Penrose



Fonte: Mello (2010, p. 68)

Com tais polígonos (tesselas) é obtido, por exemplo, o mosaico representado na figura 17 a seguir.

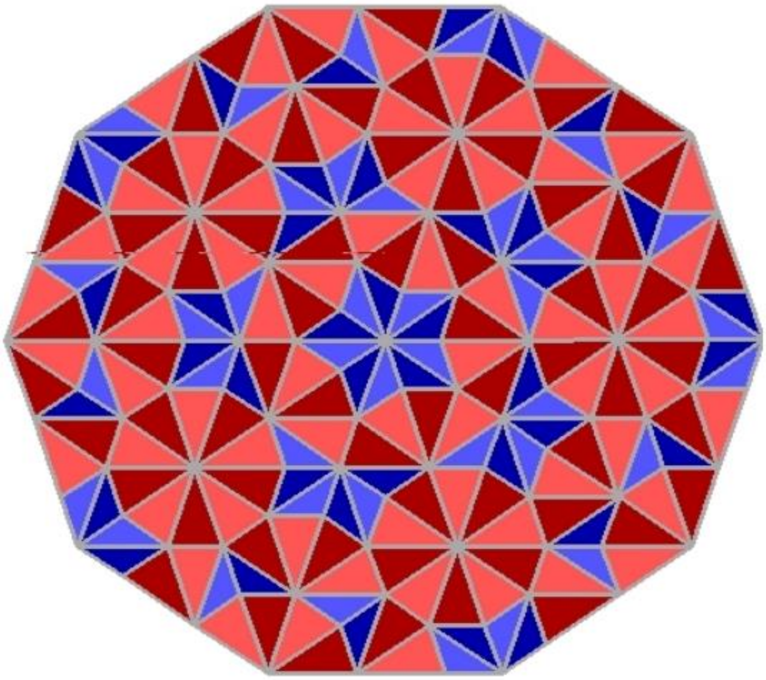
Figura 17 - Pavimentação de Penrose



Fonte: Mello (2010, p. 68)

Outros exemplos de mosaicos de Penrose, desta vez, com dardos e pipas.

Figura 18 - Pavimentação de Penrose com dardos e pipas



Fonte: Smigly (2017). Acesso em 15 set. 2023.

Figura 19 - Pavimentação de Penrose com dardos e pipas multicolorido

Fonte: https://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/06APRESENTACAO.pdf . Acesso em 01 jan. 2024.

Nota: as tesselações que não possuem nenhum padrão que se repete periodicamente são chamadas de aperiódicas ou não periódicas[22].

Os mosaicos de Penrose são exemplos de tesselações não periódicas, isto é, não existe repetição regular do padrão por translação.

3.2 Pavimentação de Escher

O famoso artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) explorou, com muita habilidade e talento, a Matemática em várias de suas obras. Ele aplicou os conceitos da geometria, em especial o de simetria, em ladrilhamentos do plano. Uma das características mais marcantes nos trabalhos de Escher é a divisão regular do plano com a presença de figuras concretas presentes na natureza, como peixes, répteis, pássaros, pessoas etc.

Segundo Barbosa (1993),

> O trabalho de Escher está intimamente ligado à matemática ou a matemáticos. Assim, ele próprio diz: "Eu freqüentemente[23] sinto ter mais em comum com os matemáticos do que com meus colegas artistas", ou "Minha afinidade com os fenômenos naturais é provavelmente decorrente do meio no qual eu cresci: meu pai e três irmãos tiveram treinamento em ciências exatas ou engenharia, e eu sempre tive enorme respeito por essas coisas" (BARBOSA, 1993, p. 112).

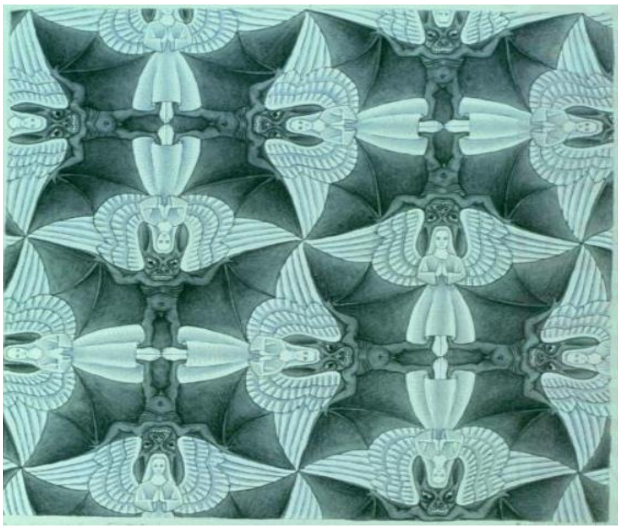
[22] Fonte da informação**:** https://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/06APRESENTACAO.pdf . Acesso em 01 jan. 2024.

[23] Grafia mantida do original.

A seguir, a título de ilustração, destacamos alguns padrões geométricos e tipos de simetrias utilizados por Escher.

Simetria por reflexão

Figura 20 - “Devils & Angels” de Escher



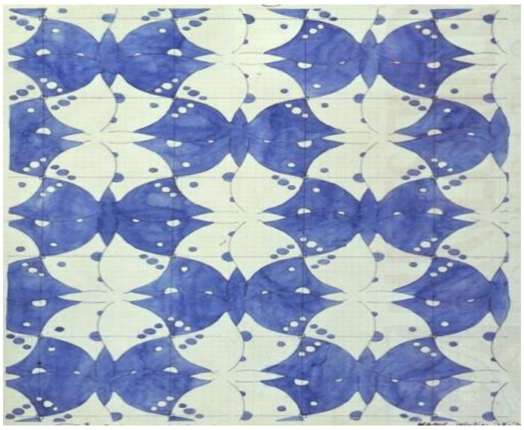
Fonte: *https://mcescher.com/gallery/* . Acesso em 27 dez 2023.

Simetria por translação

Figura 21 - Bird Fish (nº 22) e Day and night (nº 18)

Fonte: *https://arteeartistas.com.br/biografia-de-maurits-cornelis-escher/* . Acesso em Acesso em 27 dez 2023.

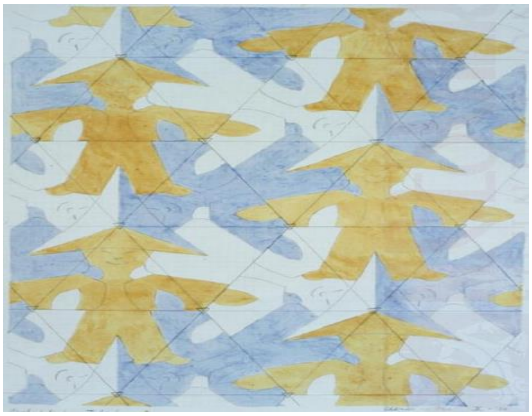
Figura 22 - M. C. Escher (nº 12)



Fonte: https://mcescher.com/gallery/ . Acesso em 27 dez 2023.

Rotação

Figura 23 - O menino chinês e o Sistema transicional (nº 42)



Fonte: https://mcescher.com/gallery/. Acesso em 27 dez 2023.

Rotação seguida de translação

Figura 24 - Reptiles – M.C. Escher. 1943

Fonte: https://mcescher.com/gallery/ . Acesso em 27 dez 2023.

Encerramos esta seção apresentando uma conexão entre os trabalhos de Escher e Polya. Mesmo não sendo o foco principal desta pesquisa, por oportuno, jogamos um feixe de luz nessa conexão. Afinal, acreditamos, Matemática e Arte caminham juntas.

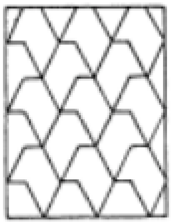
Segundo Schattschneider (1987), em seu artigo: The Pólya-Escher Connection[24],

> Polya, ao publicar fotos (17 delas) em 1924, deu instruções visuais a Escher, fornecendo-lhe as chaves geométricas para explorar e criar complexos e surpreendentes ladrilhos planos por criaturas fantasiosas. O estímulo de Polya a Escher completou o ciclo, à medida que os desenhos periódicos de Escher fornecem estímulo e desafio hoje tanto para estudantes quanto para matemáticos (SCHATTSCHNEIDER, 1987, p. 298, tradução nossa).

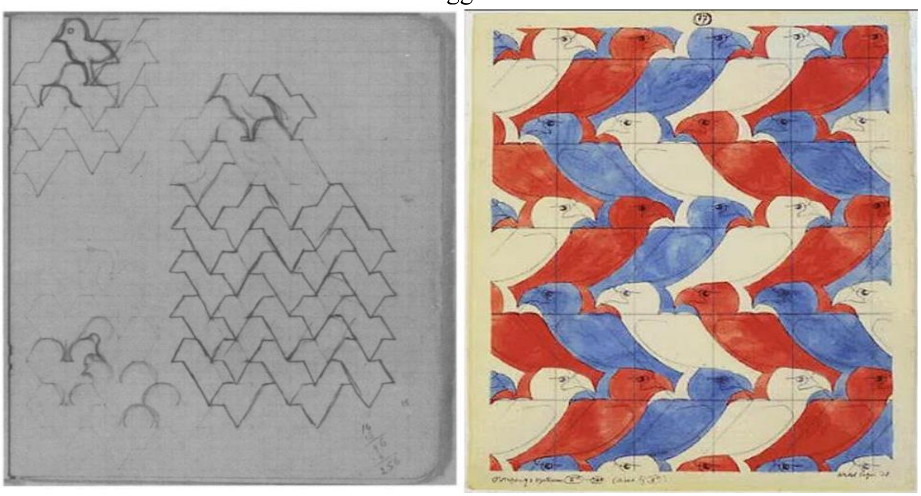
No mesmo artigo, Schattschneider (1987, p. 296) afirma que, “Ao observar os ladrilhos ilustrativos de Polya, não é difícil imaginar vários deles se transformando em ladrilhos de Escher de pássaros, répteis e peixes. Um desses ladrilhos foi definitivamente a inspiração para um desenho de águias de Escher.”[25]

A autora se refere às ilustrações representadas na figura 25.

Figura 25 - A conexão entre Polya e Escher



D1gg



Fonte: Organizada pelo autor[26]

De acordo com a autora,

---

[24] Disponível em: https://www.jstor.org/stable/2690411. Acesso em 23 mar 2024.
[25] Tradução nossa.
[26] Com informações contidas em: https://www.jstor.org/stable/2690411. Acesso em 23 mar 2024.

> O ladrilho de Polya rotulado D1gg (...) foi copiado por Escher, depois alterado para um ladrilho por blocos de dois dos ladrilhos de Polya fundidos em um único ladrilho. Então, gradualmente, os blocos foram transformados em águias. A [segunda ilustração da figura 25] mostra uma fase inicial desta metamorfose. O desenho final, número 17 dos desenhos periódicos coloridos acabados de Escher (datado do inverno de 1938), é perfeitamente colorido em vermelho, branco e azul (SCHATTSCHNEIDER, 1987, p. 296, tradução nossa).[27]

3.3 Estudo das Pavimentações Regulares

Vimos na seção anterior alguns tipos de pavimentação do plano. Nesta seção e na seção seguinte daremos ênfase aos ladrilhamentos regulares e semirregulares que são, juntamente com a metodologia centrada na resolução de problemas, o foco do presente estudo.

Iniciamos esta seção com a seguinte motivação:

"Um problema muito interessante sobre mosaicos é o de pavimentar o plano com polígonos regulares congruentes. Seja n o número de lados de cada polígono. Então cada um dos ângulos internos de cada polígono mede $(n-2)180°/n$. Impondo-se que um vértice de um polígono não possa ficar no interior de um lado de outro polígono, mostre que o número de polígonos em cada vértice é dado por $2+4/(n-2)$ e, portanto, deve-se ter $n=3,4$ ou 6. Construa mosaicos ilustrativos."[28]

A motivação acima tem três afirmações a serem verificadas:

Afirmação 1: Seja n o número de lados de um polígono regular. Então, o ângulo interno do polígono mede

$$(n-2)180°/n. \tag{A}$$

Afirmação 2: Em um ladrilhamento regular lado-lado, o número de polígonos em cada vértice é dado por

$$2+4/(n-2). \tag{B}$$

Afirmação 3: Triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares ladrilham o plano.

---

[27] Na figura, a imagem em preto e branco (nº 17) do artigo original foi substituída pela imagem colorida, disponível em: https://arthive.com/escher/works/200105~Eagle_17. Acesso em 16 fev 2024.

[28] Extraído e adaptado de EVES (2004, p.374). Esse exercício foi proposto após um comentário do autor (p.358) sobre o interesse de J. Kepler (1571-1630) pelo problema da pavimentação de um plano com polígonos regulares.

Observação: o texto da motivação acima não afirma que os polígonos mencionados na afirmação 3 são os únicos que compõem um ladrilhamento regular. No entanto, faremos essa demonstração na subseção 3.3.3.

O estudo das 3 afirmações acima será abordado nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3, respectivamente.

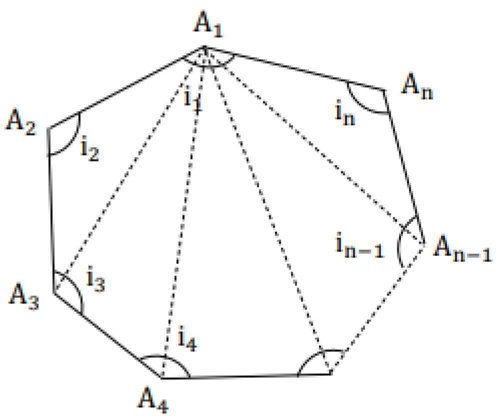
3.3.1 Medida do Ângulo interno de um Polígono Regular

Iniciaremos com a verificação da Afirmação 1. Para tal, faremos primeiro uma dedução da equação (A) e, em seguida, a demonstração da propriedade utilizando o Princípio da Indução Finita.

Dedução da expressão apresentada na Afirmação 1

Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ os vértices de um polígono convexo de n lados e i_1, i_2, $i_3, \ldots, i_n$, respectivamente, os ângulos internos correspondentes a esses vértices.

Figura 26 - Polígono convexo de n lados



Fonte: Elaborada pelo autor[29]

De um vértice qualquer traçamos todas as diagonais que têm esse vértice como extremidade. Note que, com isso, o polígono fica dividido em $(n-2)$ triângulos. Por um lado, a soma dos ângulos internos do polígono é

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n.$$

Por outro lado, S_i é igual à soma dos ângulos internos dos $(n-2)$ triângulos, então

[29] Inspirada em DOLCE, O.; POMPEO, J.N. (2005, p. 138).

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = (n-2)180°.$$

Como o polígono é regular, então $i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_n = i$. Assim, temos da equação acima que

$$n.i = (n-2)180°.$$

Portanto,

$$i = \frac{(n-2)180°}{n},$$

conforme a equação (A) na Afirmação 1. Para validar essa dedução, recorremos ao Princípio da Indução Finita.

<u>Princípio da Indução Finita</u>: Considere n_0 um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \geq n_0$, seja dada uma proposição $P(n)$ e que se pode verificar as seguintes propriedades:

i) $P(n_0)$ é válida;

ii) Se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira, para todo $n \geq n_0$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq n_0$.

<u>Demonstração da propriedade referente à Afirmação 1</u>

Considere a seguinte proposição:

$P(n)$: A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é

$$i = \frac{(n-2)180°}{n}.$$

i) Para $n_0 = 3$, temos

$$i = 60° = \frac{(3-2)180°}{3}$$

Logo, a propriedade é válida para $n = 3$.

ii) Suponhamos, agora, que a igualdade seja verdadeira para $n \geq 3$, isto é,

$$i = \frac{(n-2)180°}{n},$$

que é equivalente a,

$$i.n = (n-2)180°.$$

Ao acrescentar mais um vértice ao polígono, passamos a ter um novo polígono com $n+1$ lados e, quando traçamos de um vértice qualquer todas as diagonais que incidem nesse vértice, obtemos, $[(n-2)+1]$ triângulos e um novo ângulo interno. Logo,

$$i.n + i = [(n-2)+1]180°.$$

Assim,

$$i(n+1) = (n-1)180°.$$

De onde obtemos,

$$i = \frac{(n-1)180°}{n+1},$$

o que mostra que a igualdade também vale para $n+1$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, concluímos que a igualdade é verdadeira para todo natural $n \geq 3$ e concluímos assim a verificação da Afirmação 1.

3.3.2 Polígonos Regulares e Congruentes em torno de um vértice

Façamos agora a verificação da afirmação 2. Vamos supor, inicialmente, que k polígonos regulares e congruentes entre si se ajustam em torno de um vértice. Assim teremos

$$\mathrm{k}\,.\ \mathrm{i} = 360°, \quad \text{ou seja,} \quad \mathrm{k} = \frac{360°}{\mathrm{i}}$$

Substituindo a fórmula do ângulo interno resultante da Afirmação 1 na equação acima, temos

$$\begin{aligned} k &= \frac{360°}{\frac{(n-2).180°}{n}} \\ &= 360°.\frac{n}{(n-2).180°} \\ &= \frac{2n}{n-2} \\ &= 2 + \frac{4}{(n-2)}. \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

Concluímos, portanto a Afirmação 2, com a obtenção da equação (B).

3.3.3 Ladrilhamento por Polígonos Regulares

Agora, provaremos que os únicos polígonos regulares congruentes que se ajustam bem em torno de cada vértice são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular, ou seja, provaremos a Afirmação 3.

Note que não é possível ajustar em torno de um vértice apenas um ou dois polígonos, ou seja, $k \geq 3$. Logo, da equação (C) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{2n}{n-2} &\geq 3 \\ 2n &\geq 3n-6 \\ n &\leq 6. \end{aligned}$$

Como o número de lados do polígono é inteiro e $n \geq 3$, os possíveis valores de n são: 6, 5, 4 e 3. Analisemos cada um dos casos a seguir.

<u>1º caso</u>: $n = 6$: ladrilhamento com hexágonos regulares congruentes.

$$k = \frac{2.6}{6-2} = \frac{12}{4} = 3$$

Isso mostra que é possível ajustar 3 hexágonos regulares em volta de um vértice.

<u>2º caso</u>: $n = 5$: ladrilhamento com pentágonos regulares congruentes.

$$k = \frac{2.5}{5-2} = \frac{10}{3} = 3{,}333\ldots$$

Como k é um número inteiro positivo, então não é possível ajustar em volta do mesmo vértice pentágonos regulares. De fato, sabemos que cada ângulo interno do pentágono regular mede $108°$, assim ao ajustarmos três desses polígonos em volta de um vértice, teremos um ângulo com medida de abertura igual a $324°$, isto é, teremos um espaço vazio cujo ângulo no vértice de incidência é igual a $36° = 360° - 324°$. Quatro pentágonos geram uma sobreposição de $72°$. Em ambos os casos não se tem um ladrilhamento.

<u>3º caso</u>: $n = 4$: ladrilhamento com quadrados congruentes.

$$k = \frac{2.4}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$$

Assim, é possível ajustar 4 quadrados em volta de um vértice.

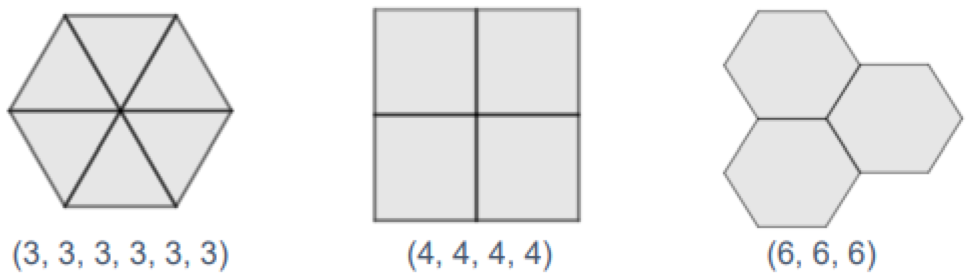
<u>4º caso</u>: $n = 3$: ladrilhamento com triângulos equiláteros congruentes.

$$k = \frac{2.3}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$$

Logo, é possível ajustar 6 triângulos equiláteros em volta de um vértice.

Portanto, usando apenas um tipo de polígono regular, os únicos que pavimentam o plano lado a lado são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular como ilustrados na figura 27.

Figura 27 - Ladrilhamentos regulares



Fonte: Elaborada pelo autor

Essas descobertas, apresentadas nesta seção, remontam à escola pitagórica, como descrito por Barbosa (1993) na citação a seguir:

> Os pitagóricos (séc. VI a.C.), da escola (ou comunidade) fundada por Pitágoras em Cretona, como sabiam o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo e dos ângulos de um polígono regular, tiveram conhecimento de que a pavimentação do plano só era possível com os três únicos polígonos regulares: o quadrado, o triângulo equilátero e o hexágono regular. Mas tudo indica que o primeiro trabalho do ponto de vista matemático publicado foi o do famoso astrônomo germânico Johannes Kepler (1571-1630), no seu livro *Harmonices Mundi,* no ano de 1619 (BARBOSA, 1993, p.24).

