



**UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI**  
**Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT - UFVJM**  
**Antônio Alessandro Pastana de Souza**

**UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E SUAS POSSÍVEIS  
APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO**

**Teófilo Otoni**  
**2024**

**Antônio Alessandro Pastana de Souza**

**UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E SUAS POSSÍVEIS  
APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Anderson Luiz Pedrosa Porto

**Teófilo Otoni**

**2024**



### Catálogo na fonte - Sisbi/UFVJM

S729u Souza, Antonio Alessandro Pastana de  
2024 UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E SUAS POSSÍVEIS  
APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO [manuscrito] / Antonio Alessandro  
Pastana de Souza. -- Teófilo Otoni, 2024.  
121 p.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Anderson Luiz Pedrosa Porto.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) --  
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teófilo Otoni, 2024.

1. Funções Circulares Elementares. 2. Funções  
Hiperbólicas. 3. Funções Hiperbólicas Inversas - Derivadas.  
4. Funções Logarítmicas naturais. 5. Função Exponencial  
Natural. I. Porto, Anderson Luiz Pedrosa. II. Universidade  
Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFVJM com os  
dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Este produto é resultado do trabalho conjunto entre o bibliotecário Rodrigo Martins Cruz/CRB6-  
2886  
e a equipe do setor Portal/Diretoria de Comunicação Social da UFVJM

**Antônio Alessandro Pastana de Souza**

**UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E SUAS POSSÍVEIS APLICAÇÕES  
NO ENSINO MÉDIO.**

Dissertação apresentada ao MESTRADO PROFISSIONAL  
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, nível de  
MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do  
título de MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Anderson Luiz P. Porto.

Data de aprovação: 06/03/2024

---

Prof. Dr. Anderson Luiz Pedrosa Porto  
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM

---

Prof. Dr. Weversson Dalmaso Sellin  
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM

---

Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso  
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

**Teófilo Otoni**



”Assim diz o Senhor, o teu Redentor, o Santo de Israel: Eu sou o Senhor teu Deus, que te ensina o que é útil, e te guia pelo caminho em que deves andar”.

(Bíblia Sagrada, Isaías 48:17)



## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, quero agradecer a Deus por todo o apoio e pela presença marcante do seu Espírito Santo durante toda essa caminhada, pois sem Ele nada podemos fazer.

Agradeço também à minha esposa Conceição Ricardo Pastana e às minhas filhas Sofia Ricardo Pastana e Sarah Ricardo Pastana pelo apoio, compreensão e orações durante todo este período de estudo que muitas vezes nos privou de momentos de lazer em família. Sem vocês esse esforço não faria sentido!

Agradeço à minha família pelo incentivo constante e em especial à minha mãe Ana Amélia Pastana que sempre teve o cuidado de acompanhar a minha educação. A meu pai Francisco Rodrigues de Souza *in memoriam*, quero dizer-lhe que o impossível aconteceu!

Agradeço às minhas irmãs Ana Michelle Pastana Junco, Ana Lillian Pastana Kock e Ana Cláudia Pastana de Sousa que sempre partilharam das dificuldades e alegrias dessa caminhada. Obrigado pelo ombro amigo, pelo amparo nos momentos difíceis, dentro do era possível, e pela presença nos momentos de conquista e de felicidade, em todo o percurso. E ao meu irmão Jorge Antônio Pastana de Souza que do seu jeito sempre foi um referencial importante para mim, partilho esta nossa conquista.

Agradeço a todo o corpo docente da UFVJM que fez parte dessa minha caminhada no PROFMAT. Em especial aos professores Weverson Dalmaso Sellin e Marcelo Oliveira Veloso pelas orientações e contribuições, bem como ao meu orientador Anderson L. Pedrosa Porto pelo trabalho de excelência realizado durante a orientação e direcionamento deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de turma Expedito, Dionatam, André, Thaynanny, Marcelo, Humberto e Claudiane pela parceria, compromisso, compreensão e companheirismo demonstrados nos momentos síncronos, assíncronos e presenciais. Nos momentos de estudo, nas viagens, no incentivo mútuo e nos momentos de alegria e de perda. Agradeço a todos por poder ter feito parte, pela primeira vez de um grupo de desconhecidos que se tornou coeso, unido de modo empático e vitorioso.

Agradeço à UFVJM por me proporcionar a oportunidade de estudar numa instituição pública de referência e poder desfrutar de uma formação de extrema qualidade que já está abrindo novos horizontes na minha prática profissional.

Agradeço à CAPES e ao CNPQ, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. O qual foi muito importante, em um momento delicado de minha formação.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu pudesse concluir mais esta etapa de estudo com êxito.



## RESUMO

O trabalho em apreço apresenta um estudo minucioso das funções hiperbólicas, suas possíveis aplicações no ensino básico e no ensino de Cálculo 1, além de diversas construções gráficas realizadas com o auxílio do *software GeoGebra*. Para tanto, fez-se primeiramente, um estudo sobre as funções trigonométricas circulares (clássicas), com uma visão histórica, integradora e interdisciplinar. Buscou-se obter uma relação intrínseca entre a exponencial natural, o logaritmo neperiano, as funções hiperbólicas e a trigonometria circular. Tanto a argumentação, quanto as construções referentes à geometria hiperbólica apresentadas aqui, priorizaram os conhecimentos básicos correlatos a este tema, e que são amplamente estudados na educação básica. Este fato no entanto, apenas direcionou o desenvolvimento deste trabalho trazendo mais leveza ao texto sem limitá-lo. Nossa abordagem, perpassou por definições oriundas de uma abordagem geométrica, para a função exponencial natural, e para o cálculo da área sob a faixa da hipérbole equilátera, seguida de uma abordagem algébrica, na qual aplicaram-se algumas estruturas do Cálculo com a finalidade de averiguar a validade dos argumentos propostos, bem como do uso das propriedades das funções reais para compor e estruturar nossa linha de raciocínio. O que nos permitiu evidenciar algumas das principais relações entre as funções circulares, as funções hiperbólicas e suas representações gráficas por meio do *software GeoGebra*. Durante o desenvolvimento deste estudo, destacou-se a real possibilidade de se ensinar sobre as funções hiperbólicas desde o ensino médio, logo após o estudo de funções, dado que estas, por sua vez, ou são combinações de funções exponenciais naturais, ou são combinações de funções logarítmicas naturais com certas funções polinomiais. Cabe ressaltar, que as matrizes do grupo de *Lorentz* têm parametrizações que permitem escrever suas entradas como certas funções hiperbólicas e, além disso, as hipérbolas aparecem naturalmente, como seções cônicas na Geometria Analítica. Por fim, após a verificação das grandes semelhanças entre a trigonometria circular e a hiperbólica, suas similaridades quanto às suas propriedades elementares, e suas derivadas, entre outras, utilizou-se o *software GeoGebra* para dar uma construção capaz de diferenciar a catenária de uma hipérbole equilátera e de uma parábola com os mesmos vértices, o que foi realizado de um modo didático e acessível ao público do ensino médio e/ou graduação.

**Palavras-chave:** Trigonometria circular; trigonometria hiperbólica; exponencial natural; logaritmo natural; *GeoGebra*; ensino médio.





## ABSTRACT

The present work demonstrates a detailed study of hyperbolic functions, their possible applications in basic education and the teaching of Calculus 1, in addition to various graphical constructions carried out with the aid of *GeoGebra software*. For this purpose, a study was first conducted on circular (classical) trigonometric functions, with a historical, integrative, and interdisciplinary vision. The aim was to obtain an intrinsic relationship between the natural exponential, the natural logarithm, hyperbolic functions and circular trigonometry. Both the argumentation and the constructions related to hyperbolic geometry presented here prioritized the basic knowledge related to this theme, which is widely studied in basic education. This fact, however, only directed the development of this work, bringing more lightness to the text without limiting it. Our approach included definitions originating from a geometric approach, for the natural exponential function, and for calculating the area under the range of the equilateral hyperbola, followed by an algebraic approach, in which some structure of Calculus structures were applied with the purpose of verify the validity of the proposed arguments, as well as the use of the properties of real functions to compose and structure our line of reasoning. This allowed us to highlight some of the main relationships between circular functions, hyperbolic functions, and their graphical representations using *GeoGebra software*. During the development of this study, the real possibility of teaching about hyperbolic functions from high school onwards, right after the analysis of functions, was highlighted, given that these, in turn, are either combinations of natural exponential functions or combinations of natural logarithmic functions with certain polynomial functions. It is worth mentioning that the matrices of the *Lorentz* group have parameterization that allow their entries to be written as certain hyperbolic functions and, furthermore, hyperbolas naturally appear as conic sections in Analytical Geometry. Finally, after verifying the great similarities between circular and hyperbolic trigonometry, their similarities in terms of their elementary properties, and their derivatives, among others, *software GeoGebra* was used to provide a construction capable of differentiating the catenary of an equilateral hyperbola and a parabola with the same vertices, which was carried out in a didactic way and accessible to high school and/or undergraduate audiences.

**Keywords:** Circular trigonometry; hyperbolic trigonometry; natural exponential; natural logarithm; *GeoGebra*; high school education.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
1.1	Uma breve abordagem histórica	18
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
2.1	A função exponencial natural	22
2.2	Funções Circulares	24
2.2.1	<i>Função seno</i>	28
2.2.2	<i>Função cosseno</i>	29
2.2.3	<i>Função Tangente</i>	30
2.2.4	<i>Função Cotangente</i>	31
2.2.5	<i>Função Secante</i>	32
2.2.6	<i>Função Cossecante</i>	32
2.3	A Hipérbole	33
2.3.1	<i>Forma Canônica da hipérbole</i>	40
2.3.2	<i>Estudo analítico das assíntotas de uma hipérbole</i>	45
2.3.3	<i>A equação canônica da hipérbole transladada</i>	46
2.3.4	<i>As funções hiperbólicas</i>	47
2.4	A parametrização de um disco centrado na origem	48
2.4.1	<i>As funções hiperbólicas e algumas parametrizações</i>	50
2.4.2	<i>Parametrizações</i>	52
2.5	A Paridade das funções hiperbólicas	55
2.6	Algumas derivadas e propriedades das funções hiperbólicas	57
2.7	Matrizes e funções hiperbólicas	59
2.8	As razões trigonométricas na hipérbole	60
2.8.1	<i>A função cosseno hiperbólico</i>	61
2.8.2	<i>A função seno hiperbólico</i>	62
2.8.3	<i>A função tangente hiperbólica.</i>	64
2.8.4	<i>A função secante hiperbólica</i>	65
2.8.5	<i>A função cossecante hiperbólica</i>	66
2.8.6	<i>A função Cotangente hiperbólica</i>	67
2.9	Funções hiperbólicas inversas	69
2.9.1	<i>A inversa da função seno hiperbólico</i>	70
2.9.2	<i>A inversa da função cosseno hiperbólico</i>	71
2.9.3	<i>A inversa da função tangente hiperbólica</i>	72
2.9.4	<i>A inversa da função cotangente hiperbólica</i>	73
2.9.5	<i>A inversa da função secante hiperbólica</i>	75
2.9.6	<i>A inversa da função cossecante hiperbólica</i>	76

<b>3</b>	<b>GEOGEBRA: UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA A SERVIÇO DA APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>3.1</b>	<b>Interface e versão . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>4.1</b>	<b>Comparação entre a parábola e a hipérbole utilizando o <i>software GeoGebra</i> . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>101</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>105</b>
	<b>APÊNDICE A – A ÁREA SOB A FAIXA DA HIPÉRBOLE E ROTAÇÕES . . . . .</b>	<b>109</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Antes de iniciar uma discussão sobre o tema abordado neste trabalho, fazem-se necessárias algumas observações pertinentes que poderão direcionar o leitor a formular juízos de valor que estejam de acordo com a proposta apresentada nele. O trabalho aqui delineado, é o resultado de um diálogo contínuo com meu orientador, o professor Anderson L. P. Porto <sup>1</sup>, sobre o tema que deveria ser desenvolvido. O qual foi concebido, inicialmente, visando a aplicação direta em sala de aula pelo autor. Entretanto, dadas as dificuldades, de ordem cronológica, que foram enfrentadas neste período, optou-se no fim, pela conclusão deste mediante a realização de uma pesquisa bibliográfica, salientando que o autor assume o compromisso com a discussão dos temas e suas possíveis implementações a posteriori, além da divulgação de seus resultados. Durante as reuniões e discussões com a finalidade de delimitar o tema a ser desenvolvido e a amplitude de sua abrangência, optou-se por escolher algo que contemplasse tanto a possibilidade real de aplicação e intervenção diretas junto aos discentes da educação básica do ensino médio da Bahia, por ser a realidade com a qual o autor trabalha desde julho de 2002, como também por alcançar os objetivos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, o qual visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente, de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. Assim, considerando estes balizadores e amparados nos livros didáticos recebidos do Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio - PNLEM de 2005-2008 e de 2018-2019 dos autores Iezzi *et al.* (2004) <sup>2</sup> e Dante (2016) <sup>3</sup> respectivamente, é que surge então a proposta de trabalho com as funções hiperbólicas, dadas as grandes contribuições que esta poderia trazer para o nosso público alvo. Deste modo, ressalta-se que nossa abordagem, em várias partes do texto, está voltada para um professor/estudante de nível médio, podendo ser fundamental, ou para um aluno de Pré-Cálculo ou Cálculo I, que busca alternativas para compreender de forma mais elementar e embasada a teoria que envolve a descoberta e o estudo das funções hiperbólicas, incluindo tópicos sobre limites e derivadas. Assim, não serão abordados tópicos mais avançados da geometria hiperbólica, tais como a existência de triângulos cuja soma de seus ângulos internos seja menor do que  $180^\circ$  nem da existência de outras geometrias não-euclidianas nas quais a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que  $180^\circ$ , a exemplo da geometria esférica <sup>4</sup>, uma vez que este estudo ainda se configura como uma possibilidade a ser desenvolvida em trabalhos futuros na educação básica, podendo ser complementada em qualquer tempo por àqueles que juntamente conosco quiserem implementar esta proposta e com-

<sup>1</sup> Prof. Dr. lotado no ICT - Diamantina - UFVJM e docente do PROFMAT do Campus de Teófilo Otoni - MG.

<sup>2</sup> Nesta obra os temas aqui abordados podem ser encontrados no capítulo 6: Função Exponencial. p. 178-185, 235 e no capítulo 7: Função Logarítmica. p. 200, 201-218-224, 229, 230.

<sup>3</sup> A mesma proposta pode ser encontrada aqui no capítulo 4: Função Quadrática. p. 120, 121, 138, 139, no capítulo 5: Função Exponencial. p. 159-163, 167-171 e no capítulo 6: Função Logarítmica. p. 189-196.

<sup>4</sup> Um bom exemplo da abordagem sobre as Geometrias não-euclidianas com uma abordagem voltada ao nível da educação básica pode ser encontrada em (THOMAZ; FRANCO, 2007) na qual os autores realizam o estudo da geometria esférica riemanniana a partir da geometria euclidiana.

partilhar seus resultados, bem como, a superação de seus obstáculos que, por enquanto, fogem ao espectro de uma pesquisa de cunho bibliográfico, mesmo que esta conte com uma visão pautada no chão da escola, posto que a prática sempre apresenta uma dinâmica própria e peculiar, advinda da ação conjunta de fatores imprevisíveis que interferem diretamente nas relações entre o professor, como mediador do conhecimento e os educandos, como protagonistas da sua própria aprendizagem.

Nossa abordagem, consiste num esforço semelhante ao do grande matemático *Vincenzo Riccati* (1707-1757), que segundo Maor (2008, p. 189), era intrigado pela semelhança entre as equações:  $x^2 - y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 1$ . Às quais representam a hipérbole e o círculo unitário, respectivamente. Ele desenvolveu sua teoria das funções hiperbólicas inteiramente a partir da geometria da hipérbole, e mesmo assim, desde os primórdios do desenvolvimento dessa teoria, encontrou tantas semelhanças de definição, de usos, de propriedades e de notação com as funções trigonométricas circulares  $\text{sen}(x)$  e  $\text{cos}(x)$ , para às quais de acordo com Eves (2004) usava as notações **Sc** e **Cc**, respectivamente, que o levaram também, em 1957, segundo Maor (2008, p. 188) a introduzir a notação **Ch** e **Sh** para as funções *coseno* e *seno hiperbólicos*. Entretanto, de acordo com este autor e com Alhadas (2013, p. 8-9), o primeiro desenvolvimento sistemático da teoria das funções hiperbólicas, “incluindo a notação atual para essas funções” foi feito por *Johann Heinrich Lambert*, mais conhecido por *Lambert*, de modo análogo ao que fez *Leonard Euler* (1707-1783) para as funções circulares.

Atualmente, em notação moderna, escrevemos  $\text{senh}(x)$  e  $\text{cosh}(x)$  para especificar que estes elementos foram originados da representação gráfica da hipérbole de semi-eixo focal medindo 1 e centrada na origem do sistema cartesiano ortogonal, ao qual hoje chamamos de hipérbole unitária em referência direta ao  $\text{sen}(x)$  e ao  $\text{cos}(x)$  empregados desde os trabalhos de *Euler* como as funções circulares. Vale lembrar que estas últimas notações já foram recompiladas para agregar a representação moderna destes conceitos.

O presente trabalho foi estruturado em sete capítulos, de modo que, no capítulo 1, delineamos as motivações e as principais estratégias que utilizamos na construção de uma visão panorâmica acerca da teoria das funções hiperbólicas, possibilitando ao professor/estudante, aprender/ensinar sobre este tema, delimitando assim o nosso público alvo. E, inserindo o debate, na forma de questionamentos, sobre o tipo de relação existente entre a hipérbole equilátera e a exponencial natural. Direcionando assim, o caminho da (re)construção, do nossos conhecimentos sobre as funções hiperbólicas, através da análise comparativa de suas relações com as das funções circulares elementares.

No capítulo 2, nosso foco concentrou-se na compreensão dos fatos e personagens históricos que contribuíram diretamente para o desenvolvimento teórico, sobre as funções hiperbólicas, buscando destacar o papel, alavancador, das descobertas matemáticas, enquanto conhecimentos construídos social e culturalmente. De modo que, estes podem ser lapidados enquanto são construídos. Assim, iniciamos o estudo analisando o contexto histórico no qual se encontram imbricados tanto a origem e o desenvolvimento das funções hiperbólicas quanto os das

funções circulares elementares. E estes, por sua vez, quando realizados de modo comparativo evidenciam importantes nuances da teoria das funções hiperbólicas que surgem, geralmente, de modo implícito no desenvolvimento teórico, salientando ainda, como estas se relacionam com a exponencial natural. Por outro lado, destacamos alguns dos conceitos matemáticos fundamentais referentes a estas funções, passando por uma discussão minuciosa de algumas propriedades das funções hiperbólicas, como vemos no capítulo 3, onde abordamos de forma concisa alguns dos principais tópicos da trigonometria elementar circular, destacando propriedades que serão utilizadas na abordagem da trigonometria hiperbólica. Enquanto no capítulo 4 abordamos, sob a ótica das geometrias euclidiana e cartesiana, a construção geométrica com régua e compasso da hipérbole e sua forma algébrica canônica derivada da geometria analítica, baseada numa abordagem focal, enfatizando a possibilidade de sua construção com régua e compasso, bem como das relações existentes entre as fórmulas da hipérbole equilátera e da circunferência unitária e das derivadas destas funções. Explicitando ainda como principal característica sua relação com as funções exponencial natural e logarítmica neperiana, e a relações inversas entre as funções  $e^x$  e  $\ln(x)$ . Para tanto, definimos, em termos geométricos, o valor de  $e^x$ , destacando como ponto importante o estudo da paridade destas funções.

Por sua vez, no capítulo 5, abordamos a construção das funções hiperbólicas elementares e de suas inversas ressaltando, tanto as relações construtivas destas em função da exponencial natural e do logaritmo neperiano, quanto às comparativas com as funções trigonométricas circulares elementares, asseverando suas semelhanças quanto às definições, contudo, destacando as diferenças que expressam quanto a seus resultados. Ainda neste capítulo apresentamos o *software GeoGebra* como uma ferramenta tecnológica e pedagógica essencial para o desenvolvimento do trabalho com as funções hiperbólicas, em sala de aula, descrevendo rapidamente sua interface e utilização.

Por conseguinte, no capítulo 6 desenvolvemos uma atividade didática na qual o *software GeoGebra* constitui-se como principal ferramenta tecnológica de uso pedagógico com grande potencial dinamizador para o ensino de matemática através da resolução da conjectura de *Galileu* sobre a *catenária*, curva que ele pensava ser uma parábola, na qual priorizam-se as representações gráficas e as estruturas algébricas destas curvas representadas com o referido *software*. Neste contexto, utilizamos a equação geral das cônicas e a equação da *catenária* para demonstrar que esta não pode ser uma parábola. E de modo análogo, utilizamos a equação da hipérbole translada com eixo real sobre o eixo das ordenadas para demonstrar que a hipérbole também não pode ser confundida com uma parábola.

E por fim, no capítulo 7, apresento como conclusão deste trabalho as limitações e possibilidades identificadas para que o estudo das funções hiperbólicas seja uma realidade em nossas escolas de nível médio, destacando o papel central do conhecimento matemático construído historicamente e de modo contextualizado. Algumas das discussões presentes no texto encontram justificativas mais aprofundadas, descritas e/ou indicadas, no Apêndice A, que



trata das ideias relacionadas aos conceitos de ângulos, de rotação de eixos, e de área oriundos da hipérbole unitária.

### 1.1 Uma breve abordagem histórica

Desde os tempos mais remotos da humanidade o homem tem desenvolvido técnicas de produção e de armazenamento de alimentos cada vez mais sofisticados, visando tanto a sua sobrevivência quanto a melhoria de sua qualidade de vida. E é na busca da melhoria destes padrões que ele se envolve com o desenvolvimento de técnicas de cultivo, de produção de explicação de fenômenos naturais ou não, com a criação de ferramentas cada vez mais tecnológicas como vemos em Eves (2004), o que nos leva a produzir de modo interligado tanto a sua cultura como o seu conhecimento ancestral.

Conhecimento este que pode ser identificado de forma particular reconhecendo-o como conhecimento egípcio, maia, inca, romano, grego, etc, de acordo com D'Ambrosio (1998). Tais ensinamentos estão carregados de simbologia e de significados bem como de técnicas das mais variadas. O que nos mostra que se pode falar da etnomatemática remanescente destes povos. A matemática que se conhece e estuda-se está repleta de contribuições significativas destes diversos etnos que devido às estruturas de poder, e das necessidades do comércio chegaram até nossos dias. Muitas técnicas foram desenvolvidas desde então, entretanto as demandas de cada época tais como a revolução agrícola, o renascimento, o iluminismo também chamado de *A era da razão*, o período das grandes navegações, e as revoluções industriais e tecnológicas juntamente com a globalização acabaram por selecionar e cristalizar algumas formas de se conhecer, trabalhar e pensar. E neste cenário, desde a antiguidade, a matemática vem se configurando como grande ferramenta de trabalho, uma vez que segundo D'Ambrosio (1998) “o próximo passo necessário deste desenvolvimento consiste na busca de uma fundamentação teórica, de um substrato conceitual no qual essas técnicas, habilidades e práticas se apoiam” e é justamente aí que a análise histórica nos ajuda muito, pois aproxima e indica convergências salutares entre a etnomatemática e a história das ciências de um modo geral. Deste modo, ao abordar a origem histórica desse corpo de conhecimentos estruturado de forma lógica e axiomática que se chama Matemática, cabe situá-la não no mundo platônico ideal, nem tão pouco no mundo limitado da necessidade, ou da utilidade imediatista, mas sim no plano das possibilidades onde o que governa o mundo não é o número, mas sim a ação, a engenhosidade, a criatividade baseada naquilo que D'Ambrosio (1986) chamou de realidade - ação - reflexão, que coloca a história do nosso desenvolvimento racional, e porque não dizer matemático, como ponto alavancador e integrador que é capaz de gerar mais engajamento, significado e valor trazendo assim uma maior compreensão sobre aquilo que se está tentando ensinar, do que àquela gerada pela apresentação de algo pronto acabado e asséptico. Como algo alheio à realidade, mas que deve ser internalizado e compreendido como essencial e sumamente importante. Tal prática carece de revisão, pois como nos ensina Epstein (1991) há uma diferença gigantesca entre o signo, ou o super signo idealizado por *Descartes*, em suas “*Regras para a direção do espírito*” onde ele se refere a um método que “*aliviaria a memória, diminuiria a lentidão de nosso pensamento e ampliaria a*

*nossa capacidade mental*” e o seu significado, assim como entre a técnica e a historicidade que a justifica, que a elabora, que a transforma, que a lapida e que a axiomatiza, a fim de utilizá-la em contextos diversos. Mas ainda neste caso, a historicidade da técnica, seja ela algorítmica ou de qualquer outro tipo, ainda lhe possibilitará uma transposição didática menos traumática e mais assertiva, uma vez que leva em si a possibilidade do refinamento, de um raciocínio que considera o erro, e a comparação como partes importantes do processo de ensino-aprendizagem. Desta forma, munidos deste pensamento, é que buscamos as raízes e as motivações que levaram às descobertas sobre o que conhecemos hoje sob a efígie das funções hiperbólicas.

De acordo com Gómez, Frensel e Santo (2010) a primeira referência histórica que encontramos sobre o uso de funções hiperbólicas é no trabalho de um ex-aluno de *Eudóxio* na academia de *Platão: Menaecmus* (380-320 a.C., aproximadamente). Tais funções surgiram naturalmente enquanto ele buscava resolver três problemas famosos da Geometria grega: a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Ele foi o primeiro a mostrar que ao seccionar-se um cone com um plano não paralelo à sua base poder-se-iam obter elipses, parábolas e hipérbolas.

Ainda de acordo com este autor, encontramos nos escritos do matemático grego *Pappus de Alexandria* (290-350 a.C.) a indicação de que o primeiro tratado sobre as secções cônicas que apresentava um estudo cuidadoso sobre as curvas cônicas e suas propriedades fora elaborado pelo geômetra grego *Aristeu: “o Ancião”* (370-300 a.C.). Esta obra era conhecida pelo matemático grego *Euclides de Alexandria* (325-265 a.C.), que não se aprofundou nesse tema ao elaborar a sua obra: *Os elementos*, deixando aos interessados no assunto a necessidade de consultar a obra original de *Aristeu*.

Os escritos de *Aristeu* permaneceram inalterados por duzentos anos até que outro matemático grego: *Apolônio de Perga* (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou tanto os resultados de *Aristeu* quanto os de *Euclides* nos oito exemplares de sua obra: *Secções Cônicas*.

Nesse ínterim, *Galileu Galilei* (1564 - 1642) conjecturou que a curva formada por uma corrente suspensa, fixada por dois pontos e, sujeita apenas à ação da gravidade, era uma parábola. Entretanto, muitos anos depois, *Christian Huygens* (1629-1695) mostrou que a conjectura não era verdadeira. O tempo passa, e a conjectura de *Galileu* é esquecida, até que, em maio de 1660, *Jakob Bernoulli* (1654 -1705), publica a conjectura *Galileu* no “*Acta eruditorum*”, jornal que *Leibniz* havia fundado oito anos antes, onde a demonstração da conjectura foi proposta como desafio, para toda a comunidade científica da época. Contudo, somente em junho de 1661, um ano depois de *Jakob Bernoulli* ter proposto o desafio, foi que o *Acta* publicou as três soluções corretas que foram apresentadas, por *Huygens*, *Leibniz* e *Johann Bernoulli*. Após estes eventos, de acordo com Alhadad (2013), já em 1661, na obra “*Mémoire Sur Quelques Propriétés Remarquables Des Quantités Transcendantes Circulaires et Logarithmiques*”, é que *Lambert* (1728 – 1777), apresenta as funções hiperbólicas. Entretanto, somente em 1768 em sua “*Observations Trigonométriques*” é que ele introduz as notações  $\sinh(\phi)$ ,  $\cosh(\phi)$  e  $\tgh(\phi)$  ao realizar uma comparação entre os quocientes das funções trigonométricas circulares

e hiperbólicas comparando-as às funções transcendentais circulares  $\text{sen}(u)$  e  $\text{cos}(u)$  e suas expressões análogas, definindo assim as “*Quantitiés Transcendantes Logarithmiques*”:  $\frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}$  e  $\frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}$ . Às quais ele tratou explicitamente, na sua forma funcional

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

e como a série de potências,

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (1)$$

obtendo então,

$$\text{sinh}(\phi) = \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2} \quad (2)$$

e

$$\text{cosh}(\phi) = \frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}, \quad (3)$$

fornecendo assim, os conceitos e as notações modernas que utilizam-se atualmente e todas as demais relações que derivam da interação entre o seno e o cosseno hiperbólicos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ao estudar as funções hiperbólicas deparamo-nos com uma série de conceitos que foram construídos em momentos distintos na história da humanidade, assim como em nossa vida escolar. Desta forma, com o objetivo de rememorar, aglutinar e consolidar os conhecimentos já adquiridos, será feita uma revisão panorâmica, e simplificada sobre alguns dos temas que fundamentarão o enfoque aqui sugerido. Espero que essa abordagem seja rica e suficiente, para dar uma nova roupagem ao estudo destes temas, e que seja capaz de inspirar estudantes e professores a fortalecerem tanto às suas aprendizagens quanto a sua práxis, com uma abordagem cunhada na força da historicidade de cada povo que forma a nossa matriz matemática cultural geral e no desenvolvimento do rigor matemático necessário, introduzido pelo método axiomático que rege atualmente a área de Matemática e suas tecnologias.

Neste trabalho, considerou-se como fator decisivo e preponderante, a descrição presente na introdução da Base Nacional Comum Curricular - BNCC, ao referir-se à estrutura formal do novo ensino médio e à implantação do protagonismo juvenil mediado pelo desenvolvimento e acompanhamento do projeto de vida pessoal dos educandos, como estratégia de ensino ao afirmar que, a escola que acolhe as juventudes deve “favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos” (BRASIL, 2018, pag. 465), o que certamente engloba o contexto histórico como necessário e relevante.

Neste aspecto, segundo Eves (2004), podemos ver claramente, que os conhecimentos sobre as propriedades do triângulo retângulo, tais como: possuir um ângulo reto, e de ter lados que apresentam a relação:  $a^2 = b^2 + c^2$ ; conter dois ângulos complementares; possuir todos os lados formados por linhas retas e ser tal que, a soma da medida de todos os seus ângulos internos seja igual  $180^\circ$ , refletem a evolução de um conceito que permeou toda a antiguidade clássica de forma prática em diversos povos, o que situa essa figura geométrica no corpo de conhecimento desenvolvido simultaneamente, em alguns casos, e inicialmente em outros, pelos egípcios, com os estiradores de cordas, pelos gregos, com a geometria plana euclidiana, pelos platônicos e pitagóricos, com o mundo matemático ideal e, pela geometria analítica cartesiana. Sendo que este último, se configura como importante fulcro axiomático que possibilitou, segundo o referido autor, o desenvolvimento de novos tipos de geometria a partir dos questionamentos de seus fundamentos, tais como o do quinto postulado de *Euclides*. E, estes desenvolvimentos, de acordo com Alhadad (2013) levaram à descoberta de novas geometrias, mais gerais, e das quais a geometria euclidiana é apenas um caso particular. Dentre estas, está a Geometria Hiperbólica, a qual se origina a partir dos estudos independentes de sua própria geometria, mas que, desde o início de seu desenvolvimento, vem sendo comparada com o desenvolvimento da geometria euclidiana que rege as funções circulares básicas chamadas de *seno*, *co-seno* e *tangente* e de suas inversas. Isto se dá, principalmente, devido à similaridade das fórmulas encontradas nos dois contextos.

## 2.1 A função exponencial natural

Durante a educação básica trabalha-se com a ideia de função, e muitas vezes, obtém-se uma melhor compreensão do seu significado, quando aplicam-se estes conceitos a situações reais, ou mais próximas da realidade dos nossos educandos. Esta prática se processa de diversas formas, principalmente, ao se estudar as funções afins e as funções quadráticas. E seguindo esta abordagem, encontra-se em Dante (2016) que a base de uma função exponencial  $y = a^x$  é o número  $a$ , que deve ser positivo e não pode ser igual a 1. O que evidencia a existência de uma infinidade de funções exponenciais, de acordo com as mudanças de suas bases. Entretanto, para a educação básica, é mais compreensível que as funções exponenciais contenham bases naturais e racionais, não sendo comum o uso de exemplos de funções com bases irracionais. Assim, é em busca de funções exponenciais, cuja base ainda não é familiar no ensino de nível fundamental e médio, mas que apresentam propriedades importantes, que surge a função exponencial natural  $y = e^x$ , onde,  $e = 2,718281828\dots$  é um número irracional.

Inicialmente, a função exponencial natural surge a partir da matemática financeira, quando *Jacob Bernoulli*, ao trabalhar com juros compostos, imaginou um problema curioso que envolvia este cenário. O raciocínio utilizado por *Jacob* consistia basicamente em se perceber que, ao trabalhar com este sistema de capitalização, notamos que, quando um capital  $C$  sofre um aumento de uma porcentagem  $i$ , então, o novo valor deste capital será dado por  $C + Ci$ , ou seja, é igual a  $C(1 + i)$ . Imagine agora que este capital  $C$  sofra  $n$  aumentos sucessivos da mesma porcentagem  $i$ , e que cada aumento incida sobre o valor anterior atualizado, então, o valor final do capital inicial  $C$  é igual a  $C(1 + i)^n$  que é a fórmula dos juros compostos  $J := C \cdot (1 + i)^n$ . E de acordo com Eves (2004), os povos da mesopotâmia já usavam este método de forma bastante aproximada há mais de 3.000 anos em suas transações comerciais. Entretanto, o raciocínio utilizado por *Jacob* consistia numa pequena inversão.

Ao considerar que o empréstimo de um valor igual à 1, fosse feito por um banco, cobrando-se juros de 100% ao ano. O que logicamente, em notação atual, nos mostra que a pessoa deveria pagar o dobro do valor tomado como empréstimo depois de decorrido 1 ano, uma vez que uma taxa de 100% significa que  $i = 100\% = \frac{100}{100} = 1$ , como representado na Tabela 1. Entretanto, *Jacob* começou a pensar em uma forma de manter, aparentemente, o mesmo contrato de empréstimo, todavia ganhando mais. Ele pensou então em dividir o juro pela metade, mas cobrar a cada semestre. E então, aplicando a fórmula dos juros compostos percebe-se que a pessoa  $X$  deveria pagar pelo mesmo empréstimo,  $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2,5$  depois de decorrido 1 ano do empréstimo. E, dando continuidade a esta ideia, o juro de 100% ao ano poderia ser dividido em partes cada vez menores, sendo cobrados em períodos de tempo também menores, como pode-se ver na Tabela 1.

Observando os resultados constantes nesta tabela, na qual se expressa a relação entre o período de incidência dos juros e o valor a ser pago durante 1 ano, para alguns valores de  $n$ , notamos que o último número a surgir, quando consideramos que  $n \rightarrow \infty$  (isto é, quando  $n$  é muito

**Tabela 1 – A função exponencial natural a partir da matemática financeira**

Período de incidência de juros	Fórmula	Valor a ser pago depois de 1 ano
Ano	$(1 + 1)^1$	2
Semestre	$(1 + \frac{1}{2})^2$	2,5
Mês	$(1 + \frac{1}{12})^{12}$	2,613...
Dia	$(1 + \frac{1}{365})^{365}$	2,71457...
Hora	$(1 + \frac{1}{8760})^{8760}$	2,718126...
Minuto	$(1 + \frac{1}{525600})^{525600}$	2,7182792...
Infinitamente pequeno	$(1 + \frac{1}{n})^n, n \rightarrow \infty$	2,718281828459...

