UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS NUMA ABORDAGEM DINÂMICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Fernando Lopes do Nascimento

Maceió, 27 de Março 2024

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FERNANDO LOPES DO NASCIMENTO

O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS NUMA ABORDAGEM DINÂMICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Maceió - AL

Março de 2024

FERNANDO LOPES DO NASCIMENTO

O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS NUMA ABORDAGEM DINÂMICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza

Maceió - AL

Março de 2024

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Valter dos Santos Andrade – CRB-4 – 1251

N244c Nascimento, Fernando Lopes do.
O cálculo de áreas de polígonos numa abordagem dinâmica utilizando o software GeoGebra no 9° ano do Ensino fundamental / Fernando Lopes do Nascimento. – 2024.
67 f.: il.

Orientador: Luis Guillermo Martinez Maza.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 66-67.

1. Geometria plana – Estudo e ensino. 2. Áreas. 3. Polígonos. 4. GeoGebra (Software). I. Título.

CDU: 514.112:37

Folha de Aprovação

FERNANDO LOPES DO NASCIMENTO

O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS NUMA ABORDAGEM DINÂMICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 27 de março de 2024

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
gov.br LUIS GUILLERMO MARTINEZ MAZA
Data: 17/05/2024 08:56:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Orientador: Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza

(Universidade Federal de Alagoas)

Documento assinado digitalmente
gov.br VIVIANE DE OLIVEIRA SANTOS
Data: 16/05/2024 21:56:28-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Examinadora Interna: Profª. Drª. Viviane de Oliveira Santos

(Universidade Federal de Alagoas)

Documento assinado digitalmente
gov.br GABRIEL ARAUJO GUEDES
Data: 16/05/2024 11:10:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Examinador Externo: Prof. Dr. Gabriel Araújo Guedes

(Universidade Federal Rural de Pernambuco)

A minha esposa e aos meus filhos pelo apoio e paciência que tiveram ao longo do curso.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus por me conceder a sabedoria e a perseverança em chegar até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza, pelos preciosos momentos de compartilhamento de conhecimentos e colaboração no desenvolvimento desta dissertação.

Aos meus colegas do Profmat e em especial a Mário, Rodolfo, Jamille, Cícero e Jamerson, os quais compartilharam comigo os momentos de alegria, cansaço, realização, motivação e luta.

E uma dedicatória especial aos meus gestores Marquirael e Nairlene que me incentivaram a continuar buscando trilhar esse caminho.

Aos meus professores do Profmat, sou grato pelo apoio e estímulo contínuos na busca pelo aprimoramento da educação do nosso país.

Aos meus colegas de trabalho em especial Flávio Galvão, Márcio, Jailton, Renato, Ítalo Clay, Leidijane e Rennisy, que sempre se mostraram interessados em meu bem-estar, e contribuíram com ideias valiosas para a elaboração desta dissertação.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) que na busca de qualidade do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do Profmat.

A minha esposa Patrícia, a quem admiro profundamente por sua integridade, honestidade e pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis da vida, e além de compartilhar comigo as nossas vitórias alcançadas.

E por fim, agradeço a minha mãe, a meu pai e ao meu irmão que sempre me apoiaram, aos meus filhos: Sophia e Cauã, que me fazem a cada dia ser um homem melhor e a quem luto todos os dias para que todos eles tenham uma vida maravilhosa baseada no amor de Deus e na paz de Cristo.

Entre dois espíritos iguais, postos nas mesmas condições, aquele que sabe geometria é superior ao outro e adquire um vigor especial.

(Pascal).

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma sequência didática para o ensino de áreas de polígonos no ensino fundamental, usando o software GeoGebra com o objetivo de facilitar a visualização e determinação de áreas, seguido de um cálculo formal usando uma fórmula para a área de um polígono como função dos seus vértices. Para facilitar a compreensão e aplicação desses cálculos, apresentamos um estudo detalhado sobre localização no plano cartesiano. Também será demonstrado como aplicar as ferramentas do GeoGebra em sala de aula para que os estudantes possam utilizar e construir suas figuras de uma forma dinâmica. Para isso, foi realizado um estudo de cunho bibliográfico, no intuito de aprender como funciona o GeoGebra, por meio do uso de suas ferramentas e aplicar esse software na localização de pontos e cálculos de áreas de polígonos, visando melhorar a qualidade do ensino de geometria de forma dinâmica e eficaz.

Palavras-chave: Geometria Plana; Polígonos; Áreas; GeoGebra; BNCC.

ABSTRACT

This dissertation presents a didactic sequence for teaching polygon areas in elementary school, using the GeoGebra software with the aim of facilitating the visualization and determination of areas, followed by a formal calculation using a formula for the area of a polygon as a function of the its vertices. To facilitate the understanding and application of these calculations, we present a detailed study on location in the Cartesian plane. They will also be shown how to apply GeoGebra tools in the classroom so that students can use and build their figures in a dynamic way. For this, a bibliographical study was carried out, with the aim of learning how GeoGebra works, through the use of its tools and applying this software to locate points and calculate polygon areas, improving the quality of teaching geometry in dynamic and effective way.

Keywords: Plane Geometry; Polygons; Areas; GeoGebra; BNCC.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
Fuvest	Fundação Universitária para o Vestibular
MEC	Ministério da Educação e Cultura
Profmat	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PUC/SP	Pontifícia Universidade Católica – São Paulo
Saeb	Sistema de Avaliação da Educação Básica
Saepe	Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
Uema	Universidade Estadual do Maranhão
UFG	Universidade Federal de Goiás

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é frequentemente vista como uma disciplina desafiadora por muitos e, desde sempre, é objeto de investigação e discussão de pesquisadores e profissionais da educação. As dificuldades evidenciadas pelos estudantes em avaliações externas demonstram como os discentes tem dificuldades em interpretar, analisar e buscar estratégias de resolução de problemas. Diante disso, os professores enfrentam o desafio de encontrar novas formas de ensinar matemática, e em especial a geometria, que será enfatizada nesse trabalho, e que deverá ser aplicada em sala de aula para facilitar a compreensão de conceitos e propriedades necessárias para o cotidiano escolar.

Considerando o mundo cada vez mais moderno em que vivemos, os educadores tem a oportunidade de explorar novas formas de ensino, complementando métodos tradicionais com recursos tecnológicos que os alunos já estão familiarizados. Na área da matemática, especialmente na geometria, os conteúdos são vastos, complexos e frequentemente desafiadores para os estudantes, tornando-se crucial a busca por novas estratégias de ensino mais eficazes.

Nesse contexto, foi selecionado o tema do cálculo de áreas de polígonos nas turmas de nono ano do ensino fundamental, utilizando o software GeoGebra para facilitar a compreensão dos estudantes.

O uso das ferramentas tecnológicas torna-se mais presentes nos ambientes e meios de ensino, permitindo que o estudante possam dinamizar os conteúdos propostos para eles.

Nesse cenário é possível fazer uma busca de formas de superar essa dificuldade utilizando o computador como uma ferramenta pedagógica auxiliar. Como exemplo notável dessa incorporação tecnológica, destacamos o uso do software “GeoGebra” que foi desenvolvido para o ensino dos conceitos geométricos (Geometria Plana e Espacial) por meio de ambientes virtuais nos quais os estudantes podem utilizar o computador para observar e aprender diversos conceitos da geometria.

O objetivo geral deste trabalho é analisar o uso do GeoGebra como recurso tecnológico, para ajudar no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes no conteúdo de cálculo de áreas de polígonos. Para atingi-lo foram considerados os seguintes objetivos específicos: aprender como funciona o GeoGebra, por meio do uso de suas ferramentas e aplicar esse software na localização de pontos e cálculos de áreas de polígonos.

O trabalho está organizado da seguinte forma: Na segunda seção, será abordada a fundamentação teórica com o objetivo de entender como se desenvolve a geometria, o GeoGebra e as perspectivas da educação para um ensino mais dinâmico. Na terceira seção, apresenta-se o uso dinâmico do GeoGebra e suas ferramentas. Na quarta, seção serão tratados aspectos relacionados à localização de pontos no Plano Cartesiano. Na quinta seção, será mostrado como funciona a fórmula da área de um polígono como função dos seus vértices. E, finalmente, na sexta seção, propõe-se uma sequência didática utilizando o GeoGebra e a fórmula de Lima (2014).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Geometria tem origem nos primórdios da humanidade e vem sendo estudada e desenvolvida de uma forma ampla nos últimos tempos pelos profissionais da área de educação. Dessa forma é dado uma ênfase na área, de modo que aja um desenvolvimento da mesma para um melhor entendimento dos modelos geométricos deixando-se de ser estático para ser dinâmico e interativo, através de recursos tecnológicos.

Nesse contexto Filho e Cruz (2020), sinaliza que a geometria tem uma sistematização com o matemático Euclides de Alexandria, considerado o “Pai da Geometria”, que por volta de 300 a.E.C., fez a sistematização, organização e divulgação da geometria, por meio de um conjunto de livros chamado de “Os Elementos de Euclides”. São 13 livros organizados por conceitos geométricos dos mais primitivos, aos mais atuais e que foram amplamente divulgados pela comunidade científica. Esse conjunto de livros serve como base para a geometria estudada no sistema educacional.

A Geometria é essencial para o desenvolvimento de várias habilidades na Matemática. Destaca-se a visualização, que nos permite ler, escrever e interpretar informações gráficas em diversas representações, como desenho geométrico, gráficos cartesianos, podemos citar também esquemas traçados sobre redes pontilhadas, esquemas gráficos não padronizados, além de tabelas, e outros formatos. (KALEFF, 2016).

Ainda, segundo (KALEFF, 2016) entende-se que, visando o estímulo que o professor deve propor ao estudante, por meio de operações mentais relacionadas à visualização, vemos que cada aluno possui formas distintas de enxergar e aprender geometria, dependendo de suas capacidades de abstração e compreensão.

Vê-se dessa forma a necessidade de desenvolver conceitos geométricos que são fundamentais para a vida escolar do discente e que o professor adeque as situações propostas em sala de aula para que cada aluno consiga alcançar seus objetivos de uma forma adequada e individual. Nesse sentido pode-se destacar o que segue:

Segundo Baldes (2021, p. 4): “O mundo contemporâneo exige uma avaliação centrada na resolução de problemas e conflitos, na vivência de situações-problema, na arte da convivência e do diálogo com os diferentes [...]”.

Percebe-se a importância de exigir novas formas de resolver problemas e que o aluno consiga refletir acerca da aprendizagem matemática como segue a ideia a seguir:

Segundo Guimarães e Palanch (2022, p. 41), “particularmente quanto ao ensino de Matemática, em qualquer nível de ensino, é preciso sempre provocar os alunos para a reflexão”.

Buscar novas estratégias para que isso ocorra, faz-se necessário que os estudantes deixem de vivenciar somente uma forma de ensino tradicional e que seja representado de uma forma mais atual através de novos recursos.

A geometria, especialmente o ensino de área de figuras planas, é frequentemente abordada apenas por meio de fórmulas, sem uma devida atenção à metodologia, representação gráfica e contextualização das questões trabalhadas em sala de aula. Nesse cenário prevalece o ensino baseado em métodos mecânicos de memorização de fórmulas e conceitos, sem haver uma real preocupação no entendimento dos estudantes. (SANTOS; JUCÁ, 2014).

Nos últimos séculos esta área da matemática teve uma evolução em níveis avançados e, para tal, foi fundamental o uso da tecnologia. Porém tal evolução não tem sido acompanhada pela educação básica, ao contrário disso a geometria vem sendo desprezada nos currículos escolares e, com isso os professores deixam de apresentar para os estudantes conhecimentos essenciais para seu desenvolvimento intuitivo e de habilidades que lhe permitam ampliar sua percepção da matemática no seu cotidiano.

De acordo com Filho e Cruz (2019), pode-se destacar, que há algumas décadas, os livros didáticos negligenciavam a Geometria, deixando muitos de seus conteúdos para o final do livro e do ano letivo. No entanto, as edições mais recentes priorizaram tanto o conteúdo quanto a organização didática. Mesmo assim, as dificuldades persistiram ao longo do tempo para os alunos que enfrentavam aquela realidade de ensino. Daí a importância de conferir significado aos conceitos geométricos, destacando sua aplicabilidade no cotidiano, para melhorar a aprendizagem tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio.

A atual organização curricular permite a distribuição dos conteúdos de geometria ao longo de cada período escolar. Isso possibilita que os estudantes se deparem mais frequentemente com os conceitos geométricos desde o início do ano até o encerramento do período letivo. Essa abordagem proporciona uma imersão mais profunda e abrangente nos temas de geometria, enriquecendo a experiência educacional do aluno.

De acordo com a Base Nacional Curricular Comum – BNCC a geometria tem grande importância quando é citada no item 3 das competências específicas de matemática para o ensino fundamental, conforme vemos abaixo:

> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outra áreas conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (Brasil, 2018, p.267).

Ainda de acordo com a Base Nacional Curricular Comum – BNCC, define-se as competências gerais e habilidades específicas de cada disciplina a ser ministrada em cada ano escolar e vê-se que a cultura digital é apresentada na quinta competência geral a ser desenvolvida nas escolas.

> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Para que esses conceitos geométricos sejam bem mais explorados, precisamos inserir novos recursos, como foi citado. Esse desenvolvimento e compreensão dos estudantes permite uma nova forma de ensino, através de novos ambientes de aprendizagem colaborativa.

Sem dúvida, os softwares tem desempenhado um papel crucial na formação de ambientes de aprendizagem colaborativa, como observado por Santos e Trocado (2016).

Esses autores argumentam que os softwares possibilitam uma melhor produção de ensino da matemática e em especial o ensino da geometria. Essa colaboração entre professores e alunos permitem resoluções de problemas envolvendo discussões e reflexões, interagindo com o GeoGebra. O GeoGebra permite que haja um *feedback* entre os usuários de forma mais rápida e com melhor desempenho.

A tecnologia vem para agregar meios de conhecimentos, andando junto ao ensino tradicional, pois os estudantes devem saber fazer cálculos escritos e depois explorar conceitos nos programas de geometria. Dessa forma vemos que o método tradicional não será abolido do meio escolar e sim andará de uma forma paralela com a tecnologia para que os discentes possam aprender cada vez mais.

O professor como uma peça fundamental do processo ensino e aprendizagem, precisa se aperfeiçoar por meio de formações sobre o GeoGebra para assim ter domínio do recurso e saber como aplicá-la em sala de aula de forma eficaz.

Segundo Guimarães e Palanch (2022, p. 43), “desde que exista interesse por parte do docente em procurar e se inscrever em cursos de capacitação, ele estará em busca do seu crescimento profissional”.

Se o professor buscar capacitação, torna-se um profissional mais qualificado com mais conhecimento e habilidade para fazer uso de software de geometria em sala de aula.

De acordo com Santos (2022, p. 19), “aqueles docentes que não conseguem fazer bom uso dessas tecnologias podem estar fadados a um fracasso escolar no ambiente da sala de aula”. Para Guimarães e Palanch (2022, p. 21), “professores precisam, mais do que nunca, estimular a autonomia em seus alunos de forma rápida e eficiente, e os estudantes necessitam desenvolver esse estímulo de modo a construir o próprio aprendizado".

Para estimular o ensino da geometria de uma forma dinâmica, pode-se citar o GeoGebra que é um software que é bastante utilizado na comunidade cientifica. Pode-se baixar gratuitamente da internet podendo ser usado de forma on-line ou off-line e ser instalado em diversos equipamentos como computadores, smartphones e tablets. Com o auxílio da tecnologia as aulas dos professores tornam-se mais dinâmicas, proporcionando aos estudantes, partirem da condição de expectadores para protagonistas de seu próprio conhecimento.

De acordo com Santos (2014, p. 7), "a experiência vivenciada pelos professores suscitou a vontade de aprender a usar o software GeoGebra para planejar aulas mais dinâmicas e interativas, buscando estimular no seu aluno a busca pelo conhecimento".

Com a facilidade que os celulares possuem, quase todos os estudantes atualmente levam esse equipamento para a sala de aula, fazendo com que o trabalho do professor, torne-se adequado para aplicar os conteúdos.

Segundo Júnior (2022, p. 73), "o GeoGebra contribui em diversas situações para o processo ensino-aprendizagem na matemática, em especial com o ensino da geometria, o que o torna bastante didático e prazeroso".

Conforme o que foi visto, a integração das tecnologias digitais na sala de aula permite a interação entre o estudante e o conteúdo de estudo vivenciado em sala de aula, motivando uma participação ativa do discente de forma a estimular uma reflexão sobre os recursos computacionais acessíveis. No próximo capítulo será dado uma ênfase no GeoGebra e suas aplicações.

3 USO DINÂMICO DO GEOGEBRA

Esta seção é dedicada a apresentação e manipulação do GeoGebra de forma dinâmica, com o uso de suas ferramentas.

Conforme Lamas e Mendes (2017), o GeoGebra é um software gratuito que pode ser baixado no link “https://www.geogebra.org/download” e pode ser utilizado nos sistemas Windows, Linux e Mac. É um programa de geometria dinâmica que permite facilitar o entendimento de conceitos relacionados à geometria, à álgebra e ao cálculo.

Por meio da plataforma do GeoGebra podemos conhecer a tela inicial do software e suas respectivas versões, conforme figura 1.

Figura 1. Tela Inicial do site GeoGebra.