3.4 Estudo das Pavimentações Semirregulares

O objetivo desta seção é investigar o ladrilhamento do plano por polígonos regulares com lados de mesma medida, porém, com mais de um tipo. Um ponto de partida para o estudo do ladrilhamento do plano é o estudo da configuração em torno de um ponto. Esses estudos podem parecer equivalentes, mas não são. Existem configurações que são possíveis de se obter em torno de um ponto, porém não podem ser estendidas para todo o plano.

Vamos analisar inicialmente os tipos de configurações sem cruzamentos que existem ao redor de um ponto do plano com mais de um tipo de polígono regular em 4 situações distintas, da subseção 3.4.1 a 3.4.4. Em seguida, iremos verificar quais das configurações obtidas, de fato, pavimentam o plano (subseção 3.4.5).

3.4.1 Três Polígonos Regulares ao Redor de um Vértice

Sejam x, y e z os números de lados dos polígonos regulares ajustados ao redor de um vértice. Assim, a partir de manipulações algébricas na expressão da soma dos ângulos internos ao redor do vértice, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-2)180°}{x}+\frac{(y-2)180°}{y}+\frac{(z-2)180°}{z} &= 360° \\
\left[\frac{(x-2)}{x}+\frac{(y-2)}{y}+\frac{(z-2)}{z}\right]180° &= 360° \\
\frac{(x-2)}{x}+\frac{(y-2)}{y}+\frac{(z-2)}{z} &= 2 \\
\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z} &= 1 \\
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{1}{2} \qquad \text{(I)}
\end{aligned}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x \leq y \leq z$. Então, obtém-se a partir da equação (I) a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x} &\geq \frac{1}{2} \\
\frac{3}{x} &\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Isto é, $x \leq 6$, ou seja, o maior número de lados de um polígono nesta configuração é 6.

Por outro lado, sabemos que $x \geq 3$, pois o menor valor de x se verifica para o triângulo equilátero. Logo, $3 \leq x \leq 6$.

Reescrevendo a equação (I),

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$$

obtemos:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{x-2}{2x}. \qquad \text{(II)}$$

Novamente, buscando intervalos para limitar o número de lados dos polígonos, e utilizando a hipótese de $y \leq z$, obtemos a partir de (II) que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}+\frac{1}{y} &\geq \frac{x-2}{2x} \\
\frac{2}{y} &\geq \frac{x-2}{2x},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$y \leq \frac{4x}{x-2} \tag{III}$$

Agora, a partir da inequação (III), analisemos todos os casos possíveis para $3 \leq x \leq 6$.

<u>1º caso: $x = 3$</u> (um dos três polígonos é um triângulo equilátero)

Da equação (II) obtemos

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \tag{IV}$$

que implica em $y > 6$, já que $z > 0$. Por outro lado, da equação (III), temos $y \leq 12$. Então, $7 \leq y \leq 12$. Além disso, da equação (IV) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} &= \frac{y-6}{6y} \end{aligned} \tag{V}$$

Substituindo os possíveis valores de y na equação (V), temos:

- Se $y = 7$, então $z = 42$,
- Se $y = 8$, então $z = 24$,
- Se $y = 9$, então $z = 18$,
- Se $y = 10$, então $z = 15$,
- Se $y = 11$, então $z = 13{,}2$ (não serve, pois z é um número inteiro),
- Se $y = 12$, então $z = 12$.

Assim, apresentamos na tabela 1 um resumo do 1º caso desta subseção, ou seja, as 5 configurações possíveis em torno de um vértice utilizando 3 polígonos regulares, um deles sendo um triângulo equilátero.

Tabela 1 - Três polígonos regulares ao redor de um vértice – 1º caso

x	y	z
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12

Fonte: Elaborada pelo autor

<u>2º caso: $x = 4$</u> (o menor número de lados dos três polígonos é 4)

Da equação (II) e inequação (III), temos $5 \leq y \leq 8$. De maneira análoga à etapa anterior e lembrando que z é um número inteiro, construímos a tabela 2:

Tabela 2 - Três polígonos regulares ao redor de um vértice – 2º caso

x	y	z
4	5	20
4	6	12
4	8	8

Fonte: Elaborada pelo autor

<u>3º caso: $x = 5$</u> (o menor número de lados dos três polígonos é 5)

Da equação (II), temos

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{3y - 10}{10y} \qquad \text{(VI)}$$

Note que (VI) é satisfeita para $y \geq 4$. Mas, por hipótese, $y \geq x$, logo $y \geq 5$. Além disso, da inequação (III), tem-se $y \leq 6$. Desse modo, obtemos a tabela 3:

Tabela 3 - Três polígonos regulares ao redor de um vértice – 3º caso

x	y	z
5	5	10

Fonte: Elaborada pelo autor

<u>4º caso: $x = 6$</u> (o menor número de lados dos três polígonos é 6)

Substituindo $x = 6$ na equação (II), tem-se

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}. \qquad \text{(VII)}$$

Então $y > 3$. Mas, por hipótese, $y \geq x$, logo $y \geq 6$. Pela inequação (III), $y \leq 6$. Isso nos indica que $y = 6$.

Substituindo esse valor em (VII) obtemos $z = 6$. Desse modo, temos a única configuração possível sendo (6, 6, 6), já apresentada no estudo das pavimentações regulares.

A seguir, apresentamos a tabela 4 que traz um resumo desta subseção.

Tabela 4 - Resumo das configurações da subseção 3.4.1

x	y	z
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12
4	5	20
4	6	12
4	8	8
5	5	10

Fonte: Elaborada pelo autor

3.4.2 Quatro Polígonos Regulares ao Redor de um Vértice

Sendo $x,\ y,\ z$ e v os números de lados dos polígonos, temos:

$$\frac{(x-2)180°}{x} + \frac{(y-2)180°}{y} + \frac{(z-2)180°}{z} + \frac{(v-2)180°}{v} = 360°$$

$$\frac{(x-2)}{x} + \frac{(y-2)}{y} + \frac{(z-2)}{z} + \frac{(v-2)}{v} = 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = 1 \qquad \text{(VIII)}$$

Suponhamos outra vez, sem perda de generalidade, que $x \leq y \leq z \leq v$. Obtemos a partir de (VIII) a inequação:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 1.$$

Daí, obtemos que $x \leq 4$. Como $x \geq 3$, então $x = 3$ ou $x = 4$.

Reescrevendo a equação (VIII) obtemos

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = \frac{x-1}{x}. \qquad \text{(IX)}$$

Utilizando na equação (IX) a hipótese de $y \leq z \leq v$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} &\geq \frac{x-1}{x} \\ \frac{3}{y} &\geq \frac{x-1}{x} \\ y &\leq \frac{3x}{x-1}. \end{aligned} \qquad \text{(X)}$$

- Se $x = 3$, teremos a partir da equação (X) que $y \leq 4$. Como $y \geq x$, temos duas possibilidades para y: $y = 3$ ou $y = 4$.
- Se $x = 4$, teremos a partir de (X) que $y \leq 4$. Como $y \geq x$, temos $y = 4$.

Vamos analisar esses três casos descritos acima: $x = y = 3$; $x = 3$ e $y = 4$; $x = y = 4$

1º caso: $x = y = 3$ (dois dos quatro polígonos são triângulos equiláteros)

Note que ao substituirmos esses valores em (VIII) teremos

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{v} = \frac{1}{3}. \qquad \text{(XI)}$$

O que indica que $z \geq 4$.

Utilizando na equação (XI) a hipótese de $z \leq v$, obtemos

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{3},$$

ou seja, $z \leq 6$. Assim, temos $4 \leq z \leq 6$. Substituindo os possíveis valores de z na equação (XI) obtemos

- Se $z = 4$, então $v = 12$;
- Se $z = 6$, então $v = 6$.

Do exposto no 1º caso, elaboramos a tabela 5.

Tabela 5 - Quatro polígonos regulares ao redor de um vértice – 1º caso

x	y	z	v
3	3	4	12
3	3	6	6

Fonte: Elaborada pelo autor

2º caso: $x = 3$ e $y = 4$ (os menores números de lados dos quatro polígonos são 3 e 4)

Note que ao substituirmos esses valores na equação (VIII) obtemos

$$\frac{1}{v} = \frac{5z - 12}{12z}.$$

Segue-se daí que $z \geq 3$, todavia, por hipótese, $z \geq y$, logo $z \geq 4$. Como $z \leq v$, de (VIII) concluímos que $z \leq 4$, pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{1}{v} &= \frac{5}{12} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{z} &\geq \frac{5}{12} \\ z &\leq 4\,. \end{aligned}$$

Logo, $z = 4$, e assim temos a tabela 6.

Tabela 6 - Quatro polígonos regulares ao redor de um vértice – 2º caso

x	y	z	v
3	4	4	6

Fonte: Elaborada pelo autor

3º caso: $x = y = 4$ (os menores números de lados dos quatro polígonos são 4 e 4)

Da equação (VIII) e sabendo que $z \leq v$, obtemos $z \leq 4$. De fato, isso se justifica pela inequação que se segue.

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, $z \geq y$, logo $z = 4$; e, consequentemente, $v = 4$. Assim, temos a configuração (4, 4, 4, 4). Este caso já foi apresentado no estudo das pavimentações regulares.

Apresentamos na tabela 7, a seguir, um resumo das configurações obtidas nesta subseção.

Tabela 7- Resumo das configurações da subseção 3.4.2

x	y	z	v
3	3	4	12
3	3	6	6
3	4	4	6

Fonte: Elaborada pelo autor

3.4.3 Cinco Polígonos Regulares ao Redor de um Vértice

Sejam x, y, z, v e w os números de lados, respectivamente, dos 5 polígonos regulares.

Assim, analogamente às subseções anteriores, a partir da soma dos ângulos ao redor de cada vértice:

$$\frac{(x-2)180°}{x}+\frac{(y-2)180°}{y}+\frac{(z-2)180°}{z}+\frac{(v-2)180°}{v}+\frac{(w-2)180°}{w}=360°,$$

obtemos

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w} = \frac{3}{2}. \qquad \text{(XII)}$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $x \leq y \leq z \leq v \leq w$, obtemos uma majoração para a equação (XII), dada por

$$\frac{5}{x} \geq \frac{3}{2}$$

$$x \leq \frac{10}{3},$$

ou seja, $x \leq 3$. Por outro lado, temos $x \geq 3$, logo $x = 3$. Substituindo esse valor em (XII) obtemos

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w} = \frac{7}{6}. \qquad \text{(XIII)}$$

Considerando, nessa última equação, $y \leq z \leq v \leq w$, temos

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y} \geq \frac{7}{6}.$$

Isto é, $y \leq 3$, que implica $y = 3$. Com esse valor na equação (VIII) obtemos

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w} = \frac{5}{6}. \qquad \text{(XIV)}$$

Agora, pela hipótese, $z \leq v \leq w$, temos

$$\frac{3}{z} \geq \frac{5}{6}$$

$$z \leq 3,$$

ou seja, $z = 3$. Substituindo esse valor em (XIV) obtemos

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{2}. \qquad \text{(XV)}$$

Finalmente, como $v \leq$ w, obtemos a partir da equação (XV) que $v \leq 4$. Consequentemente, $v = 3$ ou $v = 4$. Substituindo esses valores na equação (XV) obtém-se respectivamente, $w = 6$ ou $w = 4$.

Com os valores obtidos nessa situação, construímos a tabela 8.

Tabela 8 - Cinco polígonos regulares ao redor de um vértice

x	y	z	v	w
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4

Fonte: Elaborada pelo autor

3.4.4 Seis Polígonos Regulares ao Redor de um Vértice

Por fim, de modo análogo ao que vimos nas situações anteriores, a análise das possíveis combinações de seis polígonos regulares ao redor de cada vértice nos leva à equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{u} = 2.$$

Supondo, sem perda de generalidade, como fizemos nas situações anteriores, que $x \leq y \leq z \leq v \leq w \leq u$, concluímos que a única solução, inteira e positiva, dessa equação é $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, que corresponde à pavimentação regular por triângulos equiláteros.

3.4.5 Pavimentações Semirregulares do Plano

Nas subseções anteriores estudamos todas as configurações possíveis em torno de um vértice com mais de um tipo de polígono regular. Essas configurações estão resumidas na tabela 9 a seguir.

Tabela 9 - Configurações possíveis em torno de um vértice

Legenda	x	y	z	v	w
$\mathbf{P_1}$	3	7	42	–	–
$\mathbf{P_2}$	3	8	24	–	–
$\mathbf{P_3}$	3	9	18	–	–
$\mathbf{P_4}$	3	10	15	–	–
$\mathbf{P_5}$	3	12	12	–	–
$\mathbf{P_6}$	4	5	20	–	–
$\mathbf{P_7}$	4	6	12	–	–
$\mathbf{P_8}$	4	8	8	–	–
$\mathbf{P_9}$	5	5	10	–	–
$\mathbf{P_{10}}$	3	3	4	12	–
$\mathbf{P_{11}}$	3	3	6	6	–
$\mathbf{P_{12}}$	3	4	4	6	–
$\mathbf{P_{13}}$	3	3	3	3	6
$\mathbf{P_{14}}$	3	3	3	4	4

Fonte: Elaborada pelo autor

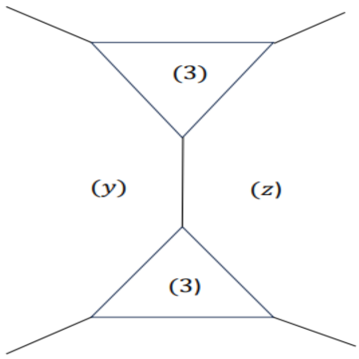
As configurações $(6,6,6)$, (4, 4, 4, 4) e $(3,3,3,3,3,3)$ não estão apresentadas na tabela acima por não apresentarem mais de um tipo de polígono regular em sua composição e já terem sido estudadas na seção anterior. A partir do quadro (tabela) acima, vamos analisar quais configurações geram pavimentações semirregulares.

Note que as configurações de $\mathbf{P_1}$ a $\mathbf{P_4}$, dadas, respectivamente, por $(3,7,42)$, $(3,8,24)$, $(3,9,18)$ e $(3,10,15)$, não pavimentam o plano, pois essas quatro configurações possuem um triângulo equilátero em cada uma delas e, como vemos, os números de lados, y e z, dos outros dois polígonos que incidem no mesmo vértice com o triângulo são diferentes, isto é, $y \neq z$.

De fato, temos, respectivamente, $7 \neq 42$, $8 \neq 24$, $9 \neq 18$ e $10 \neq 15$. Como indicado na figura 28.

Nota: o estudo das configurações presentes na tabela 9 que será apresentado a seguir é, em parte, uma síntese de Barbosa (1993, p. 29-34).

Figura 28 - Configuração (3, y, z)

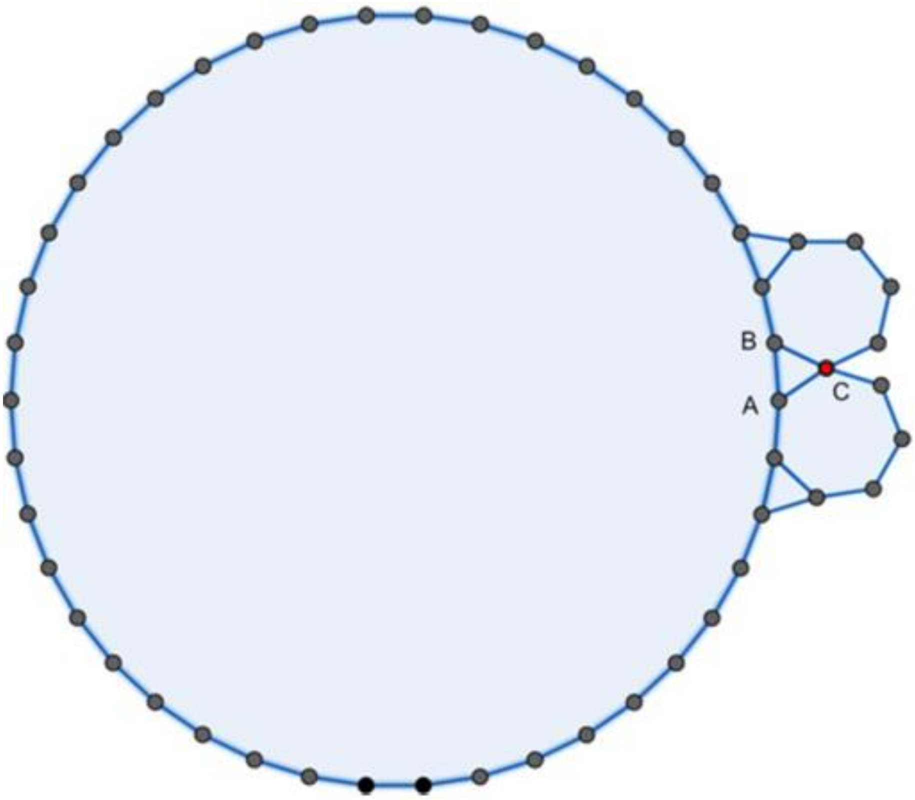


Fonte: Elaborada pelo autor

Julgamos pertinente ilustrar e analisar as configurações $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$:

i) Sejam $y = 7$, $z = 42$ e os pontos A, B e C, como na figura 29.

Figura 29 - Configuração (3, 7, 42)

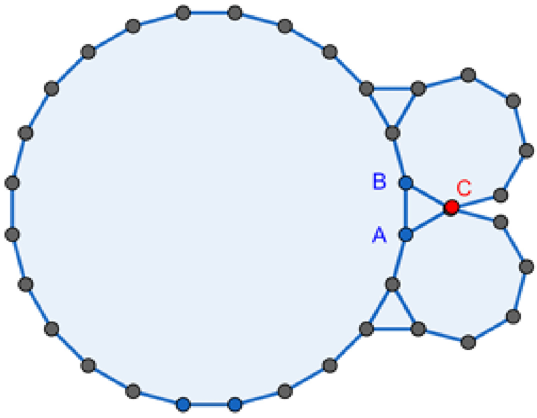


Fonte: Elaborada pelo autor

Note que no ponto A temos a configuração (3, 7, 42) no sentido horário e para que ela se repita no ponto B, devemos tê-la no sentido oposto. Todavia, não há ladrilhamento no ponto C, pois os três polígonos em questão não ficam justapostos nesse ponto.

ii) Considere $y = 8$, $z = 24$ e os pontos A, B e C, como na figura 30.

Figura 30 - Configuração (3, 8, 24)

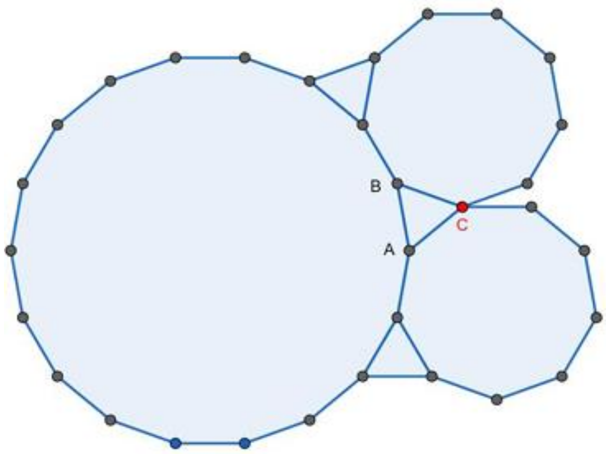


Fonte: Elaborada pelo autor

No ponto A, temos a configuração (3, 8, 24) no sentido horário e para repetirmos o padrão em B, invertemos o sentido da configuração. Note que, no entanto, os três polígonos regulares aqui em análise não ficam justapostos ao redor do vértice C.

iii) Sejam $y = 9$, $z = 18$ e os pontos A, B e C, como na figura 31.

Figura 31 - Configuração (3, 9, 18)

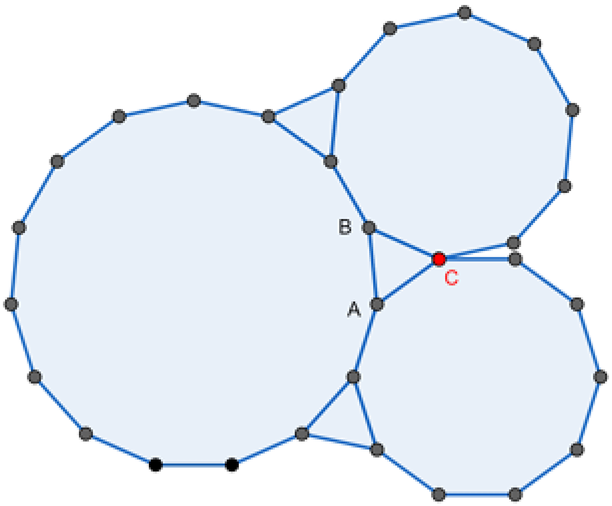


Fonte: Elaborada pelo autor

Analogamente às análises dos itens i e ii, no ponto A, temos a configuração (3, 9, 18) no sentido horário e para repetir o padrão em B, invertemos o sentido da configuração. No entanto, os três polígonos regulares analisados neste item não ficam justapostos ao redor do vértice C.

iv) Sejam $y = 10$, $z = 15$ e os pontos A, B e C, como na figura 32.

