Mariângela Andrade Martinatto

Geometria Espacial no Ensino Médio: sugestões de atividades e avaliações para o conteúdo de Prismas e Pirâmides

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2013

Mariângela Andrade Martinatto

Geometria Espacial no Ensino Médio: sugestões de atividades e avaliações para o conteúdo de Prismas e Pirâmides

Dissertação submetida por Mariângela Andrade Martinatto como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Orientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Coorientador: Dra. Fabíola Aiub Sperotto

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2013

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande

http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física

http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática

http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

http://www.capes.gov.br

M383g Martinatto, Mariângela Andrade.
Geometria espacial no ensino médio : sugestões de atividades e avaliações para o conteúdo de prismas e pirâmides / Mariângela Andrade Martinatto . – 2013.
67 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande/FURG, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Rio Grande/RS.

Orientadora: Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
Coorientadora: Drª. Fabíola Aiub Sperotto

1. Geometria. 2. Prismas. 3. Pirâmides. 4. Matemática.
I . Meneghetti, Cinthya Maria Schneider. II. Sperotto, Fabíola Aiub.
III. Título.

CDU: 51

Catalogação na fonte: Bibliotecária Alessandra de Lemos CRB10/1530

Mariângela Andrade Martinatto

Geometria Espacial no Ensino Médio: sugestões de atividades e avaliações para o conteúdo de Prismas e Pirâmides

Dissertação submetida por Mariângela Andrade Martinatto como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 09 de Março de 2013:

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Orientadora - FURG)

Dra. Fabíola Aiub Sperotto
(Coorientadora - FURG)

Me. Luciana Rossato Piovesan
(Avaliadora - UFPel)

Dr. Mário Rocha Retamoso
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Março, 2013

Este trabalho é dedicado a todos os professores que têm a vocação como principal motivo para exercerem o magistério.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), aos coordenadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT pela oportunidade de fazer um mestrado voltado ao Ensino de Matemática na Escola Básica, à CAPES por oportunizar que esse Mestrado fosse realizado com o auxílio de bolsa de estudo, às minhas orientadoras Dra Cinthya Maria Schneider Meneghetti e Dra Fabíola Aiub Sperotto, aos demais professores da Universidade Federal do Rio Grande (FURG) envolvidos no programa, pela dedicação e empenho, aos colegas de mestrado pela "parceria" e apoio, aos meus colegas de área da escola em que trabalho, bem como à direção dessa, que possibilitaram que, através de horários mais flexíveis e carga horária reduzida, pudesse me dedicar ao curso, à minha família por entender minha ausência e, muitas vezes, minha falta de paciência, a meus pais, pois mesmo que agora não se encontrem mais presentes, sempre me incentivaram a estudar e a Deus, que me deu uma vida com saúde para seguir meus sonhos.

"Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana."Carl Jung

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso sugere uma sequência de atividades para desenvolver conteúdos de Geometria Espacial, particularmente prismas e pirâmides, com alunos do Ensino Médio, priorizando a visualização dos sólidos no espaço, identificando as diferenças quanto ao formato e às características de seus elementos, sem a necessidade de memorização de fórmulas. Enfatiza-se também a importância da recapitulação de conceitos da Geometria Plana e da forma de avaliar a aprendizagem.

A cada ano que passa, os alunos estão encontrando cada vez mais dificuldades na Matemática Básica e isto tem consequência direta na aprendizagem por parte desses alunos nos conteúdos relativos ao Ensino Médio. Muitas vezes os alunos conseguem entender o que o professor explica, mas não conseguem resolver os exercícios. Para verificar a veracidade desta afirmação, foi realizada uma pesquisa através de um questionário com professores que trabalham com Geometria Espacial em sete escolas de Ensino Médio da cidade de Rio Grande, RS.

Este trabalho pretende sugerir atividades simples que introduzem e complementam o conteúdo que encontra-se nos livros didáticos tradicionais, que os professores, mesmo com poucos recursos, podem realizar com seus alunos no sentido de tentar contornar essas dificuldades. Pretende-se também ressaltar a importância da exigência por parte dos professores por ocasião de suas avaliações, a fim de que seja preservada a qualidade do ensino.

