



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



Descobrimos a Geometria Esférica com Anselmo

por

Henrique José Cavalcante Chagas da Silva

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



Descobrimo a Geometria Esférica com Anselmo

por

Henrique José Cavalcante Chagas da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente
do Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB,
como requisito parcial para a obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Abril/ 2024

João Pessoa - PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586d Silva, Henrique José Cavalcante Chagas da.
Descobrimo a geometria esférica com Anselmo /
Henrique José Cavalcante Chagas da Silva. - João
Pessoa, 2024.
65f. : il.

Orientação: Maurício Cardoso Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria esférica. 2. Geometria euclidiana. 3.
Matemática básica. I. Santos, Maurício Cardoso. II.
Título.

UFPB/BC

CDU 514(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

Fone/Ramal: (83) 3216-7563 <http://www.ufpb.br/pos/profmat>



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE
MESTRADO PROFISSIONAL REALIZADA NO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA
NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DA PARAÍBA

No dia vi cinco de abril de dois mil e vinte e quatro (05/04/2024), às 10:00 horas, por meio da plataforma virtual Google Meet, através do link: <https://meet.google.com/iwk-qqkc-hgs>, em conformidade com o parágrafo único do Art. 80 da Resolução CONSEPE nº 79/2013, que regulamenta a defesa de trabalho final por videoconferência, seguindo os mesmos preceitos da defesa presencial, em sessão pública, teve início a defesa de trabalho de conclusão de curso intitulado “*Descobrimo a Geometria Esférica com Anselmo*”, do aluno **HENRIQUE JOSE CAVALCANTE CHAGAS DA SILVA**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do professor Maurício Cardoso Santos. A Banca Examinadora, aprovada pelo Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, via Ad Referendum, foi composta pelos professores Maurício Cardoso Santos (presidente), Miriam da Silva Pereira (membro interno) e Thiago Yukio Tanaka (membro externo/UFRPE). O professor Maurício Cardoso Santos, em virtude da sua condição de presidente, iniciou os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo do seu trabalho de conclusão. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar, tendo concedido a menção: **APROVADO**. Face à aprovação, declarou o presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de **Mestre** em Matemática, cabendo à Universidade Federal da Paraíba, providências como, de direito, a expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 05 de abril de 2024.

Banca Examinadora

Maurício Cardoso Santos		Documento assinado digitalmente MAURICIO CARDOSO SANTOS Data: 05/04/2024 11:14:39-0300 Verifique em https://validar.it.gov.br	_____
Miriam da Silva Pereira		Documento assinado digitalmente MIRIAM DA SILVA PEREIRA Data: 05/04/2024 11:23:32-0300 Verifique em https://validar.it.gov.br	_____
Thiago Yukio Tanaka		Documento assinado digitalmente THIAGO YUKIO TANAKA Data: 07/04/2024 21:28:52-0300 Verifique em https://validar.it.gov.br	_____

Agradecimentos

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

Dedicatória

Dedico aos símbolos. Afinal tudo aqui é produto das infinitudes possibilidades de combinações entre letras, espaços, números... símbolos.

Resumo

Esta dissertação propõe uma análise interdisciplinar entre a narrativa do quadrinho *As Aventuras de Anselmo Curioso - Os Mistérios da Geometria* escrito pelo cientista francês Jean-Pierre Petit, e os conceitos fundamentais da Geometria Esférica, visando tornar acessível à compreensão dessa área complexa para estudantes avançados do Ensino Médio e graduandos na área de exatas. A Geometria Esférica é explorada através das aventuras vivenciadas pelo personagem Anselmo, proporcionando uma abordagem lúdica e contextualizada para o entendimento de conceitos como: geodésicas; triângulo; e ângulos em uma superfície esférica. A narrativa do quadrinho é desmembrada em cenários que se conectam aos aspectos específicos da geometria esférica. Por meio de uma meticolosa análise das aventuras de Anselmo Curioso, são identificados paralelos com definições geométricas, ilustrando conceitos abstratos por meio de situações práticas presentes nas histórias. Exemplos concretos são apresentados como a menor distância entre Nova York à Madrid, destacando a interação dos personagens e eventos do quadrinho refletem e simbolizam aspectos da Geometria Esférica, tornando mais tangíveis os princípios matemáticos subjacentes. Concluímos que a relação entre a aventura de Anselmo e os princípios da Geometria Esférica oferece uma oportunidade valiosa para desmistificar conceitos matemáticos avançados, incentivando o interesse e a compreensão mais profunda desses temas entre os estudantes.

Palavras-chaves: Matemática Básica; Geometria Euclidiana; Geometria Esférica

Abstract

This dissertation proposes an interdisciplinary analysis between the narrative of the comic book *The Adventures of Anselmo Curioso - The Mysteries of Geometry* written by the French scientist Jean-Pierre Petit, and the fundamental concepts of spherical geometry. The aim is to make this complex area accessible to advanced high school students and undergraduates in the field of exact sciences. Spherical geometry is explored through the adventures experienced by the character Anselmo, providing a playful and contextualized approach to understanding concepts such as geodesics, triangles, and angles on a spherical surface. The comic book narrative is broken down into scenarios that connect to specific aspects of spherical geometry. Through a meticulous analysis of Anselmo Curioso's adventures, parallels with geometric definitions are identified, illustrating abstract concepts through practical situations present in the stories. Concrete examples are presented, such as the shortest distance between New York and Madrid, highlighting how the interaction of the characters and events in the comic book reflects and symbolizes aspects of spherical geometry, making the underlying mathematical principles more tangible. We conclude that the relationship between Anselmo's adventure and the principles of spherical geometry offers a valuable opportunity to demystify advanced mathematical concepts, encouraging interest and deeper understanding of these topics among students.

Key-words: Basic Mathematics; Euclidean geometry; Spherical Geometry

Sumário

Sumário	9
Lista de Figuras	10
1 Introdução	12
2 A Geometria Euclidiana	15
2.1 História da Geometria Euclidiana	15
2.2 Os Elementos	20
2.3 Os postulados de Euclides	25
3 Geometria Esférica	31
3.1 Conceitos e noções	34
3.1.1 Elementos da esfera	34
3.2 Volume e área	41
3.2.1 Volume	41
3.2.2 Uma demonstração da área usando a ideia de limite	43
3.2.3 Outra demonstração da área da Esfera	45
3.3 Distância entre pontos	47
3.4 Exemplos	51
4 Triângulo esférico	56
4.1 Triângulo esférico	56
5 Considerações finais	61
Referências	62
A Aprendendo Geometria Esférica	64

Lista de Figuras

1	Algumas edições das aventuras de Anselmo.	12
2	Tales observando as proporções das sombras.	16
3	Gregos estudando geometria.	18
4	Questionamento sobre as geometrias.	20
5	Papiro de Euclides.	21
6	Anselmo verificando os ângulos do triângulo.	23
7	Postulado I.	27
8	Anselmo e o Postulado I.	28
9	Postulado II.	29
10	Postulado III.	29
11	Postulado IV.	29
12	Postulado V.	30
13	Geodésica.	32
14	Geodésica 2.	33
15	Geodésica 3.	34
16	Antípodas.	36
17	Elementos da Esfera	36
18	Paralelos.	37
19	Arcos.	38
20	Representação 1.	39
21	Representação 2	39
22	Ângulo Esférico.	40
23	Princípio de Cavalieri.	41
24	Princípio de Cavalieri 1.	42
25	Princípio de Cavalieri 2.	42
26	Demonstração da área da Esfera.	43
27	Página 16.	44
28	Sólido	45
29	Esferas concêntricas.	46

30	Distância entre pontos.	48
31	Coordenadas, distância entre pontos.	48
32	Triângulo 1	49
33	Triângulo 2.	49
34	Triângulo 3	50
35	Ângulo α	51
36	Exemplo 3.1.	52
37	Triângulo.	53
38	Exemplo 2.	54
39	Exemplo 3.	55
40	Triângulo esférico - Anselmo	56
41	Triângulo esférico.	57
42	Triângulo esférico - área	58
43	Soma ângulos triângulo esférico 2.	59
44	Soma dos ângulos triângulo esférico.	60

1 Introdução

As Aventuras de Anselmo Curioso é uma série de quadrinhos criada pelo cientista francês Jean-Pierre Petit e publicada pela Éditions Belin, editora francesa especializada em trabalhos universitários, visando divulgação e popularização da Ciência em diversos campos, como a Teoria da Relatividade, funcionamento de aviões, Informática e Geometria.

Figura 1: Algumas edições das aventuras de Anselmo.



Fonte: Savior-frontieres.com.

As aventuras de Anselmo Curioso em desvendar os Mistérios da Geometria [9] se passa em um universo onde “A Sociedade Euclides & C^{ia}” dominava o campo da Geometria, onde serviços e materiais eram vendidos com a promessa de que tudo era correto e funcionava perfeitamente no mundo Euclidiano. Nesse mundo a soma dos ângulos internos

de um triângulo vale 180° . A geodésica, ou seja, a curva que representa o caminho mais curto entre dois pontos, é chamado de segmento de reta.

Nas primeiras partes do livro Anselmo faz alguns experimentos e verifica que alguns resultados prometidos pela Sociedade de Euclides não se faziam verdadeiros como, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo ser maior que 180° , que o comprimento de uma circunferência era diferente de $2\pi r$, ou então que a área do círculo não é dada por πr^2 .

Com o passar da aventura, Anselmo vai conhecendo personagens que vão explicando a ele, de forma sucinta e sem demonstrações, o porquê do não funcionamento da geometria que ele estava tentando aplicar. Porém, um leitor ainda mais curioso que Anselmo necessita de demonstrações e resultados mais bem explicados para aceitar o porquê dos resultados da Geometria Euclidiana não valerem no mundo esférico de Anselmo.

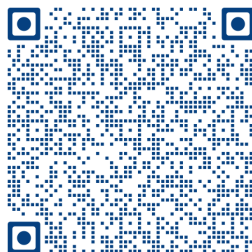
Porém, nem todos tiveram a oportunidade de ter um contato formal com a Geometria Esférica, meu primeiro contato com a mesma foi na disciplina Laboratório de Matemática da Educação Básica com a apresentação do quadrinho de Anselmo pela professora doutora Anete Soares Cavalcanti no penúltimo semestre do curso em Licenciatura Plena em Matemática pela UFRPE.

Nesse sentido, o objetivo desta dissertação é de trazer algumas dessas demonstrações e resultados com a finalidade de auxiliar alunos do Ensino Médio e até nos Anos Iniciais da graduação a entenderem o mundo esférico e se motivarem mais em aprender Matemática por esta forma de apresentação interdisciplinar, trazendo elementos da Literatura com a Matemática. Também trazemos uma proposta de sequência didática para os professores que queiram trabalhar esse tema com seus alunos no ensino básico (APÊNDICE).

Para isso, primeiro trazemos noções iniciais que serão essenciais para o melhor entendimento dos resultados trazidos aqui. Em seguida fazemos um breve apanhado sobre a história da Geometria Euclidiana, bem como o 5º Postulado de Euclides e, assim a criação de uma nova geometria, a chamada Geometria Esférica.

Todas as obras de Jean-Pierre encontram-se disponíveis de forma gratuita em

diversos idiomas no site da organização Savoir sans Frontières (Conhecimento sem Fronteiras) ¹. Para uma maior imersão do leitor ao trabalho aqui proposto recomendamos uma leitura inicial da história em quadrinhos de Anselmo antes da leitura deste trabalho. Abaixo segue um qr corde que encaminha o leitor para as obras de Jean-Pierre Petit.



¹Disponível em: https://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/free_downloads.html#portugais.

2 A Geometria Euclidiana

Nesse capítulo, iremos abordar a Geometria Euclidiana partindo pelo significado da palavra Geometria, seu surgimento no Egito até a formalização e organização proposta por Euclides em seu celebrado livro *Os Elementos* [4]. Utilizaremos como base o livro *Introdução à História da Matemática* [7], além da obra *Os Elementos*.

2.1 História da Geometria Euclidiana

Geometria, do grego *Geometrein*. *Geo*, significa Terra, já *Metrein* quer dizer medir. Isso diz muito da finalidade dessa área da matemática, que ajudou as civilizações antigas como Egípcias e Babilônicas a medirem as terras tanto para demarcar limites de propriedades e o avanço dos rios até a construção de grandes obras, como as pirâmides do Egito.

Essas civilizações não ficaram só na medição de terra ou em construções, elas já sabiam calcular a área aproximada de círculos e tinham conhecimento do Teorema de Pitágoras, antes mesmo do nascimento do matemático que tem seu nome estampado nesse teorema, e também da fórmula do volume de cilindro.

Porém, essas civilizações tratavam a Matemática, em especial a Geometria, como um campo quase que empírico, ou seja, não tinha uma demonstração formal, ao menos não existe nenhum documento histórico que nos diga o contrário. Era observado que as fórmulas davam certo e a partir daí usada nos cálculos. A Geometria passou a ser estudada com olhar dedutivo só com os gregos, tendo como pioneiro o filósofo e matemático Tales de Mileto.

Tales(\simeq 624-546 a.C), nascido em Mileto, na região que hoje conhecemos como Turquia, foi um dos primeiros matemáticos a tratar da matemática como conhecemos hoje em dia. Ele criou proposições geométricas bem como suas respectivas demonstrações.

É contado que Tales desenvolveu o seu teorema mais famoso, que leva inclusive o nome do matemático, ao observar que corpos proporcionais deixavam sombras também proporcionais, inclusive usou esse método para mediar as pirâmides do Egito. Tales fundou a sua escola e teve vários alunos, em especial Pitágoras.

Figura 2: Tales observando as proporções das sombras.



Fonte: Resumos.soescola, 2023 [10].

Pitágoras (\simeq 570-495 a.C) fundou a sua própria escola, a tão conhecida Escola Pitagórica. Tal escola era tida como uma religião, lá eram estudadas a Aritmética, a Música, a Geometria e a Astronomia. Foi produto dessa escola a demonstração do Teorema de Pitágoras e a descoberta dos Números Irracionais, em especial o $\sqrt{2}$. Todo misticismo pitagórico influenciou muitos filósofos e matemáticos, em especial Platão.

Platão (\simeq 427-347 a.C) mais conhecido como filósofo, entre suas principais obras estão: *A República*, *O Banquete* e *A Apologia de Sócrates*; e fundador da *Academia*, que produziu muita matemática, inclusive a proposição de problemas que com o passar do tempo se mostraram impossíveis como a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, ambas utilizando régua e compasso. O próximo grande capítulo da história da Geometria, se dá com Euclides.

Como acontece com muitos fatos históricos da antiguidade, pouca coisa sabemos sobre aquele período. O pouco que sabemos sobre Euclides e os *Elementos* foi deixado por Eudemo (por volta de 400 a 300 a.C.), e apresentado por Bicudo, na introdução da edição dos *Elementos* que estamos utilizando.

