Funções Quadráticas e suas Aplicações no Ensino Médio

Ramon de Abreu e Silva

Dedicado ao futuro herdeiro, antes mesmo que seja providenciado.

À minha esposa Adriana, pelo incentivo, pela cobrança, mas acima de tudo pela companheira maravilhosa que tem se mostrado estes anos todos;
Aos meus pais Antonio Carlos e Marluce, meu irmão Ruan, meus sogros, posso assim dizer, Ana Lúcia e Edilson, por existirem;
Ao meu orientador, Elon Lages Lima, que dispensa apresentações, lenda viva da Matemática, com quem tive a honra de trabalhar nestes meses e pôde dedicar parte de seu tempo a me guiar;
Aos meus velhos amigos de sempre, com destaque para Rodrigo e Venilson;
Aos novos, companheiros de luta de Mestrado, como Hélio, Rodrigo, Wagner, Armanda, Aílton, Flávio, Edney, Romulo, Sebastião;
A todos os professores e tutores do Profmat que nos guiaram até aqui, com destaque para Paulo Cezar, Fábio Henrique, Eduardo Wagner, Marcelo Viana, Vanessa, Gugu e Samuel;
A Leandro Cruz e Renato Cherullo, com a parte técnica do Latex: sem vocês nada teria ocorrido;
À professora Irene Ester Gonzalez Garay, pelo incentivo e comemoração finais.

Resumo

Esta dissertação, pensada inicialmente como um capítulo de outra bem maior, foi produzida com a intenção de fornecer a alunos, professores e também ao público em geral um maior entendimento acerca das funções quadráticas. Forneceremos a base para a resolução de exercícios envolvendo este tipo de função. Para o aluno, este trabalho pode ser visto como um manual; para o professor interessado em aplicar determinados exemplos em sala de aula, sugerimos a leitura deste volume juntamente com as obras referenciadas na bibliografia, a fim de provocar no aluno o questionamento natural do que caracteriza um determinado tipo de função; já para o público em geral, esperamos que seja uma leitura agradável e prazerosa.

palavras-chave: equação do segundo grau, funções quadráticas, aplicações no ensino médio, parábola.

Sumário

CAPíTULO 1

Um Problema Muito Antigo

Parte integrante da matemática na educação básica, as funções são assunto fundamental no ensino de matemática. A partir dela, o aluno estuda a relação entre duas ou mais grandezas, infere o que a variação de uma delas implica na variação da(s) outra(s) e cria modelos para exprimir este comportamento variacional.

De fato, conforme SEEDUC (2012), há a determinação de que o aluno desenvolva as seguintes habilidades e competências no que tange ao estudo de funções:

> - Compreender o conceito de função através da dependência entre variáveis.
> - Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade ou padrão.
> - Representar pares ordenados no plano cartesiano.
> - Construir gráficos de funções utilizando tabelas de pares ordenados.
> - Analisar gráficos de funções (crescimento, decrescimento, zeros, variação do sinal).

Além disso, o uso de funções se estende a praticamente todas as outras áreas do conhecimento humano, abrangendo, naturalmente, algumas daquelas com as quais os alunos do ensino médio têm contato, como Física, Química e Biologia.

Dentre os vários tipos de funções que são tratadas no ensino médio, este trabalho dará mais ênfase à função quadrática.

Contudo, não é interessante (nem mesmo recomendável), falar de funções quadráticas sem focar inicialmente no trinômio que as define.

Comumente identificado como o problema da soma e produto, este problema é bem antigo e, segundo Boyer (2003), “a solução de uma equação quadrática com três termos (...) tinha sido tratada eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos de problemas", que remontam ao segundo milênio a.C.

Ainda segundo Boyer (2003), até recentemente não se sabia resolver uma equação de 2º grau da forma $x^2 + px + q = 0,\ p, q > 0$, pois isso implicaria em ambas as raízes negativas. Assim sendo, só havia três tipos de equação do 2º grau, e todas elas “encontradas em textos do período babilônio antigo, de uns 4.000 anos atrás". São elas:

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 + q = px$$

Como dissemos acima, a resolução da equação de 2º grau $ax^2+bx+c=0,\ a \neq 0$ tem sua origem no problema que consiste em descobrir dois números[1] inteiros e positivos conhecendo-se sua soma s e seu produto p.

Ora, seja x um desses números. Consequentemente, como a soma é conhecida, o valor do outro número é $s-x$. Logo, temos:

$$p = x.(s-x) \Leftrightarrow p = xs - x^2$$

$$\therefore \boxed{\mathrm{x}^2 - sx + p = 0} \qquad (1)$$

Na equação acima o coeficiente de x^2 é 1, de x é $-s$ e o termo independente é p. Ao trabalharmos com uma equação de 2º grau qualquer, não é sempre verdade que o coeficiente de x^2 é sempre igual a 1. Ele pode assumir qualquer valor real, desde que não se anule, pois neste caso nossa equação do 2º grau resumir-se-ia numa equação do 1º grau.

Entretanto, ao garantir que estamos tratando de uma equação do 2º grau, podemos reescrevê-la, de forma que sua expressão seja idêntica à forma (1). Basta que, para isso, dividamos toda a equação pelo coeficiente de x^2, o que é possível pois estamos considerando que $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

E, comparando a expressão acima com (1), temos:

$$-s = \frac{b}{a} \Rightarrow s = -\frac{b}{a}$$

$$p = \frac{c}{a}.$$

Logo, o problema clássico de soma e produto continua a existir, só que agora devemos descobrir dois números x' e x'' tais que

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x' \ . \ x'' = \frac{c}{a}$$

A maioria dos exercícios de equação do 2º grau que são apresentados em sala de aula, principalmente nos ensinos fundamental e médio, possuem raízes inteiras, de certa forma para forçar o aluno a descobri-las sem o uso de fórmulas, apenas usando raciocínio. Logo, é extremamente benéfico ao aluno que seja estimulado a manipular a equação do 2º grau de forma a descobrir suas raízes. Vejamos alguns exemplos:

- Equação do 2º grau completa

  Dizemos que uma equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$ é completa se seus coeficientes $a,\ b,\ c \neq 0$.

  EXEMPLO 1.1. *Determine as raízes da equação* $x^2 - 9x + 14 = 0$.

[1] Na verdade, uma equação do 2º grau pode ter apenas uma raiz, de multiplicidade 2. Quando dizemos "descobrir dois números", queremos dizer "descobrir no máximo dois números", ou, ainda, "descobrir dois números não necessariamente distintos."

Analisando a função acima, devemos descobrir dois números x' e x'' tais que

$$x' + x'' = -(-9) = 9$$
$$x' \,.\, x'' = 14$$

Ou seja, devemos encontrar dois números que somados deem 9 e multiplicados deem 14. Como o produto p é positivo, ambas as raízes possuem o mesmo sinal. Sendo a soma positiva, concluímos que as possíveis raízes são também positivas.

Procederemos por tentativas, na esperança de as raízes serem inteiras. Não há uma regra para se fazer isso, mas uma forma de pensar pode ser a seguinte: vamos numerar pares de números naturais que multiplicados são iguais a 14:

$$1 \,.\, 14 = 14$$
$$2 \,.\, 7 = 14$$

Como estamos analisando os pares de números, as únicas combinações possíveis são as acima. Analisando uma a uma em relação à soma, temos:

$$1 + 14 = 15$$
$$2 + 7 = 9$$

E, com isso, descobrimos que as raízes da equação $x^2 - 9x + 14 = 0$ são $x' = 2$ e $x'' = 7$, pois são dois números que somados dão 9 e multiplicados dão 14.

Caso não tivesse tão fácil assim descobrir estas raízes, ou caso o leitor não tenha tanta facilidade com números, há outras formas (não tão imediatas mas mais completas) de se resolver a equação.

Exemplo 1.2. *Calcule as raízes da equação* $3x^2 - 36x + 96 = 0$.

Queremos descobrir um par de números x_1 e x_2[2] tais que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-36}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 12$$
$$x_1 . x_2 = \frac{96}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 . x_2 = 32$$

Se conseguirmos achar as raízes por soma e produto, ótimo; se não iremos proceder de outra forma, conforme veremos mais à frente. Sendo a soma e o produto positivos, as raízes, caso existam, são também positivas. Vamos agora listar os casos possíveis de pares de números naturais que multiplicados dão 32:

$$1 \,.\, 32 = 32$$
$$2 \,.\, 16 = 32$$
$$4 \,.\, 8 = 32$$

Listados os pares, vejamos qual deles apresenta a soma pedida:

$$1 + 32 = 33$$

[2]Tanto faz a denominação que se dá a essas raízes: se x' e x'', ou se x_1 e x_2, ou ainda α e β, ou qualquer outra. O importante é sabermos os valores de sua soma e do deu produto.

$$2 + 16 = 18$$
$$4 + 8 = 12$$

Com isso, concluímos que $x_1 = 4$ e $x_2 = 8$, pois são dois números que somados dão 12 e multiplicados dão 32.

EXEMPLO 1.3. *Determine as raízes da equação* $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Queremos descobrir dois números x_1 e x_2 tais que

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 \,.\, x_2 = -4$$

Neste caso, diferentemente dos outros, o produto é negativo, isto é, x_1 e x_2 não possuem o mesmo sinal. Listemos os pares de números naturais que multiplicados dão 4.

$$1 \,.\, 4 = 4$$
$$2 \,.\, 2 = 4$$

Após isso, sabemos que um deles tem sinal negativo. Como, porém, a soma é um número positivo, concluímos que dentre os dois números o maior, em módulo, é positivo e o menor, negativo. Logo, $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$.

Com efeito,

$$-1 + 4 = 3$$
$$-1 \,.\, 4 = -4.$$

EXEMPLO 1.4. *Sabendo que* α_1 *e* α_2 *são raízes de* $x^2 + 9x + 18 = 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$, *determine o valor de* $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -9$$
$$\alpha_1 \,.\, \alpha_2 = 18.$$

Como o produto é positivo, ambas as raízes possuem o mesmo sinal. Sendo a soma negativa, devemos ter, necessariamente, ambos os números negativos. Procedendo mais uma vez por tentativa, vamos listar os pares de números inteiros e negativos cujo produto é 18:

$$-1 \,.\, -18 = 18$$
$$-2 \,.\, -9 = 18$$
$$-3 \,.\, -6 = 18$$

Basta procurar, entre os pares acima, aquele cuja soma é igual a -9. Uma rápida análise nos mostra que as raízes são $\alpha_1 = -6$ e $\alpha_2 = -3$, já que $-3 + (-6) = -9$. Logo:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

EXEMPLO 1.5. *Calcule as raízes de* $x^2 + 7x - 30 = 0$.

Denotando essas raízes por x_1 e x_2, temos:

$$x_1 + x_2 = -7$$

$$x_1 \;.\; x_2 = -30$$

Como o produto é negativo, as raízes têm sinais opostos. Além disso, como a soma é negativa, a maior dentre elas, em módulo, é negativa; consequentemente a menor em módulo é positiva.

Vamos listar os pares de números inteiros cujo produto é -30, sempre pondo o sinal negativo no maior (em módulo):

$$1 \;.-30 = -30$$

$$2 \;.-15 = -30$$

$$3 \;.-10 = -30$$

$$5 \;.-6 = -30$$

Destes pares, o único cuja soma é -7 é $x_1 = -10$ e $x_2 = 3$.

Devemos prestar atenção ao fato de que o método de soma e produto é apenas um macete, e deve ser tratado como tal. Ao nos depararmos com uma equação de segundo grau qualquer, não custa nada tentar resolvê-la usando este método. Costuma ser bem mais rápido, o que poupa tempo caso se esteja fazendo alguma prova.

Contudo, nem todas as equações de 2º grau podem ser resolvidas com o método de soma e produto. Existem equações que possuem raízes fracionárias, irracionais e outras que nem raízes possuem.

Em algumas situações dos dois primeiros casos é até possível resolver usando o método anterior. Teríamos porém que desmembrar em vários casos, o que não é interessante, já que existe um método denominado *Completar Quadrados* que resolve qualquer equação de segundo grau, inclusive as que fizemos usando soma e produto.

Como dissemos, nossa intenção é trabalhar este texto em escolas públicas que não são ilhas de ensino de qualidade. Assim, fizemos exemplos até agora de equações de segundo grau cujas respostas são apenas números inteiros.

É possível mostrar, mas foge da proposta deste trabalho, que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, apesar de infinito, tem cardinalidade menor do que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais o que implica que, dentre todas as possíveis equações de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a,\ b,\ c\ \in\ \mathbb{R}$, $a\ \neq\ 0$, é muito mais provável que suas raízes, caso existam, não sejam inteiras.