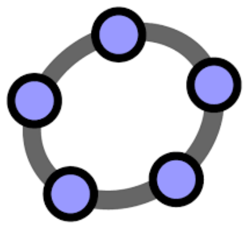
Fonte: GEOGEBRA (2023).

Para que o discente possa entender o GeoGebra, é necessário aprender como foi o desenvolvimento do software, como manipular e como devem serem construídas as figuras na plataforma de forma dinâmica e de fácil visualização.

A palavra GeoGebra vem da união de duas áreas muito importantes da Matemática, que são a Geometria e a Álgebra. Teve seu início em 2001, por Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburgo, e abrange todos os níveis de ensino que vai do básico ao superior. Esse software trabalha com recursos que envolvem geometria e álgebra, assim como tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculo em uma plataforma totalmente ampla e bem desenvolvida (Lamas; Mendes, 2017).

Pode-se trabalhar de forma dinâmica a geometria em diversos conteúdos de matemática com a plataforma. O GeoGebra permite por meio de suas ferramentas, fazer figuras dinâmicas para que o estudante possa manipular usando seus recursos. Esse software permite inserir funções que são traduzidos na tela em forma de figuras geométricas. O estudante pode criar conjecturas, hipóteses, deduções e explorações das figuras e além disso construir, visualizar, ampliar, reduzir e manipular as figuras através dos comandos do GeoGebra. Por isso é fundamental que o estudante aprenda a usar as ferramentas de modo adequado a cada situação proposta em sala de aula, de forma prática e fácil de seu uso. Serão apresentadas a seguir as ferramentas do GeoGebra iniciando pelo ícone de acesso do GeoGebra, conforme figura 2:

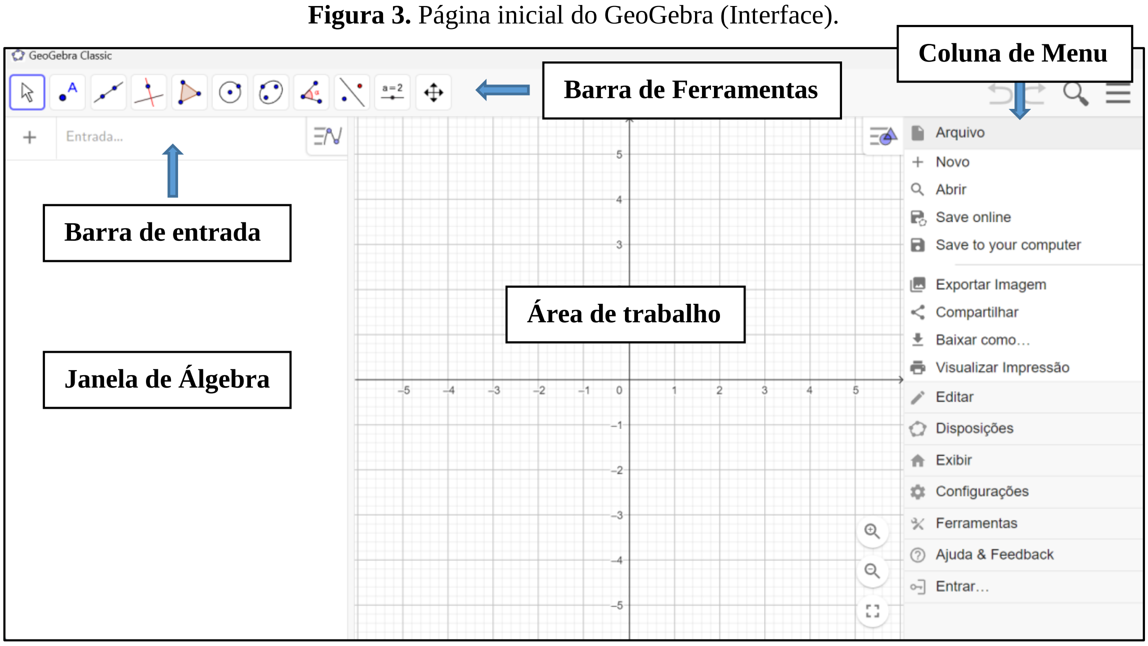
Figura 2. Ícone de Acesso do GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Será utilizado a versão GeoGebra Classic 6.0, principalmente para construção de Polígonos e Polígonos Regulares. A figura 3 mostra a tela inicial do GeoGebra:

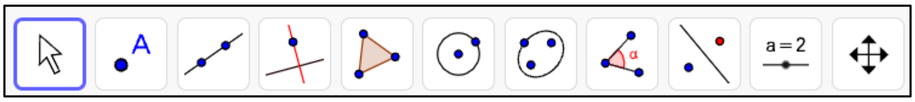
Figura 3. Página inicial do GeoGebra (Interface).



Fonte: GEOGEBRA (2023).

As ferramentas do GeoGebra, conforme mostra a figura 4, permite a construção de diversas figuras.

Figura 4. Barra de Ferramentas do GeoGebra.



Janelas: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Fonte: GEOGEBRA (2023).

Ao clicar em cada uma das janelas na barra de ferramentas, surgem as opções que seguem, de acordo com o quadro 1:

Quadro 1. Ferramentas do GeoGebra.

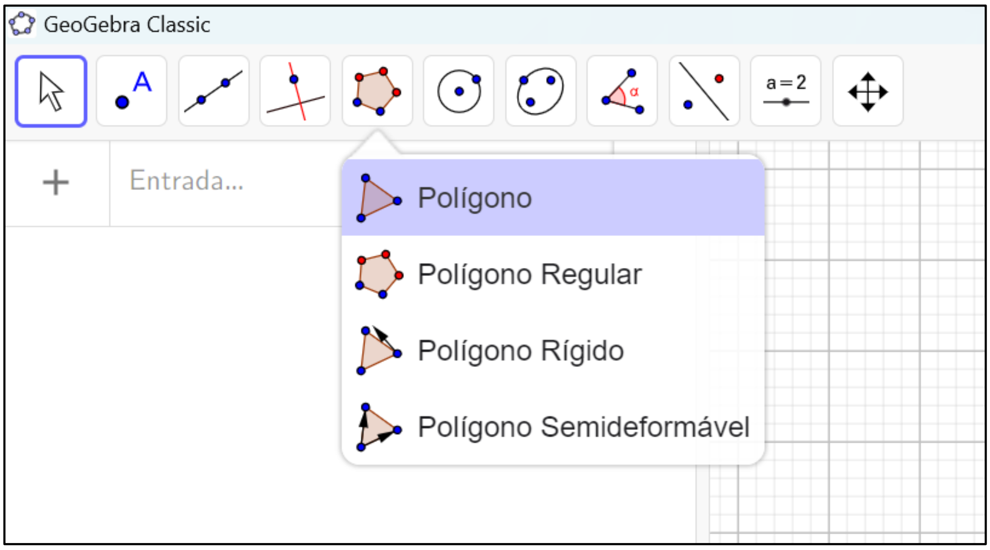
Janelas da Barra de Ferramentas	**Ferramentas (Opções)**
1. Movimento (manipulação)	Mover Função à mão livre Caneta
2. Pontos	Novo Ponto Ponto em Objeto Vincular / Desvincular Ponto Interseção de Dois Objetos Ponto Médio ou Centro Número Complexo Otimização Raízes
3. Retas, Segmentos, Semirretas e Vetores	Reta definida por Dois Pontos Segmento definido por Dois Pontos Segmento com Comprimento Fixo Semirreta Definida por Dois Pontos Caminho Poligonal Vetor a partir de um Ponto
4. Retas especiais e Lugar Geométrico	Reta Perpendicular Reta Paralela Mediatriz Bissetriz Reta Tangente Reta Polar ou Diametral Reta de Regressão Linear Lugar Geométrico
5. Polígono	Polígono Polígono Regular Polígono Rígido

Janelas da Barra de Ferramentas	**Ferramentas (Opções)**
	Polígono Semideformável
6. Círculos e Arcos	Círculo dados Centro e um de seus Pontos Círculo dados Centro e Raio Compasso Círculo definido por Três Pontos Semicírculo Arco Circular dados Centro e Dois Pontos Arco Circuncircular Setor Circular Setor Circuncircular
7. Cônicas	Elipse Hipérbole Parábola Cônica definida por Cinco Pontos
8. Medidas	Ângulo Ângulo com Amplitude Fixa Distância, Comprimento ou Perímetro Área Inclinação Lista Relação Inspetor de Funções
9. Transformações	Reflexão em Relação a uma Reta Reflexão em Relação a um Ponto Inversão Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo Translação por um Vetor Homotetia dados Centro e Razão
10. Interface Gráfica	Controle Deslizante ABC Texto Inserir Imagem Inserir Botão Caixa para Exibir / Esconder Objetos Campo de Entrada
11. Personalizadas	Mover Janela de Visualização Ampliar Reduzir Exibir / Esconder Objeto Exibir / Esconder Rótulo Copiar Estilo Visual Apagar Objeto

Fonte: GEOGEBRA (2023).

O software GeoGebra permite calcular a área de polígonos, seguindo alguns passos. Na interface inicial do GeoGebra, identificado a barra de ferramenta e depois clicado na ferramenta (polígono), conforme figura 5:

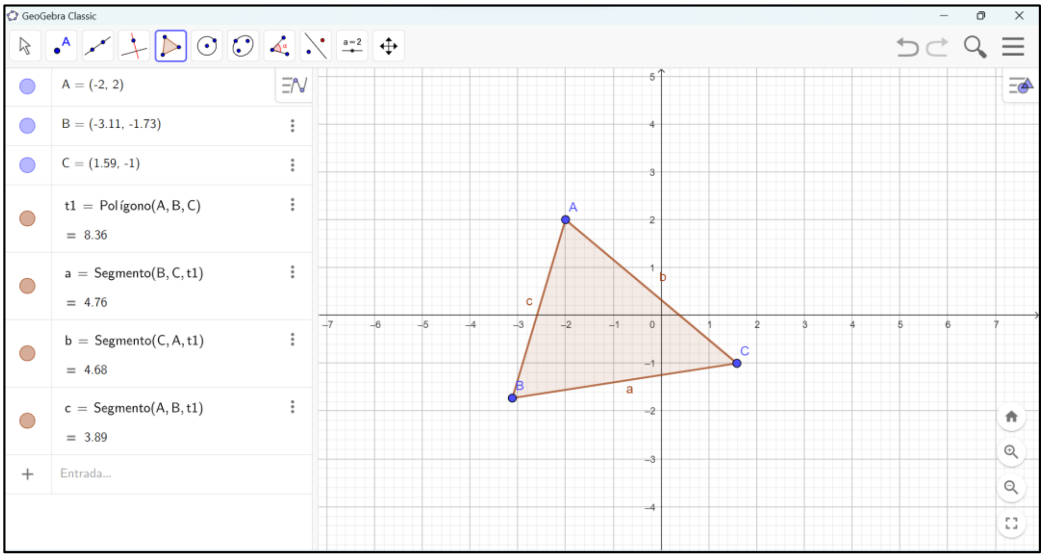
Figura 5. Ferramenta polígono no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Deve se escolher, por exemplo, "polígono", e fazer um triângulo na área de trabalho, como exemplificado na figura 6:

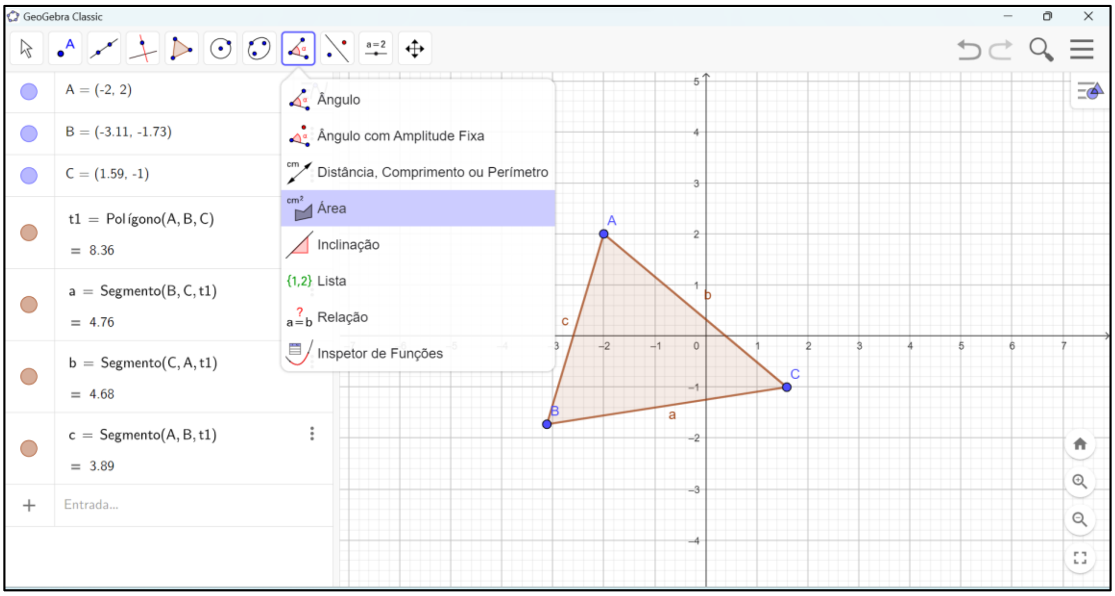
Figura 6. Construção de um polígono.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Em seguida, identifica-se na barra de ferramentas o ícone medidas e seleciona-se a opção área, conforme figura 7:

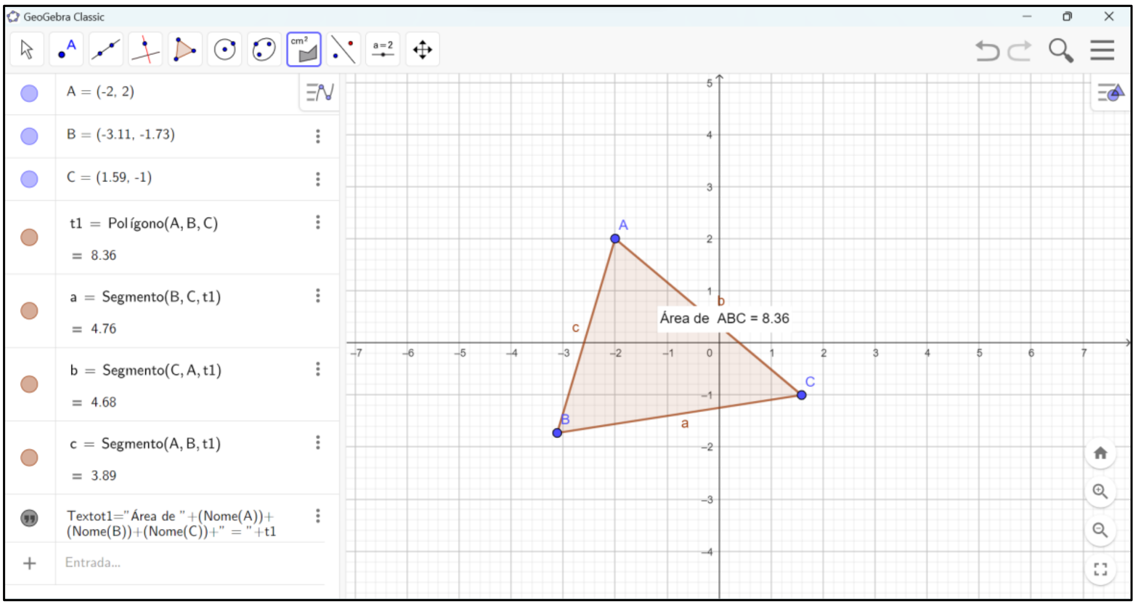
Figura 7. Ferramenta de área.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Ao clicar na figura aparecerá o valor da área, conforme figura 8:

Figura 8. Calculando área.

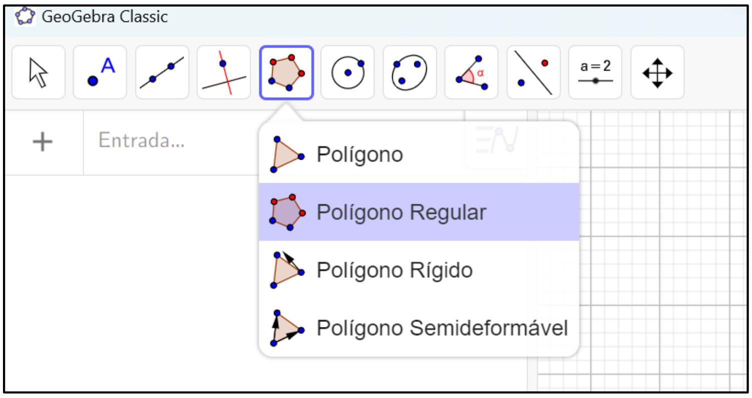


Fonte: GEOGEBRA (2023).

Seguindo os passos descritos anteriormente, torna-se fácil calcular a área de qualquer polígono. Por meio da ferramenta de polígono regular é possível calcular áreas de polígonos regulares no GeoGebra. Diz-se que um polígono é regular, se é convexo[1], se tem todos os seus ângulos congruentes e todos os seus lados são congruentes. O GeoGebra possui uma ferramenta que facilita a construção de polígonos regulares. Se observará como é a construção de um polígono no GeoGebra. O embasamento para os comandos utilizados se deu a partir de Gerônimo, Barros e Franco (2010).