E Amyclas de Heracleia, um dos discípulos de Platão e Menaechmus, que é discípulo de Eudoxo, tendo também frequentado Platão, e o seu irmão Deinostratus fizeram ainda mais perfeita a geometria toda. E Theudius de Magnésia pareceu ser o que excede tanto nas matemáticas quanto em relação à outra filosofia. Pois também arranjou convenientemente os Elementos e fez mais gerais muitas coisas das particulares. (Euclides, 2009, p.19)

Proclus de Alexandria continuou o catálogo dos geômetras:

E não muito mais jovem do que esses é Euclides, o que reuniu os Elementos, tendo também, por um lado, arranjado muitas das coisas de Eudoxo e tendo, por outro lado, aperfeiçoado muitas das coisas de Teeteto, e ainda tendo conduzido as coisas demonstradas frouxamente pelos predecessores a demonstrações irrefutáveis. E esse homem floresceu no tempo do primeiro Ptolomeu; pois, também Arquimedes, tendo vindo depois do primeiro, menciona Euclides, e, por outro lado, também dizem que Ptolomeu demandou-lhe uma vez se existe algum caminho mais curto que os Elementos para a geometria e ele respondeu não existir atalho real na geometria. (Euclides, 2009, p.41)

Como visto acima, Euclides não foi o primeiro a reunir os conhecimentos geométricos em um livro denominado *Os Elementos*, e nem tudo o que está no livro foi descoberto por ele. Podemos entender *Os Elementos* como uma obra que mescla conhecimentos de outros matemáticos e de Euclides de forma clara e objetiva com demonstrações bem construídas em cada passo. Pelo fato desta obra ser bem elaborada, preferiam copiá-la em detrimento das outras obras, por ser muito trabalhoso fazer cópias de trabalhos naquela época. Assim, só essa obra sobreviveu às intempéries da história.

Euclides foi convidado por Ptolomeu I para lecionar na recém-formada *Academia de Platão*, considerado um dos primeiros lugares de produzir e compartilhar conhecimento, algo próximo das escolas e universidades de hoje. Tornou-se um dos mais importantes autores de matemática da Antiguidade greco-romana e talvez de todos os tempos, com seu monumental *Os Elementos*, um dos livros de estudos mais utilizado no mundo.

Figura 3: Gregos estudando geometria.



Fonte: Os mistérios da geometria.

Após Euclides, muitos geômetras contribuiriam para a geometria, como, por exemplo, o também grego Arquimedes (\simeq 287-212 a.C), que além de matemático, também foi físico e utilizou de seus estudos sobre parábolas para criar espelhos parabólicos para atear fogo em navios inimigos. Também estudou e publicou sobre Esfera e Cilindros.

Apolônio (\simeq 262-190 a.C) foi o próximo grande geômetra, estudou e ensinou na escola de Alexandria com o seu livro *Cônicas*, que trata sobre curvas cônicas, foi tão importante para geometria que na época em que foi escrita colocou Apolônio como o maior geômetra do seu tempo. Interceptando um cone oblíquo de base circular por planos secantes, o geômetra obteve três curvas conhecidas e estudadas até hoje no Ensino Básico,

são elas: Parábola; Hipérbole e Elipse. Esse estudo das cônicas foi uma antecipação da grande revolução que viria com Descartes.

Por volta do ano 370 d.C nasce em Alexandria no Egito, Hipátia. Educada na Escola de Alexandria, ligada aos ensinamentos de Platão. Hipátia é considerada a primeira mulher a ter trabalhos importantes na Matemática [2], além de ter conhecimento em filosofia e medicina. Sua contribuição para a geometria foi lançar comentários sobre os Elementos de Euclides.

Após Euclides, a próxima grande revolução na geometria foi com o filósofo e matemático René Descartes (1596-1650) com seu tratado *O Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Buscar a Verdade nas Ciências* [3], que continha um ensaio sobre a geometria. Nesse ensaio, Descartes nos apresenta uma nova concepção geométrica. Nessa concepção, Descartes convertia equações em figuras geométricas, assim nasceu o que conhecemos hoje como Geometria Analítica.

Entretanto, todas as contribuições para a Geometria ainda estavam baseadas nos postulados propostos por Euclides. Apesar de vários matemáticos debaterem sobre o 5º Postulado, foi só no século XIX que três matemáticos: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Carl Friedrich Gauss (1777- 1855), descobriram que o postulado era evidente, ou seja, ele era de fato verdadeiro, porém, que ele não era necessário para se construir uma geometria. A figura abaixo, retirada da obra estudada, traz o questionamento de qual a melhor geometria como ponto de partida para apresentar outras geometrias. Daí, surgiram mais geometrias, como a esférica, a qual vamos estudar no próximo capítulo, mas antes disso iremos fazer um resumo dos Elementos de Euclides.

Figura 4: Questionamento sobre as geometrias.



Fonte: Os mistérios da geometria.

2.2 Os Elementos

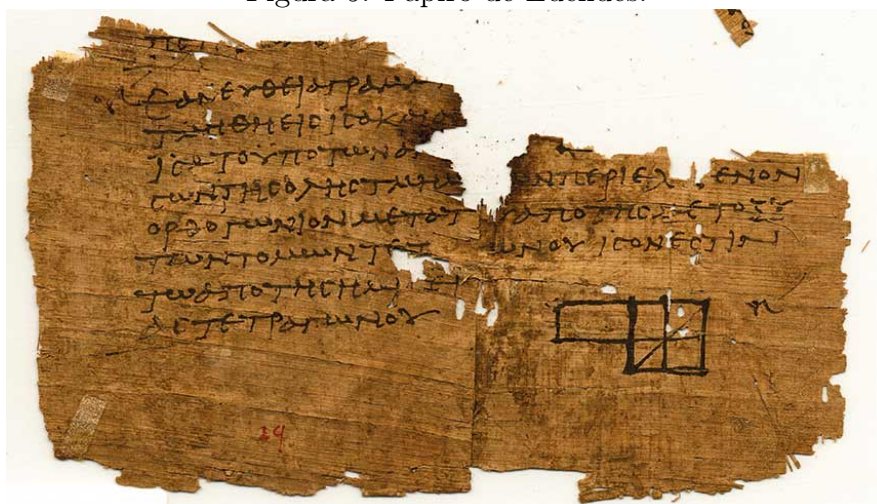
Euclides foi um matemático nascido em Alexandria, no Egito e é conhecido como o *pai da geometria* devido à sua obra mais famosa, chamada *Os Elementos*. No livro, Euclides estabeleceu os fundamentos da geometria euclidiana, baseado em postulados e axiomas.

A coleção de treze livros com 465 proposições, 372 teoremas deduzidos a partir de 5 axiomas, 5 postulados e 138 definições. Os livros abrangem vários aspectos da Matemática, com foco especial na Geometria.

Os Elementos de Euclides são considerados um marco na história da Matemática e da Educação. Como visto anteriormente, Euclides não foi o primeiro a reunir os conhecimentos geométricos em um livro, e nem tudo o que está no livro foi descoberto por ele. Podemos entender que tal obra mescla conhecimentos de outros matemáticos e de Euclides de forma clara e objetiva com demonstrações bem construídas em cada passo.

Pelo fato desta obra ser bem elaborada, preferiam copiá-la em detrimento das outras obras, por ser muito trabalhoso fazer cópias de trabalhos naquela época. Assim, só essa obra sobreviveu às intempéries da história. Abaixo trazemos um fragmento do papiro original de Euclides.

Figura 5: Papiro de Euclides.



Fonte: National geographic [5].

A partir dos axiomas e postulados, Euclides desenvolveu muitas teorias e demonstrações matemáticas em seu livro, estabelecendo uma base sólida para o estudo da Geometria por muitos séculos. Ele começa com conceitos básicos, como pontos, linhas e ângulos e, em seguida, avança para tópicos mais complexos, como polígonos, círculos, áreas e volumes.

A abordagem de Euclides na geometria é dedutiva, ou seja, ele parte de princípios fundamentais e utiliza a lógica para derivar teoremas e propriedades adicionais. Ele estabeleceu um padrão rigoroso para a demonstração matemática, introduzindo a noção de “prova” como uma sequência ordenada de argumentos lógicos que levam à conclusão desejada.

Além da geometria plana, Euclides também explorou a geometria sólida, como a dos poliedros regulares. Ele descreveu os cinco poliedros regulares convexos conhecidos como “sólidos platônicos”: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Esses sólidos têm propriedades únicas e simetrias intrincadas que foram estudadas e admiradas por matemáticos e filósofos ao longo da história.

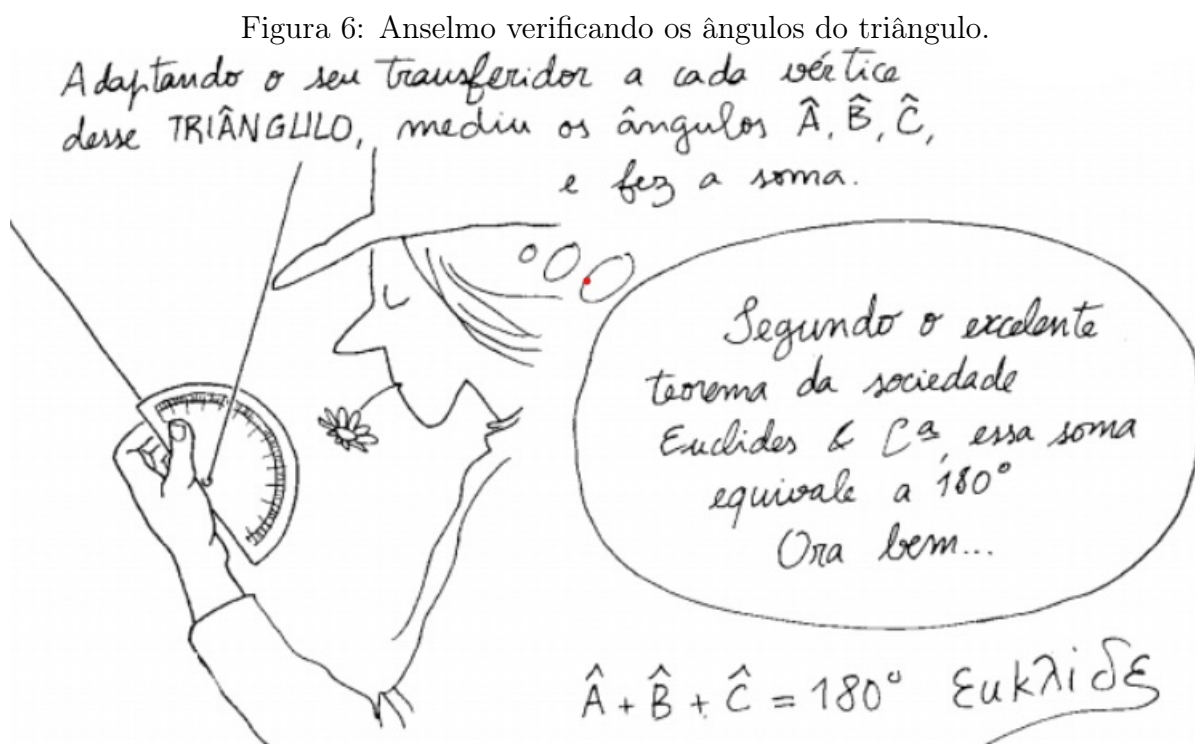
O *Livro I* dos *Elementos* de Euclides, também conhecido como *Livro dos Postulados* é composto por 48 proposições que determinam os fundamentos da geometria euclidiana. Ele começa com uma série de definições e axiomas que estabelecem os termos e as propriedades fundamentais que serão utilizados ao longo da obra.

Uma das definições importantes é a definição de ponto, que é uma posição sem dimensões no espaço. A partir disso, Euclides define linhas retas, ângulos, círculos e outras formas geométricas básicas.

Os cinco primeiros postulados estabelecem as condições básicas que regem a geometria euclidiana. Esses postulados incluem afirmações como “é possível traçar uma linha reta entre dois pontos quaisquer”, “todos os ângulos retos são iguais” e “se uma linha reta cai sobre duas linhas retas de tal maneira que os ângulos adjacentes sejam menores que dois ângulos retos, então as duas linhas estendidas se encontrarão em algum ponto do lado em que estão os ângulos menores”.

Os postulados e definições fornecidos nas primeiras 28 proposições do *Livro I* são utilizados para derivar uma série de teoremas e proposições subsequentes. Essas proposições abrangem uma ampla variedade de tópicos, incluindo propriedades das linhas retas, ângulos, triângulos, quadriláteros e círculos.

Nas primeiras páginas da *Aventura de Anselmo*, ele passa por alguns desses resultados e definições da geometria euclidiana, um desses resultados é o teorema das somas dos ângulos internos de um triângulo (*Proposição 32 do Livro I*), como mostra a figura abaixo.



Fonte: Os mistérios da geometria.

O *Livro II*, trata principalmente das propriedades dos retângulos, incluindo as propriedades básicas dos ângulos retos, os teoremas envolvendo lados e diagonais de retângulos, e a relação entre os lados de retângulos semelhantes. Nesse livro podemos também observar uma algebrização da geometria, exemplo disso é a *Proposição 4*: “Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos.” Que pode ser entendido como o produto notável $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

O *Livro III* é dedicado ao estudo das propriedades e relações dos círculos e suas partes, como arcos, setores, cordas e ângulos inscritos.

O livro começa com uma série de definições, incluindo a definição de círculo, centro de um círculo, diâmetro e raio. Euclides também introduz a noção de um arco de um círculo, que é uma porção da circunferência entre dois pontos.

Uma parte significativa do livro é dedicada ao estudo das relações entre os comprimentos de diferentes arcos e cordas de um círculo. Euclides demonstra que arcos

congruentes correspondem a cordas congruentes e que ângulos inscritos em um mesmo arco são congruentes e que ângulos inscritos em arcos congruentes são congruentes também (*Proposição 21*).

No *Livro IV*, que tem dezesseis proposições, discute-se principalmente a construção de figuras inscritas e circunscritas (polígonos regulares e o círculo), bem como sua inscrição circunscritão num dado círculo, como na *Proposição 2* que o autor mostra como inscrever um triângulo equiângulo com o triângulo dado, ou na *Proposição 4* em que Euclides mostra como inscrever um círculo no triângulo dado.

O *Livro V* é dedicado ao estudo das proporções nas figuras geométricas. Ele começa com uma série de definições e postulados relacionados a este assunto. Euclides define a proporção como uma igualdade de duas razões e estabelece os princípios fundamentais da teoria. Neste livro, Euclides demonstra várias propriedades importantes, como a transição de proporções, a adição, subtração, multiplicação e divisão de proporções. Ele também introduz o conceito de proporção contínua e apresenta regras para manipulá-las.

O *Livro VI* dos *Elementos* de Euclides continua a tratar das proporções, só que agora nas figuras semelhantes na geometria. Neste livro, o autor traz vários teoremas fundamentais da semelhança de triângulos, bem como construção das médias proporcionais.

Os *Livros VII, VIII e IX* se dedicam a estudar os números: O algoritmo euclidiano da divisão; calcular máximo divisor comum; números em progressões geométricas; números quadrados; definição de número primo; número composto; a existência de infinitos números primos, etc.