Explicaremos, a partir de agora, um passo a passo do que fazer em qualquer equação de segundo grau e, na secção 2.2, chegaremos a uma fórmula bem especial.

Exemplo 1.6. *Determine as raízes da equação* $9x^2 - 9x + 2 = 0$.

Primeiramente devemos dividir toda a equação pelo coeficiente a:

$$9x^2 - 9x + 2 = 0 \;\div 9 \;\Rightarrow\; x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$$

Passando $\dfrac{c}{a}$ para o outro lado, nosso objetivo é fazer com que apareça, no primeiro membro, um binômio elevado ao quadrado, ou seja, $\left(x+y\right)^2$. Para tanto, colocaremos $y = \dfrac{b}{2a}$ e somaremos no segundo membro o valor de $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2 - x = -\frac{2}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{2}{9} + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Portanto:

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

Logo, chegamos às duas raízes

$$x_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$x_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Faremos novamente o Exemplo 1.1 para que o leitor perceba que os valores de x que encontraremos serão exatamente os mesmos:

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x = -14 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = -14 + \frac{81}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{-56+81}{4} = \frac{25}{4}$$

Assim:

$$x - \frac{9}{2} = \pm\frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Donde tomamos dois valores x' e x'', a saber:

$$x' = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2;$$
$$x'' = \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Exemplo 1.7. *Calcule as raízes da equação* $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Procedendo como acima, temos:

$$x^2 - 4x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = -1 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 3$$

Logo,

$$(x-2) = \pm\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} + 2$$

E as duas raízes são

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{3}$$

Exemplo 1.8. *Determine as raízes de* $x^2 + 2x + 6 = 0$.

$$x^2 + 2x = -6 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = -6 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = -5$$

Esta última expressão nos diz algo que merece ser discutido. Ela afirma que há um termo que elevado ao quadrado é igual a um número negativo. Tal fato no campo dos números reais é impossível, e tal equação não possui raízes em $\mathbb{R}$.

No caso de equações do 2º grau incompletas, apesar de podermos continuar a utilizar o método que usamos acima, é recomendável uma abordagem mais direta. Dizemos que uma equação do 2º grau é incompleta quando pelo menos um de seus coeficientes $b,\ c = 0$.

- Equação do 2º grau incompleta, com $b = 0$ e $c = 0$

Neste caso mais trivial a única solução é zero.

Exemplo 1.9. *Calcule as raízes de* $\frac{1}{3}x^2 = 0$.

Resolvendo, vemos imediatamente que

$$\frac{1}{3}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

- Equação do 2º grau incompleta, com $b = 0$ e $c \neq 0$

Nesta situação podemos obter explicitamente os valores das duas raízes.

Exemplo 1.10. *Descubra as raízes de* $x^2 - 32 = 0$.

Desenvolvendo a equação acima isolando o termo x^2, temos:

$$x^2 - 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{32} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4\sqrt{2}$$

Logo, $x_1 = -4\sqrt{2}$ e $x_2 = 4\sqrt{2}$.

Exemplo 1.11. *Calcule as raízes da equação* $x^2 + 10 = 0$.

Resolvendo, temos:

$$x^2 + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -10 \quad \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-10}.$$

Mas o número $\sqrt{-10} \notin \mathbb{R}$. Logo, a equação acima não possui raízes reais, seu conjunto solução seria $S = \emptyset$.

Assim, concluímos que no caso da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $b = 0$ e $c \neq 0$ só existem raízes reais se $c < 0$.

- Equação do 2º grau incompleta com $c = 0$ e $b \neq 0$.

  Neste caso usamos o artifício, conhecido desde os tempos do ensino fundamental, conhecido como “pôr em evidência", que consiste basicamente em colocar o fator comum a dois termos explícito na equação.

  EXEMPLO 1.12. *Determine as raízes da equação* $3x^2 + 9x = 0$.

  Observando a expressão acima vemos que o fator $3x$ aparece nas duas parcelas da soma no primeiro termo. Logo, devemos colocá-lo em evidência:

$$3x^2 + 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x.(x+3) = 0$$

  Assim, temos um produto de números reais sendo igual a zero. Para que isto ocorra é necessário que pelo menos um dos números seja zero. Como, obviamente, $3 \neq 0$, temos $x = 0$ ou

$$x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3.$$

  Logo, as raízes da equação são $x_1 = -3$ e $x_2 = 0$.

Nos exemplos anteriores - nos quais trabalhamos com equações de 2º grau incompletas - poderíamos ter aplicado o método da soma e produto da mesma forma como fazemos quando a equação possui todos os termos diferentes de zero.

De fato, voltando ao Exemplo 1.10, temos:

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 \; . \; x_2 = -32$$

Analisando acima, vemos que o produto das raízes é negativo. Consequentemente, têm sinais opostos. Contudo, sua soma é nula, o que implica em ambas serem iguais em módulo. De imediato, para que isso ocorra devemos ter $x_1 = -\sqrt{32} \;\; \Rightarrow x_1 = -4\sqrt{2}$ e $x_2 = \sqrt{32} \;\; \Rightarrow \;\; x_2 = 4\sqrt{2}$.

Retornando agora ao Exemplo 1.12,

$$x_1 + x_2 = -\frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -3$$

$$x_1 \; . \; x_2 = 0.$$

Como o produto se anula, pelo menos uma das raízes é zero. Já que a soma é igual a -3, a outra raiz tem, obrigatoriamente, este valor. Logo, $x_1 = -3$ e $x_2 = 0$.

O fato de uma equação do 2º grau não ter raízes reais não significa que não tenha solução em qualquer conjunto. Ao estudarmos o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, veremos que toda equação de grau n tem n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si. Porém, a menos que seja explicitado em algum exemplo ou exercício, trabalharemos apenas com o conjunto dos números reais.

CAPíTULO 2

Função Quadrática

Definição 2.1. *Definimos uma função quadrática como*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0 \end{array}$$

ou seja, uma função real, de variável real, definida por um trinômio do 2º grau. Obviamente, para garantir que o trinômio seja de fato do 2º grau, faz-se necessária a ressalva de que $a \neq 0$.

Definição 2.2. *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dizemos que um número α é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ se $f(\alpha) = 0$. Como a função se anula em $x = \alpha$, dizemos também que α é um dos zeros da função $f(x)$.*

Proposição 2.1. *Seja α uma raiz da equação $x^2 - sx + p = 0$, então $\beta = s - \alpha$ também é raiz desta equação.*

Demonstração. De fato, como α é raiz da equação, temos

$$\alpha^2 - s\alpha + p = 0$$

Substituindo $\beta = s - \alpha$ na equação, temos:

$(s-\alpha)^2 - s(s-\alpha) + p = 0 \Leftrightarrow s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p = 0 \ \Leftrightarrow \therefore \ \alpha^2 - s\alpha + p = 0$, *c.q.d.*

■

Existem duas formas interessantes de se representar uma função quadrática. Uma delas é a

2.1. Forma Fatorada

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponhamos que α seja raiz desta função. Logo:

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Logo, podemos escrever $f(x) = f(x) - f(\alpha)$. Então, temos:

$$f(x) - f(\alpha) = a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) + c - c.$$

Colocando a e $(x - \alpha)$ em evidência, vem:

$$f(x) = a(x - \alpha)\left(x + \alpha + \frac{b}{a}\right)$$

. Denotando $-\beta = \alpha + \dfrac{b}{a}$, temos:

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)}$$

A expressão acima é conhecida como a *forma fatorada da função quadrática.* A maior vantagem de se escrever uma função quadrática na sua forma fatorada é determinar, visualmente, os zeros da função. De fato, analisando a expressão de $f(x)$:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

vemos que a função só se anula quando pelo menos um de seus termos é igual a zero. Como supomos desde o início que $f(x)$ é quadrática, sabemos que necessariamente $a \neq 0$. Logo, algum dos outros dois termos deve ser igual a zero, isto é

$$x - \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha,$$
$$x - \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \beta$$

Além disso, podemos inferir a variação do sinal de $f(x)$. De fato, considerando de início que $a > 0$ e supondo, sem perda de generalidade, que $\alpha < \beta$, temos $f(x) > 0$ se um dos seguintes casos acontecer:

$$x > \beta \ \ ou \ \ x < \alpha$$

Se, ao contrário, $a < 0$, para que $f(x) > 0$ é necessário apenas que

$$\alpha < x < \beta$$

Para ilustrar o que dissemos acima, vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 2.1. *Estude o sinal da função* $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$.

Devemos, primeiramente, descobrir as raízes de $2x^2 - 10x + 12 = 0$.
Sejam α e β estas raízes. Temos:

$$\alpha + \beta = -\frac{-10}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 5$$
$$\alpha \ . \ \beta = \frac{12}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \ . \ \beta = 6$$

Ou seja, devemos descobrir dois números que somados dão 5 e multiplicados dão 6. Como a soma e o produto são positivos, ambas as raízes (se existirem) também são positivas. Listando os pares de números naturais cujo produto vale 6, temos:

$$1 \ . \ 6 = 6$$
$$2 \ . \ 3 = 6$$

Logo, dos pares de números acima, o único cuja soma é 5 é o segundo: $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

De posse das raízes da função, podemos reescrevê-la na sua forma fatorada:

$$f(x) = 2(x - 2)(x - 3)$$

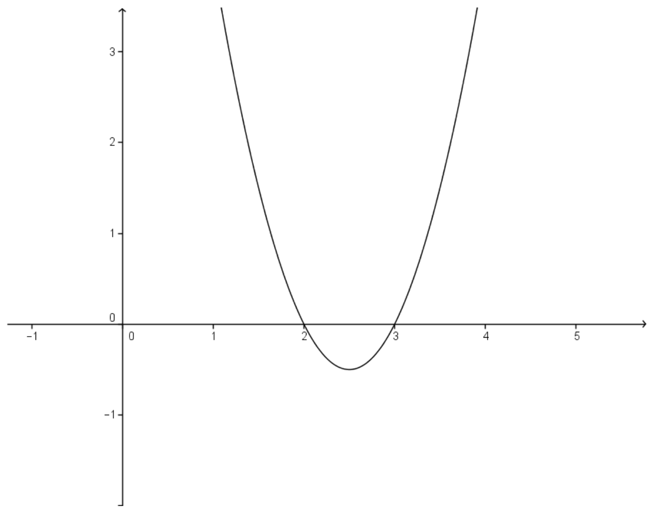


FIGURA 1. Variação do sinal de $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

Logo, vemos que

$$f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < x < 3;$$
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \;\; ou \;\; x = 3;$$
$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2 \;\; ou \;\; x > 3.$$

EXEMPLO 2.2. *Analise a variação do sinal da função* $f(x) = x^2 + 10x + 21$.

Primeiro precisamos descobrir os zeros da função, ou seja, descobrir se existem x_1 e x_2 tais que $x^2 + 10x + 21 = 0$. Usando soma e produto, temos:

$$x_1 + x_2 = -10$$
$$x_1 \;.\; x_2 = 21$$

.

Sendo o produto positivo, as raízes, caso existam, possuem o mesmo sinal. Como sua soma é negativa, devem, pois, ser negativas, já que dois números positivos somados jamais resultarão num número negativo.

Listaremos os pares de números naturais que multiplicados são iguais a 21. Caso não encontremos, iremos proceder conforme o Exemplo 1.7.

$$-1 \;.\; -21 = 21$$
$$-3 \;.\; -7 = 21$$

E, destes, há apenas um cuja soma é -10. Então $x_1 = -7$ e $x_2 = -3$.

Reescrevendo $f(x)$:

$$f(x) = (x + 7)(x + 3)$$

Variação do sinal de $f(x)$:

$$f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad -7 < x < -3;$$
$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -7 \;\; ou \;\; x = -3;$$
$$f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -7 \;\; ou \;\; x > -3.$$

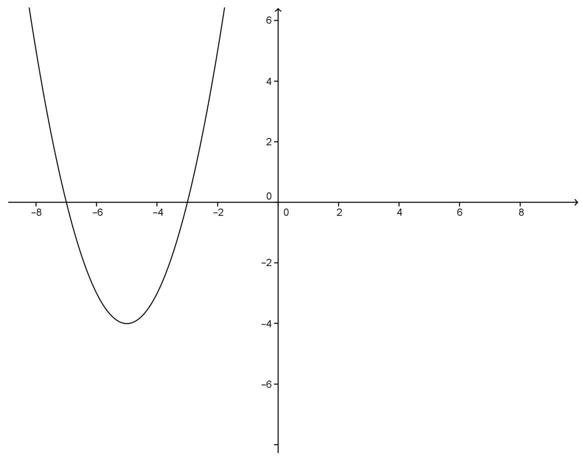


FIGURA 2. Variação do sinal de $f(x) = x^2 + 10x + 21$

EXEMPLO 2.3. *Seja* $f(x) = -2x^2 + 10x$. *Determine os valores de* x *tais que* $f(x) < 0$.