Fonte: Dante (2016, p. 169).

grande), é o número 2,718281828459..., que ficou conhecido como o “*número e*” ou “*número de Euler*”. Este número representa o valor a ser pago pelo juros decorrente de um empréstimo de 1 unidade de dinheiro a juros de 100%, contabilizados continuamente, ou seja, em períodos de tempo “*infinitesimais*” (*minúsculos e cada vez menores*). Esta, é uma abordagem rica em aplicações e com significados que podem ser trabalhados por toda a educação básica, uma vez que apresenta um contexto histórico de simples compreensão, cujo conteúdo já é trabalhado desde o Fundamental II. O que acaba enriquecendo e trazendo um pouco de familiaridade ao processo que origina o número  $e$ . Note que este número supre os requisitos da definição de função exponencial, uma vez que é um número real, diferente de um e é positivo. Assim, fazendo  $a = 2,718281828459... = e$ , na função  $y = a^x$  obtemos a função  $y = e^x$ , também conhecida como “função exponencial natural”.

É claro que existem outras formas de se introduzir o número  $e$ , também conhecido por *número de Euler*, nos estudos da educação básica. E isto, claramente irá depender dos anos nos quais se está trabalhando, mas acredita-se que esta abordagem, possa ser eficiente para todas as turmas que já tiveram algum contato com a matemática financeira.

A abordagem acima, abrange conceitos que ainda não estão plenamente desenvolvidos, durante os primórdios da educação, embora estejam presentes nos currículos da educação básica desde sempre, o que nos mostra a possibilidade de tratá-los aqui, mesmo que de forma simplista, utilizando-se a didática da exposição e apresentação, da qual sempre lança-se mão, em nossas salas de aula, quando precisamos ensinar algo, que não é parte do senso comum dos nossos educandos.

Agora que já discutimos um pouco, sobre a origem do número  $e$ , e conseqüentemente da função  $y = e^x$ . A seguir, neste texto, buscaremos explicitar a conexão entre este número, e a área sob a faixa da hipérbole equilátera, uma vez que o ângulo  $\theta$ , representado na hipérbole da Figura 47, apresentada a posteriori, será definido em termos da área sob esta curva, cuja demonstração consta do Apêndice A. Desta forma, quando tratarmos o assunto relativo à

hipérbole, será feita uma abordagem que estará de acordo com o textos de Santos *et al.* (2015), Freitas *et al.* (2015), Santos (2022), Rodrigues (2014), Silva (2019a) e Vasconcelos *et al.* (2013) que utilizam a comparação gráfica entre as áreas das figuras planas que podem ser formadas na hipérbole a partir de seu eixo de simetria, especialmente porque durante a educação básica é comum no desenvolvimento dos temas deste nível o trabalho que contempla estes conceitos.

## 2.2 Funções Circulares

Nosso foco nesta seção é trabalhar de modo breve algumas das principais estratégias e formas de abordagem utilizadas, rotineiramente, no desenvolvimento dos estudos sobre as funções circulares, levando em conta que o estudo mais detalhado já acontece de forma regular durante o ensino médio. Entrementes, o estudo das funções hiperbólicas dar-se-á de forma comparativa à abordagem utilizada para o estudo das funções circulares, logo, serão apresentados apenas alguns resultados oriundos deste estudo. Tal abordagem nos ajudará a delinear, com maior assertividade e clareza, um caminho para o estudo das funções hiperbólicas, desde o ensino médio até uma turma de Cálculo I, que contemple e potencialize os conhecimentos já consolidados sobre as funções circulares de modo a desenvolver o conhecimento mais amplo sobre as funções hiperbólicas de forma integrada e complementar. Deste modo, apenas alguns trechos da teoria serão abordados aqui, sempre que contribuir para dinamizar nossa compreensão sobre as funções hiperbólicas.

As funções circulares são funções originadas da análise feita sobre a circunferência unitária cuja representação gráfica possui um centro  $C$  coincidente com a origem  $\mathcal{O}$  do sistema cartesiano ortogonal, ou seja,  $C = \mathcal{O} = (x, y) = (0, 0)$ . O estudo dessas estruturas já considera a aplicação dos conceitos e propriedades do triângulo retângulo e das relações existentes entre os seus lados e ângulos. Assim, considere um triângulo retângulo representado conforme a Figura 1, na qual o Teorema de Pitágoras expressa a relação entre os lados do triângulo e as áreas das figuras que podem ser construídas utilizando cada um deles como base. Esta relação é expressa genericamente da seguinte forma:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 \quad (4)$$

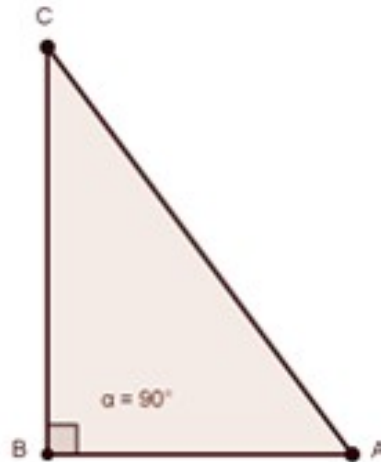
Na qual os lados representados pelos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  de vértice comum  $\mathbf{B}$  e ângulo  $\widehat{ABC} = \alpha = 90^\circ$  são chamados de *catetos* (do grego *káthetos*) que quer dizer: baixado ou perpendicular. Enquanto o segmento  $\overline{AC}$  recebeu o nome de *hipotenusa*, (do grego *hypotenusa*) caracterizando-se por ser oposto ao ângulo reto no triângulo retângulo como vemos em Cardoso (2001). As relações entre as medidas dos lados do triângulo retângulo  $\widehat{ABC}$  recebem nomes específicos. Assim, considerando-se  $\widehat{A}$  como ângulo de referência na Figura 1, dizemos que,

$$\text{sen } \widehat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad (5)$$

$$\text{cos } \widehat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad (7)$$

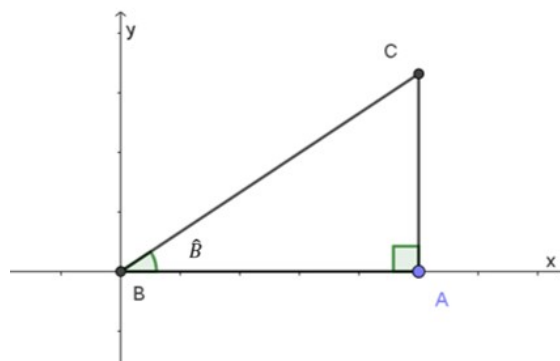
**Figura 1 – Triângulo Retângulo Euclidiano**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o desenvolvimento da geometria analítica cartesiana, os vértices do triângulo retângulo passaram a ser representados no plano cartesiano ortogonal por pares ordenados do tipo  $P(x,y)$  e os conceitos de *seno* e *coosseno* de um ângulo agora passaram a ser expressos como os valores representados nos eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$ . No caso particular em que o lado  $\overline{BC}$  mede uma unidade, o valor de  $\cos \hat{B}$  corresponde a abscissa do ponto  $A$  do triângulo abaixo, enquanto que o valor do  $\operatorname{sen} \hat{B}$  será o valor da ordenada do ponto  $C$  do triângulo abaixo, que poderia estar localizado em qualquer um dos 4 quadrantes do plano cartesiano. Assim, percebe-se que o triângulo retângulo da Figura 1, foi colocado no plano cartesiano de forma que o vértice  $B$  esteja na origem do sistema, ou seja,  $B = (0,0)$  e que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  sejam paralelos e coincidentes com os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente, conforme a Figura 2.

**Figura 2 – Triângulo Retângulo no Plano Cartesiano**



Fonte: Elaborado pelo autor.

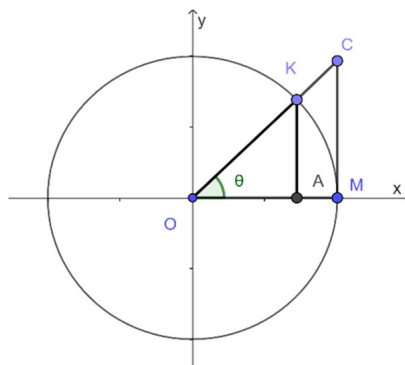


As primeiras ideias sobre as funções circulares, como a maioria das ideias matemáticas, não podem ser atribuídas unicamente a algum dos grandes matemáticos da nossa história uma vez que tais ideias podem ser percebidas através de nossos registros históricos como construídas em diversos momentos de nossa história comum, e até mesmo antes destes registros em diversos lugares e civilizações. Entretanto, pode-se falar das pessoas que conseguiram sistematizar e organizar o conhecimento empírico acumulado e disseminado pelas tradições orais e escritas, colocando-os sobre uma base teórica firme, compreensível e utilizável. Um bom exemplo disso, é a obra de *Euclides* chamada de “*Os Elementos*”. Esta forma de ver o mundo, nos mostra a evolução do conhecimento matemático situando-o inicialmente, no mundo empírico da matemática sincrética e, desenvolvendo-se, até generalizar-se no universo da matemática axiomática e analítica idealizado por *Renè Descartes*, por exemplo.

Seguindo esta linha de pensamento encontramos na história da Matemática, de acordo com Alhadas (2013), que *Leonard Euler* (1707 - 1783) foi o personagem principal no estabelecimento do conhecimento formal, axiomático e analítico que colocou as funções circulares no patamar de conhecimento estruturado como se conhece, hoje em dia. E, de acordo com Eves (2004), as raízes etimológicas, e os significados dos nomes atuais das funções trigonométricas, com exceção do *seno*, ficam claros a partir de sua interpretação geométrica, quando se coloca o ângulo  $\theta$  no centro de um círculo de raio unitário.

Assim, na Figura 3, se o raio do círculo é uma unidade, os valores de  $tg \theta$  e  $sec \theta$ , são dados pelos comprimentos do segmento de tangente  $\overline{MC}$  e pelo segmento de secante  $\overline{OC}$ , notando-se que o ângulo  $\widehat{OMC}$  é reto.

**Figura 3 – O Triângulo Retângulo no Ciclo Trigonométrico**



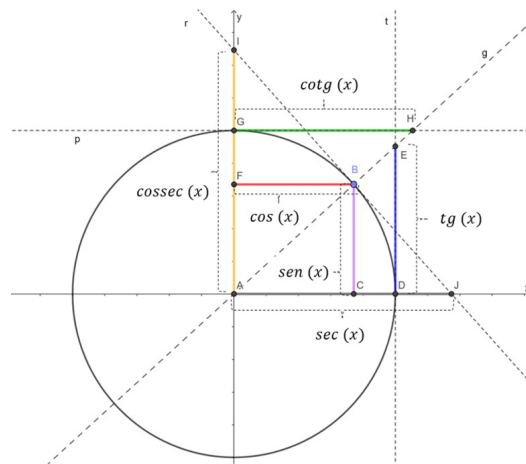
Fonte: Elaborado pelo autor.

E assim, de acordo com Eves (2004) pode-se notar que, *co-tangente* significa, simplesmente, “*tangente do complemento*” e assim por diante. Este fato também pode ser percebido ao observarmos as seis funções trigonométricas conjuntamente na Figura 4.

E ainda de acordo com este autor, as funções *tangente*, *co-tangente*, *secante* e *co-secante* foram conhecidas por vários outros nomes, surgindo estes particulares, no máximo, até o fim do século XVII. Já a origem da palavra *seno* é curiosa.

*Ārybhata* usava *ardbā-jyā* (*semi corda*) e também *jyā-ardbā* (*corda metade*) e por brevidade escrevia apenas *jyā* (*corda*). Partindo de *jyā* os árabes foneticamente derivaram *jība* que, devido à prática entre eles de se omitir as vogais, se escrevia *jb*. Afora o seu significado técnico, hoje *jība* é uma palavra que não tem sentido em árabe. Posteriormente, escritores que se depararam com *jb* como abreviação da palavra sem sentido *jība* passaram a usar *jaib* que faz parte do vocabulário árabe e que significa "enseada" ou "baía". Mais tarde ainda, ao fazer a tradução de *jaib* para o latim, *Gerardo de Cremona* empregou o equivalente latino *sinus*, de onde vem a nossa palavra *seno* (EVES, 2004, p. 267).

**Figura 4 – As seis funções trigonométricas no círculo**

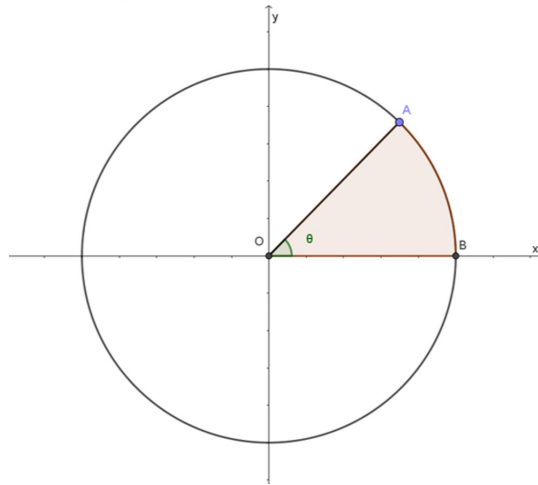


Fonte: Elaborado pelo autor.

E, apesar de existirem outras unidades de medida de ângulos, numa circunferência trigonométrica, a abordagem mais comum das funções circulares no ensino médio, prioriza a apresentação da noção de ângulo expresso em radianos ou em graus. No entanto, como nosso objetivo é relacionar o conhecimento já consolidado referente às funções circulares, com aqueles provenientes das funções hiperbólicas, é conveniente definir este ângulo em termos de unidades de área, expandindo assim o conceito de ângulo, de modo a equipará-lo com o ângulo hiperbólico como vemos em Freitas *et al.* (2015), Santos *et al.* (2015), Alhadas (2013), Vasconcelos *et al.* (2013) e Silva (2019b). Para tanto, considere a representação apresentada na Figura 5.

Sabe-se que a área do setor circular é dada por:  $A_{SC} = \frac{\theta r^2}{2}$ , sendo  $\theta$  o arco dado em radianos. Como temos  $r = 1$ , então,  $A_{SC} = \frac{\theta}{2}$ . E deste modo, vemos que o ângulo do setor circular pode também ser expresso em unidades de área. Donde segue que  $\theta$  corresponde ao dobro da área da região circular delimitada pelos pontos A e B visto que  $\theta = 2A_{SC}$ .

Ao se considerar a circunferência trigonométrica unitária, consegue-se escrever todos os valores do  $\text{sen}(x)$  e do  $\text{cos}(x)$  que figuram na primeira volta. Entretanto, para garantir que esta relação vale para todo  $x$  real, precisa-se definir: o que são arcos cômruos? E lançar mão da função de *Euler* para encontrar a *expressão geral* de todos os arcos que possuem a mesma extremidade.

**Figura 5 – A área do setor circular**

Fonte: Elaborado pelo autor.

“Podemos imaginar que a função de *Euler* consiste em “enrolar” a reta  $\mathbb{R}$  ao redor da circunferência trigonométrica de modo que o zero da reta coincida com o ponto  $B = (1,0)$  e que o sentido positivo da “reta enrolada” seja o sentido *anti-horário*. A função de *Euler* é periódica, de período  $2\pi$ , ou seja,  $E(t) = E(t + 2k\pi)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$  (MODERNA, 2020, p. 78-81).

E, para um estudo mais aprofundado sobre a função de *Euler*, podemos destacar o trabalho de Lima (2013)<sup>1</sup>, no qual é feita uma abordagem bastante interessante sobre “a função de *Euler* e a medida de ângulos”, até suas aplicações nas funções trigonométricas. Entretanto, um estudo mais acurado sobre esta função fica a critério do leitor, conforme esteja mais ou menos familiarizado com esta abordagem.

### 2.2.1 Função seno

Agora, temos subsídio para trabalhar com as funções circulares. Ressalto ainda, que faremos um estudo das funções circulares a partir de sua representação gráfica, priorizando uma abordagem que apresente muitos pontos em comum com a realizada no ensino médio, mas que seja capaz de realçar algumas partes essenciais da teoria. Em especial àquelas que representam o elo de ligação entre partes aparentemente desconexas do conteúdo em estudo.

**Definição 3.2.1:** A função *seno* é a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$  ao número real  $sen(x)$ , ou seja,  $f(x) = sen(x)$ . Esta função apresenta o comportamento gráfico representado na Figura 6.

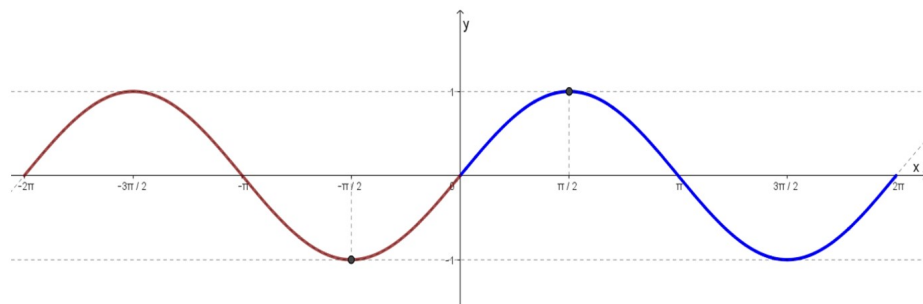
Da observação direta de seu gráfico, na Figura 6, notamos que ela é limitada, pois os valores de  $sen(x)$  estão todos contidos no intervalo  $[-1, 1]$ , logo seu conjunto imagem é

<sup>1</sup> LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (COLEÇÃO PROFMAT). Há uma abordagem concisa e clara sobre a Função de Euler e o fato de as funções trigonométricas circulares serem periódicas no Capítulo 9.

$Im(f) = [-1, 1]$ . O domínio e contradomínio dessa função, são iguais a  $\mathbb{R}$ , uma vez que não há restrições para os valores de  $sen(x)$  no conjunto de partida (Domínio) nem no conjunto de chegada (Contradomínio). Ela é periódica, e seu período é igual a  $2\pi$ , ou seja  $sen(x) = sen(x + 2\pi) = sen(x + 4\pi) = \dots = sen(x + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$ . Por isso, a curva obtida no intervalo  $[0, 2\pi]$ , repete-se para  $x > 2\pi$  e para  $x < 0$ . Assim, o gráfico da função *seno* estende-se por todo o eixo  $x$ . Além disso, possui amplitude igual a 1.

Considerando agora, que  $\mathbf{P}$ , seja a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real  $x$ , conforme definido na função de *Euler*, então a projeção ortogonal de  $\mathbf{P}$ , no eixo vertical, que corresponde à ordenada do ponto  $\mathbf{P}$ , é o *seno* do arco de medida  $x$ . Esta função apresenta o comportamento gráfico descrito pela Figura 6.

**Figura 6 – Gráfico da função:  $f(x) = sen(x)$**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Outra característica importante é que a função  $f$ , que satisfaz  $f(x) = sen(x)$ , é uma função ímpar, uma vez que  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  real. Sendo suficiente para tal conclusão, verificar que ao admitir-se que  $x$  e  $-x$ , sejam valores obtidos de arcos no sentido horário e anti-horário, respectivamente, ou seja, para  $f(x) = sen(x)$ , pode-se ver que:  $f(-x) = sen(-x) = -sen(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Isto pode ser analisado, intuitivamente, considerando o triângulo da Figura 2 rotacionado de  $90^\circ$  em torno do eixo  $x$ .

### 2.2.2 Função cosseno

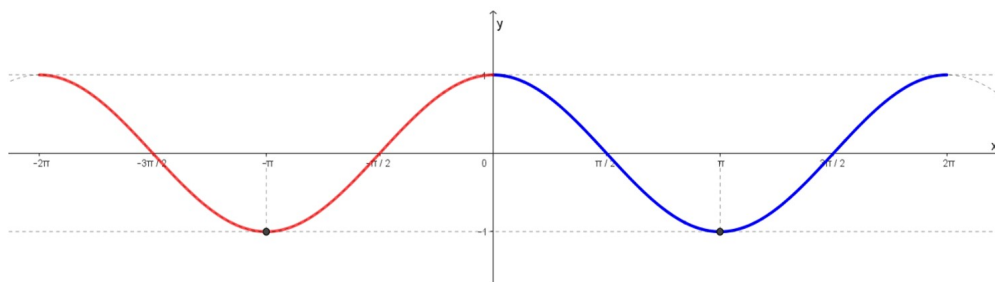
A função *cosseno* pode ser estudada de modo análogo ao estudo da função *seno*, sendo necessária apenas defini-la adequadamente. Assim,

**Definição 3.2.2:** A função *cosseno*, é a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$  ao número real  $cos(x)$ , ou seja,  $g(x) = cos(x)$ .

Considerando agora, que  $\mathbf{P}$  seja a extremidade de um arco, no ciclo trigonométrico correspondente ao número real  $x$ , nos moldes da Figura 2, e conforme definido na função de *Euler*, então, a projeção ortogonal de  $\mathbf{P}$ , no eixo horizontal, que corresponde à abscissa do ponto  $\mathbf{P}$ , é o *cosseno* do arco de medida  $x$ . Esta função apresenta o comportamento gráfico descrito pela Figura 7.

Observando a representação gráfica desta função, nota-se que ela também é limitada, pois os valores de  $\cos(x)$  estão todos contidos no intervalo  $[-1, 1]$ , o que nos mostra que seu conjunto imagem também é  $Im(g) = [-1, 1]$ . Ela apresenta domínio e contradomínio iguais a  $\mathbb{R}$ . Esta função, a exemplo da anterior, também é periódica de período igual a  $2\pi$ . E devido a isso, a curva obtida no intervalo  $[0, 2\pi]$  repete-se para  $x > 2\pi$  e para  $x < 0$ . Assim, o gráfico da função *coseno* estende-se por todo o eixo  $x$ . Apresentando também amplitude igual a 1.

**Figura 7 – Gráfico da função:  $g(x) = \cos(x)$**



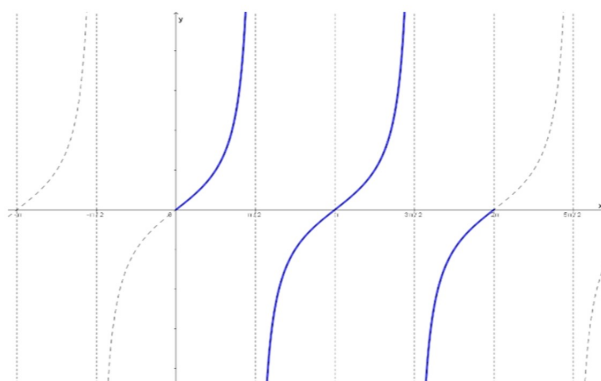
Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, ao considerarmos as imagens dos valores de  $x$  e  $-x$ , no sentido horário e anti-horário, respectivamente, verificamos que  $g(-x) = g(x)$  donde concluímos que  $g(x) = \cos(x)$  é uma função par, uma vez que,  $g(x) = \cos(x)$  e  $g(-x) = \cos(-x) = \cos(x)$ .

### 2.2.3 Função Tangente

Observa-se que a tangente, representada na Equação 7, quando colocada na circunferência unitária, onde os valores de *seno* e *coseno* figuram nos eixos  $Oy$  e  $Ox$  respectivamente, passa a ter a seguinte configuração:  $tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ . Neste caso, conforme a Figura 4 nos mostra, a tangente representa o comprimento  $\overline{DE}$ , onde **E** é o ponto de intersecção da reta que passa pelo centro da circunferência, e pela extremidade **B** do arco em estudo, com a reta  $t$ , das tangentes. Assim, enquanto houver intersecção entre as retas  $g$  e  $t$ , haverá valor definido para a tangente.

**Figura 8 – Gráfico da função:  $h(x) = tg(x)$**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note também que por definição, advinda da geometria euclidiana, quando  $g$  for paralela à  $t$ , não haverá intersecção entre elas. E neste caso, a *tangente* não estará definida. Tal caso só acontece quando  $\cos(x) = 0$ , uma vez que, somente assim, teremos uma reta paralela ao eixo da reta tangente. Esta condição também pode ser abordada numericamente, pois ao considerar que o *coseno* está no denominador da fração então, a única restrição para o domínio dessa função seria para  $\cos(x) = 0$ , mas isso só acontece quando temos  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Assim, ao se definir a função tangente é necessário deixar esta informação clara. E levando em conta a discussão acima, pode-se definir esta função da seguinte forma.

**Definição 3.2.3:** A função *tangente*, é a função  $h : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , do domínio, ao número real  $tg(x)$ , ou seja,  $h(x) = tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ . O comportamento gráfico desta função está representado na Figura 8. Observe que o domínio de definição desta função retira os múltiplos de  $\pi$  somados de  $\frac{\pi}{2}$ , justamente pelo fato de que, nestes pontos, o cosseno é igual a 0. Note que a função tangente é ímpar, pois

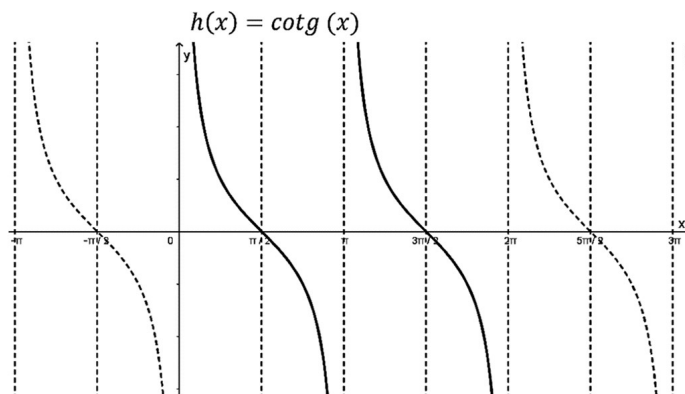
$$tg(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\text{cos}(-x)} = -\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} = -tg(x), \forall x \in \text{Dom}(h).$$

A partir daqui, as funções:  $\cotg(x)$ ,  $\sec(x)$  e  $\text{cosec}(x)$  são obtidas das relações entre o *seno* e o *coseno* na circunferência trigonométrica como vemos na Figura 4. Suas fórmulas podem ser definidas a partir desta figura.

#### 2.2.4 Função Cotangente

A função cotangente, é a função  $t : \mathbb{R} - \{k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , do domínio, ao número real  $\cotg(x)$ , ou seja,  $t(x) = \cotg(x) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$ . Note que o domínio de definição desta função retira os múltiplos de  $\pi$  justamente pelo fato de que nestes pontos o seno é igual a 0. O comportamento gráfico desta função está representado na Figura 9.

**Figura 9 – Gráfico da função:  $t(x) = \cotg(x)$**



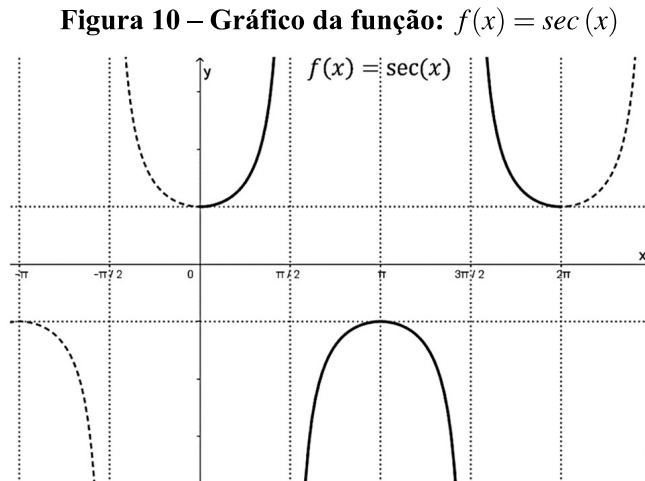
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tal função recebe este nome por ser a tangente do ângulo complementar ao ângulo formado com a tangente do ângulo de referência, como podemos ver na Figura 4. O conjunto imagem de  $t$ , é  $Im(t) = \mathbb{R}$ . Note que a função cotangente é ímpar pois,

$$\cot g(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sen(-x)} = -\frac{\cos(x)}{\sen(x)} = -\cot g(x), \forall x \in Dom(t).$$

### 2.2.5 Função Secante

A função secante, é a função  $f : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , do domínio, ao número real  $sec(x)$ , ou seja,  $f(x) = sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ . Note que o domínio de definição desta função retira os múltiplos de  $\pi$  somados de  $\frac{\pi}{2}$ , justamente pelo fato que nestes pontos o cosseno é igual a 0. O comportamento gráfico desta função está representado na Figura10.



Fonte: Elaborado pelo auto.

A secante é uma reta que corta ou secciona a circunferência unitária, veja sua interpretação geométrica na Figura 4. Observe que  $|sec(x)| \geq 1$ . Como cosseno é uma função par, o mesmo ocorre com a função secante. Seu conjunto imagem é  $Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

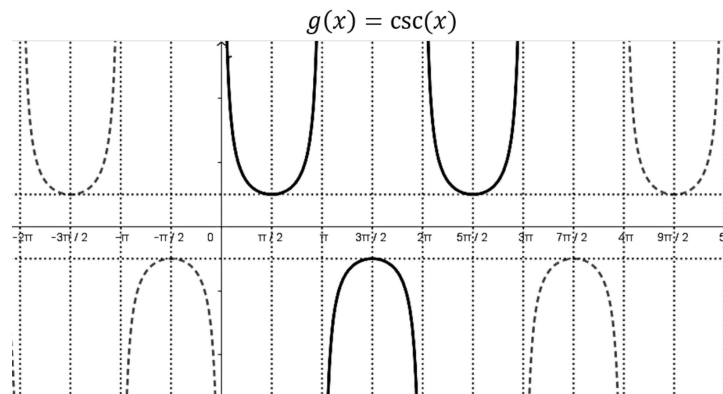
### 2.2.6 Função Cossecante

A função  $csc$ , ou *cossecante*, é a função  $g : \mathbb{R} - \{k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , do domínio ao número real  $csc(x)$ , ou seja,  $g(x) = csc(x) = \frac{1}{\sen(x)}$ .

Note que, o domínio de definição desta função retira os múltiplos de  $\pi$ , justamente pelo fato que, nestes pontos o *seno* é igual a 0. O comportamento gráfico desta função está representado na Figura11.

A  $csc$  é uma reta que corta, ou secciona, a circunferência unitária. Veja sua interpretação geométrica na Figura 4. Observe que  $|csc(x)| \geq 1$ . E como o *seno* é uma função ímpar, o mesmo ocorre com a função  $csc$ . Seu conjunto imagem é  $Im(g) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

**Figura 11 – Gráfico da função:  $g(x) = \csc(x)$**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Até aqui, discorreu-se sobre os fundamentos que envolvem as funções circulares, posto que, uma comparação bem sucedida entre as funções circulares e as funções hiperbólicas, pressupõe conhecimento adequado sobre as propriedades dos objetos em análise visando uma abordagem coerente e promissora entre suas propriedades, definições e fórmulas como veremos mais adiante.

### 2.3 A Hiperbóle

Ao buscar conhecer as propriedades das funções circulares, pode-se voltar o nosso olhar para as propriedades do objeto matemático do qual derivam todas aquelas funções e suas relações, digamos, a circunferência unitária. Agora, para conhecer as propriedades e relações que regem as funções hiperbólicas, precisaremos analisar o comportamento de um novo objeto matemático: A hipérbole.

A hipérbole, como vimos, é uma curva já descrita e tratada de forma rigorosa nos trabalhos de *Menaecmos*, de *Apolônio de Perga* e de *D’Alambert*, como podendo ser obtida a partir da secção de um cone, utilizando-se um plano não paralelo à sua base. Uma abordagem mais detalhada sobre este fato pode ser encontrada em Siqueira (2019), onde o autor destaca que para “*Apolônio*”, a cônica formada pela secção do cone por um plano qualquer, depende do ângulo de inclinação que o plano secante forma com o eixo do cone e que,

“se os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  - o primeiro sendo formado pela geratriz  $g$ , com o eixo da superfície cônica  $r$ , e o segundo, pelo plano de secção ( $\pi$ ) e o eixo  $r$  - e, da posição do plano secante com relação ao vértice  $V$  (se este pertence ou não ao plano)”. Desta forma Quando  $0 < \beta < \alpha$ , o plano  $\pi$  será oblíquo, ou paralelo à reta  $r$ , seccionando as duas folhas da superfície cônica, e neste caso teremos uma hipérbole, que é constituída por dois ramos, cada um, em uma das folhas da superfície (SIQUEIRA, 2019, p. 50-53).

Encontra-se na Wikipédia (2023), que o cone simples já era usado como unidade de medida de tempo nos relógios de água, desde a antiguidade egípcia. Eles também usavam recipientes cilíndricos ou em forma de paralelepípedo, mas como a pressão do fluxo de água não era constante, então eles desenvolveram relógios de água usando o cone, na tentativa de



minimizar esta dificuldade. O relógio de água na forma de cone recebeu o nome de clepsidra como podemos ver na Figura 12.

**Figura 12 – Clepsidra**



Fonte: <http://blog.pedrasriscas.pt/bastidores/relogios-origem-evolucao/>.

E posteriormente, evoluiu-se para a ampulheta de areia, que nada mais é do que um cone duplo que mede o tempo devido ao escoamento de certo volume de areia contido no mesmo. Aparentemente, estas ideias se conectam nos trabalhos de Arquimedes quando ele descobre, utilizando o seu princípio da alavanca, que o volume de um cilindro de altura  $2H$  é igual ao volume de um “cone duplo” de altura  $H$ , mais o de uma esfera de raio  $r$ . Fato este bem discutido e ilustrado no excelente artigo de Ávila (1986). Desta forma, o volume do cone duplo também é chamado de o volume da *clepsidra* e o volume restante do cilindro, uma vez retirada a clepsidra, é chamado de volume da *ante clepsidra* e este corresponde ao volume da esfera de raio  $r$ .

A inclusão desta discussão é importante, pois conecta termos e conceitos aparentemente desconexos da teoria. O surgimento do cone duplo com a ideia de volume e com a nomenclatura apresentada neste contexto, ou sejam, *clepsidra* e *ante clepsidra*. Entretanto, as relações entre os volumes do cone duplo (*clepsidra*), da esfera e do cilindro não são alvo de nosso estudo no momento, mas é possível encontrar informações detalhadas em Eves (2004) e em Ávila (1986), caso o leitor tenha interesse no assunto.

É, possivelmente, neste contexto, anterior ao surgimento do segundo ramo da hipérbole, que surge a grande dificuldade encontrada por *Galileu*, em perceber, que a curva produzida por uma corrente suspensa apenas por suas extremidades, e sob a ação única de seu próprio peso, onde essas extremidades estão fixas, não era uma parábola, mas sim, uma das funções hiperbólicas que ficou conhecida como: *catenária* (de *catena* ou cadeia).

Certamente, ao estudar a *catenária*, função modelada pelo *cosseno hiperbólico*, analisando-a através da ótica do seu comportamento gráfico, a exemplo do realizado em Lima e Miranda (2021), onde se utiliza a *catenária* para modelar a referida curva, essa dúvida não existiria, pois mesmo numa análise preliminar simplista podemos verificar, facilmente, que as figuras formadas não são congruentes. E que, apesar de poderem apresentar alguns pontos em comum, como o vértice, no exemplo considerado, observa-se que as suas extremidades são divergentes. Fato este, que também pode ser verificado caso nossa comparação, utilizando o *software Geo-*

*Gebra*, estivesse limitada à análise do gráfico da parábola em oposição ao da catenária, como apresentado nas atividades propostas por Barbosa *et al.* (2021)<sup>2</sup>, seria facilmente percebido que eles não são coincidentes, apesar de poderem apresentar alguns pontos em comum, o que poria um ponto final<sup>3</sup> na questão.

O “*segundo ramo*” da hipérbole, surge neste cenário, somente quando Apolônio utilizou uma reta, um ponto fixo e uma circunferência não coplanar com o plano que contém este ponto para realizar o seguinte experimento:

“Se fizermos uma reta de comprimento indefinido que passe sempre por um ponto fixo, fazendo-a mover-se sobre uma circunferência de um círculo que não é coplanar ao ponto de origem, passando por todos os pontos dessa circunferência a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo”. (BOYER; MERZBACH, 2019, p.109).

Por outro lado, caso esta comparação fosse realizada com a hipérbole notaríamos com facilidade, ao considerarmos o *cone duplo*, que esta representação diferiria daquela, inicialmente, por apresentar um outro ramo. E caso fosse considerado apenas o ramo que apresenta ordenadas positivas, afim de realizar a comparação, chegaríamos à mesma conclusão: de que elas não representam a mesma curva.