Figura 32 - Configuração (3, 10, 15)



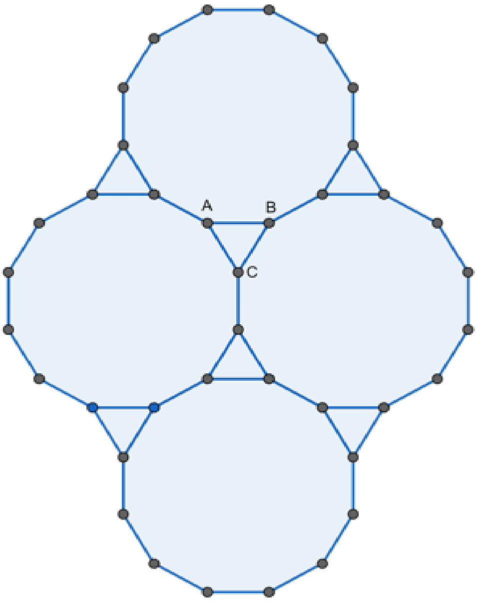
Fonte: Elaborada pelo autor

De maneira análoga aos estudos dos três itens anteriores, temos a configuração (3, 10, 15) ao redor do vértice A e, para manter o padrão ao redor de B, invertemos o sentido da configuração. Todavia, notamos que os polígonos analisados neste item não ladrilham o vértice C.

Portanto, em se tratando de três polígonos regulares, sendo um deles um triângulo, a única configuração possível que pavimenta o plano é a $\mathbf{P_5}$, dada por $(3, 12, 12)$, isto é, um triângulo e dois dodecágonos incidindo em cada nó (ou vértice). Ou seja, a configuração (3, y, z) só pavimenta o plano se $y = z = 12$.

Note que, nesse caso, a distribuição dos três polígonos regulares ao redor dos vértices A, B e C é sempre a mesma. E isso se estende para os demais vértices, como na figura 33.

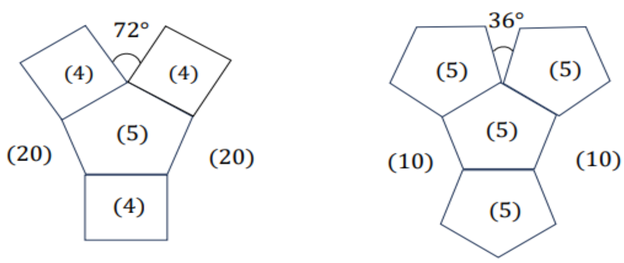
Figura 33 - Configuração (3, 12, 12)



Fonte: Elaborada pelo autor

As configurações $\mathbf{P_6}$ e $\mathbf{P_9}$, dadas, respectivamente, por $(4, 5, 20)$ e $(5, 5, 10)$, são interpretadas geometricamente como indicadas na figura 34.

Figura 34 - Configuração com pentágono que não pavimenta o plano



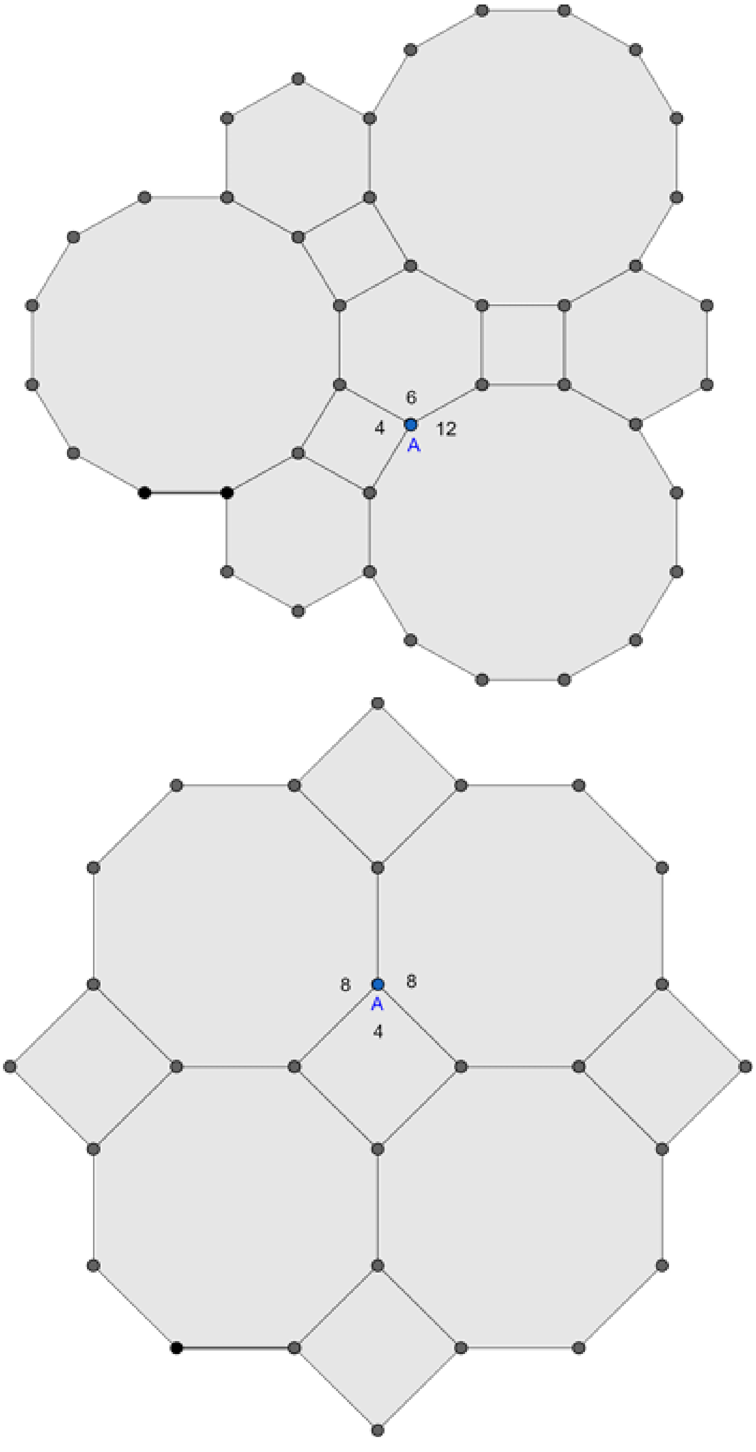
Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, essas duas configurações não pavimentam o plano, pois $72°$ e $36°$ não são, em cada uma dessas ilustrações da figura 34, os ângulos internos dos polígonos em questão.

Os casos $\mathbf{P_7}$ e $\mathbf{P_8}$, cujas configurações são, respectivamente, (4, 6, 12) e (4, 8, 8), pavimentam o plano.

De fato, a configuração ao redor do ponto A, em cada ilustração da figura 35, se repete ao redor de todos os nós, conforme os padrões expostos na referida figura.

Figura 35 - Ilustrações dos casos P_7 e P_8

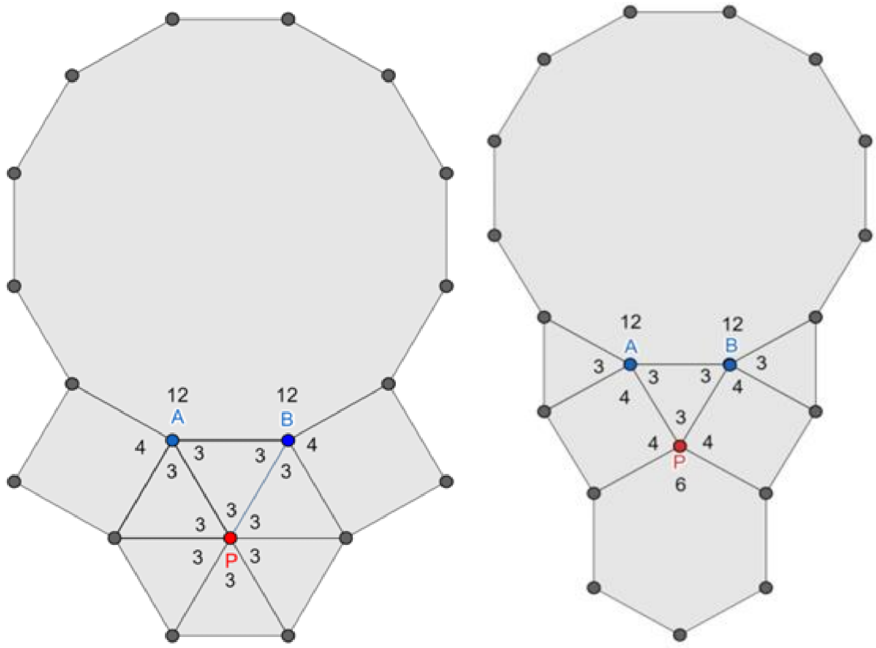


Fonte: Elaborada pelo autor

Há ainda algumas possibilidades que apresentam mais de uma configuração ao redor de um nó. Vejamos:

a) O caso $\mathbf{P_{10}}$ pode ser configurado como $(3, 3, 4, 12)$ ou $(3, 4, 3, 12)$, ambas não pavimentam o plano (fig. 36). De fato, considere um dodecágono regular com lado AB comum com um triângulo equilátero e a configuração (3, 3, 4, 12) ao redor do ponto A (1ª ilustração da figura 36). Para que o padrão seja repetido no ponto B, devemos inverter o sentido da configuração. Note que essas configurações geram um ponto P comum a três triângulos equiláteros idênticos. No ponto P não é mais possível a mesma configuração. Logo, (3, 3, 4, 12) não pavimenta o plano. De maneira análoga, notamos que a configuração (3, 4, 3, 12) também não pavimenta o plano, como apresentada na segunda ilustração da figura 36.

Figura 36 - Configurações (3, 3, 4, 12) e (3, 4, 3, 12)

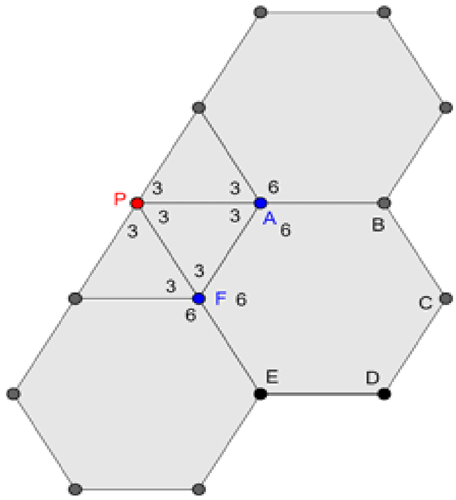


Fonte: Elaborada pelo autor

b) O caso $\mathbf{P_{11}}$ pode ser configurado como $(3, 3, 6, 6)$ ou $(3, 6, 3, 6)$ e apenas essa última pavimenta o plano.

Com efeito, considere um ponto A do plano e $(3, 3, 6, 6)$ a configuração ao redor de A. Seja ABCDEF um dos hexágonos regulares, com lado AB comum aos dois hexágonos, como ilustrado na figura 37. Analogamente ao raciocínio desenvolvido no item a, notamos que as configurações ao redor dos pontos A e F diferem da configuração ao redor de P (vértice comum de 3 triângulos equiláteros), isto é, (3, 3, 6, 6) não pavimenta o plano.

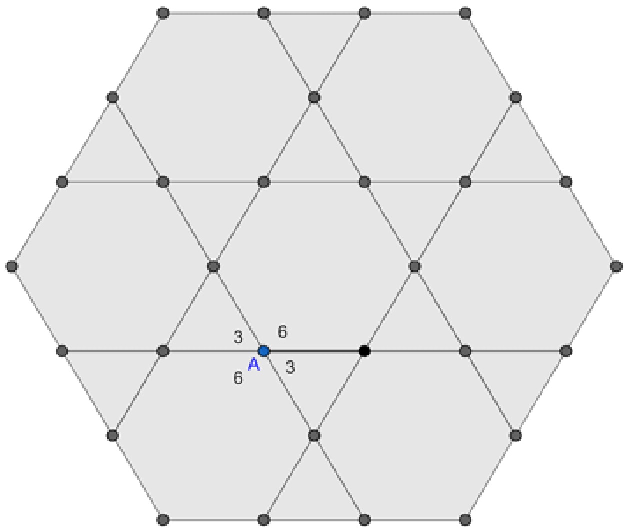
Figura 37 - Configuração (3, 3, 6, 6)



Fonte: Elaborada pelo autor

A segunda configuração deste item está ilustrada na figura a seguir.

Figura 38 - Configuração (3, 6, 3, 6)



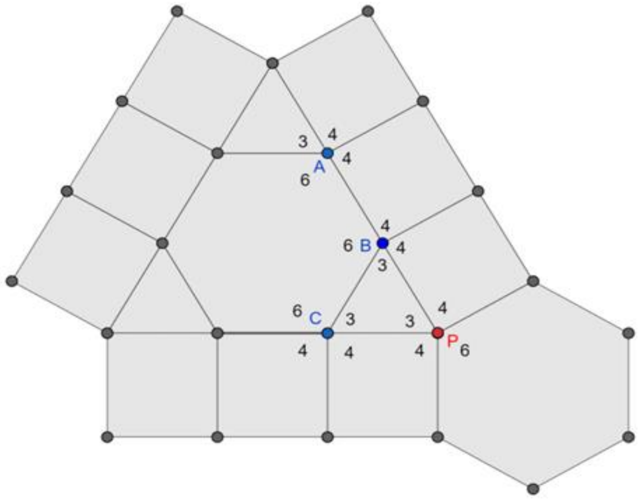
Fonte: Elaborada pelo autor

Note que a configuração ao redor do ponto A, na ilustração acima, se repete ao redor de todos os nós. Logo, a configuração (3, 6, 3, 6) pavimenta o plano conforme se verifica no padrão da figura 38.

c) O caso $\mathbf{P_{12}}$ pode ser configurado como $(3, 4, 4, 6)$ ou $(3, 4, 6, 4)$, e apenas essa última pavimenta o plano.

   De fato, considere a configuração (3, 4, 4, 6) ao redor do ponto A (fig. 39). Para que o padrão seja repetido no ponto B, devemos inverter o sentido da configuração. E, para manter esse padrão ao redor do ponto C, devemos inverter novamente o sentido da configuração. Com isso, foi gerado o ponto P, que é vértice do triângulo equilátero BCP. Todavia, a configuração ao redor de P difere das configurações ao redor dos pontos A, B e C. Assim, a configuração (3, 4, 4, 6) não pavimenta o plano.

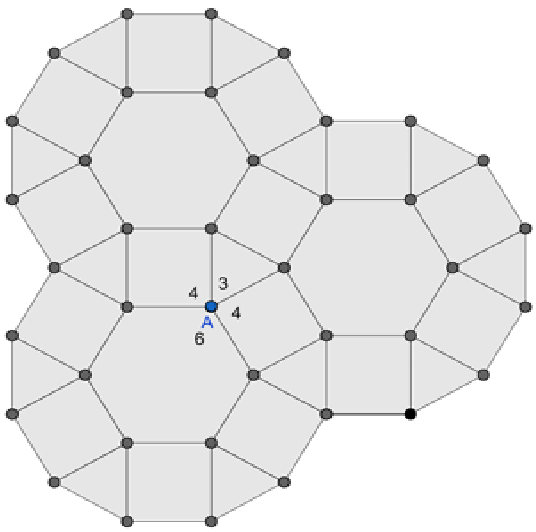
Figura 39 - Configuração (3, 4, 4, 6)



Fonte: Elaborada pelo autor

A configuração $(3, 4, 6, 4)$ pavimenta o plano. De fato, a configuração ao redor do ponto A se repete ao redor de todos os nós, conforme exposto na figura 40, isto é, a distribuição dos quatro polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Figura 40 - Configuração (3, 4, 6, 4)



Fonte: Elaborada pelo autor

d) De maneira análoga às análises precedentes às figuras 35, 38 e 40, os casos $\mathbf{P_{13}}$ e $\mathbf{P_{14}}$ pavimentam o plano, como ilustrados na figura 41.

Portanto, após as análises precedentes e utilizando como referência a legenda da tabela 9, temos, até aqui, 11 candidatos cujas configurações geram ladrlhamentos do plano.

Representamos na tabela 10 a seguir as configurações que geram os ladrilhamentos semirregulares no plano euclidiano.

Tabela 10 - Configurações dos ladrilhamentos semirregulares – Versão 1

Legenda	Configuração
$\mathbf{P_5}$	$(3,12,12)$
$\mathbf{P_7}$	$(4,6,12)$
$\mathbf{P_8}$	$(4,8,8)$
$\mathbf{P_{11}}$	$(3,6,3,6)$
$\mathbf{P_{12}}$	$(3,4,6,4)$
$\mathbf{P_{13}}$	$(3,3,3,3,6)$
$\mathbf{P_{14}}$	$(3,3,3,4,4)$
	$(3,3,4,3,4)$

Fonte: Elaborada pelo autor

As informações contidas na tabela 10 podem, por uma escolha pedagógica, ser representadas como na tabela 11 a seguir.

Tabela 11 - Configurações dos ladrilhamentos semirregulares – Versão 2

Legenda	x	y	z	v	w	u
$\mathbf{P_5}$	3	12	12	–	–	–
$\mathbf{P_7}$	4	6	12	–	–	–
$\mathbf{P_8}$	4	8	8	–	–	–
$\mathbf{P_{11}}$	3	6	3	6	–	–
$\mathbf{P_{12}}$	3	4	6	4	–	–
$\mathbf{P_{13}}$	3	3	3	3	6	–
$\mathbf{P_{14}}$	3	3	3	4	4	–
	3	3	4	3	4	–

Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, do exposto no estudo desta seção, apresentamos as tabelas 12 e 13.

Tabela 12 - Configuração dos ladrilhamentos regulares

x	y	z	v	w	u
6	6	6	–	–	–
4	4	4	4	–	–
3	3	3	3	3	3

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 13 - Configurações dos ladrilhamentos regulares e semirregulares – Resumo

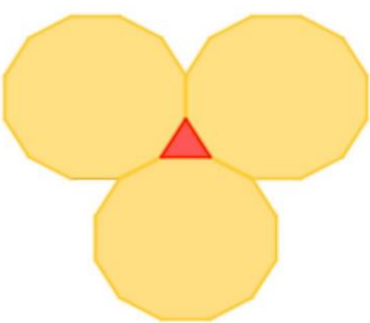
x	y	z	v	w	u	**Ladrilhamento**
3	12	12	–	–	–	semirregular
4	6	12	–	–	–	semirregular
4	8	8	–	–	–	semirregular
6	6	6	–	–	–	regular
4	4	4	4	–	–	regular
3	6	3	6	–	–	semirregular
3	4	6	4	–	–	semirregular
3	3	3	3	6	–	semirregular
3	3	3	4	4	–	semirregular
3	3	4	3	4	–	semirregular
3	3	3	3	3	3	regular

Fonte: Elaborada pelo autor

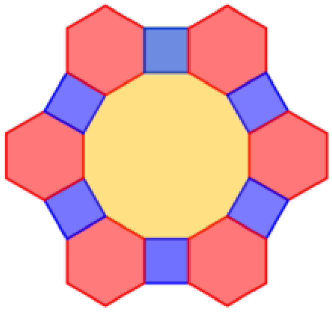
Há, portanto, apenas 8 tipos de ladrilhamentos semirregulares e, somente, 3 do tipo regular.

As figuras 27 e 41 ilustram, portanto, todos os possíveis ladrilhamentos regulares e semirregulares.