No GeoGebra será selecionado a criação de um novo arquivo. Será clicado na ferramenta “Polígono Regular”, conforme figura 9:

Figura 9. Ferramenta polígono regular no GeoGebra.

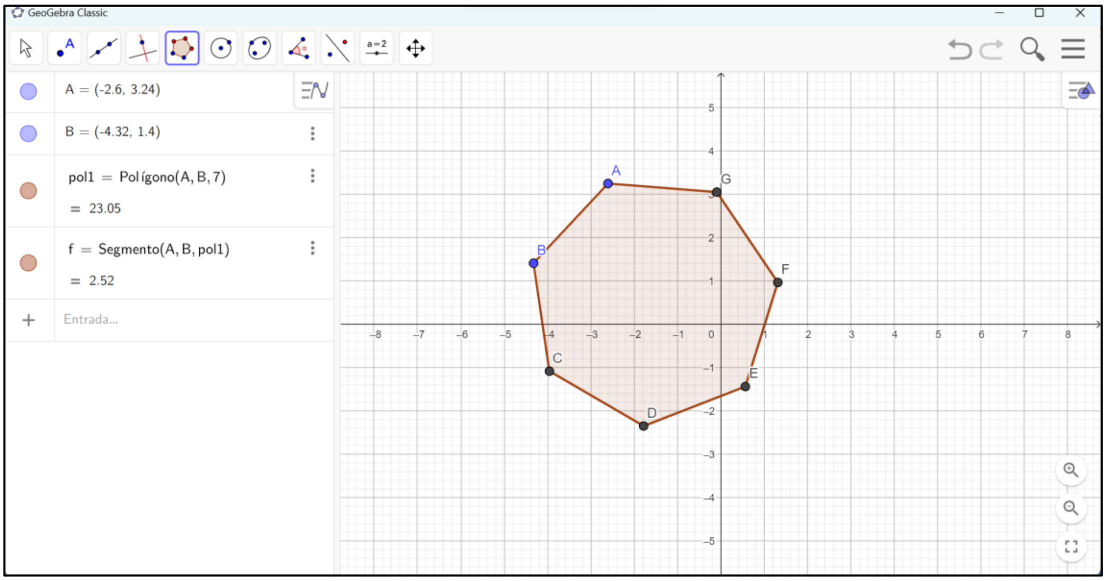


Fonte: GEOGEBRA (2023).

Será clicado sobre o plano para que seja localizado um ponto, para assim criar um vértice e por padrão o GeoGebra nomeia como A. Dá-se um clique em outro local do plano para que, desse modo seja criado um segundo vértice e por padrão o GeoGebra dará o nome desse vértice como B. O polígono gerará lados iguais a de AB. Aparecerá uma janela de forma que deverá ser escrita a quantidade de lados, no qual se digitará o 7 e será clicado em “OK”. O GeoGebra apresentará um polígono regular de sete lados de medida igual a de AB. Veja a figura 10:

[1] Um polígono é dito convexo quando qualquer segmento de reta que possui extremidades em seu interior está totalmente contido no polígono.

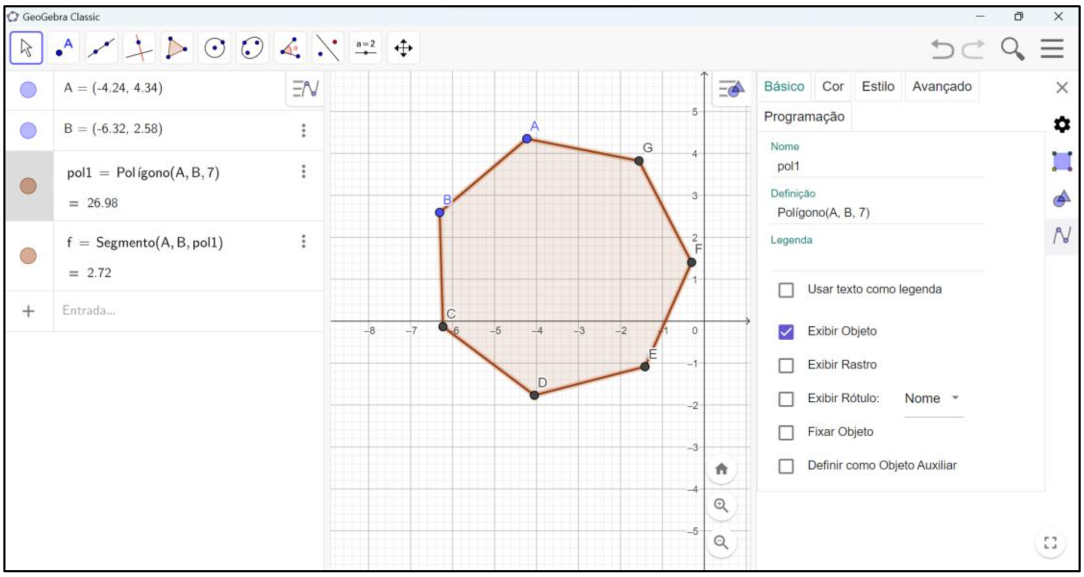
Figura 10. Polígono regular de 7 lados no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

O polígono será arrastado, “segurando-o” por qualquer local de seu setor interno. Movimenta-se o vértice A ou o vértice B. Percebe-se que estará se alterando a medida do lado do polígono regular. Para alterar a o número de lados do polígono ilustrado, clica-se com o botão direito sobre ele ou sobre seu nome na coluna algébrica. Seleciona-se configurações. Busca-se a paleta “Básico”, no qual será visto uma janela semelhante à figura 11:

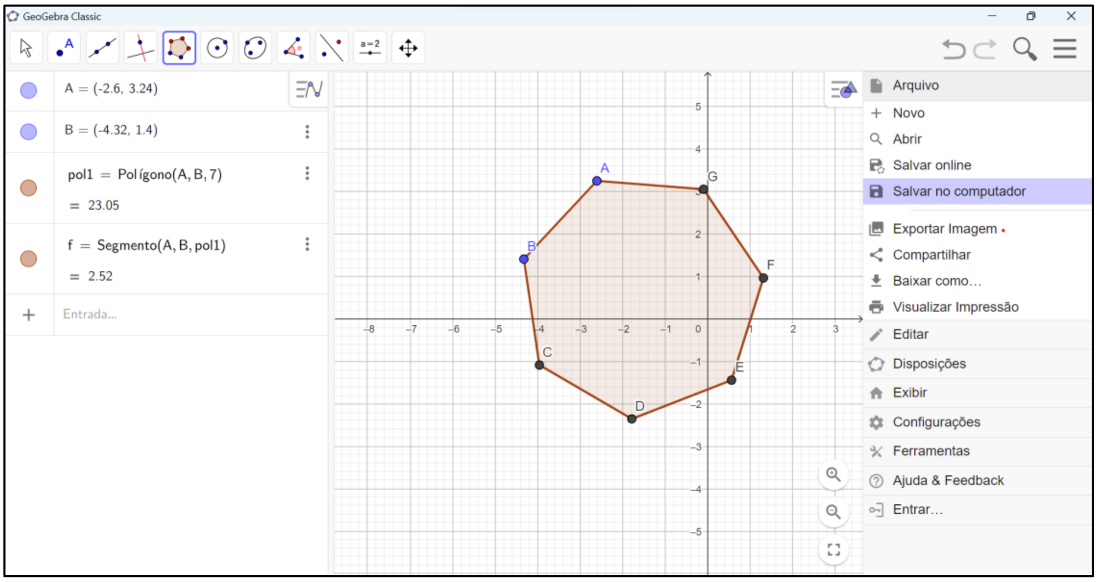
Figura 11. Ferramenta Paleta “básico” no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Observa-se o campo “Definição”. Percebe-se que, para o GeoGebra, essa figura é um polígono com vértices no início, A e B e com sete lados. Altera-se o número 7 por outro e fecha-se a janela. Salva-se o arquivo com o nome “polígonoregular.ggb”, conforme figura 12:

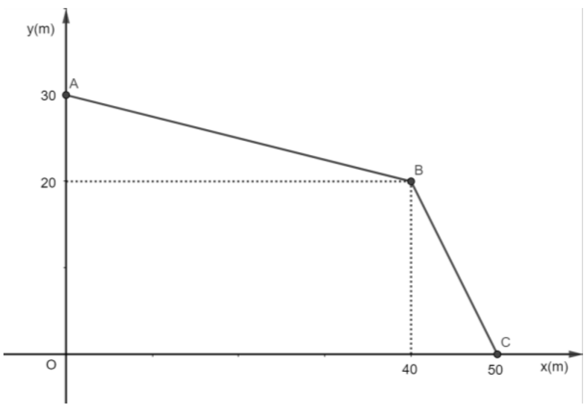
Figura 12. Opção “Salvar no computador” no GeoGebra.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Por meio desses comandos pode-se construir qualquer polígono regular. Para entender melhor como calcular as áreas de polígonos, vamos analisar os exemplos que seguem, utilizando o GeoGebra e também fazendo uso das fórmulas clássicas, para determinar as áreas das figuras que são propostas em cada questão.

Exemplo 1. (UFG - 2005) Um terreno tem a planta representada num plano cartesiano, como mostra o gráfico a seguir:



Fonte: GEOGEBRA (2023).

A área do terreno, em metros quadrados, será:

a) 1400

b) 1100

c) 1000

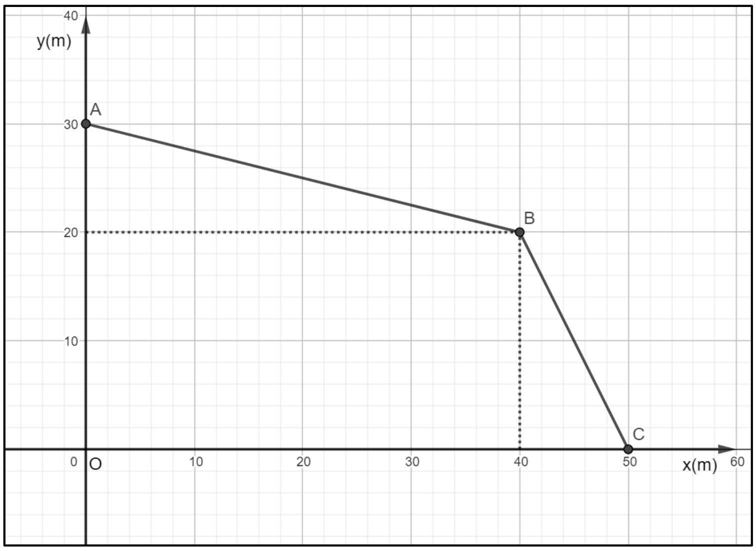
d) 900

e) 800

Vê-se a solução no GeoGebra:

Modelando a figura dada na questão, por meio do GeoGebra, conforme figura 13:

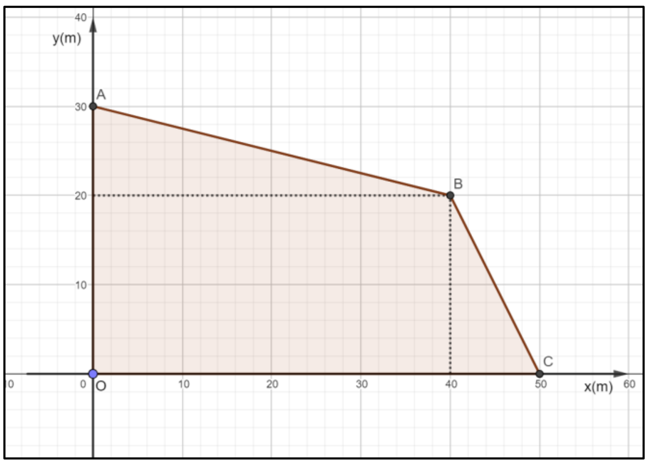
Figura 13. Planta representada num plano cartesiano.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Utilizando a ferramenta polígono, constrói-se o polígono ABCO, na figura 14:

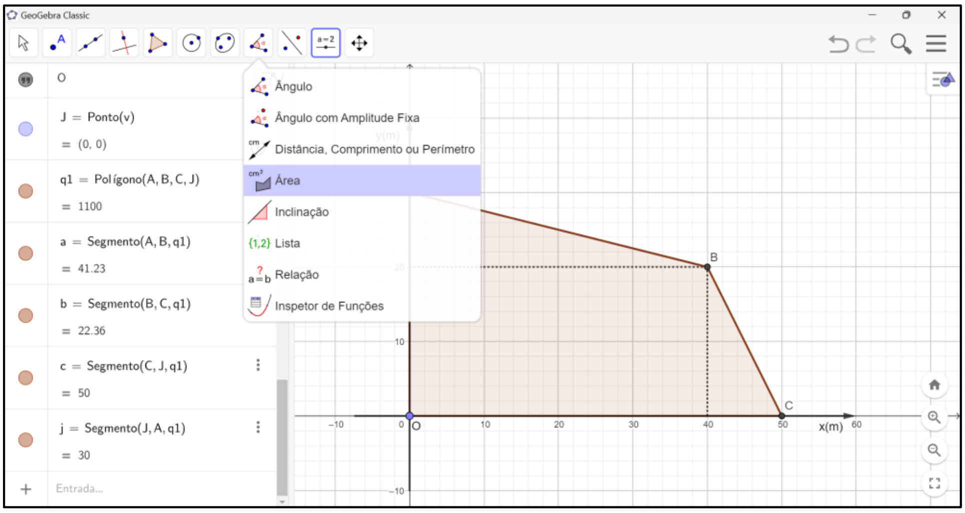
Figura 14. Modelando um polígono na planta de um terreno.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Agora será buscado na barra de ferramentas o ícone medidas e será clicado em área, como na figura 15:

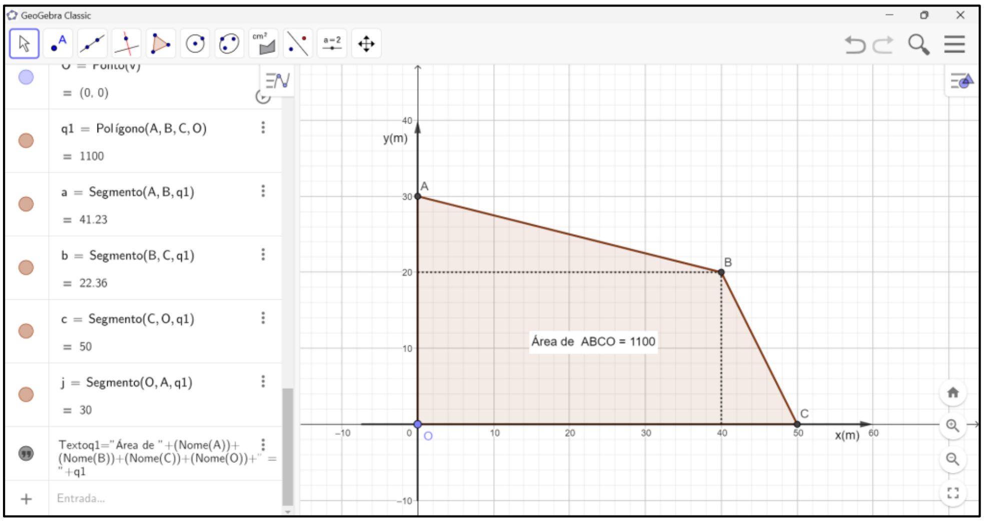
Figura 15. Ferramenta Comprimento (Área).



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Ao clicar na figura aparecerá o valor da área, como na figura 16:

Figura 16. Cálculo da área com a ferramenta comprimento (Área).



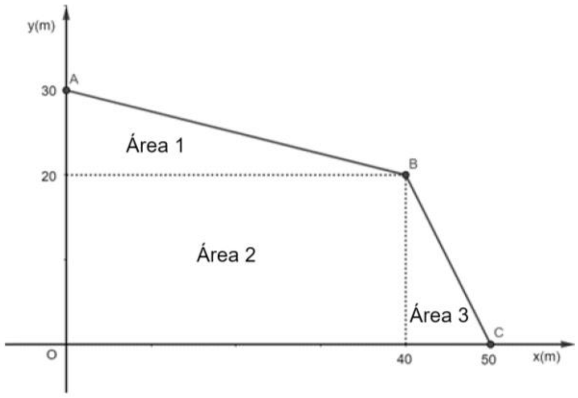
Fonte: GEOGEBRA (2023).

Portanto, $S_Q = 1100$ ■

Vê-se uma outra forma de resolver a questão aplicando as fórmulas clássicas de geometria plana, como segue abaixo:

Decompondo a figura citada no exemplo 1, em figuras conhecidas como na figura 17, temos:

Figura 17. Cálculo da área com a ferramenta comprimento (Área).



Fonte: AUTOR (2024).