Entretanto, sua representação cartesiana, como utilizada hoje, só surgirá no final do século XVII. Atualmente, é comum que este *cone duplo*, também seja chamado de *cone de duas folhas*, onde cada folha representa um dos *ramos* da hipérbole. Podemos encontrar uma visualização aproximada da ideia de Apolônio nas aulas de MELLO (2019).<sup>4</sup> Ademais, segundo Boyer e Merzbach (2019), as cônicas eram conhecidas como *lugares sólidos*, pois as cônicas não eram definidas como seções planas, mas sim como seções de figuras tridimensionais. E desde então, a secção do *cone duplo*, por um plano não paralelo à sua base dá origem ao *segundo ramo* da hipérbole como resultante da intersecção do plano secante ao cone de duas folhas com a superfície deste. Há uma discussão mais detalhada sobre este fato na obra do referido autor que conta com uma explanação mais aprofundada sobre o ângulo de inclinação do plano secante ao *cone duplo* representado na Figura 13.

Pode ser interessante inicialmente, ver o material desenvolvido pelo professor William da UNEMAT (GONCALVES, 2019)<sup>5</sup>, a fim de alavancar ideias preliminares, mas suficientes para compreender como o ângulo de inclinação do plano secante pode produzir as cônicas

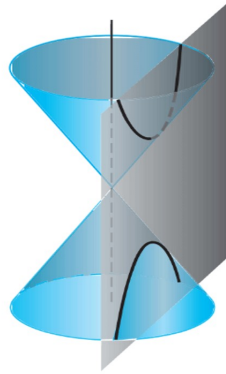
<sup>2</sup> A autora apresenta uma proposta de atividade de comparação entre as representações gráficas da parábola e da *catenária* utilizando o *software GeoGebra* que pode ser bastante elucidativa sobre a dificuldade enfrentada por Galileu e seus contemporâneos.

<sup>3</sup> Na seção 5.8.2 que trata da comparação entre a parábola e a *catenária* para o ensino médio utilizando o *GeoGebra*, e deixo-a, como possibilidade para uma boa aula sobre o tema, expandindo um pouco as ideias de comparação gráfica destas funções através do *software GeoGebra*.

<sup>4</sup> No vídeo do professor Vinícius Mello no curso *GeoGebra* para professores, há uma excelente abordagem que ilustra como deve ter sido o raciocínio de Apolônio, embora nesta construção, ele esteja usando uma esfera para fazer a movimentação da reta que gera os dois ramos da hipérbole.

<sup>5</sup> Na página de *O GeoGebra*, encontramos o Professor William, da UNEMAT - Campus de Barra do Bugres, fazendo uma explanação interessante sobre a influência do ângulo com o qual o plano secciona o cone duplo para formar as cônicas, numa aula de *GeoGebra* Aplicado.

**Figura 13 – Hipérbole no cone duplo ou de duas folhas**



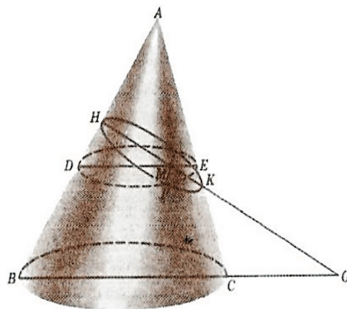
Fonte: Retirado de Thomas, Weir e Hass (2012a, p. 106).

através do uso do *GeoGebra*. E para àqueles mais exigentes, uma consulta mais detida à obra de Boyer e Merzbach (2019) sobre este assunto, pode ser encontrada nos capítulos 6 a 9 da referida obra.

Embora esta seja uma visão inicial, acredito que seja suficiente, para dar ao professor/estudante uma visão panorâmica ampla e significativa sobre o tema em estudo. O que nos possibilita prosseguir em nossa empreitada, considerando que, assim como *Arquimedes*, utilizou uma figura limitada na concepção deste conceito, no caso o cilindro, como descrito em Ávila (1986), trilaremos o mesmo caminho para nos aproximarmos, com mais assertividade, das bases conceituais que podem nos proporcionar uma compreensão mais clara e objetiva sobre as propriedades da hipérbole e suas relações com as propriedades das funções hiperbólicas a seguir.

Em sua obra *Apolônio* utilizou a secção plana do cone simples para obter as cônicas, como pode ser visto na Figura 14.

**Figura 14 – Cortes no Cone simples para gerar as Cônicas**



Fonte: Retirado de Habib (2013, p. 16).

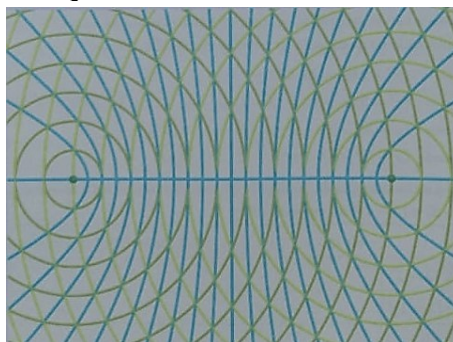
Entretanto, esta estratégia foi abandonada assim que ele desenvolveu, a partir do cone simples a *symptome*, uma propriedade plana fundamental para a secção que possibilitava o encontro das cônicas tomando como base, apenas a secção, sem o uso do cone, o que contribuiu para que ele iniciasse um fecundo estudo das cônicas baseado nesta propriedade, totalmente “centrado” no plano.

Ainda de acordo com Thomas, Weir e Hass (2012a), com a ascensão da geometria analítica cartesiana a partir do século XVII, as curvas passaram a ser representadas por suas equações, nas quais, todos os seus pontos gozam das propriedades geométricas da curva a ser representada. E, a partir de então, a caracterização bifocal, que permite a construção das cônicas começa a ganhar força, impulsionada pelos trabalhos de *Kepler, Descartes e Van Shooten*, que utilizavam construções mecânicas dessas curvas. Ademais, no bojo dessas mudanças, surgem também outras caracterizações feitas tanto por meio de retas, da geometria projetiva, quanto por meio de equações analíticas.

Atualmente, os métodos de ensino mais utilizados, sobre as cônicas englobam a caracterização analítica e o uso dos focos, além da usual, obtida por meio da secção do cone. Há ainda, uma abordagem que investiga e destaca as propriedades, semelhanças e diferenças entre a parábola, a elipse e a hipérbole, a partir de sua equação geral  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  e, considerando as condições de variabilidade dos parâmetros reais  $A, B, C, D, E$  e  $F$ . Entretanto, esta não é a abordagem muito comum no Ensino Médio, e por isso, estaremos fazendo apenas alguns comentários sobre a mesma, sob a perspectiva da educação básica. E certamente, àqueles que buscam uma boa abordagem sobre esta visão complementar, que surge da tentativa da quadratura da hipérbole, poderão encontrar em Delgado, Frensel e Crissaff (2017) boas referências.

Neste caso, para desenvolver uma abordagem focal, capaz de aglutinar e evidenciar conceitos, considerados *a priori*, como essenciais para uma boa compreensão da teoria, serão utilizadas as informações encontradas tanto nesta referência quanto em Vasconcelos *et al.* (2013). Nas quais, encontra-se que as hipérbolas, ficam evidenciadas nos fenômenos do dia a dia, como por exemplo, no choque entre duas ondas circulares. Fato representado na Figura 15.

**Figura 15 – Choque entre ondas de rádio formam hipérbolas**



Fonte: Retirado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 138).

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2017), esta informação, é a base do sistema de localização *LORAN (LONg RANGE Navigation)*, onde os círculos concêntricos são sinais de rádio. Neste caso, as hipérbolas se formam naturalmente, tais como nas ondas formadas por duas gotas que agitem a superfície das águas, em posições próximas. De posse desta informação, agora podemos construir a nossa hipérbole, ao modo euclidiano, sem um sistema de referências, e utilizando uma reta qualquer como eixo, ou ao modo cartesiano, utilizando para isto, o plano

cartesiano ortogonal. Assim, ao desenvolver e ampliar o procedimento utilizado por Vasconcelos *et al.* (2013) para construir uma hipérbole<sup>6</sup>, buscamos nos aproximar da realidade vivenciada na educação básica.

Para tal, será utilizada uma abordagem cartesiana, na qual considera-se que a hipérbole em análise esteja centrada na origem do sistema cartesiano ortogonal e, que a reta suporte que contém os focos e os vértices desta hipérbole, estejam sobre o eixo  $Ox$ . Assim, adotando o *GeoGebra* como *software* de suporte, deve-se realizar as seguintes etapas de construção, onde  $d(X, Y)$  representará a distância entre  $X$  e  $Y$ :

1. Construa sobre o eixo das abscissas um segmento  $\overline{MN}$ , simétrico em relação à origem;
2. Utilizando uma abertura qualquer no compasso, desenhe um círculo  $C_1$  (circunferência) de raio  $r$ , ou seja,  $r = a$ , centrado na origem;
3. Marque os pontos de intersecção entre  $\overline{MN}$  e a circunferência  $C_1$ , denotando tais pontos de intersecção como sendo  $A_1$  e  $A_2$ . Deste modo  $d(A_1, A_2) = 2a$ ;
4. Insira outra circunferência  $C_2$ , centrada na origem, de raio  $R = c$ , com  $c > a$ , donde teremos que  $2c > 2a$ ;
5. Marque os pontos de intersecção entre  $C_2$  e  $\overline{MN}$ , nomeando-os como  $F_1$  e  $F_2$ , de modo que  $d(F_1, F_2) = 2c$ . Note que, neste caso, devemos ter  $\overline{OV_1} < \overline{OF_1}$ , e  $\overline{OV_2} < \overline{OF_2}$ , donde por construção temos que  $\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = R$ , e  $\overline{OV_1} = \overline{OV_2} = r$ , com  $r < R$ ;
6. Oculte as circunferências (*objetos*), usando o comando *exibir/esconder* objetos (do *GeoGebra*) e clicando nas circunferências construídas;
7. Marque os pontos  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ , em  $\overline{MN}$ , de modo que eles sejam exteriores a  $\overline{F_1F_2}$ , com  $K_1 < K_2 < K_3 < \dots < K_n$ ;

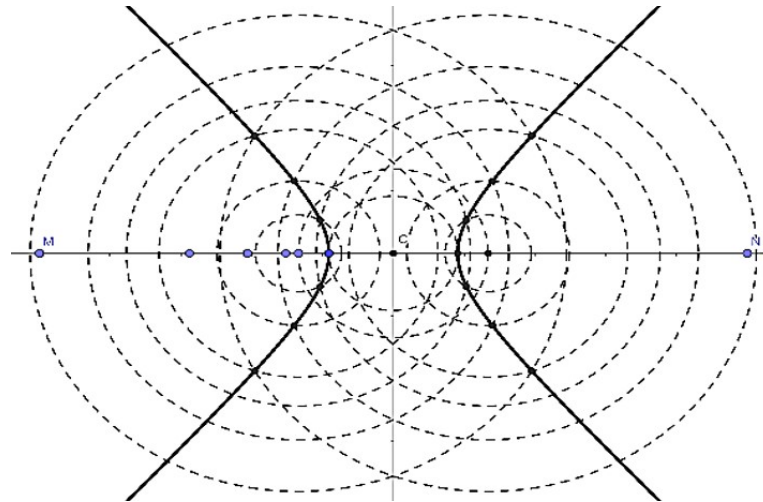
A partir daqui, use a ferramenta compasso da seguinte forma:

- i) Tomando a  $med(\overline{K_1A_1})$  no compasso, desenhe uma circunferência de raio  $r_1 = med(\overline{K_1A_1})$ , com centro em  $F_1$ , e outra, com mesmo raio, mas centrada em  $F_2$ ;
- ii) Tomando a  $med(\overline{K_1A_2})$  no compasso, desenhe uma circunferência de raio  $r_2 = med(\overline{K_1A_2})$ , com centro em  $F_1$ , e outra com mesmo raio, mas centrada em  $F_2$ ;
- iii) Marque os pontos de intersecção entre as circunferências e oculte-as;
- iv) Repita o processo variando apenas os pontos de  $K_1$ , para  $K_2, K_3, \dots, K_n$ , traçando novas circunferências, centradas ora em  $F_1$ , ora em  $F_2$  até obter as hipérbolas desejadas conforme pode-se ver na Figura 16 e na Figura 17.

Caso não tenha conseguido obter as figuras indicadas, verifique se executou os comandos de forma correta e, tente novamente. Se ainda persistir a dúvida, o leitor poderá encontrar esta atividade de construção da hipérbole realizada com o *GeoGebra*, em Souza (2024b), na página de atividades do autor, sob o título: “Hipérbole com régua e compasso”.

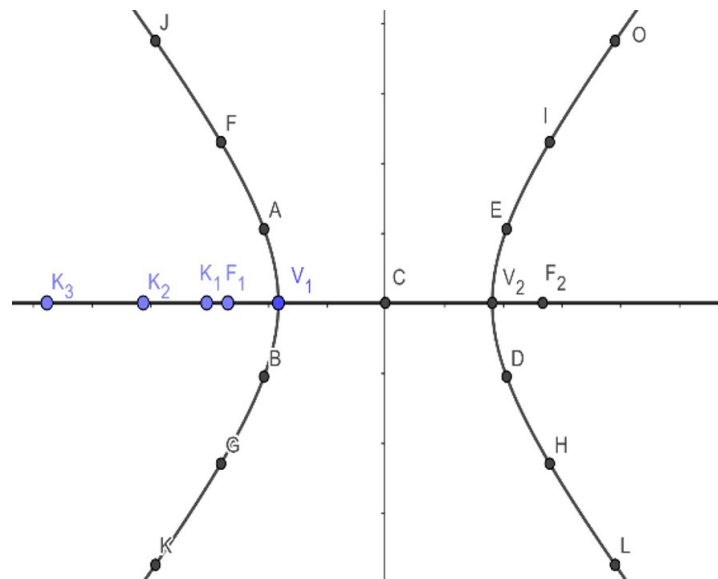
<sup>6</sup> Em nossa abordagem, optou-se por apresentar um detalhamento maior do que o encontrado no trabalho de Vasconcelos *et al.* (2013) para a construção de uma hipérbole utilizando instrumentos euclidianos básicos como régua e compasso, embora tenha-se utilizado o *GeoGebra* como base.

**Figura 16 – Construção de hipérbole com régua e compasso**



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 17 – Hipérbole formada na intersecção das ondas**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Algo que deve ser enfatizado, neste momento, é que esta construção, independe do eixo escolhido, embora para fins didáticos e utilização do *software GeoGebra* e vinculação com a representação cartesiana do gráfico de uma função, tenhamos realizado esta construção de modo que o eixo  $Ox$ , seja coincidente com o eixo focal da hipérbole construída.

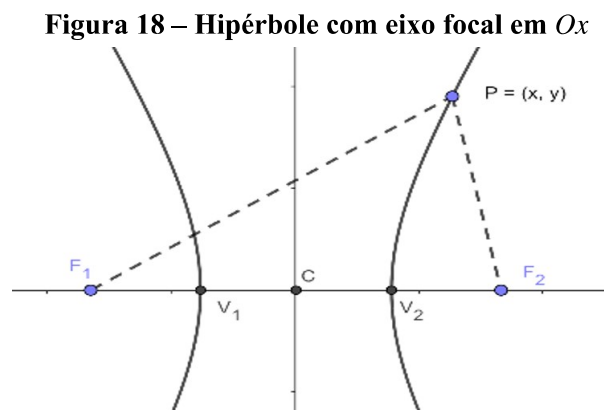
A atividade de construção está disponível para acesso, e nela o autor descreve com detalhes o passo à passo dessa construção, que poderá ser realizada tanto com o auxílio do referido *software*, quanto com régua e compasso numa folha de papel. Nesta atividade há ainda a possibilidade de clicar no botão do *play* para animar a construção, trazendo outra dinâmica ao processo de construção.

### 2.3.1 Forma Canônica da hipérbole

De acordo com Lima (2013), para obter a forma canônica de uma hipérbole devemos obter a equação dessa hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ , nos casos em que a reta focal é o eixo  $Ox$ , ou o eixo  $Oy$ . Deste modo, de acordo com Thomas, Weir e Hass (2012a), tem-se a seguinte definição para uma hipérbole.

**Definição 4.1:** Uma hipérbole é o conjunto dos pontos em um plano cujas distâncias a partir de dois pontos fixos, nesse plano, têm uma diferença constante. Os dois pontos fixos são os focos da hipérbole.

A reta que passa pelos focos de uma hipérbole é dita, o eixo focal. E o ponto no eixo, na metade do trajeto entre os focos, é o centro da hipérbole. Sendo que, os pontos onde o eixo focal e a hipérbole se cruzam são chamados de vértices. Na Figura 18, tem-se o eixo focal sobre o eixo das abscissas, deste modo, os focos são  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , onde  $c > 0$ , e a medida  $2c$  é conhecida como a distância focal.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, diz-se que, um ponto genérico  $P = (x, y)$  está na hipérbole, como na Figura 18, se e somente se,  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$ , donde aplicando a fórmula da distância entre dois pontos no plano, obtém-se que:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{((x-c)^2 + (y-0)^2)} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Donde, somando  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$  a ambos os membros da equação obtém-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Agora elevando ambos os membros ao quadrado obtém-se:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Isolando o termo com radical, chega-se em:

$$(x+c)^2 + y^2 - [(x-c)^2 + y^2 + 4a^2] = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Donde, desenvolvendo o quadrado tem-se:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - [x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a^2] = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

que depois de simplificações, resulta em:

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Assim, multiplicando ambos os membros por  $\frac{1}{4}$ , obtém-se,

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

E, elevando novamente, ambos os membros ao quadrado, vem que,

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = (cx - a^2)^2,$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4.$$

Donde, cancelando-se os termos iguais, resulta,

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4.$$

Por fim, isolando as variáveis  $x$  e  $y$ , obtém-se

$$a^2c^2 - a^4 = c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 \Leftrightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4.$$

Depois, colocando os fatores comuns em evidência, tem-se como resultado a seguinte equação:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2. \quad (8)$$

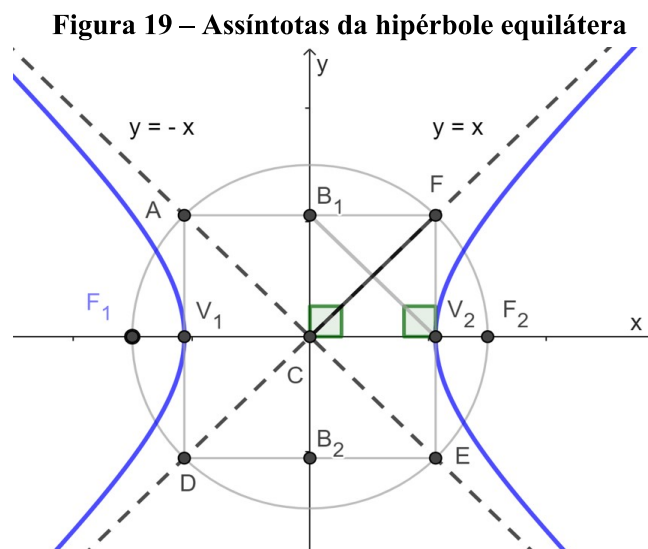
Mais adiante, o resultado obtido acima, será usado para fechar o raciocínio e definir a equação canônica da hipérbole. Por enquanto, observe que na Figura 18, destacamos o fato de que uma circunferência foi utilizada para definir, por construção, o ponto  $C = \mathcal{O} = (0, 0)$ , como sendo o ponto médio dos segmentos  $\overline{F_1F_2}$  e  $\overline{V_1V_2}$ . O que implica dizer, que a reta contendo os segmentos anteriores é paralela ao eixo focal  $Ox$ , e neste caso, o eixo imaginário é o eixo  $Oy$ , que é perpendicular a reta contendo os pontos mencionados anteriormente, note também, que o eixo  $Oy$  é a mediatriz deste segmento.



Por outro lado, como a hipérbole apresenta uma simetria entre os ramos então, a mediatriz será também chamada de *eixo de simetria* da hipérbole, onde pode-se ver, geometricamente, que o segundo ramo da hipérbole pode ser obtido por uma transformação geométrica, chamada de reflexão de meia volta, em torno do centro e do eixo  $Oy$ .

Outra característica notável da hipérbole equilátera centrada na origem do sistema cartesiano ortogonal, é que seus ramos apresentam um comportamento assintótico, em relação às retas  $y = x$  e  $y = -x$ . Comportamento este que também pode ser percebido algebricamente, analisando o domínio dessa função, ou numericamente ao atribuímos valores na equação da hipérbole  $xy = 1$  (equivalentemente  $y = \frac{1}{x}$ ), para notar que quanto maior for o valor da variável  $x$ , menor será o valor de  $y$ . E, mais próximo da sua assíntota estará o ramo da hipérbole analisada.

Este fato, segundo Maor (2008) indica que os ramos da hipérbole “*tendem a tangenciar essas retas no infinito*”. E ao destacar que *assíntota*, cujo significado em grego é: “*não se encontrando*” é o nome dado as retas que possuem esta característica, destaca que: “Quando nos movemos ao longo de cada ramo, afastando-se do centro, aproxima-se cada vez mais dessas linhas mas, nunca as alcançamos. Essas linhas são as assíntotas da hipérbole”. E de um modo mais geral, estas retas apresentam a inclinação  $\pm \frac{b}{a}$ , ou seja, as retas que representam estas assíntotas<sup>7</sup> apresentam equações cartesianas do tipo  $ax - by = 0$  e  $ax + by = 0$ . Como podemos observar na Figura 19.



Fonte: Elaborada pelo.

Outra forma de pensar sobre esta relação entre um ponto  $P$ , qualquer da hipérbole, e suas assíntotas pode ser depreendida a partir da construção Arquimediana apresentada por Ávila (1986), do cone duplo, ou de duas folhas, representada em 3D na Figura 13, e que apresenta a hipérbole, como a intersecção entre a superfície do cone duplo de revolução e o plano que o secciona. Deste modo, podemos notar claramente, que se o ponto  $P$  estiver sobre o eixo

<sup>7</sup> Definiremos formalmente o conceito de assíntotas apresentado por Maor (2008) e delineado nos trabalhos de Arquimedes ao longo do texto.

imaginário então, ele não estará sobre a superfície do cone de duas folhas, o que nos mostra que este ponto não ultrapassa as assíntotas em direção ao eixo não focal. E apesar de entender as definições e suas implicações de forma clara, torna-se necessária aqui, uma justificativa mais robusta sobre as mesmas, e que seja capaz de transportar esta discussão do campo empírico para o campo axiomático analítico, onde estas mesmas impressões podem ser confrontadas, e demonstradas algebricamente. Assim, logo após a definição das formas canônicas da hipérbole, pretende-se voltar a estas ideias.

Não obstante, outro fato relevante destacado por Maor (2008) é que estas construções nos remetem às primeiras manifestações do conceito de limite, ainda que abordadas apenas de modo geométrico. E ele acrescenta que “como as assíntotas são perpendiculares entre si, este tipo particular de hipérbole é conhecido como hipérbole retangular”.

Note que, o fato de ser retangular, implica na existência de um retângulo que é capaz de definir a hipérbole a partir de suas assíntotas. Neste caso, se  $a = b$  então, a hipérbole é chamada de equilátera, e o retângulo que surge, na verdade é um quadrado. Assim, voltando a observar a Figura 19, nota-se que ao utilizar uma circunferência de centro  $C = (0, 0)$ , e de raio  $r$ , com  $r = d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ , para definir os focos, e destacando as assíntotas  $y = x$  e  $y = -x$ , podemos definir  $A, D, E, F$  como sendo os pontos de intersecção entre a circunferência usada para definir os focos  $F_1$  e  $F_2$ , com as assíntotas da hipérbole. Donde, ao se traçar os segmentos  $\overline{AF}$  e  $\overline{DE}$  paralelos ao eixo focal, pode-se definir  $B_1$  e  $B_2$  como sendo os pontos de intersecção entre  $\overline{AF}$  e  $\overline{DE}$  com o eixo das ordenadas, respectivamente, sendo este o eixo imaginário da hipérbole. E assim, ao traçar os segmentos  $\overline{AD}$  passando por  $V_1$  e  $\overline{EF}$  passando por  $V_2$ , ambos perpendiculares ao eixo das abscissas, vê-se surgir o retângulo ao qual Maor (2008) faz referência.

A este retângulo podemos chamar, segundo PORTO<sup>8</sup> (2023) de *retângulo virtual*, uma vez que a sua existência não é percebida de imediato, quando a construção da hipérbole não se processa como realizada na introdução deste capítulo. E, apesar deste *retângulo virtual*, só ficar evidente quando a abordagem utilizada seja capaz de destacar algumas das partes implícitas desta construção, o reconhecimento de sua existência é de extrema importância no estudo da hipérbole. Uma vez que é a partir dele que definiremos a existência de um outro parâmetro que surge nas equações que definem uma hipérbole: o parâmetro  $b$ .

Assim, considerando o triângulo retângulo  $CV_2F$ , tal que as medidas de seus lados são dadas por  $d(C, V_2) = a$  e por  $d(C, E) = d(C, F_2) = r = c$ , donde fazendo a  $d(V_2, E) = b$ , obtém-se então um triângulo retângulo de “*catetos*” medindo  $a$  e  $b$  com “*hipotenusa*” medindo  $c$ , e portanto vale a relação de Pitágoras tal que,  $c^2 = a^2 + b^2$ , ou ainda que,

$$c^2 - a^2 = b^2. \quad (9)$$

<sup>8</sup> Informação verbal que representa a opinião e nomenclaturas utilizadas pelo professor Anderson Porto para se referir a este retângulo ao qual se referiu Maor (2008).

Retomando então a discussão pausada sobre o desfecho da Equação (8), pode-se escrever  $b^2 = c^2 - a^2$  e assim a Equação (8) se torna igual a:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2. \quad (10)$$

E como por construção  $0 < a < c$ , então  $c^2 - a^2 > 0$ , donde  $b > 0$ . Deste modo, pode-se dividir ambos os membros da equação anterior por  $b^2 \cdot a^2$  para se obter

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (11)$$

A Equação (11) é a equação canônica da hipérbole centrada na origem do sistema cartesiano ortogonal com eixo focal coincidente com o eixo das abscissas.

E no caso em que os focos estejam sobre o eixo das ordenadas, utilizando-se um procedimento análogo, e considerando os pontos  $F_1 = (0, -c)$ ,  $F_2 = (0, c)$ ,  $V_1 = (0, -a)$ ,  $V_2 = (0, a)$ ,  $B_1 = (-b, 0)$  e  $B_2 = (b, 0)$  e com  $b^2 = c^2 - a^2$ , obtém-se a seguinte equação canônica (ou reduzida) para a hipérbole:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

Note que os parâmetros  $a$  e  $b$  representam as medidas dos seguimentos sobre o “*eixo focal*”, também chamado de “*eixo real*” e o “*eixo imaginário*”, respectivamente, e desta forma percebemos que a alternância entre os valores dos numeradores das frações, do primeiro membro das equações, cujo denominador é  $a^2$ , representa o “*eixo focal*” sobre o qual a hipérbole foi construída, sendo a fração de denominador  $a^2$  sempre positiva. Existe ainda um outro parâmetro relacionado à hipérbole que precisa ser destacado: a “*excentricidade*”, representada por  $e = \frac{c}{a}$ .

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012a, p. 113), a excentricidade, revela o tipo de secção cônica (círculo, elipse, parábola ou hipérbole) que se está estudando, bem como o grau ao qual ela está “achatada” ou “aplanada”. Tanto na elipse quanto na hipérbole, a excentricidade é a razão da distância entre os focos, e a distância entre os vértices, uma vez que  $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}$ .

Desta forma, como na hipérbole  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , então a excentricidade de uma hipérbole é dada por  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ . E finalmente se considerarmos  $a = b = 1$ , então obteremos a hipérbole equilátera e unitária cuja equação é dada por,

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (13)$$

Uma vez definidas as equações básicas que representam uma hipérbole, precisa-se analisar o papel de outros elementos que surgiram na construção anterior, a exemplo das retas  $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$ , também chamadas de assíntotas da hipérbole equilátera.

Com este objetivo em mente, cabe retomar a discussão sobre as “assíntotas” iniciada pela abordagem de Maor (2008) e para isto, observe que se  $P(x, y)$  é um ponto da hipérbole como representada na Figura 19, então, podemos dizer que ele nunca ultrapassará a reta  $y = x$ , representada na Figura 19, uma vez que esta é uma assíntota da hipérbole representada no primeiro e terceiro quadrantes. Esta é uma conclusão que fica evidente quando observa-se a

construção geométrica da hipérbole. E observando ainda que do fato de o triângulo  $C\hat{V}_2F$  ser retângulo, então pela desigualdade triangular conclui-se que a  $d(\overline{V_2F}) = b > 0$ , e que  $P$  nunca estará sobre o eixo imaginário da hipérbole. De fato, sobre esta particularidade vemos em Lima (2013), que há uma preferência em utilizar-se o triângulo  $B_1\hat{C}V_2$  para demonstrar que se  $P(x, y)$  é ponto da hipérbole, então,  $P$  não pode pertencer ao eixo imaginário da hipérbole, pois, neste caso, teríamos uma contradição em relação à definição de hipérbole, uma vez que teríamos  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a > 0$ . Estes autores também preferem utilizar este triângulo para definir o retângulo virtual ao qual chamam de “retângulo de base da hipérbole”.

Esta forma de ver o “retângulo virtual” leva em conta que o triângulo  $B_1\hat{C}V_2$  tem dois lados com medidas conhecidas  $a$  e  $c$ . Desta forma, como um deles é a *hipotenusa*, representada por  $c$  então, ao nomear o lado desconhecido de  $b$  e aplicar o teorema de Pitágoras chega-se ao mesmo resultado obtido acima.

Como vê-se, há uma necessidade urgente de estabelecer critérios formais para averiguar a veracidade destas afirmações. E para tal, será abordado a relação entre a hipérbole e suas assíntotas, sob a ótica de Lima (2013), que apresenta uma demonstração capaz de confirmar o que nossa intuição e construções geométricas apontam como uma possível verdade.

### 2.3.2 Estudo analítico das assíntotas de uma hipérbole

Sejam  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais e  $H$  uma hipérbole, de centro  $O$  e reta focal sobre o eixo  $OX$ . Nesse sistema, a equação de  $H$  é a Equação (12) e dessa equação obtém-se:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (14)$$

Com  $x \geq a$  ou  $x \leq -a$ .

Considere agora a função  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$x \mapsto f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

cujo gráfico é a parte de  $H$  situada no primeiro quadrante conforme Figura 16. Observe que para  $x = a$ , temos  $f(a) = 0$ . Pode-se reorganizar a função  $f$  para obter a forma:

$$f(x) = \frac{b}{a} \cdot (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Na qual ao executar o teste da primeira derivada percebe-se que

$$f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 - a^2)' = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{b}{a} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ e portanto,}$$

$$f'(x) = \frac{bx}{a \cdot \sqrt{x^2 - a^2}} > 0. \quad (16)$$

Logo,  $f(x)$  é crescente. E, ainda no teste da segunda derivada nota-se que

$$f''(x) = -\frac{ba}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (17)$$

Donde,  $f''(x) < 0$ , e assim concluí-se que,  $f(x)$  é côncava para baixo.

De posse destas informações e a demonstração encontrada em Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 127), considere um ponto  $P(x, y) \in H$ , isto é, tal que satisfaça

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Então será verificada que a reta

$$r^+ : bx - ay = 0$$

é uma assíntota de  $H$ , de fato tem-se

$$d(P, r^+) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{|bx + ay|}, \text{ donde ,}$$

$$d(P, r^+) = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{|bx + ay|}$$

Logo,  $d(P, r^+) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \infty$  e  $y \rightarrow \infty$  ou quando  $x \rightarrow -\infty$ , e  $y \rightarrow -\infty$ . E de modo análogo, podemos verificar que  $d(P, r^-) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , e  $y \rightarrow -\infty$ , ou quando  $x \rightarrow -\infty$ , e  $y \rightarrow \infty$ , onde  $P(x, y) \in H$  e  $r^- : bx + ay = 0$ , é a outra assíntota da hipérbole. Donde concluí-se que a hipérbole não intercepta as assíntotas, o que fecha a demonstração.

### 2.3.3 A equação canônica da hipérbole transladada

Até o momento, consideramos apenas a hipérbole centrada na origem do sistema cartesiano ortogonal, mas também pode-se considerar que ela pode ser translada tanto vertical quanto horizontalmente, ou ainda sofrer uma rotação para um eixo oblíquo em relação ao plano cartesiano ortogonal. As três possibilidades serão abordadas aqui em momentos distintos, mas de forma complementar durante este estudo. Por enquanto, será utilizada a abordagem de Delgado, Frensel e Crissaff (2017) para o estudo da translação da hipérbole.

Desta forma, considere a Hipérbole com centro no ponto  $(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$ . Considere ainda que esta hipérbole está centrada num ponto  $\bar{O} = (x_0, y_0)$ , logo por construção este ponto pertence à reta focal. Neste caso considere que  $\ell : y = y_0$  seja a equação cartesiana da reta focal. Além disso, como  $d(F_1, \bar{O}) = d(F_2, \bar{O}) = c$ , então resulta que  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole.

Assim, seja  $P(\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$  um ponto pertencente à hipérbole onde,  $x = \bar{x} + x_0$  e  $y = \bar{y} + y_0$  são as suas coordenadas no sistema  $OXY$  e  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  são as suas coordenadas no sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  obtido transladando-se o sistema  $OXY$  para a nova origem  $\bar{O} = (x_0, y_0)$ . Como vemos na Figura 20. Como a hipérbole com centro na origem sofre uma translação tem-se a conclusão abaixo.

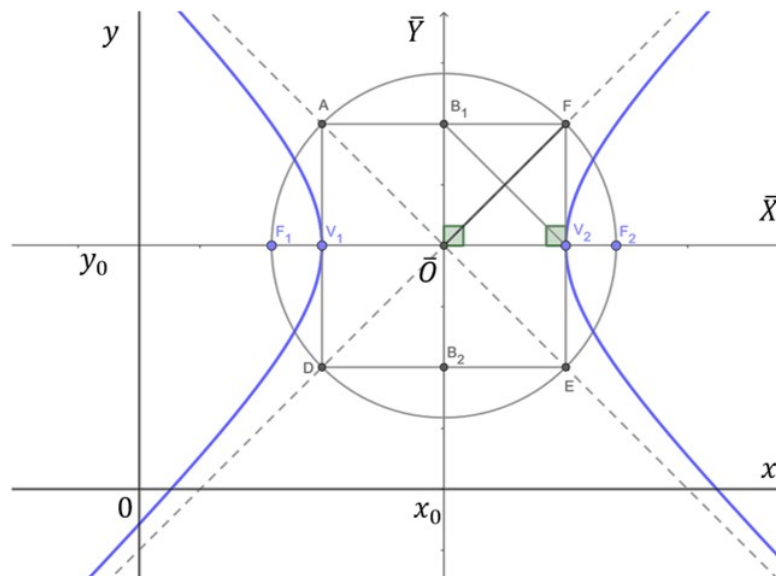
A forma canônica da hipérbole com centro no ponto  $(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$  é:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (18)$$

onde  $b^2 = c^2 - a^2$ . E neste caso os elementos da hipérbole são:

- Focos:  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ ;
- Reta focal:  $\ell : y = y_0$ ;
- Vértices:  $A_1 = (x_0 - a, y_0)$  e  $A_2 = (x_0 + a, y_0)$ ;
- Reta não focal:  $\ell' : x = x_0$ ;
- Vértices imaginários:  $B_1 = (x_0, y_0 - b)$  e  $B_2 = (x_0, y_0 + b)$ ;
- Assíntotas:  $y - y_0 = \pm \frac{b}{a} \cdot (x - x_0)$ , ou seja,  $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$  e  $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$ .