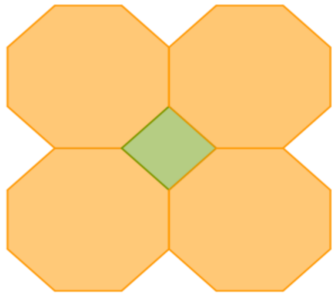
Figura 41 - Ladrilhamentos Semirregulares



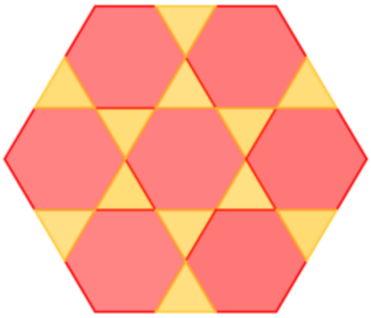
(3, 12, 12)



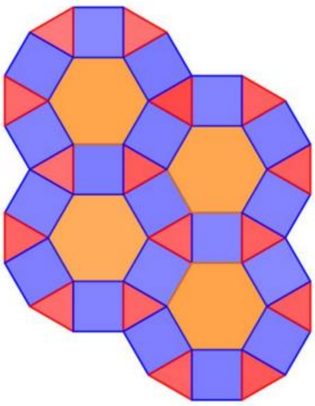
(4, 6, 12)



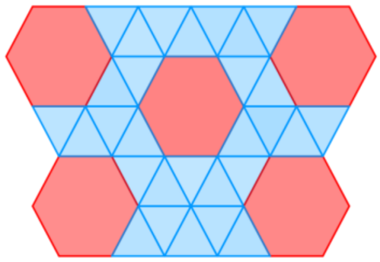
(4, 8, 8)



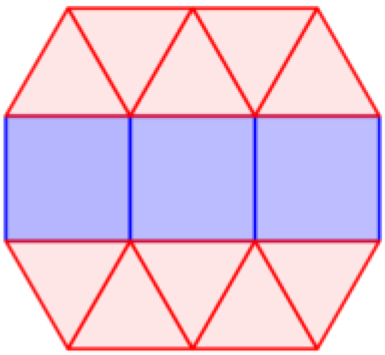
(3, 6, 3, 6)



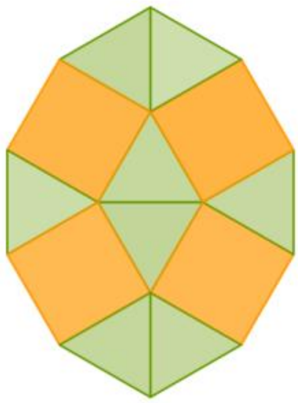
(3, 4, 6, 4)



(3, 3, 3, 3, 6)



(3, 3, 3, 4, 4)



(3, 3, 4, 3, 4)

Fonte: Elaborada pelo autor

Todos os ladrilhamentos que estudamos nas seções 3.3 e 3.4 foram elaborados usando exclusivamente polígonos regulares, com lados congruentes. Note que, em cada um deles, foram atendidas as seguintes condições[30]:

- os ladrilhos são regiões limitadas por polígonos regulares;
- a interseção de dois polígonos é sempre um lado, um vértice ou encontra-se vazia;
- a distribuição dos polígonos ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Essas condições foram, originalmente, apresentadas em um trabalho publicado em 1619 por Johannes Kepler (1571-1630) em seu livro *Harmonices Mundi* da seguinte forma:

<u>Teorema de Kepler</u>: *Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições:*

i) se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum;

ii) a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

[30] Extraídas de DANTE. L. R.; VIANA. F. (2020, p.51)

4 METODOLOGIA

A pergunta diretriz constitui o elemento central do processo de investigação em uma pesquisa. O desenvolvimento de todo o trabalho do pesquisador gira em torno do que se busca à luz dessa pergunta, cuja elaboração está diretamente ligada à inquietação quanto à exploração do novo.

Nas seções 4.1, 4.2 e 4.3, apresentamos os princípios metodológicos que estruturam a nossa pesquisa quanto à natureza, ao tipo de abordagem, ao procedimento técnico e aos tipos de registros.

4.1 Estrutura da Pesquisa

Esta pesquisa pode, quanto à natureza do método, ser classificada como aplicada, pois busca investigar e resolver problemas na comunidade onde o pesquisador atua como docente.

Para dar consistência à nossa proposta de investigação, optamos por uma abordagem qualitativa. Nesse tipo de abordagem o foco está no processo, isto é, na construção de explicações convincentes para a pergunta diretriz.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) a pesquisa qualitativa apresenta cinco características:

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
> 2. A investigação qualitativa é descritiva;
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualificativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47-51).

No tocante às características desse tipo de abordagem, compartilhamos com as ideias elencadas pelos autores. Nesse sentido, e à luz de suas reflexões, as informações colhidas, as especificidades dos detalhes onde a ação acontece, os dados produzidos e descritos estão intrinsicamente ligados ao percurso trilhado durante o processo de investigação.

As informações coletadas nessa perspectiva têm a característica de serem mais descritivas com ênfase nas ações que permeiam o cenário onde estão envolvidos os sujeitos da pesquisa.

Minayo (2007), analisando esse tipo de abordagem, destaca que:

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. (...) ela trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes. Esse conjunto de fenômenos humanos é entendido aqui como parte da realidade social, pois o ser humano se distingue não só por agir, mas por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e a partir da realidade vivida e partilhada com seus semelhantes (MINAYO, 2007, p. 21).

Nessa linha de raciocínio, referenciada na citação precedente, adotamos nesta pesquisa a triangulação de métodos, pois as conclusões extraídas da prática em sala de aula não ficaram apenas no campo das nossas observações, elas foram alimentadas pelas percepções dos participantes. Ratificando o que dissemos aqui, Borba et al (2023) destacam que:

> (...) se observarmos o trabalho de um grupo de alunos e depois entrevistarmos seus componentes sobre o trabalho desenvolvido, realizaremos uma triangulação de métodos. Fazendo assim, o pesquisador, ao invés de construir suas conclusões apenas a partir de observações, pode utilizar as entrevistas para checar algum detalhe ou para compreender melhor algum fato ocorrido durante as observações, promovendo uma maior credibilidade de sua pesquisa (BORBA; ARAÚJO et al, 2023, p.41).

Segundo D'Ambrósio (2012):

> A pesquisa qualitativa é muitas vezes chamada etnográfica, ou participante, ou inquisitiva, ou naturalista. Em todas essas nomenclaturas, o essencial é o mesmo: a pesquisa é focalizada no indivíduo, com toda a sua complexidade, e na sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural. O referencial teórico, que resulta de uma filosofia do pesquisador, é intrínseco ao processo. Naturalmente a interação pesquisador-pesquisado é fundamental e por isso essa modalidade é muitas vezes chamada pesquisação (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 93).

Do exposto acima nesta seção, após examinarmos os tipos de abordagem em uma pesquisa, optamos, como já dissemos, para a nossa investigação, pela abordagem qualitativa que, acreditamos, dialoga melhor com a proposta metodológica desta pesquisa.

Nesta pesquisa, nosso estudo consiste em investigar, analisar e descrever a aplicação da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Na implementação dessa proposta metodológica, adotamos, como procedimento técnico, o estudo de caso, que é um procedimento que estuda o objeto de pesquisa com um roteiro bem estruturado.

4.2 Contexto da Pesquisa

Esta pesquisa foi desenvolvida no Centro Educacional São Francisco (Chicão). Essa Unidade de Ensino é uma instituição pública com sede em São Sebastião/DF.

A presente pesquisa foi realizada em uma turma da 2ª série do Ensino Médio no turno matutino. Salientamos, por oportuno, que o pesquisador[31], durante a realização deste estudo, não fazia parte do corpo docente da instituição.

Elaboramos um Termo de Assentimento e um Aceite Institucional que foram assinados, respectivamente, pelos participantes desta pesquisa e pelo diretor da Unidade de Ensino, autorizando a realização deste estudo. Tais termos encontram-se, respectivamente, nos apêndices F e G.

Com o propósito de jogar luz no problema gerador deste trabalho, investigamos uma proposta metodológica de ensino e aprendizagem, no âmbito da escola descrita acima, para o ensino do conceito de ladrilhamento com aplicação de atividades, utilizando, para isso, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

4.3 Sequência Didática e Instrumento de Coleta de dados

A sequência didática desta pesquisa foi pensada e elaborada com o intuito de favorecer a investigação das contribuições da metodologia que foi escolhida para este estudo.

Para dar início a parte prática deste estudo, fez-se necessário a elaboração de um problema gerador e de uma motivação. O problema gerador foi pensado e elaborado tendo em vista o contexto da escola onde a pesquisa se desenvolveu, já a motivação serviu de ponte entre o conhecimento prévio dos alunos, via manipulação de réplicas de polígonos regulares, e o problema gerador.

Tendo como meta alcançar os objetivos propostos neste estudo, em especial, responder à pergunta da pesquisa, foram elaborados um plano de aula e um questionário que, juntamente com o problema gerador, serviram de instrumentos balizadores para o desenvolvimento da parte prática deste estudo.

---

[31] Outrora foi professor dessa Instituição de Ensino.

Vale ressaltar que ao problema gerador foram acrescentadas algumas situações subsequentes com o propósito de analisar se o essencial, dos conceitos matemáticos em estudo, foi compreendido a contento.

O material concreto foi preparado e organizado previamente em kits contendo os seguintes polígonos:

- Triângulo equilátero;
- Quadrado;
- Pentágono regular;
- Hexágono regular;
- Octógono regular; e
- Dodecágono regular.

Os polígonos foram confeccionados com lados medindo 3,5 cm e em papeis cartão de cores diferentes. No kit, cada tipo de polígono possuía uma das seguintes cores: vermelha, azul, amarela, verde, rosa e alaranjada.

A quantidade de peças em cada kit foi organizada da seguinte forma:

- 20 triângulos;
- 20 quadrados;
- 10 pentágonos;
- 10 hexágonos;
- 6 octógonos; e
- 5 dodecágonos.

Essa quantidade peças, em cada kit, foi planejada para o trabalho em grupo com quatro alunos em cada grupo. Desse modo, foram preparados 10 kits, pois a turma, segundo a professora regente, era composta de 39 alunos. Todavia, no 1º encontro, 24 alunos compareceram e participaram da pesquisa. Já no 2º encontro, os participantes eram 27 alunos.

Nota: os moldes dos polígonos regulares que foram confeccionados para a realização das atividades referentes à parte prática desta pesquisa encontram-se no apêndice H.

5 ENCONTROS E RELATOS

> “Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”
>
> Paulo Freire

Após alguns meses estudando os referenciais teóricos, vamos, neste capítulo, apresentar os dados coletados durante os encontros, seções 5.1 e 5.2; descrevê-los e analisá-los à luz da literatura que dá embasamento a esta pesquisa.

Faz-se necessário salientar que, em função do calendário de eventos programados na Unidade de Ensino a qual foi realizada esta pesquisa, foram necessárias algumas adequações no cronograma previsto inicialmente.

Os dois encontros para a realização das atividades práticas aconteceram, respectivamente, nos dias 25 de outubro e 8 de novembro de 2023, em horário duplo (90 minutos de duração) e no turno matutino.

A turma, na escrituração do diário, tinha 39 alunos, no entanto nos dias da pesquisa compareceram, respectivamente, 24 e 27 alunos que participaram efetivamente das atividades propostas. A turma foi dividida em 6 grupos, sendo que cada um foi formado, tão somente, pela afinidade de seus membros. No 1º encontro, cada grupo tinha em sua composição 4 alunos; já no 2º encontro, três grupos ficaram com cinco participante em cada um. As atividades, nos dois encontros, foram realizadas na sala de aula.

Vale ressaltar que, como descrito na seção 2.6, as 10 etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foram agrupadas para que o tempo que nos foi concedido para este estudo em sala de aula fosse viável.

Dito isso, vamos relatar o passo a passo das atividades centradas na metodologia em questão.

5.1 O Primeiro Encontro

No 1º primeiro encontro, a professora regente me acolheu e apresentou a turma, fez algumas considerações e se retirou da sala.

O trabalho teve início com a apresentação, nos primeiros minutos desse encontro, da proposta e dos objetivos desta pesquisa. Na sequência, como dissemos no início deste capítulo, a turma foi dividida em grupos. Cada grupo recebeu um kit contendo os polígonos regulares que foram, previamente, confeccionados em papeis cartão coloridos.

Com o objetivo de familiarizar a turma com o material manipulável, propomos uma motivação antes do problema gerador. Notamos, nesse primeiro momento, que quase todos os grupos demonstraram interesse e vontade em explorar o material ali disponível.

Após o primeiro contato com os polígonos regulares presentes no kit, os grupos receberam o problema gerador. A leitura do problema foi feita; algumas dúvidas foram sanadas e, depois de um breve momento de discussão do problema, os grupos começaram a resolvê-lo, como descrito na etapa 1 da seção 2.6. O retrato desse momento está registrado nas figuras abaixo:

Figura 42 - Grupo de alunos explorando o material manipulável – 1º Encontro

Fonte: O autor (2023)

Enquanto isso, o papel do professor foi observar o trabalho dos alunos e, a partir de diálogos com os grupos, incentivar na busca, não de respostas prontas, mas de construções de novos conhecimentos. Um exemplo desta interação está descrito no trecho abaixo, em que A1, A2, A3 e A4 se referem aos alunos e P se refere ao professor:

A1: *Professor, como é que a gente faz para encontrar o ângulo interno?*

P: *Boa pergunta! Qual a medida do ângulo interno do triângulo equilátero?*

A1: ...

P: *Alguém do grupo sabe?*

A2: *Acho que é 45 ou 60, um dos dois.*

P: *Vamos lá! Em um triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos é igual a quanto?*

A1: *É igual a 180 graus.*

A3: *No triângulo equilátero os ângulos são iguais, né?*

A1: *Então é só dividir por três.*

A4: *Beleza, mas... e as outras figuras?*

P: *Ligue, a partir de um vértice, diagonais dividindo a figura em triângulos...*

A1: *Entendi.*

Os alunos desse grupo, a partir do diálogo, trocaram ideias, traçaram diagonais, fizeram cálculos e, minutos depois, os ângulos internos de todos os polígonos regulares do kit estavam registrados numa tabela.

Perguntas como essas e as indagações do pesquisador criaram excelentes oportunidades que fizeram com que os conhecimentos prévios dos alunos viessem à tona e, por oportuno, registramos e descrevemos, nos apêndices[32], alguns desses diálogos ocorridos durante o trabalho dos grupos.

Percebemos, no começo das atividades, que os alunos apresentaram certa dificuldade em trabalhar em grupo. Talvez essa inabilidade esteja relacionada à ausência, na prática de sala de aula, de uma estratégia metodológica que os levem a construir conhecimentos de modo colaborativo. Todavia, a atitude de alguns líderes somada ao nosso trabalho de convencimento, foram suficientes para transpormos esse primeiro obstáculo.

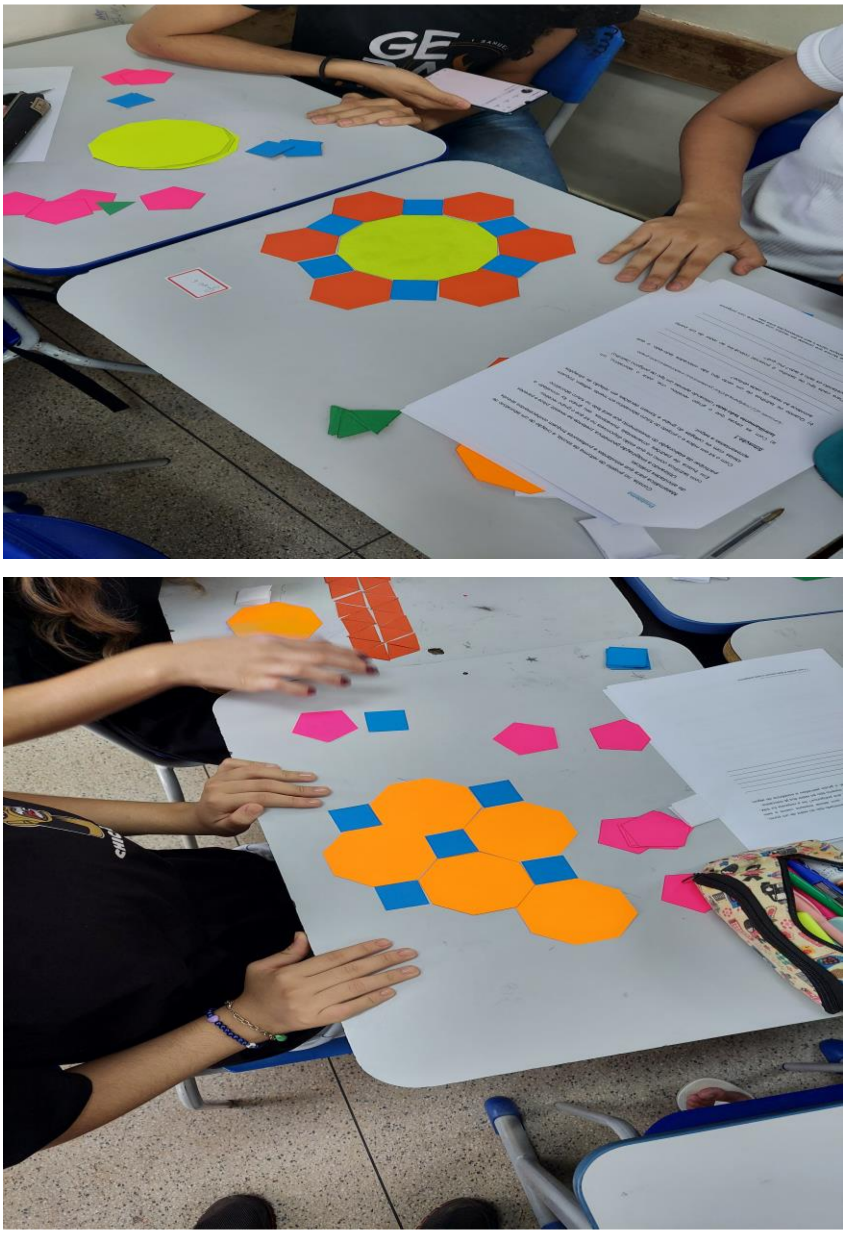
Quando elaboramos e propusemos problemas centrados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, antevíamos os desafios que estavam por vir. Afinal, estamos, com essa estratégia de ensino, rompendo com as práticas obsoletas de transmissão de conhecimento.

A motivação que apresentamos antes do problema gerador despertou a curiosidade da maioria dos alunos. Foi um momento importante para que todos pudessem relembrar os conceitos básicos referentes aos polígonos regulares e, além disso, a exploração do material manipulável foi fundamental para a familiarização e construção livre dos primeiros desenhos geométricos.

[32] Registramos nos apêndices D e E, respectivamente, recortes de diálogos dos encontros 1 e 2.

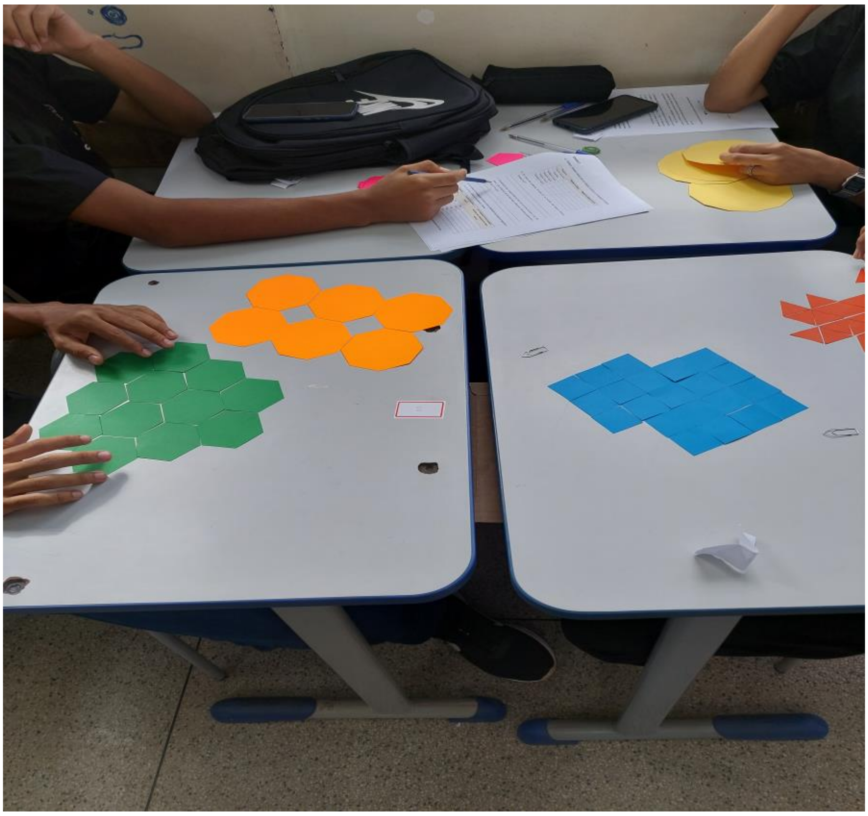
As investigações e descobertas fluíram de maneira, digamos, intuitiva, como captadas pelas lentes das nossas observações e retratadas nas figuras a seguir.

Figura 43 - Alunos construindo ladrilhamentos – 1º Encontro



Fonte: O autor (2023)

Figura 44 - Alunos descobrindo padrões – 1º Encontro



Fonte: O autor (2023)

O progresso nessas investigações jogou luz nas habilidades dos alunos e, consequentemente, facilitou a compreensão do problema gerador. A partir de calorosas discussões, os grupos foram explorando e descobrindo as possíveis configurações quando usavam apenas um tipo de polígono.

O consenso de que há apenas três tipos de ladrilhamentos regulares não surgiu na primeira rodada de discussões em todos os grupos, mas, que fique registrado, houve exceções.