Colocando o fator comum em evidência:

$$-2x^2 + 10x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x.(x-5) = 0$$

Como o produto é zero, devemos ter pelo menos um dos fatores igual a zero, ou seja: $\alpha = 0$ ou $\beta - 5 = 0 \ \Leftrightarrow \beta = 5$. Então:

$$f(x) = -2(x)(x-5)$$

Consequentemente:

$$f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 \ \ ou \ \ x > 5;$$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \ ou \ \ x = 5;$$

$$f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 5.$$

Como queremos $f(x) < 0$, nosso conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x < 0 \ \ ou \ \ x > 5\}$.

EXEMPLO 2.4. *Estude o sinal da função* $f(x) = -2x^2 + 8 = 0$.

O primeiro passo é descobrir os zeros da função. Como a equação de 2º grau associada à função tem o termo $b = 0$, podemos resolvê-la diretamente, isolando o termo x^2:

$$-2x^2 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 = -8 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-8}{-2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$

Isto é, $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

A forma fatorada de $f(x)$ é, pois:

$$f(x) = -2(x+2)(x-2)$$

Podemos resumir ainda mais as informações acima dizendo simplesmente o seguinte: a função quadrática $f(x)$, com raízes α e β ($\alpha < \beta$), cuja expressão fatorada é, pois

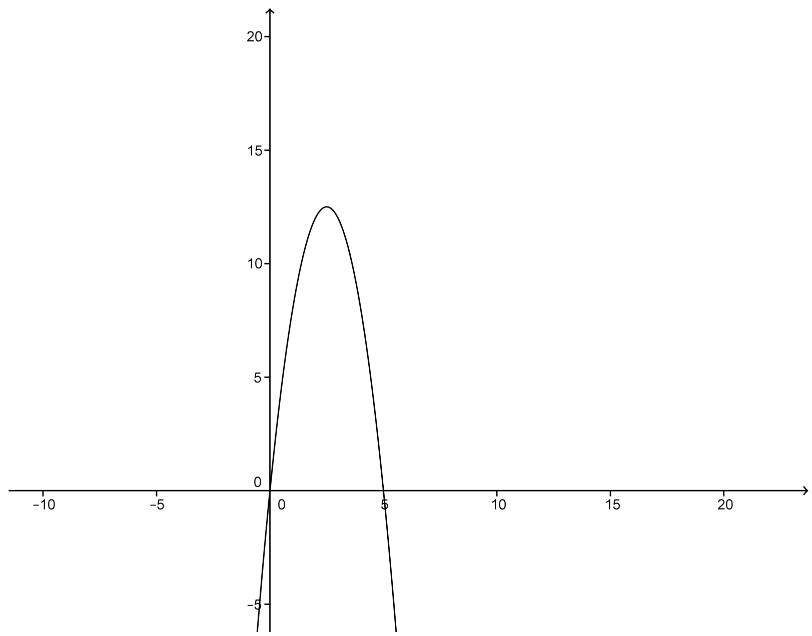


FIGURA 3. Variação do sinal de $f(x) = -2x^2 + 10x$

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

possui sinal oposto ao de a se $x \in]\alpha, \beta[$ e mesmo sinal de a caso contrário, ou seja, se $x \notin]\alpha, \beta[$.

É claro que nem sempre é fácil descobrir as raízes da equação de segundo grau utilizando soma e produto. Realmente, é difícil perceber, por exemplo, que as raízes de $6x^2 - 5x + 2 = 0$ sejam $x' = \dfrac{1}{2}$ e $x'' = \dfrac{2}{3}$.

Contudo, não custa tentar. Até porque, como já dissemos, a maioria dos exercícios trabalhados nos ensinos fundamental e médio possuem raízes inteiras, o que faz com que o processo de deduzir raízes pelo método de soma e produto perfeitamente possível.

Outro exemplo de equação do 2º grau cujas raízes não são fáceis de se encontrar pelo método de soma e produto são aquelas em que estas raízes são números irracionais. Tentar encontrar, por exemplo, as raízes de $x^2 - x - 1 = 0$ com este método será bastante trabalhoso.

Não conseguindo, veremos a seguir como calcular explicitamente os valores das raízes x_1 e x_2 de uma equação de segundo grau a partir de seus coeficientes a, b e c.

2.2. Forma Canônica

Esta é uma outra maneira de se expressar uma função quadrática, e baseia-se na técnica conhecida como "completar quadrados". Tal técnica tem por fim criar um quadrado perfeito, fazendo os devidos ajustes na expressão da função. Vejamos um exemplo:

EXEMPLO 2.5. *Seja a função* $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

Vamos comparar os dois primeiros termos dessa função com a expressão - conhecida desde o 8º ano do ensino fundamental - abaixo:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

Assim,

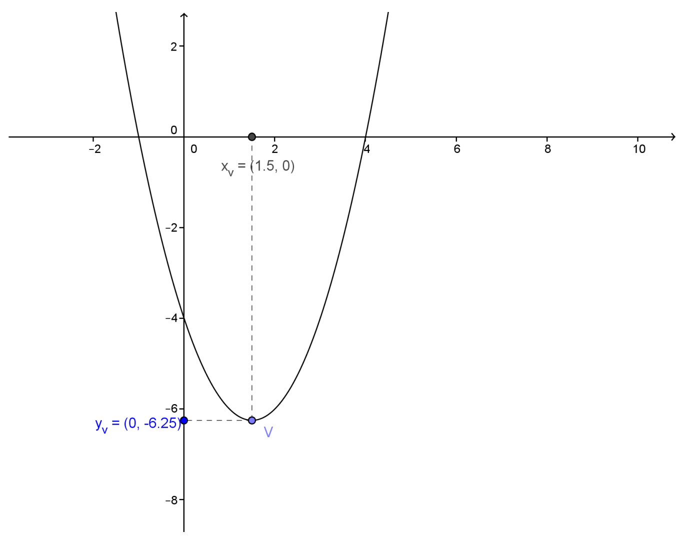
$$2ax = -3x \Rightarrow a = -\frac{3}{2}.$$

Somando e subtraindo agora o quadrado de $-\frac{3}{2}$, temos:

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4 \Rightarrow f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{4} + 4\right)$$

$$\therefore \quad f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4},$$

que é a forma canônica de $f(x)$.



vertice.png

FIGURA 4. Coordenadas do vértice de $f(x) = x^2 - 3x - 4$

Generalizando, seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como $a \neq 0$, podemos colocá-lo em evidência:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \quad = \quad a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Assim, basta que completemos o quadrado:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Chamando $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, chegamos à relação

$$\boxed{f(x) = a\big(x - m\big)^2 + k}$$

A expressão acima é chamada *forma canônica de* $f(x)$. Para o aluno, pode parecer complicado e até mesmo inútil num primeiro momento representar uma função quadrática na sua forma canônica. Porém, com uma observação mais detalhada da mesma, vemos que ela nos fornece o valor mínimo (no caso de $a > 0$) ou máximo (no caso de $a < 0$) de $f(x)$ e o valor de x para o qual um desses dois casos ocorre.

De fato, supondo, sem perda de generalidade, $a > 0$, como o termo entre parênteses está elevado ao quadrado, ele será mínimo quando o binômio for igual a zero, ou seja:

$$x - m = 0 \Leftrightarrow x = m = -\frac{b}{2a}.$$

Consequentemente, o valor mínimo da função, que aparece explicitado na expressão canônica de $f(x)$, é $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

A forma canônica de $f(x)$ nos diz mais um fato que não é nem um pouco intuitivo: todas as parábolas são semelhantes.

De fato, como todas têm a forma acima, a partir da mais simples dela, $f(x) = x^2$, é possível fazer as seguintes considerações:

• sendo $m \in \mathbb{R}^*$, o gráfico de $f(x)$ translada-se para a direita, caso $m > 0$ ou para a esquerda, caso contrário;

• sendo $k \in \mathbb{R}^*$, o gráfico de $f(x)$ translada-se para cima, caso $k > 0$ ou para baixo, caso contrário;

• o coeficiente a traz a ideia de *zoom*: quanto maior o valor de a mais "afastado"parecemos ver a parábola, ou mais "próximo"caso contrário. Ainda, se $a < 0$, isso apenas nos diz que a parábola rotacionou em torno do eixo x.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $a > 0$. O valor de x que faz com que $f(x)$ seja mínimo será denotado, por enquanto, por $x_{\min}$. Já $f(x_{\min}) = f_{\min}(x)$.

Se, ao contrário, $f(x) = ax^2 + bx + c$ é tal que $a < 0$, o valor que faz com que $f(x)$ seja máximo será denotado, por enquanto, por $x_{\max}$; já $f(x_{\max}) = f_{\max}(x)$.

Voltando ao Exemplo 2.5, temos a seguinte expressão de $f(x)$:

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Claramente, como $0 < a = 1$, vemos que o menor valor assumido pela função é $f(x) = -\dfrac{25}{4}$, o que ocorre para $x = \dfrac{3}{2}$

Além disso a forma canônica da função quadrática nos ensina como calcular suas raízes a partir dos valores de seus coeficientes a, b e c.

De fato, igualando $f(x)$ a zero, temos:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) = 0$$

Isolando o termo com x, temos:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} \quad \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Portanto:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Temos, finalmente,

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

que é a tão conhecida fórmula geral de resolução de equação do 2º grau.

Observação 2.1. *Como nos alerta Wagner (2010), a fórmula acima não foi desenvolvida pelo matemático indiano Bhaskara, que, conforme Boyer (2003), foi "o mais importante matemático do séc. XII". Porém, tal método de resolução, segundo dissemos no início desta obra, já era conhecido pelos babilônios há quase dois milênios antes de Cristo. Ainda, Wagner (2010) diz que as "fórmulas (matemáticas) só apareceram no séc XVII", ou seja, cinco séculos depois.*

Já em Hefez (2012), nos é esclarecido que tal expressão "leva o nome de fórmula de Bhaskara devido ao fato de ter sido publicada em um livro escrito por esse outro famoso matemático hindu do Século 12".

Na Fórmula 2.2, o termo dentro do radicando recebe uma denominação especial. Representado pela letra grega Δ, tal termo chama-se *discriminante*:

$$\Delta=b^2-4ac$$

Este nome naturalmente não é dado à toa. Dependendo da natureza do discriminante, podemos concluir se uma equação de 2º grau possui ou não raízes reais. E, possuindo, podemos saber se são duas raízes distintas ou não.

De fato, há três casos possíveis:

- $\Delta<0$

  Neste caso, como mostramos no Exemplo 1.11, a equação não possui raízes reais. Sendo $f(x)=x^2+10$, temos:

  $$x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4.1.10}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pm\sqrt{-40}}{2}$$

  Logo, $\nexists\, x \mid f(x)=0$.

- $\Delta=0$

  Quando o discriminante se anula temos apenas uma raiz da equação (ou duas raízes iguais), a saber:

  $$\Delta=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} \quad \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}$$

- $\Delta > 0$

Enfim, temos o caso em que, sendo Δ positivo temos duas raízes reais distintas:

$$\Delta > 0 \quad \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Logo:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Como um resumo do que dissemos até agora, resolveremos três exercícios, fazendo uma análise da variação de sinal de $f(x)$ e seu ponto extremo.

EXEMPLO 2.6. *Analise o comportamento de* $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

Vamos manipular $f(x)$, explicitando suas formas fatorada e canônica. Primeiramente, vamos descobrir os zeros da função:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= -8 \end{cases}$$

Inicialmente podemos determinar o valor do discriminante, para sabermos se $f(x)$ possui e raízes e, possuindo, se são distintas:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-2)^2 - 4.1.(-8) = 4 + 32 \quad \therefore \quad \Delta = 36$$

Com a informação de que $\Delta > 0$, sabemos que existem dois pontos nos quais a função se anula.