**Figura 20 – A hipérbole transladada**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Analogamente ao caso anterior, verifica-se que a forma canônica da equação da hipérbole transladada, com centro no ponto  $(x_0, y_0)$  e reta paralela ao eixo  $OY$  é dada por,

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1. \quad (19)$$

### 2.3.4 As funções hiperbólicas

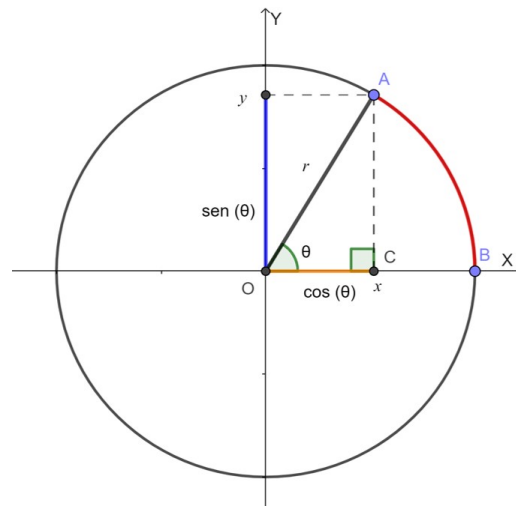
Antes de falar das funções hiperbólicas propriamente ditas, será discutido a parametrização hiperbólica, em contraste com as coordenadas polares do Cálculo de várias variáveis, ver Thomas, Weir e Hass (2012a). Além disso, uma discussão sobre as coordenadas circulares ou polares também será feita.

## 2.4 A parametrização de um disco centrado na origem

Quando aborda-se os temas funções circulares já busca-se expressar nossas percepções de acordo com a abordagem mais comumente encontrada nos materiais de nível médio, e até de níveis mais avançados, relacionando a equação da circunferência unitária com o triângulo retângulo construído sobre o plano cartesiano ortogonal e centrada na origem, para obter as relações, ou razões entre os lados comumente nomeados de *seno*, *coseno* e *tangente*, bem como as de suas relações inversas. E nesta abordagem, buscou-se destacar que se poderia relacionar as medidas dos lados do triângulo retângulo formado com o ângulo  $\theta$ , e que este, por sua vez, poderia ser expresso tanto em graus, quanto em radianos ou em unidades de área. Isto foi feito com o intuito de certificar as comparações na definição de ângulo circular com a definição de ângulo hiperbólico, uma vez que, tanto este quanto àquele, podem ser expressos em termos de área sob uma curva. Entretanto, o que não foi comentado naquela breve introdução é que todos os resultados obtidos podem ser completamente diferentes, a depender da escolha para o parâmetro a ser utilizado.

Em nossa abordagem sobre as funções circulares, de modo a ser possível uma abordagem comparativa com as funções hiperbólicas, utilizou-se o parâmetro  $\theta$  redefinindo-o como sendo equivalente à metade da área do setor circular representado no sistema cartesiano ortogonal pelo arco  $AB$ , como pode ser observado na Figura 21.

**Figura 21 – A Parametrização do círculo**



Fonte: Elaboradas pelo auto.

Desta forma como o triângulo  $\widehat{ACO}$  é retângulo, de acordo com a discussão no tópico funções circulares, temos

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}, \text{ logo, } y = y(\theta) = r \cdot \text{sen}(\theta)$$

e

$$\text{cos}(\theta) = \frac{x}{r}, \text{ e assim, } x = x(\theta) = r \cdot \text{cos}(\theta).$$

Donde, fazendo  $\theta$  percorrer todos os valores do intervalo  $[0, 2\pi)$ , obtemos todos os pontos do círculo. Assim, considerando que  $\theta$  possa percorrer todos os valores reais, então podemos dizer que estaremos realizando um número infinito de voltas sobre o círculo<sup>9</sup>, a exemplo do que discutiu-se com a função de *Euler*. E, por conseguinte, a equação paramétrica de um círculo  $C$  de raio  $r$  e centrado na origem, é dada por:

$$C : \begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases} ; \theta \in \mathbb{R}.$$

Note que, quando se utiliza uma parametrização, ao considerar-se  $r = 1$  então obtém-se:

$$C : \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} ; \theta \in \mathbb{R}.$$

Agora substituindo estes valores na equação da circunferência centrada na origem do sistema cartesiano ortogonal

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (20)$$

vem que,

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1^2 = 1. \quad (21)$$

Que é a relação fundamental da trigonometria circular. E aplicando as relações trigonométricas entre os lados deste triângulo obtemos as demais relações fundamentais da trigonometria circular, e que já foram comentadas nas seções anteriores:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (22)$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (23)$$

$$\operatorname{sec}(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad (24)$$

e

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad (25)$$

desde que os denominadores não se anulem, conforme discutido nas seções antecedentes. Anteriormente, foram definidas as funções *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cossecante*, considerando apenas uma abordagem geométrica a partir da Figura 4, e o fato dos triângulos em destaque nela serem todos triângulos retângulos. E, caso ainda reste alguma dúvida sobre esta etapa basta analisar a Figura 4, para verificar a validade desta argumentação. Outrossim, agora com a definição de uma equação paramétrica para o círculo verifica-se que àquelas relações permanecem válidas. E assim, podem satisfazer às necessidades de rigor e de generalização necessárias ao bom desenvolvimento do conhecimento matemático.

<sup>9</sup> Uma abordagem mais detalhada sobre a parametrização do círculo e da hipérbole pode ser encontrada em Delgado, Frensel e Crissaff (2017).



### 2.4.1 As funções hiperbólicas e algumas parametrizações

Encontra-se em Alhadas (2013), que em 1871, na obra “*Mémoire Sur Quelques Propriétés Remarquables Des Quantités Transcendantes Circulaires et Logarithmiques*”, Lambert apresenta as funções hiperbólicas, fornecendo os conceitos e as notações modernas que usam-se atualmente. Ademais, ele foi a primeira pessoa a comparar as funções transcendentais circulares  $\sin(u)$  e  $\cos(u)$ , com suas expressões análogas, definindo as “*Quantités Transcendantes Logarithmiques*”,  $\frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}$  e  $\frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}$ . Às quais ele tratou inicialmente, como séries de potências. Entretanto, somente em 1768 em sua “*Observations Trigonométriques*” é que ele introduziu as notações  $\sinh(\phi)$ ,  $\cosh(\phi)$  e  $\tanh(\phi)$  ao realizar uma comparação entre os quocientes das funções trigonométricas circulares e hiperbólicas, definindo então as seguintes relações para as razões trigonométricas na hipérbole:

$$\sinh(\phi) := \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}, \phi \in \mathbb{R} \text{ ( seno hiperbólico )}, \quad (26)$$

$$\cosh(\phi) := \frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}, \phi \in \mathbb{R} \text{ ( cosseno hiperbólico )}, \quad (27)$$

e

$$\tanh(\phi) := \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{e^\phi + e^{-\phi}} = \frac{\sinh(\phi)}{\cosh(\phi)}, \phi \in \mathbb{R} \text{ ( tangente hiperbólico )}, \quad (28)$$

bem como todas as demais relações que derivam da interação entre o seno e o cosseno hiperbólicos, onde  $e \cong 2,718281828\dots$ , segundo Kaplan (1972), é o número transcendental de Euler.

Note primeiramente que, como  $e^{\pm\phi} > 0$ , para qualquer  $\phi$ , tem-se imediatamente que a função tangente hiperbólica está bem definida para qualquer  $\phi$ , já que, pelo menos  $\cosh(\phi) > 0$  (mais adiante será discutido que é maior ou igual a 1). Observe que

$$\cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = \left(\frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2\phi} + 2 + e^{-2\phi} - e^{2\phi} + 2 - e^{-2\phi}}{4}\right) = 1. \quad (29)$$

A equação acima, similarmente a equação fundamental da trigonometria, será dita a Equação Fundamental Hiperbólica.

Outras funções hiperbólicas, tais como as funções cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, podem ser definidas da mesma maneira que as das funções circulares correspondentes. E, estas existem desde que o seno hiperbólico não seja nulo (os domínios de definição, etc, serão estudados mais precisamente a seguir):

$$\operatorname{cotgh}(\theta) = \frac{\cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} = \frac{1}{\tanh(\theta)}, \quad (30)$$

$$\operatorname{sech}(\theta) = \frac{1}{\cosh(\theta)}, \quad (31)$$

e

$$\operatorname{csch}(\theta) = \operatorname{cossech}(\theta) = \frac{1}{\sinh(\theta)}. \quad (32)$$

Neste momento, até parece que posso ouvir o grito de alarme triunfante de *Johann Bernoulli*, o membro mais novo da família *Bernoulli*, e que ao resolver um problema que desafiara *Galileu*, e que fora proposto como desafio aos matemáticos e pesquisadores da época, pelo renomado *Jakob Bernoulli*, em maio de 1660, no jornal que *Leibniz* havia fundado oito anos antes, o “*Acta eruditorum*”, para toda a comunidade científica da época. Problema este, que nos desafia agora igualmente, de forma parafraseada, claro, uma vez que nos encontramos na mesma encruzilhada do caminho. Entretanto, para entender como este desafio nos coloca na mesma situação de *Galileu*, precisamos conhecer o problema e a história de sua resolução.

O problema consistia, basicamente, em provar que a curva formada por uma corrente suspensa pelas suas extremidades e sujeita apenas à ação de seu próprio peso era uma parábola e envolvia apenas uma das funções abordadas aqui, o *coseno hiperbólico*. E devido a este problema específico, e sua repercussão no mundo acadêmico de então, esta curva ficou conhecida como *catenária* (do latim *catena*, que significa: uma corrente).

Não parece ser óbvio ainda, mas as considerações apresentadas por *Johann Bernoulli* forneceram-nos um caminho que levou-nos a compreender porque o *seno* e o *coseno hiperbólicos* são expressos na forma de exponenciais, e nos ajudaram a recompor o raciocínio que levou *Lambert* a definir estas razões em termos de exponenciais.

Pode-se ver em Maor (2008), que depois de uma longa noite de tentativas frustradas, *Johann Bernoulli* encontrou a solução do problema. E ao comunicar, com ar triunfante, a solução do problema ao seu irmão *Jakob*, disse:

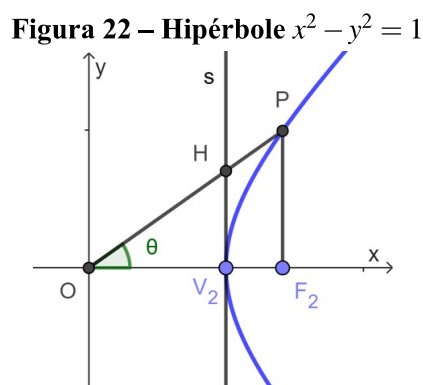
“Pare! Pare! Eu disse a ele, não se torture mais tentando provar a identidade da catenária com a parábola, por que ela é inteiramente falsa..., pois, a parábola é algébrica enquanto a catenária é transcendental”. A catenária revelou-se a curva cuja equação em notação moderna é  $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$ , onde  $a$  é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente – sua densidade linear (massa por unidade de comprimento) e a tensão com a qual é segura. (MAOR, 2008, p. 185).

Cabe-nos então buscar compreender o que seriam estas funções transcendentais e as funções algébricas e como diferenciá-las?

Podemos verificar em Kaplan (1972), que esta é uma definição oriunda da álgebra. De um modo geral, um “número é transcendente” (do inglês: “*transcendental*”) se é um número que não satisfaz uma equação polinomial não constante e cujos coeficientes são inteiros. Uma função é dita transcendental quando ela não pode ser expressa por uma combinação finita de expressões algébricas, ou que não pode ser expressa como um polinômio. E aqui reside a dificuldade de *Galileu* e de *Jakob*, uma vez que para tentar provar a identidade da *catenária* com uma parábola, isso consistia, basicamente, em mostrar que a *catenária* seria uma função polinomial, o que *Johann* provou ser improcedente ao asseverar a existência de uma grande distinção entre elas: “*a parábola é algébrica enquanto a catenária é transcendental*”, bradava ele ao seu irmão *Jakob*!

Assim, para o referido autor, a função exponencial é “transcendente”, pois ela é expressa por uma combinação infinita de potências da variável independente que a expressa como podemos ver na Equação (1). Uma outra forma de dizer isto seria considerar que uma função de uma variável, tal como a função exponencial  $e^x$ , é transcendente se ela é algebricamente independente desta variável, fato que pode ser verificado com facilidade posto que, como sabemos a base de uma exponencial não depende do seu expoente, que será a variável independente da função, o que fecha esta discussão no que diz respeito ao nível de estudo proposto neste trabalho, que é a educação básica. Informações adicionais podem ser obtidos em livros de cálculo avançado, como o do autor citado aqui, e os interessados podem se aprofundar nessa temática consultando estes materiais. O referido autor ainda acrescenta que, “às funções  $\text{sen}(x)$ ,  $\text{cos}(x)$  e  $e^x$ , costuma-se dar o nome de funções transcendentais elementares” (KAPLAN, 1972, p. 16).

Encontra-se em Freitas *et al.* (2015) uma análise da Figura 22 que será útil para a definição das coordenadas hiperbólicas ou parametrização hiperbólica que será realizada a seguir, bem como das funções hiperbólicas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 22, tem-se que  $\overline{PF_2}$  é perpendicular ao eixo das abscissas cuja intersecção com este é o ponto  $F_2$  ( $\overline{OF_2}$  é a abscissa de  $P$ ). E ainda, que a reta  $s$  foi construída de modo a ser perpendicular ao eixo  $Ox$  e tangente ao ramo direito da hipérbole, de modo que esta intersecta o  $\overline{OP}$  no ponto  $H$ .

Deste modo, como o  $\text{senh}(\theta)$ , o  $\text{cosh}(\theta)$  e a  $\text{tgh}(\theta)$  correspondem, respectivamente, os comprimentos dos segmentos  $PF_2$ ,  $OF_2$  e  $V_2H$ ,. Então, obtém-se que

$$\text{senh}(\theta) := \overline{PF_2}, \quad \text{cosh}(\theta) := \overline{OF_2}, \quad \text{e que } \text{tgh}(\theta) := \overline{V_2H}.$$

De fato, tem-se  $\overline{OF_2}^2 - \overline{PF_2}^2 = 1 = \text{cosh}^2(\theta) - \text{senh}^2(\theta)$  pela Equação (29), o que mostra que, de fato os pontos  $(\text{cosh}(\theta), \text{senh}(\theta))$  pertencem a hipérbole.

#### 2.4.2 Parametrizações

Agora pretende-se parametrizar os dois ramos da hipérbole dada abaixo, isto é, parametrizar as duas folhas a esquerda e a direita da hipérbole, para tanto pretende-se seguir o texto

de Delgado, Frensel e Crissaff (2017) como base, contudo destaca-se que o que é feito a seguir, generaliza as ideias contidas no texto supracitado e corrige-se alguns erros lá cometidos.

Relembre que a equação canônica da hipérbole cujo eixo focal está sobre o eixo  $Ox$  e está representada na Figura 18 é dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (33)$$

além disso, considere também a equação da reta assíntota desta parábola nos primeiro e quarto quadrantes, isto é, a reta  $r^+$ :  $bx - ay = 0$ . Pode-se definir as coordenadas hiperbólicas da folha da hipérbole localizada nos primeiro e quarto quadrantes, diga-se  $H^+$ , como sendo as seguintes:

$$H^+ : \begin{cases} x = a \cdot \cosh(\theta) \\ y = b \cdot \sinh(\theta); a, b > 0, \theta \in (-\arctg(\frac{b}{a}), \arctg(\frac{b}{a})), \end{cases}$$

onde

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cosh^2(\theta)}{a^2} - \frac{b^2 \sinh^2(\theta)}{b^2} = 1, \quad (34)$$

pela Equação (29). Similarmente pode-se parametrizar a outra folha da hipérbole  $H^-$  com uma parametrização similar porém percorrida num sentido contrário a da hipérbole à direita, como segue

$$H^- : \begin{cases} x = -a \cdot \cosh(\theta) \\ y = b \cdot \sinh(\theta); a, b > 0, \theta \in (-\arctg(\frac{b}{a}), \arctg(\frac{b}{a})). \end{cases}$$

Cabe-nos perguntar: é possível que os valores de  $\sen(x)$  e  $\cos(x)$  não guardem similaridade com o  $\sinh(x)$  e o  $\cosh(x)$  quanto a valores, salvo possivelmente a sua estrutura? Neste caso, o que justifica a nomenclatura similar? Não é o foco de nosso estudo tratar destes questionamentos de forma cabal, de modo que não serão abordados aqui com profundidade, entretanto, como nossa proposta exige algo mais que a trivialidade, serão tratados alguns destes aspectos, com uma profundidade suficiente, para que fique um pouco abaixo da linha de tensão da superficialidade, posto que representam fulcros axiomáticos importantes para uma boa compreensão da teoria subjacente ao tema em estudo. E neste sentido, podemos ainda, asseverar que, um outro fato interessante sobre a correlação entre as funções  $\seno$  e  $\cosseno$  e suas respectivas funções hiperbólicas, está associado às suas derivadas. Neste ponto, pode-se fugir um pouco do que o leitor pretende encontrar neste texto, mas para os interessados recomenda-se um livro de Cálculo diferencial e Integral, por exemplo, Leithold (2002) ou Kaplan (1972). Sabe-se que as derivadas de  $\cos(x)$  e  $\sen(x)$ , são respectivamente iguais a  $-\sen(x)$  e  $\cos(x)$ . No caso das funções hiperbólicas, note que  $(\sinh)'(x) = \cosh(x)$  e  $(\cosh)'(x) = \sinh(x)$ , e está é uma das similaridades entre o caso circular e o caso hiperbólico, que também pode ser constatado usando-se expansões em séries de Taylor, note que não há troca de sinais na derivada do  $\cosseno$  hiperbólico ao contrário da função  $\cosseno$ . De fato, tem-se pelas propriedades de derivadas que

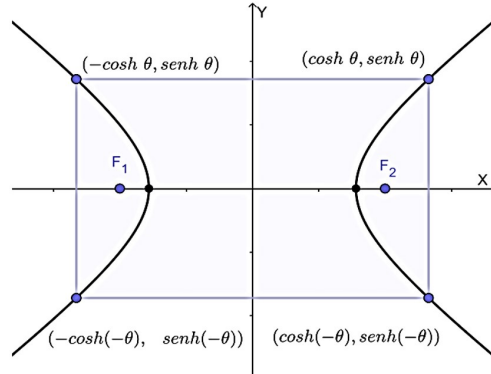
$$(\sinh)'(x) = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \cosh(x)$$

e

$$(\cosh)'(x) = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \sinh(x)$$

Tem-se agora uma representação na forma de figura, que ilustra os traços das parametrizações da faixas  $H^+$  e  $H^-$  da hipérbole unitária equilátera ( $a = b = 1$ ), que foram discutidas anteriormente.

**Figura 23 – A Parametrização da Hipérbole Equilátera**



Fonte: Retirado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 198).

Considere agora uma hipérbole  $H_0$  cuja reta focal é paralela ao eixo  $OX$  e centrada em  $(x_0, y_0)$ . Como discutido anteriormente sua equação na forma canônica é dada por

$$H_0 : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (35)$$

O ponto  $(\alpha, \beta) = \left( \frac{x-x_0}{a}, \frac{y-y_0}{b} \right)$  pertence à hipérbole  $H_0$  e assim as parametrizações de suas folhas à esquerda e à direita,  $H_0^+$  e  $H_0^-$ , respectivamente, são dadas por

$$H_0^+ : \begin{cases} \alpha = a \cdot \cosh(\theta) \\ \beta = b \cdot \sinh(\theta) \end{cases}, \quad a, b > 0, \theta \in \left( -\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \right),$$

$$H_0^- : \begin{cases} \alpha = -a \cdot \cosh(\theta) \\ \beta = b \cdot \sinh(\theta) \end{cases}, \quad a, b > 0, \theta \in \left( -\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \right),$$

e portanto, pode-se escrever as parametrizações de  $H_0$  de uma única maneira, como segue:

$$H_0^\pm : \begin{cases} x = x_0 \pm a \cdot \cosh(\theta) \\ y = y_0 + b \cdot \sinh(\theta) \end{cases}, \quad a, b > 0, \theta \in \left( -\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \right).$$

As definições apresentadas até o momento, podem parecer, estar um pouco além, do nível educacional proposto neste trabalho, tendo em vista a grande variabilidade tanto no desenvolvimento de cada turma, em particular, quanto no conhecimento matemático necessário para tal desenvolvimento, assim como, no tempo disponível, em cada escola para este estudo. Entretanto, a construção de soluções adequadas aos nossos questionamentos, muitas vezes, dão

saltos, e criam *insights* que perpassam as fronteiras da necessidade e do utilitarismo pragmático, que nos rodeia de forma incisiva, para alcançar novos ares, novos mundos, e, até para fazer uma releitura necessária, sobre aquilo que já perdeu o dinamismo, o entusiasmo, e a esperança de aprender. Esta é a convicção que norteou este trabalho acerca das funções hiperbólicas ininterruptamente. Desta forma, acreditando nas possibilidades de superação que o professor/estudante pode encontrar aqui, é que apresento as mesmas conclusões já obtidas, utilizando uma das propriedades das funções reais: A paridade.

## 2.5 A Paridade das funções hiperbólicas

Ao introduzir as noções sobre as funções circulares  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $g(x) = \text{cos}(x)$  argumentou-se que a função  $f$  era ímpar, já que satisfaz  $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , como pode-se ver intuitivamente na Figura 6, e que a função  $g$  era par, pois,  $g(-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Fato este, que pode ser comprovado intuitivamente com uma análise rápida de seu gráfico na Figura 7. Entretanto, com o intuito de aprofundar um pouco mais a noção de paridade que irá nos ajudar a simplificar algumas ideias, é necessário uma definição formal. Assim, encontramos que na obra de Demana *et al.* (2013)<sup>10</sup> há uma extensa abordagem sobre a definição de paridade através da representação gráfica de uma função que embasa os resultados algébricos utilizados neste trabalho.

**Definição 5.1.3:** Uma função  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ , é par se satisfaz:  $f(-x) = f(x), \forall x \in J$ . E, será ímpar, se  $f(-x) = -f(x), \forall x \in J$  tal que  $J \subset \mathbb{R}$ .

Assim, encontramos em Demana *et al.* (2013, p. 81-85), que as funções  $g(x) = x^{2n}$ , onde  $(n = 1, 2, 3, \dots)$ , são pares pois,

$$g(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = g(x)$$

enquanto que as funções  $g(x) = x^{2n+1}$  são ímpares, pois,

$$g(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -g(x).$$

Agora note que se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é uma função real arbitrária, então, tal função é uma combinação linear de uma função par, e outra função ímpar. Antes disso, note que

$$r(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ é par;} \quad (36)$$

e

$$k(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ é ímpar.} \quad (37)$$

De fato, tem-se que

$$r(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = r(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

<sup>10</sup> Os interessados em aprofundar-se neste tema podem encontrar um rico material de apoio em (DEMANA *et al.*, 2013).

além disso, note que

$$k(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = \frac{-(f(x) - f(-x))}{2} = -k(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

E por fim, observe que,

$$r(x) + k(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

Do exposto acima, pode-se concluir que toda função real pode ser escrita, como sendo a soma de uma função par, com uma função ímpar. E, portanto, se  $f(x) = e^x$ , então aplicando as propriedades que resultam na Equação (38), à função  $f$ , podemos reescrevê-la como

$$e^x = r(x) + k(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Mas antes fazê-lo, precisamos definir: quem é  $f(-x)$ ? Note que  $f(-x) = e^{-x}$ , donde pode-se calcular as funções  $r$  e  $k$  como abaixo:

$$\cosh(-x) = r(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = r(x) = \cosh(x) \quad (40)$$

e

$$\sinh(-x) = k(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-( -(-x) )}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{2} = -k(x) = -\sinh(x). \quad (41)$$

O que nos revela que *Lambert* foi muito perspicaz ao concluir, já naquela época, que o  $\sinh(x)$  e o  $\cosh(x)$  mantinham uma relação intrínseca com a exponencial natural e que poderiam ser expressos nas formas das Equações (2) e (3), respectivamente. O que mostrou-se anteriormente, é que assim como a função *coseno* é par, tem-se que a função *coseno hiperbólico* também é par, enquanto que a função *seno* é ímpar e similarmente para a função *seno hiperbólico*. Além do mais, pode-se compreender a satisfação com que *Johann Bernoulli* afirmou que a *catenária*, que corresponde ao  $\cosh(x)$ , era uma curva transcendental nos moldes apresentados por Kaplan (1972). Este é um fato importante e impulsionador, que nos leva a sair do lugar comum no qual se encontrava Carvalho (2017) quando disse: “Achei muito engraçado ao se pensar em juntar-se duas palavras como *seno* e *hipérbole* para nomear um  $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ” ao estudar a disciplina de Cálculo I na graduação. E movidos, talvez, pela mesma “estranheza” é que buscou-se, assim como esta autora, alternativas para lançar alguma luz sobre este tema. Almejando uma possível abordagem deste, já na educação básica, uma vez que nos materiais que tratam deste assunto, seus autores já consideram estes conhecimentos *a priori*, como parte do arcabouço “trivial” da teoria. Esta postura pode ser observada sob a mesma ótica que discutiu-se até este momento também no trabalho de Freitas *et al.* (2015), onde a autora destaca que, dentre os dez livros texto mais utilizados como referenciais e norteadores dos projetos institucionais das disciplinas de Pré-Cálculo, ou de Cálculo I, ou ainda de Cálculo Avançado, a principal forma de abordagem do tema funções hiperbólicas, em nossas salas de aula, já iniciam o assunto considerando que as Equações (3) e (2) são válidas, sem qualquer indicação do porquê?

## 2.6 Algumas derivadas e propriedades das funções hiperbólicas

Com o objetivo de construir os gráficos das funções hiperbólicas, serão desenvolvidos alguns cálculos das principais identidades e derivadas das funções hiperbólicas. E portanto, esta seção é aconselhada somente para o leitor que tem familiaridade com Cálculo, em especial, com as regras de derivação. Nas derivadas a seguir, considere que os quocientes sempre estarão bem definidos, os domínios de definição serão discutidos no capítulo posterior. Por conseguinte, ao calcularmos a derivada da  $tgh(x)$  devemos fazer,

$$(tgh(x))' = \left( \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x). \quad (42)$$

A segunda relação fundamental da trigonometria hiperbólica será demonstrada a seguir.

$$1 - tgh^2(x) = 1 - \left( \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \right) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x) \quad (43)$$

Por conseguinte, pode-se verificar com facilidade na Tabela 2, as grandes similaridades existentes entre as derivadas das funções circulares elementares e as das funções hiperbólicas. Fato que motiva, impulsiona e reforça nossas motivações, na busca de uma prática escolar que seja capaz de aglutinar e desenvolver estes conceitos de forma conjunta, aplicando os conhecimentos oriundos da trigonometria circular para desenvolver àqueles referentes à trigonometria hiperbólica.

**Tabela 2 – Derivadas de funções Circulares e Hiperbólicas**

Função	Circunferência	Hipérbole
<i>SENO</i>	$(\sin(x))' = \cos(x)$	$(\sinh(x))' = \cosh(x)$
<i>COSSENO</i>	$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$(\cosh(x))' = \sinh(x)$
<i>TANGENTE</i>	$(\tan(x))' = \sec^2(x)$	$(\operatorname{tg}(x))' = \sec^2(x)$
<i>COTANGENTE</i>	$(\cot(x))' = -\csc^2(x)$	$(\operatorname{cotgh}(x))' = -\operatorname{csch}^2(x)$
<i>SECANTE</i>	$(\sec(x))' = \sec(x) \cdot \tan(x)$	$(\operatorname{sech}(x))' = -\operatorname{sech}(x) \cdot \operatorname{tgh}(x)$
<i>COSSECANTE</i>	$(\csc(x))' = -\csc(x) \cdot \cot(x)$	$(\operatorname{csch}(x))' = -\operatorname{csch}(x) \cdot \operatorname{cotgh}(x)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ademais, observe que,

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) + \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = e^x \quad (44)$$

e

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = e^{-x} \quad (45)$$



As Equações (44) e (45), figuram entre as principais propriedades das funções *seno* e *coseno hiperbólicos*, e podem ser usadas para destacar também as semelhanças entre as identidades de somas e diferenças de *senos* e *cosenos hiperbólicos*, de dois números reais (podendo ser complexos, mas que não serão abordados neste texto), bem como as do *seno* e *coseno hiperbólicos* do dobro de um número, uma vez que são análogas às identidades trigonométricas circulares correspondentes.

Assim pode-se aplicar estas propriedades, para demonstrar a seguinte identidade da soma:

$$\sinh(x+y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (46)$$

De fato, tem-se

$$\sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}$$

donde aplicando os resultados das Equações (44) e (45), chega-se em

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \frac{1}{2} [(\cosh(x) + \sinh(x))(\cosh(y) + \sinh(y)) + \\ &\quad -(\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(y) - \sinh(y))], \end{aligned}$$

multiplicando os termos, obtém-se a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} &\cosh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) + \\ &-\cosh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) + \cosh(y)\sinh(x) - \sinh(x)\sinh(y), \end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \frac{1}{2} [2\sinh(x) \cdot \cosh(y) + 2\cosh(x) \cdot \sinh(y)] = \\ &= \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y) \end{aligned}$$

E de modo análogo, pode-se demonstrar que,

$$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (47)$$

Note que, se nas Equações (46) e (47), substituirmos  $y$  por  $x$  ( $y = x$ ), serão obtidas as seguintes fórmulas do arco duplo hiperbólico:

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) \quad (48)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \quad (49)$$

A Tabela 3 confirma, de certa maneira, uma similaridade entre as funções circulares e as hiperbólicas.

Várias outras identidades podem ser encontradas no texto de Leithold (2002), muitas delas sem demonstração, e que podem ser ótimos exercícios para a compreensão dos diversos

**Tabela 3 – Identidades de adição e subtração na circunferência unitária e na hipérbole equilátera**

Função	Identidades na Circunferência	Identidades na Hipérbole
$\text{sen}(x + y)$	$\text{sen}(x) \cdot \cos(y) + \text{sen}(y) \cdot \cos(x)$	$\text{senh}(x) \cdot \cosh(y) + \text{senh}(y) \cdot \cosh(x)$
$\cos(x + y)$	$\cos(x) \cdot \cos(y) - \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$	$\cosh(x) \cdot \cosh(y) + \text{senh}(x) \cdot \text{senh}(y)$
$\text{sen}(x - y)$	$\text{sen}(x) \cdot \cos(y) - \text{sen}(y) \cdot \cos(x)$	$\text{senh}(x) \cdot \cosh(y) - \text{senh}(y) \cdot \cosh(x)$
$\cos(x - y)$	$\cos(x) \cdot \cos(y) + \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$	$\cosh(x) \cdot \cosh(y) - \text{senh}(x) \cdot \text{senh}(y)$
$\text{sen}(2x)$	$2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(x)$	$2 \cdot \text{senh}(x) \cdot \cosh(x)$
$\cos(2x)$	$\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$	$\cosh^2(x) + \text{senh}^2(x)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

tópicos aqui discutidos. E, em algumas delas, as equações resultantes, não apresentam resultados intuitivos.

$$\text{tgh}(\ln(x)) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ e } \frac{1 + \text{tgh}(x)}{1 - \text{tgh}(x)} = e^{2x}, x > 0 \quad (50)$$

Da primeira, segue pois, que a seguinte identidade entre o logaritmo e a exponencial é válida:  $e^{k \cdot \ln(z)} = e^{\ln(z^k)} = z^k$  (desde que esteja bem definido), assim têm-se que

$$\text{tgh}(\ln(x)) = \frac{\text{senh}(\ln(x))}{\cosh(\ln(x))} = \frac{e^{\ln(x)} - e^{-\ln(x)}}{e^{\ln(x)} + e^{-\ln(x)}} = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

a segunda segue das Fórmula 44 e 45, ou seja,

$$\frac{1 + \text{tgh}(x)}{1 - \text{tgh}(x)} = \frac{1 + \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)}}{1 - \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)}} = \frac{\cosh(x) + \text{senh}(x)}{\cosh(x) - \text{senh}(x)} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$$

Do que foi exposto, pode-se considerar que é extremamente salutar, o estudo comparado entre as funções trigonométricas circulares e as funções hiperbólicas, tendo em vista as grandes similaridades entre as suas definições, fórmulas e propriedades, contudo será discutido a seguir que as funções hiperbólicas perdem uma propriedade fundamental de vários objetos físicos interessantes como ondas numa corda, sonora e eletromagnéticas, que é a periodicidade Freitas *et al.* (2015, p. 33, 34). Contudo estas conexões podem trazer grandes possibilidades de trabalhos que poderão ser desenvolvidos e que podem servir para dinamizar o ensino-aprendizagem destes conceitos, de forma integrada, desde a educação básica.

## 2.7 Matrizes e funções hiperbólicas

Considere o conjunto de matrizes

$$\mathcal{L} = \left\{ L(z) = \begin{bmatrix} \cosh(z) & -\text{senh}(z) \\ -\text{senh}(z) & \cosh(z) \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que,  $L(0) = Id$ , pois,  $\sinh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$  e  $\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$ . O determinante de  $L(z)$  é  $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ .

Seja  $L(w) = \begin{bmatrix} \cosh(w) & -\sinh(w) \\ -\sinh(w) & \cosh(w) \end{bmatrix}$  uma outra matriz de  $\mathcal{L}$ . Então, vale a seguinte relação:  $L(z) \cdot L(w) = L(z+w)$ . De fato,

$$\begin{aligned} L(z) \cdot L(w) &= \begin{bmatrix} \cosh(z) & -\sinh(z) \\ -\sinh(z) & \cosh(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cosh(w) & -\sinh(w) \\ -\sinh(w) & \cosh(w) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(z) \cdot \sinh(w) & -\cosh(z) \cdot \sinh(w) - \sinh(z) \cdot \cosh(w) \\ -\sinh(z) \cdot \cosh(w) - \cosh(z) \cdot \sinh(w) & \sinh(z) \cdot \sinh(w) + \cosh(z) \cdot \cosh(w) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

portanto, segue das identidades (46) e (47), que

$$L(z) \cdot L(w) = \begin{bmatrix} \cosh(z+w) & -\sinh(z+w) \\ -\sinh(z+w) & \cosh(z+w) \end{bmatrix} = L(z+w).$$

Logo, a inversa da matriz  $L(z)$  é igual a matriz  $L(-z)$  pois  $L(z) \cdot L(-z) = L(z-z) = L(0) = Id$ , donde segue que  $(L(z))^{-1} = L(-z)$ .

O conjunto  $\mathcal{L}$  é chamado de Grupo de Lorentz relativístico, e descreve as famosas transformações da Teoria da Relatividade de *Einstein*. Um leitor mais interessado nestes aspectos pode procurar o livro texto Barata (2023).

## 2.8 As razões trigonométricas na hipérbole

Ao estudar as razões trigonométricas na hipérbole, a partir de sua representação plana, percebe-se as semelhanças existentes na definição do *seno* e do *coseno* hiperbólicos, com àquela realizada na circunferência, posto que ambas os definem a partir da medida de um segmento de reta no plano cartesiano. Além disso, discutiu-se no capítulo anterior, que as derivadas e também as questões de paridade dão substância capaz de indicar, que as nomenclaturas hiperbólicas são boas para as funções supracitadas. E, desta forma, vê-se emergir numa “geometria não-euclidiana”, como a da hipérbole, o mesmo padrão conceitual daqueles encontrados na geometria circular, o que nos leva à consecução de uma comparação bastante profícua, entre os resultados obtidos em ambas as abordagens. Entrementes, ao direcionar nosso foco para o estudo das funções hiperbólicas, nos deparamos com definições que expressam os valores do  $\sinh(x)$  e suas relações como derivadas das funções exponencial natural  $e^x$  e  $e^{-x}$ , o que confirma as definições dadas por *Lambert*, redescobertas, alegremente, por *Johann Bernoulli*, e mais recentemente, por cada um de nós através deste estudo. Ademais, após nossa breve e necessária explanação dos fatos relevantes que se encontravam implícitos dentro do “*pacote da trivialidade*”, através do qual se desenvolvem os estudos deste tema na atualidade, podemos debruçar-nos com segurança, sobre as definições apresentadas por Freitas *et al.* (2015), e que resultam de sua pesquisa sobre, a quase unanimidade, das abordagens desta temática em alguns de nossos principais livros textos<sup>11</sup> que versam sobre o assunto, notando que apesar de

<sup>11</sup> Para conhecer melhor quais são estes materiais e sua características peculiares sugere-se uma análise mais acurada do trabalho de (FREITAS *et al.*, 2015).

todos eles já iniciarem o estudo das funções hiperbólicas afirmando a validade as Equações (2) e (3), nenhuma destas obras apresenta uma justificativa clara para este fato. Entrementes, direcionados e amparados, mesmo que minimamente, pelas (re)descobertas e conclusões, advindas de nosso estudo inicial, podemos nos aventurar, com alguma esperança, no universo das funções hiperbólicas, buscando conhecer e evidenciar cada vez mais propriedades desta importante classe de funções que podem nos levar a uma compreensão melhor sobre uma das geometrias não-euclidianas, construída sob a ótica “de onde os pés pisam”<sup>12</sup>, o que nos traz a possibilidade de avançar de forma gradativa e contínua, sempre avaliando a necessidade de retorno às bases conceituais, a fim de produzir um conhecimento consistente e fecundo. Este deve ser o tom das análises realizadas a partir do momento em que serão construídos com o auxílio do *software GeoGebra*, as representações gráficas das funções hiperbólicas no próximo tópico. A partir de agora, tais funções serão estudadas de forma mais rigorosa e, algumas de suas principais propriedades deverão ser analisadas. Alguns dos textos a seguir são adaptações, e/ou complemento, dos textos encontrados em Leithold (2002).