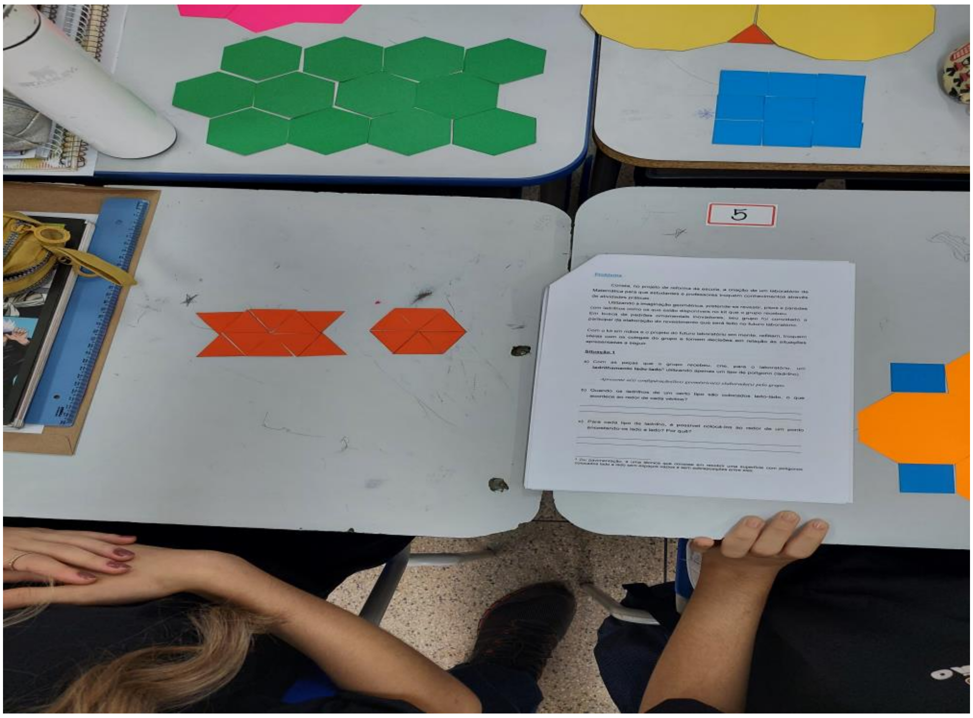
Nos grupos que necessitavam de um melhor entendimento, fez-se necessário algumas indagações estimulantes, por parte do pesquisador, para que os alunos percebessem que em torno de um ponto no plano o ângulo total é, sempre, igual a 360 graus. Um exemplo disso está no diálogo com o grupo 1, cujo registro encontra-se no apêndice E.

A partir da interpretação e compreensão referente à configuração de certos tipos de ladrilhamentos, as descobertas, além do ponto de vista artesanal, começaram a ter, mesmo que de modo sutil, justificativas matemáticas plausíveis.

Durante a resolução do problema gerador, notamos, e isso já era esperado, que os alunos, oralmente se comunicavam bem, mas no momento de registrar as ideias no papel, tiveram alguns bloqueios que demandaram tempo para que a escrita expressasse com clareza e sentido o que era consenso nos grupos.

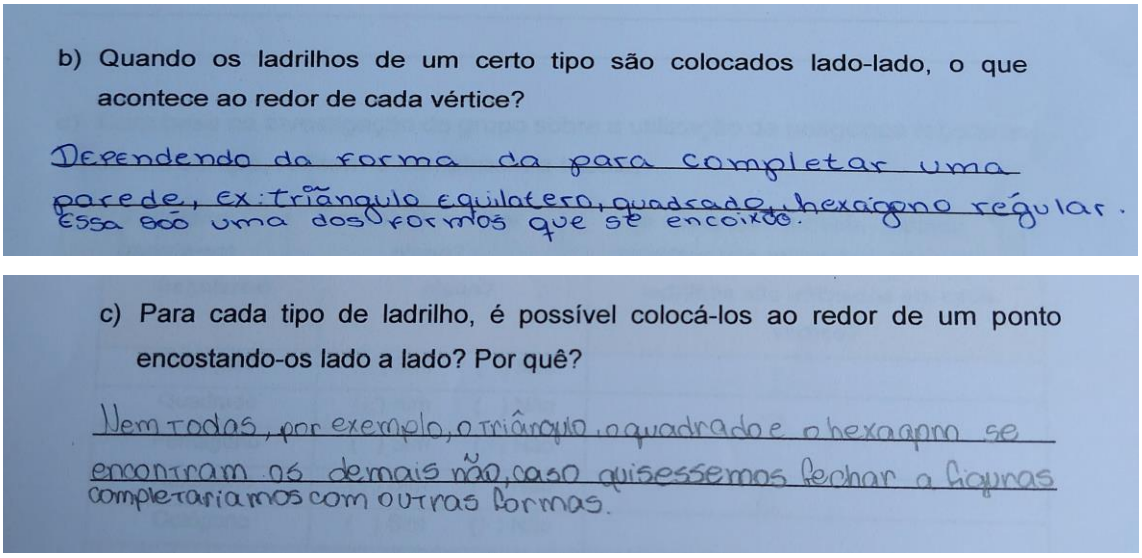
Alguns grupos perceberam de maneira intuitiva (e talvez matematicamente) que, em se tratando de polígono de um só tipo, os únicos que ficaram justapostos ao redor de um ponto do plano foram o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. A figura 45 ilustra essa constatação.

Figura 45 - Alunos explorando e descobrindo padrões – 1º Encontro



Fonte: O autor (2023)

Figura 46 - Registro de conjecturas – 1º Encontro



b) Quando os ladrilhos de um certo tipo são colocados lado-lado, o que acontece ao redor de cada vértice?

Dependendo da forma da para completar uma parede, ex: triângulo equilatero, quadrado, hexágono régular. Essa são uma dos formos que se encoixão.

c) Para cada tipo de ladrilho, é possível colocá-los ao redor de um ponto encostando-os lado a lado? Por quê?

Nem todas, por exemplo, o triângulo, o quadrado e o hexagono se encontram os demais não, caso quisessemos fechar a figuras completariamos com outras formas.

Fonte: O autor (2023)

Durante a plenária, percebemos que os alunos ficaram atentos quando os representantes dos grupos explicaram as estratégias que os levaram à determinadas configurações. E, apesar do tempo limitado, a formalização foi fundamental para ajustar alguns descompassos entre a arte da decoração e os conceitos matemáticos.

Vale ressaltar que cada grupo tinha a liberdade de expor suas ideias e descobertas através de um representante ou mais integrantes, na lousa ou no lugar onde se encontrava.

5.2 O Segundo Encontro

A turma me recebeu cordialmente; a professora, educadamente, fez, como no 1º encontro, algumas considerações e, em seguida, se retirou. O trabalho foi retomado. Foi novamente explicado o passo a passo e os objetivos da atividade proposta. Como descrito na etapa1 do apêndice B.

Os grupos foram formados com, basicamente, a mesma configuração do encontro anterior.

Entregamos aos grupos os kits, o problema gerador impresso e as situações-problema planejadas para esse encontro. No plano de aula, apêndice B, há detalhamento das estratégias adotadas para essa etapa.

A leitura do problema foi feita e, em seguida, iniciaram-se as discussões nos grupos. Foram surgindo, de modo intuitivo, ladrilhamentos regulares e semirregulares.

Notamos que em alguns grupos os alunos demoraram um pouco para perceber e distinguir as pavimentações com dois tipos de polígonos das compostas por três tipos. Isso demandou tempo, mas, após algumas indagações direcionadas, os trabalhos fluíram e vários tipos de pavimentação foram construídos.

Alguns alunos, como dissemos na seção anterior, tiveram dificuldade em interagir, produzir e trabalhar em grupos. Além disso, houve por parte de alguns a busca de uma zona de conforto, isto é, o novo causou instabilidade, pois a ausência de algoritmo e/ou de métodos fez com que eles percebessem que não dispunham de ferramentas prontas para atacar aquele tipo de situação.

Propor uma estratégia de ensino diferente daquela que os alunos estão acostumados, geram, como antevíamos, certos desconfortos. O aluno é desafiado a recorrer a conhecimentos prévios, daí começa a perceber que está faltando algo para que o problema proposto seja resolvido de maneira satisfatória.

Corroborando com o exposto nos dois parágrafos precedentes, Mello (2018), que aplicou em sala de aula a metodologia aqui apreciada, traz a seguinte reflexão:

> Mesmo que a resposta dos alunos à aplicação da proposta tenha sido, de maneira geral, muito positiva enquanto resultado final, percebeu-se uma resistência quanto à inserção de novas metodologias. Não foram raras manifestações na forma de referências a necessidade de retomar estratégias próprias da metodologia a que estão expostos habitualmente (aulas expositivas dialogadas), demonstrando a dificuldade de enfrentar o novo e de lidar com desconhecido (MELLO, 2018, p. 101).

Durante a resolução do problema gerador, me deparei com situações diversas quanto à produção dos grupos. Alguns percebiam de imediato que determinados polígonos não ficavam justapostos com outros em torno de um ponto. Outros, insistiam em configurações impossíveis. Além disso, em pelo menos dois grupos, percebi o apego pelo pentágono, mesmo depois de algumas intervenções no sentido de despertá-los quanto à medida do ângulo interno desse polígono.

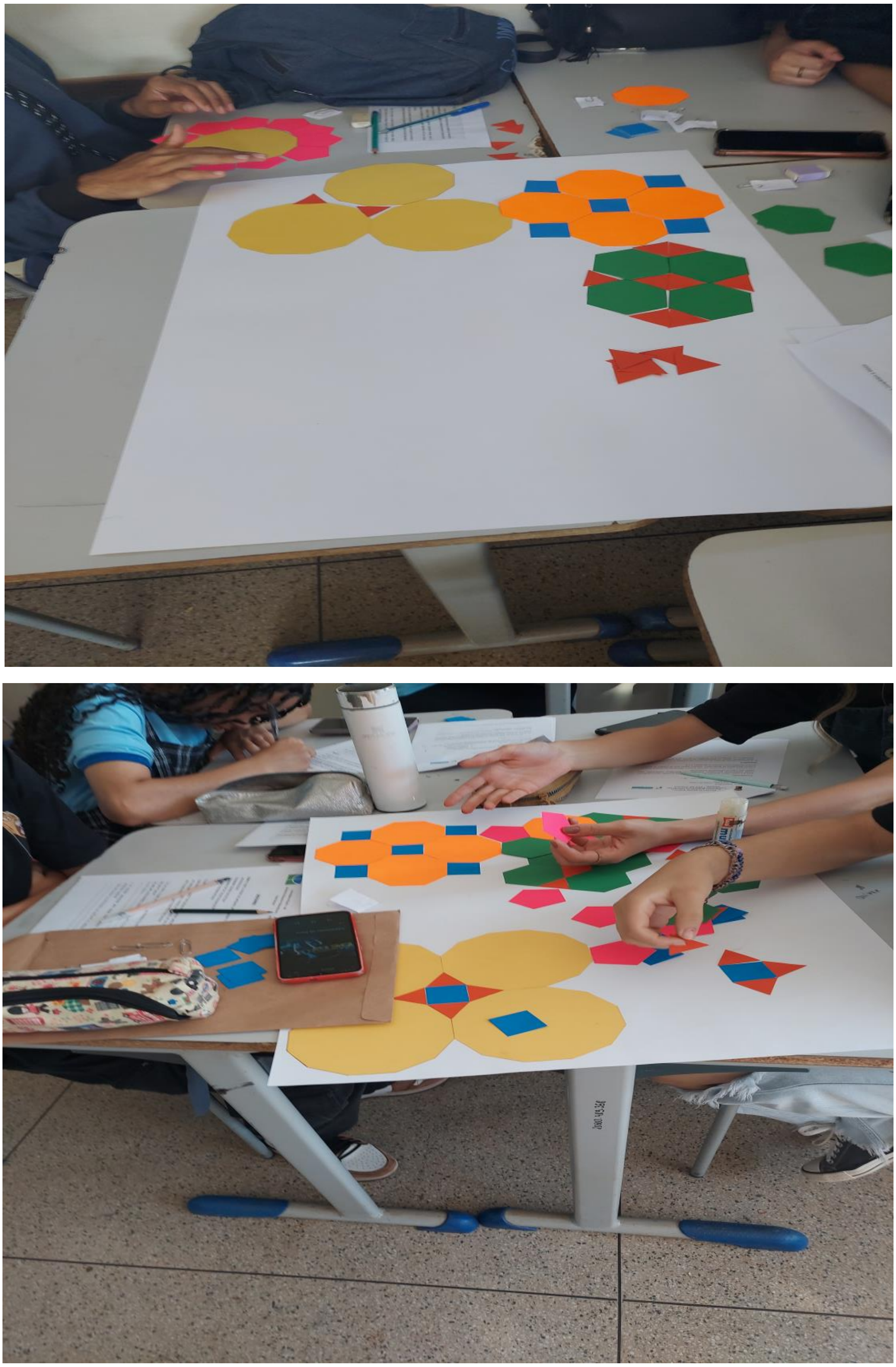
O florescimento de ideias veio à tona e gradativamente as propostas de ladrilhamento foram surgindo. Os possíveis ladrilhamentos com dois e três tipos de polígonos, alguns semirregulares, foram construídos, mas necessitava, a partir daí, de justificativas e explicações matemáticas para validar tais construções.

Diante do painel de soluções apresentado pelos grupos, os alunos foram incentivados a partilharem ideias, a defenderem seus pontos de vistas e justificarem a existência de determinados ladrilhamentos, como descrito na etapa 2 da seção 2.6.

Fizemos a seção plenária e buscamos o consenso, ouvindo e respeitando as ideias e sugestões sobre a existência dos ladrilhamentos semirregulares. Em seguida, utilizando uma linguagem adequada à turma e, devido ao pouco tempo, foi formalizado, em parte, o conceito de pavimentação do plano. A figura 49 foi utilizada como parte da estratégia para a síntese das ideias referente às pavimentações regulares e semirregulares.

Quanto ao tempo que nos foi disponibilizado para a realização desta pesquisa em sala de aula, faremos, nas considerações finais, alguns apontamentos que julgamos pertinentes.

Figura 47 - Alunos explorando e construindo ladrilhamentos – 2º Encontro

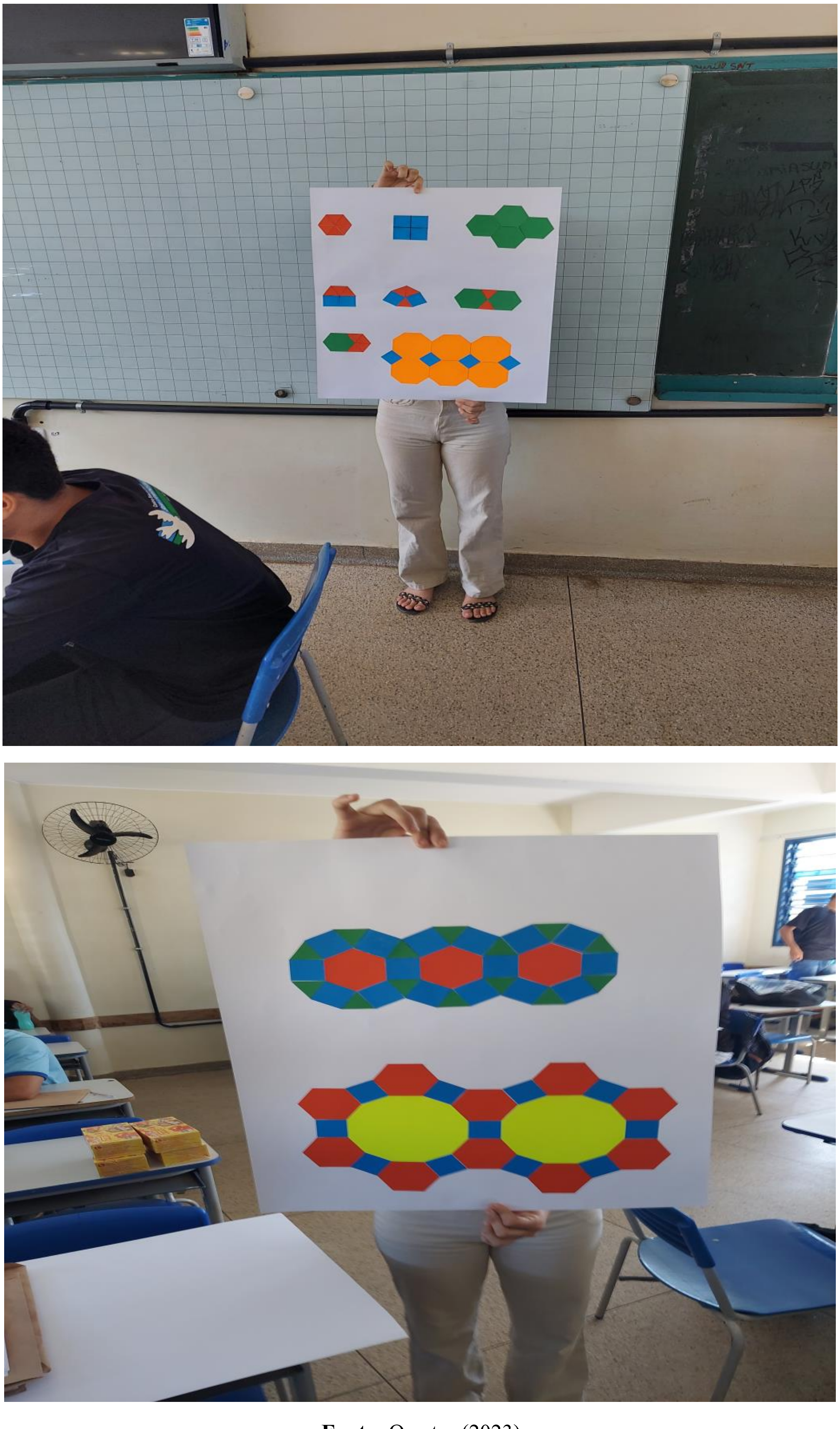


Fonte: O autor (2023)

Figura 48 - Explorando e descobrindo configurações – 2º encontro

Fonte: O autor (2023)

Figura 49 - Plenária com representante de grupo – 2º encontro



Fonte: O autor (2023)

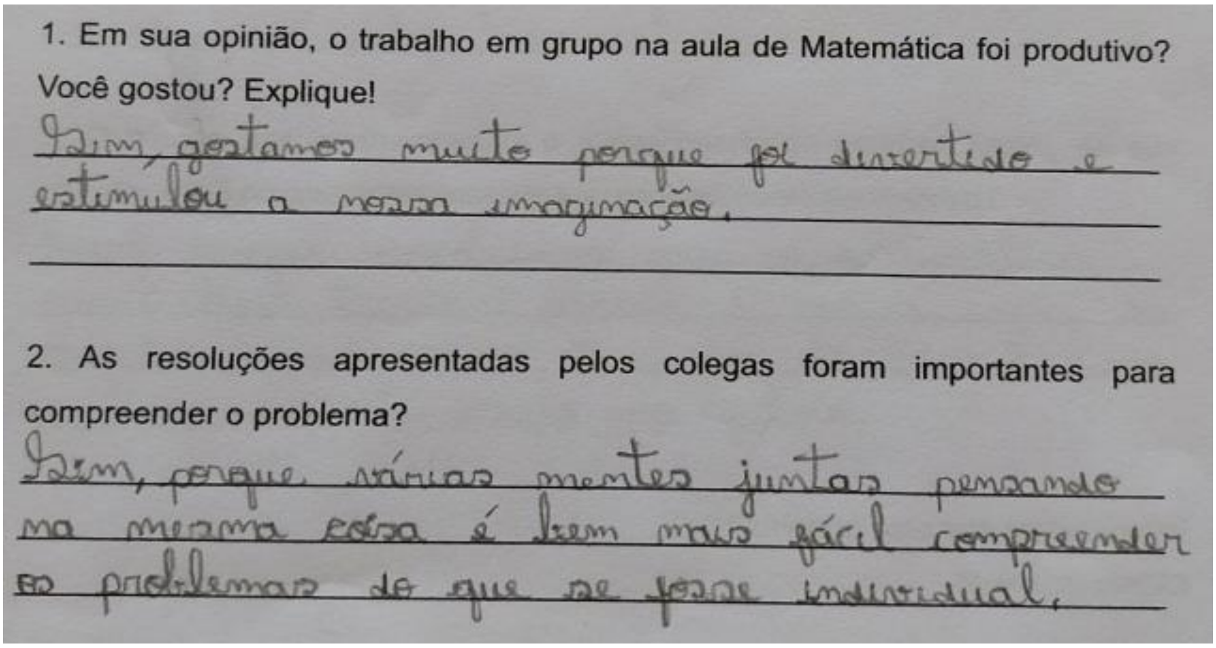
Com o intuito de facilitar o registro das ideias dos grupos, foi disponibilizado, no segundo encontro, cartolinas e cola para que durante a plenária os interessados pudessem expor suas pavimentações sem ter que ficar desenhando na lousa ou algo do tipo. Essa ideia surgiu no intervalo de tempo entre os dois encontros. Foi pensada e apresentada como sugestão. Todos os grupos utilizaram a cartolina e a cola para o registro de suas descobertas.

Como dissemos anteriormente, propor atividades centradas na metodologia de resolução de problemas é, mas não deveria ser, um desafio num cenário onde as carteiras estão enfileiradas e os alunos "aprendem" sobre o objeto de estudo ouvindo e vendo as explicações do professor.

Elaboramos e propusemos um questionário[33] para avaliar a interação dos participantes com as atividades à luz da metodologia que dá embasamento ao nosso estudo.