Palavras-chaves: Geometria. Prismas. Pirâmides.

Abstract

This Labor Completion of Course suggests a sequence of activities to develop content for Space Geometry, particular prisms and pyramids, with high school students, prioritizing the display of solids in space identifying differences in the shape and characteristics of its elements, without the need of memorizing formulas. It emphasizes the importance of recapitulation of concepts of Geometry Plana and how to assess learning.

With each passing year, students are finding it increasingly difficult in Basic Mathematics and this has direct consequence of such learning by students in subjects related to High School. Often students can understand what the teacher says, but can not solve the exercises. To check the veracity of this statement, a survey was conducted through a questionnaire with teachers working with Space Geometry in seven high schools of the city of Rio Grande, Brazil.

This paper is intended to suggest simple activities that introduce and complement the content that is found in traditional textbooks, teachers, even with limited resources, can accomplish with their students in order to try to overcome these difficulties. It is also intended to emphasize the importance of demand from teachers on the occasion of their evaluations, so that is preserved the quality of teaching.

Keywords: Geometry. Prisms. Pyramids.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é o ponto culminante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que visa atender professores de Matemática em exercício no Ensino Básico, especialmente na escola pública, para o aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente. O Programa opera em ampla escala, com o objetivo de, a médio prazo, ter impacto substantivo na formação matemática do professor em todo o território nacional.

A primeira turma ingressou no programa em 2011 através de uma prova de seleção nacional. Constam da matriz curricular do programa disciplinas obrigatórias e eletivas e os alunos obtém seus títulos de Mestre após serem aprovados nessas disciplinas, no Exame Nacional de Qualificação e na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, cujo objetivo é a elaboração deste trabalho. Dentre as disciplinas obrigatórias consta Geometria, cuja ementa contempla conteúdos como áreas e volumes dos sólidos geométricos.

Atualmente a Geometria não tem merecido a devida atenção no Ensino Fundamental por vários motivos como falta de tempo para desenvolvê-la e preferência por outros conteúdos. Isto acarreta que o aluno, ao ingressar no Ensino Médio, tenha muitas dificuldades. Mesmo assim, tais conteúdos se destacam na Educação Básica pela possibilidade de contextualização (GIANCATERINO, 2009):

> Os alunos devem ser encorajados a considerar situações do dia-a-dia, transferindo-as para representações matemáticas (gráficos, tabelas, diagramas, expressões matemáticas, etc.), resolvê-las e interpretar os resultados à luz da situação inicial. Precisam ver não só como a Matemática é aplicada ao mundo real mas também como se desenvolve a partir do mundo que os rodeia.

Segundo (PAVANELLO, 1993),

> Uma das possíveis causas do abandono do ensino da Geometria ocorreu com a promulgação da Lei 5692/71, que dava às escolas liberdade na escolha dos programas, possibilitando aos professores de Matemática o abandono do ensino da Geometria ou deixando-o para o final do ano letivo.

Este trabalho tem por objetivo sugerir uma sequência didática para o conteúdo de Geometria Espacial (GE), especificamente no que se refere aos sólidos geométricos prismas e pirâmides. Essa sequência de aulas conta com sugestões de atividades que introduzem e complementam o conteúdo que encontra-se nos livros didáticos tradicionais. Especificamente, são sugeridas atividades que precedem o conteúdo propriamente dito, para que os alunos acompanhem a transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial identificando o conteúdo em situações do cotidiano.

Além disso, percebe-se que a Geometria Plana é mais explorada em abordagens que utilizam mídias digitais pela maior popularidade, disponibilidade e divulgação de *softwares* livres 2D bem como pela facilidade do uso dos mesmos. A Geometria Espacial aparece em destaque na atualidade e um dos grandes responsáveis por este fato é o recente *software* livre Geogebra 3D.