O *Livro X* é dedicado ao estudo da teoria dos números irracionais. Euclides aborda ainda a geometria dos números e explora as relações entre números e formas geométricas. O livro serve como uma introdução à teoria dos números e estabelece as bases para futuros desenvolvimentos nesta área da Matemática.

Os últimos livros dos *Elementos* de Euclides, são dedicados ao estudo da geometria dos sólidos. Euclides explora as propriedades dos sólidos platônicos, que são poliedros convexos com faces regulares idênticas. Os cinco sólidos platônicos são o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, além de estabelecer suas propriedades

básicas, como o número de faces, vértices e arestas de cada sólido.

Após fazer um resumo da coleção dos *Elementos* de Euclides, vamos agora fazer uma análise dos postulados de Euclides e de como o personagem Anselmo no quadrinho *As aventuras de Anselmo Curioso em desvendar os Mistérios da Geometria* não conseguiu aplicar as regras da Geometria Euclidiana.

2.3 Os postulados de Euclides

No começo de cada livro, Euclides nos traz algumas definições que ele usará pra construir os conhecimentos geométricos. No primeiro livro, além das definições, Euclides também nos apresenta os postulados.

Os postulados são proposições admitidas sem a necessidade de demonstração, ou seja, junto das definições formam o arcabouço da geometria que Euclides nos apresenta. A seguir, apresentamos algumas definições importantes para a construção e entendimento da geometria.

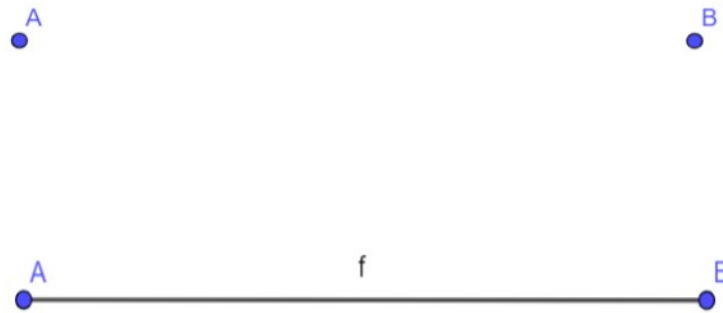
- Ponto é aquilo de que nada é parte.
- E linha é comprimento sem largura.
- E extremidades de uma linha são pontos.
- E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
- Uma superfície plana é uma superfície sobre a qual assenta toda a linha reta entre dois pontos quaisquer da superfície.
- Um ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas que se tocam numa superfície plana e que não fazem parte da mesma linha reta.
- E quando as linhas que contêm o ângulo são linhas retas, o ângulo chama-se retilíneo (raso).
- Quando uma linha reta, incidindo com outra linha reta, fizer com esta dois ângulos adjacentes iguais, cada um desses ângulos é reto, e a linha reta incidente diz-se perpendicular à linha com a qual incide.

- Um ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.
- Um ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.
- Uma fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
- Uma figura é aquilo que está contido por uma ou mais fronteiras.
- Um círculo é uma figura plana fechada por uma só linha de forma que todas as linhas retas, que de um ponto existente no meio da figura (Centro) se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.
- E o referido ponto da definição anterior chama-se centro do círculo.
- O diâmetro do círculo é uma linha reta que passa pelo centro e termina, em ambas as direções, na circunferência e tal linha também bissecta o círculo.
- Um semicírculo é uma figura compreendida entre o diâmetro e a circunferência que é cortada pelo diâmetro. E o centro do semicírculo é o mesmo que o do círculo.
- Figuras retilíneas são as que são formadas por linhas retas, sendo as figuras triláteras as que são formadas por três linhas retas, as quadriláteras as que são formadas por quatro linhas retas, e as multiláteras as que são formadas por mais de quatro linhas retas.
- Das figuras triláteras, o triângulo equilátero é a que tem três lados iguais, o triângulo isósceles a que tem dois lados iguais e o triângulo escaleno a que tem os três lados desiguais.
- Das figuras triláteras, o triângulo retângulo é a que tem um ângulo reto, o triângulo obtusângulo é a que tem um ângulo obtuso e o triângulo acutângulo é a que tem todos os ângulos agudos
- Linhas retas paralelas são linhas retas que, estando na mesma superfície plana e sendo estendidas indefinidamente em ambas as direções, nunca se chegam a tocar.

Após apresentar as definições acima e outras não mencionadas aqui, Euclides faz os seguintes postulados:

Postulado 1 *Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;*

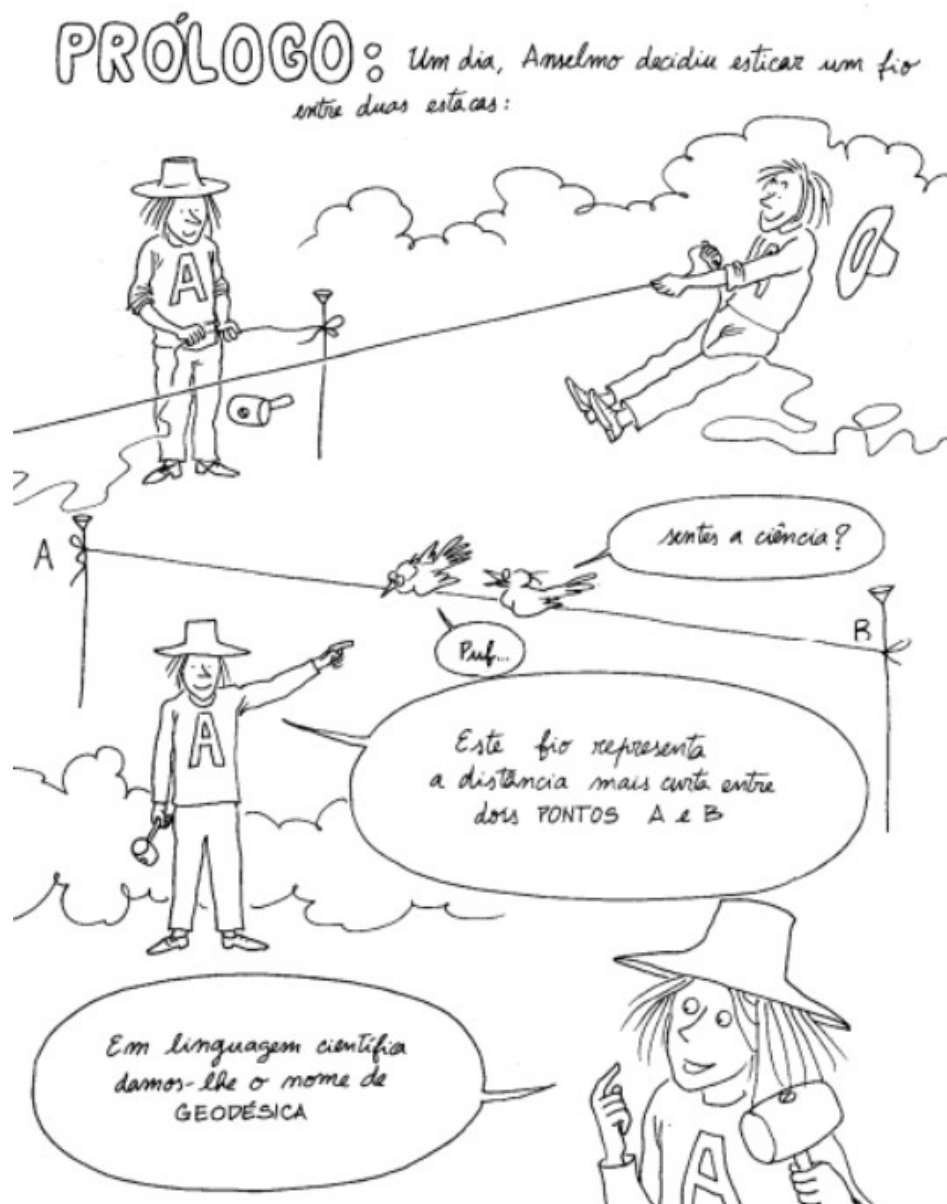
Figura 7: Postulado I.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Podemos observar na página 10 na aventura de Anselmo o Postulado I, na prática.

Figura 8: Anselmo e o Postulado I.



Fonte: Os mistérios da geometria.

Iremos falar mais adiante, na página 30, sobre o conceito de “Geodésica” apresentado por Anselmo.

Postulado 2 *Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;*

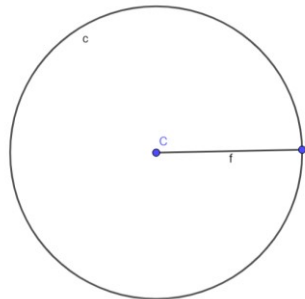
Figura 9: Postulado II.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Postulado 3 *Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;*

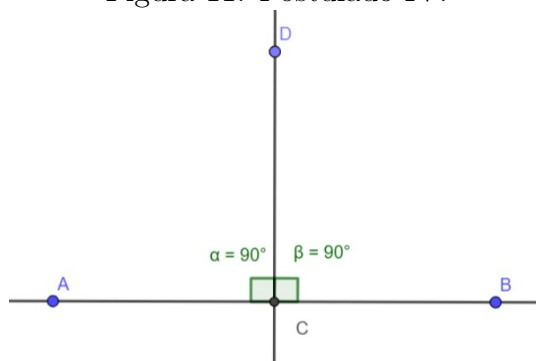
Figura 10: Postulado III.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Postulado 4 *Todos os ângulos retos são congruentes (semelhantes);*

Figura 11: Postulado IV.

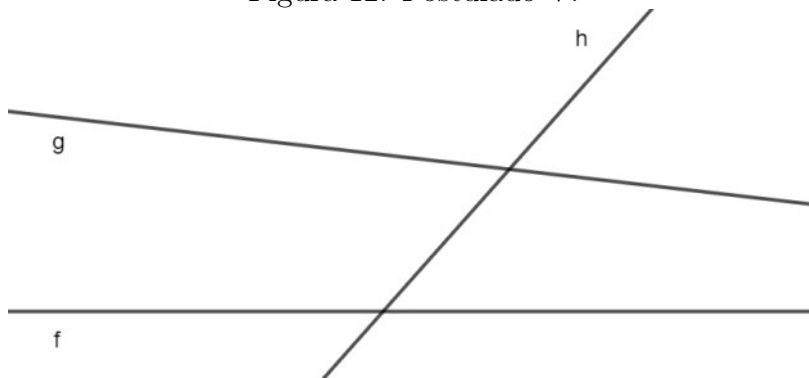


Fonte: Autor - GeoGebra.

E por fim, o 5º postulado, debatido por anos. Acreditavam que tal postulado era, na verdade, uma proposição. Ao tentar provar a negação de tal postulado surgiu outras geometrias,

Postulado 5 *Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menor do que dois retos, prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos*

Figura 12: Postulado V.



Fonte: Autor - GeoGebra.

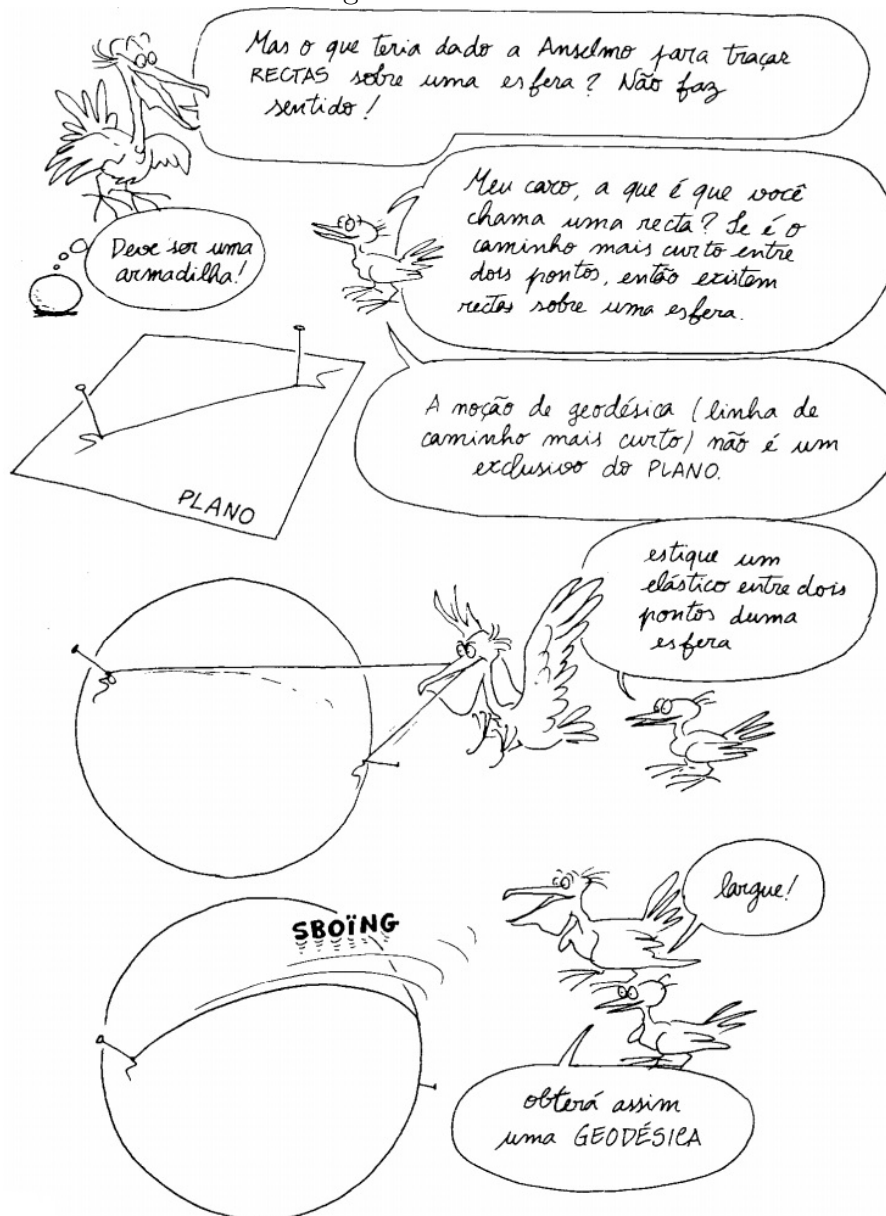
Podemos reescrever tal postulado da seguinte forma: dado um ponto P que não pertence à reta r , existe uma única reta s no plano que contém P e r que passa por P e não intersecta r . Negar tal postulado é afirmar que: dado um ponto P que não pertence à reta r , ou existem infinitas retas que passam por P e é paralela a r , ou não existe reta que passa por P e é paralela a r .

3 Geometria Esférica

O próximo grande passo da História da Geometria ocorreu quando matemáticos começaram a explorar sistemas geométricos baseados em postulados e axiomas diferentes dos estabelecidos por Euclides. Esta iniciativa gerou o que hoje conhecemos por Geometria Não Euclidiana. Um exemplo importante disso é a geometria na esfera, também conhecida como Geometria Esférica.