Chamando estes pontos de α_1 e α_2, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2; \qquad \alpha_1 \ . \ \alpha_2 = -8$$

Como o produto das raízes é negativo, elas têm sinais opostos. No entanto, como a soma é positiva, a maior das raízes, em módulo, é positiva. Vamos aos casos:

$$-1 \ . \ 8 = -8$$
$$-2 \ . \ 4 = -8$$

Logo, devemos ter $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = 4$, pois $-2 + 4 = 2$ e $-2 \ . \ 4 = -8$

Assim, $f(x) = (x + 2)(x - 4)$ é a forma fatorada de $f(x)$.

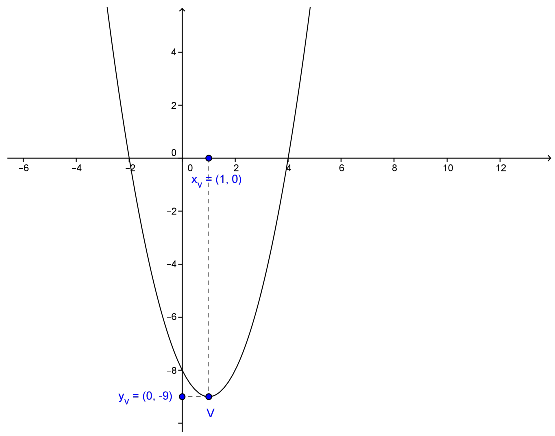
Vamos agora manipular a expressão de $f(x)$ de forma a encontrar sua forma canônica:

$$f(x) = x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2.1.x + 1^2 - 1^2 - 8 = (x - 1)^2 - 9$$

Assim, como a primeira parcela é sempre positiva ou zero, será mínima justamente neste último caso, ou seja, quando $x - 1 = 0 \quad \therefore \quad x = 1$. E, quando isso acontece, temos $f(1) = (1 - 1)^2 - 9 = -9$.

Concluindo, o gráfico de $f(x)$ tem as seguintes características:

$$\begin{array}{lll} f(x) < 0 & \Rightarrow & -2 < x < 4 \\ f(x) = 0 & \Rightarrow & x = -2 \ \text{ ou } \ x = 4 \\ f(x) > 0 & \Rightarrow & x < -2 \ \text{ ou } \ x > 4 \\ x_{\min} = 1 & ; & f_{\min}(x) = -9. \end{array}$$



vertice.png

FIGURA 5. Coordenadas do vértice de $f(x) = x^2 - 2x - 8$

EXEMPLO 2.7. *Analise o comportamento da função* $f(x) = -4x^2 - 8$.

Vamos determinar se $f(x)$ possui raízes reais:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x^2 - 8 = 0 \begin{cases} a &= -4 \\ b &= 0 \\ c &= -8 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 0^2 - 4.(-4)(-8) \quad \therefore \quad \Delta = -128$$

Sendo $\Delta < 0$, a função $f(x)$ não possui zeros. Como $a < 0$, $f(x)$ é sempre negativa. Já como $b = 0$, sua forma canônica será a própria expressão de $f(x)$, ou seja, $f_{\max} = -8$, o que acontece para $-4x^2 = 0 \quad \therefore$ $x_{\max} = 0$. Resumindo:

$$f(x) < 0 \quad \forall\ x \quad \in \mathbb{R}$$
$$x_{\max} = 0 \quad ; \quad f_{\max}(x) = -8$$

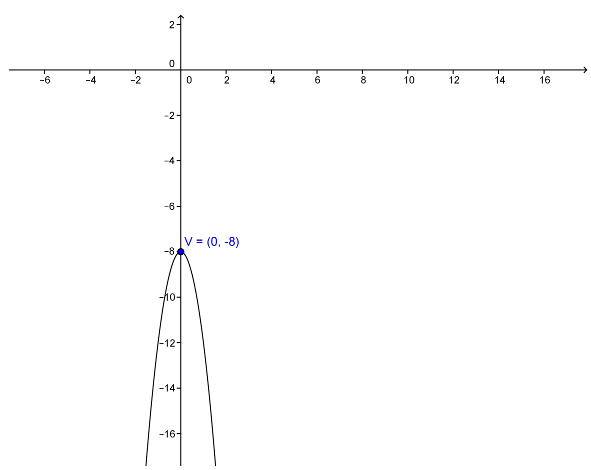


FIGURA 6. Coordenadas do vértice de $f(x) = -4x^2 - 8$

EXEMPLO 2.8. *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento e as coordenadas do ponto de máximo da função quadrática* $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

Vamos tentar, utilizando o artifício de soma e produto, determinar as raízes de $f(x)$. Sejam α e β estas raízes. Temos:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{-1} = 6$$

$$\alpha \, . \, \beta = \frac{c}{a} = \frac{-9}{-1} = 9$$

Como a soma e o produto são positivos, as raízes são ambas positivas. Vamos listar os pares de números inteiros cujos produtos dão 9.:

$$1 \, . \, 9 = 9$$

$$3 \, . \, 3 = 9$$

Vemos, dos pares acima, que o único que possui soma igual a 6 é o segundo, ou seja, $\alpha = 3 = \beta$.

Neste caso, temos apenas uma raiz real, ou, da mesma forma, duas iguais. Isso acontece quando Δ se anula. De fato, temos:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-6)^2 - 4.(-1).(-9) = 36 - 36 = 0$$

.

A forma fatorada de $f(x)$ fica:

$$f(x) = -(x-3)^2,$$

que também é sua forma canônica.

De posse dessas informações, concluímos que:

$$\begin{array}{lcl} f(x) < 0 & \Rightarrow & \forall \;\; x \neq 3 \\ f(x) = 0 & \Rightarrow & x = 3 \\ x_{\max} = 3 & ; & f_{\max}(x) = 0 \end{array}$$

vertice.png

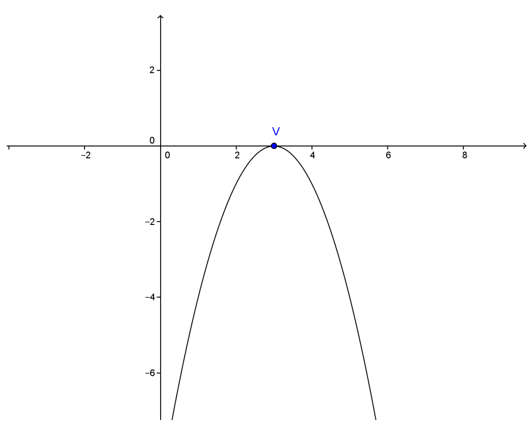


FIGURA 7. Coordenadas do vértice de $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

2.3. Caracterização das Funções Quadráticas

Diferentemente do que acontece nas funções afim, exponencial e logarítmica, detalhadas em Azevedo (2013), Reis (2013) e Mussel (2013), respectivamente, a caracterização de funções quadráticas não é de tão fácil compreensão.

Apenas relembrando, uma Progressão Aritmética de primeira ordem, ou simplesmente uma Progressão Aritmética ou apenas P.A. é uma sequência de números na qual a diferença entre dois termos consecutivos é constante.

EXEMPLO 2.9. *A sequência* $(-4, -7, -10, -13, ...)$ *é uma P.A, pois a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante:*

$$-13 - (-10) = -3;$$
$$-10 - (-7) = -3;$$
$$-7 - (-4) = -3,$$

e assim seria para quaisquer dois termos subsequentes. O número -3 *acima é conhecido como a razão* r *da P.A.*

Uma Progressão Aritmética tem esse nome porque dado três termos consecutivos, o central é a média aritmética[1] dos outros dois.

De um modo geral, podemos caracterizar uma função afim como a que transforma uma P.A. em outra P.A., a exponencial transforma uma P.A. em uma P.G. e a logarítmica o contrário, ou seja, uma P.G. em uma P.A.

Já uma Progressão Geométrica - P.G. - é uma sequência de números na qual o quociente entre dois termos consecutivos é sempre o mesmo. Seja o

EXEMPLO 2.10. *A sequência* $\left(12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ...\right)$ *é uma P.G., pois o quociente entre dois termos consecutivos quaisquer é sempre o mesmo:*

$$6 \div 12 = \frac{1}{2}$$
$$3 \div 6 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{2} \div 3 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Ao quociente acima calculado damos o nome de razão q *da P.G.*

Analogamente, uma Progressão Geométrica é assim chamada porque dado três termos consecutivos, o central é a média geométrica[2] dos outros dois.

Já a função quadrática é definida como a que transforma uma P.A. de primeira ordem em uma P.A. de segunda ordem não-trivial. Contudo,

[1] Definimos a média aritmética A entre $x_1, x_2, ..., x_n$ como $A = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

[2] Definimos a média geométrica G entre $x_1, x_2, ..., x_n$ como $G = \sqrt[n]{x_1.x_2.....x_n}$.

tal conteúdo raramente é explorado no ensino médio, e sua demonstração, além de trabalhosa, acaba sendo de pouca utilidade. Para quem deseja ver a demonstração completa desse resultado, sugerimos a leitura de Lima (2006).

A título apenas de curiosidade, definimos uma P.A. de segunda ordem como uma sequência de números tal que as sucessivas diferenças de um termo para o seu antecessor forma uma P.A. (de primeira ordem).

EXEMPLO 2.11. *Seja a função quadrática definida por* $f(x) = x^2 + 3x - 1$. *Vamos calcular alguns valores de* $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$f(0) = 0^2 + 3.0 - 1 = -1$$
$$f(1) = 1^2 + 3.1 - 1 = 3$$
$$f(2) = 2^2 + 3.2 - 1 = 9$$
$$f(3) = 3^2 + 3.3 - 1 = 17$$
$$f(4) = 4^2 + 3.4 - 1 = 27$$

Denotando por δ_n *a diferença* $f(n) - f(n-1)$, *temos:*

$$\delta_1 = f(1) - f(0) = 3 - (-1) = 4$$
$$\delta_2 = f(2) - f(1) = 9 - 3 = 6$$
$$\delta_3 = f(3) - f(2) = 17 - 9 = 8$$
$$\delta_4 = f(4) - f(3) = 27 - 17 = 10$$
$$\vdots$$

Observamos que a sequência $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, ..., \delta_n, ...)$ *forma uma P.A. não-trivial, ou seja, com razão* $r \neq 0$. *Logo, os valores de* $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *formam uma P.A. de segunda ordem. Como os valores de* n *estão variando em uma P.A. (cuja razão* $r = 1$*), a expressão de* $f(x)$ *é uma função quadrática.*

Podemos mostrar que dados três pontos não colineares, existe apenas uma parábola[3] que passa por estes pontos, isto é,

PROPOSIÇÃO 2.2. *Sejam* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *e* $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ *duas funções quadráticas tais que* $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ *e* $f(x_3) = g(x_3)$, *para distintos* x_1, x_2, *e* $x_3 \in \mathbb{R}$. *Vamos mostrar que* $f(x) = g(x)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, podemos escrever:

$$f(x_1) - g(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c - \left(a'x_1^2 + b'x_1 + c'\right) = x_1^2(a - a') + x_1(b - b') + c - c' = 0$$
$$f(x_2) - g(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c - \left(a'x_2^2 + b'x_2 + c'\right) = x_2^2(a - a') + x_2(b - b') + c - c' = 0$$
$$f(x_3) - g(x_3) = ax_3^2 + bx_3 + c - \left(a'x_3^2 + b'x_3 + c'\right) = x_3^2(a - a') + x_3(b - b') + c - c' = 0$$

Denotando

$$\alpha = a - a'$$
$$\beta = b - b'$$
$$\gamma = c - c'$$

[3] Ver definição e propriedades no próximo capítulo.

temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma & = & 0 & (1) \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma & = & 0 & (2) \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma & = & 0 & (3) \end{cases}$$

Fazendo $(1) - (2)$ e $(1) - (3)$, temos:

$$\alpha\left(x_1^2 - x_2^2\right) + \beta(x_1 - x_2) = 0$$

$$\alpha\left(x_1^2 - x_3^2\right) + \beta(x_1 - x_3) = 0$$

Como estamos supondo x_1, x_2 e x_3 distintos entre si e relembrando um dos produtos notáveis vistos no ensino fundamental, a diferença entre dois quadrados:

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b),$$

podemos dividir a primeira equação por $(x_1 - x_2)$ e a segunda por $(x_1 - x_3)$:

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0 \quad (4)$$

$$\alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0 \quad (5)$$

Fazendo $(4) - (5)$:

$$\alpha(x_1 + x_2 - x_1 - x_3) = 0 \quad \therefore \quad \alpha(x_2 - x_3) = 0$$

Como $x_2 \neq x_3$, temos $\alpha = 0$. Substituindo acima e em (1), vemos que $\beta = \gamma = 0$. Isto é

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c'.$$

■

Lima (2006) nos diz que, dados três pontos não-colineares $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, e $C = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{R}^2$, existe uma, e somente uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Já Wagner (2006) nos mostra as condições para que estes três pontos sejam colineares: existe uma função afim $f(x) = ax + b$, cujo gráfico contém os pontos A, B e C. Ou, em outras palavras, que

$$\tan B\hat{A}D = \tan C\hat{A}D,$$

onde D é a projeção de C sobre a reta $y = y_1$.