A área 1 corresponde a um triângulo de base 40 e altura (30 - 20 = 10), logo a área é:

$A_1 = \frac{b.h}{2} \Longrightarrow A_1 = \frac{40.10}{2} \Longrightarrow A_1 = \frac{400}{2} \Longrightarrow A_1 = 200m$

A área 2 corresponde a um retângulo de base 40 e altura (20 - 0 = 20), logo a área é:

$A_2 = b.h \Longrightarrow A_2 = 40.20 \Longrightarrow A_2 = 800m$

A área 3 corresponde a um retângulo de base (50 - 40 = 10) e altura (20 - 0 = 20), logo a área é:

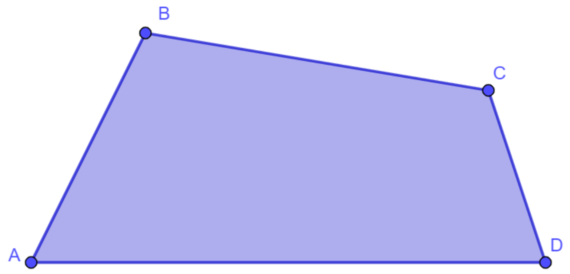
$A_3 = \frac{b.h}{2} \Longrightarrow A_3 = \frac{10.20}{2} \Longrightarrow A_3 = \frac{200}{2} \Longrightarrow A_3 = 100m$

Somando as áreas, temos:

$A_t = A_1 + A_2 + A_3 = 200 + 800 + 100 = 1100$ m.

Logo, a alternativa correta é a letra “B”.

Exemplo 2. (UEMA, 2020) Dentre as funções de um profissional de topografia está o reconhecimento de áreas, a relação dessas áreas com polígonos, a localização de seus vértices e o cálculo de área. A figura a seguir, representa um esboço que um topógrafo fez em um terreno, representado por um quadrilátero, com vértices A(3,2), B(5,6), C(11,5) e D(12,2) em coordenadas cartesianas.



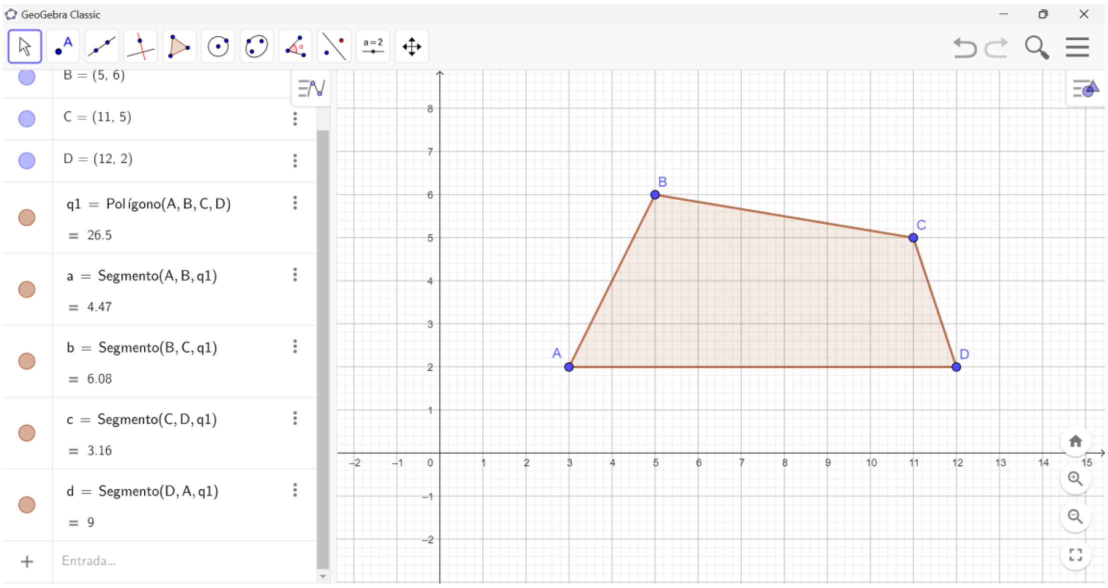
Com base nas informações dadas:

a) Faça o esboço do quadrilátero ABCD que representa o formato do terreno. O esboço deve ser feito em um sistema de coordenadas no plano cartesiano.
b) Calcule a área total do terreno.

Vê-se a solução no GeoGebra.

a) Modelação da figura dada na questão, através do GeoGebra, na figura 18:

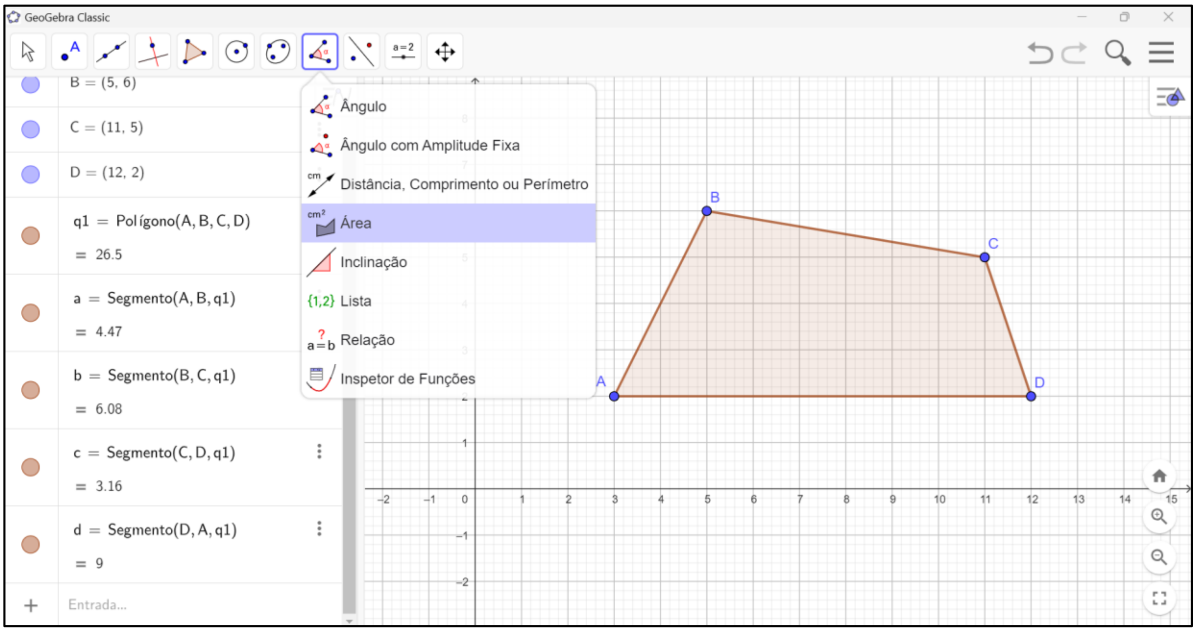
Figura 18. Figura construída com a ferramenta polígono.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

b) Calculando a área através da ferramenta "Medidas – Área", na figura 19:

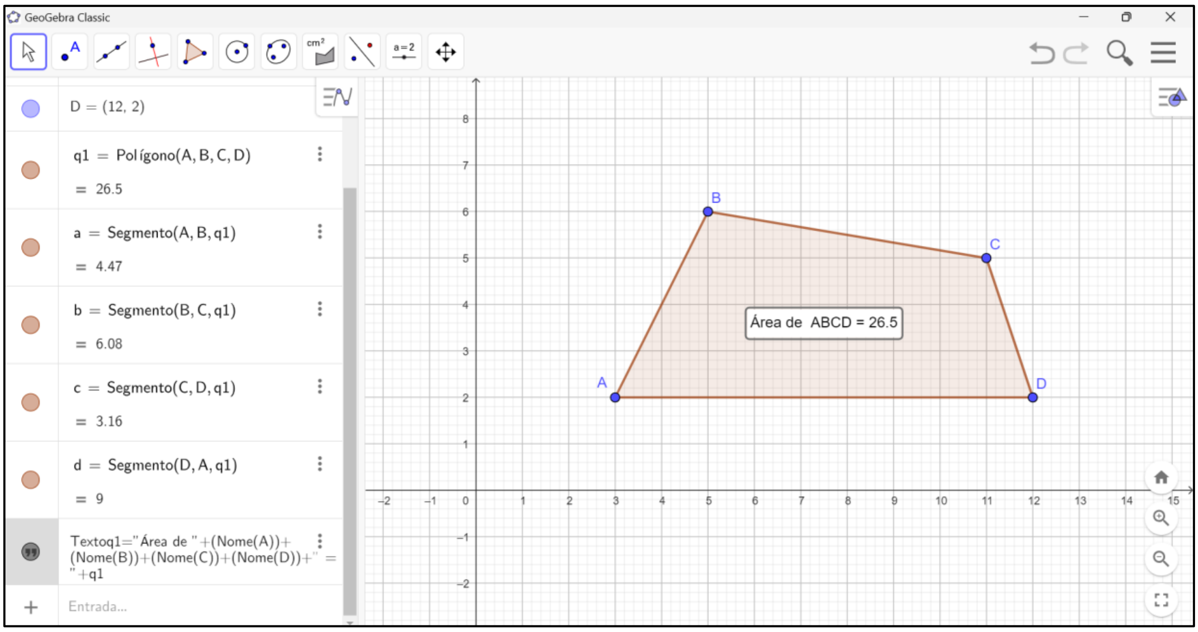
Figura 19. Ferramenta Comprimento (Área).



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Clica-se na figura e aparecerá o valor da área, conforme figura 20:

Figura 20. Cálculo da área com a ferramenta comprimento (Área).

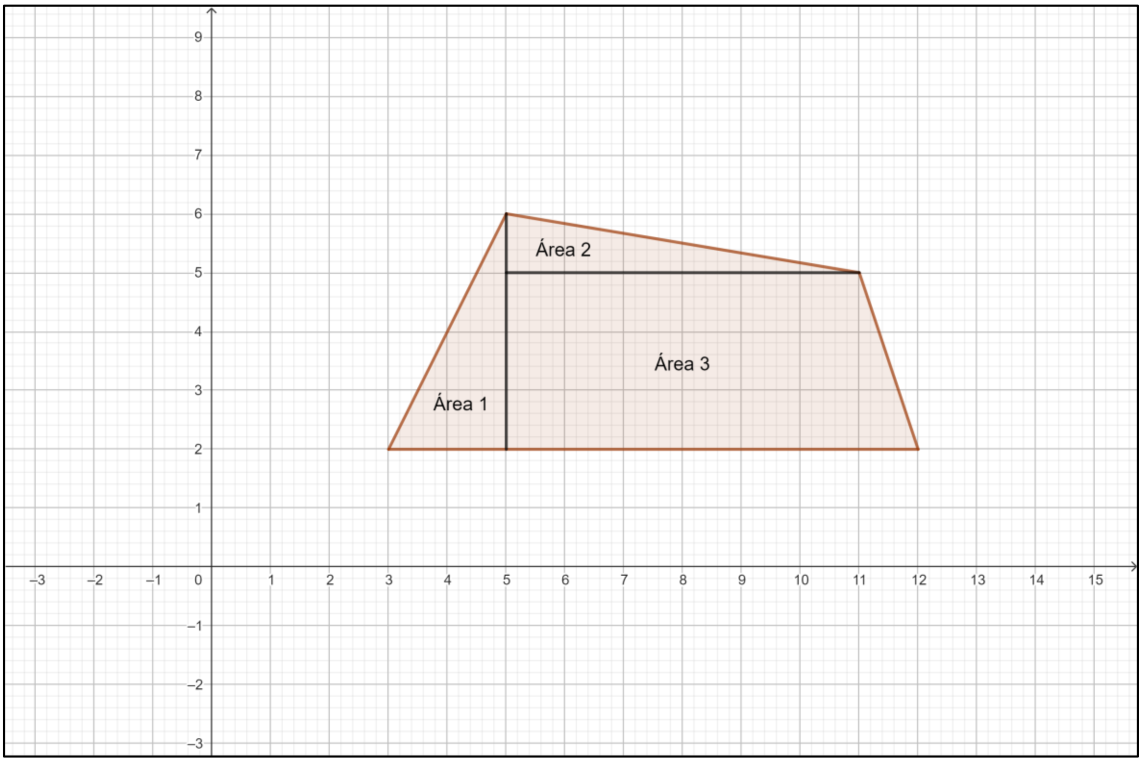


Fonte: GEOGEBRA (2023).

Portanto, $S_Q = 26{,}5$ ■

Utilizando-se das fórmulas clássicas para resolver a questão do item *b* e fazendo a decomposição do polígono como mostra a figura 20, temos:

Figura 21. Cálculo da área com a ferramenta comprimento (Área).



Fonte: AUTOR (2024).

A área 1 corresponde a um triângulo de base (5 – 3 = 2) e altura (6 - 2 = 4), logo a área é:

$A_1 = \frac{b.h}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{2.4}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{2.4}{2} \Rightarrow A_1 = 4$ m

A área 2 corresponde a um triângulo de base (11 – 5 = 6) e altura (6 - 5 = 1), logo a área é:

$A_2 = \frac{b.h}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{6.1}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{6.1}{2} \Rightarrow A_2 = 3$ m

A área 3 corresponde a um trapézio de base maior (12 - 5 = 7), base menor (11 – 5 = 6) e altura (5 - 2 = 3), logo a área é:

$A_3 = \frac{(B+b).h}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{(7+6).3}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{(13).3}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{39}{2} \Rightarrow A_3 = 19{,}5$ m

Somando as áreas, temos:

$A_t = A_1 + A_2 + A_3 = 4 + 3 + 19{,}5 = 26{,}5$ m.

Logo, a área da figura é 26,5 m.

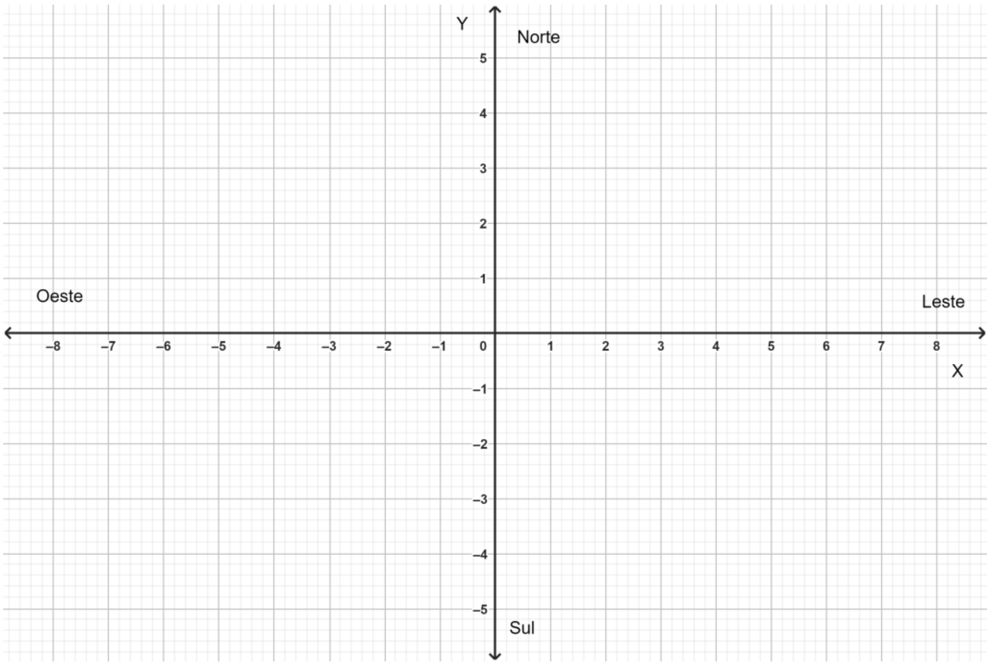
Com o auxílio do GeoGebra, é possível perceber uma maior clareza na compreensão da questão. Isso se deve à capacidade de decompor a figura em formas geométricas clássicas, utilizando a ferramenta de cálculo de áreas de polígonos. Dessa forma, o estudante consegue assimilar como realizar os cálculos de áreas utilizando as fórmulas tradicionais da geometria plana.

Ao explorarmos o conceito de cálculo de áreas de polígonos, podemos também introduzir o conceito de localização de pontos. Isso permite ao estudante iniciar sua compreensão sobre como calcular áreas de polígonos com vértices no plano cartesiano, os quais, quando unidos, formam polígonos diversos. Para uma abordagem mais detalhada sobre este tema, devemos consultar a seção subsequente.