A Geometria Esférica é o estudo das propriedades geométricas de uma superfície esférica, como a superfície da Terra. Ao contrário da Geometria Euclidiana, em que as linhas retas são infinitamente estendidas, na Geometria Esférica, as “retas” (geodésicas) são arcos de grandes círculos (círculos cujo centro coincide com o centro da esfera). Esses arcos são as “retas”. Vejamos conforme mostrado nas *Aventuras de Anselmo*.

Figura 13: Geodésica.



Fonte: Os mistérios da geometria.

Na geometria esférica, ao contrário da euclidiana, se um observador caminhar em “linha reta” sobre uma superfície esférica chegará, após um tempo, ao ponto de partida.

Figura 14: Geodésica 2.

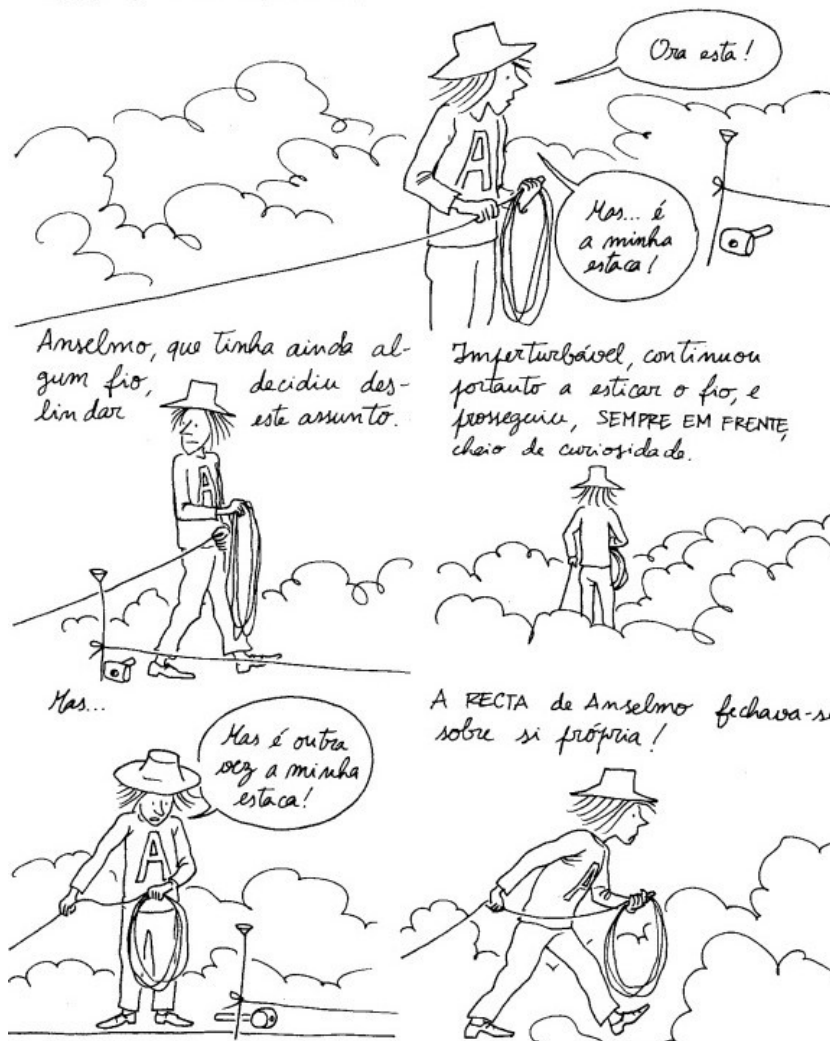


Fonte: Os mistérios da geometria.

Observamos tal fato na jornada de Anselmo, ao esticar bem uma linha reta na superfície esférica, ele acaba retornando ao mesmo ponto.

Figura 15: Geodésica 3.

Mas, não sei se já deram por isso, há dias em que tudo corre ao contrário.



Fonte: Os mistérios da geometria.

3.1 Conceitos e noções

No intuito de responder com mais detalhes aos questionamentos de Anselmo, trataremos, nesta seção, definições presentes na teoria da Geometria Esférica.

3.1.1 Elementos da esfera

Para definir a esfera, vamos trazer a definição presente no livro *Geometria* de Antônio Neto da coleção PROFMAT. [8]. Já para as definições da Geometria Esférica,

iremos utilizar o livro *Geometria Esférica - A trigonometria esférica como solução para a Navegação Astronômica* [1] bem como o artigo *Trigonometria Triangular Esférica* [11].

Definição .1 *A superfície esférica (ou simplesmente esfera) de centro O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a O é igual a R . A esfera é o análogo tridimensional do círculo.*

Como a distância entre o centro da Terra e seus extremos não variam muito em relação ao raio da terra (6.371 km), vamos tratar a Terra como uma esfera e usá-la como exemplo base de objeto de estudo da Geometria Esférica. De fato, o ponto mais baixo, a Fossa das Marianas, localizada no Pacífico Ocidental, 300 km a leste das Ilhas Marianas, com 11.034 metros de profundidade, isso representa apenas 0,17% do raio da Terra. Já o ponto mais alto, o Monte Everest, localizado no Nepal, possui 8.848 metros acima do nível do mar, representando 0,12% do raio da Terra.

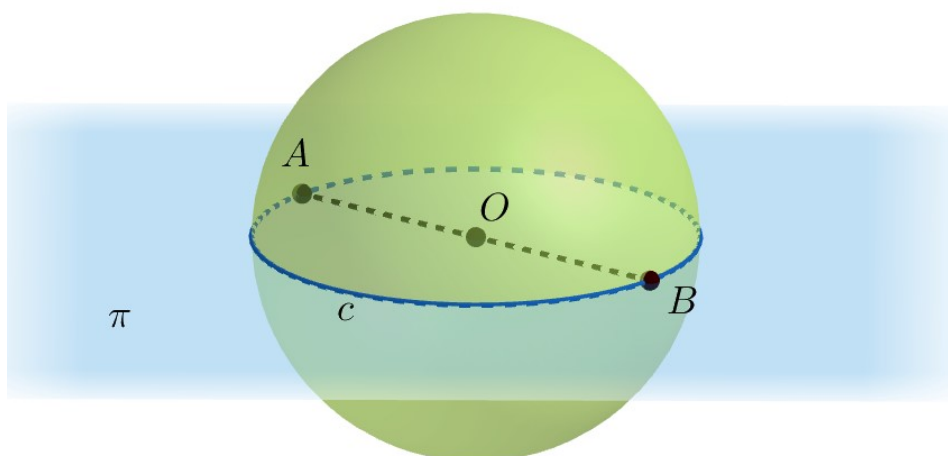
Definição .2 *O círculo obtido pela intersecção de uma esfera com um plano contendo o seu centro é denominado círculo máximo, ou geodésica.*

Definição .3 *Dois pontos diametralmente opostos sobre um círculo máximos são chamados antípodas.*

Na Terra, exemplos de pontos antípodas são Antártica e Ártico, a primeira fica localizada no polo Sul, já a segunda está localizada no polo norte.

Abaixo, trazemos a representação do círculo máximo c e dos pontos antípodas A e B que pertencem à intersecção do plano π com a esfera.

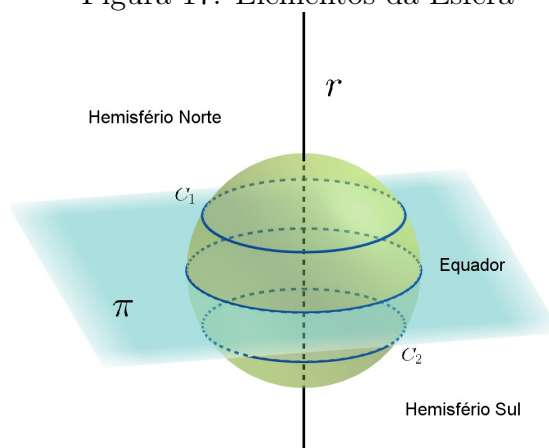
Figura 16: Antípodas.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Chamamos de **Eixo polar** (reta r da figura abaixo), a reta que contém o centro da Terra e a qual ela faz o movimento de rotação (girar no próprio eixo). O plano perpendicular ao eixo polar que passa pelo centro da esfera é chamado de **Plano Equador** e divide a esfera em duas partes, chamadas **Hemisfério Norte** e **Hemisfério Sul**. A circunferência determinada entre a esfera e o Plano Equador é chamada de **Equador**. Já as outras circunferências que são a intersecção da esfera com planos paralelos ao plano Equador são chamadas de **Paralelos**.

Figura 17: Elementos da Esfera

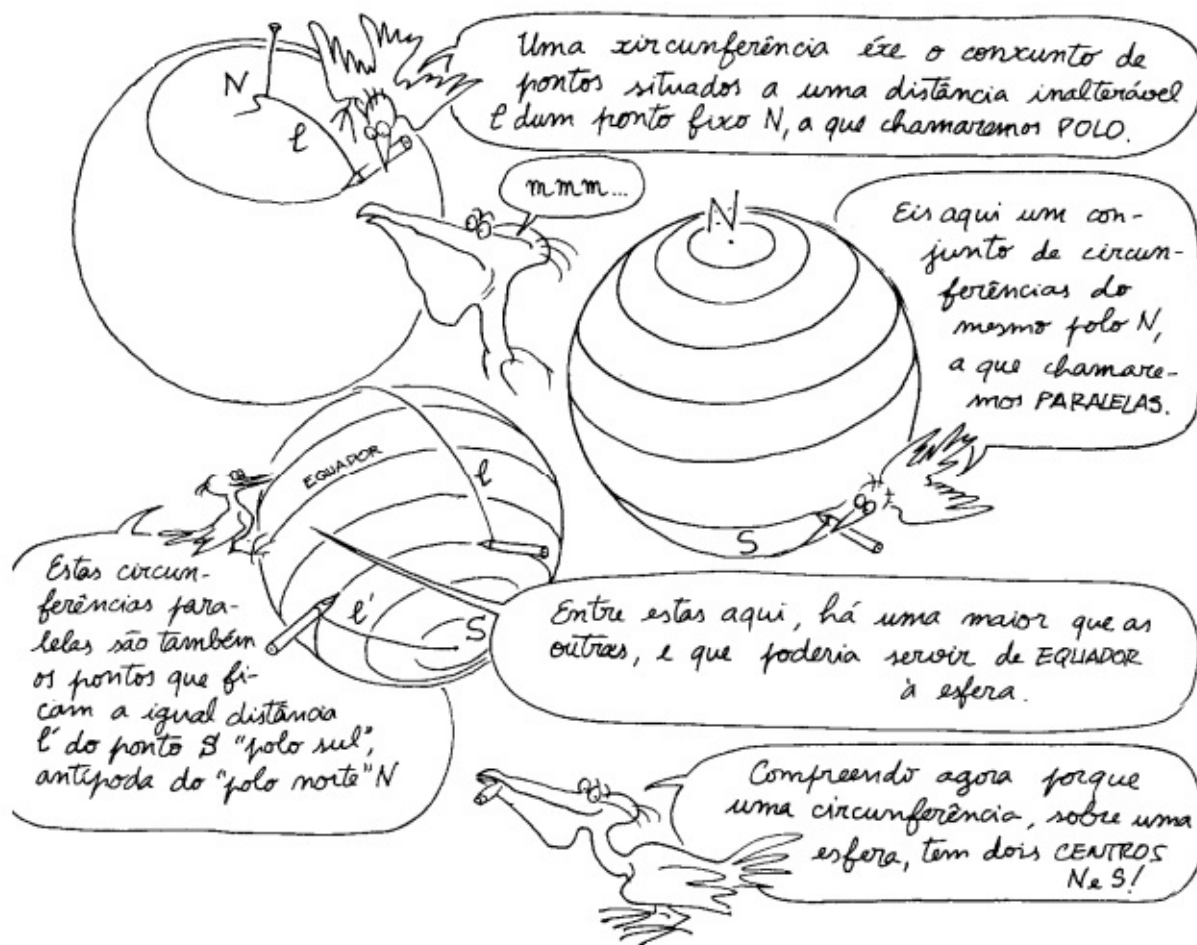


Fonte: Autor - GeoGebra.

3.1 Conceitos e noções

Uma outra forma de entender o que são os paralelos e como é definido nas Aventuras de Anselmo, um dos pássaros que o acompanha, define que uma circunferência é o conjunto de pontos situados a uma distância fixa de um de ponto, chamando de **Polo**. Em seguida, define paralelos como o conjunto de circunferências de um mesmo polo. Vejamos na imagem abaixo.

Figura 18: Paralelos.



Fonte: Os mistérios da geometria.

Já o **Meridiano** são semicircunferências que ligam os polos norte e sul. Dentre os meridianos, o principal é o Meridiano de Greenwich², bairro inglês onde era localizado o

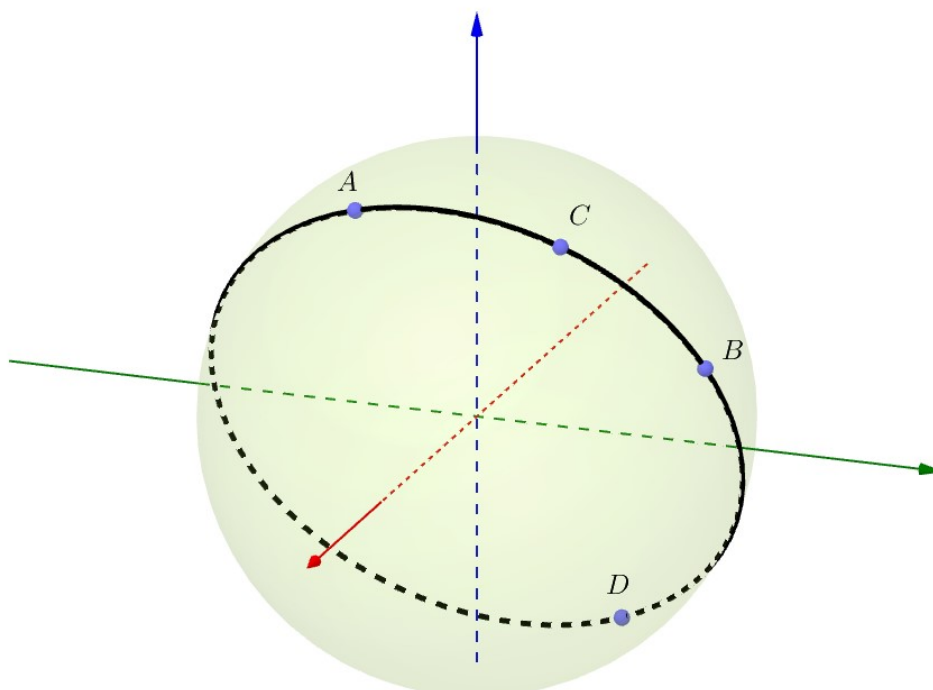
²Em 1884 ficou decido oficializar o Meridiano de Greenwich como longitude 0° e também a contagem do 1º de janeiro as 00h em Greenwich. A cada intervalo de 15° de longitude o fuso horário varia em 1 hora. Por exemplo, Brasília tem latitude de 48° e está na faixa de $-37,5^\circ$ e $-52,5^\circ$ e portanto tem fuso de

Observatório Astronômico Real.