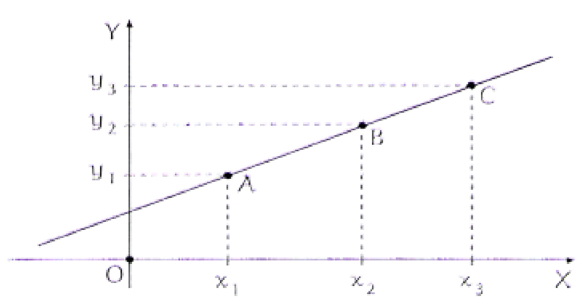


FIGURA 8. Condição para a colinearidade de três pontos

Vemos que

$$\tan B\hat{A}D = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \tan C\hat{A}D$$

CAPíTULO 3

Parábola

Antes de prosseguirmos nosso estudo sobre a função quadrática, iremos definir um tipo de cônica que nos será muito útil:

DEFINIÇÃO 3.1. *Sejam d uma reta e F um ponto não pertencente a d. Definimos a parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz d ao conjunto dos pontos P que equidistam de d e F.*

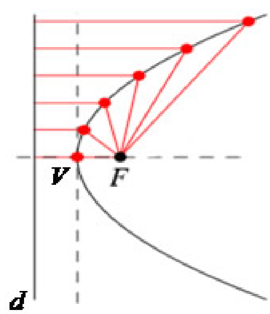


FIGURA 1. Parábola

DEFINIÇÃO 3.2. *A reta focal, também conhecida como eixo r da parábola $\mathcal{P}$ é a reta que passa que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz d.*

Seja $A = r \cap d$. Como $F \notin d$, existe um ponto $V \in \mathcal{P}$ sobre o eixo r, denominado o *vértice* da parábola. O único ponto do eixo r que pertence à parábola é justamente o vértice V. E, como pela Definição 3.1, um ponto qualquer P pertence à parábola se, e somente se equidista da diretiz d e do foco F, concluímos que o ponto médio do segmento $\overline{AF}$ coincide com V.

Antes de concluirmos qual o desenho da parábola, vejamos uma característica imediata dela:

PROPOSIÇÃO 3.1. *Toda parábola é simétrica em relação ao seu eixo focal.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja P um ponto qualquer da parábola. Tomemos seu simétrico R em relação ao eixo. Seja Q a interseção do eixo r com o segmento $\overline{PR}$. Logo, Q é ponto médio de $\overline{PR}$. Os triângulos $\triangle PQF$ e $\triangle RQF$ são congruentes, pelo caso LAL, pois $\overline{PQ} \equiv \overline{RQ}$, $\hat{Q}$ é reto e $\overline{QF}$ é

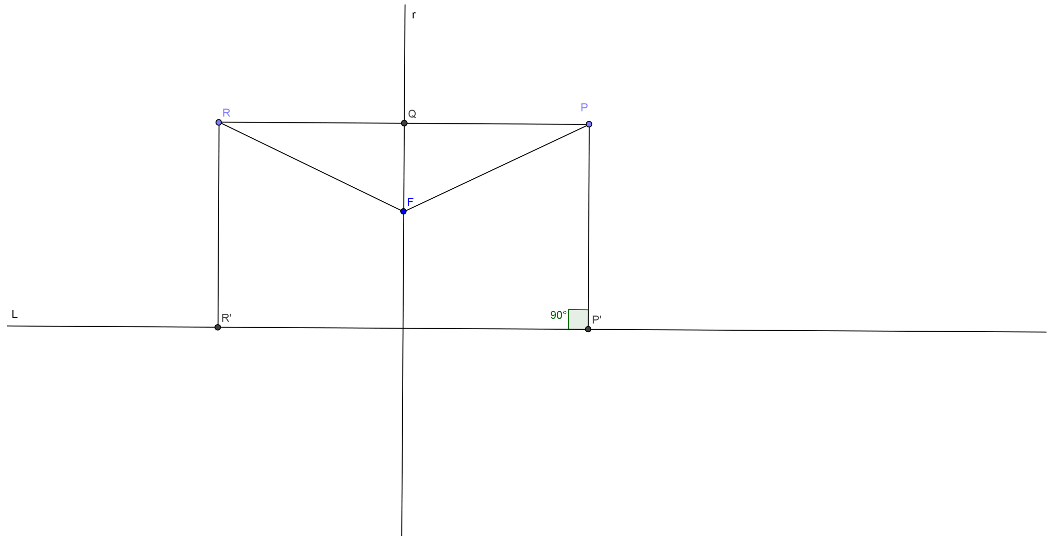
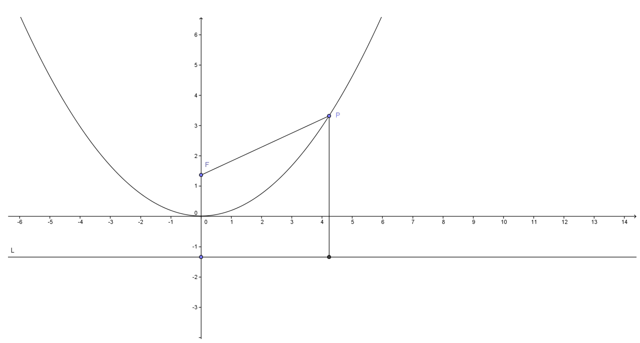


Figura 2. Simetria da Parábola

lado comum. Em particular, as hipotenusas também são congruentes, ou seja, $\overline{PF} \equiv \overline{RF}$. Além disso, como P e R são simétricos, se considerarmos os pontos P' e R', projeções na diretriz L de P e R, respectivamente, $PP'R'R$ é um retângulo. Consequentemente os lados paralelos $\overline{PP'}$ e $\overline{RR'}$ são congruentes c.q.d. ■

Vamos agora, a partir da definiçao de parábola, descobrir sua equação. Iremos, convenientemente, coincidir a origem do plano cartesiano com o vértice V. A reta focal será identificada com o eixo y. Logo, o eixo x será paralelo à diretriz L. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola. Logo:

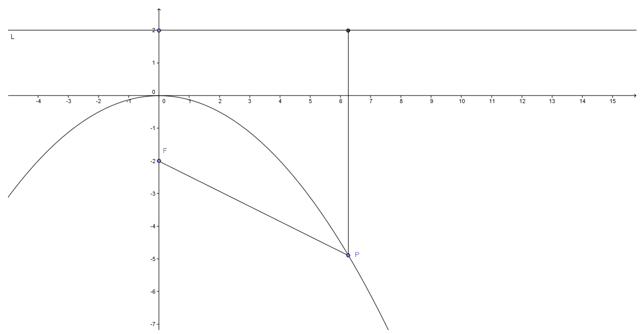


$$d(P,F) = d(P,L)$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2} = \sqrt{(y+p)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 - 2py = 2py \quad \therefore \quad \boxed{x^2 = 4py}$$

Mas a expressão acima nos mostra explicitamente uma função quadrática. Chamando y de $f(x)$, temos

$$f(x) = \frac{x^2}{4p}$$

Dada a simetria da parábola, podemos 'girá-la' em qualquer múltiplo de um ângulo reto que ainda assim, refazendo as contas, teremos a expressão de uma função quadrática. De fato, girando, sem perda de generalidade, a parábola em 180°, vemos que:



$$d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2}$$

$$x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2 \quad \therefore \quad x^2 = -4py$$

E, da mesma forma, chamando $y = f(x)$ vemos que

$$\boxed{f(x) = -\frac{x^2}{4p}}.$$

Sendo o gráfico de uma função quadrática uma parábola, a Proposição 3.1 poderia ser deduzida pela Definição 2.2, pois:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + \frac{b}{2a} = \pm \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)$$

Desenvolvendo o caso não-trivial, temos:

$$x_1 + \frac{b}{2a} = -\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{2b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Isto é x_1 e x_2 são equidistantes de $-\dfrac{b}{2a}$. Outra maneira de ver este resultado é escrever

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

.

Como $-\dfrac{b}{a}$ é a soma s das raízes de $f(x)$, podemos dizer, de um modo geral, que

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \;\; ou \;\; x_1 + x_2 = s.}$$

Numa função quadrática $f(x)$ em que $a < 0$, o vértice da parábola é o ponto no qual $f(x)$ atinge seu valor máximo. Da mesma forma, se $a > 0$, $f(x)$ atinge seu valor mínimo nesse ponto. Assim, o que antes chamávamos de $f_{\max}(x)$ e $f_{\min}(x)$ será chamado daqui pra frente de y_v, isto é, a coordenada y do vértice V. Já a coordenada x de V será, naturalmente, x_v.

Como a parábola é simétrica em relação ao seu eixo focal, podemos afirmar que a coordenada x_v é a média aritmética de suas raízes:

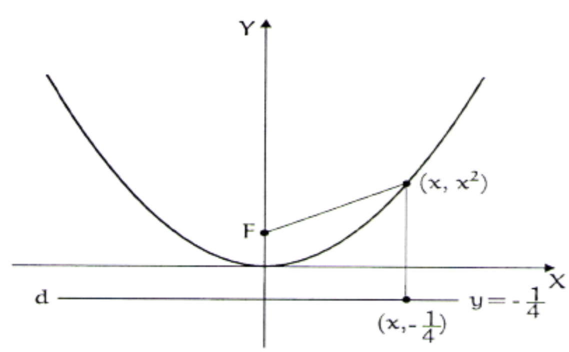
$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

A relação acima ainda é verdade mesmo que as raízes da função quadrática sejam imaginárias. Reescrevendo-a com os coeficientes de $f(x)$, temos

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Enumeraremos algumas proposições com relação ao gráfico de uma função quadrática - mostradas em Lima (2006) como exemplos. Para maior clareza, expressaremos $f(x)$ na sua forma canônica. Para todas elas consideraremos um ponto P cujas coordenadas são $P = (x, f(x))$.

Proposição 3.2. *O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $d : y = -\frac{1}{4}$.*



Demonstração. Utilizando a Definição 3.1, temos:

$$d(P, F) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}} =$$

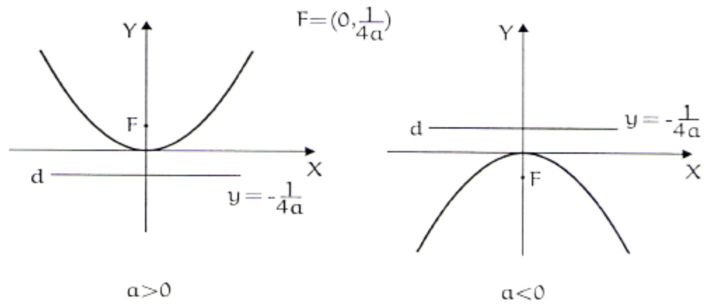
$$= \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4}.$$

Por outro lado:

$$d(P,d) = \sqrt{(x-x)^2 + \left(x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4}$$

E, assim, $d(P,F) = d(P,d)$, c. q. d. ■

Proposição 3.3. *Seja $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. O gráfico de $f(x)$ é a parábola cujo foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $d = -\frac{1}{4a}$.*



Demonstração. Procedendo da mesma forma como fizemos anteriormente, temos:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - 2.a.x^2.\frac{1}{4a} + \frac{1}{(4a)^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = ax^2 + \frac{1}{4a}.$$

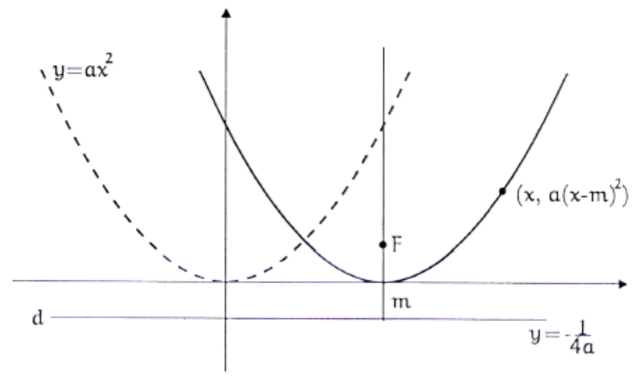
$$d(P,d) = \sqrt{(x-x)^2 + \left(ax^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = ax^2 + \frac{1}{4a},$$

c. q. d. ■

No exemplo acima, se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Se, ao contrário, $a < 0$, a mesma está voltada para baixo.