Julgamos que a opinião dos participantes é de suma importância para a nossa reflexão nesta pesquisa. A seguir, apresentamos algumas respostas aos nossos questionamentos.

Figura 50 - Questionário – Respostas (1 e 2) do grupo 4 – 2º encontro


1. Em sua opinião, o trabalho em grupo na aula de Matemática foi produtivo? Você gostou? Explique!

Sim, gostamos muito porque foi divertido e estimulou a nossa imaginação.

2. As resoluções apresentadas pelos colegas foram importantes para compreender o problema?

Sim, porque várias mentes juntas pensando na mesma coisa é bem mais fácil compreender os problemas do que se fosse individual.

Fonte: O autor (2023)

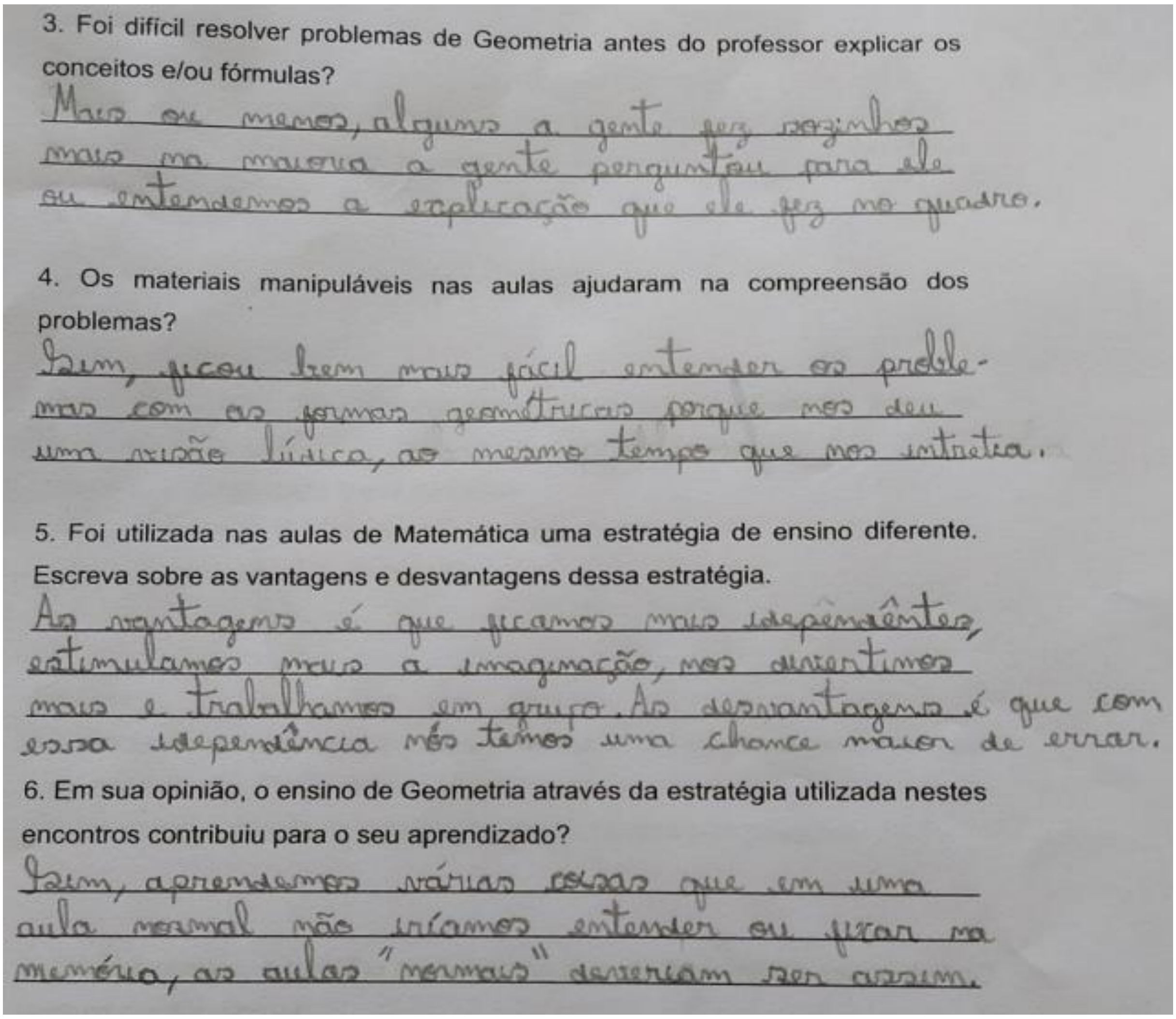
A percepção do aluno quanto à prática em sala de aula trouxe informações que nos fez refletir sobre as estratégias de ensino que escolhemos. Nas respostas que trazemos para o leitor, notamos que a nossa proposta foi compreendida e os participantes desta pesquisa interagiram muito bem com ela.

[33] O questionário está disponível no apêndice C.

Esse retrato revela, ao menos em parte, a necessidade de buscarmos alternativas metodológicas de modo que a sala de aula de Matemática seja um lugar onde o aluno aprenda a pensar e tomar decisões. Nesse sentido, compartilhamos da ideia de que "Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (...)" Braumann (2002, p.5 apud PONTE et al 2003, p.18-19).

O grupo 4, como vemos a seguir, nos mostra a relação de dependência com a explicação do professor e, além disso, faz uma crítica em relação à aula denominada pelo grupo de "normal".

Figura 51 - Questionário – Respostas (3, 4, 5 e 6) do grupo 4 – 2º encontro



3. Foi difícil resolver problemas de Geometria antes do professor explicar os conceitos e/ou fórmulas?

Mais ou menos, alguns a gente fez sozinhos mas na maioria a gente perguntou para ele ou entendemos a explicação que ele fez no quadro.

4. Os materiais manipuláveis nas aulas ajudaram na compreensão dos problemas?

Sim, ficou bem mais fácil entender os proble-mas com as formas geométricas porque nos deu uma visão física, ao mesmo tempo que nos intreteu.

5. Foi utilizada nas aulas de Matemática uma estratégia de ensino diferente. Escreva sobre as vantagens e desvantagens dessa estratégia.

As vantagens é que ficamos mais idepêndentes, estimulamos mais a imaginação, nos divertimos mais e trabalhamos em grupo. As desvantagens é que com essa idependência nós temos uma chance maior de errar.

6. Em sua opinião, o ensino de Geometria através da estratégia utilizada nestes encontros contribuiu para o seu aprendizado?

Sim, aprendemos várias coisas que em uma aula normal não iríamos entender ou ficar na memória, as aulas "normais" deveriam ser assim.

Fonte: O autor (2023)

Figura 52 - Questionário – Resposta do grupo 5 – 2º encontro

1. Em sua opinião, o trabalho em grupo na aula de Matemática foi produtivo? Você gostou? Explique!

SIM, NOSSO GRUPO PARTICULARMENTE GOSTOU MUITO, FOI ALGO NOVO E DIFEREN-
TE, MUITO PRODUTIVO

Fonte: O autor (2023)

"(...) Foi algo novo e diferente, muito produtivo". Esta frase, extraída da resposta acima, nos revela a percepção do grupo quanto à estratégia de ensino de Matemática via resolução de problemas em sala de aula.

Figura 53 - Questionário – Respostas (3, 4, 5 e 6) do grupo 5 – 2º encontro

3. Foi difícil resolver problemas de Geometria antes do professor explicar os conceitos e/ou fórmulas?

NÃO MUITO É UMA MATÉRIA RAZOAVELMENTE FÁCIL DE SE RESOLVER, MAS
A EXPLICAÇÃO DO PROFESSOR AJUDOU MUITO E DEIXOU MUITO MAIS FÁCIL

4. Os materiais manipuláveis nas aulas ajudaram na compreensão dos problemas?

SIM, O MATERIAL FOI ALGO ESSENCIAL PARA COMPREENDERMOS, ACHO
QUE QUANDO NÓS FAZEMOS COM AS PRÓPRIAS MÃOS TUDO FICA MAIS FÁCIL

5. Foi utilizada nas aulas de Matemática uma estratégia de ensino diferente. Escreva sobre as vantagens e desvantagens dessa estratégia.

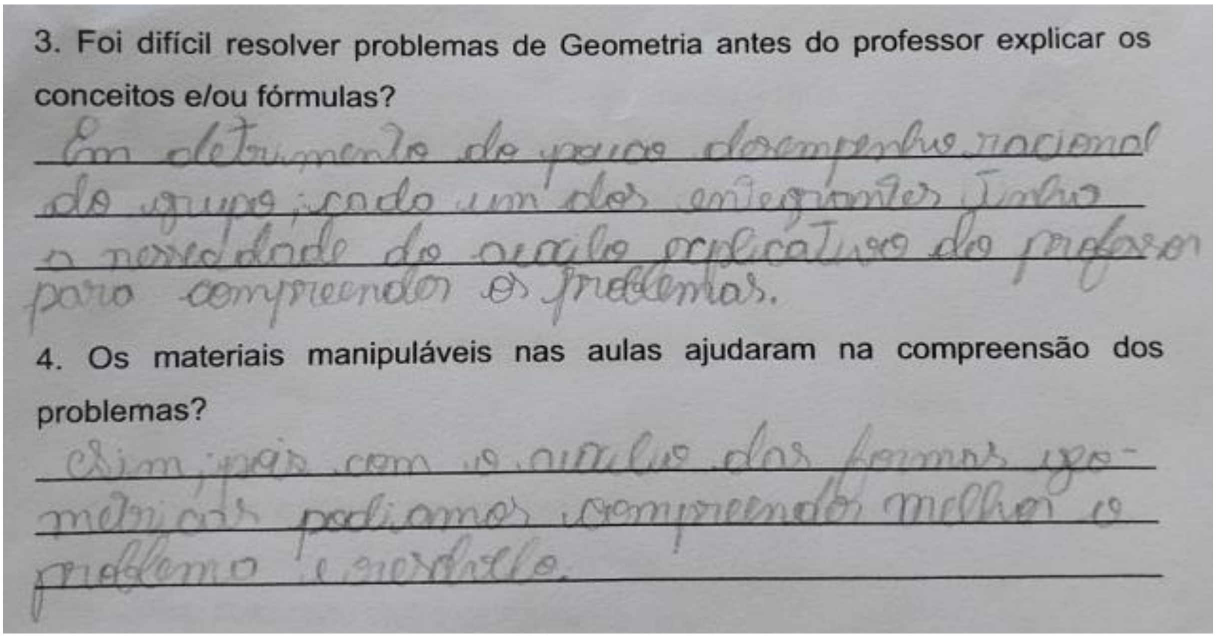
Á muitas vantágens, pois, o ensino lúdico nos ajuda a termos
uma visão além das formas matemáticos, nos fazendo perce
ber em noss cotidiano

6. Em sua opinião, o ensino de Geometria através da estratégia utilizada nestes encontros contribuiu para o seu aprendizado?

SIM, CONTRIBUIU MUITO BEM, AJUDOU TODOS NÓS A COMPREENDER O CONTE-
ÚDO MAIS FÁCIL

Fonte: o autor (2023)

Figura 54 - Questionário – Respostas (3 e 4) do grupo 3 – 2º encontro


3. Foi difícil resolver problemas de Geometria antes do professor explicar os conceitos e/ou fórmulas?

Em detrimento do pouco desempenho racional do grupo, cada um dos integrantes tinha a necessidade da ajuda explicativa do professor para compreender os problemas.

4. Os materiais manipuláveis nas aulas ajudaram na compreensão dos problemas?

Sim, pois com a ajuda das formas geométricas podíamos compreender melhor o problema e resolvê-lo.

Fonte: O autor (2023)

As respostas à pergunta 3 do supracitado questionário nos remetem à seguinte observação:

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho (POLYA, 2006, p. 1).

Não é uma tarefa fácil propor aos alunos situações desafiadoras e, na dose razoavelmente certa, auxiliá-los na construção de novos conhecimentos. Vivenciei um pouco disso neste estudo em sala de aula.

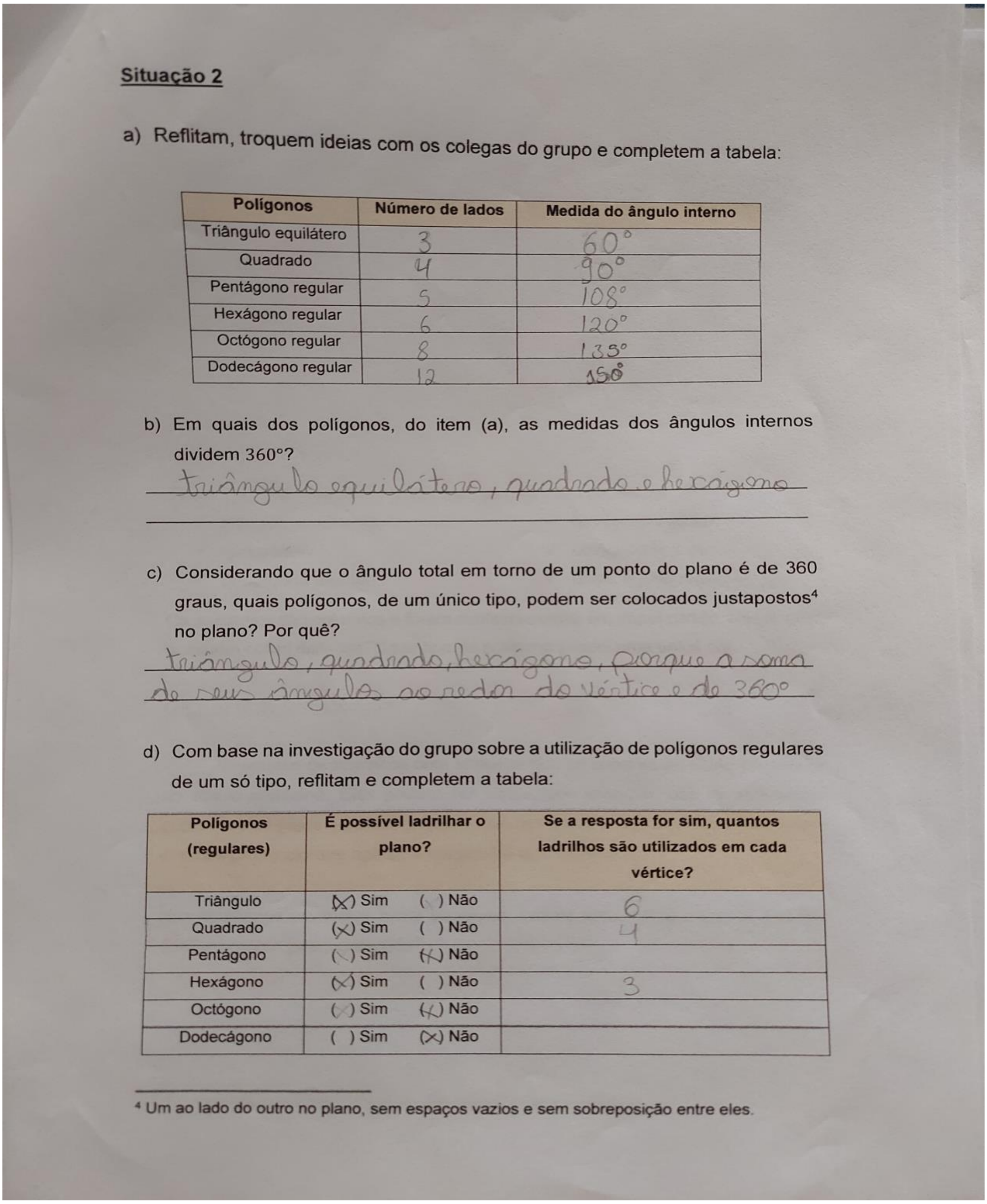
Em consonância com o que foi observado e descrito nesta seção, Onuchic et al (2014) afirmam que:

> Trabalhar na perspectiva da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em qualquer nível de escolaridade, **dá oportunidade ao aluno de explorar, investigar, manipular, conjecturar, falar, escrever, analisar, experimentar, refletir, abstrair, argumentar e generalizar** acarretando, então, a mobilização de um conjunto de conhecimento que possibilitarão a produção de outros (ONUCHIC et al, 2014, p. 110, grifo nosso).

Para nós, os doze verbos na citação acima, que aparecem no trecho que grifamos, refletem a essência da nossa investigação quanto às contribuições da metodologia centrada na resolução de problemas.

Dos seis grupos de alunos que participaram desta pesquisa, quatro responderam à Situação 2 do problema gerador[34] como ilustrado na figura a seguir:

Figura 55 - Respostas do grupo 3 à Situação 2 – 2º encontro



Situação 2

a) Reflitam, troquem ideias com os colegas do grupo e completem a tabela:

Polígonos	Número de lados	Medida do ângulo interno
Triângulo equilátero	3	60°
Quadrado	4	90°
Pentágono regular	5	108°
Hexágono regular	6	120°
Octógono regular	8	135°
Dodecágono regular	12	150°

b) Em quais dos polígonos, do item (a), as medidas dos ângulos internos dividem 360°?

triângulo equilátero, quadrado e hexágono

c) Considerando que o ângulo total em torno de um ponto do plano é de 360 graus, quais polígonos, de um único tipo, podem ser colocados justapostos[4] no plano? Por quê?

triângulo, quadrado, hexágono, porque a soma de seus ângulos ao redor do vértice é de 360°

d) Com base na investigação do grupo sobre a utilização de polígonos regulares de um só tipo, reflitam e completem a tabela:

Polígonos (regulares)	É possível ladrilhar o plano?	Se a resposta for sim, quantos ladrilhos são utilizados em cada vértice?
Triângulo	(X) Sim ( ) Não	6
Quadrado	(X) Sim ( ) Não	4
Pentágono	( ) Sim (X) Não	
Hexágono	(X) Sim ( ) Não	3
Octógono	( ) Sim (X) Não	
Dodecágono	( ) Sim (X) Não	

[4] Um ao lado do outro no plano, sem espaços vazios e sem sobreposição entre eles.

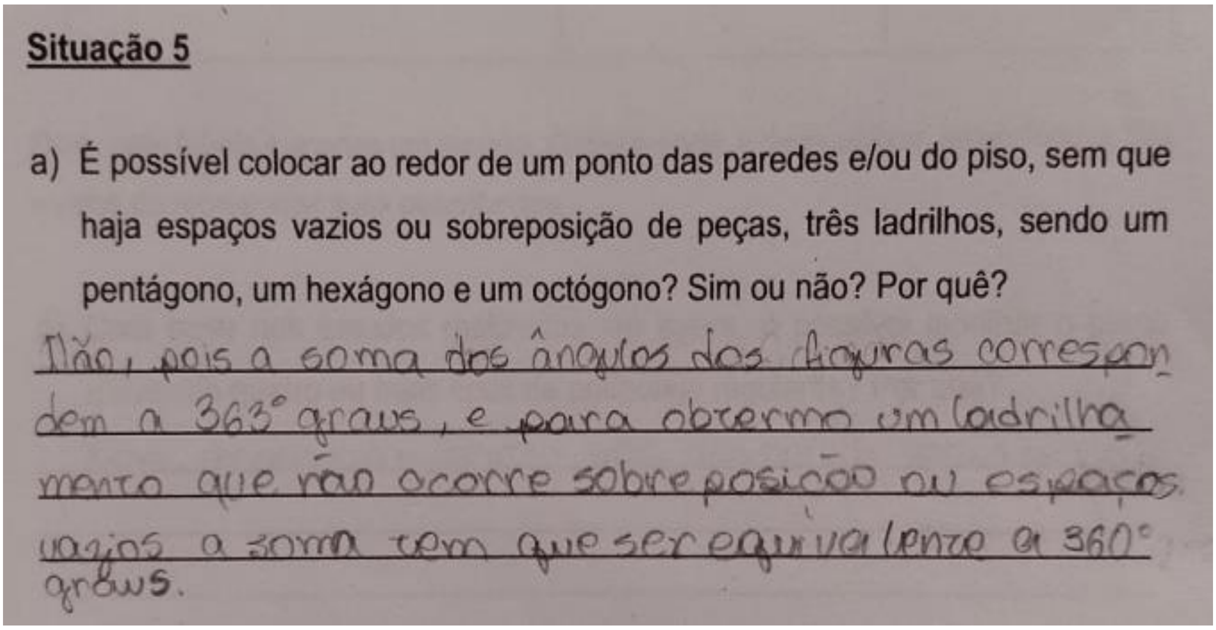
Fonte: O autor (2023)

[34] O problema gerador e as situações a ele associadas estão disponíveis no Apêndice A.

Após a exposição da resolução da Situação 2, feita por representantes do grupo 3, notamos que as dúvidas que persistiam em alguns grupos foram sanadas e os trabalhos foram gradativamente ganhando, além do aspecto artesanal, "consistência" matemática.

A linguagem matemática nessa etapa da resolução do problema necessitava, obviamente, aprimoramento. Todavia, isso não foi obstáculo para o desenvolvimento das atividades. Com algumas indagações nos grupos, antes mesmo do formalismo, os alunos foram buscando "explicação" matemática para aquilo que era pouco perceptível visualmente. Isso ficou claro na argumentação referente ao item (a) da Situação 5 que apresentamos a seguir.