### 2.8.1 A função cosseno hiperbólico

Nossa análise inicial, considera que o público alvo deste estudo é uma turma da educação básica, ou de Pré-Cálculo, ou de Cálculo I, incluindo claro, todo professor que leciona nestes níveis, e que está em busca de alternativas que contemplem uma linguagem modesta, mas, fundamentada e compreensível, voltada para este público, o que justifica a abordagem mais rudimentar, do ponto de vista teórico. Nossa estratégia busca aproveitar ao máximo todo o arcabouço conceitual desenvolvido neste nível de ensino.

**Definição 6.1:** A função *cosseno hiperbólico*, é a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , ao número real  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , ou seja,  $g(x) = \cosh(x)$ .

Voltando agora nosso olhar para a função  $g(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , pode-se constatar que não existem restrições para o seu domínio, logo,  $D(g) = \mathbb{R}$ . O mesmo ocorrendo para o seu contradomínio, donde  $CD(g) = \mathbb{R}$ . Sua imagem será dada ao final da construção do seu respectivo gráfico. Portanto, o texto é adequado para alunos de Cálculo, e/ou que tenham conhecimentos dos testes das derivadas primeira e segunda, entre outros. Enquanto para alunos da educação básica, recomenda-se fazer a construção do gráfico através de um *software* como o *GeoGebra*, ou plotando-se pontos. As referências para os resultados de Cálculo podem ser encontradas em Thomas, Weir e Hass (2012b), e Leithold (2002). Algumas propriedades podem ser obtidas como segue.

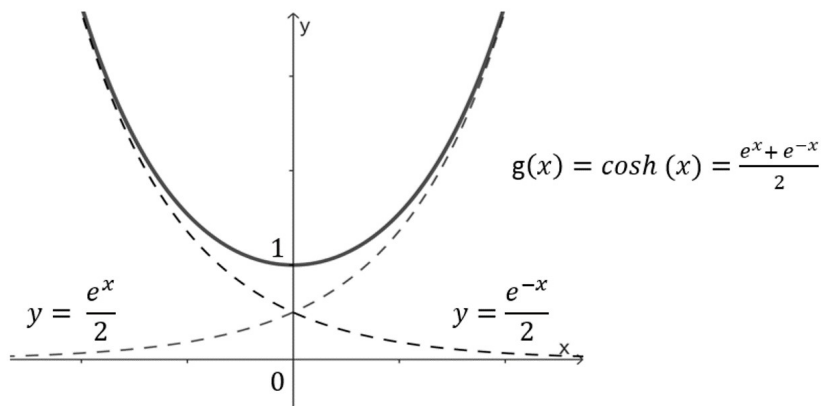
#### Propriedades

- i) Já discutiu-se que  $(\cosh(x))' = \sinh(x)$  e  $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ , como podemos ver na Tabela 2;

---

<sup>12</sup> Como descrito por *Lenardo Boff*.

**Figura 24 – Função cosseno hiperbólico**



Fonte: Elaborado pelo autor.

ii) Para  $x = 0$  verifica-se que

$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1,$$

logo, o ponto  $A = (0, 1)$ , pertence ao gráfico desta função;

iii) Note ainda que  $g'(x) = \sinh(x) > 0$ , se  $x > 0$ , e  $g'(x) = \sinh(x) < 0$ , se  $x < 0$ , o que implica que  $x = 0$  é um ponto de crítico da função, isto é, um ponto que é candidato a ponto de máximo, ou mínimo da função  $g$ . De fato, quando  $x > 0$ , percebe-se que os valores de  $\frac{1}{e^x}$  diminuem, quando  $x \rightarrow +\infty$ , e os valores de  $e^x$  aumentam, então,  $e^{-x} \rightarrow 0$  e,  $e^x \rightarrow \infty$ . Contudo, se  $x < 0$ , tem-se para  $x \rightarrow -\infty$ , então,  $e^{-x} \rightarrow \infty$  e,  $e^x \rightarrow 0$ . Portanto,  $g'(x) > 0$ , se  $x > 0$ . E  $g'(x) < 0$  se  $x < 0$ , donde conclui-se, que a função é decrescente para valores negativos, e crescente para valores positivos do domínio da função estudada, sendo  $x = 0$ , o seu único ponto de mínimo global. De fato, se  $g'(x) = 0$ , então,  $e^x = e^{-x}$ , o que ocorre somente no ponto de interseção entre as duas funções, isto é, no ponto  $x = 0$ , como pode-se ver no gráfico da Figura 24.

iv) Como discutido anteriormente,  $g''(x) = \cosh(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , logo tem-se que  $f(x) = \cosh(x)$ , tem um gráfico, cuja concavidade, é sempre para cima e não possui um ponto de inflexão, pois, caso contrário, se  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$ , então,  $e^x = -e^{-x}$ , o que é um absurdo, pois, o lado esquerdo é positivo, enquanto que, o lado direito é negativo.

Resume-se, a discussão das propriedades anteriores, através do gráfico abaixo, construído com o apoio do *software GeoGebra* e observa-se que,  $Im(f) = [1, \infty)$ , donde segue que  $\cosh(x) \geq 1$ , para qualquer  $x$  real. Donde resulta que a função  $\cosh(x)$  não é uma função periódica.

### 2.8.2 A função seno hiperbólico

**Definição 6.1.1:** A função *seno hiperbólico*, é a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , ao número real  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , ou seja,  $f(x) = \sinh(x)$ .

### Propriedades.

- i) Já discutiu-se que  $(\cosh(x))' = \sinh(x)$  e  $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ , ver Tabela 2;  
 ii) Para  $x = 0$ , verifica-se que ,

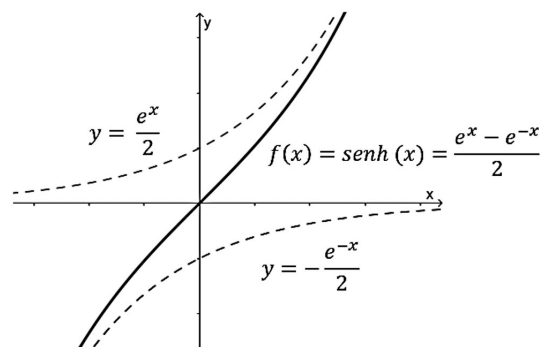
$$\sinh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0,$$

logo , o ponto  $B = (0, 0)$ , pertence ao gráfico desta função;

- iii) Como  $f'(x) = \cosh(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , tem-se que,  $f(x) = \sinh(x)$  é sempre crescente em seu domínio, e não contém pontos críticos nem máximos e mínimos locais;  
 iv) Note ainda, que  $f''(x) = \sinh(x) > 0$ , se  $x > 0$ , e  $f''(x) = \sinh(x) < 0$ , se  $x < 0$ , o que implica que  $x = 0$ , é um ponto de inflexão da função, isto é, um ponto em que a concavidade é modificada ao se passar por ele. De fato, quando  $x > 0$ , percebe-se que os valores de  $\frac{1}{e^x}$  diminuem quando  $x \rightarrow +\infty$ , e os valores de  $e^x$  aumentam, então,  $e^{-x} \rightarrow 0$ , e  $e^x \rightarrow \infty$ . Contudo, se  $x < 0$ , tem-se que para  $x \rightarrow -\infty$ , então,  $e^{-x} \rightarrow \infty$ , e  $e^x \rightarrow 0$ . Portanto,  $f''(x) > 0$ , se  $x > 0$ , e  $f''(x) < 0$ , se  $x < 0$ , donde conclui-se que a concavidade do gráfico de  $f$  é para cima, se  $x > 0$ , e para baixo se  $x < 0$ . Sendo  $x = 0$  o seu único ponto de inflexão. De fato, se  $f''(x) = 0$  então,  $e^x = e^{-x}$ , o que ocorre somente no ponto de interseção entre as duas funções, isto é, no ponto  $x = 0$ , como pode-se ver no gráfico da Figura 25.

Resume-se a discussão das propriedades anteriores através do gráfico abaixo construído com o apoio do *software GeoGebra* e observa-se que,  $D(f) = \mathbb{R}$  e  $Im(f) = \mathbb{R}$ . Donde resulta que a função  $\sinh(x)$  não é uma função periódica.

**Figura 25 – Gráfico da função seno hiperbólico**



Fonte: Elaborado pelo autor.

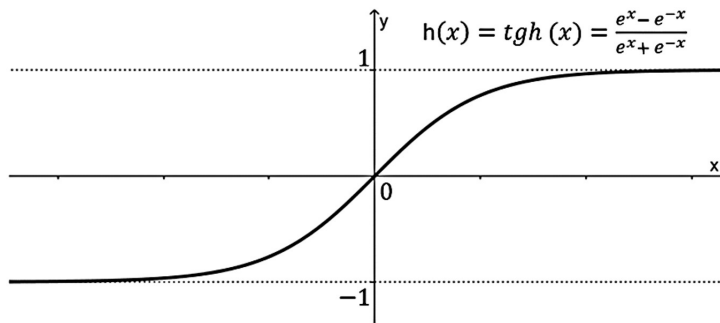
### 2.8.3 A função tangente hiperbólica.

A função tangente hiperbólica, é a função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , ao número real

$$tgh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (51)$$

ou seja,  $h(x) = tgh(x)$ . Como o numerador é a função cosseno hiperbólico não há restrições para o domínio desta função, mesmo que haja um quociente, visto que  $\cosh(x) \geq 1$ .

Figura 26 – Função tangente hiperbólica



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### Propriedades

i)

$$tgh(0) = \frac{\sinh(0)}{\cosh(0)} = \frac{0}{1} = 0,$$

logo, o ponto  $C = (0,0)$  pertence ao gráfico desta função.

ii) Dividindo o numerador e denominador da função em questão por  $e^x$ , e também por  $e^{-x}$ , obtém-se:

$$tgh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

donde pode-se perceber que quando  $x \rightarrow +\infty$ , então,  $e^{-2x} \rightarrow 0$ , o que faz com que a  $tgh(x) \approx 1$ , ou melhor, tenda a 1 pela esquerda. Por outro lado, quando  $x \rightarrow -\infty$ , então,  $e^{2x} \rightarrow 0$ , fazendo assim, com que a  $tgh(x) \approx -1$ , isto é, a função tenderá a  $-1$  pela direita, desde que o  $x$ , seja muito pequeno. Isso define as assíntotas horizontais do gráfico da função aqui estudada, ou seja, as retas  $y = 1$  e  $y = -1$  são assíntotas horizontais <sup>13</sup> da função  $\tanh(x)$ .

iii) A derivada primeira é dada por  $(tgh(x))' = \operatorname{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ , veja a Equação (42). Assim,  $h'(x) > 0$  e a função  $h$  é crescente;

iv) A derivada segunda é dada por  $(tgh(x))'' = -2 \frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)}$ , e pode ser deduzida, facilmente, a partir da Equação (42). Como já foi discutido o *seno hiperbólico*, é sempre positivo se  $x > 0$ , e negativo no caso contrário. Assim,  $h''(x) < 0$  se  $x > 0$ , e  $h''(x) > 0$  caso  $x < 0$ ,

<sup>13</sup> Se necessário reveja a definição de assíntotas no livro Thomas, Weir e Hass (2012b)

então a função tangente hiperbólica tem concavidade para baixo se  $x$  é positivo, e para cima, no caso contrário. Além disso, o único ponto de inflexão, é o ponto  $x = 0$ , pois, se  $(tgh(x))'' = 0$ , então,  $senh(x) = 0$ , se, e somente se,  $x = 0$ .

- v) Do exposto nos itens anteriores, verifica-se que o  $D(tgh(x)) = \mathbb{R}$ , enquanto que a  $Im(tgh(x)) = (-1, 1)$ , como pode-se constatar na Figura 26.

#### 2.8.4 A função secante hiperbólica

A função secante hiperbólica, é a função  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , ao número real  $sech(x) = \frac{1}{cosh(x)}$ , ou seja,  $k(x) = sech(x)$ . Como o numerador é a função cosseno hiperbólico, não há restrições para o domínio desta função, mesmo que haja um quociente visto que  $cosh(x) \geq 1$ .

Note que pode-se reescrever essa função como segue

$$sech(x) = \frac{1}{cosh(x)} = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}. \quad (52)$$

Assim, conclui-se que,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} sech(x) = 0, \text{ e que, } \lim_{x \rightarrow +\infty} sech(x) = 0$$

#### Propriedades

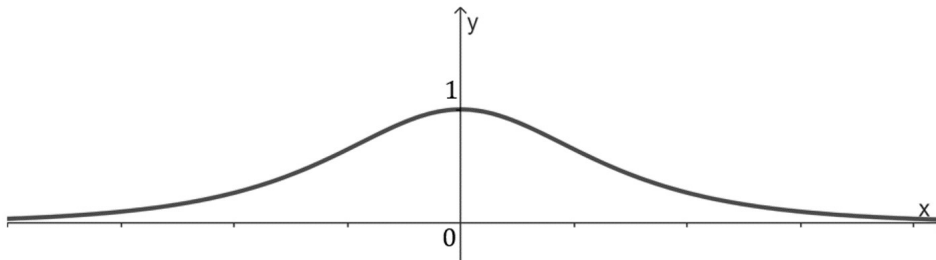
- i) O  $D(k(x)) = \mathbb{R}$ , e a  $Im(sech(x)) = (0, 1]$ , como será visto na Figura 27 a seguir, onde  $sech(0) = \frac{1}{cosh(0)} = \frac{1}{1} = 1$ ;
- ii) O eixo das abscissas é uma assíntota horizontal desta função.
- iii) A derivada primeira é dada por  $(sech(x))' = -sech(x) \cdot tgh(x)$ , veja a Fórmula constante da Tabela (2). Como o cosseno hiperbólico é sempre positivo basta estudar o sinal da função  $tgh(x)$ , mas esta função é positiva para valores positivos de  $x$  e negativa no caso contrário, ver a Figura 26. Assim,  $k'(x) > 0$ , se  $x < 0$ , e positiva caso contrário, o que implica que a função  $sech(x)$  é crescente para  $x < 0$ , e decrescente para  $x > 0$ , tal que seu único ponto de máximo local é  $x = 0$ , de fato se  $k'(x) = 0$ , então  $tgh(x) = 0$ , que só ocorre quando  $x = 0$ , ver a Figura 27.
- iv) A derivada segunda, que pode ser deduzida a partir da  $(sech(x))'$ , constante da Tabela 2, é dada por,  $(sech(x))'' = -sech(x) \cdot (1 - 2tgh^2(x))$ . Como já foi discutido, a secante hiperbólica é sempre positiva, já que ela é o inverso do cosseno hiperbólico, que é positivo para qualquer ponto de seu domínio. Assim, para estudar o sinal da derivada segunda basta estudar o que ocorre com a sentença em parênteses na expressão acima, trocando-se o sinal depois de feito isso, pois, o lado esquerdo da expressão da derivada segunda contém um sinal  $-$ . Os pontos de inflexão devem anular  $k''(x)$ , assim, devem satisfazer a equação  $1 - 2tgh^2(x) = 0$ , que resulta em  $tgh(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . E, como esta sentença tem duas soluções distintas,  $x_1 < 0$ , e,  $0 < x_2$  no domínio da função bijetora  $tgh(x)$ , segue



que estes são os dois pontos distintos de inflexão da curva. Um cálculo rápido verifica que  $1 - 2\operatorname{tgh}^2(x) > 0$  se, e somente se,  $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \operatorname{tgh}(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , se, e somente se,  $x_1 < x < x_2$ . Portanto, trocando-se os sinais tem-se que  $k''(x) < 0$ , se,  $x_1 < x < x_2$ , região do gráfico que é côncava para baixo, e nas duas outras regiões complementares têm-se concavidade para cima.

Estes fatos podem ser evidenciados ao analisar o gráfico desta função representado na Figura 27.

**Figura 27 – Função secante hiperbólica**



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.8.5 A função cossecante hiperbólica

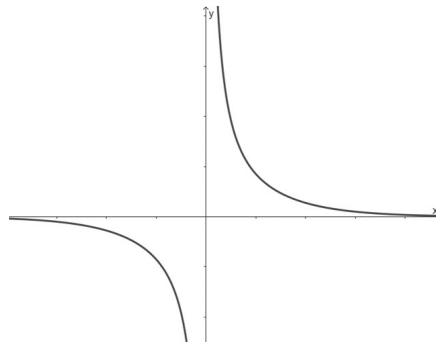
De modo completamente análogo ao realizado para a função secante hiperbólica, pode-se definir a função cossecante hiperbólica da seguinte forma.

**Definição 6.1.4:** A função cossecante hiperbólica, é a função  $r : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , ao número real  $\operatorname{csch}(x) = \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$ , ou seja,  $r(x) = \operatorname{csech}(x)$ . Como o numerador é a função seno hiperbólico, há uma única restrição para o domínio desta função, já que não se pode ter  $\operatorname{sech}(x) = 0$ , que só ocorre quando  $x = 0$ .

Aplicando agora a definição dada pela Equação 2, obtém-se que

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (53)$$

**Figura 28 – Função cossecante hiperbólica**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que, neste caso, a função  $csch(x)$ , não está definida em  $x = 0$ , como nos mostra a sua representação gráfica na Figura 28, embora possa aproximar-se deste valor indefinidamente, tanto pela esquerda quanto pela direita. Neste caso, os eixos  $Ox$  e  $Oy$  constituem-se respectivamente, nas assíntotas horizontal e vertical para esta função. Este fato pode ser, claramente, observado em sua representação gráfica na Figura 28. Além disso, tem-se que  $D(r(x)) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , e sua imagem é dada por:  $Im(r(x)) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Os limites, são intuitivamente, obtidos pela análise do mesmo gráfico ou aplicando-se cálculos de modo semelhante ao que foi feito para a secante hiperbólica, ou seja, tem-se  $\lim_{x \rightarrow 0^-} csch(x) = -\infty$ , e analogamente,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} csch(x) = +\infty$ , dentre outras análises que serão deixadas para o leitor.

### 2.8.6 A função Cotangente hiperbólica

**Definição 6.1.5.1:** A função cotangente hiperbólica, é a função  $s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada número real  $x$ , ao número real  $cotgh(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ , ou seja,  $s(x) = cotgh(x)$ . Como o denominador é a função seno hiperbólico, há uma única restrição para o domínio desta função, já que não se pode ter  $\sinh(x) = 0$ , que só ocorre quando  $x = 0$ .

Aplicando agora, a definição dada pela Equação 51, obtém-se que,

$$cotgh(x) = \frac{1}{tgh(x)} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (54)$$

#### Propriedades

i) Dividindo o numerador e denominador da função em questão por  $e^x$ , obtém-se:

$$cotgh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{2x} \cdot (1 + e^{-2x})}{e^{2x} \cdot (1 + e^{-2x})} = \frac{(1 + e^{-2x})}{(1 + e^{-2x})},$$

donde, pode-se perceber que, quando  $x \rightarrow +\infty$ , então, a  $cotgh(x) \rightarrow 1^+$ . Por outro lado, quando  $x \rightarrow -\infty$ , então, a  $cotgh(x) \rightarrow -1^-$ . Isso define as assíntotas horizontais do gráfico da função aqui estudada, ou seja, as retas  $y = 1$  e  $y = -1$ , são assíntotas horizontais desta função e, como  $0 \notin D(s)$ , tem-se que a reta  $x = 0$ , é uma assíntota vertical desta função;

ii) A derivada primeira é dada por  $(cotgh(x))' = -\operatorname{cosech}^2(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$ , veja a Fórmula constante da Tabela 2. Assim,  $s'(x) < 0$ ,  $\forall x \neq 0$ , e a função  $s$  é sempre decrescente, não possuindo pontos de máximo ou mínimo, posto que, se  $s'(x) = 0$ , tem-se que  $-1 = 0$ , um absurdo, e além disso, pelo item i), é claro que em  $x = 0$  não temos um máximo ou mínimo global;

iii) A função  $s$  é ímpar. De fato,

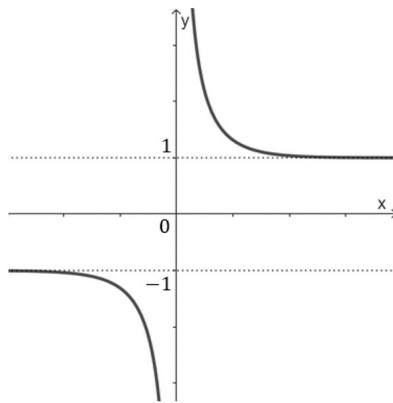
$$s(-x) = cotgh(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh(x)}{-\sinh(x)} = -\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = -s(x), \forall x \neq 0.$$

Portanto, para se construir o gráfico desta função, bastará estudá-la do lado positivo do eixo  $x$ , e depois usar a anti simetria da função para construir um esboço do gráfico na

sua parte negativa (ou seja, basta tomar o simétrico da parte positiva da função  $s$  e depois mudar o sinal das suas imagens).

- iv) A derivada segunda, que pode ser obtida a partir de  $(\cotgh(x))'$  constante da Tabela 2, é dada por  $(\cotgh(x))'' = 2 \frac{\cosh(x)}{\sinh^3(x)}$ . Como já foi discutido, o *seno hiperbólico* é sempre positivo se  $x > 0$ , e negativo no caso contrário. Assim,  $s''(x) > 0$ , se  $x > 0$ , e  $s''(x) < 0$ , caso  $x < 0$ , então, a função *cotangente hiperbólica*, tem concavidade para cima, se  $x$  é positivo, e para baixo, no caso contrário. Além disso, não há pontos de inflexão, pois, se  $(\cotgh(x))'' = 0$ , então,  $\cosh(x) = 0$ , um absurdo.
- v) Do exposto nos itens anteriores, verifica-se que o  $D(\cotgh(x)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , enquanto que a  $Im(\cotgh(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ , como pode-se constatar na Figura 29.

**Figura 29 – Função cotangente hiperbólica**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora que já se conhece o comportamento gráfico e as relações algébricas entre as definições do *seno* e do *coseno hiperbólicos*, entre outras, com as funções exponenciais naturais, pode-se ver como estas se assemelham àquelas oriundas da circunferência na Tabela 4.

**Tabela 4 – Razões trigonométricas na circunferência unitária e na hipérbole equilátera**

Nome	Circunferência Unitária	Hipérbole equilátera
<i>SENO</i>	$\text{sen}(x)$ , com $x \in \mathbb{R}$	$\text{sinh}(x)$ , com $x \in \mathbb{R}$
<i>COSSENO</i>	$\text{cos}(x)$ , com $x \in \mathbb{R}$	$\text{cosh}(x)$ , com $x \in \mathbb{R}$
<i>EQUAÇÃO GERAL</i>	$x^2 + y^2 = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
<i>RELAÇÃO FUNDAMENTAL</i>	$\text{cos}^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$	$\text{cosh}^2(x) - \text{sinh}^2(x) = 1$
<i>TANGENTE</i>	$\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$	$\text{tgh}(x) = \frac{\text{sinh}(x)}{\text{cosh}(x)}$
<i>COTANGENTE</i>	$\text{cotg}(x) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$	$\text{cotgh}(x) = \frac{\text{cosh}(x)}{\text{sinh}(x)}$
<i>SECANTE</i>	$\text{sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$	$\text{sech}(x) = \frac{1}{\text{cosh}(x)}$
<i>COSSECANTE</i>	$\text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$	$\text{cossech}(x) = \frac{1}{\text{sinh}(x)}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Cabe ressaltar, que pode-se determinar também as funções inversas das funções hiperbólicas, desde que, quando necessário for, se escolham regiões do domínio destas funções, tais que ela se torne uma função bijetora. Na trigonometria circular, estas funções inversas são precedidas dos termos *arco* ou *arc* seguidos do nome da função em estudo, obtendo-se o *arco sen*( $x$ ) ou *arc sen*( $x$ ) ou  $\text{sen}^{-1}(x)$  como pode ser visto em Leithold (2002, p. 496-502), por exemplo, no qual o autor faz referência direta ao arco de circunferência que o contém, ou ainda que determina o ângulo ao qual se está estudando. Entretanto, na geometria hiperbólica será utilizado a notação *arg*, como definido por Santos *et al.* (2015) e Vasconcelos *et al.* (2013), (oriundo da palavra *argumento*) e portanto, a função inversa da função *seno hiperbólico*, como exemplo, será denotada como *argsenh*( $x$ ) ou  $\text{senh}^{-1}(x)$ . Esta notação, também nos remete, analogamente, à definição do argumento de um número complexo, segundo a forma polar destes números, que podem ser desenhados no plano de Argand-Gauss, isso traz alguma proximidade para os estudantes dos últimos anos do ensino médio, ou das turmas de Pré-Cálculo e de Cálculo I, como pode-se ver em OBMEP (2022). Existem relações interessantes entre funções circulares e hiperbólicas com os números complexos, por exemplo, na fórmula de Euler onde

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \text{sen}(\theta).$$

Desta forma, apesar de se ter chegado a um bom tema para discussão e análise, este não será abordado de modo detalhado aqui, posto que está para além dos temas de estudo de nosso público alvo. Entretanto, para àqueles que buscam um aprofundamento sobre esta relação a consulta ao trabalho de Aguiar (2018) pode ser bastante proveitosa.

Entrementes, não é incomum encontrar-se outra notação para referir-se às funções hiperbólicas inversas, que por sua vez guardem similaridade com a definição de ângulo hiperbólico, a saber: o prefixo *ar* (abreviação de *área*), donde obtém-se *arsenh*( $x$ ) =  $\text{senh}^{-1}(x)$  como resposta à pergunta: “qual a área do *seno hiperbólico* de  $x$  que apresenta este resultado?” Enquanto a forma equivalente a *argsenh*( $x$ ) =  $\text{senh}^{-1}(x)$ , responderia à pergunta: “Para qual argumento  $x$  obtém-se este resultado?”.

## 2.9 Funções hiperbólicas inversas

Antes de considerar todo o leque de funções hiperbólicas inversas, precisa-se lembrar que uma função vai admitir inversa, se ela for bijetiva, isto é, sobrejetora e injetora. Se  $f : X \rightarrow Y$  é bijetora, então a inversa  $g = f^{-1}$  é uma função  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  que satisfaz

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \forall x \in X, \text{ e } (f \circ g)(y) = f(g(y)) = y, \forall y \in Y. \quad (55)$$

Por outro lado, como tem-se interesse em representar estas funções de maneira gráfica, então ser-nos-á muito proveitoso destacar que estas identidades são dadas pela bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, pela reta  $y = x$ , grosso modo, a função e sua inversa podem ser determinadas graficamente como o espelhamento uma da outra em torno da reta supracitada.

Assim, munidos destes conceitos, cabe-nos passar para o estudo propriamente dito das funções hiperbólicas inversas.

### 2.9.1 A inversa da função seno hiperbólico

Antes de analisar a representação gráfica desta função deve-se ressaltar que para  $f(x) = \sinh(x)$  a inversa da função *seno hiperbólico* pode ser representada por uma das seguintes formas:

- i)  $f^{-1}(x) = \sinh^{-1}(x)$ . Esta seria a forma mais próxima do contexto da educação básica;
- ii)  $f^{-1}(x) = \operatorname{argsenh}(x)$ . Esta será a forma utilizada neste trabalho. Neste caso, a inversa do  $\sinh(x)$  é chamada de *argumento hiperbólico de  $x$* ;
- iii)  $f^{-1}(x) = \operatorname{arsenh}(x)$ . Esta forma pode ser interessante por manter um vínculo com a definição do ângulo hiperbólico como sendo uma área. Assim, ao utilizarmos desta forma, estaremos nomeando a inversa do seno hiperbólico como sendo a função “*área-seno hiperbólico de  $x$* ”.<sup>14</sup>

Destaque-se contudo, que a utilização de uma das formas não inviabiliza as outras, podendo haver situações às quais seja conveniente a utilização de mais de uma destas representações. Note então que o contexto, o nível de ensino, bem como, a conveniência, podem ser os fatores que nortearão a escolha de uma destas representações para o estudo.

Analisando agora a função *seno hiperbólico*,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfaz  $f(x) = \sinh(x)$ , pode-se verificar que a partir de sua representação gráfica na Figura 25, se tem que tal função é bijetora. E, portanto, esta possui uma inversa  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que será denotada por  $y = f^{-1}(x) = \operatorname{argsenh}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Portanto, tem-se

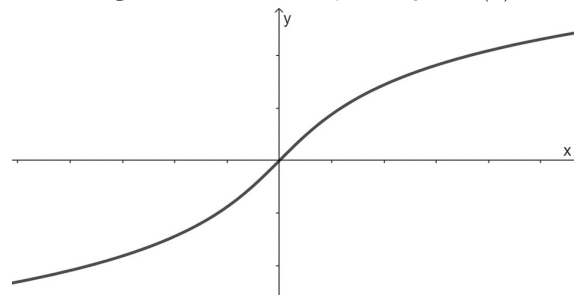
$$\sinh(y) = \sinh(\operatorname{argsenh}(x)) = x$$

e

$$\operatorname{arsenh}(\sinh(y)) = y.$$

A representação gráfica desta função é dada pela Figura 30.

**Figura 30 – Função  $y = \operatorname{argsenh}(x)$**



Fonte: Elaborado pelo autor.

<sup>14</sup> Uma abordagem mais detalhada sobre áreas, hipérbolas, ângulo hiperbólico e rotações, pode ser vistas no Apêndice A.

Por outro lado, como a função  $\operatorname{argsenh}(x)$  é a inversa da função  $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , que está definida em termos da exponencial natural, e cuja inversa é o logaritmo natural, digo  $\ln(x) = \log_e(x)$ , pode-se expressar esta função em termos de polinômios e logaritmos da forma

$$\operatorname{argsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entretanto, como este resultado não é evidente à primeira vista, precisa-se prová-lo.

### Prova

Faça  $y = \operatorname{argsenh}(x) \Leftrightarrow \operatorname{senh}(y) = \operatorname{senh}(\operatorname{argsenh}(x)) = x$ , donde se obtém que  $\operatorname{senh}(y) = x$ . E assim, como  $\operatorname{senh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ , então vem que  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ . Logo,

$$e^y - e^{-y} = 2x \Leftrightarrow e^y - \frac{1}{e^y} = 2x,$$

donde, multiplicando ambos os membros da igualdade por  $e^y$ , e igualando a zero, vem que

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Deste modo, fazendo agora  $w = e^y$  obtém-se,  $w^2 - 2xw - 1 = 0$ , tal que

$$w = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Assim,

$$w = e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \ln(e^y) = y \cdot \ln(e) = y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 + 1}).$$

Observe, entretanto que:

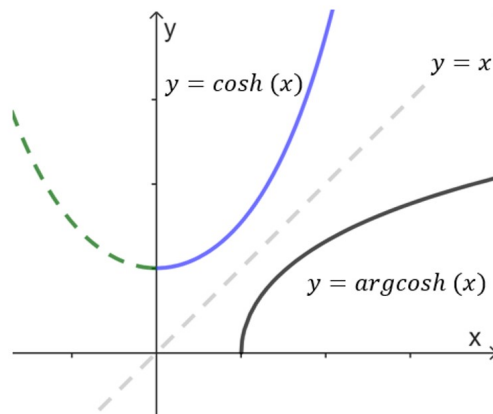
- i) Se  $x < 0$ , então  $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ ;
- ii) Como  $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2}$ , então se  $x \geq 0$ , vem que  $\sqrt{x^2 + 1} > x$ , donde segue que  $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ . E, para quaisquer dos itens (i) e (ii), o logaritmo  $\ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$  não existe, pois, o logaritmando é negativo. Donde resulta que

$$\operatorname{argsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \text{ com } x \in \mathbb{R}. \quad (56)$$

### 2.9.2 A inversa da função cosseno hiperbólico

A função *cosseno hiperbólico* é uma função par, como já foi discutido nas seções anteriores. Note que,  $\operatorname{cosh}(1) = \operatorname{cosh}(-1)$ , e portanto, a função não é injetora, logo não é bijetora. Portanto, afim de se obter uma parte injetora para esta função, deve-se restringir o seu domínio para que a função se torne bijetora. Considere então, que para  $x \geq 0$ , a restrição  $\operatorname{cosh}(x) : [0, \infty) \rightarrow [1, +\infty)$ , é uma função bijetiva que restringe o  $\operatorname{cosh}(x)$ , assim para esta função, pode-se definir a sua inversa, como sendo a função  $\operatorname{cosh}^{-1} = \operatorname{argcosh} : [1, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$ , que satisfaz  $\operatorname{cosh}^{-1}(x) = \operatorname{argcosh}(x), \forall x \in [1, +\infty)$ .

Veja o gráfico desta função representado na Figura 31, junto com o de sua inversa.

**Figura 31 – Função  $y = \operatorname{argcosh}(x)$** 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Entrementes, de modo análogo ao realizado para a função  $\operatorname{senh}(x)$ , sabe-se que a função  $\operatorname{argcosh}(x)$  é a inversa da função  $\operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , que está definida em termos da exponencial natural. E neste caso, pode-se, similarmente ao que foi feito na seção anterior, mostrar que,

$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \text{ para } x \geq 1. \quad (57)$$

A prova deste fato está feita em (LEITHOLD, 2002, p. 405-406).

### 2.9.3 A inversa da função tangente hiperbólica

Observando o gráfico da  $\operatorname{tgh}(x)$  na Figura 26, note que podemos restringir a função  $h$ , para que a mesma seja bijetora e, por conseguinte, tenha inversa. Assim, tomando  $CD(h) = \operatorname{Im}(h) = (-1, 1)$ , concluí-se que a função *tangente hiperbólica* é bijetora e definida como  $h = \operatorname{tgh} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ , que satisfaz  $h(x) = \operatorname{tgh}(x)$ . Logo, a  $\operatorname{tgh}(x)$  admite inversa. Seja  $y = \operatorname{tgh}^{-1} = \operatorname{argtgh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , a sua função inversa. Tem-se a seguinte representação logarítmica e seu respectivo gráfico:

$$\operatorname{argtgh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \text{ com } -1 < x < 1. \quad (58)$$

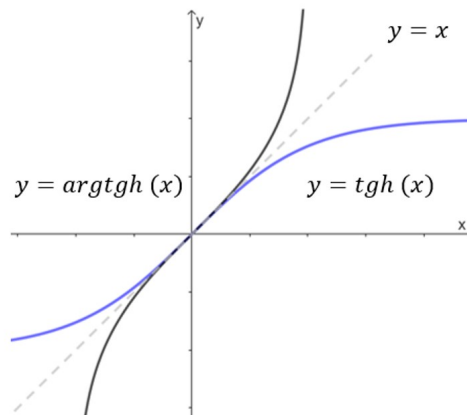
#### Prova da última identidade logarítmica

Faça  $y = \operatorname{argtgh}(x) \Leftrightarrow \operatorname{tgh}(y) = \operatorname{tgh}(\operatorname{argtgh}(x)) = x$ , donde obtém-se que  $\operatorname{tgh}(y) = x$ . Agora note que

$$\operatorname{tgh}(y) = \frac{\operatorname{senh}(y)}{\operatorname{cosh}(y)} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}},$$

e multiplicando-se o numerador e denominador por  $e^y$  chega-se em

$$\operatorname{tgh}(y) = \frac{e^y(e^y - e^{-y})}{e^y(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}, \quad (59)$$

**Figura 32 – Função  $y = \operatorname{argtgh}(x)$** 

Fonte: Elaborado pelo autor.

ou seja,

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Rightarrow x e^{2y} + x = e^{2y} - 1 \Rightarrow 1 + x = e^{2y} - x e^{2y} \Rightarrow 1 + x = (1 - x)e^{2y},$$

donde segue que

$$\frac{1+x}{1-x} = e^{2y}, \text{ desde que } -1 < x < 1$$

. Assim, aplicando o logaritmo natural em ambos os lados, concluí-se que

$$\ln e^{2y} = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \Rightarrow 2y \cdot \ln e = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \Rightarrow 2y = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

donde, aplicando as propriedades dos logaritmos vem que,

$$2y = \ln(1+x) - \ln(1-x) \Rightarrow y = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right),$$

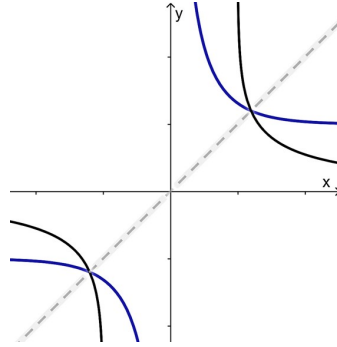
agora como  $y = \operatorname{argtgh}(x)$ , resulta que:

$$\operatorname{argtgh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \text{ desde que } -1 < x < 1. \quad (60)$$

#### 2.9.4 A inversa da função cotangente hiperbólica

Analisando a Figura 29, percebe-se que a função *cotangente hiperbólica*, dada por  $s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que,  $s(x) = \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ , é injetora. E, afim de que a mesma seja bijetora, resta restringir o seu contra-domínio para  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty) = \operatorname{Im}(s)$ . Logo, tal função admite uma inversa. E assim, pode-se defini-lá da seguinte forma:  $s^{-1} = \operatorname{cotgh}^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , que associa cada  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$  em  $\operatorname{cotgh}^{-1}(x) = \operatorname{argtgh}(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Seu gráfico e representação logarítmicas seguem abaixo na Figura 33.