Convém ressaltar mais uma vez que, sendo $f(x)$ uma função quadrática, estamos considerando **sempre** que $a \neq 0$.

Proposição 3.4. *Para todo $m \in \mathbb{R}$, o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é a reta $d : y = -\frac{1}{4a}$.*



F=(m, 1/4a)

Demonstração. Calculando as distâncias:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2} = \sqrt{(x-m)^2 + a^2(x-m)^4 - 2.a.(x-m)^2.\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2(x-m)^4 + (x-m)^2 - \frac{(x-m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{a^2(x-m)^4 + \frac{(x-m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2} = a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}.$$

Por outro lado:

$$d(P,d) = \sqrt{(x-x)^2 + \left[a(x-m)^2 - \Big(-\frac{1}{4a}\Big)\right]^2} = \sqrt{\left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2} =$$

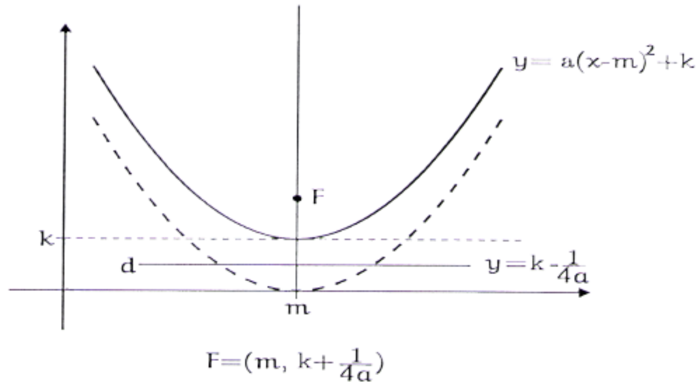
$$= a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}, \quad \text{c. q. d.}$$

■

O que fizemos acima foi apenas uma translação horizontal do gráfico de $f'(x) = ax^2$ - Proposição 3.3 -, de forma que o eixo, que era a reta $x = 0$ passa a ser a reta $x = m$.

Proposição 3.5. *Dados $a, m, k \in \mathbb{R}$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$, e cuja diretriz é a reta $d : y = k - \frac{1}{4a}$.*

Demonstração. As contas vão aumentando, mas o que fizemos aqui traduz-se apenas em outra translação; desta vez, o foco da parábola da Proposição 3.4 $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$ se desloca para o ponto $F' = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$.



Calculando as distâncias, temos:

$$d(P,F') = \sqrt{(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 + k - \left(k + \frac{1}{4a}\right)\right]^2} = \sqrt{(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{(x-m)^2 + a^2(x-m)^4 - \frac{(x-m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{a^2(x-m)^4 + \frac{(x-m)^2}{2} + \frac{1}{(4a)^2}} =$$

$$= \sqrt{\left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2} = a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}.$$

E:

$$d(P,d) = \sqrt{(x-x)^2 + \left[a(x-m)^2 + k - \left(k - \frac{1}{4a}\right)\right]^2} = \sqrt{\left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2} =$$

$$a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}.$$

Logo, $d(P,F') = d(P,d)$, c. q. d. ■

CAPíTULO 4

Exercícios

Tendo fornecido a base teórica, chega a hora de testar na prática os conhecimentos adquiridos. Nosso objetivo é, antes de tudo, servir de apoio para professores de Matemática do Ensino Básico.

É sabido que nossas escolas (municipais) e colégios (estaduais) são, via de regra, muito fracos. Claro que há exceções, ilhas de bom ensino, mas são, apenas, exceções. Instituições de ensino militares e federais também são, em geral, de alto nível. Para esse público, já há farto material de qualidade à disposição.

Porém, para a grande maioria das escolas públicas, o desânimo, a dificuldade, a falta de vontade e o desinteresse imperam. Contra tal cenário, nossa contribuição se faz no sentido de propôr exercícios de função quadrática que, em sua grande maioria, atendem a um fim prático.

Não estamos com isso defendendo a tese de que o conhecimento só tem sentido se pode ser aplicado em alguma utilidade. Esta questão, aliás, é antiga. Boyer (2003) nos conta uma história semelhante relacionada a Euclides, autor de *Os Elementos*:

> Evidentemente Euclides não dava ênfase aos aspectos práticos do assunto, pois há uma estória contada sobre ele que diz que quando um estudante perguntou para que servia o estudo da geometria, Euclides disse a seu escravo que desse três moedas ao estudante, 'pois ele precisa ter lucro com o que aprende'.

Entretanto, dado o escasso tempo de que dispomos para fazer com que nossos alunos apreendam o conteúdo matemático, somado aos problemas comentados acima, faz-se necessário, na nossa opinião, a abordagem de funções com o intuito de fornecer aos alunos uma problemática mais real, voltada para assuntos do cotidiano.

Assim, na grande maioria dos exercícios aqui apresentados, procuramos exemplos práticos. Entretanto, também há aqueles nos quais apenas a manipulação algébrica dos conteúdos estudados se faz necessária.

Na realidade, três questões se apresentam como essenciais:

- Conceituação A parte conceitual foi, esperamos, suficientemente tratada nos capítulos anteriores. Equações do 2º grau, funções quadráticas, aspectos históricos, gráficos e etc.
- Manipulação A manipulação algébrica se dá na verdade em todos os momentos do trabalho. Manipular dados do problema em questão com o objetivo de determinar sua resposta.
- Aplicação A aplicabilidade do conteúdo estudado entrará basicamente neste último capítulo, voltado para os exercícios.

A maior parte destes exercícios constam de Elon (2005), Elon (1997) e Reis (1902), alguns com adaptações.

Vamos, então, a eles:

EXERCÍCIO 4.1. *Um conhecido professor de matemática queria comprar uma mesa de jantar retangular. Como gostaria que a mesma tivesse um perímetro fixado $2p$, já que tinha em mente o número de pessoas que a utilizariam ao mesmo tempo, dirigiu-se a uma loja e indagou ao vendedor: "Gostaria de comprar uma mesa cujo perímetro é $2p$, mas que ocupe a menor área possível, já que minha casa não é muito grande e preciso otimizar o espaço."Ao que o vendedor respondeu: "O senhor veio ao lugar certo! Tenho aqui uma mesa quadrada de perímetro $2p$ que resolve o seu problema."Analise a resposta do vendedor.*

Talvez um dos mais clássicos problemas envolvendo funções quadráticas seja esse. Ao dizermos que a mesa tem perímetro $2p$ queremos apenas enfatizar que ela precisa comportar um número n de pessoas previamente sabido. Ao aplicar este exercício em sala de aula, convém substituir o perímetro por um número real qualquer, para maior clareza dos alunos. Trabalharemos aqui com $2p$ apenas para maior generalização.

Seja então um retângulo qualquer cujo perímetro é $2p$. Chamando um lado de x, o outro é $\dfrac{2p-2x}{2} = p - x$. A área S deste retângulo é, pois, dada por:

$$S = x.(p-x) \quad \Rightarrow \quad S = -x^2 + px$$

Assim, a expressão de S é uma função quadrática. Como $a < 0$, a função admite um máximo. Completando quadrados, temos:

$$S = -x^2 + px - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}$$

Ou seja, o valor máximo de S é $\dfrac{p^2}{4}$, e isto acontece quando $x - \dfrac{p}{2} = 0$, isto é, $x = \dfrac{p}{2}$.

O que isso quer dizer? Quer dizer que a medida do lado do retângulo que faz com que sua área seja máxima é $x = \dfrac{p}{2} = \dfrac{2p}{4}$. Logo, tal retângulo é na verdade um quadrado, cujo lado é $\dfrac{1}{4}$ do perímetro $2p$, donde podemos concluir que o vendedor obviamente errou na sua argumentação. Ele disse que a mesa quadrada era a que ocupava a menor área, mas acabamos de provar justamente o contrário: ela é a que possui, dentre todos os retângulos de perímetro $2p$, a maior área.

EXERCÍCIO 4.2. *Uma senhora comprou uma quantidade de blusas e gastou R\$ 540,00. Contudo, observou que, se tivesse comprado três blusas a mais, pagaria R\$ 15,00 a menos por cada uma. Quantas blusas esta senhora comprou?*

Este é o tipo de exercício que, na nossa opinião, deveria ser mais explorado em sala de aula. Em nenhum momento há qualquer menção de se tratar ou de uma equação de 2º grau, ou função, seja ela afim, quadrática, e etc. No entanto, ao explorar os dados do exercício, descobrimos do que se trata.

De fato, denotemos por x a quantidade de blusas compradas pela senhora. Como ela pagou no total $R\$$ $540,00$, o preço unitário (de cada blusa) é $R\$ \dfrac{540}{x}$.

Ao invés disso, se ela tivesse comprado três blusas a mais, teria pago quinze reais a menos por cada uma. Nessa situação, o preço unitário seria $R\$ \dfrac{540}{x+3}$. Como há uma diferença de $R\$$ $15,00$ entre os dois preços, podemos escrever que

$$\frac{540}{x} - \frac{540}{x+3} = 15.$$

E aí está a equação que devemos resolver. Multiplicando os termos por $x.(x+3)$:

$$(x+3).540 - x.540 = 15.x.(x+3)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e passando todos para o primeiro membro, temos:

$$540x + 1.620 - 540x = 15x^2 + 45x \ \Rightarrow\ -15x^2 - 45x + 1620 = 0 \ \Rightarrow\ 15x^2 + 45x - 1.620 = 0$$

Dividindo a expressão por 15, vem:

$$x^2 + 3x - 108 = 0 \left\{ \begin{array}{rcr} a & = & 1 \\ b & = & 3 \\ c & = & -108 \end{array} \right.$$

Claro que podemos utilizar a estratégia de soma e produto também neste exemplo. Apenas iremos mais direto ao ponto. Lembrando que, como $\dfrac{c}{a} = -108$, isto é, o produto é negativo, as raízes possuem sinais opostos. Ainda, a soma $s = -\dfrac{b}{a} = -3$ é positiva, o que indica que a maior das raízes (em módulo) é negativa.

Como a soma das raízes é um número pequeno em módulo (comparando com o valor do produto p), as raízes são números próximos entre si (desconsiderando-se o sinal). Desta forma, procuremos dois números que multiplicados dão 108, mas próximos um do outro:

$$3 \ \ e \ \ 36$$

$$6 \ \ e \ \ 18$$

$$9 \ \ e \ \ 12$$

Dos pares acima, apenas o último pode ser o par de números procurados. Logo, $x_1 = 9$ e $x_2 = -12$. Contudo, como x é a quantidade de blusas que a senhora comprou, a mesma jamais pode ser um número negativo. Assim, temos apenas uma resposta: o números de blusas compradas foi $x = 9$.

EXERCÍCIO 4.3. *Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar* $R\$$ $405,00$*, custo de uma excursão. Todos contribuiram igualmente. Na última hora, porém, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada* *aluno sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma?*

Denotemos por x o número de alunos da turma. O que era estipulado que cada um pagasse era $\frac{405}{x}$. Com a desistência de dois alunos, passou a ser $\frac{405}{x-2}$. Se há menos alunos dividindo a conta, é óbvio que o valor que cada um tem que pagar aumenta. A diferença entre estes dois valores é de $R\$\ 1,20$. Logo:

$$\frac{405}{x-2} - \frac{405}{x} = 1,2$$

Multiplicando ambos os lados por $x.(x-2)$ e desenvolvendo, temos:

$$405x - 405(x-2) = 1,2x(x-2) \quad \Rightarrow \quad 405x - 405x + 810 = 1,2.(x^2 - 2x)$$

$$x^2 - 2x - 675 = 0 \begin{cases} a &= & 1 \\ b &= & -2 \\ c &= & -675 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1(-675)}}{2.1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2.700}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm 52}{2}$$

Como x é o número de alunos da turma, temos $x > 0$:

$$x = \frac{2 + 52}{2} \quad \therefore \quad x = 27$$

Assim, há na turma 27 alunos.

EXERCÍCIO 4.4. *João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média,* 300 *caixas de picolés por* $R\$\ 20,00$ *cada. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuia* $R\$\ 1,00$ *no preço da caixa, vendia quarenta caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?*

Este é um clássico exemplo de função quadrática que ainda é pouco explorado nos livros didáticos. Trata-se de uma situação problema na qual uma variável, neste caso, a quantidade de caixas de picolés vendida, determina o valor da outra variável $R(x)$, a receita de João. Esta receita é máxima para algum valor de x.