De acordo com as respostas dadas pelos professores entrevistados, os quais trabalham com Geometria Espacial e cujos relatos estão descritos neste trabalho, existe uma preocupação com as dificuldades que os alunos têm em compreender conteúdos relacionados à Geometria Plana. No entanto, ao invés de tentar propor atividades que auxiliem os alunos a contornar suas dificuldades, vários preferem recapitular rapidamente esses conteúdos. Ocorre que alguns alunos não lembram dos conteúdos estudados em Geometria no Ensino Fundamental, muitos nunca tiveram contato com tais conteúdos e outros não aprenderam corretamente. Dessa forma, de nada adianta recursos como *softwares*, lousa digital, planificações e sólidos de acrílico, de madeira, feitos com palitos ou canudinhos, se o aluno não domina o conteúdo básico da Geometria.

Uma das questões pouco abordadas na literatura existente sobre o assunto refere-se aos instrumentos de avaliação a que são submetidos os alunos durante o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo no sentido de auxiliar o professor a elaborar questões que contemplem todos os conceitos envolvidos. Nesse trabalho, ao mesmo tempo que pretende-se sugerir atividades alternativas para a abordagem do conteúdo de sólidos geométricos em Geometria Espacial no Ensino Médio, com o auxílio de *softwares*, fotografias, sólidos de acrílico, planificações em cartolina, uso de embalagens, também deseja-se discutir e propor um instrumento de avaliação adequado deste conteúdo. Tudo isso, de acordo com o que dizem as Diretrizes Curriculares de Matemática para as séries iniciais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio (SEED, 2008) quanto ao estudo da Geometria:

> Assim, é necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos, em especial de prismas, pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera.

A proposta desse trabalho consiste em 11 (onze) aulas assim distribuídas:

Aula 1 - São propostos dois questionários com o objetivo de revisar os conteúdos de Geometria Plana.

Aula 2 - Sugere-se que o professor e os alunos levem para a sala de aula fotos, embalagens e/ou figuras de objetos que lembrem prismas e pirâmides que foram apresentados rapidamente na aula anterior. O objetivo dessa aula é que os alunos reconheçam no seu cotidiano os sólidos que estão estudando.

Aula 3 - Os alunos reconhecem nas fotos, figuras e embalagens usadas na aula anterior os sólidos que têm bases iguais e juntos constroem a definição de prisma. Além disso, através de planificações, é feito o cálculo das áreas das superfícies desses sólidos.

Aula 4 - Trabalha-se com o conceito de volume de prisma e casos particulares desses sólidos: paralelepípedo e cubo.

Aula 5 - Sugere-se uma avaliação, no valor de 4 pontos, abordando assuntos estudados até a Aula 4.

Aula 6 - A partir da definição de pirâmide (tetraedro) apresentada pelo professor, os alunos identificam os sólidos da Aula 2 que têm somente uma base. Através de planificações de pirâmides confeccionadas pelo professor, os alunos são motivados a calcular suas áreas. Nessa aula enfatiza-se a diferença entre altura da pirâmide e altura de suas faces.

Aula 7 - Sugere-se uma atividade com sólidos de acrílico, especificamente uma pirâmide e um prisma de bases e alturas iguais, onde é colocada água no primeiro e essa é passada, através de um funil, para o segundo a fim de verificar a fórmula do volume da pirâmide.

Aula 8 - Para estudar os troncos de pirâmides, propõe-se que os alunos identifiquem os sólidos da segunda aula que se enquadram no conceito dado pelo professor.

Aula 9 - Através do auxílio de recursos de multimídia, com o Geogebra 3D, sugere-se uma atividade de construção dos sólidos para que os conceitos vistos nas aulas anteriores fiquem melhor entendidos.

Aula 10 - Sugere-se uma prova geral com o conteúdo de prismas e pirâmides, no valor de 6 pontos.

Aula 11 - Nessa aula, o professor resolve as questões das avaliações no quadro, mostrando as várias maneiras de resolver cada exercício. Deve ser valorizada a contribuição dos alunos no decorrer da aula.