Figura 56 - Argumentação do grupo 5 – 2º Encontro



Situação 5

a) É possível colocar ao redor de um ponto das paredes e/ou do piso, sem que haja espaços vazios ou sobreposição de peças, três ladrilhos, sendo um pentágono, um hexágono e um octógono? Sim ou não? Por quê?

Não, pois a soma dos ângulos das figuras correspon dem a 363° graus, e para obtermo um ladrilha mento que não ocorre sobreposição ou espaços vazios a soma tem que ser equivalente a 360° graus.

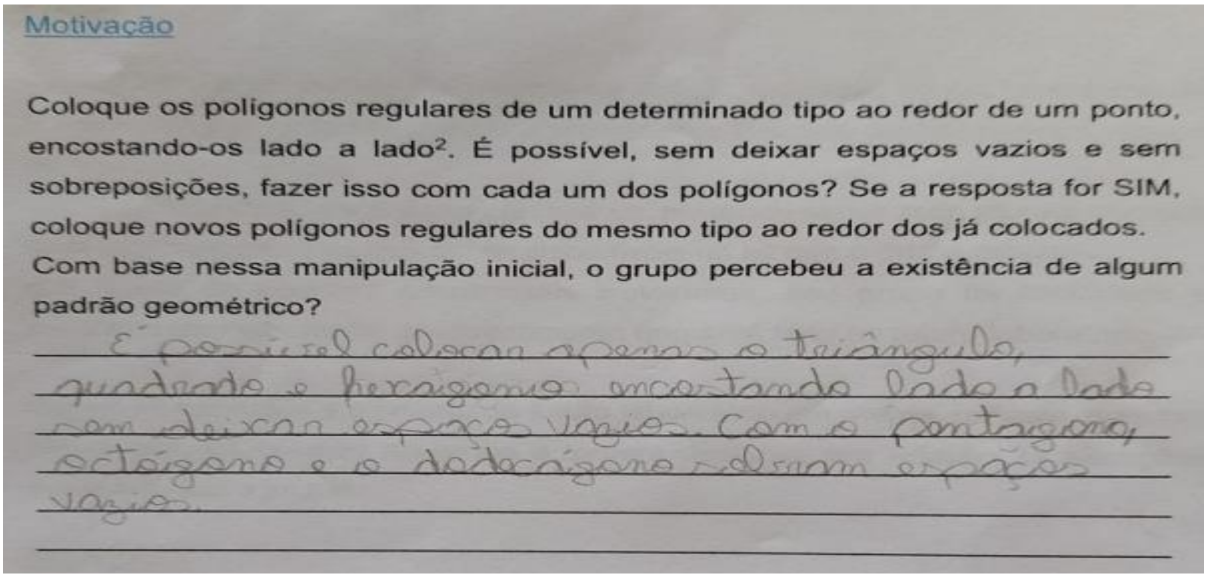
Fonte: O autor (2023)

Vale ressaltar que a resposta acima foi, em sua essência, apresentada por quatro dos seis grupos.

O desenvolvimento dos participantes, no decorrer das discussões, ficou evidente, por exemplo, quando comparamos a quantidade de respostas da Situação 5 com o que foi apresentado como resposta à Motivação[35] do 1º encontro. Talvez, movidos pela empolgação e desejo em "atacar" de imediato o problema gerador, apenas dois grupos responderam por escrito a referida motivação, como na figura a seguir.

[35] A Motivação foi apresentada aos participantes antes do problema gerador.

Figura 57 - Argumentação do grupo 3 – 1º encontro



Motivação

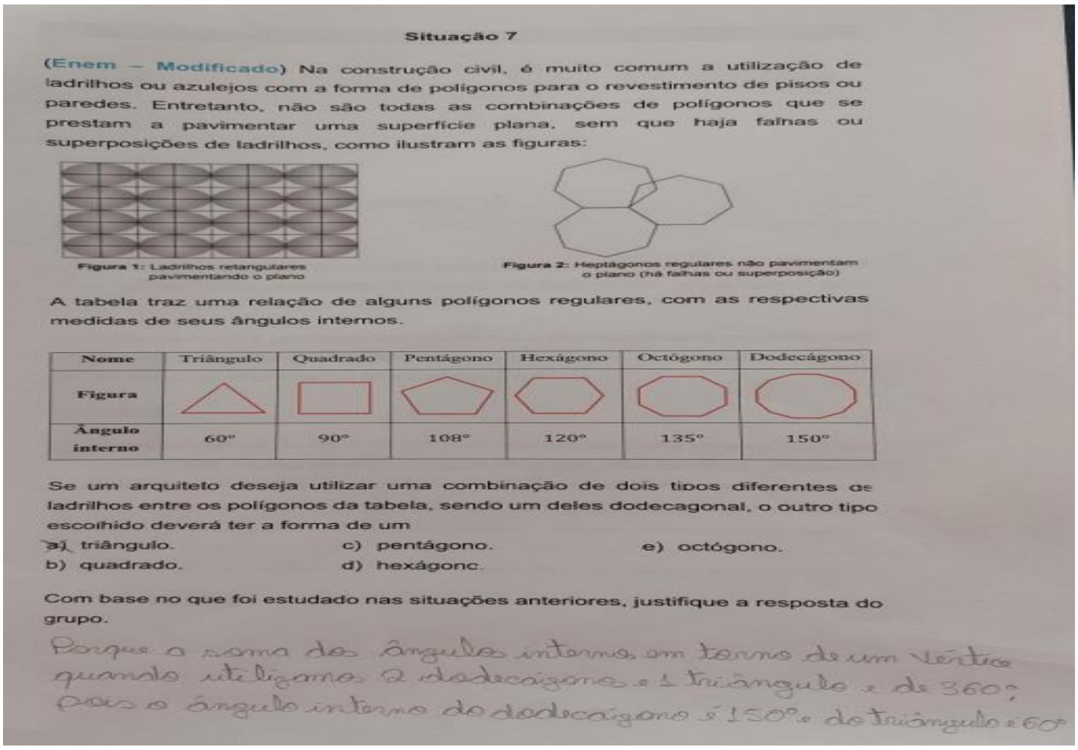
Coloque os polígonos regulares de um determinado tipo ao redor de um ponto, encostando-os lado a lado². É possível, sem deixar espaços vazios e sem sobreposições, fazer isso com cada um dos polígonos? Se a resposta for SIM, coloque novos polígonos regulares do mesmo tipo ao redor dos já colocados. Com base nessa manipulação inicial, o grupo percebeu a existência de algum padrão geométrico?

É possível colocar apenas o triângulo, quadrado e hexágono encostando lado a lado sem deixar espaços vazios. Com o pentágono, octógono e o dodecágono sobram espaços vazios.

Fonte: O autor (2023)

Na Situação 7, propusemos um novo problema. Apresentamos, com algumas modificações, uma questão que foi cobrada numa prova do ENEM. Quatro grupos responderam[36], basicamente, como retratado na figura 58.

Figura 58 - Resposta do grupo 3 – 2º Encontro



Situação 7

(Enem – Modificado) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Dodecágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	150°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles dodecagonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a) triângulo. c) pentágono. e) octógono.
b) quadrado. d) hexágono.

Com base no que foi estudado nas situações anteriores, justifique a resposta do grupo.

Porque a soma dos ângulos internos em torno de um vértice quando utilizamos 2 dodecágonos e 1 triângulo é de 360º, pois o ângulo interno do dodecágono é 150º e do triângulo é 60º

Fonte: O autor (2023)

[36] "Porque a soma dos ângulos internos em torno de um vértice quando utilizamos 2 dodecágonos e 1 triângulo é de 360º, pois o ângulo interno do dodecágono é 150º e do triângulo é 60º."

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi investigar a relevância e as contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Escolhemos, para tal investigação, as pavimentações do plano formadas por polígonos regulares com ênfase nos ladrilhamentos regulares e semirregulares. Julgamos pertinente trazer à tona um assunto interessante da Geometria que, por nossa experiência, é raramente trabalhado no Ensino Médio e está presente na BNCC (2018, p. 533).

Elaboramos, à luz da metodologia proposta, uma sequência didática centrada na resolução de problemas envolvendo o supracitado tópico da Geometria. Propusemos a elaboração de um projeto de decoração para as paredes do laboratório de Matemática da escola com foco principal nos ladrilhamentos regulares e semirregulares.

Após muitas leituras, reflexões e do caminho trilhado nesta pesquisa, vamos, neste espaço, tecer em linhas gerais, nossas considerações sobre o "artesanato" intelectual que vimos e, com nossas limitações e releituras, tivemos o privilégio de participar de sua construção.

Na esperança de encontrar respostas aos nossos questionamentos e, em especial, à pergunta diretriz desta pesquisa, elaboramos nossas atividades e disponibilizamos um material manipulável.

Hesitamos, inicialmente, se levaríamos o material (polígonos confeccionados em papel cartão) já pronto ou se entregaríamos uma folha com os polígonos para serem recortados em sala de aula. Optamos, por uma questão de logística e tempo disponível, em levar o material organizado em kits e numa quantidade que julgamos suficiente para a realização das tarefas.

Como dissemos na seção 2.6, houve um agrupamento das etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para a realização deste trabalho em sala de aula. Acreditamos que tais agrupamentos, como relatamos no capítulo 5, trouxeram ganhos, tanto para os participantes do presente estudo quanto para o pesquisador, cujo trabalho foi desenvolvido em conformidade com o que havia sido planejado.

A parte prática desta pesquisa foi realizada nos meses de outubro e novembro de 2023 em uma turma da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública. E naturalmente, por conta do período do ano letivo, surgiram algumas perguntas: o que esses alunos estão estudando em Matemática? Será que eles já estudaram o conceito de pavimentação do plano? Pois bem, a turma estava estudando a trigonometria no triângulo retângulo e não sabia o que era pavimentação ou ladrilhamento, mas já tinha, parcialmente, a ideia de polígonos regulares, ângulos internos e a soma dos ângulos internos do triângulo. Desse modo, o nosso trabalho em sala de aula, centrado na resolução de problemas, começou onde estavam os alunos, no quesito, noções dos conceitos matemáticos (geométricos).

Como diz Van de Walle (2009, p.58) “Ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas é mais centrado no aluno do que no professor. O ensino começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem – seus ‘pontos azuis’, seus conhecimentos prévios.”

O ponto de partida, isto é, o nosso problema gerador, à luz da metodologia em análise, causou um impacto positivo. A turma entendeu a proposta e os objetivos da pesquisa, participou de maneira satisfatória. Os grupos foram, progressivamente, construindo uma série de ladrilhamentos do plano e, com algumas indagações pertinentes feitas por mim, buscaram “explicações” matemáticas para a existência de tais configurações geométricas. Os registros das investigações e dos diálogos em sala de aula estão, respectivamente, no capítulo 5 e nos Apêndices D e E.

O desenvolvimento das atividades utilizando a metodologia proposta neste estudo, como já antevíamos, demandou um rigoroso planejamento (e tempo) para sua execução. As aulas duplas foram bastante produtivas, no entanto, o desenvolvimento do conceito de ladrilhamento do plano para além das pavimentações regulares e semirregulares não foi possível no tempo disponível.

A nossa pesquisa em sala de aula foi realizada em dois encontros. O retrato que temos, portanto, mostra a construção de novos conhecimentos sob as lentes do pesquisador. Vimos, neste recorte do mundo real, que ao mobilizar seu pensamento geométrico, o aluno experimentou uma situação de conflito na “travessia” entre seus pontos azuis e a beleza da descoberta.

No desenvolvimento das atividades, vimos que alguns participantes apresentaram dificuldades em relação aos conceitos elementares da Geometria. Vale ressaltar que, por conta da pandemia de covid-19, os alunos desta pesquisa cursaram os dois últimos anos do Ensino Fundamental num contexto de aulas remotas e, em muitos casos, com um precário acesso à internet. Esse fato, possivelmente, potencializou dificuldades pré-existentes e distanciou os alunos do conhecimento matemático daquela etapa de ensino.

Do exposto até aqui nestas considerações, faz-se necessário dizer que, as respostas ao problema de pesquisa surgiram durante o desenvolvimento das atividades. Ficou evidente que com a perspectiva metodológica adotada neste trabalho o desenvolvimento do conhecimento geométrico através do ladrilhamento do plano manifestou-se já no primeiro encontro, como relatamos no capítulo 5, cujo retrato parcial está no recorte de alguns diálogos subsequente à figura 42.

Notamos que esse desenvolvimento se deu a partir do trabalho em grupo, onde a leitura e a reflexão, o diálogo com os colegas, a exploração do novo e a mínima interferência do professor, propiciaram, aos atores participantes, independência na compreensão dos elementos geométricos que compõem o ladrilhamento do plano.

Quanto às limitações ou condições adequadas para a implementação da métodologia em sala de aula, elencamos alguns pontos que julgamos importantes compartilhar com o leitor sobre a nossa experiência neste trabalho em ensinar Matemática através da resolução de problemas:

- não foi uma tarefa fácil, em especial, para o professor-pesquisador que passou a maior parte de sua prática docente nos moldes de um ensino dito tradicional;
- o tempo disponível e o contrato didático que predomina na escola foi, de certo modo, um obstáculo;
- houve, inicialmente, uma certa resistência, por parte de alguns alunos, em trabalhar em grupos;
- o planejamento das aulas demandou tempo e muita clareza quanto aos objetivos de ensino e aprendizagem;
- foi nítida a mudança de postura, tanto do professor-pesquisador quanto do aluno;
- foi dado ao aluno, nessa perspectiva de ensino, a oportunidade de explorar, manipular, investigar e conjecturar em busca de respostas para o problema gerador;
- a fala do aluno sobre sua estratégia de resolução, em especial, durante a plenária foi um passo importante para a sistematização/formalização do conceito de ladrilhamento do plano;
- apesar de algumas resistências, uma parte significativa dos participantes gostaria que as aulas fossem desenvolvidas sob essa perspectiva.

Da teoria à prática, refletimos sobre os pontos positivos e as dificuldades de se trabalhar com a metodologia aqui em análise. E, sem perder de vista o nosso objetivo nesta pesquisa, trilhamos ao longo deste trabalho caminhos que nos revelaram a importância de se trabalhar o ensino de Matemática em um ambiente de investigação com foco na resolução de problemas. Todavia, não advogamos neste trabalho que uma estratégia de ensino e aprendizagem, por si só, seja capaz de mobilizar o interesse do aluno rumo à construção ativa de novos conhecimentos. Para tal, acreditamos, faz-se necessário articular a essa metodologia de ensino outros tipos de tarefas como, por exemplo, os projetos e as investigações de natureza matemática.

Ao fazer uma releitura deste trabalho, notamos que há diversas situações que poderiam ser exploradas em pesquisas futuras. Há, para além das pavimentações regulares e semirregulares, outros tipos de pavimentação que poderiam ser objetos de investigações matemáticas em sala de aula, como por exemplo, os mosaicos de Penrose e/ou a arte matemática de Escher como continuidade deste trabalho. Além dessa reflexão, há, possivelmente, situações frutíferas neste trabalho que nossos olhos não conseguiram ver.

Esperamos, por fim, que esta pesquisa possa servir para consultas e reflexões sobre o ensino de Matemática centrado na resolução de problemas. Ademais, que ela seja uma porta e um caminho que se abrem para um horizonte repleto de possibilidades, que sua leitura leve o leitor a um consistente e rico referencial teórico que, certamente, jogará luz à temática deste estudo e, por que não, o guiará em futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só) ... **Educação e Matemática**, Lisboa, APM, 8, p. 7-10, p. 35, 1989.

ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas. In: **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados**: Análise de uma Experiência, 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

BORBA, M. C; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2023.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Ensino Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular, 2018**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Ensino Médio. **Base Nacional Comum Curricular, 2018**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

_______. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, 1998. 148p.

_______. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática Ensino Médio – Parte III. Brasília: Ministério da Educação, 1999. 58p.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336p.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE. L. R.; VIANA. F. **Matemática em Contextos**: geometria plana e geometria espacial. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 2012.

DOLCE, O.; POMPEO, J, N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9**. geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação do DF. **Currículo em Movimento do Novo Ensino Médio. Portaria n° 507**, de 30 de dezembro de 2020.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA. A. B. H. **Mini Aurélio: o Dicionário da Língua Portuguesa**. 8.ed. Curitiba: Positivo, 2010. 960 p.

GARCIA, B. **Porta de Ishtar**. 2013. (P. Martins, Tradutor). *World History Encyclopedia*. Disponível em: https://www.worldhistory.org/trans/pt/1-272/porta-de-ishtar/. Acesso em 29 mar. 2024.

HOUAISS. A. **Dicionário Houaiss Conciso**. 1.ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2011.

JUNIOR, B.; SOUZA, V. I.; POSSAMAI, J. P. **A Resolução de Problemas no Ensino Médio: um mapeamento realizado nos anos 2016 a 2020**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v.7, n. especial, p. e4005, 24 de dezembro de 2021. Disponível em: https://doi.org/10.35819/remat2021v7iespecialid5514. Acesso em 5 jun. 2023.

LEITÃO, M. R. **Tesselações no Ensino de Geometria Euclidiana**. 2015. 59 f. Dissertação (Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte – CE, 2015.

MELLO, A. L. **Resolução de Problemas e Avaliação Conceitual: uma experiência no ensino de função afim**. 2018. 123 f. Dissertação (Matemática em Rede Nacional). Pato Branco, PR, 2018.

MELLO, H. A. Compondo um plano com polígonos: Tesselações: Tesselações (ou tilings) de Penrose. In: MELO, Hilton Andrade de. **Geometria nas Artes**, 2010. p. 62-69. Disponível em: http://www.hamello.com/PDF/livro_pt.pdf. Acesso em: 16 set. 2023.

MINAYO, M. C. S. (org.). **Pesquisa Social**. Teoria, método e criatividade. 26. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas, p.73-98. In: **Boletim de Educação Matemática** (BOLEMA), v. 25, n.41, dez. 2011. Universidade Estadual Paulista – Campus de Rio Claro. Ed. Comemorativa 25 anos.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2014.

ORTIGÃO, M.I.R. **A sala de aula de Matemática: avaliação das práticas docentes**. Revista Bolema, ano 22, n.33, p.117-140, 2009.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de janeiro: Interciência, 2006.

_________. **O ensino por meio de problemas**. Revista do Professor de Matemática, n. 7, p.11-16, 1985. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/7/3.htm. Acesso em: 25 mar. 2024.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

SANTOS, M. C. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo. v.9, n.12, p.11-15, 2002.

SANTOS, M. R. **Pavimentações do Plano: Um Estudo com Professores de Matemática e Arte**. 2006. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro – SP, 2006.

SCHATTSCHNEIDER, D. **The Pólya-Escher Connection**. Mathematics Magazine, Dec., 1987, Vol. 60, No. 5 (Dec., 1987), pp. 292-298. Published by: Taylor & Francis, Ltd. on behalf of the Mathematical Association of America. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/2690411. Acesso em 23 mar 2024.

SMIGLY, D. A. **Tesselações pentagonais e mosaicos de Penrose. 2017**. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~dsmigly/ensino/palestras/Tessela%C3%A7%C3%B5es%20pentagonais%20e%20mosaicos%20de%20Penrose.pdf. Acesso em 14 set. 2023.

TOLEDO, L. A. **Ensino da função exponencial: análise de resultados.** 2018. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio Preto – SP, 2018.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonesse. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VARGAS, C. V. **O Ensino e a Aprendizagem da Progressão Aritmética através da Resolução de Problemas.** 2019. 138 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Santa Maria – RS, 2019.

APÊNDICE A – Problema Gerador

Governo do Distrito Federal
Secretaria de Estado de Educação
Coordenação Regional de Ensino de São Sebastião – CED São Francisco

Disciplina: Matemática

Pesquisador: Sebastião Vieira de Farias

Aplicação: Ensino Médio

GRUPO:______

Prezados(as),

Seu grupo está recebendo um kit com os seguintes polígonos:

- ✓ triângulo equilátero;
- ✓ quadrado;
- ✓ pentágono regular;
- ✓ hexágono regular;
- ✓ octógono regular;
- ✓ dodecágono regular.

Os polígonos são coloridos e foram confeccionados em papel cartão. No kit, eles possuem cores distintas. Cada tipo de polígono possui uma única cor.

Geometria de forma lúdica

Desenhos geométricos com imagens que se completam estão presentes no nosso cotidiano. Eles podem ser vistos, por exemplo, nos revestimentos cerâmicos de pisos e paredes. Tais desenhos e a arte da decoração caminham juntos e proporcionam beleza e identidade aos ambientes.

Nas atividades propostas nesta pesquisa, vamos descobrir e construir lindas e deslumbrantes pavimentações[37].

[37] Técnicas que consistem em recobrir artificialmente uma superfície.