Ora, a receita é dada pelo produto de cada caixa de picolé vendida pelo seu preço. Cada $R\$\ 1,00$ a menos no preço da caixa implica quarenta caixas vendidas a mais. Faremos uma tabela com as informações do problema:

Preço de cada caixa	Quantidade de caixas vendidas	Receita em R$
20	300	6.000
19	340	6.460
18	380	6.840
17	420	7.140
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	$300 + 40.17 = 980$	2.940
2	$300 + 40.18 = 1.020$	2.040
1	$300 + 40.19 = 1.060$	1.060

Com estes dados podemos montar a função

$$R(x) = \overbrace{(20 - x)}^{\text{preço da caixa}} \;.\; \underbrace{(300 + 40x)}_{\text{caixas vendidas}},$$

onde x é a variação, em $R\$$, do preço da caixa de picolés.

Desenvolvendo a expressão, temos:

$$R(x) = 6.000 + 800x - 300x - 40x^2 \quad \therefore \quad R(x) = -40x^2 + 500x + 6.000.$$

Esta é uma função quadrática na qual o coeficiente a é negativo. Logo, esta função possui um valor máximo. Manipulando $R(x)$:

$$R(x) = -40\left(x^2 - \frac{25}{2}\right) - 6.000 \;\Rightarrow\; R(x) = -40\left(x^2 - 2.\frac{25}{4} + \left(\frac{25}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{4}\right)^2\right) - 6.000.$$

$$R(x) = -40\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 - (-40).\left(\frac{625}{16}\right) + 6.000$$

$$R(x) = -40\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + \frac{625.5}{2} + 6.000$$

Portanto

$$R(x) = -40\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + \frac{15.125}{2}.$$

A expressão acima nos diz que $R(x)$ é máxima quando o termo elevado ao quadrado é mínimo. Logo $x_v = \dfrac{25}{4}$ e, nesta situação,

$$R\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{15.125}{2} = R\$\ 7.562,50$$

O preço da caixa deverá ser, então, igual a $R\$\ 20,00 - 6,25 = R\$\ 13,75$.

Na mesma linha do exercício acima, veremos o

Exercício 4.5. *A $R\$\ 30,00$ o ingresso, os shows de uma banda atraem 500 espectadores. Se cada variação de $R\$\ 1,00$ no preço do ingresso faz variar o público em 40 espectadores, qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?*

Novamente, a receita é o produto da quantidade de ingressos vendidos pelo seu preço individual. Podemos montar a mesma tabela:

Valor do ingresso	Público	Receita em R$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31	$500 - 1.40 = 460$	14.260
30	500	15.000
29	$500 + 1.40$	15.660
28	$500 + 2.40 = 580$	16.240
27	$500 + 3.40 = 620$	16.740
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$500 + 29.40 = 1.660$	1.660

Tanto de cima para baixo quanto de baixo para cima os valores referentes à receita aumentam. Logo, existe algum valor espeífico do ingresso para o qual esta receita seja máxima. Denotando por x o valor em $R\$$ a ser descontado de $R\$\ 30,00$ e a receita por $R(x)$, temos:

$$R(x) = \overbrace{(30-x)}^{\text{valor do ingresso}} \quad . \underbrace{(500+40x)}_{\text{público presente}}$$

Para descobrir o valor de x que faz com que $R(x)$ seja máximo, devemos manipular a expressão acima, de forma a achar a forma canônica de $R(x)$:

$$R(x) = 15.000 + 1.200x - 500x - 40x^2 \quad \Rightarrow \quad R(x) = -40x^2 + 700x + 15.000$$

$$R(x) = -40\left(x^2 - 2.\frac{35}{4} + \left(\frac{35}{4}\right)^2 - \left(\frac{35}{4}\right)^2\right)^2 + 15.000 \quad \Rightarrow \quad R(x) = -40\left(x - \frac{35}{4}\right)^2 + 5.\frac{35^2}{2} + 15.000$$

$$R(x) = -40\left(x - \frac{35}{4}\right)^2 + \frac{36.125}{2}$$

Consequentemente, $R(x)$ é máximo quando $x = \dfrac{35}{4} = 8{,}75$, o que provoca uma receita de $R(x) = R\$\ 18.062,50$. Logo, o preço do ingresso deve ser de $R\$\ 30 - 8,75 = R\$\ 21,25$.

Naturalmente que em exercícios deste tipo podemos utilizar a fórmula geral de resolução de uma equação do 2º grau. Porém procuramos evitar sua utilização mecânica, e fazer com que os alunos exercitem a técnica de completar quadrados.

Nem sempre, como nestes dois últimos exemplos, trabalhamos com números “pequenos", números fáceis de operar. Ao trabalhar com tais exemplos em sala de aula, é recomendável o uso de calculadoras pelos alunos. A intenção é que eles consigam determinar a expressão da função quadrática e manipulá-la, não fazer contas. Elevar 35 ao quadrado, como no exemplo anterior, pode ser trabalhado no ensino fundamental em conteúdos como o quadrado da soma, mas neste momento é meramente operacional.

Há inúmeros exemplos de exercícios que abordam funções quadráticas como os dois acima. Como não há tanta variedade assim nos livros didáticos utilizados no ensino médio, vamos a mais algun exemplos:

EXERCÍCIO 4.6. *Um avião de cem lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R\$ 800,00 mais R\$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?*

Obviamente, a rentabilidade será o produto da quantidade de passageiros pelo valor pago por cada um. Mais uma vez, faremos uma tabela para ilustrar nosso raciocínio:

Lugares ocupados	Valor a pagar por pessoa	Rentabilidade em R$
100	800	$800.100 = 80.000$
99	$800 + 10 = 810$	$810.99 = 80.190$
98	$800 + 2.10 = 820$	$820.98 = 80.360$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Denotando por x a quantidade de lugares vagos e por $r(x)$ a rentabilidade da empresa, temos:

$$r(x) = \overbrace{(100 - x)}^{\text{qde. de lugares vagos}} \quad . \quad \underbrace{(800 + 10x)}_{\text{preço individual a pagar}}$$

$$r(x) = 80.000 + 1.000x - 800x - 10x^2 \quad \Rightarrow \quad r(x) = -10x^2 + 200x + 80.000$$

Desenvolvendo a expressão de $r(x)$, temos:

$$r(x) = -10(x^2 - 2.10x + 100 - 100) + 80.000 \quad \Rightarrow \quad r(x) = -10(x - 10)^2 + 81.000$$

Imediatamente vemos que $r_v = 81.000$, para $x_v = 10$.

Logo, a rentabilidade da empresa é máxima para $100 - 10 = 90$ passageiros.

EXERCÍCIO 4.7. *Um cãozinho está a $10m$ de um balão pousado no solo. O cão começa a correr em direção ao balão no mesmo instante em que este se desprende do solo e inicia uma ascensão vertical. Se o cão corre com velocidade de $2\ m/s$ e o balão ascende com velocidade de $1\ m/s$, qual é a distância mínima entre o cão e o balão? Quantos segundos após o início da corrida essa distância é mínima?*

Uma outra aplicação interessante de função quadrática é vista aqui. Em qualquer instante t após o início da aproximação, temos a seguinte situação:

Coincidimos os eixos x e y como de costume e a origem com a posição inicial do balão. Definimos:

$$d: \text{ distância entre o cão e o balão}$$

$$d_b: \text{ distância percorrida pelo balão}$$

$$d_c: \text{ distância entre a posição inicial do balão (origem) e o cão}$$

Velocidade é a razão entre uma dada distância d e o tempo t gasto para percorrê-la. Logo, a distância percorrida é igual ao produto da velocidade pelo tempo:

$$v = \frac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad d = v.t$$

Como $v_b = 1\ m/s$, $d_b = 1.t = t$. Já $v_c = 2\ m/s$. Como o cãozinho está a 10 m do balão, transcorrido um tempo t temos $10 - d_c = 2.t \quad \Rightarrow$ $d_c = 10 - 2t$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$d^2 = d_b^2 + d_c^2 \quad \therefore \quad d = \sqrt{d_b^2 + d_c^2}$$

$$d = \sqrt{t^2 + \left(10 - 2t\right)^2} \quad \Rightarrow \quad = \sqrt{t^2 + 100 - 40t + 4t^2}$$

$$d = \sqrt{5t^2 - 40t + 100}$$

Como queremos que d seja mínimo, devemos descobrir o valor de t que minimize o radicando acima. Podemos verificar que a função quadrática é sempre positiva, calculando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 40.5.100 = 1.600 - 2000 = -400$. Para calcularmos t_v e d_v, basta completarmos os quadrados:

$$d = \sqrt{5\Big(t^2 - 2.4.t + 16 - 16\Big) + 100} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{5(t-4)^2 - 80 + 100}$$

$$\therefore \quad d = \sqrt{5(t-4)^2 + 20}$$

Assim, vemos claramente que d é mínimo para $t_v = 4s$ e $d_v = \sqrt{20} \quad \Rightarrow$ $d_v = 2\sqrt{5}\ m$.

Outra importante aplicação de funções quadráticas se dá em geometria, no cálculo de volumes e áreas com valores máximos ou mínimos:

Exercício 4.8. *Um retângulo de papelão tem base b e altura a. Fazendo duas dobras de altura x, paralelas à altura do retângulo, obtemos três faces de um bloco retangular. Determine x de modo que esse bloco tenha volume máximo.*

Exercícios deste tipo, embora excelentes para explorar o conceito de função quadrática, devem ser abordados com certa cautela. Costuma haver por parte dos alunos uma certa resistência quanto a exercícios cujos dados, ao invés de números, são literais. Recomendamos que, se aplicados em sala de aula, não se trabalhar, pelo menos inicialmente, com medidas a e b, mas, sem perda de generalidade, com 4 e 10, por exemplo.

Sabemos que o volume de uma caixa é dado pelo produto de suas três medidas: comprimento $\times$ altura $\times$ largura. Logo:

$$V(x) = a.x.(b - 2x) \quad \Rightarrow \quad V(x) = -2ax^2 + abx$$

Podemos trabalhar em cima de qualquer uma das expressões acima para definir o valor de x que faz com que V seja máximo.

Se olharmos para a primeira equação e nos lembrarmos que a coordenada x_v é, de acordo com a relação 3, na página 28, a média aritmética das raízes, vemos claramente que os únicos dois valores de x que fazem

com que a expressão se anule são $x = 0$ e $b - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{b}{2}$. Logo,
$x_v = \dfrac{0 + \frac{b}{2}}{2} \quad \therefore \quad x_v = \dfrac{b}{4}$.

Tal raciocínio, obviamente, poderia ter sido aplicado em todos os problemas anteriores.

Já olhando para a segunda expressão de $V(x)$ podemos fazer o mesmo que nos outros exercícios, completar quadrados:

$$V(x) = -2a\left(x^2 - 2.\frac{b}{4}x + \frac{b^2}{4^2} - \frac{b^2}{4^2}\right) \quad \Rightarrow \quad V(x) = -2a\left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{ab^2}{8}$$

Assim, chegamos ao mesmo valor de x_v, com a vantagem de visualizar o valor $y_v = \dfrac{ab^2}{8}$.

Exercício 4.9. *Com 80 m de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.*

Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

Chamando de x os lados paralelos do retângulo, o outro lado tem $80 - 2x$ m. Sua área será:

$$S(x) = x.(80 - 2x) \quad \Rightarrow \quad S(x) = -2x^2 + 80x$$

Deixaremos que o leitor complete quadrados a fim de constatar que já domina a técnica. Neste exemplo, observando a primeira expressão de $S(x)$, vemos que ela só se anula em $x = 0$ e $80 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 40$.
Logo, $x_v = \dfrac{0 + 40}{2} \quad \therefore \quad x_v = 20$

Assim, as medidas do retângulo devem ser 20 m e $80 - 2.20 = 40$ m.

Exercício 4.10. *Um restaurante a quilo vende 1.000 kg de comida por dia, a $R\$$ 20,00 o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia quarenta clientes, com consumo médio de 500 g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?*

Novamente faremos uma tabela para ilustrar a situação:

Valor do kg	Kg de comida vendida por dia	Receita
20	1.000	20.000
21	$1.000 - 40 = 960$	20.160
27	$1.000 - 2.40 = 920$	20.240
⋮	⋮	⋮

Temos:

$$R(x) = \overbrace{(20 + x)}^{\text{preço do kg}} . \underbrace{(1.000 - 40x)}_{\text{kg vendidos}}$$

Desenvolvendo a expressão acima obteremos:

$$R(x) = 20.000 - 800x + 1.000x - 40x^2 \quad \Rightarrow \quad R(x) = -40x^2 + 200x + 20.000$$

$$R(x) = -40\left(x^2 - 2.\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + 20.000 \quad \Rightarrow \quad R(x) = -40\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 20.250$$

Como, $x_v = \dfrac{5}{2}$, o preço do kg que maximiza a receita é $R\$\ 20 + 2,5 = 22,50$.