Definição .4 Dados dois pontos distintos sobre uma esfera, eles dividem o círculo máximo que os contém em duas porções denominadas arcos.

Dados os pontos A e B sobre uma esfera. Temos dois arcos com extremos AB , o arco que passa por C e o arco que passa por D .

Figura 19: Arcos.



Fonte: Autor - GeoGebra

Definição .5 Dado um ponto P na superfície terrestre a Latitude de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o Equador e que está contido em um meridiano. A latitude se mede de 0 grau a 90 graus e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificada em N (North - Norte em inglês) ou S (South - Sul em inglês).

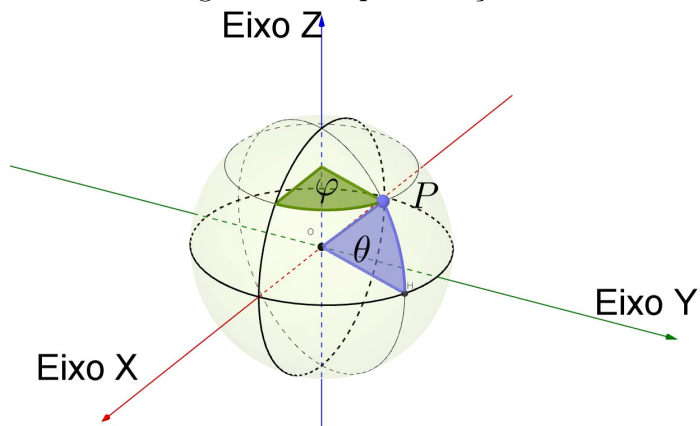
Definição .6 Dado um ponto P na superfície terrestre a Longitude de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o Meridiano de Greenwich e que

-3 horas em relação a Greenwich.

está contido em um paralelo. A longitude mede de 0 grau a 180 graus e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificada em E (East - leste em inglês) ou W (West - oeste em inglês).

Podemos representar um ponto P pertencente a superfície esférica, como sendo $P = (R, \varphi, \theta)$, onde R é o raio da esfera; φ é o ângulo entre a projeção do ponto P no plano XY com o eixo X ; e θ é o angulo entre o plano XY e o raio OR .

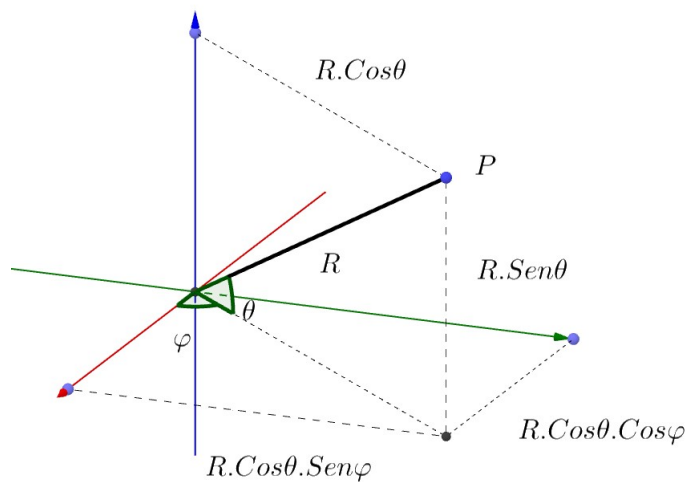
Figura 20: Representação 1.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Uma outra representação é $P = R(\mathbf{i} \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \sin \theta)$

Figura 21: Representação 2



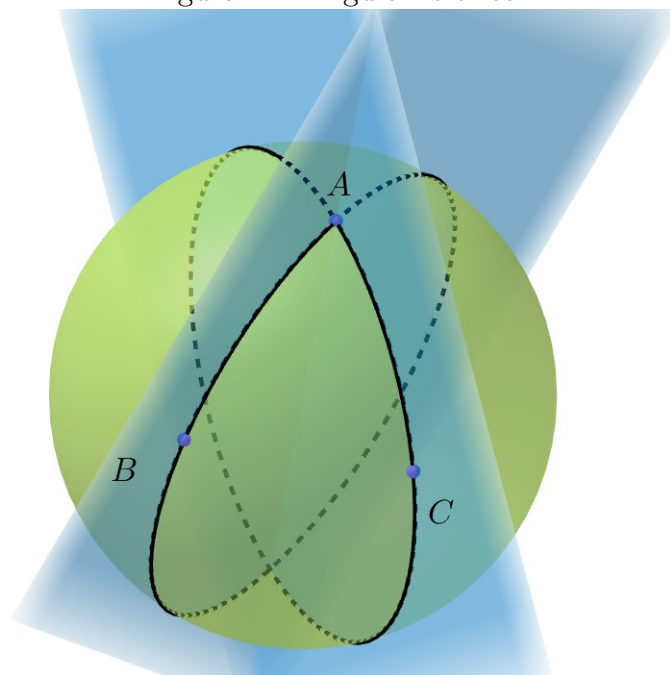
Fonte: Autor - GeoGebra

Já na Terra, representamos um ponto também por duas coordenadas (já que para o dia a dia consideramos a terra uma esfera): a Latitude, que é o ângulo θ ; a Longitude, que é o ângulo φ .

Definição .7 O ângulo formado por dois círculos máximos é denominado *ângulo esférico*.

Definição .8 Dois círculos máximos se intersectam em dois pontos antípodas, dividindo a esfera em quatro regiões, sendo cada uma delas delimitadas por semicírculos máximos. Estas regiões são denominadas *fusos esféricos*. Os arcos que limitam essas regiões são chamados *lados do fuso* e os pontos de intersecção dos círculos máximos que contém esses arcos são denominados *vértices do fuso*.

Figura 22: Ângulo Esférico.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Note que, assim como no plano, duas retas determinam quatro ângulos, sendo iguais dois a dois. Na esfera ocorre o mesmo. Então é preciso identificar qual ângulo estamos nos referindo. Por isso, vamos orientar os ângulos conforme a figura acima como sendo \widehat{BAC} o ângulo menor e \widehat{CAB} o ângulo maior, esses ângulos são chamados de **ângulos diedros**.

Note também, que para determinar o ângulo esférico entre dois círculos máximos, basta determinar o ângulo entre os planos que contenha cada um dos círculos máximos. Uma outra forma de obter o ângulo esférico é obter a medida do ângulo entre as tangentes dos dois círculos máximos.

É importante ressaltar que o ângulo esférico, em geral, não coincide com o ângulo feito por retas no plano. Na Seção 3.4 trazemos um exemplo que mostra a diferença entre os ângulos.

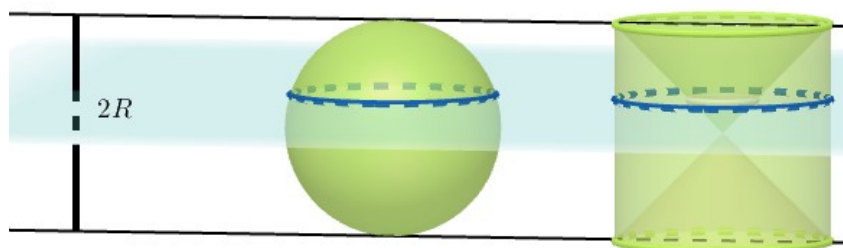
3.2 Volume e área

Nesta Seção, iremos mostrar como obter as medidas de volume e área de uma esfera, conhecido o valor do seu raio, este último será de suma importância para o entendimento do capítulo seguinte, quando trataremos sobre triângulo esférico.

3.2.1 Volume

Podemos obter o volume da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri³: Dados dois sólidos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos em figuras de mesma área, então, esses sólidos têm mesmo volume. No nosso caso, vamos comparar uma esfera de raio R e o sólido gerado por um cilindro reto cuja base é um círculo de raio R e altura $2R$ retirados dois cones de raio da base R e altura R .

Figura 23: Princípio de Cavalieri.



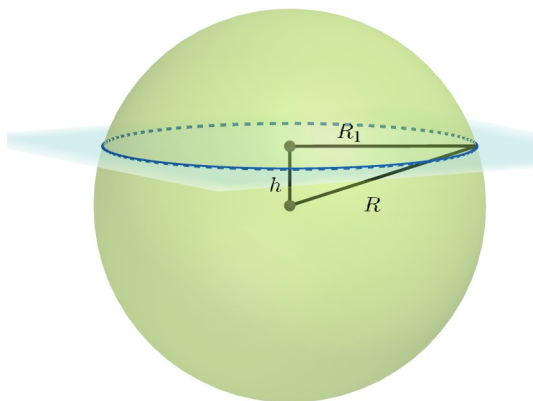
Fonte: Autor - GeoGebra.

Note que a intersecção da esfera de raio R com um plano que está a uma distância

³Para saber mais sobre o Princípio de Cavalieri, ler o Capítulo 11, Seção 3 do livro A matemática do Ensino médio - Volume 2 [6]

h do centro é um círculo de área πR_1^2 , e como $R_1^2 = R^2 - h^2$, temos que a área desse círculo é $\pi(R^2 - h^2)$.

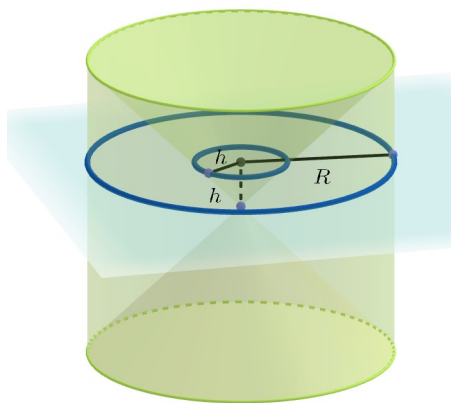
Figura 24: Princípio de Cavalieri 1.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Por outro lado, temos que a intersecção desse mesmo plano com o sólido gerado por um cilindro reto cuja base é um círculo de raio R e altura $2R$ retirados dois cones de raio da base R e altura R é uma coroa circular cuja área é $\pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2)$.

Figura 25: Princípio de Cavalieri 2.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Assim, temos que o volume da esfera é dado pelo volume do cilindro de base circular de raio R e altura $2R$, menos o volume de dois cones de altura R e base de raio R .

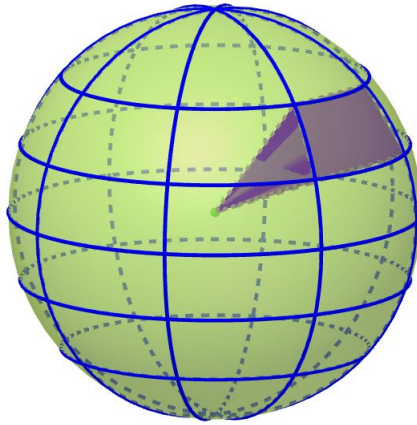
$$V_e = \pi \cdot R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R$$

$$V_e = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

3.2.2 Uma demonstração da área usando a ideia de limite

Suponha a esfera de raio R , dividimos a superfície dela em um número n muito grande de regiões com área e perímetro muito pequenos. Como essas regiões são “quase” planas, se n for muito grande, podemos entender que são base de um cone com centro igual ao da esfera.

Figura 26: Demonstração da área da Esfera.



Fonte: Autor - GeoGebra.

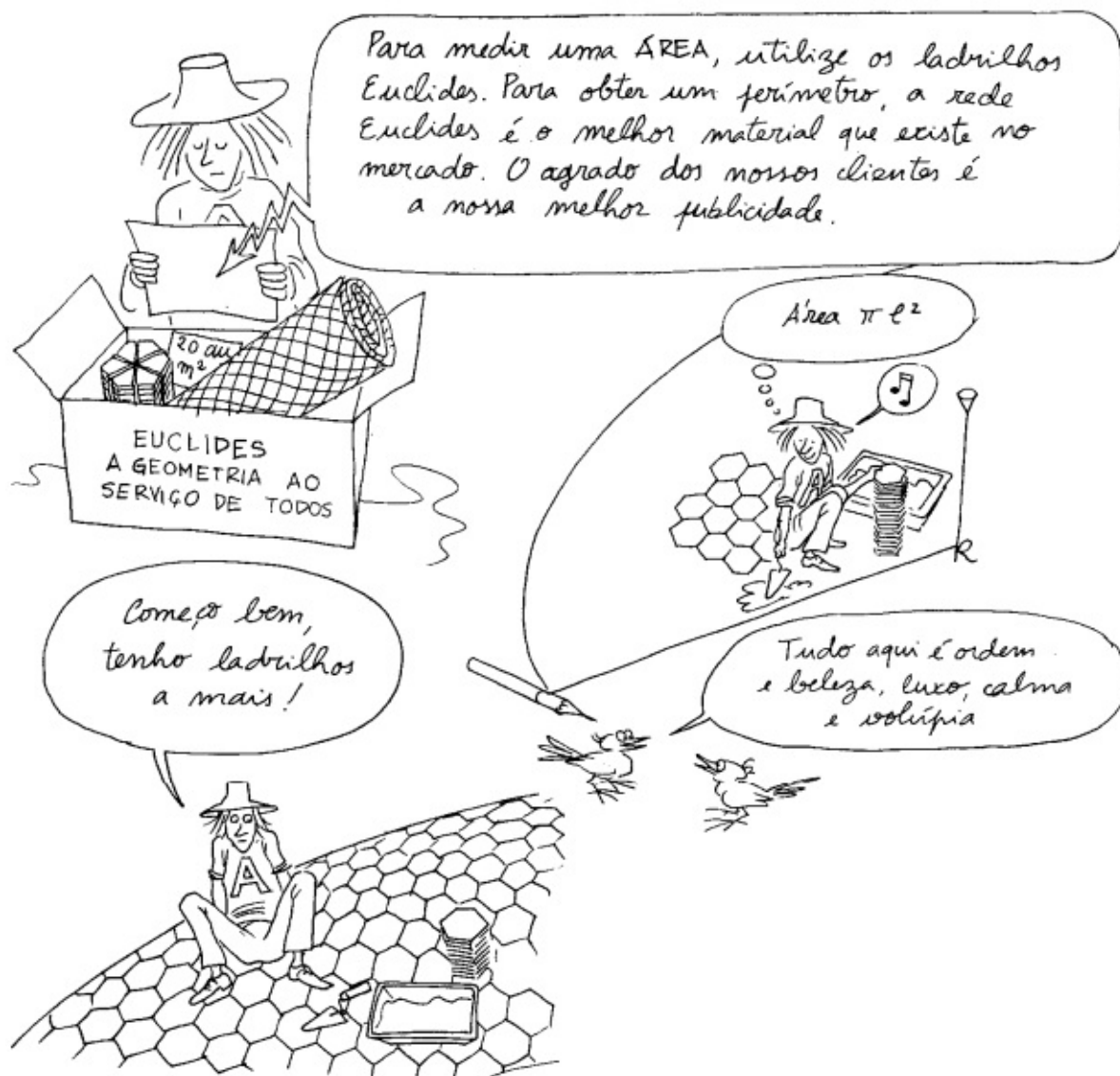
Assim, a esfera ficará dividida em n cones, todos com altura aproximadamente igual a R . Denotado por A a área da esfera, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ a área das regiões que formam a base do cone, V_c o volume da esfera e $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ o volume dos n cones, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} V_e &= V_{c_1} + V_{c_2} + \dots + V_{c_n}, \\ \frac{4\pi R^3}{3} &= \frac{R \cdot A_1}{3} + \frac{R \cdot A_2}{3} + \dots + \frac{R \cdot A_n}{3}, \\ \frac{4\pi R^3}{3} &= \frac{R(A_1 + A_2 + \dots + A_n)}{3}, \\ \frac{4\pi R^3}{3} &= \frac{R \cdot A}{3}. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que $A = 4\pi R^2$. ■

Podemos ver na Página 16 das *Aventuras de Anselmo* (ver [9]) que os ladrilhos utilizado para medir a área da circunferência pode ser entendido como as áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ das regiões que formam a base do cone da demonstração acima.