**Figura 33 – Função  $y = \operatorname{arccotgh}(x)$** 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo assim, faça  $y = \operatorname{cotgh}^{-1}(x) = \operatorname{arccotgh}(x)$ , donde obtém-se que

$$\operatorname{arccotgh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right), \text{ desde que } |x| > 1. \quad (61)$$

### Prova da identidade logarítmica

Faça  $y = \operatorname{arccotgh}(x) \Leftrightarrow \operatorname{cotgh}(y) = \operatorname{cotgh}(\operatorname{arccotgh}(x)) = x$ , donde chega-se em  $\operatorname{cotgh}(y) = x$ . Como

$$\operatorname{cotgh}(y) = \frac{\cosh(y)}{\sinh(y)} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}},$$

pode-se multiplicar o numerador e o denominador da expressão anterior por  $e^y$ , obtendo-se,

$$\operatorname{cotgh}(y) = \frac{e^y(e^y + e^{-y})}{e^y(e^y - e^{-y})} = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}, \quad (62)$$

portanto, chega-se em:

$$x = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \Rightarrow x e^{2y} - x = e^{2y} + 1 \Rightarrow x e^{2y} - e^{2y} = 1 + x \Rightarrow e^{2y}(x - 1) = x + 1, |x| > 1,$$

donde obtém-se que

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}, |x| > 1,$$

e aplicando o logaritmo natural a ambos os lados da igualdade vem que,

$$\ln e^{2y} = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \Rightarrow 2y \cdot \ln e = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \Rightarrow 2y = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \Rightarrow y = \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{2}$$

ou seja,

$$\operatorname{arccotgh}(x) = y = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right), \text{ com } |x| > 1. \quad (63)$$

### 2.9.5 A inversa da função secante hiperbólica

Ao analisar o gráfico da secante hiperbólica na Figura 27, nota-se que ela é definida nos reais e é uma função par, logo não é injetiva. Neste caso, precisa-se estabelecer uma restrição no seu domínio e contra-domínio, a fim de obter-se uma função injetiva e também sobrejetiva. Assim, se considerarmos a função  $sech(x)$ , definida de modo que  $sech(x) : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ , então, tal função passará a ser bijetora. Assim tal função admitirá uma inversa, que deverá ser definida de modo que  $sech^{-1} = argsech(x) : (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ , que satisfaz  $y = argsech(x)$ . Seu gráfico e identidade logarítmica seguem representados abaixo na Figura 34.

#### Prova da identidade logarítmica

Faça agora  $y = argsech(x) \Leftrightarrow sech(y) = sech(argsech(x)) = x$ . E assim, como

$$sech(y) = \frac{1}{cosh(y)} = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

vem que,

$$sech(y) = x = \frac{2}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow x \cdot e^y + x \cdot e^{-y} = 2,$$

donde, multiplicando ambos os membros da igualdade por  $e^y$ , vem que,

$$e^y(xe^y + xe^{-y}) = 2e^y \Rightarrow xe^{2y} + x = 2e^y \Rightarrow xe^{2y} - 2e^y + x = 0 \Rightarrow x(e^y)^2 - 2e^y + x = 0,$$

e assim, fazendo  $v = e^y$  obtém-se

$$xv^2 - 2v + x = 0,$$

e, resolvendo a equação do segundo grau, chega-se em

$$v = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4x^2}}{2x} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - x^2}}{2x} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}, x \in (0, 1],$$

logo,

$$e^y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}, x \in (0, 1]$$

. Donde, aplicando o logaritmo natural a ambos membros da igualdade chega-se em

$$\ln e^y = \ln \left( \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \Rightarrow y \cdot \ln e = \ln \left( \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \Rightarrow y = \ln \left( \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x} \right).$$

Cabe notar que se  $x \rightarrow 0^+$ , então  $\left( \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \rightarrow 0^+$ , pela regra de *L'Hospital*. De fato, como a primeira aplicação do limite a seguir dá uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ , aplicando-se a regra de *L'Hospital* e a regra da cadeia, para a função na forma de radical, obtém-se o seguinte:

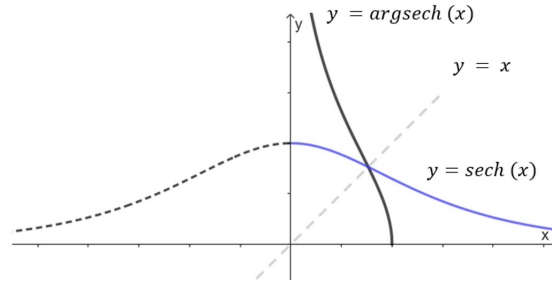
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \frac{0^+}{1} = 0^+$$

. Portanto, o  $\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \rightarrow -\infty$ , pela análise direta do gráfico de  $t(x) = \ln(x)$ , o que está em desacordo com a Figura 34. Desta forma, concluí-se que

$$y = \operatorname{argsech}(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right), \text{ desde que } 0 < x \leq 1. \quad (64)$$

O gráfico é como segue.

**Figura 34 – Função  $y = \operatorname{argsech}(x)$**



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.9.6 A inversa da função cossecante hiperbólica

Observando o gráfico da função *cossecante hiperbólica*, representado na Figura 28, pode-se concluir que a função  $r : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $r(x) = \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ , é injetora. Para que se possa obter uma inversa para esta função, deve-se restringir o seu contradomínio para o seu conjunto imagem, isto é, deve considerar a função cossecante dada por  $r : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dada por  $r(x) = \operatorname{csch}(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , sempre que  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Assim, tal função torna-se bijetora, e terá uma inversa  $r^{-1} = \operatorname{csch}^{-1} = \operatorname{argcsch} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tal que  $y = r^{-1}(x) = \operatorname{argcsch}(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Note que a função *cossecante hiperbólica* é ímpar, de fato tem-se que,

$$\operatorname{csch}(-x) = \frac{2}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{2}{e^{-x} - e^x} = \frac{2}{-(e^x - e^{-x})}, \text{ donde,}$$

$$\operatorname{csch}(-x) = -\frac{2}{e^x - e^{-x}} = -\operatorname{csch}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Segue o gráfico bem como sua representação logarítmica logo a baixo na Figura 35.

### Prova da identidade logarítmica

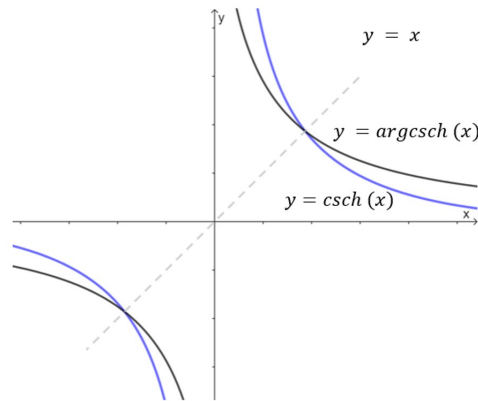
Faça  $y = \operatorname{argcsch}(x) \Leftrightarrow \operatorname{csch}(y) = \operatorname{csch}(\operatorname{argcsch}(x)) = x$ . Como

$$\operatorname{csch}(y) = \frac{1}{\operatorname{senh}(y)} = \frac{2}{e^y - e^{-y}},$$

vem que

$$x = \frac{2}{e^y - e^{-y}} \Rightarrow x e^y - x e^{-y} = 2,$$

**Figura 35 – Função  $y = \operatorname{argcsch}(x)$**



Fonte: Elaborado pelo autor.

donde, multiplicando ambos os membros da igualdade por  $e^y$ , vem que

$$e^y(xe^y - xe^{-y}) = 2e^y \Rightarrow xe^{2y} - x = 2e^y \Rightarrow xe^{2y} - 2e^y - x = 0 \Rightarrow x(e^y)^2 - 2e^y - x = 0,$$

e assim fazendo  $u = e^y$  obtemos

$$xu^2 - 2u - x = 0,$$

e resolvendo a equação do segundo grau chega-se em

$$u = e^y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4x^2}}{2x} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + x^2}}{2x} = \frac{1 \pm \sqrt{x^2 + 1}}{x}, x \neq 0.$$

Agora aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade, obtém-se que

$$\ln e^y = \ln \left( \frac{1 \pm \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) \Rightarrow y \cdot \ln e = \ln \left( \frac{1 \pm \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) \Rightarrow y = \ln \left( \frac{1 \pm \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right), x \neq 0. \quad (65)$$

Deste modo tem-se duas situações para se analisar:

- i) Para  $x > 0$ , vem que  $\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} > 0$  e o logaritmo na Fórmula 65 existe. Entretanto, a Expressão  $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$  não pode ser o logaritmando da Expressão 65, uma vez que  $\sqrt{x^2 + 1} > 1$  então,  $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} < 0$ .
- ii) Note que  $\sqrt{x^2 + 1} > 1$  independente do  $x \neq 0$ . Se  $x < 0$ , então  $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} > 0$ , o que garante a existência do logaritmo na Expressão 65. Já que  $\sqrt{x^2 + 1} > 1$ , tem-se que  $1 - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ , entretanto, a fração  $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} > 0$ , pois,  $x < 0$ , e portanto, este logaritmando existe na Fórmula 65. Por outro lado, observe que neste caso, a expressão  $\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} < 0$ , já que  $x < 0$ , o que implica na não existência do logaritmando na Fórmula 65.

Deste forma, concluí-se que:

$$\operatorname{argcsch}(x) = \begin{cases} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) & \text{se } x > 0; \\ \ln \left( \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (66)$$

Por fim, note que quando  $x' < 0$ , a expressão  $-\frac{1}{x'} > 0$ , e se  $x' > 0$ , a expressão  $\frac{1}{x'} > 0$ , portanto a Fórmula 66 pode ser reescrita, simplesmente, como

$$\operatorname{argcsch}(x) = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right), \text{ se } x \neq 0. \quad (67)$$

Assim, após estas análises pode-se representar, de modo análogo ao que foi realizado nas seções anteriores, as funções inversas obtidas na circunferência com as obtidas a partir da hipérbole equilátera, na Tabela 5 a seguir.

**Tabela 5 – Funções trigonométricas inversas**

Funções Inversas	Circunferência Unitária	Respetivas funções para a Hipérbole equilátera
$\operatorname{sen}^{-1}(x)$	$\operatorname{arcsen}(x)$ , com $x = \operatorname{sen}(y)$	$\operatorname{argsenh}(x)$ , se $x = \operatorname{senh}(y)$
$\operatorname{cos}^{-1}(x)$	$\operatorname{arccos}(x)$ , com $x = \operatorname{cos}(y)$	$\operatorname{argcosh}(x)$ , se $x = \operatorname{cosh}(y)$
$\operatorname{tg}^{-1}(x)$	$\operatorname{arctg}(x)$ , com $x = \operatorname{tg}(y)$	$\operatorname{argtgh}(x)$ , se $x = \operatorname{tgh}(y)$
$\operatorname{cotg}^{-1}(x)$	$\operatorname{arccotg}(x)$ , com $x = \operatorname{cotg}(y)$	$\operatorname{argcotgh}(x)$ , se $x = \operatorname{cotgh}(y)$
$\operatorname{sec}^{-1}(x)$	$\operatorname{arcsec}(x)$ , com $x = \operatorname{sec}(y)$	$\operatorname{argsech}(x)$ , se $x = \operatorname{sech}(y)$
$\operatorname{csc}^{-1}(x)$	$\operatorname{arccsc}(x)$ , com $x = \operatorname{csc}(y)$	$\operatorname{argcsch}(x)$ , se $x = \operatorname{csch}(y)$

Fonte:Elaborada pelo autor.

Donde verifica-se a grande similaridade nas definições entre as funções trigonométricas inversas circulares, quanto nas trigonométricas inversas hiperbólicas. O que nos leva a perceber que existem grandes vantagens no estudo comparativo entre as razões, posto que o mesmo pode agregar significado e ampliar, grandemente, o espectro da aprendizagem destes conceitos por parte do docente/estudante, possibilitando uma aprendizagem mais abrangente e aprofundada dos temas em estudo.

### 3 GEOGEBRA: UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA A SERVIÇO DA APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Durante a minha caminhada acadêmica e estudantil sempre me deparei com as dificuldades para entender algumas das propriedades geométricas de figuras planas e espaciais, bem como compreender e “*visualizar mentalmente*” tanto estas propriedades, quanto os movimentos das retas no plano e no espaço. Do que me lembro, as estratégias de ensino utilizadas por meus professores consistiam na aplicação quase *mântrica* da expressão: “*imagine que...*”. E do desenho de várias posições da figura, o que tomava muito tempo da aula, ou do desenho de várias retas num mesmo plano onde ele tentava nos inculcar, sem muito êxito, que eram representações diferentes da mesma reta.

E certamente, ao analisar todo o contexto tecnológico da minha educação, posso entender que a melhor ferramenta de ensino é aquela da qual dispomos e manejamos bem, posto que mesmo com ferramentas mais rudimentares, ou menos “*tecnológicas*” - considerando os desdobramentos que esta palavra adquiriu na atualidade - sempre é possível, obter-se bons resultados. O que qualquer um de nós pode constatar com facilidade, mesmo considerando apenas uma análise breve, panorâmica e superficial, da história das Ciências ou da Matemática. Entretanto, como podemos observar em nossos dias, novos tempos costumam trazer em seu bojo novas ferramentas de trabalho, novos *insights*, novas necessidades e novas prioridades, principalmente àquelas oriundas do desenvolvimento técnico e/ou tecnológico e, é claro novas conquistas.

Uma destas felizes inovações, o *GeoGebra*, que está diretamente relacionada com o aumento do desenvolvimento tecnológico, bem como, com seu impacto na educação e nas formas de ensinar e aprender em matemática, de acordo com Brasil (2017) foi idealizada por *Markus Hohenwarter*, entre 2001 e 2002, durante o seu projeto de mestrado e, posteriormente, tese de doutorado em Educação Matemática na *Universität Salzburg*. De 2006 à 2008, o seu trabalho foi apoiado por um projeto de parceria *NSF Matemática e Ciência* da *Florida Atlantic University* e Escolas do *Condado de Broward*, na Flórida. E, de acordo com Wikipedia. (2023), o projeto foi pensado para ser utilizado em sala de aula e recebeu o nome de *GeoGebra*. O mesmo consiste num programa de geometria dinâmica que vincula Geometria e Álgebra, e cuja distribuição é feita através de uma plataforma *open source*, ou seja, de código aberto e livre, de acordo com os termos da licença *GNU General Public License*. Atualmente, *Markus Hohenwarter* continua a liderar o projeto *GeoGebra* no *Centro de Pesquisa em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Educação Matemática (FCR-STEM)* na *Universidade Estadual da Flórida* em *Tallahassee*, nos EUA, (BRASIL, 2017, p. 19-20).

O *GeoGebra* é um programa de interface simples e auto-instrucional uma vez que para sua utilização, dentro de um planejamento didático adequado, a curva de aprendizagem é bastante suave, o que possibilita sua utilização desde o início, pelos estudantes sendo necessárias apenas informações básicas sobre sua interface e formas de utilização, a exemplo do que será feito com a atividade proposta aqui.

Neste sentido, verifica-se que a utilização de um recurso deste porte, é relevante e já se encontra prevista desde a Constituição Federal de 1988 em seu artigo 218, ressaltando como estratégia de estado o desenvolvimento científico, a pesquisa e a capacitação tecnológicas, bem como a inovação de acordo com STF (2015), e que foi implementada, inicialmente, como descrito no art. 39 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB/9.394 de 1996, onde “a educação profissional e tecnológica, no cumprimento dos objetivos da educação nacional, integra-se aos diferentes níveis e modalidades de educação e às dimensões do trabalho, da ciência e da tecnologia” (BRASIL, 1996). Esta por sua vez, foi reformulada e ampliada, recentemente, para chegar a todas as nossas escolas da educação básica através da implementação da nova Base Nacional Comum Curricular - BNCC, como podemos observar na descrição da competência 5, na qual “o educando” deve:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas, exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Assim, esta relação transversal, interdisciplinar e integradora entre vida pessoal, coletiva e escolar passa a compor, de forma preponderante, todas as concepções de currículo para a educação básica. E deste modo, munidos desta nova concepção de educação explicitada pela BNCC, é que apresentamos o *GeoGebra*, como uma possível resposta aos anseios daqueles que buscam adaptar e melhorar tanto sua práxis, como suas aprendizagens e as de seus educares, potencializando-as através da utilização desta inovadora e promissora ferramenta de ensino e de aprendizagem. Mormente, parafraseando Brasil (1997), pode-se dizer que, a utilização de um recurso tecnológico para resolver um problema matemático, ou desenvolver um estudo em matemática, é uma situação que demanda a realização de uma sequência, mesmo que simples, de ações ou operações para obter o resultado que pode ser o idealizado, ou representar, apenas uma simulação provisória. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Onde, a aprendizagem surge como produto da interação entre o usuário, a situação problema, e a ferramenta pedagógica utilizada, no caso o *GeoGebra*, através do processo de “*modelação*”<sup>1</sup> afim de promover conhecimento ao aluno, utilizando-se de uma busca de soluções otimizadas para cada problema em estudo.

Como nosso foco aqui é apresentar uma proposta de utilização do *GeoGebra*, apresentaremos apenas algumas informações necessárias sobre a sua interface e funcionamento, de modo que, desde o início, o educando consiga utilizar o *software* e realizar as construções necessárias. Informações adicionais podem ser encontradas na página do *GeoGebra*<sup>2</sup> incluindo materiais introdutórios, tutoriais e um fórum de discussões<sup>3</sup>. Também é possível encontrar recursos em língua portuguesa nos sítios dos dois Institutos *GeoGebra* no Brasil sediados, um

<sup>1</sup> Uma boa definição de Modelação baseada nos trabalhos Biembengut, 2004 de pode ser encontrada em Souza. (2009, p. 38).

<sup>2</sup> <http://www.geogebra.org/>

<sup>3</sup> <http://www.geogebra.org/forum/>

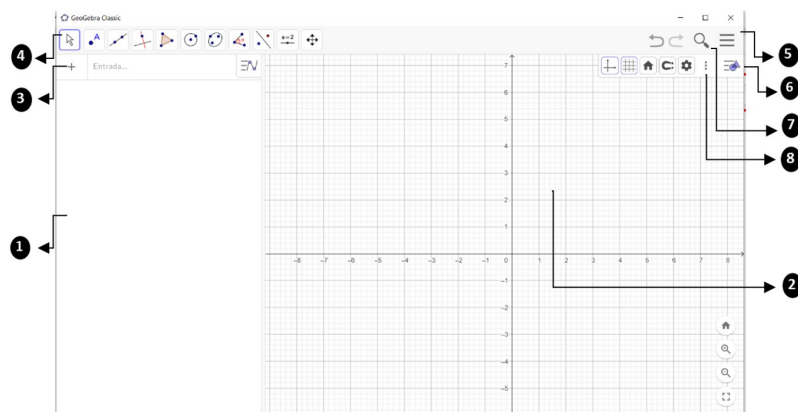
na UFF<sup>4</sup> e o outro na PUC-SP<sup>5</sup>, bem como nas páginas de Gonçalves (2019) e do curso para professores de MELLO (2019), ou no trabalho de Brasil (2017) entre outros. E, por isso, não nos aprofundaremos nas descrições das funcionalidades do *software*.

### 3.1 Interface e versão

Inicialmente, precisa-se saber que existem diversas versões disponíveis do *GeoGebra*, e cada uma delas pode apresentar uma interface diferente, a depender do suporte utilizado, seja PC, *Tablet*, celular ou ainda do pacote instalado que pode ser total ou parcial. A versão a qual faremos referência é a versão 6.0.820.0 do *GeoGebra Classic*, por ser a mais atual, e por incluir a opção de realização de atividades com foco na aprendizagem e na aplicação de exames online, de modo que, o professor possa receber o *feedback*, tanto da atividade quanto do exame de modo ágil e seguro.

Ao ser inicializado, o *GeoGebra* apresenta a interface reproduzida pela Figura 36:

**Figura 36 – Interface do software GeoGebra**



Fonte: Elaboradas pelo autor.

As opções destacadas na Figura 36 representam, respectivamente:

#### 1) Janela de Álgebra

Nesta região são exibidas as informações referentes às construções realizadas de modo organizado, bem como as propriedades dos objetos construídos, tais como coordenadas, medidas, segmentos, etc.

#### 2) Janela de Visualização

É a área de visualização gráfica dos objetos que possuem representação geométrica, e que podem ser desenhados com o *mouse* usando os ícones da barra de ferramentas ou comandos digitados diretamente na Entrada.

#### 3) Entrada

Campo de entrada para a digitação direta de comandos.

<sup>4</sup> <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>

<sup>5</sup> <http://www.pucsp.br/geogebraesp/>



#### 4) Barra de Ferramentas

De modo análogo ao que acontece em outros *softwares* computacionais, na Barra de Ferramentas ficam disponíveis as principais ferramentas que são utilizadas no processo de construção dos objetos matemáticos, tais como pontos, retas, figuras geométricas e suas medidas, entre outros. Cada ícone a ser selecionado, apresenta outras possibilidades em cascata prontas para utilização ao clicar no canto inferior direito com o *mouse*.

#### 5) Barras de Menu, de configurações e de pesquisa

Os itens de número 5 a 8, apresentam os *menus* para salvar o projeto em diversos formatos *online* e *offline*. Para exportar a imagem diretamente para um documento, para acessar a ajuda, os tutoriais e o modo Exame, entre outras coisas.

### Sequência Didática

Professor: **Antonio A. P. de Souza**

Disciplina: **Matemática**

Turma/Turno: **1º ao 3º anos**

Etapas: **03**

Duração: **Um mês**

Tema: **DESCOBRINDO AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS NO ENSINO MÉDIO**

#### Justificativa

Ao desenvolver esta Sequência Didática (SD), nossa principal intenção foi a de potencializar o trabalho docente, através de um planejamento significativo e interessante, que fosse capaz de envolver os estudantes, desenvolver habilidades que envolvam o mundo tecnológico, e que possibilitem o desenvolvimento matemático de nossos educandos, de forma agregada, ao desenvolvimento da tecnologia. Para tanto, nosso planejamento considerou que, os conteúdos trabalhados podem ser desenvolvidos em desde o primeiro ano do ensino médio, a depender dos objetivos do professor e, da turma com a qual esteja trabalhando.

Nossa abordagem não foca numa série específica, mas em formas de se introduzir, discutir, validar, ressignificar e ampliar o conhecimento dos educandos, através do suporte que a tecnologia pode, atualmente, nos proporcionar. Nesta proposta utilizamos o *software GeoGebra* como suporte tecnológico para o desenvolvimento das atividades.

#### Objetos do conhecimento trabalhados

- Equação geral das Cônicas;
- Equação geral de uma parábola;
- Equação da hipérbole com eixo focal sob o eixo  $Oy$ ;
- Equação geral de uma hipérbole transladada;
- A equação da *catenária*;
- Construção e análise gráfica da hipérbole, da *catenária* e da parábola;

- Uso do computador e dos recursos tecnológicos de código aberto para ressignificar a aprendizagem em matemática.
- Prova empírica da falsidade da conjectura da *Galileu*.

### **Módulo (Data)**

Definida pelo docente no planejamento.

**Objetivo** Dentre os principais objetivos desta SD podemos destacar:

- Apresentar o conteúdo de Funções Hiperbólicas, de forma lúdica e atrativa, ao público do ensino médio, através do uso do *software GeoGebra*;
- Inserir o uso das tecnológicas de forma didática e planejada, como ferramenta de apoio ao ensino-aprendizagem;
- Inserir a utilização do *GeoGebra* para investigar o comportamento de funções e de suas representações gráficas;
- Utilizar o *GeoGebra* para confirmar, e/ou refutar hipóteses, sobre o comportamento gráfico de funções reais, a exemplo da conjectura de *Galileu* sobre a *catenária*;
- Desenvolver habilidades referentes ao mundo das Tecnologias da Informação e Comunicação (TDIC's);

### **Competências Gerais BNCC**

- **CG 01** Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
- **CG 05** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

### **Habilidades**

- **EM13MAT302** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- **EM13MAT402** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais;
- **EM13MAT403** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e

em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função;

- **EM13MAT502** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo  $y = ax^2$ .

### **Etapas de desenvolvimento**

As atividades estarão divididas em três momentos distintos, sendo eles:

- Exploração didática do *Software GeoGebra* objetivando o reconhecimento de sua interface e principais ferramentas que serão utilizadas nas construções;
- Análise do comportamento gráfico das funções, referentes à equação geral da hipérbole com eixo focal sob o eixo das ordenadas, à Equação Geral das cônicas, e à equação geral da *catenária* descritas pelas Equações (19), (70), e (71), respectivamente.
- Análise e comparação entre as representações gráficas da *catenária* e da parábola num mesmo sistema de coordenadas;
- Análise e comparação entre os gráficos da hipérbole e da parábola fechando a demonstração empírica da falsidade de conjectura de *Galileu* sobre a *catenária* e a parábola.

Sendo que, o terceiro e o quarto momentos estão imbricados nas suas etapas de aplicação, e de realização.

### **Descrição das atividades**

#### **Aula - 1 (duração 50 minutos)**

#### **Objetivos da aula**

Apresentação e exploração didática do *Software GeoGebra* objetivando o reconhecimento de sua interface e principais ferramentas que serão utilizadas nas construções, em aulas posteriores. Devem ser trabalhadas a inserção de pontos, de retas, a utilização da caixa de Entrada, das janelas de Álgebra e de visualização gráfica. Nos moldes apresentados na [seção 3.1](#), onde definimos qual a versão do software que utilizamos e mostramos uma prévia de sua interface.

#### **Ação do professor**

Apresentar a plataforma do *GeoGebra*, disponível em [GoeGebra.org](https://www.geogebra.org), e o vídeo de apresentação do [GoeGebra para aprender matemática](#), elaborado por Team (2023), elencando as principais vantagens advindas da utilização do referido *software*.

Na sequência, exibe a aula do professor Goncalves (2018), com o objetivo de inserir, através de exemplos práticos, tanto o reconhecimento da interface do programa, quanto a definição e a utilização dos “*controles deslizantes*” de forma visual. O que agregará sentido às atividades, ao mesmo tempo em que possibilitará a compreensão deste importante conceito, que será utilizado, posteriormente, na construção dos gráficos da hipérbole, da parábola e da *catenária*, a fim de compará-los.

Nesta etapa, o aprendiz deve ter liberdade para realizar testagens exploratórias, sem o compromisso de precisar dar conta de tudo até o final da aula.

### **Ação do aluno**

Ficar atento às informações veiculadas nos materiais apresentados, registrando em seu caderno, dicas, conceitos, formas de construção dos objetos matemáticos trabalhados, incluindo formas geométricas, retas e curvas, utilizando as ferramentas disponíveis e a caixa de Entrada. Pode ser necessário o *replay* do vídeo, ou de partes do mesmo, para uma melhor compreensão dos conceitos abordados nele. Este fato deve ser considerado ao se planejar a aula. E espera-se, que nesta etapa, os alunos expressem suas dúvidas, antes de reapresentar o material.

Ele deve testar, seja no computador, no celular, no *tablet*, ou em qualquer outro aparelho disponibilizado pela instituição de ensino, ou outro qualquer, no qual o discente tenha acesso à *internet* e que suporte a execução do *software*. Esta é uma “*Conditio sine qua non*”, para que este trabalho alcance o êxito almejado.

### **Material utilizado**

Para o bom desenvolvimento da atividade será necessário dispor de:

- Acesso à *internet* banda larga;
- Sala de Computação ou Sala de multimeios;
- Computador, ou *tablet*, ou notebook, ou *chromebook*, ou celular;
- Retroprojeter;
- Pincel atômico e, quadro branco;

### **Referências**

GONÇALVES, W. V. Interface do GeoGebra e Construções iniciais. 2018. Disponível em: <<https://11nq.com/GeoGebra>>. Acesso em: 05/10/2023.

MODERNA, O. E. **Conexões: matemática e suas tecnologias: Trigonometria**. 1ª. ed. página 80-81: São Paulo: Moderna, 2020. v. 4. (Manual do professor, v. 4). Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Editor responsável: Fábio Martins de Leonardo.

TEAM, G. **GeoGebra.org**. 2023. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/download>>. Acesso em: 05/10/2023.

VASCONCELOS, J. G. S. F. et al. **Funções hiperbólicas: história, conceito e aplicação**. UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS, 2013.

### **Avaliação**

A avaliação, neste momento inicial, deverá ser realizada através da coleta de relatos sobre as expectativas, as dificuldades e as experiências de interação entre os discentes e a tecnologia através do uso do *GeoGebra* como recurso didático para o ensino de matemática. E seus resultados, devem nortear o desenvolvimento das outras etapas.

### **Aulas - 2 e 3 (duração 50 minutos cada)**

#### **Objetivos da aula**

Criar, e utilizar os “*controles deslizantes*”, abordados na aula anterior, aplicando-os à Equação Geral das cônicas (ver Equação 70), a fim de analisar as representações gráficas obtidas através da variação de seus parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ , classificando-as como reta, parábola, elipse, hipérbole ou círculo. Estas, por sua vez, ainda devem apresentar um caráter apenas exploratório sobre estes temas e propriedades, uma vez que o foco aqui será direcionado para a compreensão do uso da ferramenta tecnológica para comparar as representações gráficas da parábola com as da hipérbole e a da *catenária*.

#### **Ação do professor**

Revisar os tópicos da aula anterior sobre a criação dos controles deslizantes buscando proceder, de modo análogo, para criar e explorar as variações dos controles deslizantes, de modo prático, aplicando-os também, tanto à equação geral da hipérbole transladada, com eixo focal sobre o eixo das ordenadas, como descrita pela Equação (19), quanto à Equação (71), que é a equação geral da *catenária*. Para tanto, deve-se seguir as etapas descrita na [seção 4.1](#), até o passo de número 4.

Este processo também foi desenvolvido numa atividade pelo autor e se encontra disponível no repositório do GeoGebra sob o título de [hipérbole com régua e compasso](#). Ao utilizar este material, deve-se clicar nos pequenos círculos que aparecem na Janela de Álgebra, para que a construção seja apresentada na tela. Havendo ainda a possibilidade de clicar no *play*, que aparece ao lado do primeiro pequeno círculo, logo após a habilitação dos controles, para realizar a construção de forma automática (ou animada).

A revisão sobre: Como criar controles deslizantes? Deve ser realizada pelo professor na tela do retroprojetor, visando minimizar as dúvidas durante sua construção na atividade.

E o professor deve fornecer tempo para a exploração da ferramenta por parte dos educandos valorizando os erros mais comuns dos educandos comentando-os na lousa de forma didática e propondo soluções encontradas pelos próprios colegas, o que pode enriquecer a experiência através da colaboração entre os pares, fortalecendo assim, a aprendizagem de modo significativo.

O professor pode encontrar um bom suporte escrito, e que pode ser compartilhado com os alunos, no material de Brasil (2017), e ainda pode utilizar o material em vídeo desenvolvido por Goncalves (2019), com o objetivo de inserir, através de exemplos práticos, tanto o reconhecimento da interface do programa, quanto a definição e a utilização dos “*controles deslizantes*” de forma visual. Nesta etapa a experimentação, o erro e a relevância didática atribuída a estes fatores, associada ao incentivo à continuidade das atividades, pode ser decisiva para o êxito da mesma, em etapas onde a construção e a análise andarão juntas, afim de se alcançar o conhecimento desejado, possibilitando o surgimento de novos *insights* tanto por parte do aluno quanto do professor.

### **Ação do aluno**

Desenvolver as atividades de forma proativa e colaborativa, buscando compreender de forma global o tema em estudo, utilizando-se das ferramentas tecnológicas disponíveis para fomentar o desenvolvimento de suas habilidades de análise, de colaboração e de investigação associadas à TIDC’s utilizadas na execução desta atividade.

### **Material utilizado**

Para o bom desenvolvimento da atividade será necessário dispor de:

- Acesso á *internet* banda larga;
- Sala de Computação ou Sala de multimeios;
- Computador, ou *tablet*, ou notebook, ou *chromebook*, ou celular;
- Retroprojeter;
- Pincel atômico e, quadro branco;

### **Referências**

DANTE, L. R. Matemática: **Contexto & aplicações: ensino médio**. 3<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2016. v. 1.

BRASIL, M. M. d. F. **Explorando o software GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial**. Mestrado Profissional em Matemática - UESC, 2017.

GONCALVES, W. V. **O GeoGbra: Reconhecendo Seções Cônicas com o GeoGebra**. 2019. Disponível em: <[http://https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=gYA\\_eQhtmr4](http://https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=gYA_eQhtmr4)>. Acesso em: 05/03/2023

MODERNA, O. E. **Conexões: matemática e suas tecnologias: Trigonometria**. 1<sup>a</sup>. ed. página 80-81: São Paulo: Moderna, 2020. v. 4. (Manual do professor, v. 4). Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Editor responsável: Fábio Martins de Leonardo.

TEAM, G. **GeoGebra.org**. 2023. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/download>>. Acesso em: 05/10/2023.

VASCONCELOS, J. G. S. F. et al. **Funções hiperbólicas: história, conceito e aplicação**. UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS, 2013.

### **Avaliação**

A exemplo da avaliação inicial, deve-se adotar que a realização da coleta de relatos sobre as expectativas, as dificuldades e as experiências de interação entre os discentes e a tecnologia através do uso do *GeoGebra*, como recurso didático, para o ensino de matemática, representa uma das principais estratégias de avaliação e, está voltada para a aferição do grau de motivação e de eficácia desta SD.

Nesta etapa, busca-se averiguar o grau de assertividade, por parte do educando, na realização de atividades de construção de uma hipérbole utilizando o *software GeoGebra*, como ferramenta de suporte tecnológico, seguindo as instruções apresentadas na atividade de [construção da hipérbole com o software GeoGebra](#). Esta atividade, está disponível na página de atividades do autor, sob o título: [“Hipérbole com régua e compasso”](#). E deve servir de parâmetro para a (re)elaboração de estratégias, afim de tornar, tanto a execução desta SD, quanto a utilização didática da tecnologia, nas aulas de matemática, exitosas, quanto produtivas.