Cabe salientar que os sólidos de acrílico e as planificações devem estar presentes em todas as aulas, inclusive nos dias de avaliação, para que o aluno possa manuseá-los, evitando assim a memorização das fórmulas.

No final do trabalho, é apresentado um relato da experiência docente da proponente, onde essa explica as razões por que acredita que as sugestões aqui contidas irão contribuir para inovar e melhorar o ensino de Geometria Espacial.

No anexo B e C, são disponibilizados os questionários que foram aplicados com os alunos nas Aulas 1 e 2 respectivamente, e no Anexo D as sugestões de exercícios para avaliação.

1 Justificativa

Devido à atuação desde 2004 como docente no Colégio Técnico Industrial Professor Mario Alquati, vinculado à Universidade do Rio Grande (hoje Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Rio Grande) percebeu-se que, por se tratar de um colégio técnico reconhecido por sua exigência, seus alunos conseguem ótimos resultados em concursos, vestibulares, no mercado de trabalho e na vida acadêmica dos cursos superiores por eles escolhidos. Surgiu a necessidade de realizar uma pesquisa com os professores das outras escolas de Ensino Médio da cidade para verificar o motivo pelo qual os alunos do Instituto Federal tinham, e continuam tendo, tanto destaque, quando comparados aos das outras escolas.

Com a intenção de verificar a maneira que os professores do Ensino Médio abordam com seus alunos os conteúdos referentes à Geometria Espacial, bem como as dificuldades que esses encontram ao fazê-lo, foi feita uma pesquisa em sete escolas da cidade de Rio Grande - RS, nomeadas a seguir, das quais duas são da rede particular e cinco são da rede estadual de ensino. Para preservar a privacidade dos professores, esses serão chamados a seguir de "Pk"(onde $k = 1, ..., 7$) e a ordem que estão listados não corresponde à ordem em que as escolas visitadas estão enunciadas.

As escolas visitadas foram:

- Colégio Estadual Lemos Junior;
- Instituto Estadual de Educação Juvenal Muller;
- Escola Estadual de Ensino Médio Bibiano de Almeida;
- Escola Estadual de Ensino Médio Silva Gama;
- Escola Técnica Estadual Getúlio Vargas;
- Colégio Marista São Francisco;
- Colégio Bom Jesus Joana d'Arc.

Foram feitas as seguintes perguntas:

- Como se desenvolvem as aulas de Geometria Espacial?

- Quais os recursos utilizados para o ensino de Geometria Espacial?
- Quanto tempo é reservado para o estudo de Geometria Espacial?
- Você nota um maior interesse dos alunos por Geometria Espacial? Por quê?
- Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Geometria Espacial?
- Como é feita a avaliação de Geometria Espacial?
- Você teria interesse de participar de cursos e/ou oficinas envolvendo assuntos referentes à Geometria Espacial como utilização de recursos alternativos ou formas de avaliação?

Inicialmente as entrevistas foram marcadas por telefone e mais tarde realizadas pela proponente diretamente com o professor responsável pelo ensino de Geometria Espacial. A grande maioria das escolas foi bastante receptiva e facilitou a realização das entrevistas.

Para as questões propostas, as seguintes respostas (em síntese) foram obtidas:

P1 É usado um trimestre do terceiro ano do Ensino Médio desta escola estadual para o ensino de Geometria Espacial onde são vistos: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Na verdade, os alunos são divididos em cinco grupos e cada grupo é que fica responsável pela apresentação do sólido (o professor só orienta). Os alunos apresentam cada sólido com objetos de madeira, canudinhos, vidro e planificações em papelão. Quanto à maneira de avaliação, o professor explicou que a nota do aluno é de acordo com sua participação e seu envolvimento na apresentação para os colegas; disse também que o aluno só presta uma "prova escrita" se é percebido, por ele, que o aluno não domina o conteúdo. Nesse caso, o aluno presta uma prova, não necessariamente sobre o sólido que o seu grupo apresentou e sim sobre um escolhido por ele. Disse que os alunos gostam do assunto por perceberem a existência desses sólidos no seu dia-a-dia, apesar de terem dificuldade com relação aos pré-requisitos exigidos como Geometria Plana. O professor disse estar disponível para um possível curso sobre tecnologia na Matemática.