Figura 27: Página 16.

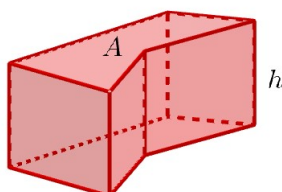


Fonte: Os mistérios da geometria.

3.2.3 Outra demonstração da área da Esfera

Consideremos uma figura de área A e um sólido de altura h e bases paralelas congruentes à figura de área A , como mostra a figura abaixo:

Figura 28: Sólido



Fonte: Autor - GeoGebra

Assim, o sólido pode ser considerado como o empilhamento da figura de área A ao longo da altura h , sendo o volume do mesmo dado por:

$$V = Ah,$$

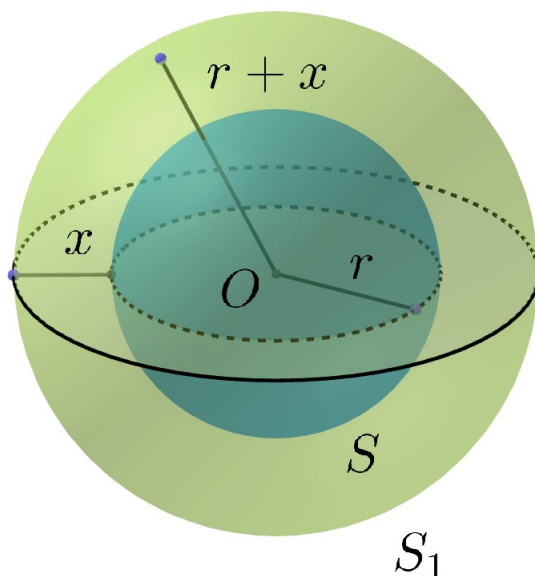
assim,

$$A = \frac{V}{h}$$

Concluimos que, quando h fica cada vez menor, o quociente $\frac{V}{h}$ se aproxima cada vez mais da área A . Vamos usar essa tática para demonstrar a área da esfera.

Seja S uma esfera de raio R . Dado um número positivo h , consideramos outra esfera S_1 de raio $R + h$. A região compreendida entre essas duas esferas concêntricas é uma reunião de segmentos de reta de comprimento h (diferença entre os raios). Cada um desses segmentos é perpendicular a ambas as esferas.

Figura 29: Esferas concêntricas.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Logo é intuitivamente aceitável que, para valores pequenos de h , o volume V dessa casca seja aproximadamente igual a $A \cdot h$, onde A é a área da esfera de raio R . Usando a fórmula do volume da esfera, temos:

$$\begin{aligned} V(S_1) - V(S) &= \frac{4}{3}\pi(R + h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \\ V(S_1) - V(S) &= \frac{4}{3}\pi(R + h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \\ V(S_1) - V(S) &= \frac{4}{3}\pi[(R + h)^3 - R^3] \\ V(S_1) - V(S) &= \frac{4}{3}\pi(3R^2h + 3Rh^2 + h^3) \\ V(S_1) - V(S) &= \frac{4}{3}\pi h(3R^2 + 3Rh + h^2) \\ \frac{V(S_1) - V(S)}{h} &= \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3Rh + h^2) \end{aligned}$$

Pela igualdade acima vemos que, quando h se aproxima cada vez mais de zero, o

valor $\frac{V(S_1)-V(S)}{h}$ se aproxima ⁴ de A . Portanto,

$$A = \frac{V(S_1) - V(S)}{h} = \frac{4}{3}\pi 3R^2$$

$$A = \frac{V(S_1) - V(S)}{h} = 4\pi R^2$$

Donde, concluímos que $A = 4\pi R^2$ ■

3.3 Distância entre pontos

Sabemos, até agora, definições gerais da geometria esférica, porém ainda falta sabermos como medimos na Geometria Esférica. Por isso, nesta seção iremos estudar a distância entre pontos.

Definição .9 *A distância entre dois pontos distintos sobre uma esfera é o comprimento do menor arco determinado por eles.*

Sabemos que a circunferência tem comprimento igual a $2\pi R$, logo se quisermos um setor, basta fazer uma regra de três simples em relação ao ângulo central já conhecido da Geometria Euclidiana Plana:

Ângulo central	Comprimento
2π	\rightarrow $2\pi R$
α	\rightarrow x

$$2\pi x = \alpha 2\pi R,$$

$$x = \frac{\alpha 2\pi R}{2\pi},$$

$$x = \alpha R.$$

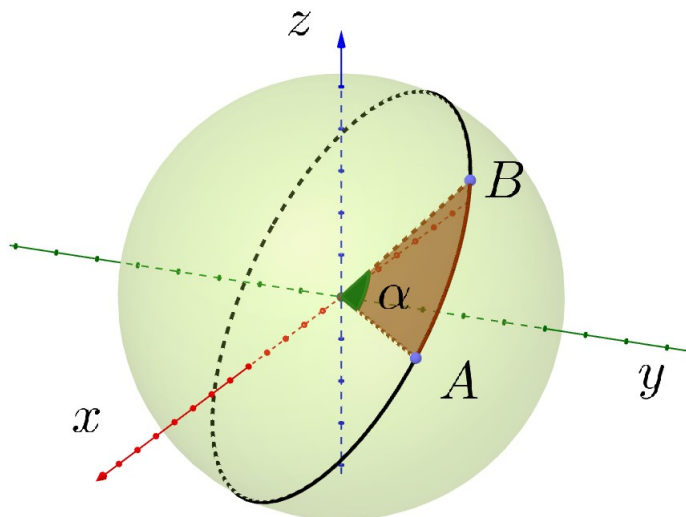
Portanto, o comprimento do setor circular e conseqüentemente a distância entre dois pontos na superfície esférica é dada por: $d(A, B) = \alpha R$, onde α é o ângulo entre os dois pontos em radiano.

⁴Nas duas demonstrações da área da Esfera utilizamos o conceito de limites, mas optamos por evitar definições e notações precisas. Para um leitor ainda mais curioso que Anselmo indicamos os livros *Calculo, volume I* [12] e *Análise Matemática para Licenciatura* [13].

3.3 Distância entre pontos

Veamos como fica com dois pontos distintos $A = (R, \varphi_1, \theta_1)$ e $B = (R, \varphi_2, \theta_2)$ em coordenadas esféricas.

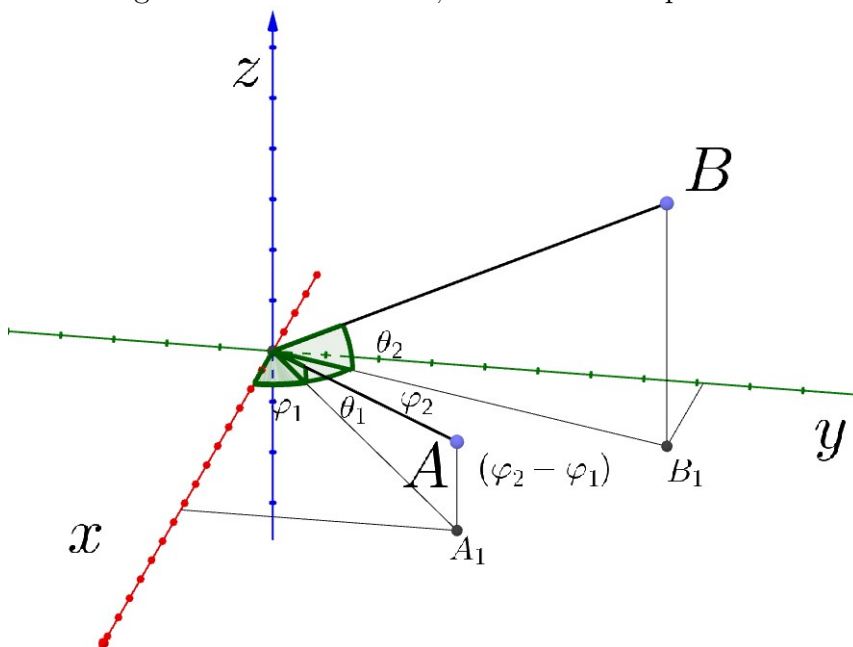
Figura 30: Distância entre pontos.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Observando as coordenadas esféricas:

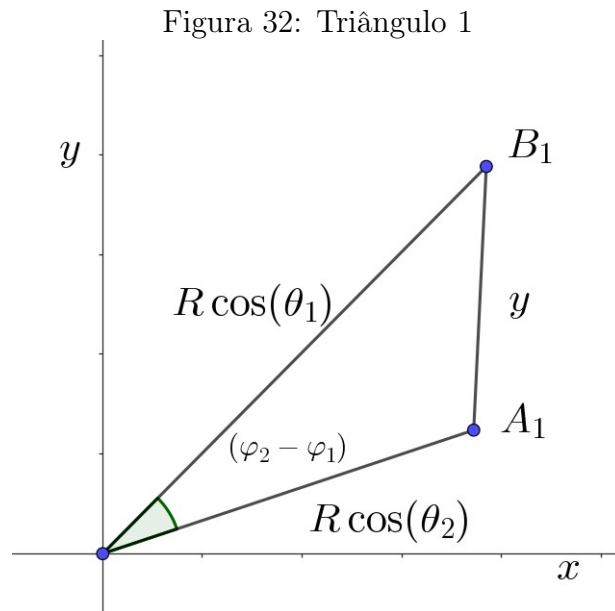
Figura 31: Coordenadas, distância entre pontos.



Fonte: Autor - GeoGebra.

3.3 Distância entre pontos

Queremos encontrar o valor do ângulo θ em função dos ângulos da figura anterior. Temos então o Triângulo 1 representado abaixo:

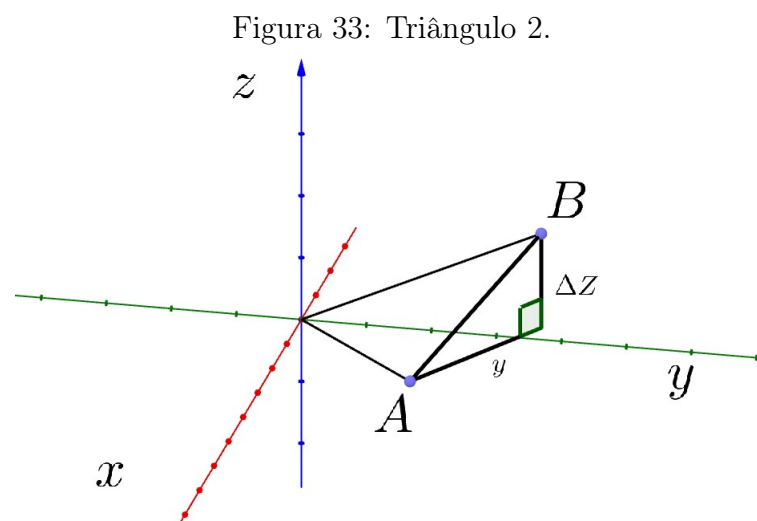


Fonte: Autor - GeoGebra

Utilizando a Lei dos cossenos, temos:

$$y^2 = R^2 \cos^2 \theta_2 + R^2 \cos^2 \theta_1 - 2R^2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Já para o Triângulo 2 abaixo:



Fonte: Autor - GeoGebra.

3.3 Distância entre pontos

Temos que ΔZ é a diferença das alturas dos pontos A e B , ou seja, $\Delta Z = R(\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1)$

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = R^2(\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1)^2 + R^2 \cos^2 \theta_2 + R^2 \cos^2 \theta_1 - 2R^2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$x^2 = R^2(\text{sen}^2 \theta_2 - 2 \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 + \text{sen}^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 - 2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$x^2 = R^2((\text{sen}^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) + (\text{sen}^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) - 2 \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 - 2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2))$$

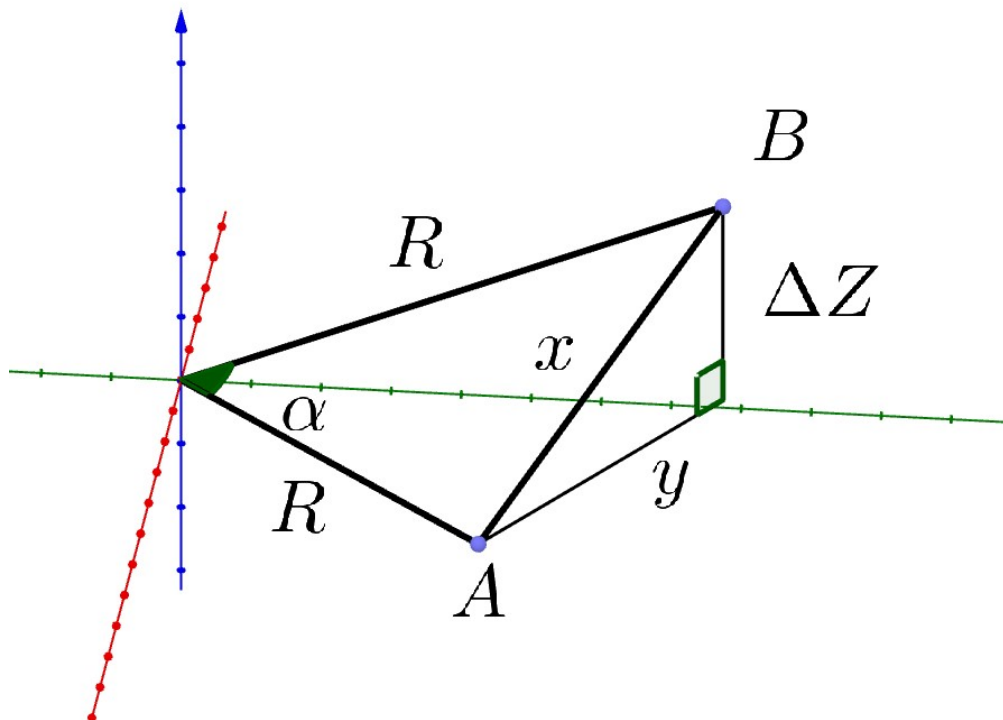
$$x^2 = R^2(1 + 1 - 2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 2 \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2)$$

$$x^2 = R^2(2 - 2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 2 \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2).$$

De onde concluímos que $x^2 = 2R^2(1 - \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2)$. (I)

Já para o triângulo isósceles (3) abaixo:

Figura 34: Triângulo 3



Fonte: Autor - GeoGebra

Usando mais uma vez as Leis dos cossenos:

$$x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha,$$

$$x^2 = 2R^2(1 - \cos \alpha), \quad (II)$$

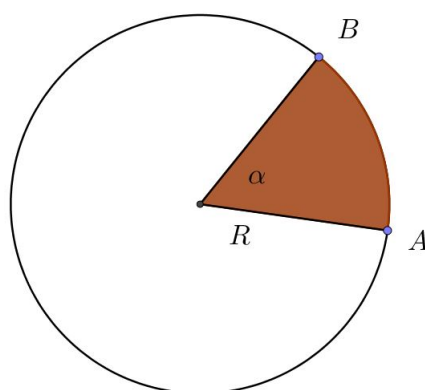
de (I) e (II) temos que:

$$2R^2(1 - \cos \alpha) = 2R^2(1 - \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2)$$

$$\cos \alpha = \cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2.$$

Portanto, $\alpha = \arccos(\cos \theta_2 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2)$.