Outro fator importante a ser considerado, nesta segunda etapa de avaliação, consiste na realização das atividades propostas que envolvam a plotagem de gráficos através da janela de Entrada do *software GeoGebra*, e da construção de controles deslizantes que possibilitem, a análise das propriedades dos gráficos de funções, através das variações destes controles; Explorando, assim, os possíveis resultados da variação dos valores destes controles deslizantes, na Equação Geral das cônicas, representadas pela Equação 70, pela equação geral da *catenária*, representada pela Equação 71 e pela equação da hipérbole unitária de eixo focal sobre o eixo das abscissas, representada pela Equação 19.

### **Aula 4 - (duração 50 minutos)**

#### **Etapas de desenvolvimento**

Nesta etapa, todos os esforços devem se concentrar, na utilização coordenada dos conhecimentos e estratégias trabalhados anteriormente, tais como, a utilização da Caixa de En-

trada para se inserir as equações nas janelas de Álgebra e de Visualização, bem como, a construção e configuração dos controles deslizantes que estaremos utilizando. Assim, ao utilizar estas estratégias e ferramentas os educadores, já devem ser capazes, de realizar uma:

- Análise comparativa, entre os gráficos da hipérbole e da parábola, através de suas representações gráficas, num mesmo sistema de coordenadas; E, uma;
- Análise comparativa, entre as representações gráficas da *catenária* e da parábola, num mesmo sistema de coordenadas, fechando assim, a demonstração empírica, da falsidade de conjectura de *Galileu* sobre a *catenária*, a qual ele pensava ser uma parábola.

### Descrição das atividades

Para os educandos que participaram, ativamente das aulas anteriores, acredita-se que, não sejam necessárias grandes intervenções para a execução, adequada das comparações, entre as representações gráficas da parábola com a hipérbole, e da parábola com a *catenária*. Entretanto, caso isto venha a acontecer, o professor pode realocar os alunos com dificuldades num mesmo lugar, para facilitar a intervenção, buscando inclusive, a ajuda dos colegas que já superaram estas dificuldades.

A seguir deve orienta-los a construir, num mesmo plano cartesiano, a representação gráfica da equação geral das cônicas e a equação geral da hipérbole de eixo real sobre o eixo das ordenadas, destacando, sempre o papel fundamental, da regulagem dos controles deslizantes, para a obtenção de uma boa comparação.

O procedimentos necessários para tal comparação, podem ser descritos a partir do [quinto passo](#) da seção 4.1. O professor deve permitir que os discentes tentem realizar a atividade de modo independente, no primeiro momento, acompanhando os procedimentos descritos no passo cinco, para só depois fazer as intervenções necessárias, apresentando a construção realizada pelo autor para esta comparação que pode ser encontrada [AQUI](#), ou opcionalmente, em <https://www.geogebra.org/m/fj9xfu6x>, bastando para isso digitar o endereço na barra de pesquisas do navegador.

E, de modo completamente análogo, deve permitir que os educadores explorem a comparação entre a parábola e a hipérbole. Neste caso, a solução elaborada pelo autor pode ser acessada [AQUI](#), ou através da digitação na barra de endereços do endereço: <https://www.geogebra.org/m/d3antshk>.

### Objetivos da aula

Consolidar o conhecimento matemático através da utilização, didática, do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*, alavancando assim, o ensino e a aprendizagem em matemática.



Utilizar o *software GeoGebra* para, de modo empírico, demonstrar a falsidade da conjectura de *Galilei*, que acreditava que a curva formada por uma corrente suspensa, sob a ação única de seu peso, era uma parábola.

Iniciar o estudo sobre a hipérbole, e sobre as funções hiperbólicas, desde a educação básica, de nível médio, destacando o papel central da tecnologia nesta empreitada. E apontando um possível caminho, para que esta possibilidade venha a ser uma realidade em nossas escolas nesta etapa de ensino.

### **Ação do professor**

Especificamente, a partir deste momento, o professor deve ser apenas um facilitador do processo de ensino e de aprendizagem mediado pela intervenção tecnológica em sala de aula devendo estar atento à construção dos laços de comunicação e colaboração ativas que devem ser desenvolvidos durante a execução das atividades, posto que este pode ser um rico momento para o desenvolvimento conjunto dessas habilidades. Ele deve estar atento às dificuldades procedimentais e conceituais presentes na atividade sob pena de perder uma boa oportunidade de motivar, e de incentivar o desenvolvimento crítico de seus educandos. E deve conhecer, de modo antecipado, as atividades, seus objetivos e o conteúdo a ser ministrado, para que não venha a ficar perdido durante as aulas. E neste sentido, um estudo mais acurado deste trabalho poderá ser bastante útil.

O professor pode seguir o cronograma indicado aqui, ou pode fazer as alterações que achar necessárias, a depender da turma com a qual estará trabalhando e, do seu grau de conhecimento tecnológico da mesma. O que pode ser salutar para que o professor alcance seus objetivos com a aplicação desta SD.

### **Ação do aluno**

Espera-se que nesta fase os educandos já se encontrem à vontade com a utilização da tecnologia e familiarizados com o *software* sugerido para as atividades. E portanto, eles devem estar atentos às informações e dicas apresentadas pelo professor ou pelos colegas mais avançados, agindo de modo empático e colaborativo com todos os envolvidos na atividade. E que possam receber a intervenção tecnológica ou o uso didático-pedagógico da tecnologia como uma estratégia de ensino e aprendizagem que pode possibilitar novas formas de se compreender o mundo em que vivemos, constituindo-se num rico ambiente para a experimentação em ciências e em matemática.

### **Material utilizado**

Para o bom desenvolvimento da atividade será necessário dispor de:

- Acesso à *internet* banda larga;

- Sala de Computação ou Sala de multimeios;
- Computador, ou *tablet*, ou notebook, ou *chromebook*, ou celular;
- Retroprojeter;
- Pincel atômico e, quadro branco;

## Referências

DANTE, L. R. Matemática: **Contexto & aplicações: ensino médio**. 3<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2016. v. 1.

BRASIL, M. M. d. F. **Explorando o software GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial**. Mestrado Profissional em Matemática - UESC, 2017.

GONCALVES, W. V. **O GeoGebra: Reconhecendo Seções Cônicas com o GeoGebra**. 2019. Disponível em: <[http://https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=gYA\\_eQhtmr4](http://https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=gYA_eQhtmr4)>. Acesso em: 05/03/2023

MODERNA, O. E. **Conexões: matemática e suas tecnologias: Trigonometria**. 1<sup>a</sup>. ed. página 80-81: São Paulo: Moderna, 2020. v. 4. (Manual do professor, v. 4). Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Editor responsável: Fábio Martins de Leonardo.

TEAM, G. **GeoGebra.org**. 2023. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/download>>. Acesso em: 05/10/2023.

VASCONCELOS, J. G. S. F. et al. **Funções hiperbólicas: história, conceito e aplicação**. UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS, 2013.

## Avaliação

A avaliação das impressões, expectativas, frustrações, necessidades e/ou possibilidades para o ensino de matemática com a utilização das TIDC's, e mais especificamente, do uso do *software GeoGebra* pode, e deve ser feita, em todas as aulas. Enquanto a avaliação da atividade em si, pode ser realizada a partir do grau de participação ativa da turma associada ao quantitativo de atividades realizadas com êxito sempre levando em conta as nuances da incompletude do planejamento, uma vez que este sempre apresenta a adaptabilidade como sua principal marca e estratégia de ação.

Por outro lado, sugere-se que a avaliação deste não seja unilateral, mas que todas as partes envolvidas no processo de ensino e aprendizagem tenham a possibilidade de avaliar o processo, mesmo que para isso seja necessário criar uma estratégia para validar esta avaliação compartilhada.

E neste sentido a elaboração de Rubricas de avaliação pelos envolvidos neste processo pode ser uma alternativa eficaz e conciliadora que pode revelar uma avaliação multifocal pautada na realidade de quem participou diretamente da atividade. Fato que merece ser, ao menos estudado no planejamento de qualquer atividade deste porte.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A história das funções hiperbólicas é repleta de nuances que podem ser melhor compreendidas hoje, devido ao grande avanço tecnológico que nos possibilitou analisar o gráfico de uma função com maior assertividade e segurança, uma vez que a construção via *software* computacional, nos apresenta um gráfico construído sem os vícios e erros comuns relativos à construção à mão livre, sejam de traçado, de truncamento, ou de precisão, uma vez que nossos melhores gráficos não passam de representações grosseiras, suficientes para análises iniciais, como nos informa Kaplan (1972, p. 18).

A história nos revela, que o primeiro a se debruçar sobre o problema da identificação da curva formada por uma corrente suspensa sob a ação única de seu próprio peso e fixada pelas suas extremidades como representada na Figura 37<sup>1</sup>, foi *Galileu*.

**Figura 37 – Representação da *catenária* na conjectura de *Galileu***



Fonte: Retirada de Engineering Models.

Tanto ele, quanto boa parte dos matemáticos da época, perderam bastante tempo tentando provar que a curva, que ficou conhecida como *catenária* era uma parábola. Entretanto, apesar de seus esforços, ninguém conseguiu demonstrar que a conjectura formulada por *Galileu* fosse verdadeira. A descoberta de que a *catenária* não era uma parábola foi inicialmente apresentada por *Huygens*, que aos 17 anos afirmava: “a *catenária* não pode ser uma parábola, pois estas curvas apresentam propriedades que as distinguem uma da outra”. Entrementes, somente em meados do século XIX, depois que *Jacob Bernoulli*, revisitou esta conjectura e a publicou no Jornal de cunho científico fundado por *Leibniz* em 1671, o “*Acta eruditorium*”, foi que os matemáticos, instigados pela publicação, voltaram a atacar novamente a conjectura de *Galileu*. E a solução foi encontrada tanto por *Johan Bernoulli* quanto por *Leibniz* e *Newton*, naquele mesmo ano. A partir de então, a *catenária*, com vértice no ponto  $(0, a)$ , com  $a > 0$ , passou a ser conhecida como a curva representada pela Equação 68 (LEITHOLD, 2002, p. 402).

$$y = a \cdot \cosh \left( \frac{x}{a} \right), a > 0, \quad (68)$$

ou seja,

<sup>1</sup> Esta figura foi retirada de um dos vídeos do “Canal de Modelos de Engenharia”. o qual apresenta o video intitulado: Modelos Mecânicos que inclui trechos de 18 de seus filmes. Para saber mais e ver modelos adicionais, acesse: <https://www.civil.uwaterloo.ca/brodland/models.html>.

$$y = \frac{a}{2} \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a}). \quad (69)$$

A *catenária* apresenta propriedades que a colocam num lugar de destaque na arquitetura, pois, as estruturas construídas com base nesta curva apresentavam grande resistência e estabilidade, possibilitando a construção vertical com mais segurança. Um bom exemplo disso é o *Gateway Arch*: que é um Arco em forma de *catenária* invertida, achatada (*St. Louis, Estados Unidos*), ilustrado na Figura 38.

**Figura 38 – Gateway Arch**



Fonte: <https://commons.wikimedia.org>.

Como já abordado no Capítulo 4, podemos encontrar funções hiperbólicas em diversos ambientes, tais como no choque entre ondas, na arquitetura, nos cabos e fios suspensos em nossas ruas, uma vez que, por definição, a *catenária* “é a curva formada por um cabo flexível com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação única de seu próprio peso, onde o seu ponto mínimo é  $(0, a)$ , com  $a > 0$ ” (ALHADAS, 2013, p. 46), como podemos ver na Figura 39.

**Figura 39 – A *catenária* no cotidiano**



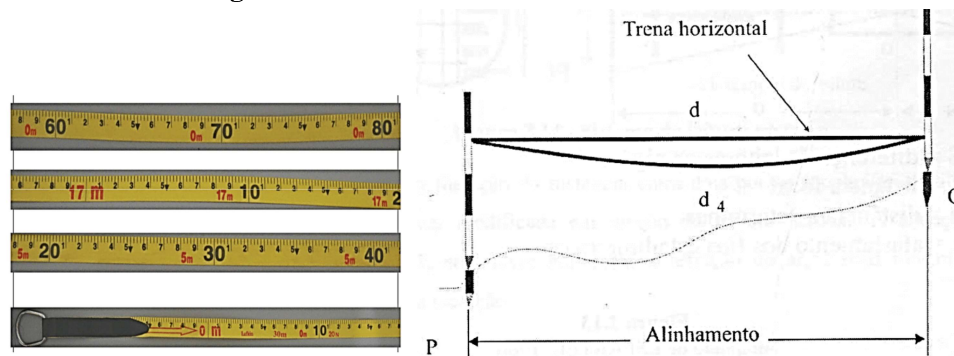
Fonte: Retirada de Engineering Models.

E, cuja expressão algébrica, está representada pela Equação 68.

De acordo com Almeida (2014), outra aplicação interessante da *catenária* pode ser vista com muita frequência, tanto no trabalho de um topógrafo, quanto na construção civil como um todo. E neste caso, a *catenária* é considerada uma fonte de erro recorrente, que não pode ser desprezada por nenhum construtor. Uma vez que nas medições com trena, esta não conseguirá obter a medida real devido ao efeito *catenária*. Este fato pode ser percebido na Figura 40.

Para a referida autora “ainda no sentido vertical, o próprio peso da trena descreve uma curva ou “barriga”, provocando o erro de *catenária* ao medir  $d_4$  em vez de  $d$ , como representado na Figura 40.

**Figura 40 – Erros na medida direta de distâncias**



Fonte: Retirada de (ALMEIDA, 2014, slides. 8, 27).

Assim, para entender melhor qual foi a dificuldade encontrada por *Galileu* e os demais matemáticos em confirmar que a *catenária* não é uma parábola, pode-se fazer uma experimentação utilizando-se do *software GeoGebra*, com a atividade proposta abaixo, a qual poderá ser visualizada, ou acompanhada de modo simultâneo, visando uma melhor compreensão dos procedimentos descritos, no repositório de atividades do *GeoGebra*<sup>2</sup>. Onde o material foi disponibilizado por Souza (2024c).

#### 4.1 Comparação entre a parábola e a hipérbole utilizando o *software GeoGebra*

Com o *GeoGebra* aberto, acompanhe as observações das atividade como descritas abaixo:

- 1) Como a equação geral de uma cônica <sup>3</sup> é do tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (70)$$

então, deve-se criar, inicialmente, os controles deslizantes <sup>4</sup> que representarão a variação dos coeficientes reais  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  da Equação 70. Uma vez criados os controles deslizantes, e nomeados com as respectivas letras, deve-se inserir, na barra de fórmulas, a equação geral das cônicas na forma descrita pela Equação 70. Neste caso, o objetivo pode ser brincar com os valores dos coeficientes para ver o que acontece com o gráfico na representação do *GeoGebra*.

- 2) Para criar uma parábola, devemos considerar  $A \neq 0$ , e  $C = 0$ , donde se obterá uma parábola, cuja reta focal é paralela ao eixo  $Oy$  se  $D \neq 0$ . <sup>5</sup> Assim, considerando que:

<sup>2</sup> Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/fj9xfu6x>

<sup>3</sup> Há uma discussão detalhada sobre a equação geral de uma cônica e as condições desta para que esta resulte na equação quadrática que representa um elipse, ou uma hipérbole ou uma parábola em Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 168 - 188)

<sup>4</sup> Para àqueles que não tiveram nenhum contato com o *GeoGebra* pode ser interessante assistir à aula do professor Tondinelli. (2020) sobre a definição e utilização dos controles deslizantes.

<sup>5</sup> Uma apresentação simplificada sobre as condições para que a equação geral das cônicas possa representar um parábola pode ser encontrada em (KAPLAN, 1972, p. 9).

$A = -1, B = C = D = 0$ , com  $E = 1$  e  $F = 0$ , obtém-se a função  $y = x^2$ , que representa uma parábola centrada na origem, cujo eixo de simetria é coincidente com  $Oy$ .

- 3) Agora, fazendo  $F = -1$ , conseguimos transladar esta parábola verticalmente, em uma unidade para cima, obtendo assim  $V = (0, 1)$ , como sendo o novo vértice da parábola transladada.
- 4) Para incluir uma hipérbole, cujo eixo focal esteja sobre o eixo  $Oy$ , devemos criar os seguintes controles deslizantes:  $g, h, m, n$  com variação de uma unidade, exceto para o controle deslizante  $n$ , cuja variação será de  $0, 1$  unidades, o que nos permitirá uma análise mais detalhada da situação, e posteriormente, uma comparação mais assertiva entre os dois gráficos. Desta forma, ao se variar o valor de  $n$ , buscaremos uma sobreposição total entre as duas representações gráficas, caso a *catenária* seja, realmente uma parábola, ou uma não sobreposição total, em caso contrário. Em seguida, será necessário inserir, na caixa de Entrada, a equação geral de uma hipérbole com eixo real sobre o eixo  $Oy$ , conforme vemos na Equação 19, com os coeficientes equivalentes aos controles deslizantes criados logo a cima, para obter a seguinte equação:

$$\frac{(y - g)^2}{m^2} - \frac{(x - h)^2}{n^2} = 1$$

Neste caso, observe que foram feitas as seguintes modificações na Equação 19:  $y_0 = g$  e  $x_0 = h$ , com a finalidade de usar os controles deslizantes definidos para esta equação.

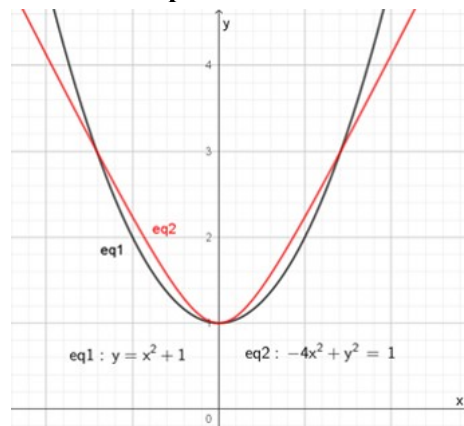
- 5) Note ainda que, ao definirmos que  $a = m$  e  $b = n$ , na fórmula geral da hipérbole transladada, então, obtemos a hipérbole equilátera de vértices  $V_1 = (0, 1)$  e  $V_2 = (0, -1)$ ; Onde, ao realizar as etapas anteriores, vê-se surgir uma parábola e uma hipérbole com um vértice em comum, digamos  $V = V_1 = (0, 1)$ , como na Figura 41.

Nota-se também, que a hipérbole representada, em notação moderna pelo *GeoGebra*, apresenta dois ramos, o que a diferencia claramente da parábola como pode-se observar na Figura 42.

- 6) Agora, Fazendo  $n$  variar, pode-se notar que as duas curvas não se sobrepõem totalmente mas, somente em algumas partes de seus gráficos, o que poderia ser suficiente para que se refutasse a conjectura de *Galileu*, através de análise gráfica comparativa obtida, ou pelo princípio do terceiro excluído <sup>6</sup>, caso este fosse um problema da atualidade, uma vez que, mesmo numa análise mais rápida das Figuras 41, 42 e 43, pode-se constatar que apenas partes dos gráficos se sobrepõem. E, tendo em vista esta possibilidade, é que sugere-se, que tal atividade seja proposta como situação problema, para que, com o uso da ferramenta tecnológica sugerida, o educando possa tirar suas próprias conclusões e construir um conhecimento consistente nesta etapa de estudo.

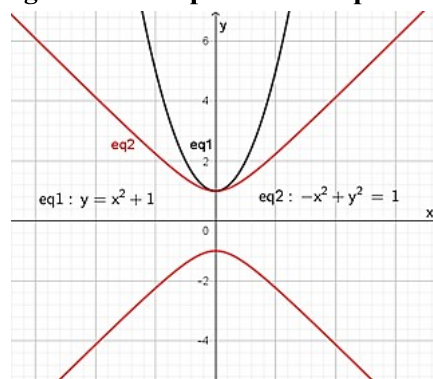
<sup>6</sup> Uma definição sobre este princípio pode ser encontrada em WIKIPÉDIA (2023).

**Figura 41 – Parábola e hipérbole com vértice comum  $V = (0, 1)$**



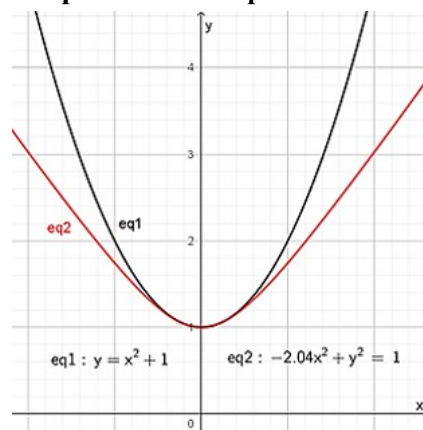
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 42 – Diferenciação gráfica entre parábola e hipérbole pelos ramos da hipérbole**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 43 – A parábola e a hipérbole não se sobrepõem**



Fonte: Elaborado pelo autor.

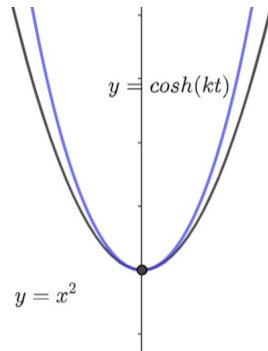
Assim, de modo similar ao que foi discutido anteriormente, pode-se verificar que “resolve-se” a conjectura de *Galileu*, via *GeoGebra* ao se comparar a equação geral das cônicas, descrita acima, com a expressão geral da *catenária* na forma

$$y = \cosh(kt), \quad (71)$$



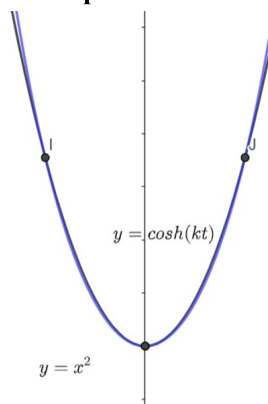
, com vértice comum  $V = (0, 1)$ , criando-se os controles deslizantes para a equação geral das cônicas e um para o parâmetro  $k$  da *catenária*, conforme vê-se nas Figuras 44, 45 e 46. As estratégias para esta nova comparação entre a *catenária* e a parábola são similares às apresentadas na atividade anterior, diferenciando-se daquela, somente por usar a equação geral da *catenária* no lugar da equação geral da hipérbole transladada. E, esta por sua vez, pode ser visualizada em Souza (2024a). Logo a baixo, podemos ver algumas imagens desta atividade.

**Figura 44 – A parábola e a *catenária* com vértices comuns**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 45 – Pontos de intersecção entre parábola e *catenária* de vértices comuns  $V = (0, 1)$**

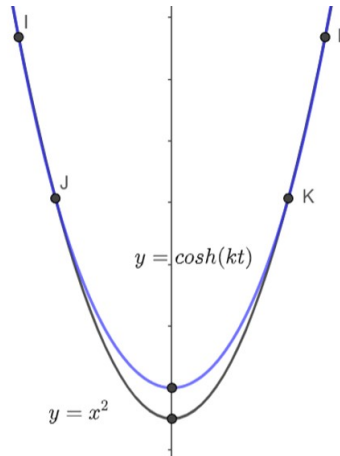


Fonte: Elaborado pelo autor.

Donde conclui-se, que não há uma sobreposição entre as curvas que representadas por parábolas e a *catenária*. E assim, de maneira intuitiva, pode-se inferir que estas não representam a mesma curva, apesar de possuírem pontos em comum. Similarmente, com o auxílio do *GeoGebra*, em sala de aula, o professor pode mostrar, empiricamente, que uma *catenária* com mesmo vértice que uma hipérbole, também não representam a mesma curva.

Contudo, observa-se que, dadas as ferramentas matemáticas e tecnológicas de que *Galileu* e seus contemporâneos dispunham à época, tal conjectura é perfeitamente compreensível, e representava a visão de alguém que estava à frente de seu tempo, e cuja perspicácia, explicitada ao apenas conjecturar a comparação, sem fechar a questão, deixando assim, espaço para que o desenvolvimento de novas formas de compreender e de se pensar a matemática pudessem, preencher e corrigir, o que faltava aos seus esforços, realça ainda mais esta impressão.

**Figura 46 – Pontos comuns sem sobreposição entre a parábola e *catenária***



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, esta atitude fez com que a conjectura recebesse contornos de desafio intelectual enfrentado por muitos matemáticos desde então. A solução deste impasse surge, de modo inicial, com o jovem *Huygens*, e depois com *Johann Bernoulli*, *Leibniz*, *Newton*, e mais recentemente, por você que foi capaz de utilizar o *GeoGebra* para verificar, de modo empírico, aquilo que os matemáticos levaram séculos para descobrir: que a *catenária* não é uma parábola, mas que representava a ponta de um grande *iceberg* conceitual, o qual que se revela, apenas parcialmente, aos desbravadores que se arriscam nessa jornada da (re)descoberta destas ricas estruturas geométricas e algébricas, bem como das motivações, das implicações e das frustrações que nos inquietaram ao longo da história de nosso desenvolvimento matemático, e cujo conhecimento, hoje, foi capaz de trazer sentido e vigor aos conceitos que relacionam as funções circulares com as funções hiperbólicas. Sabe-se hoje, que o fundamento desta geometria não-euclidiana ainda é extremamente amplo, e percebe-se que as possibilidades de descobertas e de aplicações apenas começaram a surgir, timidamente, no horizonte da educação sob a efigie de “Funções Hiperbólicas”.



## 5 CONCLUSÃO

Desenvolver uma proposta de trabalho voltada para a educação básica, considerando todo o arcabouço teórico do qual dispomos, não é uma tarefa simples nem fácil, posto que muitas vezes, precisamos lançar mão de conceitos que ainda se encontram em construção nesta etapa formativa, o que dificulta a realização de uma abordagem mais completa e cabal do ponto de vista do rigor matemático exigido para algumas das demonstrações. No entanto, como este trabalho buscou balizar o estudo das funções hiperbólicas desde a educação básica, priorizando tanto a construção de uma visão panorâmica mais homogênea acerca da teoria das funções hiperbólicas, por parte do professor/estudante que vai ensinar ou que busca aprender sobre este assunto, quanto trazer o tema para o debate, na forma de questionamentos sobre o tipo de relação existente entre a hipérbole equilátera, a hipérbole rotacionada de  $45^\circ$  no sentido anti-horário, o *seno* e o *coseno hiperbólicos* e a *exponencial natural*, direcionando o caminho da (re)construção dos nossos conhecimentos sobre as funções hiperbólicas e suas aplicações, através da análise comparada de sua relação com a circunferência unitária, e com as funções circulares elementares. Donde, instigados pelo conhecimento etnomatemático, apresentamos a compreensão da definição das razões trigonométricas na hipérbole equilátera, de modo similar às construções realizadas na circunferência unitária, através de um panorama histórico-cultural, rico e fecundo, para desenvolver o estudo proposto aqui. Indicando um caminho que aponta para a compreensão, de algumas, das nuances da teoria das funções hiperbólicas, explicitando como e, porque, estas podem ser expressas em função da exponencial natural? O que contribuiu significativamente, para o desenvolvimento/construção de uma argumentação matemática consistente, desde a educação básica.

Entretanto, para que este desenvolvimento seja possível, é necessário que haja um trabalho didático consciente, por parte do responsável pela educação formal de nossos educandos: O professor. E, pensando em contribuir com esta conscientização é que apresentamos, não somente os questionamentos mas, sobretudo, alternativas para o desenvolvimento conceitual do tema, desde o ensino médio, visando o ensino das funções hiperbólicas, na educação básica, dentro de um planejamento didático gradativo e consciente. Assim, o professor interessado pode começar com a descoberta do número de *Euler* através da matemática financeira, como sugerido, através do uso das TDIC's, ou somente da calculadora, podendo utilizar-se também de planilhas eletrônicas para dinamizar os cálculos. E, ao inserir o estudo de potenciação com números naturais e racionais, pode-se introduzir a definição da função que rege a exponenciação, ou seja, a função exponencial natural, trazendo assim, familiaridade ao trabalho com o número *e*, ao colocá-lo mais próximo do fazer escolar dos educandos, possibilitando assim, o estudo das funções exponenciais de base *e* mais precocemente, visto que tais conceitos são explorados, hoje em dia, somente nos cursos de graduação.

As atividades que envolvem as funções exponenciais podem ser desenvolvidas, desde o início do primeiro ano do ensino médio, quando a construção de gráficos é trabalhada

de forma mais intensa, não havendo a necessidade de se esgotar os temas para seguir em frente, uma vez que se almeja a construção de uma visão panorâmica e integradora destes conceitos. Nesta série, também se iniciam os estudos sobre trigonometria e razões trigonométricas. Tais conceitos são, geralmente, complexos para os alunos desta fase, visto que a forma com que os mesmos são tradicionalmente desenvolvidos, em sala de aula, englobam predominantemente, as relações de congruências de triângulos, e o estudo dos sinais das funções no ciclo trigonométrico e da expressão geral dos arcos, dentre outros. Por exemplo, as relações do *coseno* e *senos* da soma e diferença, são extremamente complicados de se deduzir da maneira clássica. Neste ponto, tem-se um terreno fértil para iniciar a segunda parte deste projeto, na qual se busca introduzir os conceitos de *seno*, *coseno* e *tangente* hiperbólicos, sem citar nomes mas, apenas as estruturas relacionadas com a exponencial natural. Note que, como desenvolvido neste texto, as relações de soma e produto de funções hiperbólicas são resultados de cálculos algébricos, sem a necessidade de se explorar interpretações engenhosas na forma de desenhos, como acontece na trigonometria circular. E neste ponto, o uso de calculadoras, de planilhas eletrônicas e de *softwares*, tais como o *GeoGebra*, serão de extrema relevância para o êxito dos educadores nas atividades do ensino básico, devendo ser parte integrante das ferramentas tecnológicas de uso didático e pedagógico, constantes das estratégias de ensino do professor, como disposto na BNCC em sua competência 5, BRASIL (2018, p. 531). E, analisando por esta ótica, poderíamos nos perguntar: por que não aproveitar, o estudo deste tema, para inserir a Fórmula de *Euler*,  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$  desde o ensino básico, claramente sem uma demonstração, o que facilitaria diversas abordagens sobre as funções trigonométricas circulares na educação básica, onde os números  $\pm i$  poderiam, simplesmente, ser ditos como sendo as soluções da equação do segundo grau  $x^2 - 1 = 0$ , visto que no último ano do ensino fundamental, tal equação é dita sem solução, mas na verdade estas equações com discriminante (*Delta*) negativo possuem soluções, que mais tarde serão ditas complexas. Observe ainda, que no nível superior, também cabe a discussão, haja vista que, resolver a integral  $\int e^x \cdot \cos(x) dx$ , por frações parciais é demasiadamente chato, enquanto que, usando-se a fórmula de *Euler*, pode-se obter o resultado rapidamente, desde que se saibam as propriedades de integrais, e a integral da composta de uma função exponencial natural.

A utilização do *GeoGebra*, enquanto recurso didático, inclusive para uso em trabalhos e exames, deve ser iniciada o quanto antes sob pena de frustrar o projeto ou dificultar demasiadamente o desenvolvimento deste.

As formas como estes conceitos estão relacionados e imbricados, foram elucidadas, de modo singelo, mas consistente, ao longo deste texto. Entretanto, não se pode dizer que sejam a única forma de desenvolvê-los dado o amplo espectro referente aos níveis de compreensão, às estratégias de trabalho, de aplicação ou da expertise dos envolvidos no processo de ensino/aprendizagem, o que pode alterar, significativamente, tanto a compreensão, como as ferramentas e as estratégias de trabalho, bem como a forma de definição dos temas aqui abordados e, consequentemente, os resultados obtidos.

Discutiu-se e demonstrou-se as propriedades e identidades trigonométricas das funções hiperbólicas e de suas inversas, bem como suas relações com a função exponencial natural e logarítmica. Destacando, ao longo de todo o texto as contribuições de *Menaecmus*, *Vincenzo Riccati*, *Galileu*, *Jacob*, *Johan Bernoulli* e *Lambert*, entre outros, no desenvolvimento desta teoria. Diversas tabelas foram criadas com o intuito de resumir e também elucidar as muitas semelhanças entre as funções circulares e as hiperbólicas, embora as segundas não sejam periódicas como são as primeiras.

Uma aplicação das funções hiperbólicas utilizando-se matrizes também foi feita para realizar a rotação da hipérbole equilátera no sentido anti-horário num ângulo de  $45^\circ$  no Apêndice A. Cabe ressaltar ainda, que esta teoria está associada a Teoria da Relatividade de Einstein, mas isso foge ao escopo deste texto. E nessa etapa, também se pôde fazer um estudo minucioso sobre a condição de inversibilidade das funções reais, e sobre a necessidade de se restringir o domínio e/ou o contra-domínio de algumas funções, para que a sua inversa possa existir.

Entretantes, com intuito de explicar os gráficos das funções hiperbólicas, fez-se necessário a utilização de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral, sendo estes assuntos não comuns nos cursos da educação básica. Ainda assim, o docente que trabalha com este público pode utilizar de recursos computacionais como o *GeoGebra* para a confecção destas curvas. Outrossim, aproveitou-se para se discutir diversas identidades trigonométricas hiperbólicas e suas relações com as derivadas, que são ferramentas indispensáveis para a construção de gráficos.

E por fim, apresentou-se uma atividade que buscou verificar a veracidade da conjectura de *Galileu*, que sugeria que, a curva que descreve a deformidade de uma corda de densidade uniforme, suspensa por suas extremidades e sujeita somente a ação da força peso, era uma parábola. Isso foi feito utilizando-se, para tal, a expressão geral das cônicas, a equação geral da hipérbole transladada com eixo real sobre o eixo das abscissas, a equação geral da catenária e o *software GeoGebra*, numa atividade lúdica que poderá ser extremamente proveitosa.

Desta forma, salienta-se que a proposta apresentada neste trabalho, acompanha a legislação que disciplina e direciona a Educação Nacional, ao possibilitar o desenvolvimento integrado do conhecimento de modo que este possa fazer sentido, proporcionando ao indivíduo a possibilidade de continuidade de estudos, como preconizado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, e contribuindo assim, para o desenvolvimento pleno dos nossos educandos nos moldes encontrados na nova Base Nacional Comum Curricular.

Portanto, com este texto, convidamos nossos colegas professores a implementar, corajosa e confiantemente, o estudo didático das funções hiperbólicas, desde a educação básica. Assim como, a incentivar e possibilitar a utilização didática de ferramentas tecnológicas *open source* como o *GeoGebra* em suas salas de aula, uma vez que, como viu-se neste trabalho, boa parte da base conceitual necessária já faz parte do currículo da educação básica, o que torna essa implementação, não apenas possível, mas necessária.



## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, L. B. de. Relações complexas entre as funções hiperbólicas e a transmissão de energia. **Revista Científico**, v. 18, n. 37, p. 189–206, 2018.
- ALHADAS, M. D. C. Funções hiperbólicas no ensino médio. 2013.
- ALMEIDA, F. M. **Medição de Distâncias: Topografia 1 - TE 068. UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO CIVIL TECNOLOGIA EM CONSTRUÇÃO CIVIL - Juazeiro do Norte**. 2014. Juazeiro do Norte. Disponível em: <[http://wiki.urca.br/dcc/lib/exe/fetch.php?media=aula\\_trenas.pdf](http://wiki.urca.br/dcc/lib/exe/fetch.php?media=aula_trenas.pdf)>. Acesso em: 02/03/2024.
- ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, n. 10, 1986.
- BARATA, J. **Notas para um Curso de Física-Matemática**. [S.l.]: USP - São Paulo., 2023.
- BARBOSA, V. D. *et al.* Funções hiperbólicas: uma proposta de ensino. Universidade Federal de Jataí, 2021.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- BRASIL. **LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996**. 1996. Disponível em: <[https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/19394.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm)>. Acesso em: 04/01/2024.
- BRASIL, M. d. E. M. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. 2018. Apresenta a proposta do Novo Ensino Médio. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC\\_EnsinoMedio\\_embaixa\\_site\\_110518.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf)>. Acesso em: 12/02/2023.
- BRASIL, M. M. d. F. Explorando o software geogebra no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial. Mestrado Profissional em Matemática - UESC, 2017.
- BRASIL, S. de E. F. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática - Brasília : MEC/SEF, 1997**. 1997. Apresenta os Parâmetros curriculares nacionais da área de Matemática para o Ensino Fundamental I p. 33 . Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 03/11/2023.
- CAMPOLINO, M. L. Translação e rotação de cônicas em  $\mathbb{R}^2$ . 2014.
- CARDOSO, L. F. **Dicionário de matemática**. [S.l.]: Rio de Janeiro:Expressão e Cultura, 2001.
- CARVALHO, S. P. d. As funções hiperbólicas. **Disponível em: <http://docplayer.com.br/5125774-Sonia-pinto-de-carvalho.html>, acessado em: 30/08/2023**, v. 14, p. 12, 2017.
- D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. [S.l.]: São Paulo:Summus;Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.
- D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. [S.l.]: São Paulo:Ática, 1998.
- DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & aplicações: ensino médio**. 3ª. ed. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2016. v. 1.
- DELGADO, j.; FRENSEL, k.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. 2ª. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2017.