P2 O professor da rede pública estadual explicou que os alunos têm dificuldade nesse conteúdo, por não dominarem Geometria Plana, mas gostam do assunto por conviverem com os sólidos no seu cotidiano; disse que apresenta os sólidos aos alunos com canudinhos, palitos de madeira, sólidos de acrílico e que procura incentivar que os alunos não "decorem" as fórmulas na medida do possível. Ficou disponível para participação de curso sobre tecnologias na Matemática.

P3 O professor da rede particular disse que faz uso da lousa digital e de sólidos de acrílico para as aulas de Geometria Espacial. Como se trata de uma escola que tem Educação Infantil e Ensino Fundamental, quando perguntado sobre a vantagem de trabalhar com alunos provenientes da própria escola, informou que, mesmo assim, vários alunos vêm de outras escolas e que esses apresentam muitas dificuldades com relação à Geometria Plana. Informou que é feita uma avaliação interna, a nível nacional, e, portanto, os alunos fazem muitos exercícios focados nessa avaliação, no ENEM e nos vestibulares. Ficou disponível para cursos de aperfeiçoamento.

P4 O professor da rede estadual informou que os alunos têm grandes dificuldades com relação à Matemática Básica, que gostam do estudo dos sólidos, mas esbarram nas dificuldades. Os alunos são incentivados a não memorizarem as fórmulas, mas disse que coloca essas fórmulas nas provas. Falou também que é questionado pela direção da escola e secretaria de educação por ocasião da divulgação do índice de reprovação, ressaltando que, mesmo com pouco conhecimento dos alunos, esses conseguem aprovação. Colocou-se à disposição para participação em cursos de aperfeiçoamento.

P5 O professor da rede estadual informou que é usado o último trimestre do terceiro ano do Ensino Médio para o ensino de Geometria Espacial, que usa quadro e giz para mostrar os sólidos e suas planificações. Disse que os alunos não têm base em Geometria Plana, têm dificuldade nas visualizações, apesar de gostarem do assunto por conseguirem relacionar ao seu cotidiano. Colocou-se à disposição para um possível curso de aperfeiçoamento.

P6 O professor da rede estadual disse que faz uso dos sólidos de acrílico e mostra no quadro suas planificações. Falou que não consegue exigir muito dos alunos, pois vários não sabem a diferença entre um quadrado e um círculo e que só recapitular conteúdos do Ensino Fundamental não adianta, pois muitos nunca estudaram Geometria Plana. Colocou-se à disposição para curso de aperfeiçoamento.

P7 O professor da rede privada disse que os alunos têm bastante interesse no estudo de Geometria Espacial por perceberem que vários sólidos se fazem presentes no seu dia-a-dia. Os sólidos são apresentados para os alunos em acrílico, as planificações em cartolina e usam *softwares* no laboratório de informática. O assunto é visto no segundo ano do Ensino Médio e o professor colocou-se à disposição para curso de aperfeiçoamento.

Observação 1.0.1. A grande maioria dos professores entrevistados tem mais de dez anos de atuação em sala de aula.

Pelos relatos acima descritos, muitos professores (cinco dos sete entrevistados) percebem que os alunos encontram dificuldades no estudo de Geometria Espacial pela sua falta de conhecimento, mas têm resistência a uma mudança na forma de trabalhar o assunto com seus alunos. Geraldo Peçanha em (ALMEIDA, 2011), diz

> A transposição didática pode e deve ser entendida como a capacidade de construir diariamente. Ela se dá quando o professor passa a ter coragem de abandonar moldes antigos e ultrapassados e aceita o novo. E o aceita porque tem critérios lógicos para transformá-lo.

Essa resistência motiva a aplicação de atividades de revisão que reforcem tais conceitos, como propõe-se em 4.1.2 e 4.1.3. Pelos relatos dos professores também fica evidente o gosto pelo conteúdo por parte dos alunos e sua facilidade em identificar os conceitos no dia-a-dia.