Figura 35: Ângulo α .



Fonte: Autor - GeoGebra.

Portanto, a fórmula da distância de dois pontos na superfície esférica é dada por:

$$d(A, B) = R \cdot \arccos[\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2].$$

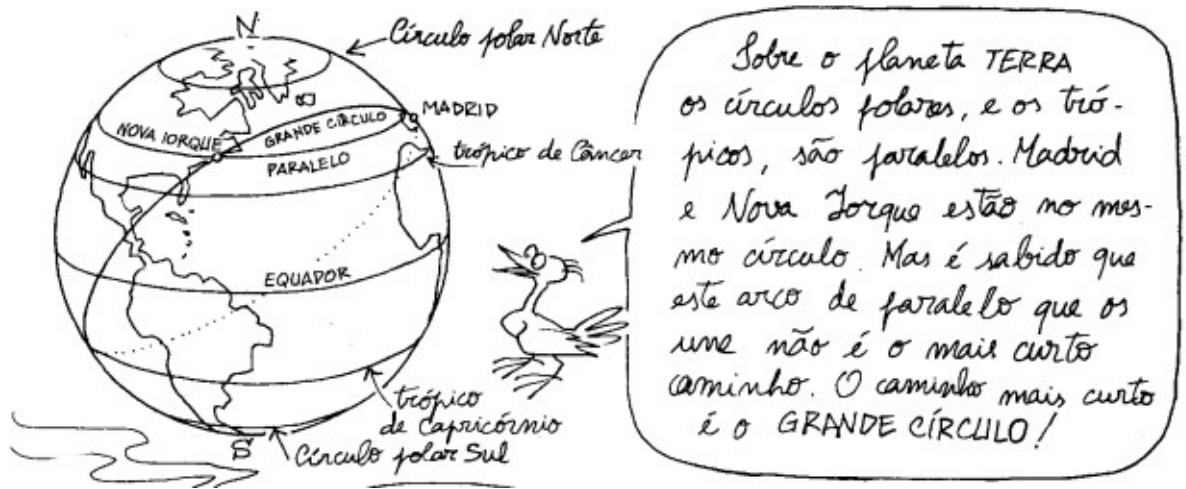
Na próxima seção, aplicaremos as fórmulas deduzidas em exemplos práticos já presentes na história de Anselmo, que podem ser trabalhados em sala de aula. No APÊNDICE encontra-se uma proposta de sequência didática que podem ser usadas esses exemplos.

3.4 Exemplos

Exemplo .1

Já sabemos que dado as coordenadas de dois pontos na esfera é possível calcular a distância entre eles. Vamos observar o exemplo no quadrinho de Anselmo:

Figura 36: Exemplo 3.1.



Fonte: Os mistérios da geometria.

Iremos calcular a distância de Nova Iorque a Madrid pelo grande círculo e pelo paralelo, para isso, vamos considerar que a Terra é uma esfera de raio 6370km e a coordenada de Nova Iorque é 40° de Latitude e -74° de Longitude, já as coordenadas de Madrid é 40° de Latitude e -3° de Longitude.

Colocando nas coordenadas teremos: $NI = (6370; -74^\circ; 40^\circ)$ e $M = (6370; -3^\circ; 40^\circ)$. Usando a fórmula da distância, teremos:

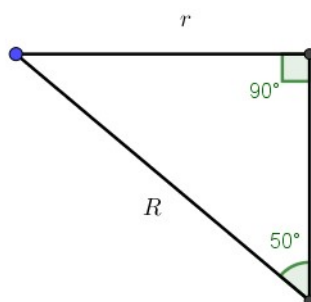
$$d(A, B) = R \cdot \arccos [\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2]$$

$$d(NI, M) = 6370 \cdot \arccos [\cos 40 \cos 40 \cos (-3 - (-74)) + \sin 40 \sin 40]$$

$$d(NI, M) = 5873km.$$

Valor bem próximo da distância real entre Nova Iorque e Madrid que é de 5768km, essa pequena diferença se dá pelo fato da Terra não ser uma esfera “perfeita”. Agora vamos calcular a distância pelo paralelo. Para isso, primeiro temos que calcular o raio do paralelo em que as cidades estão situadas. Como a latitude (ângulo entre o plano XY e as cidades) é de 40° , então o ângulo entre qualquer ponto do paralelo e o eixo Z é de 50° .

Figura 37: Triângulo.



Fonte: Autor - GeoGebra.

$$r = R \operatorname{sen} 50 = 4880$$

Portanto, o raio do paralelo é de 4880 km e o ângulo das cidades é a diferença da longitude $(-3^\circ - (-74^\circ) = 71^\circ)$, visto que as duas cidades estão na mesma circunferência. Agora, podemos calcular a distância entre as cidades usando regra de três:

Ângulo central	→	Comprimento
360	→	$2\pi \cdot 4880$
71	→	x

$$\frac{360}{30662} = \frac{71}{x}$$

$$x = 6048 \text{ km.}$$

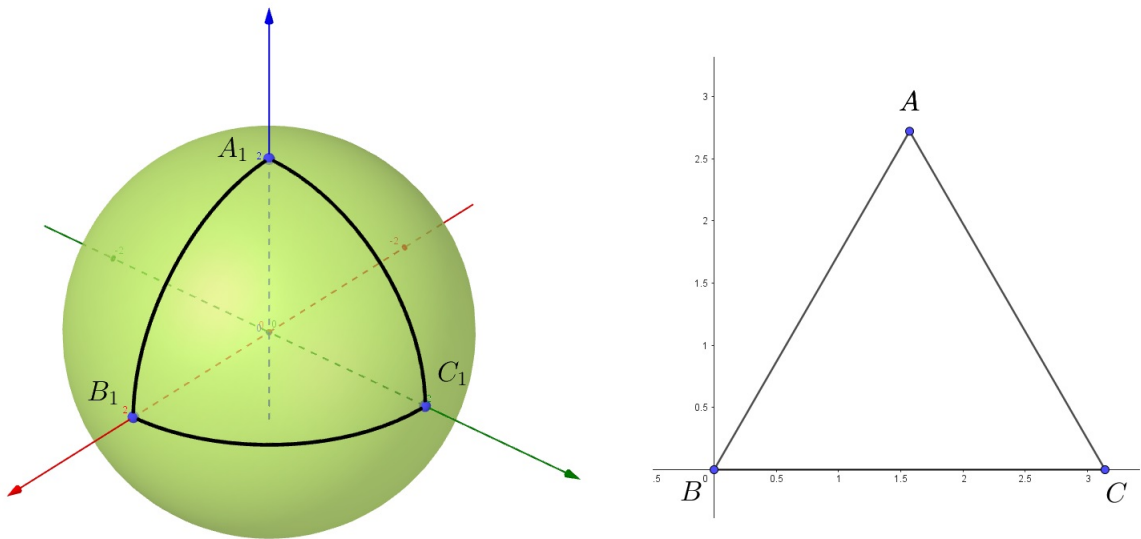
O que significa que ir de Nova Iorque à Madrid pelo paralelo é se deslocar aproximadamente 265km a mais. ■

Exemplo .2

Agora vamos observar um exemplo sobre ângulos esféricos.

Dados os pontos $A = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$, $B = (0, 0)$ e $C = (0, \pi)$ no plano, e os pontos $A_1 = (0, 0, 2)$, $B_1 = (2, 0, 0)$ e $C_1 = (0, 2, 0)$ na esfera com centro na origem e raio igual a 2.

Figura 38: Exemplo 2.



Fonte: Autor - GeoGebra.

Note que os pontos A , B e C são vértice de um triângulo equilátero de lado medindo π . Na Geometria Euclidiana os ângulos são iguais a 60° . Já os pontos A_1 , B_1 e C_1 são vértice de um triângulo na superfície esférica, no capítulo seguinte iremos tratar mais sobre esse assunto.

Perceba que as distâncias entre A_1 e B_1 é igual a distância entre B_1 e C_1 que por sua vez é igual a distância entre A_1 e C_1 que é igual a π . Como mencionado na Definição .7, dois círculos máximos determinam dois ângulos, vamos calcular esses ângulos.

Vamos calcular o ângulo $\widehat{B_1A_1C_1}$. Para calcular tal ângulo, iremos calcular o ângulo entre o plano π_1 que contém os pontos B_1, O, A_1 e o plano π_2 que contém os pontos C_1, O, A_1 . Perceba que a equação do plano π_1 é dada pela equação $y = 0$. Já o plano π_2 é dada pela equação $x = 0$.

Para encontrar o ângulo entre planos, devemos encontrar os vetores normais a cada um dos planos, o ângulo entre tais vetores é o ângulo entre os planos. O vetor normal ao plano π_1 é $\vec{u}_1 = (0, 1, 0)$, já do plano π_2 é $\vec{u}_2 = (1, 0, 0)$.

O ângulo entre vetores é dado pela fórmula $\cos \theta = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|}$, onde θ é o ângulo

entre os vetores. Assim,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|} \\ \cos \theta &= \frac{(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 0)}{\|(0, 1, 0)\| \cdot \|(1, 0, 0)\|} \\ \cos \theta &= \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{(\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}) \cdot (\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2})} \\ \cos \theta &= \frac{0}{(1) \cdot (1)} \\ \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

Logo, os ângulos θ que satisfazem a equação $\cos \theta = 0$ são os ângulos de 90° e 270° . Fazendo o mesmo procedimento para os ângulos $\widehat{A_1 C_1 B_1}$ e $\widehat{A_1 B_1 C_1}$ veremos que o resultado é o mesmo. Assim, os pontos $A_1 B_1 C_1$ formam dois triângulos, um com ângulos iguais a 90° e outro triângulo com ângulos iguais a 270° .

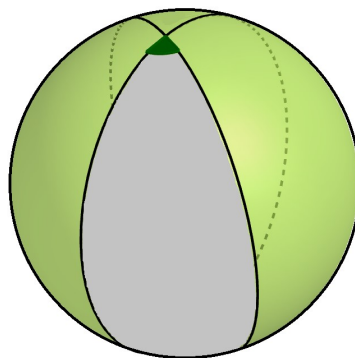
Perceba que, ao contrário da Geometria Euclidiana, é possível que um triângulo de lados iguais na Geometria Esférica possam ter ângulos diferentes de 60° . Vamos estudar mais sobre triângulo esférico no capítulo seguinte.

■

Exemplo .3

Seja E uma esfera de raio R , calcule a área do fuso cuja ângulo esférico é igual a $\frac{\pi}{3}$.

Figura 39: Exemplo 3.



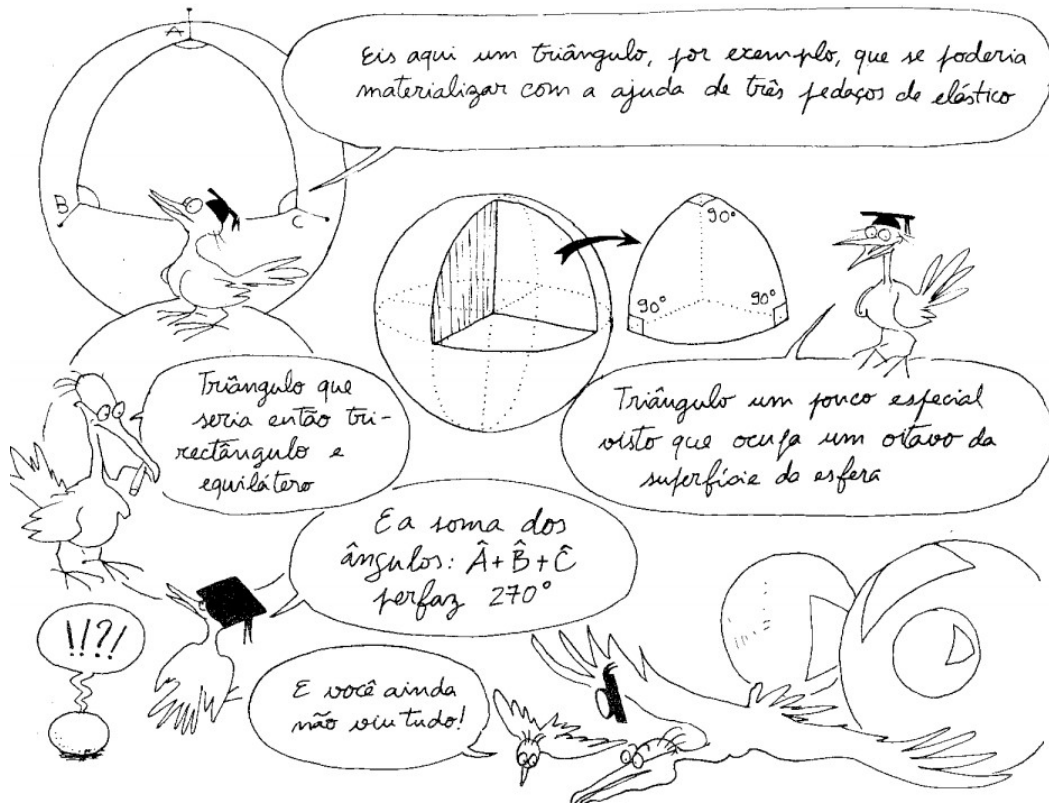
Fonte: Autor - GeoGebra.

Pelas Definições .7 e .8 temos que a área da superfície esférica delimitada pelo diedro é proporcional ao ângulo diedro. Como a área da esfera é $4\pi R^2 = 2(2\pi) \cdot R^2$, temos que a área da superfície de um diedro com ângulo $\frac{\pi}{3}$ é $2(\frac{\pi}{3})R^2$.

4 Triângulo esférico

Neste capítulo, utilizamos as Páginas 23 a 26 das *Aventuras de Anselmo* ([9]) como norteador para o estudo dos triângulos esféricos.