4 LOCALIZAÇÃO DE PONTOS NO PLANO CARTESIANO

Esta seção é dedicada a introduzir a noção de localização de pontos no plano cartesiano. Um sistema de eixos ortogonais num plano π é um par de retas *OX* e *OY*, com igual unidade de medida de comprimento, que se intersectam perpendicularmente no ponto comum *O*. Por convenção, costuma-se considerar a reta *OX* na direção oeste-leste e é denominada eixo horizontal, já a reta *OY* costuma-se considerar na direção sul-norte, é denominada eixo vertical, conforme a figura 20:

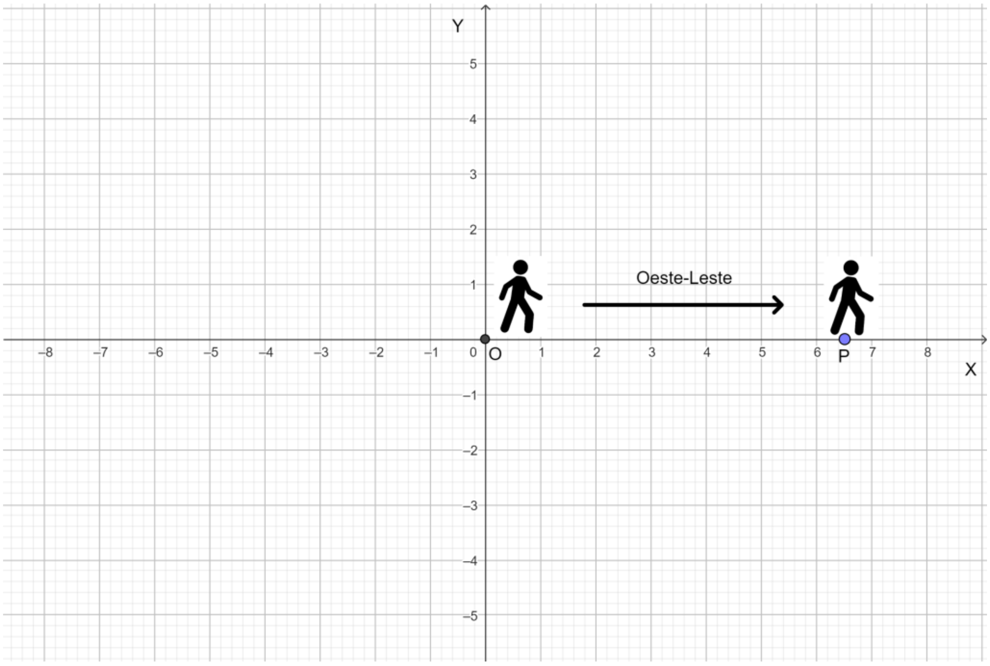
Figura 22. Gráfico Cartesiano – Direções geográficas.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Pode-se fazer referência a essa configuração como sistema de eixos ortogonais *XOY* ou, simplesmente, sistema *XOY*. A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite introduzir o conceito de coordenada. Dado um ponto P na reta OX, têm-se três possibilidades: a primeira, P está à leste do eixo OY. Neste caso, a distância x de O até P é pensada como avanço em OX a partir de O e identifica-se P com x. Nos gráficos seguintes, foram incorporados hiperlinks que direcionam para páginas criadas pelo autor no GeoGebra. Essas páginas permitem que os estudantes manipulem as figuras e movam os personagens para verificar a localização de pontos no plano cartesiano, tanto nas direções Leste-Oeste e vice-versa, quanto nas direções Sul-Norte e vice-versa. As representações dos personagens foram realizadas com a utilização da ferramenta translação por um vetor no GeoGebra.

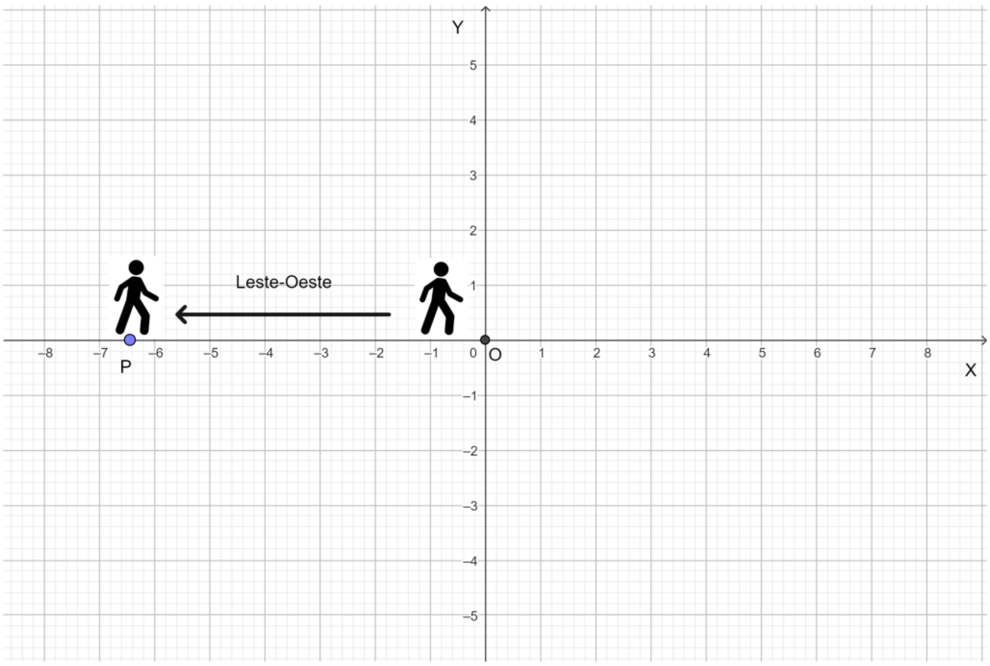
Figura 23. Direção Oeste-Leste.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

Na segunda possibilidade, P está à oeste do eixo OY. Neste caso, a distância x de O até P é pensada como recuo em OX a partir de O e identifica-se P com -x.

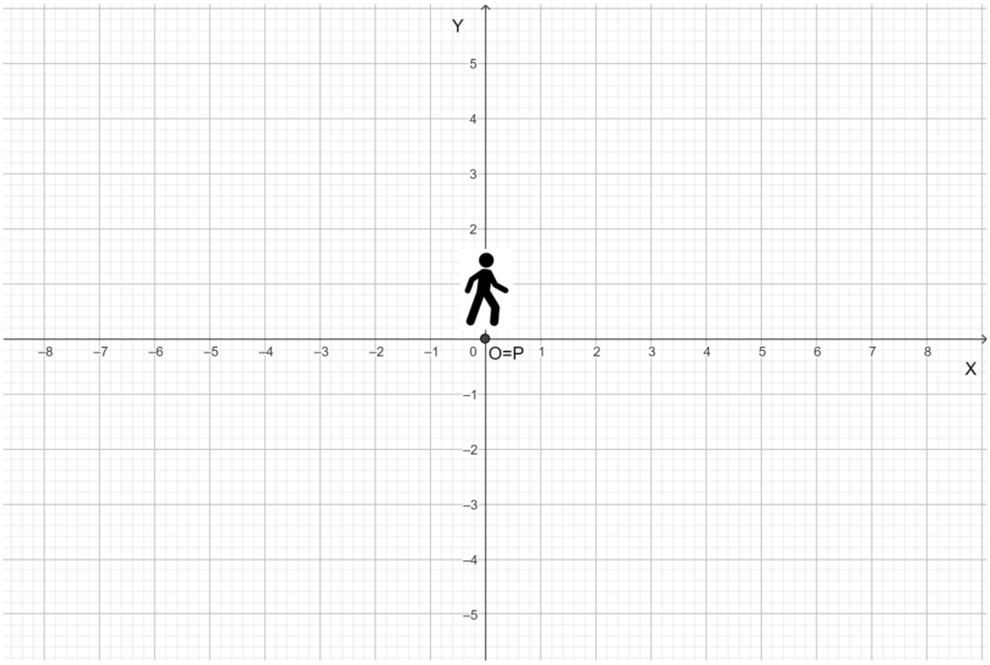
Figura 24. Direção Leste-Oeste.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

Na terceira possibilidade, P coincide com O. Neste caso, entende-se que não houve nem avanço e nem recuo a partir de O e identifica-se P com o número zero.

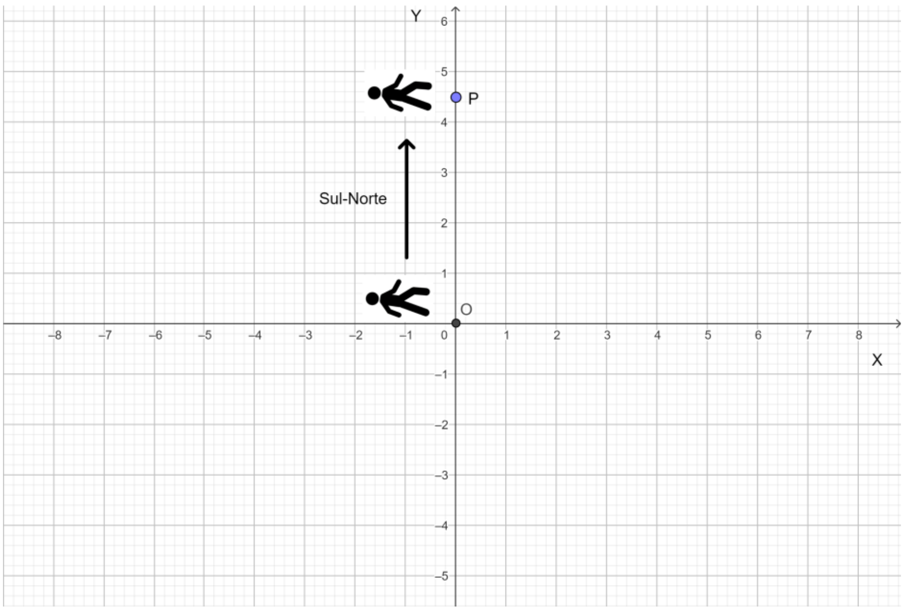
Figura 25. P coincide com O.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

O número real associado a P em qualquer dos casos descritos acima chama-se abscissa correspondente a P. Dado um ponto P na reta OY, temos três possibilidades: na primeira, P está a norte do eixo OX. Neste caso, a distância y de O até P é pensada como avanço em OY a partir de O e identifica-se P com y, conforme figura 24:

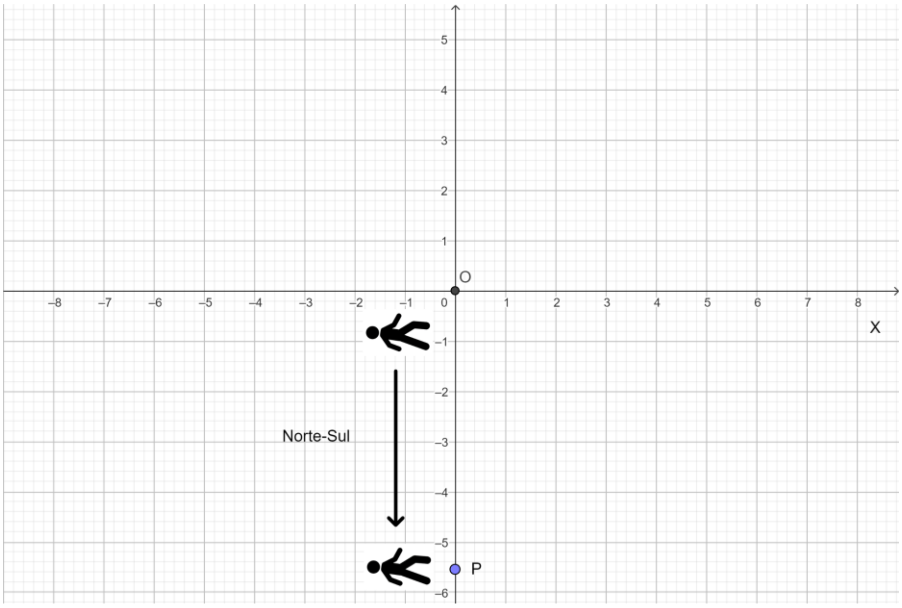
Figura 26. Direção Sul-Norte.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

Na segunda possibilidade, P está a sul do eixo OX. Neste caso, a distância y de O até P é pensada como recuo em OY a partir de O e identifica-se P com -y.

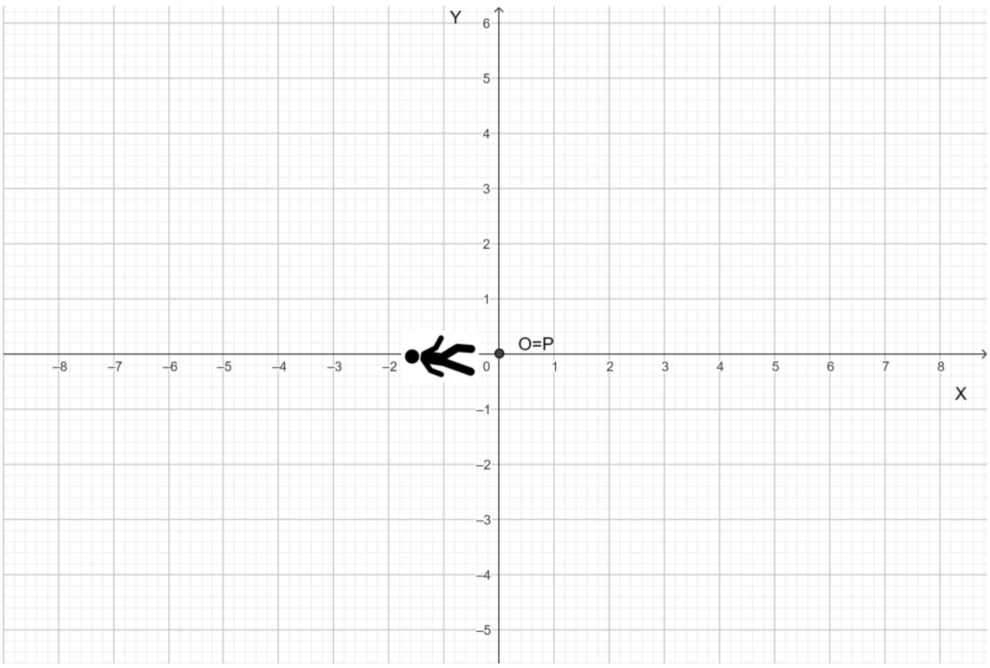
Figura 187. Direção Norte-Sul.



Fonte: NASCIMENTO (2023).

Na terceira possibilidade, P coincide com O. Neste caso, entende-se que não houve nem avanço e nem recuo a partir de O e identifica-se P com o número zero.

Figura 28. P coincide com O.

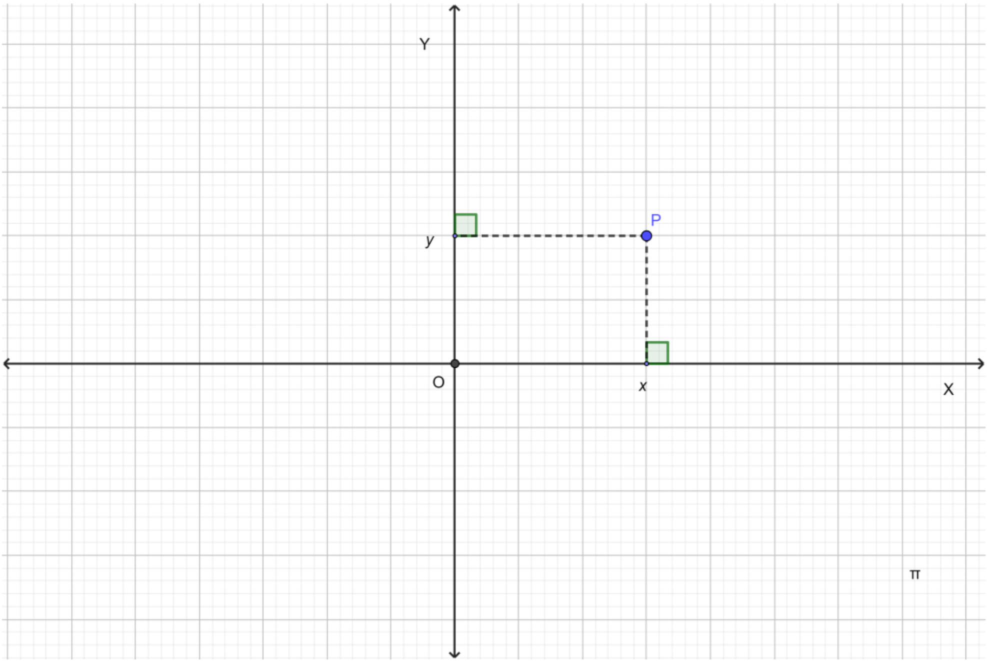


Fonte: NASCIMENTO (2023).

A partir dos conceitos de abscissa e ordenada, pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\ /\ x\ , y\ \in\ \mathbb{R}\}$.

Em geral um ponto $P \in \pi$ corresponde ao par ordenado (x, y), onde x é a abscissa do ponto de intersecção entre o eixo OX e a reta perpendicular a ele que passa por P. De forma análoga y é a ordenada de intersecção entre o eixo OY e a reta perpendicular a ele que passa por P, como mostra a figura 27.

Figura 29. Gráfico Cartesiano.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Reciprocamente, ao par ordenado $(x, y)\ \in\ \mathbb{R}^2$ associa-se o ponto P do plano π dado pela interseção da perpendicular ao eixo OX que passa pelo ponto desse eixo de coordenada x com a perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto desse eixo de coordenada y.

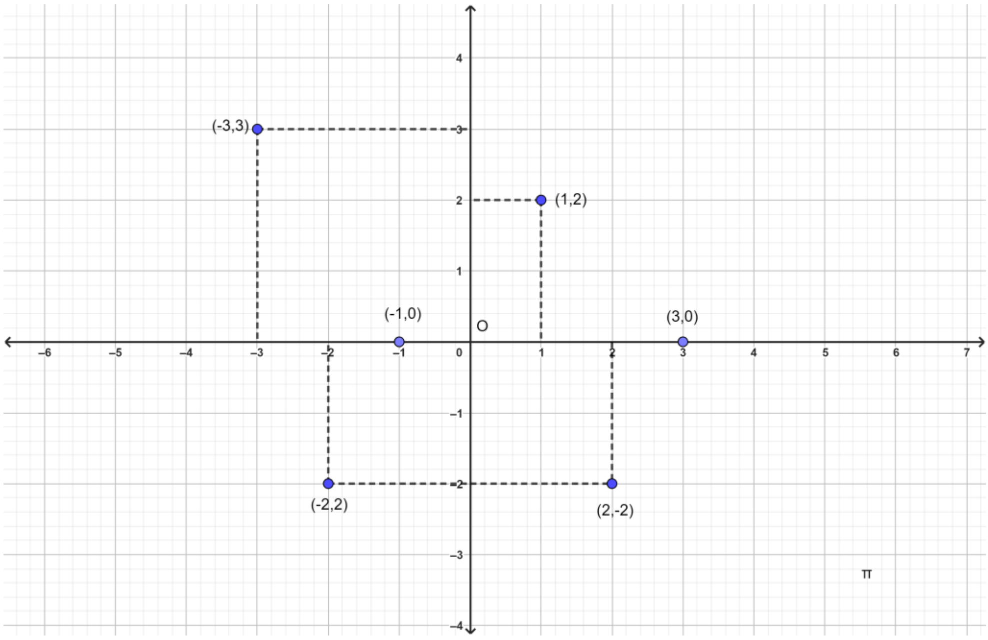
Sabendo-se que $(x, y) = (x', y')$ em $\mathbb{R}^2$ se e somente se $x = x'$ e $y = y'$, é simples verificar que a correspondência ponto do plano $\pi \leftrightarrow$ par ordenado de $\mathbb{R}^2$ é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca.