Esse trabalho é importante no sentido de apresentar uma abordagem alternativa da revisão de Geometria Plana, diferente do que é feito usualmente em sala de aula, apresentando os sólidos no quadro ou através de sólidos de acrílico (conforme descrito nos relatos dos professores). As sugestões para avaliação apresentadas nas Aulas 5 e 10, juntamente com a explicação do conteúdo que está sendo avaliado, auxilia o professor a justificar, perante à direção da escola, o porquê dos alunos reprovados não estarem aptos a prosseguir (como fica evidente no depoimento do P4).

Quando o ano letivo é dividido em bimestres, normalmente cada um desses tem, em média, 10 ou 11 encontros de 2 h/a (horas/aula) cada. Então desenvolveu-se uma sequência de 22 h/a para o conteúdo de prismas e pirâmides, ou seja, um bimestre. Nesse caso, o conteúdo restante de Geometria Espacial: cilindros, cones e esferas deve ser visto em outro bimestre. A maioria dos entrevistados relatou que a Geometria Espacial é trabalhada em suas escolas em um trimestre do terceiro ano do Ensino Médio, período que equivale a aproximadamente 48 h/a, isto é, 24 aulas de 2 h/a cada. Portanto, a sugestão de distribuição das aulas pode ser: 22 h/a (11 aulas) para o conteúdo de prismas e pirâmides, restando 26 h/a (13 aulas) para cilindros, cones e esferas. Isto mostra a viabilidade da sequência de aulas sugerida pela proponente do trabalho, que ensina esse conteúdo há 9 anos na rede pública de ensino.

2 Objetivos

De maneira geral, deseja-se sugerir atividades simples, mas necessárias, que os professores possam aplicar em suas salas de aula, a fim de que os alunos revisem os conteúdos que são pré-requisitos para o estudo da Geometria Espacial. Tais atividades também servem para introduzir o conteúdo para os alunos que o estejam estudando pela primeira vez.

Especificamente, no final desta sequência de atividades, o aluno deverá ser capaz de:

1. Fazer a transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial;

2. Identificar a presença da Geometria Espacial no dia-a-dia: na arquitetura e em objetos variados;

3. Relacionar os conteúdos de Geometria Espacial com os objetos visualizados no cotidiano;

4. Reconhecer e conceituar prismas, pirâmides e troncos de pirâmides;

5. Calcular área lateral, área total e volume de prismas, pirâmides e troncos de pirâmides;

6. Solucionar problemas do dia-a-dia referentes à Geometria Espacial com os conhecimentos adquiridos em sala de aula.

Os professores que optarem pelo cronograma sugerido, contarão com sugestões de atividades que introduzem e complementam o conteúdo de prismas e pirâmides. Mesmo com poucos recursos, os professores poderão aplicar essas atividades alternativas com seus alunos no sentido de tentar esclarecer as principais dúvidas que os mesmos apresentam e tornar suas aulas diferenciadas.

3 Caracterização

3.1 Público alvo

Na maioria das escolas de Ensino Médio da rede pública de ensino, os conteúdos referentes à Geometria Espacial são vistos no último ano, quando os alunos dominam, ou já deveriam dominar, assuntos como Geometria Plana (GP), Geometria Analítica (GA) e já têm um raciocínio bem desenvolvido que os possibilite solucionar os mais diferentes problemas relacionados ao assunto. Normalmente as turmas têm, em média, de 25 a 35 alunos.

Nas turmas em que algumas dessas atividades foram aplicadas, no Ensino Técnico Integrado ao Médio, os alunos estudam Geometria Espacial no quarto ano, portanto já têm uma maior maturidade. Por se tratar de uma escola em que há um processo de seleção para os alunos nela ingressarem, esses se preparam para a seleção, ou seja, estudam com mais afinco durante o Ensino Fundamental e/ou fazem cursinhos preparatórios. Dessa forma, eles chegam ao último ano mais preparados. Mesmo assim, apesar de gostarem do conteúdo por ser possível contextualizá-lo, encontram dificuldades ao lidar com a Geometria Plana.