Motivação

Coloque os polígonos regulares de um determinado tipo ao redor de um ponto, encostando-os lado a lado[38]. É possível, sem deixar espaços vazios e sem sobreposições, fazer isso com cada um dos polígonos? Se a resposta for SIM, coloque novos polígonos regulares do mesmo tipo ao redor dos já colocados.

Com base nessa manipulação inicial, o grupo percebeu a existência de algum padrão geométrico?

[38] Toda aresta é lado comum a dois polígonos.

Problema

Consta, no projeto de reforma da escola, a criação de um laboratório de Matemática para que estudantes e professores troquem conhecimentos através de atividades práticas.

Utilizando a imaginação geométrica, pretende-se revestir, pisos e paredes com ladrilhos como os que estão disponíveis no kit que o grupo recebeu.

Em busca de padrões ornamentais inovadores, seu grupo foi convidado a participar da elaboração do revestimento que será feito no futuro laboratório.

Com o kit em mãos e o projeto do futuro laboratório em mente, reflitam, troquem ideias com os colegas do grupo e tomem decisões em relação às situações apresentadas a seguir.

Situação 1

a) Com as peças que o grupo recebeu, crie, para o laboratório, um **ladrilhamento lado-lado**[39] utilizando apenas um tipo de polígono (ladrilho).

Apresente a(s) configuração(ões) geométrica(s) elaborada(s) pelo grupo.

b) O que acontece ao redor de cada vértice (quando os ladrilhos são colocados lado-lado)?

____

____

c) É possível fazer isso com cada um dos ladrilhos disponíveis? Por quê?

____

____

[39] Ou pavimentação, é uma técnica que consiste em recobrir uma superfície com polígonos colocados lado a lado sem espaços vazios e sem sobreposições entre eles.

<u>Situação 2</u>

a) Reflitam, troquem ideias com os colegas do grupo e completem a tabela:

Polígonos	**Número de lados**	**Medida do ângulo interno**
Triângulo equilátero		
Quadrado		
Pentágono regular		
Hexágono regular		
Octógono regular		
Dodecágono regular		

b) Em quais desses polígonos as medidas dos ângulos internos dividem 360°?

____

____

c) Considerando que o ângulo total em torno de um ponto do plano é de 360 graus, quais polígonos, de um único tipo, podem ser colocados justapostos[40] no plano? Por quê?

____

____

Com base na investigação do grupo sobre a utilização de polígonos regulares de um só tipo, reflitam e completem a tabela:

Polígonos (regulares)	**É possível ladrilhar o plano?**	**Se a resposta for sim, quantos ladrilhos são utilizados em cada vértice?**
Triângulo	( ) Sim ( ) Não	
Quadrado	( ) Sim ( ) Não	
Pentágono	( ) Sim ( ) Não	
Hexágono	( ) Sim ( ) Não	
Octógono	( ) Sim ( ) Não	
Dodecágono	( ) Sim ( ) Não	

[40] Um ao lado do outro no plano, sem espaços vazios e sem sobreposição entre eles.

<u>Situação 3</u>

Agora, crie um ladrilhamento lado-lado utilizando exatamente dois tipos de ladrilhos. É possível construir esse tipo de pavimentação?

Se a resposta for SIM,

Apresente as possíveis configurações geométricas elaboradas pelo grupo.

E se a resposta for NÃO,

Explique o motivo que inviabiliza a construção da pavimentação em questão.

<u>Situação 4</u>

Sabemos que o ângulo total em torno de um ponto do plano é de 360 graus. Existem polígonos, de dois tipos, que podem ser colocados justapostos no plano? Por quê?

____

____

Se a resposta for SIM, troquem ideias com os colegas do grupo e preencham a tabela:

Composição de polígonos	Configurações	Possibilidades

Observação: a tabela acima foi elaborada com o objetivo de dar suporte à investigação e à criação do grupo. Todavia, devem prevalecer a imaginação e criatividade do grupo.

Se a resposta for NÃO, explique o porquê que não há esse tipo de configuração.

____

____

Espaço reservado para o registro de ideias/estratégias do grupo.

GRUPO:_____

Governo do Distrito Federal
Secretaria de Estado de Educação
Coordenação Regional de Ensino de São Sebastião – CED São Francisco

Disciplina: Matemática

Pesquisador: Sebastião Vieira de Farias

Aplicação: Ensino Médio

GRUPO:______

Prezados(as),

Este é o nosso último encontro nesta pesquisa. Para encerrar, vamos aprimorar nosso pensamento geométrico, buscando na Matemática "explicações" para aquilo que é pouco perceptível visualmente.

Com o kit em mãos e pensando em criar lindos e charmosos ladrilhamentos para o futuro laboratório de Matemática, troquem ideias com os colegas do grupo e tomem decisões relacionadas às situações 5 e 6.

Situação 5

a) É possível colocar ao redor de um ponto das paredes e/ou do piso, sem que haja espaços vazios ou sobreposição de peças, três ladrilhos, sendo um pentágono, um hexágono e um octógono? Sim ou não? Por quê?

____

____

____

____

b) Com o objetivo de deixar o futuro laboratório de Matemática com padrões geométricos bonitos e atraentes, elabore e apresente um mosaico (ou vários) utilizando exatamente três tipos de ladrilhos. É possível construir esse tipo de pavimentação? Quais ladrilhos foram utilizados?

____

____

____

____

c) De acordo com o item (b), se for possível ladrilhar o piso e as paredes com exatamente três tipos de ladrilhos, apresente os possíveis desenhos geométricos e use a tabela abaixo para registrar o que foi elaborado pelo grupo.

Composição de polígonos	Configurações	Possibilidades

Obs.: esta tabela é apenas um recurso. O grupo pode, e deve, utilizar, se preferir, outros modos de representar suas descobertas.

d) Com base nos estudos realizados até agora, é possível ladrilhar o plano utilizando quatro ou mais tipos de polígonos regulares? Por quê?

____

____

____

____

Situação 6

Utilizando apenas polígonos regulares, há ladrilhamentos[41] em que:

- a interseção de dois polígonos é sempre um lado, um vértice ou encontra-se vazia;
- a distribuição dos polígonos ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

a) Organize e complete a tabela abaixo, listando todos os ladrilhamentos que satisfazem as condições acima.

	Composição de polígonos	Configurações	Possibilidades
Exemplo:	6 triângulos equiláteros	(3, 3, 3, 3, 3, 3)	1

b) Agora, colem, na folha entregue pelo pesquisador, os ladrilhamentos criados pelo grupo e listados na tabela acima.

[41] Esses tipos de ladrilhamentos são chamados de regulares (só um tipo de polígono regular) ou semirregulares (mais de um tipo de polígono regular).

Situação 7

(**Enem – Modificado**) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

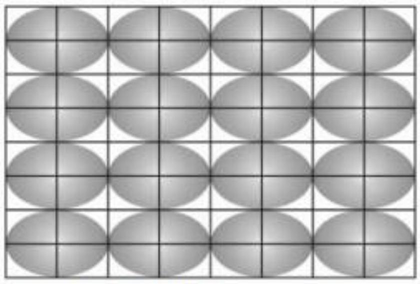


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

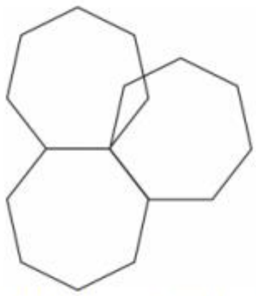
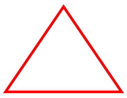
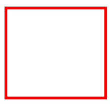
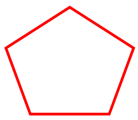
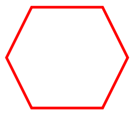
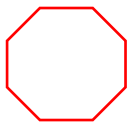
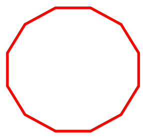


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Dodecágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	150°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles dodecagonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a) triângulo.
b) quadrado.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) octógono.

Com base no que foi estudado nas situações anteriores, justifique a resposta do grupo.

APÊNDICE B – Plano de Aula

Universidade de Brasília – UnB
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

PLANO DE AULA

Pesquisador: Sebastião Vieira de Farias

Orientadora: Profª. Drª. Simone Vasconcelos da Silva

Instituição: Universidade de Brasília

Local da coleta de dados: Centro Educacional São Francisco – Chicão

Série: 2º Ano do Ensino Médio – Turma C

1. Tema das Aulas

Ladrilhamento do Plano Euclidiano

2. Objetivo geral

Elaborar um projeto de decoração para as paredes do laboratório de Matemática utilizando ladrilhamentos regulares e semirregulares e aplicar, durante o desenvolvimento do projeto, a metodologia de resolução de problemas no estudo da pavimentação do plano euclidiano.

3. Objetivos específicos

- Explorar o material entregue pelo pesquisador;
- Fazer investigações livremente;
- Manipular polígonos regulares a fim de recobrir o plano euclidiano;
- Encontrar configurações de polígonos regulares que recobrem o plano.
- Recobrir o plano com polígonos regulares de um único tipo;

- Perceber, de modo intuitivo, que existem apenas três tipos de polígonos regulares que recobrem o plano;
- Mostrar, em linguagem matemática, que com apenas um tipo de ladrilho, os únicos que pavimentam o plano são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular;
- Utilizar ladrilhamentos semirregulares como ferramentas para a obtenção das medidas de ângulos internos dos polígonos regulares que o compõem;
- Recobrir o plano com polígonos regulares de tipos diferentes;
- Perceber via experimentação e matematicamente que existem apenas oito tipos de ladrilhamentos semirregulares.

4. Conteúdo: Geometria plana

- ângulos internos de um polígono regular;
- arestas e vértices;
- ladrilhamentos e simetrias;

5. Estratégias e Metodologia

1º Encontro – Duração: 90 minutos (aula dupla)

<u>Etapa 1</u>

- ✓ Apresentação do projeto de pesquisa;
- ✓ Interação com a turma e início da coleta de dados;
- ✓ Entregar e recolher o Termo de Assentimento;
- ✓ De maneira descontraída, perguntar:

a) O que é um polígono? Dê exemplos!
b) O que é um polígono convexo? Dê exemplos!
c) O que é um polígono regular? Exemplos.
d) Já ouviram falar em ladrilhamento, pavimentação ou mosaicos?

Etapa 2

- Dividir os 39 alunos[42] da turma em grupos;
- A turma ficará com: 9 grupos com 4 alunos em cada um e um grupo com 3 alunos;
- O critério estabelecido para a formação dos grupos será, tão somente, a afinidade entre os alunos;
- Entregar a proposta de atividade impressa em papel A4;
- Distribuir os kits aos grupos e, antes de propor o problema gerador, apresentar uma motivação[43] (consta na atividade a ser proposta).

Observação

Cada grupo receberá um kit com os seguintes polígonos regulares:

- ✓ triângulo equilátero;
- ✓ quadrado;
- ✓ pentágono regular;
- ✓ hexágono regular;
- ✓ octógono regular;
- ✓ dodecágono regular.

Os polígonos são coloridos e foram confeccionados em papel cartão. No kit, cada tipo de polígono possui uma única cor.

Etapa 3

- Apresentar o problema gerador juntamente com as situações 1 e 2;
- Trabalhar na perspectiva da **Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**[44];
- Registrar (por escrito e através de fotos) os trabalhos dos grupos;
- Estabelecer, na plenária, a relação entre ladrilhamento e ângulo interno dos polígonos e concluir que há apenas três ladrilhamentos regulares.

---

[42] Se todos e todas da turma desejarem participar da pesquisa.
[43] A motivação servirá de ponte entre o que o aluno já SABE e o NOVO conceito.
[44] Essa metodologia foi agrupada em 4 etapas.

Etapa 4

- Apresentar as situações 3 e 4;
- Utilizar a Metodologia supracitada na etapa 3;
- Registrar (por escrito e através de fotos) os trabalhos dos grupos;
- Recolher as atividades desenvolvidas nos grupos.
- Concluir, na plenária, que há apenas 6 ladrilhamentos com dois tipos de polígonos regulares;

2º Encontro – Duração: 90 minutos (aula dupla)

Etapa 1

- Distribuir novamente os kits aos grupos;
- Solicitar a retomada dos trabalhos referente ao problema gerador através das situações 5 e 6;
- Fazer os registros como mencionados nas etapas do 1º encontro;
- Concluir na plenária que há, no total, 3 ladrilhamentos regulares e 8 semirregulares.

Etapa 2

- Fazer o fechamento, caso o tempo seja favorável, com a situação 7;
- Utilizar os últimos 15 minutos de aula para que os estudantes possam responder ao questionário referente às atividades realizadas durante a pesquisa;
- Agradecimentos.

6. Avaliação

A avaliação, na perspectiva metodológica a ser trabalhada, acontece simultaneamente durante o processo de ensino e aprendizagem, isto é, ela é realizada através das observações e registros no decorrer da resolução dos problemas.

APÊNDICE C – Questionário

Universidade de Brasília – UnB
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional

PROFMAT

QUESTIONÁRIO

Objetivo: Avaliar a interação dos participantes com as atividades à luz da metodologia proposta

Pesquisador: Sebastião Vieira de Farias

Orientadora: Profª. Drª. Simone Vasconcelos da Silva

Instituição: Universidade de Brasília

Prezado(a),

Agradecemos sua participação nesta pesquisa e, por oportuno, pedimos mais uma colaboração. Por gentileza, responda ao questionário com sua opinião sobre o trabalho de sala de aula que foi desenvolvido nesta pesquisa.

1. Em sua opinião, o trabalho em grupo na aula de Matemática foi produtivo? Você gostou? Explique!

____

____

____

2. As resoluções apresentadas pelos colegas foram importantes para compreender o problema?

____

____

____

3. Foi difícil resolver problemas de Geometria antes do professor explicar os conceitos e/ou fórmulas?

4. Os materiais manipuláveis nas aulas ajudaram na compreensão dos problemas?

5. Foi utilizada nas aulas de Matemática uma estratégia de ensino diferente. Escreva sobre as vantagens e desvantagens dessa estratégia.

6. Em sua opinião, o ensino de Geometria através da estratégia utilizada nestes encontros contribuiu para o seu aprendizado?

7. O estudo das pavimentações e a descoberta de padrões foram, na sua opinião, úteis no aprimoramento de seu conhecimento geométrico?

Obrigado pela sua participação!

Novembro/2023

APÊNDICE D – Recortes de alguns diálogos: 1º Encontro

Grupo 5

A1: *professor, como é que a gente faz para encontrar o ângulo interno?*

P: *Boa pergunta! Qual a medida do ângulo interno do triângulo equilátero?*

A1: ...

P: *Alguém do grupo sabe?*

A2: *Acho que é 45 ou 60, um dos dois.*

P: *Vamos lá! Em um triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos é igual a quanto?*

A1: *É igual a 180 graus.*

A3: *No triângulo equilátero os ângulos são iguais, né?*

A1: *Então é só dividir por três.*

A4: *Beleza, mas... e as outras figuras?*

P: *Ligue, a partir de um vértice, diagonais dividindo a figura em triângulos...*

A1: *Entendi.*

Os alunos desse grupo, a partir do diálogo, trocaram ideias, traçaram diagonais, fizeram cálculos e, minutos depois, os ângulos internos de todos os polígonos regulares do kit estavam registrados numa tabela.

Grupo 3

A1: *professor, a gente pode usar qualquer uma dessas figuras?*

P: *Usando apenas um tipo de figura, é possível colocá-las ao redor de um ponto sem sobrepô-las e sem deixar espaços vazios?*

A1: *Sim.*

P: *Isso pode ser feito com cada uma delas?*

A2: *Pode, porque os lados são iguais.*

A3: *Acho que não é isso. Por exemplo, a gente não consegue fazer isso com o pentágono.*

P: *Não foi possível ajustar os pentágonos em torno de um ponto? Por quê?*

A4: ...

A1: *Só é possível fazer isso com triângulo, quadrado e o hexágono, mas eu não sei explicar isso com palavras.*

<u>Grupo 2</u>

A1: *professor, conseguimos. Tá certo?*

P: *Está bonito, mas vocês utilizaram três tipos de polígono.*

A2: *Uai!*

P: *Por enquanto, devemos usar apenas um tipo.*

A2: *Ah!*

A3: *Professor, então, a gente já fez. Foi com esses três aqui ó [triângulo, quadrado e hexágono].*

P: *É possível ajustar os pentágonos em torno de um ponto? Por quê?*

A4: *Não é possível fazer isso com os pentágonos, nem com os de oito lados...*

A1: *Esses [polígonos] de doze lados também não dão certo.*

A2: *Isso é por causa dos ângulos?*

APÊNDICE E – Recortes de alguns diálogos: 2º Encontro

Grupo 4

A1: *professor, acho que conseguimos ajustar aqui ó [um pentágono, hexágono e o octógono].*

P: *Não têm espaços vazios e nem sobreposições entre as peças, né?*

A2: *...*

A3: *Não está certinho, mas pode ser um defeito das peças.*

A4: *Ou... Que o ângulo em torno desse ponto é diferente de 360 graus. Né, professor?*

P: *E, nesse caso, o que devemos fazer?*

A4: *Uai! Acho que é só somar os ângulos.*

P: *Com base no que vimos até agora, quais são as medidas dos ângulos internos de cada um desses polígonos?*

A1: *Beleza! Entendi!*

Minutos depois...

A1: *Professor, professor, a soma deu 363 graus. Então, não é possível colocar esses três juntos.*

Grupo 1

A1: *professor, nessa situação 3, eu posso usar qualquer tipo de figura? Ou só posso usar as que ficam bem ajustadas?*

P: *O que significa "bem ajustadas"?*

A1: *Eu acho que você entendeu. É quando não ficam espaços [vazios] e nem parte de uma peça sobre a outra.*

P: *Ok. Dito isso, é possível construir esse tipo de pavimentação?*

A2: *Consegui aqui ó: três triângulos e dois quadrados.*

A3: *Está certo, professor?*

P: *Vamos ver! Quanto mede o ângulo total em torno desse vértice?*

A2: *360 graus, três triângulos e dois quadrados.*

A4: *Eu consegui aqui usando quadrado e octógono.*

<u>Grupo 5</u>

A1: *Nossa! Está ficando lindo. O nosso vai ser o mais bonito.*

A2: *Quem vai apresentar?*

A3: *Eu posso apresentar. Mas, acho que, não consigo explicar por que quatro tipos de polígonos não podem ladrilhar o plano.*

A4: *É só falar que o ângulo [em torno de um ponto] é maior que 360 graus.*

A3: *Isso é suficiente?*

A1: ...

A4: *Olha aqui: se a gente colocar um triângulo, um quadrado, um pentágono e um hexágono [a soma dos ângulos em torno de um vértice] dá 378 graus. Eu fiz as contas.*

A3: *Entendi. Se com esses não deu, significa que qualquer outra combinação com quatro peças não vai dar. Gente, é isso?! Vocês concordam?*

A1: *Sim.*

APÊNDICE F – Termo de Assentimento

Universidade de Brasília – UnB
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional

PROFMAT

Pesquisador: Sebastião Vieira de Farias
Orientadora: Profª. Drª. Simone Vasconcelos da Silva
Instituição: Universidade de Brasília
Local da coleta de dados: Centro Educacional São Francisco – Chicão

TERMO DE ASSENTIMENTO

Esta atividade faz parte de uma pesquisa vinculada ao trabalho de dissertação de mestrado do pesquisador Sebastião Vieira de Farias da Universidade de Brasília. O trabalho tem como objetivo investigar as contribuições de uma metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática no contexto da Geometria.
Você não será identificado(a) e nem é obrigado(a) a participar desta pesquisa. O trabalho em sala de aula referente à pesquisa será realizado em duas aulas duplas (90 minutos cada uma). Sua participação é muito importante para nós.

Prezado(a) estudante, você concorda em participar desta pesquisa?

( ) Sim ( ) Não

____

Assinatura do(a) estudante

APÊNDICE G – Aceite Institucional

ACEITE INSTITUCIONAL

Eu, ____, abaixo assinado, responsável pela escola Centro Educacional São Francisco – Chicão, localizada em São Sebastião/DF, autorizo a realização do estudo "A Matemática e o Ladrilhamento do Plano Euclidiano no Ensino Médio: Descobrindo e Criando Padrões Através da Resolução de Problemas".

O referido estudo, vinculado ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade de Brasília-UnB, em conformidade com a Carta de Apresentação, será conduzido pelos pesquisadores Profª. Drª. Simone Vasconcelos da Silva (orientadora) e Prof. (mestrando) Sebastião Vieira de Farias.

Fui informado, pelos responsáveis do estudo, sobre os objetivos e características do projeto de pesquisa, assim como a dinâmica das atividades que serão realizadas nesta instituição a qual represento. Ademais, o custo com o material pedagógico a ser utilizado na pesquisa é de responsabilidade dos pesquisadores.

Como coparticipante do presente projeto de pesquisa, esta instituição está ciente de suas responsabilidades enquanto Unidade Escolar, assegurando aos sujeitos envolvidos, no referido trabalho, um ambiente pedagógico de respeito, bem-estar e segurança.

São Sebastião/DF, _____ de _______________de 2023.

____

Assinatura e carimbo do responsável institucional

APÊNDICE H – Moldes para a Construção de Polígonos Regulares