Os números $x, y\ \in\ \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são também chamadas as coordenadas cartesianas do ponto P: x é a abscissa ou primeira coordenada de P e y é a ordenada ou segunda coordenada de P.

Notação: se $P \in \pi$ corresponde a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $P = (x, y)$.

De acordo com a figura 28, ilustrou-se alguns pontos localizados no plano π com suas coordenadas em relação ao sistema *XOY*.

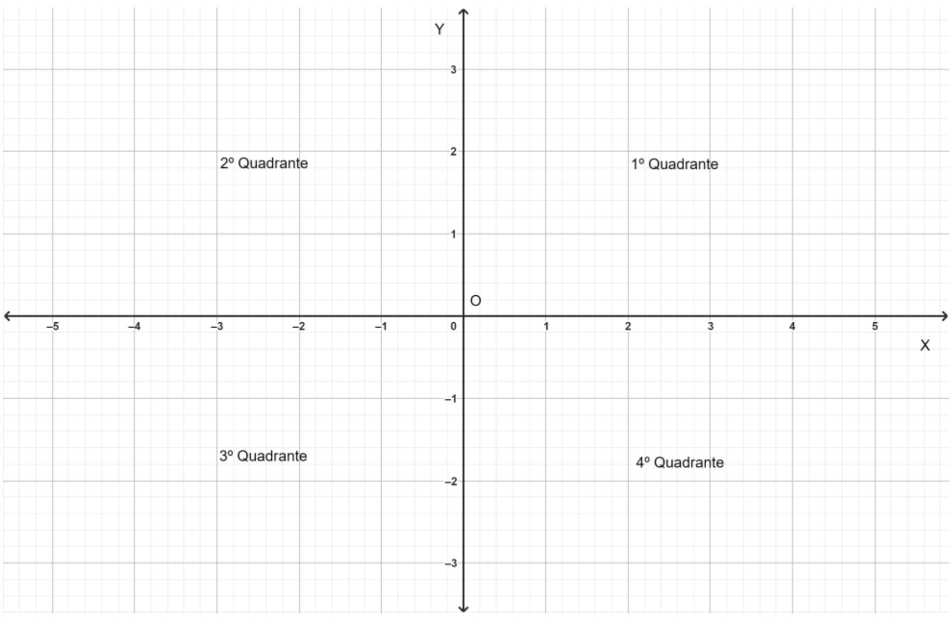
Figura 30. Pontos no plano π.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas quadrantes e enumeradas conforme figura 29. Observa-se que os pontos do eixo *OX* têm coordenadas (*x*, *0*), os pontos do eixo *OY* têm coordenadas (*0*, *y*) e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

Figura 31. Quadrantes do sistema XOY.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

1º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y > 0\}$;
2º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y > 0\}$;
3º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y < 0\}$;
4º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y < 0\}$.

Para mais informações sobre plano cartesiano, ler o texto do Delgado; Frensel e Crissaf (2017). Será analisado alguns exemplos de questões de avaliações de larga escala, que envolvem localização de pontos no Plano Cartesiano, mas para isso, deve-se compreender o que são essas avaliações, pois as mesmas são aplicadas em níveis Nacional e Estadual. As avaliações de larga escala são fundamentais para saber a proficiência dos estudantes, e assim ter resultados que irão desenvolver as ações propostas em sala de aula.

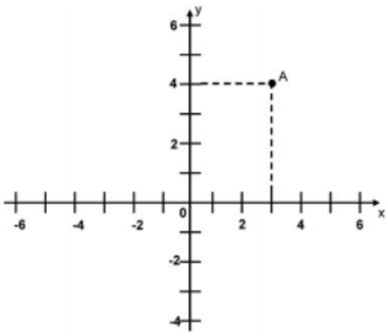
O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é uma prova na qual os estudantes são avaliados a cada dois anos de modo a ter um diagnóstico nacional de como está o nível de aprendizagem dos estudantes. Essa prova é constituída de questões de Português e Matemática (Brasil, 2021). O Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (Saepe), foi criado em 2000, é uma prova a nível estadual, constituída de questões que envolvem Português e Matemática, é anual e busca saber o nível de proficiência de cada estudante nas disciplinas que são cobradas (Saepe, 2023).

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi criado em 1998 e tem como objetivo avaliar como os estudantes se encontram no fim do ensino médio e além disso dá acesso ao ensino superior em diversas universidades públicas e privadas no país (Brasil, 2018).

Nas avaliações de larga escala, é evidente a dificuldade dos alunos em abordar as questões com precisão. Diante desse desafio, surge a necessidade de melhorar a qualidade da aprendizagem dos estudantes, adotando abordagens que utilizem recursos tecnológicos para compreender as questões de forma mais dinâmica. Para ilustrar esse ponto, as questões a seguir foram selecionadas a partir dessas avaliações em larga escala servindo como exemplos que tanto professores quanto estudantes podem analisar e estabelecer conexões, especialmente no contexto da geometria, com foco na localização de pontos no plano cartesiano.

Abaixo, alguns exemplos de questões de larga escala.

Exemplo 3. SAEB (2009) A figura abaixo mostra um ponto de um plano cartesiano:



As coordenadas do ponto A, são:

a) (6, 6)

b) (-3, 4)

c) (3, 4)

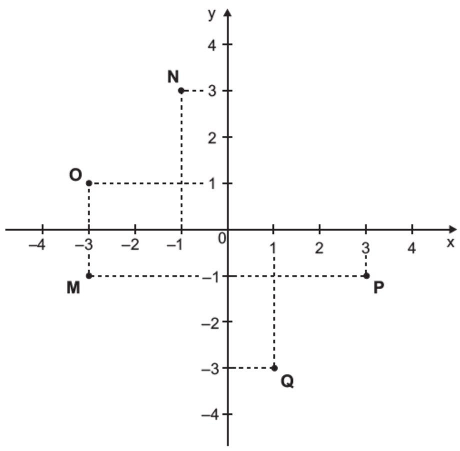
d) (3, 7)

e) (4, 5)

Solução:

Por meio de análise do plano cartesiano, percebe-se que as coordenadas do ponto A são (3, 4). Alternativa c).

Exemplo 4. SAEPE (2015) Observe os pontos no plano cartesiano abaixo:



Qual desses pontos representa o par ordenado (-3, 1)?

a) M

b) N

c) O

d) P

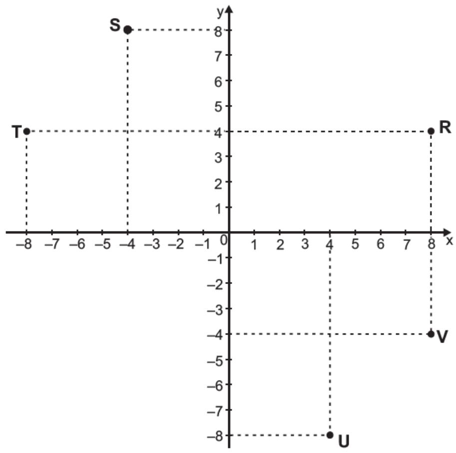
e) Q

Solução:

Por meio da análise do plano cartesiano, percebe-se que o par ordenado (-3, 1) corresponde ao ponto O.

Alternativa c).

Exemplo 5. SAEPE (2022) Considere os pontos R, S, T, U e V, representados no plano cartesiano abaixo:



Qual desses pontos possui abscissa 8 e ordenada -4?

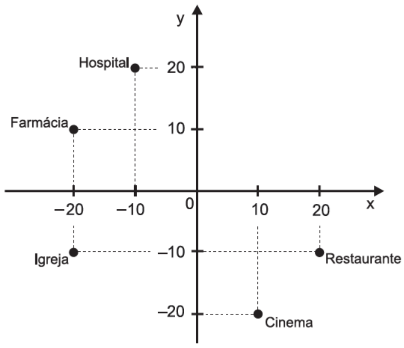
a) R
b) S
c) T
d) U
e) V

Solução:

Por meio da análise do plano cartesiano, percebe-se que o par ordenado (8, -4) corresponde ao ponto V.

Alternativa e).

Exemplo 6. SAEPE (2021) O plano cartesiano abaixo representa parte do mapa de uma cidade em que os estabelecimentos estão associados a pontos desse plano.



Qual estabelecimento dessa cidade está associado ao ponto de coordenadas (-20, -10)?

a) Cinema.

b) Farmácia.

c) Hospital.

d) Igreja.

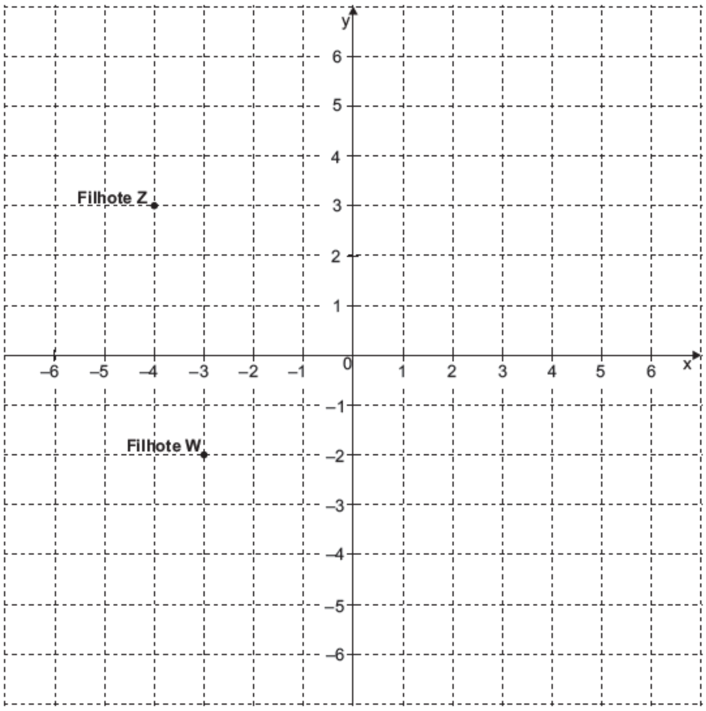
e) Restaurante.

Solução:

Por meio do plano cartesiano, percebem-se que o estabelecimento de coordenadas (-20, -10), é a igreja.

Alternativa d).

Exemplo 7. SAEPE (2017) Uma organização que protege animais silvestres colocou um dispositivo de localização em dois filhotes, permitindo, assim, acompanhá-los. No desenho abaixo está representada a localização desses dois filhotes pelos pontos Z e W.



Os pares ordenados que representam a localização dos filhotes Z e W são, respectivamente:

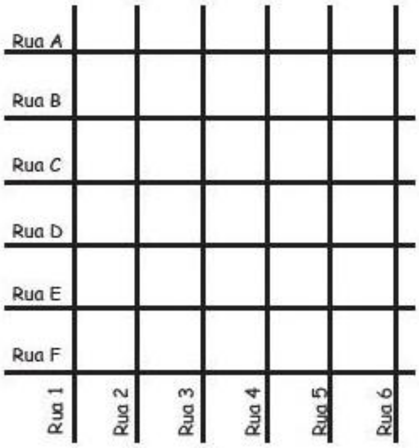
a) (-4, -3) e (3, -2)
b) (-4, 3) e (-3, -2)
c) (3, -4) e (-3, -2)
d) (3, -4) e (-2, -3)
e) (4, 3) e (3, 2)

Solução:

Por meio do plano cartesiano, percebe-se que os pares ordenados que representam a localização dos filhotes Z e W são (-4, 3) e (-3, -2).

Alternativa b).

Exemplo 8. Enem - Questão 142 – 1ª Azul (2016) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A. Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.
b) 4 e C.
c) 4 e D.
d) 4 e E.
e) 5 e C.

Solução:
Conforme as localizações dos pontos, pode-se ver que o local que a mãe trabalha e o consultório do pai se localizam na rua E, o que implicará a localização na rua 4, que é a mediatriz dos pontos indicados e deixam os caminhos equidistantes, logo o ponto será localizado na rua 4 com a rua E, mas para ficarem com a mesma distância é necessário subir para a rua 4 com a rua D, que atendem as pretensões da família.
Alternativa c).

É evidente que essas questões ilustram a aplicação e relevância da localização de pontos no gráfico cartesiano, uma habilidade fundamental para professores e estudantes em suas atividades do cotidiano. O uso do GeoGebra pode aprimorar significativamente a compreensão desse tema. Com esses conceitos em mente, podemos avançar para o estudo da fórmula da área de polígonos como função dos vértices, como será abordado na próxima seção.

5 FÓRMULA DA ÁREA DE POLÍGONOS COMO FUNÇÃO DOS VÉRTICES

Esta seção será dedicada à apresentação da fórmula das áreas de polígonos como função dos vértices, e sua aplicação para deduzir as fórmulas clássicas de cálculo de áreas descritas nos livros didáticos.

Em Lima (2014), é provado que dado um polígono de n lados, com $n \geq 3$, conforme figura 30 e cujo os vértices são P_1, P_2, P_3, ..., P_n enumerados considerando o percurso da poligonal no sentido anti-horário, portanto a área é dada por:

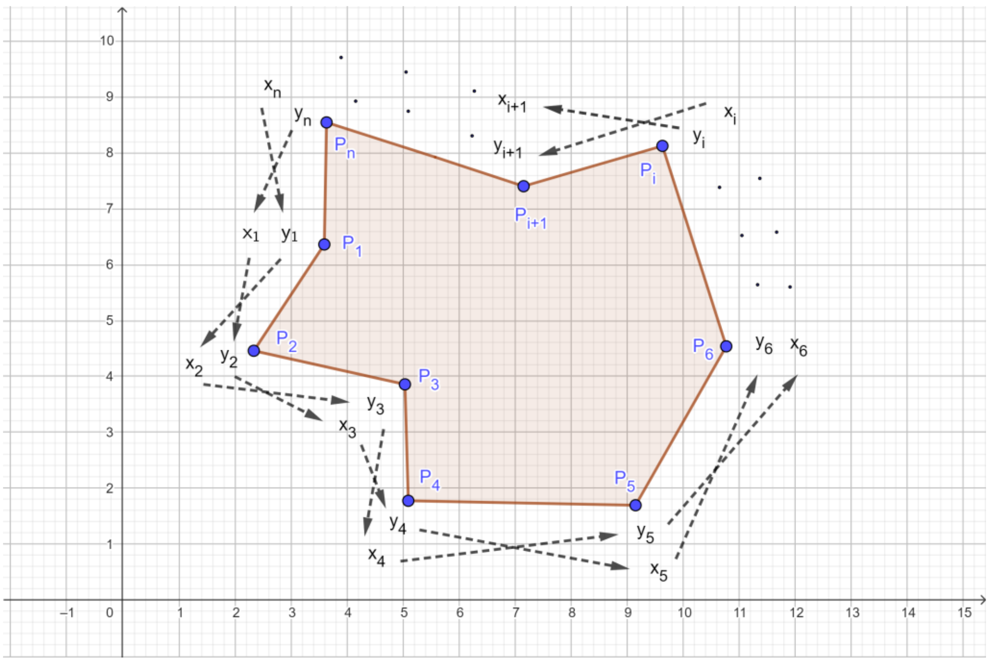
$$(*) \quad \mathrm{a}(\wp) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n)\right].$$

Neste trabalho, considera-se, $P_{n+1}(x_{n+1,} y_{n+1}) = P_1(x_{1,} y_1)$ e apresenta-se (*) na forma: $a(\wp) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} y_i\right]$, podendo colocar o somatório em evidência, então têm-se:

$$a(\wp) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right].$$

Uma forma de visualizar como as coordenadas dos pontos se comportam na operação é a forma mostrada na figura 30, como segue na sequência:

Figura 32. Polígono de n lados.