3.2 Materiais e tecnologias

Uma das das principais dificuldades dos alunos ao aprender Geometria Espacial é a visualização dos sólidos no espaço. Dessa forma, é importante que os professores iniciem o estudo dos sólidos identificando as diferenças quanto ao formato e às características de seus elementos. Além disso, é importante que os alunos saibam fazer as planificações para poderem calcular as áreas de suas superfícies sem memorizarem as fórmulas. Isto pode ser feito com o auxílio de fotos, embalagens, sólidos de acrílico bem como planificações desses sólidos em cartolina e *softwares* de Geometria Dinâmica. A seguir, uma breve descrição dos recursos que serão utilizados ao longo das aulas.

Fotos: este é um recurso que o professor pode trazer para sala de aula, mas também pode solicitar que os alunos o tragam. Sugere-se uma busca na internet (na escola ou em casa), através de celulares e/ou máquinas fotográficas ou mesmo com recortes de jornais e/ou revistas. Deve-se salientar que, se todas essas fotos ou figuras forem digitais, a escola deverá dispor de recursos multimídia. Com as fotos, os alunos já podem perceber a relação do conteúdo que estão estudando com o seu cotidiano.

Embalagens: da mesma forma que no item anterior, tanto o professor quanto os alunos podem trazê-las para a sala de aula. Os alunos podem se dividir em grupos para realizar a tarefa de coletar as embalagens que serão planificadas na sala de aula. Através desse recurso, pode-se perceber a ligação do estudo de Geometria Espacial com o dia-a-dia de todos.

Sólidos de acrílico: serão manuseados pelos alunos em sala de aula. É aconselhável que também nos dias de avaliação os alunos tenham a possibilidade de requisitarem determinado sólido para entenderem melhor alguma(s) questão(ões) da prova e, inclusive, consigam deduzir as fórmulas. No caso da escola não dispor de recursos financeiros para comprá-los, o professor e/ou alunos podem construir sólidos com vidro, papelão, palitos de madeira ou ainda canudinhos de refrigerante.

Planificações em cartolina: o professor pode mostrar aos alunos os sólidos construídos em cartolina e suas planificações. Dessa forma, os alunos percebem a facilidade de calcular as áreas das superfícies de suas faces.

***Software* de Geometria Dinâmica:** este recurso fica condicionado à existência de um laboratório de informática ou da possibilidade do professor dispor de um computador, para que os alunos possam acompanhar a construção dos sólidos e, por consequência, a maneira de calcular áreas e volumes.

Deve ficar claro para professor e aluno que não há necessidade de memorização de fórmulas e que basta a visualização do sólido e aplicação dos conhecimentos de Geometria Plana para conseguir calcular áreas e volumes.

3.3 Recomendações metodológicas

A maioria das atividades propostas é para ser desenvolvida na sala de aula. Para o uso de *software*, como na Aula 9, é necessário que a escola disponibilize um laboratório de informática, com pelo menos uma máquina para cada dois alunos.

Na Aula 2, onde serão reunidas fotos e figuras de prismas e pirâmides, essas tanto poderão ser coletadas pelos alunos em período extra-classe (como tarefa), quanto em conjunto pela turma, se o professor dispuser de tempo hábil para tal.

3.4 Dificuldades previstas

A maior dificuldade encontrada pelos alunos é aliar a visualização dos sólidos com os conhecimentos da Geometria Plana. Por isso é tão importante a recapitulação feita sobre os conceitos básicos geométricos, bem como o uso de recursos para facilitar a visualização por parte dos alunos. Os questionários propostos têm por objetivo esclarecer várias dessas dificuldades.

Um problema que o professor pode encontrar é a falta de motivação dos alunos para participarem das atividades. Para resolver essa situação, o professor deve motivá-los através de exemplos práticos da aplicação da Geometria Espacial, como a quantidade de água que cabe em um aquário, quanto de tinta uma pessoa precisa para pintar as paredes de uma casa ou ainda quantos metros quadrados de ladrilhos são necessários para completar o piso de uma casa.