- DEMANA, F. D. *et al.* **Pré-Cálculo**. 2ª. ed. [S.l.]: São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013. Consultoria técnica: Thaícia Stona.
- EPSTEIN, I. **O signo**. [S.l.]: Ática, 1991. (Princípios (São Paulo)). ISBN 8508011563.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.
- FREITAS, M. d. B. C. d. S. B. *et al.* As funções hiperbólicas e suas aplicações. Universidade Federal da Paraíba, 2015.
- GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; SANTO, N. d. E. **Geometria Analítica I**. [S.l.]: Fundação CECIERJ, 2010. único.
- GONCALVES, W. V. **Interface do GeoGebra e Construções iniciais**. 2018. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=p0U8\\_yb2heo](https://www.youtube.com/watch?v=p0U8_yb2heo)>. Acesso em: 05/10/2023.
- GONCALVES, W. V. **O GeoGebra: Reconhecendo Seções Cônicas com o GeoGebra**. 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=SFYK-gDX-K4>>. Acesso em: 05/03/2023.
- HABIB, N. d. C. P. Abordagem e atividades para a cônica hipérbole. 2013.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; NILZE., A. **Matemática e aplicações. 1ª série: ensino médio**. 2ª. ed. [S.l.]: São Paulo: Atual, 2004.
- KAPLAN, W. **Cálculo Avançado: Vol. 2**. [S.l.]: Editora Blucher, 1972. v. 2.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com geometria analítica**. 3ª. ed. [S.l.]: São Paulo: Harbra, 2002. v. 1.
- LIMA, E. L. **Números e funções reais**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 7. (Coleção PROFMAT, v. 7).
- LIMA, L. A. M. de; MIRANDA, S. R. F. de. Problema da catenária: história, solução e aplicações. 2021.
- MAOR, E. **e: A história de um número**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Record, 2008. Tradução de Jorge Calife.
- MELLO, V. **Geogebra para professores: Seções cônicas**. 2019. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=gYA\\_eQhtmr4](https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=gYA_eQhtmr4)>. Acesso em: 12/02/2023.
- MODERNA, O. E. **Conexões: matemática e suas tecnologias: Trigonometria**. 1ª. ed. pagina 80-81: São Paulo: Moderna, 2020. v. 4. (Manual do professor, v. 4). Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Editor responsável: Fábio Martins de Leonardo.
- OBMEP, C. d. M. d. **Fórmulas de De Moivre**. 2022. Apresenta a dedução do valor de  $\rho$  e a fórmula da potenciação no forma trigonométrica comumente trabalhadas no ensino médio. Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/formulas-de-moivre/>>. Acesso em: 03/12/2022.

- RODRIGUES, K. F. Ângulos hiperbólicos e funções hiperbólicas. Mestrado Profissional em Matemática, 2014.
- SANTOS, J. A. P. d. Funções hiperbólicas: Uma abordagem geométrica. Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte - CE, 2022.
- SANTOS, J. J. C. d. *et al.* Estudo e aplicações das funções hiperbólicas. Universidade Federal da Paraíba, 2015.
- SILVA, C. M. d. As funções hiperbólicas no ensino médio: Apresentação, conceito e aplicações. Mestrado Profissional em Matemática, 2019.
- SILVA, C. M. da. As funções hiperbólicas no ensino médio: Apresentação, conceito e aplicações. **Dourados - MS: UEMS**, 2019. Dissertação (Mestrado Profissional) - Matemática - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2019. Orientador: Prof. Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes.
- SIQUEIRA, J. E. d. M. **Articulando os registros de representação semiótica das Curvas Cônicas através da integração de recursos computacionais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2019.
- SOUSA, E. O. das C.; ALMEIDA, P. d. N. R. Rotação de eixos no estudo das quádricas. Universidade Federal do Amapá Macapá - AP, 2016.
- SOUZA., A. A. de. Modelagem matemática: Uma prática a ser desenvolvida no ensino fundamental e médio. Universidade do Estado da Bahia – UNEB, Campus-X, 2009. Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Ciências com Habilitação em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, para obtenção do título de Licenciado em Matemática. Orientadores: Prof.<sup>a</sup> Dra. Célia Rosângela Dantas Dórea, Prof.<sup>o</sup>. Esp. Josenildo Brandão, Prof.<sup>o</sup>. Esp. Solon Gomes.
- SOUZA, A. A. P. de. **Catenária x Parábola**. 2024. Material criado pelo autor para explorar a veracidade de conjectura de *Galileu* através da comparação entre uma parábola e uma *catenária* de vertives comuns, utilizando o *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/d3antshk>>. Acesso em: 01/03/2024.
- SOUZA, A. A. P. de. **Hiperbole com régua e compasso**. 2024. Material criado pelo autor para exemplificar a construção de uma hipérbole com régua e compasso utilizando o *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ucdu6hku>>. Acesso em: 06/03/2024.
- SOUZA, A. A. P. de. **Parábola x Hiperbole**. 2024. Material criado pelo autor para explorar a veracidade de conjectura de *Galileu* através da comparação entre uma parábola e uma hipérbole de vertives comuns utilizando o *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fj9xfu6x>>. Acesso em: 01/03/2024.
- STF. **CONSTITUIÇÃO DA REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL - TÍTULO VIII - Da Ordem Social - CAPÍTULO IV - Da Ciência, Tecnologia e Inovação nbsp;(Redação da EC 85/2015)**. 2015. Disponível em: <<https://portal.stf.jus.br/constituicao-supremo/artigo.asp?abrirBase=CF&abrirArtigo=218>>. Acesso em: 04/01/2024.
- TEAM, G. **GeoGebra introduction vídeo**. 2023. Disponível em: <[https://youtu.be/9kUOc9\\_zq3w](https://youtu.be/9kUOc9_zq3w)>. Acesso em: 05/10/2023.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: São Paulo: Pearson, 2012. v. 2.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: São Paulo: Pearson, 2012. v. 1.

THOMAZ, M. L.; FRANCO, V. S. Geometria não euclidiana/geometria esférica. **Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná, PDE**, v. 2008, 2007.

TONDINELLI, G. **GEOGEBRA 06 - CONTROLE DESLIZANTE**. 2020. Neste vídeo o professor Gustavo aborda: O que é o controle deslizante? Pra que ele serve? O que eu posso fazer com ele? Neste vídeo mostro um pouco para que serve o controle deslizante e algumas aplicações para ele na sala de aula!. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=UZpGK-WLAh4>>. Acesso em: 26/01/2024.

VASCONCELOS, J. G. S. F. *et al.* Funções hiperbólicas: história, conceito e aplicação. UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS, 2013.

WIKIPÉDIA. **Clepsidra**. 2023. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Clepsidra&oldid=65762849>>. Acesso em: 26/04/2023.

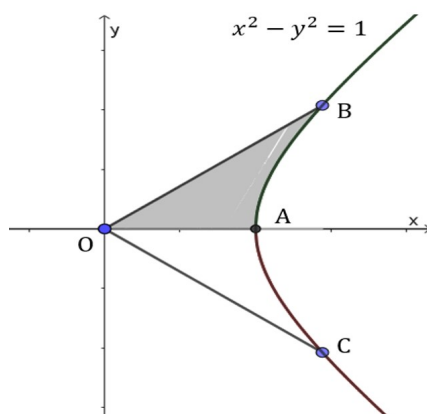
WIKIPÉDIA. **GeoGebra**. 2023. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>>. Acesso em: 01/01/2024.

WIKIPÉDIA, a. e. l. I. **LEI DO TERCEIRO EXCLUÍDO**. 2023. Disponível em: <<[https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Lei\\_do\\_terceiro\\_exclu%C3%ADdo&oldid=65094785](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Lei_do_terceiro_exclu%C3%ADdo&oldid=65094785)>>. Acesso em: 26/01/2024.

## APÊNDICE A – A ÁREA SOB A FAIXA DA HIPÉRBOLE E ROTAÇÕES

Em toda nossa exposição até aqui, temos considerado que o parâmetro  $\theta$  esteja sendo expresso como uma determinada área de um setor hiperbólico, como ilustrado na Figura 47, ou seja, da área sob a faixa da hipérbole, sem contudo haver determinado o seu valor.

**Figura 47 – Ângulo Hiperbólico**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Deste modo, como precisamos definir este valor, lançaremos mão de algumas ferramentas matemáticas que podem estar um pouco além do conhecimento de uma turma do primeiro ano do ensino médio, ao abordarmos as matrizes, mas será apresentada uma definição alternativa baseada nas propriedades das funções reais em estudo, que possibilitará o prosseguimento dos estudos, sem comprometer nossa abordagem, com a vantagem de agregar novas estratégias de cálculo capazes de formalizar os conceitos dentro das necessidades de rigor matemático necessário. Observe-se no entanto, que os conceitos básicos necessários para desenvolver esta proposta, utilizando-se das noções de cálculo de áreas, agregadas à construção de gráficos de funções, com valores irracionais, aproximados, bem como, em alguns casos, da utilização de Progressões Geométricas e Matrizes para as quais, evidentemente, em algum momento, será necessária alguma justificativa ou demonstração da validade da argumentação utilizada. Tendo isto em vista, o que propomos aqui deve ser visto como possibilidade, tanto de justificativa, como de motivação para a busca de oportunidades propícias a partir das quais possamos implementar de forma fecunda, através da utilização ou não das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação - TDICs<sup>1</sup> e do uso do computador, propostas de trabalho que contemplem abordagens mais ricas e significativas deste tema, de forma a integrar o conhecimento sobre a trigonometria circular ao da trigonometria hiperbólica, o que até aqui, temos visto ser extremamente salutar e desejável. Ressaltando entretanto, o papel singular e dinamizador que a tecnologia através do

<sup>1</sup> Definidas na BNCC no tópico: Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no contexto escolar: possibilidades. As TDICs têm sido incorporadas às práticas docentes como meio para promover aprendizagens mais significativas, com o objetivo de apoiar os professores na implementação de metodologias de ensino ativas, alinhando o processo de ensino-aprendizagem à realidade dos estudantes e despertando maior interesse e engajamento dos alunos em todas as etapas da Educação Básica BRASIL (2018).

uso do computador e de programas de geometria dinâmica, a exemplo do *GeoGebra* utilizado neste trabalho, podem vir a desempenhar neste processo.

Note que a função  $y = \frac{1}{x}$  representa uma hipérbole equilátera, e agora estaremos vendo como ela está relacionada com a hipérbole equilátera dada pela Equação (13).

Pensando nisso, apresento aqui uma inquietação que pode nos direcionar e ajudar a delimitar melhor o caminho que ser-nos-á necessário percorrer, nesta busca por uma justificativa/prova que nos permita agregar ao rigor matemático necessário, uma argumentação mais próxima do público alvo que é foco de nosso estudo que é a educação básica. A inquietação é a seguinte: O que acontecerá se rotacionarmos a hipérbole que encontramos na forma cartesiana na Equação (13), num ângulo de  $45^\circ$  no sentido horário? E, para desenvolver este questionamento de forma adequada estaremos utilizando a matriz de rotação encontrada em Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 171-174), que apresenta a rotação sugerida, a partir da forma cartesiana da hipérbole, encontrada na Equação (13), com eixo focal sob o eixo das abscissas para um “eixo oblíquo” com inclinação de  $45^\circ$ , em relação à horizontal, e no sentido “horário”. Neste ponto ressalto que Santos *et al.* (2015), Freitas *et al.* (2015), Santos (2022), Rodrigues (2014), Silva (2019a) e Vasconcelos *et al.* (2013) inserem esta ideia de rotação da hipérbole equilátera no sentido horário, a partir da hipérbole de equação  $xy = a$ , numa das formas  $xy = 1$  ou  $2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ , situada sobre a reta de equação  $y = x$ . Entretanto, nesta abordagem já admite-se que a função  $y = \frac{1}{x}$ , é uma hipérbole sem apresentar algo que a identifique com a hipérbole da Equação (13). Desta forma, com o objetivo de construir uma argumentação “a partir de onde nossos pés pisam” como diria *Leonardo Boff*<sup>2</sup>, utilizaremos uma rotação no sentido “anti-horário” num ângulo de  $45^\circ$ , o que é suficiente para reposicionar a hipérbole de equação  $x^2 - y^2 = 1$ , com eixo focal sobre o eixo  $Ox$ , e cuja equação parametrizada foi definida anteriormente, sob um eixo oblíquo em relação ao eixo original, e, cujos novos eixos repousam sobre as bissetrizes dos quadrantes ímpares e dos quadrantes pares do plano cartesiano ortogonal inicial, a exemplo do que encontramos em Habib (2013), Campolino (2014) e em Sousa e Almeida (2016).

Nossa intenção é gerar uma nova interpretação a partir do conhecimento já construído, uma vez que isto é perfeitamente realizável para o nível de ensino proposto, embora a utilização da matriz de rotação já nos situe no ambiente do segundo ou terceiros anos. Assim, para efetuar a rotação sugerida utilizaremos a seguinte matriz de rotação:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (72)$$

A esta matriz Delgado, Frensel e Crissaff (2017) chamam de “*matriz de passagem*” das coordenadas  $(x, y)$  para as coordenadas  $(u, v)$ .

<sup>2</sup> *Leonardo Boff*, pseudônimo de *Genézio Darci Boff*, é um teólogo, escritor, filósofo e professor universitário brasileiro. Simpatizante do socialismo, e expoente da teologia da libertação no Brasil é conhecido internacionalmente por sua defesa dos direitos dos pobres e excluídos. Atualmente é professor emérito de Ética, Filosofia da Religião e Ecologia na UERJ.

Como para as referidas turmas, as operações com matrizes já são conhecidas, então esta é uma abordagem plausível. Entretanto, as discussões sobre a origem da matriz utilizada aqui estão para além dos nossos objetivos e ficam para aprofundamento do leitor podendo ser encontradas boas referências nos autores citados acima.

Desta forma, notamos que, para  $\theta = 45^\circ$ , temos,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & \sin(45^\circ) \\ -\sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (73)$$

Agora fazendo  $c = 2$ , e  $a = b = \sqrt{2}$ , para simplificar os cálculos. E, considerando que os eixos  $u$  e  $v$ , representam os novos eixos da hipérbole rotacionada, e cujo eixo focal está sobre a reta  $y = x$ , enquanto o eixo imaginário figura sobre a reta  $y = -x$ , podemos dizer, que a equação reduzida da hipérbole obtida da Equação (11) sobre os eixos  $u$  e  $v$  é tal que,

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1 \quad (74)$$

Donde obtemos:

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y \\ v = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y \end{cases}$$

E substituindo estes valores na Equação (74), vem que

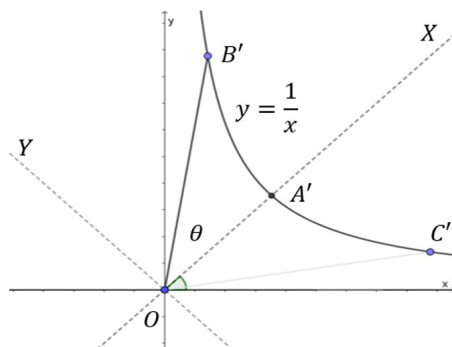
$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y\right)^2}{2} = 1 &\Rightarrow \frac{\left(\frac{x^2}{4} + xy + \frac{y^2}{4}\right)}{2} - \frac{\left(-\frac{x^2}{4} - xy + \frac{y^2}{4}\right)}{2} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{2xy}{2} = 1 \Rightarrow xy = 1 \end{aligned}$$

Donde obtemos,

$$y = \frac{1}{x} \quad (75)$$

A Equação (75), representa então a hipérbole equilátera de eixo focal sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, se quisermos manter o plano cartesiano ortogonal como referencial. Esta função apresenta algumas propriedades particulares interessantes e que conectam as hipérbolas de Equação (13) e a de Equação (75). Inicialmente, podemos obter uma a partir da outra através de uma rotação, tanto no sentido anti-horário, como a realizada aqui, quanto no sentido horário como podemos ver nos trabalhos dos autores citados no início de nossa discussão sobre a rotação da hipérbole. O procedimento aqui descrito de modo algébrico, pode ser verificado utilizando-se de um *software* de geometria dinâmica como o *GeoGebra*, o qual foi utilizado

**Figura 48 – Hipérbole rotacionada  $45^\circ$  no sentido anti-horário**



Fonte: Elaborado pelo autor.

para representar a hipérbole unitária, Figura 47, e sua rotação num ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ , no sentido anti-horário como podemos ver na Figura 48.

As informações e propriedades apresentadas até este ponto são cruciais, se desejamos explorar algumas das relações existentes entre as duas representações da hipérbole equilátera. E, de posse destas, é possível verificar que o eixo de simetria da primeira é eixo  $Ox$ , ou seja,  $y = 0$ , enquanto o da segunda é  $y = x$ , o qual divide a segunda hipérbole em duas partes iguais dada a semelhança das figuras antes e após a rotação. Então, fazendo  $\theta = A_{B\hat{O}C}$ , vem que a área do setor hiperbólico será igual à metade da área sob a curva desta hipérbole, o que caracteriza o parâmetro  $\theta$  como sendo igual à metade deste; ou seja,

$$A_{Sh} = A_{A\hat{O}B} = A_{A'\hat{O}B'} = \frac{\theta}{2},$$

donde cada ponto sob esta curva apresentará a seguinte característica

$$xy = \frac{1}{2},$$

ou ainda

$$y = \frac{1}{2x},$$

que pode ser reescrita como

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Neste ponto, pode ser extremamente salutar verificar que de acordo com Rodrigues (2014), a hipérbole  $xy = a$ , donde para  $a = 1$ , obtemos  $xy = 1$ , ou ainda,

$$y = \frac{1}{x},$$

que constituem as hipérboles de nossa base argumentativa e apresentam as seguintes propriedades após uma rotação:

- i. O segmento da tangente à hipérbole  $xy = a$ , limitado entre os eixos coordenados e a curva, divide-se pelo ponto de tangência em duas partes iguais;

ii. De acordo com Rodrigues (2014, p. 26), as coordenadas do ponto médio do segmento da tangente à hipérbole  $xy = a$ , são tais que

$$M = \left( \frac{2kx + 0}{2}, \frac{\frac{2y}{k} + 0}{2} \right) = \left( kx, \frac{y}{k} \right)$$

onde M pertence à hipérbole, pois

$$kx \cdot \frac{y}{k} = xy = a$$

donde, obtemos que se os pontos  $P = (x, y)$ ,  $Q_0 = (0, 2y)$  e  $R_0 = (2x, 0)$ , pertencem à hipérbole  $xy = a$ , então, após uma rotação hiperbólica, notamos que o novo triângulo hiperbólico formado terá área:

$$A_T = \frac{2x \cdot 2y}{2} = \frac{xy}{2} = \frac{2kx \cdot \frac{2y}{k}}{2} = 2xy = 1$$

que resulta em,

$$xy = \frac{1}{2} \tag{76}$$

E a partir da Equação (76), podemos escrever que

$$y = \frac{1}{2x},$$

o que vincula todas as formas da equação da hipérbole unitária com as hipérbolas rotacionadas, agregando-se a propriedade de que todo ponto sob a hipérbole rotacionada apresenta área igual a meio.

Entrementes, como buscamos uma justificativa que envolva uma noção de área que se aproxime mais daquela estudada na educação básica, lançaremos mão da abordagem encontrada em Freitas *et al.* (2015), na qual percebemos que esta justificativa, voltada para uma abordagem geométrica, pode ser melhor compreendida quando encontramos a área sob a faixa da hipérbole rotacionada, apresentada na Figura 23, para só depois retornarmos ao gráfico da hipérbole unitária.

E, Para isso, precisamos destacar que os pontos:  $D, F$  e  $H, E$ , foram construídos como coordenadas dos pontos  $A'$  e  $B'$ , ou seja,  $F = (0, y(A'))$ ,  $D = (x(A'), 0)$ , e assim sucessivamente, como vimos acima, brevemente <sup>3</sup>, enquanto o ponto  $G$  representa a interseção entre os segmentos  $\overline{FA'}$  e  $\overline{HB'}$ .

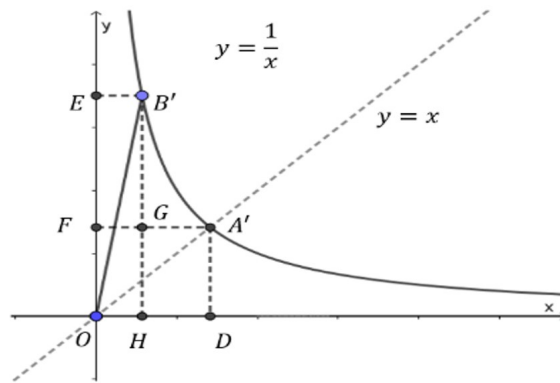
Assim, analisando a Figura 49, da hipérbole  $xy = 1$ , considere  $A'$  e  $B'$  dois pontos quaisquer no mesmo ramo da hipérbole. O ponto  $A'$  tem coordenadas  $x = \overline{OD}$  e  $y = \overline{OF}$  enquanto o ponto  $B'$  tem coordenadas  $x = \overline{OH}$  e  $y = \overline{OE}$ .

Deste modo, denotaremos a área dos retângulos  $OHB'E$  e  $ODA'F$  respectivamente, por:

<sup>3</sup> Para mais detalhes sobre as propriedades da hipérbole rotacionada deve-se consultar o excelente trabalho de Rodrigues (2014).



**Figura 49 – Ângulo sob a faixa da Hipérbole rotacionada**



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$A_{OHB'E} = \overline{OH} \cdot \overline{OE} = xy = 1$$

e

$$A_{ODA'F} = \overline{OD} \cdot \overline{OF} = xy = 1$$

logo,

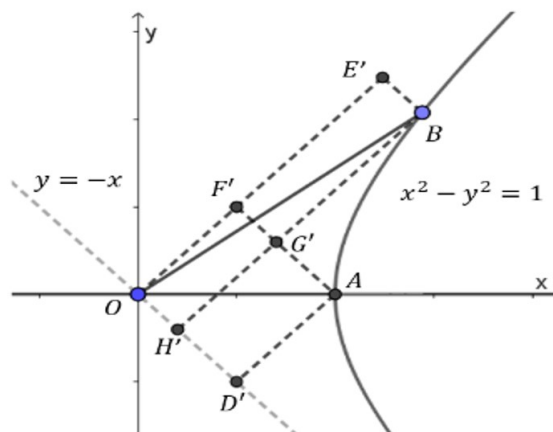
$$A_{OHB'E} = A_{ODA'F}$$

donde temos que

$$A_{FGB'E} = A_{HDA'G}$$

Assim, para calcular área do setor  $A'\hat{O}B'$ , precisaremos girar a Figura 49, num ângulo de  $\frac{\pi}{4}$  rad e retornar à hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  Figura 50, como segue.

**Figura 50 – Ângulo sob a faixa da Hipérbole equilátera**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para tanto, note que

$$A_{OHB'} = \frac{1}{2} \cdot A_{OHB'E} = \frac{1}{2} \cdot A_{ODA'F}$$

$$A_{ODA'B'} = A_{OHB'} + A_{HDA'B'} = A_{ODA'} + A_{HDA'B'}$$

Por outro lado,

$$A_{ODA'B'} = A_{ODA'} + A_{OA'B'}$$

Logo,

$$A_{OA'B'} = A_{HDA'B'}$$

e através de um raciocínio análogo, verificamos que

$$A_{OA'B'} = A_{EFA'B'} = A_{HDA'B'}$$

Donde podemos perceber que precisamos definir a área  $HDA'B'$ , o que pode ser mais prático ao trabalharmos com a hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$ . Entretanto, para compreender esta “aparente” alteração na fórmula da hipérbole reveja nossa discussão que resultou na Equação (76). Agora, com o intuito de voltar a aproximar a linguagem do nosso público podemos definir “utilizando o Teorema da Caracterização das Funções Logarítmicas que existe um número real positivo  $e$ , tal que  $f(x) = \log_e x$ , e desta forma, o número  $e$ , base dos logaritmos naturais é caracterizado pelo fato de seu logaritmo natural ser igual a 1, ou seja, a área da faixa da hipérbole  $H_1^e = 1$ ” como vemos em Lima (2013, pg. 173). Fato este que coloca o número  $e$  como solução da equação  $xy = 1$ , logo, devemos ter  $xy = e$ , e por extensão das propriedades da hipérbole rotacionada, temos que  $xy = \frac{e}{2}$ , donde vemos emergir algo do pensamento que pode ter levado *Lambert* a definir o  $\sinh(x)$  e o  $\cosh(x)$  em relação à função exponencial natural. Por conseguinte, como estamos trabalhando com áreas sob uma curva então, precisaremos lançar mão de uma estratégia para dar significado ao cálculo de uma área que estará abaixo do eixo das abscissas como podemos perceber nas Figuras 47 e 50.

Para tal, utilizaremos a mesma estratégia do referido autor, uma vez que normalmente, a área de uma figura não é um número negativo. E devido a isto estaremos utilizando “áreas orientadas” para representar com valores positivos uma área que esteja acima do eixo das abscissas, e com o sinal negativo quando esta estiver localizada abaixo deste. Convencionando que:

$$AREA H_a^b = area H_a^b > 0, \text{ se } a < b \quad (77)$$

$$AREA H_a^b = area H_a^b < 0, \text{ se } b < a \quad (78)$$

$$AREA H_a^b = - area H_b^a \quad (79)$$

$$AREA H_a^a = 0 \quad (80)$$

Note agora, que na Figura 47, fazendo  $\theta = A_{B\hat{O}C}$ , então, como o eixo  $Ox$  é eixo de simetria da hipérbole equilátera, vem que

$$A\hat{O}B = \frac{1}{2} \cdot B\hat{O}C,$$

donde

$$\theta = 2A\hat{O}B = 2A\hat{O}C,$$

ou seja,

$$A\hat{O}B = \frac{\theta}{2},$$

a exemplo do que aconteceu com o parâmetro  $\theta$  no círculo.

Outrossim, como a figura é simétrica em relação ao eixo  $Ox$ , podemos concluir que o produto

$$xy = \frac{1}{2}$$

nos eixos  $x$  e  $y$  na Figura 50 representa a área sobre o gráfico de

$$y = \frac{1}{2x},$$

compreendida entre  $x = OH'$  e  $x = OD'$ . Donde encontramos que

$$A_{BH'D'A} = \left| \int_{OD'}^{OH'} \frac{1}{2x} dx \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{OD'}^{OH'} \frac{1}{x} dx \right| = \frac{1}{2} \left| \ln OD' - \ln OH' \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{OD'}{OH'} \right|$$

Se  $B$  está à esquerda de  $A$ , então, pelo convencionado na Equação 77, temos que,

$$A_{BH'D'A} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{OD'}{OH'} \right)$$

Donde através da análise das Figuras 19 e 21 (b), respectivamente, verificamos que

$$\sinh(x) = \overline{BQ}$$

que

$$\cosh(x) = \overline{OQ}$$

e ainda que

$$\operatorname{tgh}(x) = \overline{AT}$$

E se  $B$  está à direita de  $A$  então pelo convencionado na Equação (79), obtemos,

$$A_{BH'D'A} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{OH'}{OD'} \right) \Rightarrow A_{BH'D'A} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{OD'}{OH'} \right)$$

donde conclui-se que

$$\sinh(-x) = \overline{B'Q} = \sinh \overline{CQ} = -\sinh \overline{BQ}$$

e que,

$$\cosh(-x) = \overline{OQ} = \cosh \overline{CQ} = -\cosh \overline{OQ}$$

e ainda que

$$\operatorname{tgh}(-x) = \overline{AT'} = -\overline{AT}$$

De modo análogo podemos encontrar  $A_{F'ABE'}$  integrando a função

$$x = \frac{1}{2y},$$

donde

$$A_{AF'E'B} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{OE'}{OF'} \right)$$

Observe que se  $A = B$ , então,  $A_{BH'D'A} = 0$  e se  $A \neq B$  então,  $A_{BH'D'A} > 0$ . E que quando  $B$  se afasta de  $A$  pela esquerda, o segmento  $OH'$  tende a zero e o  $\ln(OH')$  decresce indefinidamente. E devido a isso

$$A_{BH'D'A} = \frac{1}{2} \ln(OD' - OH')$$

, cresce indefinidamente.

Por outro lado, quando  $B$  se afasta de  $A$  pela direita, o segmento  $OH'$  cresce indefinidamente. Assim, como o tamanho  $\overline{OD'}$  está fixo,

$$A_{BH'D'A} = \frac{1}{2} \ln(OH' - OD')$$

cresce indefinidamente. Logo,

$$A_{OAB} = A_{BH'D'A}$$

varia de 0 a  $-\infty$ . Bem como,

$$A_{OAB} = -A_{BH'D'A}$$

caso  $B$  esteja abaixo do eixo  $Ox$ . O que nos permite concluir que um ângulo hiperbólico, assumirá valores entre  $-\infty$  e  $+\infty$ .

Deste modo, com esta abordagem, conseguimos, ao mesmo tempo, discutir fulcros axiomáticos importantes para o desenvolvimento do arcabouço teórico necessário ao desenvolvimento do nosso estudo, uma vez que na última relação que acabamos de analisar encontramos que o logaritmo natural  $\ln_e e = 1$ , representa a área sob a faixa da hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$ . Lembrando que, anteriormente mostramos que, a função  $f(x) = e^x$  apresenta inversa

$$g^{-1}(x) = (\log_e x)' = \frac{1}{x}.$$

E ainda que, a hipérbole  $xy = a$  pode ser reescrita como  $xy = 1 = e$ , donde obtemos que

$$xy = \frac{e}{2},$$

como demonstrado nas seções 2.3, e 2.4.1. Ademais, ao generalizar estes conceitos, considerando que a rotação da hipérbole de acordo com Santos (2022), é uma transformação que

preserva áreas e que resulta de repetidas interações do tipo  $(\theta_1, 2\theta_1, 3\theta_1, \dots)$ , onde  $\theta$  representa o ângulo hiperbólico em análise, para o qual constatamos a validade da propriedade  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ , de acordo com Lima (2013, p.158), o que caracteriza as funções exponenciais e transforma esta soma, em produtos da potência  $e^x$ , levando-nos de  $xy = \frac{e}{2}$ , para a forma geral

$$xy = \frac{e^x}{2},$$

o que nos revela que a função área, dessa hipérbole, pode ser expressa pela exponencial natural  $e^x$ .

Aplicando agora estes conceitos à hipérbole rotacionada, podemos ver claramente que as coordenadas  $(u, v)$  desta hipérbole, são tais que

$$u = \overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))$$

e

$$v = \overline{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \sinh(\theta)).$$

Por sua vez, como  $A = (1, 0)$ , no plano  $xOy$ , então, verifica-se que

$$\overline{OD'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e que

$$\overline{OF'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

logo, como

$$A_{BH'D'A} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{OD'}}{\overline{OH'}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))} \right) = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

e

$$A_{AF'E'B} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{OE'}}{\overline{OF'}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))$$

segue que como  $A_{A\hat{O}B} = \frac{\theta}{2}$  e  $A_{A\hat{O}B} = A_{BH'D'A} = A_{AF'E'B}$  vem que,

$$A_{BH'D'A} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

$$\Leftrightarrow -\theta = \ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

donde, aplicando a exponencial natural a ambos os membros da equação obtemos,

$$e^{-\theta} = \cosh(\theta) - \sinh(\theta) \tag{81}$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
 A_{AF'E'B} &= \frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)) \\
 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)) \\
 \Leftrightarrow \theta &= \ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)) \\
 \Leftrightarrow e^\theta &= \cosh(\theta) + \sinh(\theta) \tag{82}
 \end{aligned}$$

Assim, ao obtermos a média da soma e da diferença das Equações (81) e (82). E, aplicando a propriedade da funções reais descritas por Demana *et al.* (2013) obtemos,

$$\cosh(\theta) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

e

$$\sinh(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

O que fecha a questão sobre os motivos pelos quais as razões trigonométricas na hipérbole são expressas através de uma média entre a soma e a diferença das exponenciais naturais  $e^x$  e  $e^{-x}$ . E agora podemos seguir com nosso estudo de forma segura e fundamentada.



**Termo de Autorização para disponibilização e licenciamento de Dissertações e Teses e Monografias de especialização no Repositório Institucional da UFVJM**

<b>1 IDENTIFICAÇÃO</b>		
Autor: Antônio Alessandro Pastana de Souza		
E-mail: antonio.pastana@ufvjm.edu.br		Telefones: 73 9 9818-9761
Matrícula: 20211914005	CPF: 693.704.195-00	RG: 16543940 84
<b>2 TRABALHO</b>		
<input checked="" type="checkbox"/> Dissertação <input type="checkbox"/> Tese <input type="checkbox"/> Monografia de especialização		
Título: UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES HIPERBOLICAS E SUAS POSSIVEIS APLICAÇÕES NO ENSINO MEDIO		
Palavras-chave: Trigonometria circular, trigonometria hiperbólica, exponencial natural, logaritmo natural, <i>GeoGebra</i> , ensino médio		
Programa de pós-graduação: Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT – UFVJM		
Data da defesa: 06/03/2024	<input checked="" type="checkbox"/> Aberta	<input type="checkbox"/> Fechada <sup>1</sup>
Orientador: Anderson Luiz Pedrosa Porto	E-mail: ander.porto@ict.ufvjm.edu.br	
Coorientador(es): Não houve		
<b>3 INFORMAÇÕES DE ACESSO</b>		
Liberação para disponibilização? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <sup>2,3</sup> <input type="checkbox"/> Não <sup>4</sup>		
Trabalho confidencial <input type="checkbox"/> Sim <sup>4,5</sup> <input checked="" type="checkbox"/> Não		
<sup>1</sup> Deve ser acompanhado da Ata ou Declaração de sigilo da defesa.		
<sup>2</sup> Os metadados dos trabalhos ficarão sempre disponíveis.		
<sup>3</sup> Toda dissertação e tese produzida pela UFVJM deve ser divulgada conforme Portaria Capes nº 3 de 15 de fevereiro de 2006 e Resolução própria do RI/UFVJM.		
<sup>4</sup> Todo trabalho confidencial deve acompanhar justificativa, e data limite ou período de restrição.		
<sup>5</sup> Caso necessário o tempo data/período poderão ser prorrogados mediante avaliação do CITEC/UFVJM.		
<b>4 LICENÇA</b>		
Na qualidade de titular dos direitos de autor da publicação supracitada, de acordo com a Lei nº 9610/98, autorizo a Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri a disponibilizar gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, conforme permissões assinadas acima, do documento, em meio eletrônico, no Repositório Institucional da UFVJM, no formato especificado <sup>2</sup> , para fins de leitura, impressão e/ou download pela Internet, a título de divulgação da produção científica gerada pela Universidade, a partir desta data. Autorizo ao SisBi/UFVJM disponibilizar a obra, gratuitamente, de acordo com a licença pública <i>Creative Commons Licença 4.0 Unported</i> <sup>1</sup> por mim declarada sob as seguintes condições: não permite comercialização, não permite modificações.		

A obra continua protegida por Direito Autoral e/ou por outras leis aplicáveis. Qualquer uso da obra que não o autorizado sob esta licença ou pela legislação autoral é proibido.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do autor<sup>2</sup>

Teófilo Otoni – MG, 04/06/2024.  
Local                      Data

Data da entrega do documento no SisBi/UFVJM: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

Recebido por: \_\_\_\_\_

<sup>1</sup><https://creativecommons.org/choose/>

<sup>2</sup>Preferencialmente assinatura eletrônica