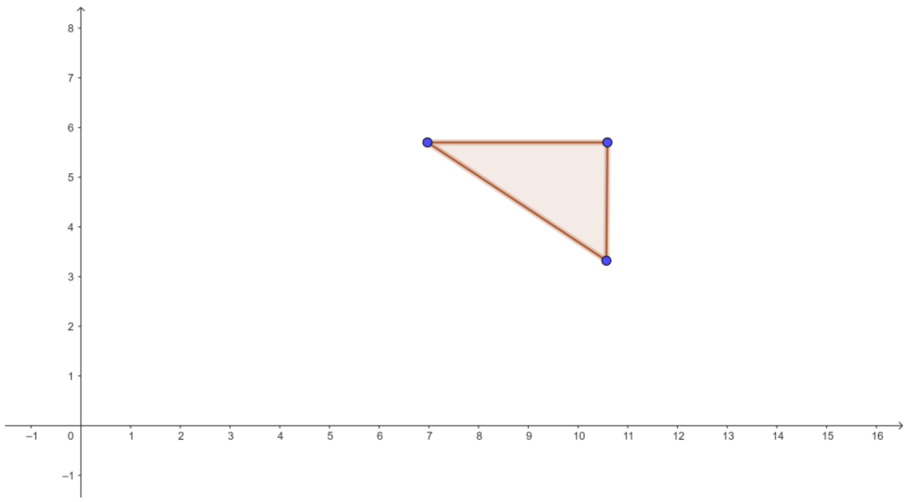
Fonte: NASCIMENTO (2023).

Pode-se aplicar essa fórmula da áreas de polígonos como função dos vértices e fazer deduções das fórmulas clássicas de polígonos, observa-se como se comportam.

Área do Triângulo

Observa-se o triângulo que segue:

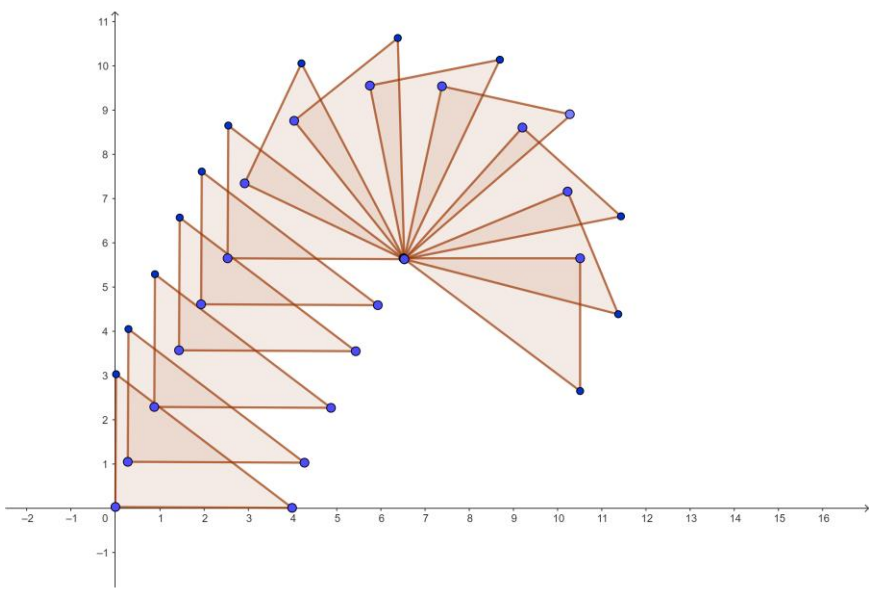
Figura 19. Triângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Agora rotaciona-se e translada-se o triângulo de modo a ficar centralizado com o gráfico cartesiano. Vê-se a figura que segue.

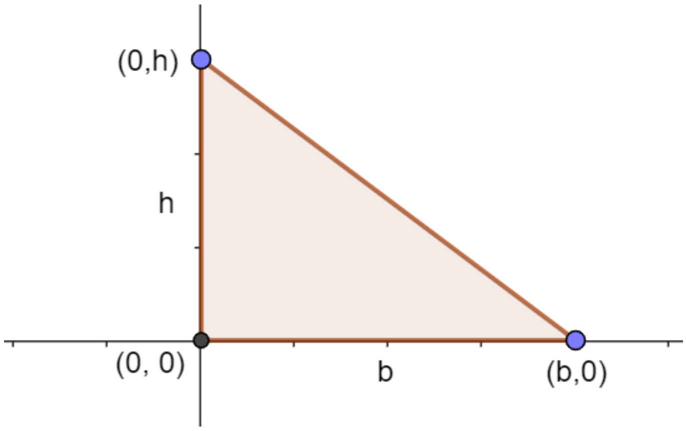
Figura 34. Rotação e Translação de um triângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Ao localizar o triângulo no gráfico cartesiano, têm-se a figura 33:

Figura 35. Área do triângulo.



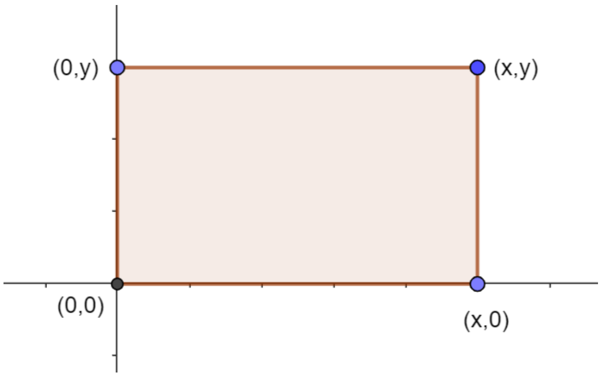
Fonte: GEOGEBRA (2023).

$$S_T = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - b \cdot 0) + (b \cdot h - 0 \cdot 0) + (0 \cdot 0 - 0 \cdot h)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[b \cdot h]$$

Área do retângulo

Figura 36. Área do retângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

$$S_R = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - x \cdot 0) + (x \cdot y - x \cdot 0) + (x \cdot y - 0 \cdot y) + (0 \cdot 0 - 0 \cdot y)]$$

$$S_R = \frac{1}{2}[(x \cdot y) + (x \cdot y)]$$

$$S_R = \frac{1}{2}[2(x \cdot y)]$$

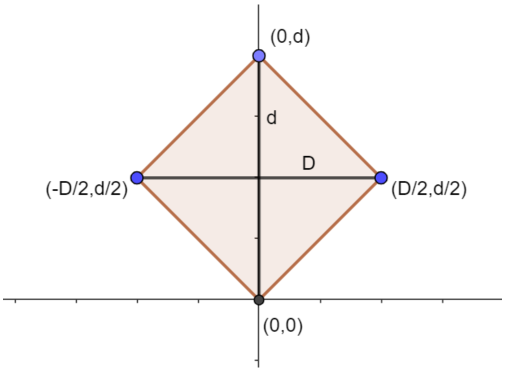
$$S_R = [x \cdot y]$$

No caso particular do retângulo em que os lados são iguais, correspondendo a um quadrado, pode-se chamá-los de l, portanto, têm-se que $x = y = l$, portanto a área correspondente ao quadrado é:

$$S_Q = [l \cdot l]$$
$$S_Q = l^2$$

Área do Losango

Figura 37. Área do losango.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

$$S_L = \frac{1}{2}[\left(0 \cdot \frac{d}{2} - \frac{D}{2} \cdot 0\right) + \left(\frac{D}{2} \cdot d - 0 \cdot \frac{d}{2}\right) + \left(0 \cdot \frac{d}{2} - \left(-\frac{D}{2} \cdot d\right)\right) + \left(-\frac{D}{2} \cdot 0 - 0 \cdot \frac{d}{2}\right)]$$

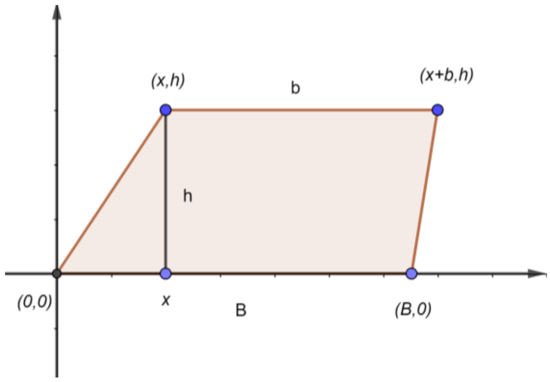
$$S_L = \frac{1}{2}[\left(d \cdot \frac{D}{2}\right) + \left(d \cdot \frac{D}{2}\right)]$$

$$S_L = \frac{1}{2}[\left(2d \cdot \frac{D}{2}\right)]$$

$$S_L = [d \cdot \frac{D}{2}]$$

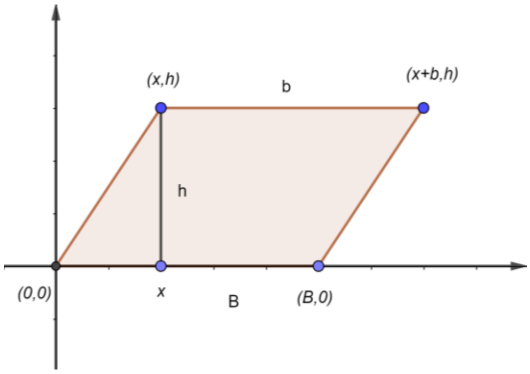
Área do Trapézio de altura *h* e bases *B* e *b*.

Figura 38. Área do trapézio.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Figura 39. Área do Paralelogramo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

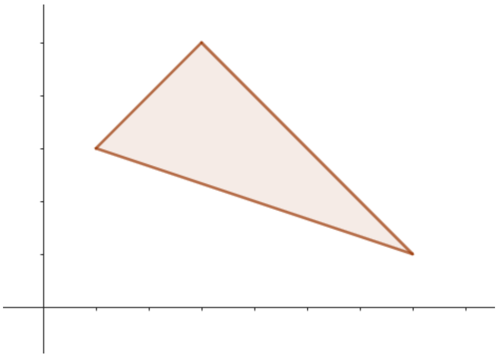
$$S_T = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - B \cdot 0) + (B \cdot h - (x+b) \cdot 0) + ((x+b) \cdot h - x \cdot h) + (x \cdot 0 - 0 \cdot h)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[(B \cdot h + b \cdot h)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[B + b] \cdot h$$

No caso particular em que $B = b$, o trapézio é um paralelogramo (figura 37) e sua área é igual a $B.b$. Dessa forma pode-se aplicar a fórmula das áreas de polígonos como função dos vértices em exemplos de questões que envolvem cálculo de áreas de polígonos clássicos.

Exemplo 9. Autor (2023). Observando o triângulo que segue, calcule a área em metros quadrados, dados os vértices A (3,5), B (1,3), C (7,1).



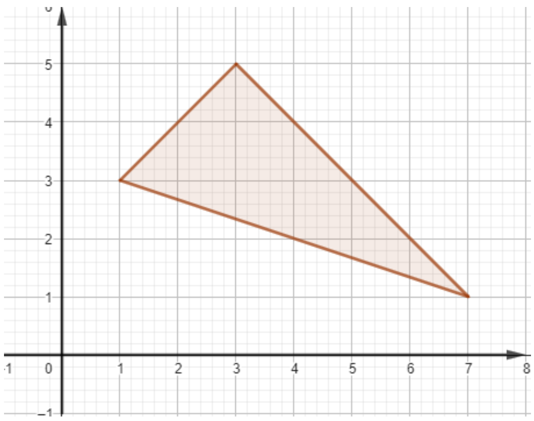
Fonte: GEOGEBRA (2023).

a) 2
b) 5,66
c) 2,83
d) 8
e) 9

Solução:

Modela-se no GeoGebra a figura dada na questão, vide figura 38:

Figura 40. Triângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Aplicando a fórmula, têm-se:

$$S_T = \frac{1}{2}[(3 \cdot 3 - 1 \cdot 5) + (1 \cdot 1 - 7 \cdot 3) + (7 \cdot 5 - 3 \cdot 1)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[4 + (-20) + (32)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[16]$$

$$S_T = 8$$

Portanto, $S_T = 8\ m^2$ ∎

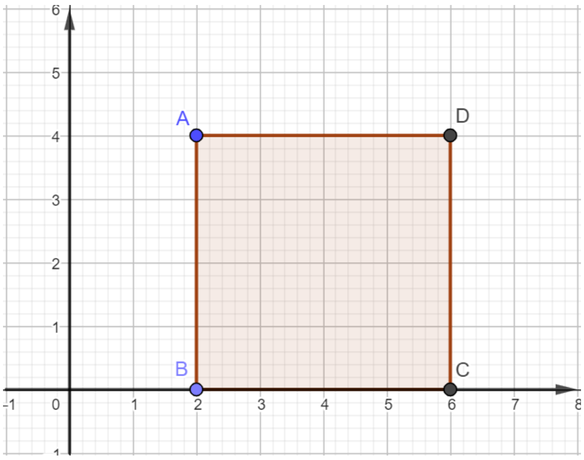
Exemplo 10. Autor (2023). Uma loja será construída em um terreno quadrado, na escala de 1:100, ou seja, cada um centímetro no papel corresponde a 1 metro no real. Calcule a área dessa loja de vértices A (2,4), B (2,0), C (6,0), D (6,4), em metros quadrados.

a) 10
b) 16
c) 20
d) 24
e) 30

Solução:

Modela-se no GeoGebra a figura dada na questão, vide figura 39.

Figura 41. Quadrado.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Aplicando a fórmula, têm-se:

$$S_Q = \frac{1}{2}[(2 \cdot 0 - 2 \cdot 4) + (2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) + (6 \cdot 4 - 6 \cdot 0) + (6 \cdot 4 - 4 \cdot 2)]$$

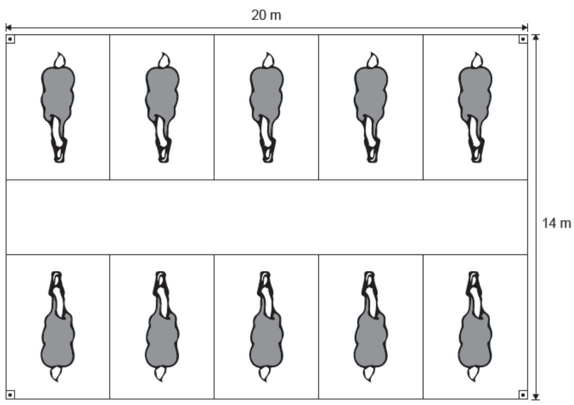
$$S_Q = \frac{1}{2}[(-8) + (24) + (16)]$$

$$S_Q = \frac{1}{2}[32]$$

$$S_Q = 16$$

Portanto, $S_Q = 16\ \mathrm{m}^2$ ∎

Exemplo 11. SAEPE (2018). Observe, no desenho abaixo, o esquema de um estábulo que foi construído para acomodar dez cavalos.



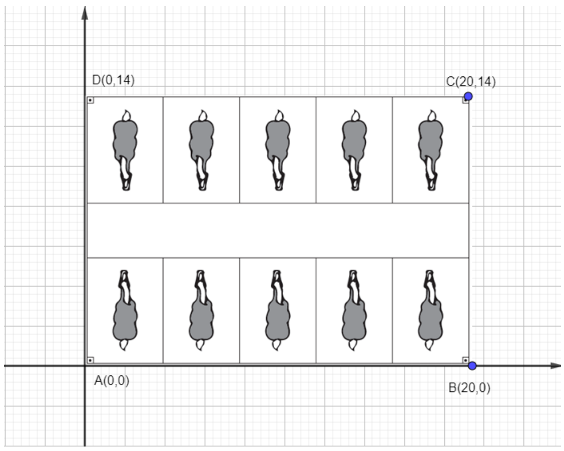
Qual a medida da área ocupada por esse estábulo?

a) 960 m^2
b) 280 m^2
c) 140 m^2
d) 68 m^2
e) 34 m^2

Solução:

Modela-se no GeoGebra a figura dada na questão, como na figura 40:

Figura 42. Retângulo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Aplicando a fórmula, têm-se:

$$S_R = \frac{1}{2}[(20 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + (20 \cdot 14 - 20 \cdot 0) + (20 \cdot 14 - 0 \cdot 14) + (0 \cdot 0 - 14 \cdot 0)]$$

$$S_R = \frac{1}{2}[280 + 280]$$

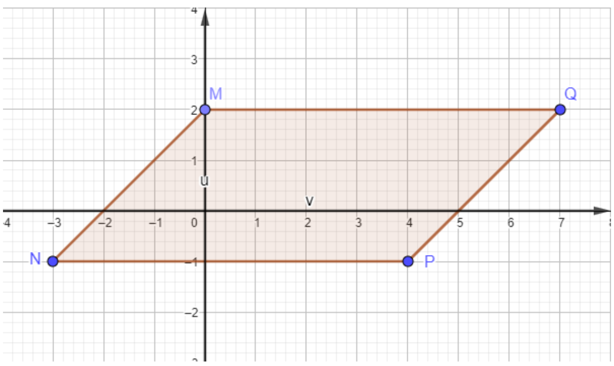
$$S_R = \frac{1}{2}[560]$$

$$S_R = 280$$

Portanto, $S_R = 280 \text{ m}^2$ ■

Exemplo 12. Autor (2023). Observe o paralelogramo MNPQ desenhado no plano cartesiano, determine a área dessa figura de acordo com as coordenadas dos vértices, como na figura 41 abaixo:

Figura 43. Paralelogramo.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Solução:

Aplicando a Fórmula, têm-se:

$$S_P = \frac{1}{2}[(0 \cdot (-1) - (-3) \cdot 2) + (-3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1)) + (4 \cdot 2 - 7 \cdot (-1)) + (7 \cdot 2 - 2 \cdot 0)]$$

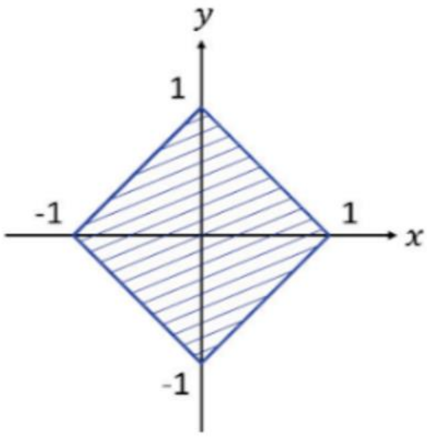
$$S_P = \frac{1}{2}[6 + 7 + 15 + 14]$$

$$S_P = \frac{1}{2}[42]$$

$$S_P = 21$$

Portanto, $S_P = 21$ ■

Exemplo 13. Fuvest (2023) – Adaptada. Considere a região do plano cartesiano A = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: $|x| + |y| \leq 1$} esboçada na figura.