Exercício 4.11. *Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$. Determine o valor da expressão $x_1^2 + x_2^2$.*

Apesar deste não ser um exemplo prático, força o aluno a desenvolver estratégias alternativas de resolução. Num primeiro momento, pode-se pensar em descobrir os valores por soma e produto, ou seja, descobrir dois números x_1 e x_2 tais que

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1\ .\ x_2 = 5$$

Após uma rápida análise, vê-se que não é tão fácil assim. Ao calcular o valor do discriminante da equação, obtemos:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 16 - 4.1.5 = -4$$

Como $\Delta < 0$, não existem raízes reais. Para se sair dessa situação sem apelar para o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, nos lembramos mais uma vez de produtos notáveis:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Assim:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1.x_2 - 2x_1.x_2 = \big(x_1 + x_2\big)^2 - 2x_1.x_2 = s^2 - 2.p$$

$$= \big(-(-4)\big)^2 - 2.5 = 16 - 10 = 6.$$

O exercício a seguir também mostra uma importante aplicação de equação do 2º grau, ainda mais pelo fato de em nenhum momento tal conteúdo sequer ser mencionado.

Exercício 4.12. *Três homens, A, B e C, trabalhando juntos, realizam uma tarefa em x horas. Se trabalhassem sozinhos, A executaria a tarefa em $x + 1$ horas, B em $x + 6$ horas e C em $2x$ horas. Calcule x.*

Num exercício deste tipo, é interessante resumir o problema quanto ao que cada um faria em 1 hora de trabalho.

Ora, se A faz o serviço em $x+1$ horas, em 1 h faria $\dfrac{1}{x+1}$ do trabalho. Analogamente, B faria $\dfrac{1}{x+6}$ do trabalho e C, $\dfrac{1}{2x}$. Além disso os três juntos, em 1 h fariam $\dfrac{1}{x}$ do trabalho. Não custa lembrar que $x > 0$. Logo:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$$

Multiplicando por $2x.(x+1).(x+6)$:

$$2x.(x+6) + 2x.(x+1) + (x+1).(x+6) = 2.(x+1).(x+6)$$

$$2x^2 + 12x + 2x^2 + 2x + x^2 + 6x + x + 6 = 2x^2 + 12x + 2x + 12 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 7x - 6 = 0$$

Logo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4.3.(-6)}}{2.3}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-7 \pm 11}{6}$$

Como $x > 0$, devemos ter:

$$x = \frac{-7 + 11}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{6} \quad \therefore \quad x = \frac{2}{3}.$$

Logo, A, B e C fazem o trabalho em $\frac{2}{3}\ h$, ou seja, $\frac{2}{3}.60\ min = 40\ min$.

Exercício 4.13. *Nas águas paradas de um lago, Marcelo rema seu barco a 12 km/h. Num certo rio, com o mesmo barco e as mesmas remadas, ele percorreu 12 km a favor da corrente e 8 km contra a corrente, num tempo total de 2 horas. Qual era a velocidade da correnteza do rio? Quanto tempo ele demorou para ir? E para voltar?*

Chamaremos de v_M a velocidade com que Marcelo rema seu barco e v_r a velocidade da correnteza do rio. Ida será o percurso descendo o rio; volta, a subida. Temos:

$$v_M + v_r = \frac{12}{t_i}; \quad v_M - v_r = \frac{8}{t_v}; \quad t_{\text{total}} = t_i + t_v$$

Substituindo os valores de t_i e t_v das duas peimeiras equações na última, temos:

$$2 = \frac{12}{12 + v_r} + \frac{8}{12 - v_r}$$

Multiplicando todos os termos por $(12 + v_r)(12 - v_r)$, temos:

$$2.(12+v_r)(12-v_r) = 12(12-v_r)+8(12+v_r) \quad \Rightarrow \quad 2(144-v_r^2) = 144-12v_r+96+8v_r$$

$$288 - 2v_r^2 - 240 + 4v_r = 0 \quad \Rightarrow \quad v_r^2 - 2v_r - 24 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -24 \end{cases}$$

$$v_r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-24)}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad v_r = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2}$$

Como a velocidade v_r com que Marcelo rema o barco é positiva, devemos ter:

$$v_r = \frac{2 + \sqrt{100}}{2} \quad \Rightarrow \quad v_r = \frac{2 + 10}{2} \quad \therefore \quad v_r = 6\ km/h$$

Logo,

$$t_i = \frac{12}{12 + 6} \quad \therefore \quad t_i = \frac{12}{18}h = 40\ min.$$

$$t_v = \frac{8}{12 - 6} \quad \therefore \quad t_v = \frac{8}{6}h = 80\ min.$$

EXERCÍCIO 4.14. *Uma pedra é deixada cair num poço e o som da mesma batendo na água é ouvido t segundos depois. Desprezando-se a resistência do ar, e sabendo-se que a velocidade do som no ar v_s é constante e igual a 340 m/s, que a distância percorrida pela pedra é proporcional ao quadrado do tempo e que essa constante de proporcionalidade é igual à metade da aceleração da gravidade g, determine a profundidade h do poço.*

Temos dois movimentos distintos. O primeiro, acelerado, da pedra caindo no poço. E o segundo, com o som subindo do fundo do poço até a borda com velocidade constante. Chamando de t o tempo tanscorrido entre o momento em que a pedra é largada até o momento em que o som chega ao ouvido de quem está na borda do poço, t' o tempo de queda da pedra e t'' o tempo que o som leva para subir, temos:

$$t' + t'' = t$$

O exercício nos diz que $h = k.t'^2$, onde $k = \frac{g}{2}$. E $340 = v_s = \frac{h}{t''} \quad \therefore$ $t'' = \frac{h}{v_s}$. Logo:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s} = t$$

Devemos manipular a equação acima de forma a encontrar a expressão de h em função de t:

$$\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = \left(t - \frac{h}{v_s}\right)^2$$

$$\frac{2h}{g} = t^2 - \frac{2ht}{v_s} + \frac{h^2}{v_s^2}$$

A seguir, nossa intenção é explicitar uma equação do 2º grau com variável h, e calcular suas raízes utilizando a Fórmula 2.2:

$$\frac{h^2}{v_s^2} - \frac{2ht}{v_s} - \frac{2h}{g} + t^2 = 0$$

Multiplicando por v_s^2:

$$h^2 - 2v_sht - \frac{2v_s^2h}{g} + v_s^2t^2 = 0$$

$$h^2 - \frac{2v_s(gt+v_s)}{g}h + (v_s^2t^2) = 0 \left\{ \begin{array}{lcc} a & = & 1 \\ b & = & -\frac{2v_s(gt+v_s)}{g} \\ c & = & v_s^2t^2 \end{array} \right.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow x = \frac{\frac{2v_s(gt+v_s)}{g} \pm \sqrt{\left(-\frac{2v_s(gt+v_s)}{g}\right)^2 - 4.1.(v_s^2t^2)}}{2}$$

Resolvendo esta *singela* expressão, obteremos dois possíveis valores de h:

$$h_1 = \frac{v_s}{g}\Big(gt + v_s + \sqrt{v_s(v_s + 2gt)}\Big) \text{ e } h_2 = \frac{v_s}{g}\Big(gt + v_s - \sqrt{v_s(v_s + 2gt)}\Big)$$

Contudo, devemos nos lembrar de dois fatos: primeiro, que h é a altura do poço, logo, $h > 0$. Além disso, como $v_s = 340\ m/s$, em t segundos o som percorre um espaço muito maior do que a profundidade h do poço. Assim, a solução que nos serve é

$$h = \frac{v_s}{g}\Big(gt + v_s - \sqrt{v_s(v_s + 2gt)}\Big).$$

EXERCÍCIO 4.15. *Numa concorrência pública para a construção de uma pista circular de patinação, apresentam-se as firmas A e B. A firma A cobra R\$ 20,00 por metro quadrado de pavimentação, R\$ 15,00 por metro linear do cercado, mais uma taxa fixa mensal de R\$ 200,00 para administração. Por sua vez, a firma B cobra R\$ 18,00 por metro quadrado de pavimentação, R\$ 20,00 por metro linear do cercado, mais uma taxa fixa mensal de R\$ 600,00 para administração. Para quais valores do raio da pista a firma A é mais vantajosa? Esboce um gráfico que ilustre a situação.*

Chamaremos de r a medida do raio da pista de patinação. Assim, temos:

$$C_A(r) = 20\pi r^2 + 15.2\pi r + 200 \quad \Rightarrow \quad C_A(r) = 20\pi r^2 + 30\pi r + 200$$
$$C_B(r) = 18\pi r^2 + 20.2\pi r + 600 \quad \Rightarrow \quad C_B(r) = 18\pi r^2 + 40\pi r + 600$$

Para que A seja mais vantajosa, devemos ter $C_B(r) - C_A(r) > 0$:

$$C_B(r) - C_A(r) = -2\pi r^2 + 10\pi r + 400 > 0$$

Como $\frac{c}{a} < 0$, as raízes têm sinais opostos. Logo, as raízes de $C_B(r) - C_A(r)$ são:

$$r = \frac{-10\pi \pm \sqrt{100\pi^2 - 4.(-2\pi).400}}{2.(-2\pi)}$$

$$r = \frac{-10\pi \pm \sqrt{100\pi^2 + 3.200\pi}}{-4\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2}\sqrt{1 + \frac{32}{\pi}}$$

Como $r > 0$, devemos ter $0 < r < \frac{5}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{32}{\pi}}\right)$

EXERCÍCIO 4.16. *Para determinar o valor a de uma grandeza, foram feitas, em laboratório, n medições. Os valores encontrados foram $x_1, x_2, ..., x_n$. Resolveu-se adotar como estimativa de a o valor para o qual a soma dos quadrados dos erros das medidas fosse mínimo. Que valor é esse?*

Definiremos a estimativa do valor de a como $e(a)$. Segundo o problema, temos:

$$e(a) = (a - x_1)^2 + (a - x_2)^2 + ... + (a - x_n)^2$$

Desenvolvendo esta expressão, obteremos:

$$e(a) = a^2 - 2ax_1 + x_1^2 + a^2 - 2ax_2 + x_2^2 + ... + a^2 - 2ax_n + x_n^2$$

$$e(a) = \underbrace{a^2 + a^2 + ... + a^2}_{n \text{ vezes}} - 2a(x_1 + x_2 + ... + x_n) + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$$

Logo:

$$e(a) = na^2 - 2(x_1 + x_2 + ... + x_n)a + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$$

A expressão acima é mínima para

$$a_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{2n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Assim, o valor procurado é $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, que é definido como a *média aritmética* dos números $x_1, x_2, ..., x_n$.

Recomendamos que estes últimos três exercícios só sejam aplicados em turmas com um conhecimento já avançado de funções quadráticas, sob o risco de não se chegar a uma conclusão clara e mostrar certo pedantismo perante os alunos.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L. et al. (2005). *Temas e Problemas Elementares.* 12. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 256 p. (Coleção do Professor de Matemática)

[2] LIMA, E. L. et al. (1997) *A Matemática do Ensino Médio.* 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Volume 1. (Coleção do Professor de Matemática)

[3] REIS, A. *Curso Elementar de Matemática: II. Algebra (Cálculo das Fórmações Dirétas* 2. ed. Rio de Janeiro: Livraria Garnier, 1902. Volume 1

[4] BOYER, C. B. (1996). *História da Matemáticas* 2. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher LTDA., 2003.

[5] GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO. Currículo Mínimo 2012 Matemática. Disponível em <http://bit.ly/XR6GxU>. Acesso em 15/02/2013.

[6] WAGNER, E. (2010). *Funções Quadráticas* Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio.

[7] LIMA, E. L. (2007). *Funções Quadráticas* Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio.

[8] HEFEZ, Abramo; VILLELA, M. L. T. (2012). *Polinômios e Equações Algébricas* Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

[9] AZEVEDO, Ricardo Santos. (2013) *Trabalho de conclusão de curso (em andamento).*

[10] MUSSEL, Romulo. (2013) *Trabalho de conclusão de curso (em andamento).*

[11] REIS, Anderson José. (2013) *Trabalho de conclusão de curso (em andamento).*