Figura 40: Triângulo esférico - Anselmo

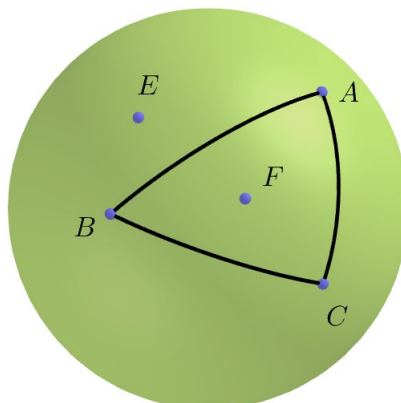


Fonte: Os mistérios da geometria

4.1 Triângulo esférico

Definição .10 Considere três pontos A , B e C distintos de uma esfera que não estejam sobre um mesmo círculo máximo. A figura delimitada pelos arcos de círculo máximo que unem esses pontos dois a dois chama-se triângulo esférico. Os pontos A , B e C são os vértices do triângulo esférico e os arcos definidos por A e B , A e C , B e C são chamados lados do triângulo esférico.

Figura 41: Triângulo esférico.



Fonte: Autor - GeoGebra.

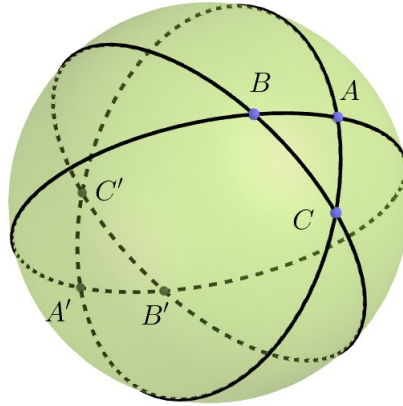
Perceba, que por essa definição, três pontos não colineares, ou seja, que não estão no mesmo círculo máximo, definem dois triângulos distintos, um contendo o ponto E e o outro triângulo contendo o ponto F .

Dada as coordenadas dos vértices já sabemos calcular os lados do triângulo esférico e seus ângulos. Para calcular a área do triângulo, precisaremos de outra definição.

Teorema .1 *A área de um triângulo esférico é igual a $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$, onde α, β e γ são os ângulos (em radianos) do triângulo ABC respectivamente e R é o raio da esfera.*

Demonstração: Sabemos que um triângulo esférico ABC é formado por três pontos ligados por arcos de círculos máximos. Se estes arcos forem prolongados, forma-se outro triângulo esférico $A'B'C'$ que pode ser obtido por uma reflexão do original pelo centro da esfera. Por simetria, os dois triângulos são congruentes e tem áreas iguais.

Figura 42: Triângulo esférico - área



Fonte: Autor - GeoGebra

Se representarmos a área da esfera como uma soma da área de diedros convenientemente escolhidos, em cada vértice do triângulo, obtemos dois diedros. Perceba que o diedro $S_{AA'}$ contém o triângulo ABC . Já o diedro do ângulo oposto a ele contém o triângulo $A'B'C'$. Logo quando fazemos a soma dos dois diedros, estamos contando duas vezes a área do triângulo ABC . Analogamente temos para o diedro $S_{BB'}$ e $S_{CC'}$. Assim, estamos somando seis áreas do triângulo ABC , mas só precisamos de duas. Portanto, temos que excluir quatro. Representando a área da esfera como a soma das áreas desses diedros obtém-se

$$S = 2S_{AA'} + 2S_{BB'} + 2S_{CC'} - 4S_{ABC}$$

.

Vimos no Exemplo .3 que a área dos diedros é proporcional ao ângulo diedro. Assim,

$$S = 2S_{AA'} + 2S_{BB'} + 2S_{CC'} - 4S_{ABC}$$

$$S = 2 \cdot 2\alpha R^2 + 2 \cdot 2\beta R^2 + 2 \cdot 2\gamma R^2 - 4S_{ABC}$$

$$S = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 4S_{ABC}$$

$$4S_{ABC} = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - S$$

$$4S_{ABC} = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 4\pi R^2.$$

Portanto, concluímos que $S_{ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, além do mais, chamamos

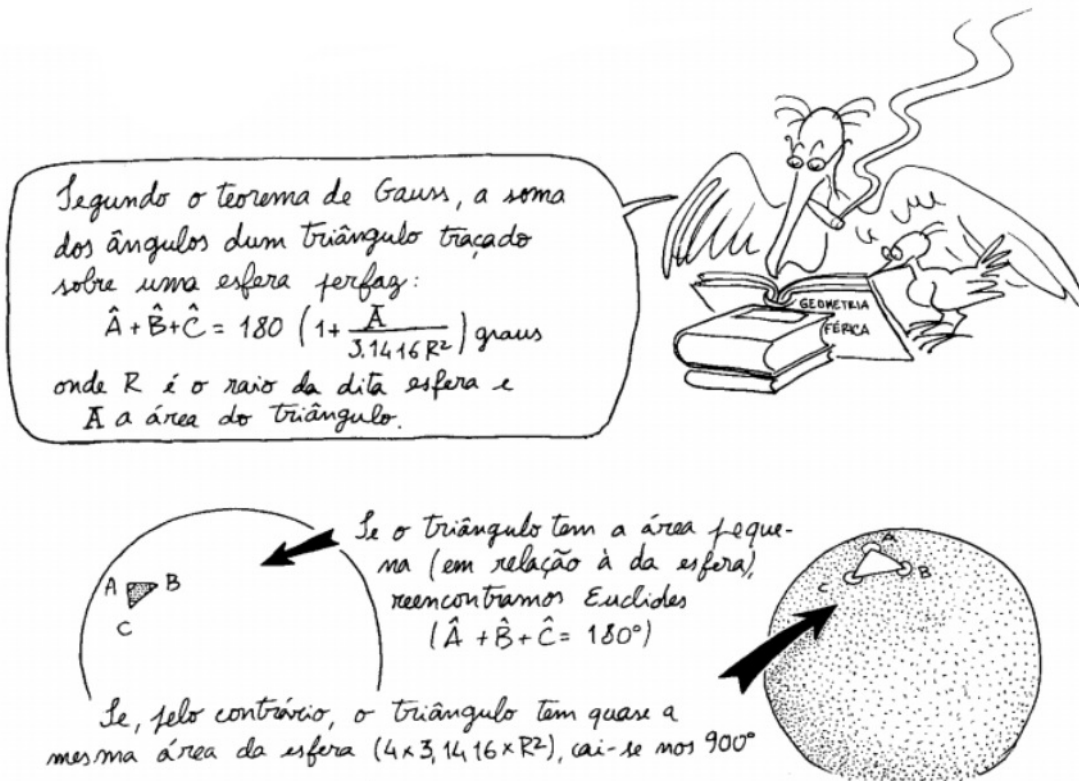
4.1 Triângulo esférico

$E = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ de excesso angular. Perceba que a área de um triângulo esférico é proporcional ao seu excesso angular.

Aqui, vale a pena ressaltar que uma forma de caracterizar a geometria é pelo excesso angular. Enquanto na Geometria Esférica o excesso angular sempre será positivo, na Geometria Euclidiana o excesso angular sempre será zero.

Outra forma de observar o teorema de Gauss é como nas *Aventuras de Anselmo*:

Figura 43: Soma ângulos triângulo esférico 2.



Fonte: Os mistérios da geometria.

Vimos no Exemplo .2 que um triângulo esférico pode ter a soma dos seus ângulos internos iguais a 270° e 810° . Assim as áreas desses triângulos seriam respectivamente:

$$S_{ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

$$S_{ABC} = 2^2\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)$$

$$S_{ABC} = 2\pi.$$

$$S_{ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

$$S_{ABC} = 2^2\left(\frac{9\pi}{2} - \pi\right)$$

$$S_{ABC} = 14\pi.$$

4.1 Triângulo esférico

Nas *Aventuras de Anselmo* é possível observar quais os valores da soma dos ângulos internos:

Figura 44: Soma dos ângulos triângulo esférico.



Fonte: Os mistérios da geometria.

Vamos demonstrar matematicamente este fato. Note que a menor área de um triângulo esférico é quando ela tende a zero, considerando a área igual a zero, temos que $S_{ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 0$. Como $R > 0$, temos que $(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 0$, ou seja, a soma dos ângulos internos tem que ser igual a π (180°). Ou seja, quando é plano.

Já a área máxima, é quando o triângulo tende a área da esfera, considerando a área do triângulo igual a da esfera, temos que $S_{ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 4\pi R^2$, e portanto, $(\alpha + \beta + \gamma) = 5\pi$, ou seja, a soma dos ângulos internos tem que ser igual a 5π , ou 900° . Logo, $\pi < S_{ABC} < 5\pi$.

5 Considerações finais

A dissertação apresentou uma análise meticulosa que correlaciona a narrativa envolvente do quadrinho *As Aventuras de Anselmo Curioso - Os Mistérios da Geometria* com os princípios fundamentais da Geometria Esférica. O objetivo central foi tornar acessível à complexidade da geometria esférica para estudantes avançados do ensino médio e graduandos em disciplinas de exatas, oferecendo uma abordagem prática e contextualizada por meio das aventuras de Anselmo Curioso.

No primeiro capítulo, foi traçada uma contextualização histórica, explorando a trajetória da Geometria Euclidiana e realizando uma análise do livro *Os Elementos de Euclides*. Essa análise prévia estabeleceu uma base sólida para a compreensão dos fundamentos geométricos abordados ao longo da dissertação.

O segundo capítulo concentrou-se na introdução e definições essenciais da geometria esférica, como coordenadas esféricas, polos, meridianos, equadores, fusos, ângulos esféricos, entre outros conceitos. Estes foram elucidados por meio de exemplos práticos extraídos das *As Aventuras de Anselmo Curioso*, proporcionando uma aplicação direta e acessível desses conceitos mais abstratos.

Já o último capítulo abordou de forma mais específica os triângulos esféricos, enfatizando, em particular, a determinação da área desses triângulos. Esse enfoque prático demonstrou como os conceitos teóricos podem ser aplicados em situações concretas, promovendo uma compreensão mais profunda e prática da geometria esférica.

Ao longo deste estudo, a integração entre a narrativa envolvente do quadrinho e os conceitos teóricos da Geometria Esférica proporciona uma abordagem interdisciplinar. Esta dissertação planejou despertar o interesse e promover uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos avançados presentes nas *As Aventuras de Anselmo Curioso - Os Mistérios da Geometria*.

Referências

- [1] L. F. da Silva Bezerra. *Geometria Esférica - A trigonometria esférica como solução para a Navegação Astronômica*. Dialética, 2023.
- [2] M. de Dzielka. *Hipátia de Alexandria*. Editora Relógio d'Água, 2009.
- [3] R. Descartes. *Discurso do Método & Ensaaios*. René Descartes; organizado por Pablo Rubén Mariconda; traduzido por César Augusto Batristi, Érico Andrade, Guilherme Rodrigues Neto, Marisa Carneiro de Oliceira Franco Donatelli, Pablo Rubén Mariconda, Paulo Tadeu da Silva. São Paulo: UNESP, 2018.
- [4] Euclides. *Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo*. São Paulo: UNESP, 2009.
- [5] N. geographic. Manuscritos de euclides encontrados no lixo. Disponível em: https://www.nationalgeographic.pt/historia/manuscritos-euclides-encontrados-no-lixo_1191, 2017. Acesso em 30 de outubro de 2023.
- [6] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, and A. C. Morgado. *A matemática do ensino médio*, volume Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, sixth edition.
- [7] R. S. Mol. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.
- [8] A. C. M. Neto. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [9] J.-P. Petit. As aventuras de anselmo curioso em desvendar os mistérios da geometria. Disponível em: https://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/free_downloads.html#portugais, 1980. Acesso em 10 de agosto de 2023.
- [10] Resumos.soescola. Tales de mileto. Disponível em: <https://resumos.soescola.com/filosofia/tales-de-mileto/>, 2020. Acesso em 30 de outubro de 2023.

REFERÊNCIAS

- [11] R. A. Santos. Trigonometria triangular esferica. *RCT - Revista de ciência e tecnologia*. V4. n.6, 2018.
- [12] J. Sterwart. *Calculo, volume I*. São Paulo: Pioneira Thomson Leardning, 2006.
- [13] G. Ávila. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 2001.

A Aprendendo Geometria Esférica

Público alvo

Estudantes do Ensino Médio

Assunto

Geometria Esférica

Objetivos

Proporcionar aos alunos do Ensino Médio uma compreensão aprofundada dos conceitos de Geometria Esférica, incluindo coordenadas esféricas, geodésicas, teoremas fundamentais e aplicações práticas.

Procedimento didático metodológico

Dividido em três momentos, a primeira pretende introduzir o tema da Geometria Esférica, trazendo o quadrinho *As aventuras de Anselmo* como ponto de partida. O segundo momento será dedicado para o desenvolvimento da matemática por trás da Geometria Esférica. E por fim, o terceiro momento é voltado para o aprofundamento e pôr em prática os conhecimentos adquiridos.

Introdução

Aula 1 - 50 min

A primeira aula será voltada para a introdução do tema, bem como a leitura de uma parte das aventuras de Anselmo:

1. Leitura de uma parte das Aventuras de Anselmo;
2. Geometria Esférica e sua importância;
3. Debate sobre as diferenças entre geometria plana e geometria esférica;

-
4. Contextualização dos conceitos de coordenadas esféricas: (Geodésica, polos, paralelos, meridiano, equador...).

Aula 2 - 50 min

Na segunda aula, será iniciado o desenvolvimento da Geometria Esférica:

1. Explicação detalhada da coordenada esférica: longitude, latitude e raio;
2. Exemplificação com diversos objetos esféricos para melhor compreensão (objetos do dia a dia escolar tais como bola, laranja, balão de encher);
3. Exercícios práticos de identificação e representação das coordenadas esféricas. Se a escola tiver laboratório de informática, usar softwares matemáticos como o GeoGebra.

Desenvolvimento

Aula 3 - 50 min

Na terceira aula, o foco será nas Geodésicas:

1. Definição aprofundada de geodésicas como o caminho mais curto em superfície esférica;
2. Exemplos variados de geodésicas em diferentes contextos, como navegação e astronomia;
3. Discussão sobre a aplicação das geodésicas em mapas e trajetórias.

Aula 4 - 50 min

No quarto encontro, será abordado o teorema da soma dos ângulos em um triângulo esférico.

1. Demonstração prática com a construção de triângulos esféricos;
2. Cálculo do excesso angular;
3. Discussão sobre excesso angular.

Aula 5 - 50 min

Aprofundar os conceitos apresentados até então, como distância na geometria esférica:

1. Resolução de problemas envolvendo cálculo de coordenadas esféricas;
2. Resolução de problemas envolvendo distância entre pontos.

Aprofundamento e Prática

Aula 6 - 25 min

1. Sessão de perguntas e respostas para esclarecer dúvidas do tema;
2. Discussão sobre aplicações da geometria esférica.

Aula 6 - 25 min

Na segunda metade da aula 5, os alunos serão divididos em grupos para resolver problemas mais complexos relacionados à geometria esférica.

Aula 7 - 50 min

A última aula será dedicada para apresentação dos resultados e discussão sobre os problemas. Realizadas as discussões, será feita a conclusão e síntese dos assuntos estudados.