A área delimitada pela inequação modular é:

a) 1 u.a.
b) 2 u.a.
c) 3 u.a.
d) 4 u.a.
e) 5 u.a.

Solução:

Aplicando a fórmula, têm-se:

$$S_L = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1) + (-1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0) + (0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)]$$

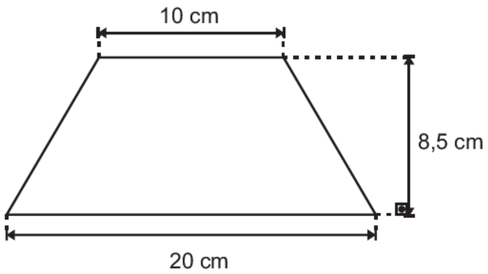
$$S_L = \frac{1}{2}[1 + 1 + 1 + 1]$$

$$S_L = \frac{1}{2}[4]$$

$$S_L = 2$$

Portanto, $S_L = 2$ u. a. ■

Exemplo 14. SAEPE (2022). Juliana comprou ladrilhos, que possuem o formato de um trapézio, para revestir parte de parede do seu banheiro. Na figura abaixo está representado um desses ladrilhos com algumas medidas indicadas.



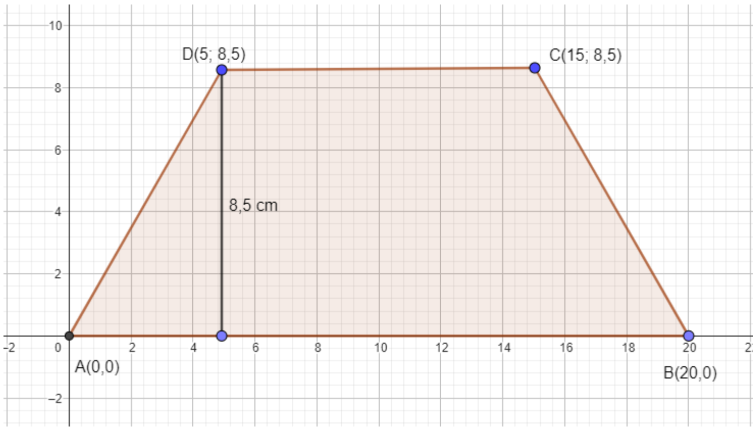
Qual é a medida da área, em centímetros quadrados, ocupada por um desses ladrilhos na parede do banheiro de Juliana?

a) 38,5
b) 127,5
c) 170,0
d) 255,0
e) 1700,0

Solução:

Modela-se no GeoGebra a figura dada na questão, como na figura 42:

Figura 20. Trapézio.



Fonte: GEOGEBRA (2023).

Aplicando a fórmula, têm-se

$$S_T = \frac{1}{2}[(0 \cdot 0 - 20 \cdot 0) + (20 \cdot 8{,}5 - 15 \cdot 0) + (15 \cdot 8{,}5 - 5 \cdot 8{,}5) + (0 \cdot 8{,}5 - 0 \cdot 8{,}5)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[170 + 85]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[225]$$

$$S_T = 127{,}5$$

Portanto, $S_T = 127{,}5$ cm^2 ■

Pode-se perceber, por meio desses exemplos, que a fórmula da área de polígonos como função dos vértices é aplicável e serve como estímulo para os estudantes abordarem questões de larga escala. O uso do GeoGebra possibilita a visualização das figuras, enquanto a fórmula em si permite o cálculo de uma variedade de polígonos. Uma abordagem organizada e sistematizada para aplicar o cálculo de áreas de polígonos é por meio de uma sequência didática que será detalhada na próxima seção.

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Uma sequência didática é uma forma de planejar um conteúdo com diversos passos bem estruturados, que conversam entre si de uma forma harmônica, possibilitando que o estudante tenha a capacidade de aprender de forma sequenciada (Zabala 1998).

A sequência didática permite ao professor uma melhor adequação de conteúdo, de forma que o estudante consiga aprender de maneira linear e que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados. É de fundamental importância que o professor consiga se apropriar dessa forma de trabalho, e assim dar sentido ao que será ensinado de maneira mais sequencial e lógica possível, pois os estudantes conseguem alcançar melhores resultados por meio de uma sistematização como essa, que será desenvolvida neste trabalho.

Este estudo trata-se de uma pesquisa de natureza básica, exploratória, de cunho bibliográfico e descritiva. Procurou-se, por meio de uma geometria dinâmica, explorar os conceitos geométricos através do GeoGebra, por ser um software gratuito, amplamente utilizado em Matemática e de fácil manuseio. Desta forma, a metodologia proposta tem como objetivo estimular os estudantes a aprenderem ativamente, por meio da mediação do professor e do uso de atividades de ensino utilizando a plataforma GeoGebra.

A presente metodologia requer uma sequência didática previamente elaborada com o propósito de associar conceitos geométricos de áreas com o software GeoGebra, baseada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC é um documento normativo que apresenta uma lista de aprendizagens necessárias para que todos os estudantes possam desenvolver habilidades nos níveis da educação básica. Ela auxilia os professores na construção dos currículos das escolas, garantindo os direitos de aprendizagem para atingir os objetivos estabelecidos para os estudantes (Brasil, 2018).

Conforme Peretti e Tonin da Costa (2013), é fundamental para a elaboração de uma sequência didática a realização de um diagnóstico prévio dos estudantes, para que seja analisado o progresso nas atividades propostas de acordo com o entendimento de cada aluno e, assim, planejar aulas com diferentes formas de atividades, como jogos, problemas, desafios, entre outros. Dessa forma, o professor poderá aprofundar os conteúdos de maneira mais adequada para cada estudante, fazendo um diagnóstico prévio da turma na qual irá desenvolver o tema proposto para ser trabalhado em sala de aula, com a elaboração da sequência didática.

6.1 Proposta de Sequência Didática: Calculando áreas de polígonos com o GeoGebra

A proposta descrita neste trabalho apresenta um conjunto de atividades envolvendo o Cálculo de áreas de polígonos com o GeoGebra, as quais podem ser divididas em três etapas, detalhadas a seguir. A aplicação deve ser realizada ao longo de um período de 10 aulas, destinadas às turmas do 9º ano do Ensino Fundamental. Dependendo da realidade da escola, dos alunos e dos professores, é possível ajustar a quantidade de aulas previstas para o desenvolvimento completo da sequência didática, pois esta não é uma proposta fixa, mas sim flexível, podendo ser adaptada conforme necessário.

6.1.1 Atividade 1: Uso dinâmico do GeoGebra

Objetivos: Apresentar e conhecer o software GeoGebra, aprender como calcular a área de polígonos e aplicá-lo em questões propostas pelo professor.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), pode-se usar algumas habilidades. Veja o quadro 2 abaixo:

Quadro 2. Habilidades de áreas de polígonos da BNCC.

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
Grandezas e medidas	Área de figuras planas	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Duração: 4 aulas de 50 minutos.

Local: Laboratório de Informática.

Organização dos estudantes: Dupla.

Recursos e/ou materiais utilizados: Atividades propostas pelo professor com cálculo de áreas, usando os exemplos citados na seção um, computadores com internet para manipulação do GeoGebra, data show, notebook.

Desenvolvimento: Neste encontro será mostrado como funciona o GeoGebra, com ênfase nas principais ferramentas que serão utilizadas para construir figuras que são necessárias para a construção dos polígonos e que serão propostas pelo professor, tais como: malha quadriculada, ponto, segmento de reta, comprimento, polígonos, áreas, entre outros.

6.1.2 Atividade 2: Localização de pontos no plano cartesiano

Objetivo: Localizar pontos no plano cartesiano.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), pode-se utilizar algumas habilidades. Veja o quadro 3 abaixo:

Quadro 3. Habilidades de localização de pontos da BNCC.

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Distância entre pontos no plano cartesiano	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Local: Sala de aula.

Organização dos estudantes: Dupla.

Recursos e/ou materiais utilizados: Datashow, notebook, lápis, borracha e caneta.

Desenvolvimento: Entender como localizar pontos com o uso de slides projetados no data show, utilizando o GeoGebra como recurso tecnológico para dinamizar a aula. O professor poderá utilizar as questões propostas na seção dois como atividade para que o estudante reconheça a localização de pontos.

6.1.3 Atividade 3: Áreas de polígonos como função dos vértices

Objetivos: Apresentaremos a fórmula da área de um polígono como função dos seus vértices e aplicá-la para demonstrar algumas fórmulas clássicas de áreas. Aplicar a fórmula em questões de polígonos. Utilizar o GeoGebra para modelar os polígonos no gráfico cartesiano.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), pode-se utilizar algumas habilidades. Veja o quadro 4 abaixo:

Quadro 4. Habilidades de geometria da BNCC.

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Grandezas e medidas	Área de figuras planas	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
Geometria	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Objetos de Conhecimento: Conhecer a fórmula de área de um polígono como função dos seus vértices; Aplicar a fórmula em questões de polígonos.

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Local: Sala de aula.

Organização dos estudantes: Dupla.

Recursos e/ou materiais utilizados: Quadro branco, pincel, caderno, lápis, borracha e caneta.

Desenvolvimento: Neste encontro, será apresentada no quadro branco a fórmula mencionada em (Lima, 2014). Além disso, poderão ser resolvidos e elaborados problemas que envolvam medidas de área de figuras planas, utilizando expressões de cálculo de área, e a percepção da igualdade entre as áreas de figuras em que uma é obtida a partir da outra por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação). Por fim, o professor poderá utilizar as questões propostas na seção três.

6.1.4 Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio das atividades propostas, registros dos estudantes e participação nas aulas, verificando se os estudantes estão aptos a:

- Manipular o Software GeoGebra para construção e cálculo de áreas de polígonos e polígonos regulares;
- Reconhecer a localização de pontos no plano cartesiano;
- Conhecer a fórmula de Áreas de polígonos como função dos vértices;
- Aplicar a fórmula de áreas de polígonos como função dos vértices em questões diversas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma das grandes dificuldades de ensinar geometria é a metodologia aplicada em sala de aula, por meio de métodos tradicionais. Além disso, a memorização de fórmulas sem um desenvolvimento das habilidades que permita identificar problemas relacionados aos assuntos, em especial o cálculo de áreas de polígonos clássicos, contribui para essa dificuldade. Com essa questão em mente, foi proposto o uso de recursos tecnológicos para auxiliar no ensino da geometria, por meio do software GeoGebra.

Este trabalho apresenta três principais contribuições teóricas. A Primeira contribuição teórica é a apresentação e o uso dinâmico do software GeoGebra por meio de suas ferramentas. A segunda contribuição teórica é a análise e a compreensão de localização de pontos no plano cartesiano e o cálculo de áreas de polígonos como função dos vértices, por meio da utilização do GeoGebra. A terceira contribuição teórica é a construção de uma sequência didática que poderá ser usada em sala de aula.

A matemática requer um novo olhar para a forma como é ensinada em sala de aula, visando melhorar a prática pedagógica dos docentes de uma maneira mais aplicável e de fácil entendimento. É por isso que entram as novas tecnologias que a BNCC defende como um novo rumo para o conhecimento.

Dessa forma, percebe-se a importância do uso de tecnologias no ensino de Matemática que recebe lugar de destaque ao longo dessa dissertação, evidenciando o uso do GeoGebra, pela aplicabilidade em diversos conceitos e conteúdos matemáticos, especialmente, aos que estão ligados aos cálculos de áreas de polígonos da geometria.

Uma das dificuldades verificadas é o domínio do GeoGebra por parte dos professores, o que refletem nos estudantes. Por isso busca-se novas formas de ensinar a geometria de uma maneira dinâmica e interativa.

O GeoGebra é um grande aliado dos professores e alunos. Consequentemente, percebe-se que o uso do software permite um melhor entendimento de diversas questões voltadas para a geometria, proporcionando uma melhor visualização, abstração e compreensão do cálculo de áreas de polígonos.

É nossa esperança que este trabalho de pesquisa possa, por meio da sequência didática proposta, oferecer auxílio tanto integral quanto parcial a diversos docentes no ensino da geometria. Desejamos que os estudantes possam perceber a matemática como algo mais do que meras fórmulas e teorias abstratas, mas sim como uma disciplina dinâmica, real e aplicável em seu dia a dia.

REFERÊNCIAS

BALDES, Márcio Andrade Lyrio. **Pandemia da covid-19 e os desafios de avaliar a aprendizagem**. Revista Educação Pública, v. 21, n. 10, p. 1-8, mar. 2021.

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)**. Resumo Técnico: Censo Escolar da Educação Básica 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

DELGADO, Jorge. FRENSEL, Katia. CRISSAF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** – Rio de Janeiro: SBM, 2017.

FILHO, Ivan de Oliveira Holanda; CRUZ, Marcos Paulo Mesquita. **GeoGebra: Soluções e práticas na geometria analítica.** 1. Ed. – Curitiba: Appris, 2020.

FILHO, Ivan de Oliveira Holanda; CRUZ, Marcos Paulo Mesquita. **Variação de Soluções na Geometria com a utilização do GeoGebra.** Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 8, n.2, p. 78-101, 2019. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p078-101. Acesso em: 11 abr. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: **https://pt.apkshki.com/app/geogebra-classic**. Acesso em: 20 set. 2023.

GEOGEBRA. Disponível em: **https://www.geogebra.org**. Acesso em: 10 set. 2023.

GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Euclidiana plana. Um estudo com o software GeoGebra.** Maringá: Eduem, 2010.

GUIMARÃES, Yara Patrícia Barral Queiroz; PALANCH, Wagner Barbosa de Lima. **Análise da proposta de um curso de capacitação em GeoGebra para professores de Matemática da rede pública de ensino oferecido de forma remota**. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 11, n. 1, p. 37-60, 2022. DOI: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p037-060. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/54626/39806. Acesso em: 27 nov. 2023.

JUNIOR, José Valdeci de Santana Lima. **O teorema de Pick no ensino fundamental: uma abordagem com o uso do GeoGebra.** 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2022. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6540&id2=171055665. Acesso em: 4 dez. 2023.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Novas tecnologias no ensino de Matemática: tópicos em ensino de geometria**. Universidade Aberta do Brasil – UAB. 2ª ed. Rio de Janeiro, 2016.

LAMAS, Rita de Cássia Pavan. MENDES, Ijosiel. **GeoGebra: animações geométricas**/– 1. ed. – Curitiba: Appris, 2017.

LIMA, Elielson Magalhães. **Uma fórmula para a área de um polígono como função dos vértices**: Maceió, p. 51. 2014.

NASCIMENTO, Fernando Lopes do. Disponível em: **https://www.geogebra.org/u/fernanloppes1**. Acesso em: 19 fev. 2024.

PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele. Maria. **Sequência Didática na Matemática.** Revista de Educação do Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai. v. 17, n. 8, Jan./jun. 2013. Disponível em: https://www.bage.ideau.com.br/wpcontent/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c4863731_1.pdf. Acesso em: 08 out. 2023.

SAEPE. Disponível em: **https://institucional.caeddigital.net/projetos/saepe-pe.html.** Acesso em: 20 set. 2023.

SANTOS, Ana Paula Rodrigues. **Análise de uma formação de professores à luz da Sequência Fedathi: o uso do *software* GeoGebra no ensino da matemática**. *In*: FÓRUM INTERNACIONAL DE PEDAGOGIA, 6, 2014, Campina Grande. **Anais** […]. Campina Grande: Realize Editora, 2014.

SANTOS, Jilmar dos. **A tecnologia e os jogos como recursos de aprendizagem**. 2022. Monografia (Licenciatura em Computação) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Valença, 2022. Disponível em: http://repositorio.ifba.edu.br/jspui/bitstream/123456789/180/1/TCC_Os_jogos_como_recursos_de_aprendizagem.pdf. Acesso em: 4 dez. 2023

SANTOS, José Manuel dos; TROCADO, Alexandre Emanuel da Silva. **GeoGebra as a learning Mathematical Environment**. In: Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, São Paulo, v. 5, n. 1, p.05-22,2016.

SANTOS, Wagner de Sousa; JUCÁ, Rosineide de Sousa. **O ensino das áreas das figuras planas com a utilização do software kig.** Revista WEB-MAT, Belém, v. 01, n. 01, jan./jun., 2014.

UEMA. Disponível em: **https://www.paes.uema.br/wp-content/uploads/2019/11/9-MATEMÁTICA-P2020.pdf.** Acesso em: 30 dez. 2023.

UFG. Disponível em: **https://centrodeselecao.ufg.br/ps2005/pa051fase.html.** Acesso em 30 dez. 2023.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa: Como Ensinar.** Tradução Ernani F. da F. Rosa- Porto Alegre. ARTMED, p. 224. 1998.