Uma possível dificuldade é a distribuição das aulas, pois algumas escolas trabalham o ano letivo dividido em bimestres e outras em trimestres. Nesse caso, cada professor pode fazer uma redistribuição dessas aulas de acordo com suas necessidades, mas procurando manter a ideia central da sequência de aulas propostas.

Este é o bimestre (ou trimestre) do ano letivo em que o aluno apresenta maiores dificuldades, pois é seu primeiro contato com Geometria Espacial. Por exemplo, não é fácil para o aluno diferenciar a altura da pirâmide e a altura de uma de suas faces laterais. Portanto, é prudente esclarecer todas as definições para os alunos, bem como a realização de vários exemplos e exercícios de fixação.

4 Preliminares

A doutora em Matemática Suely Druck, da Universidade Federal Fluminense, mentora da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) afirma, em entrevista concedida ao jornal Zero Hora em outubro de 2012 (veja (GONZATTO, 2012)):

> A matemática se destaca das outras disciplinas porque é sequencial, ou seja, não se aprende a multiplicar se não aprendeu a somar. Isso significa que uma etapa que não foi bem aprendida compromete o aprendizado daí por diante...

Baseada na declaração acima e no relato dos professores entrevistados, entende-se a importância dos pré-requisitos, no nosso caso a Geometria Plana, que deve ter seus conceitos bem compreendidos para que se faça com tranquilidade a transição para a Geometria Espacial. Como primeira atividade, sugere-se uma aula sobre áreas.

4.1 Aula 1 - Revisão de Geometria Plana

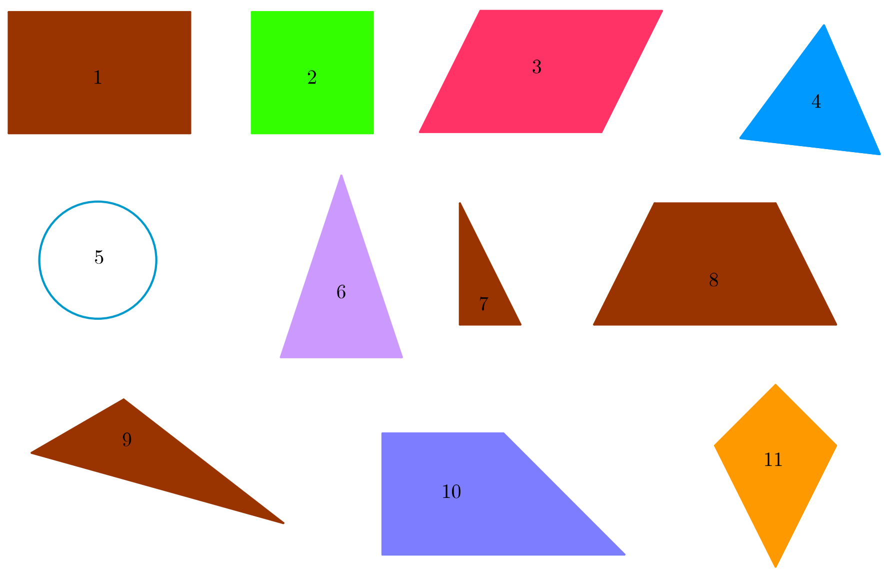
Com a finalidade de retomar os conceitos da Geometria Plana, propõe-se que o professor, antes de partir para a formalização dos conceitos de perímetro, área e ângulos, inicie a aula com o questionário a seguir. Essa atividade também é útil para aqueles alunos que nunca estudaram esses conteúdos anteriormente ou que, por terem trocado de escola, ingressaram em uma turma que, apesar de ter estudado esses assuntos, precisa recapitulá-los.

Questionário 4.1.1. [Revisão de tipos de polígonos]

Para responder às questões, sabendo que a palavra Polígono é oriunda do grego e significa

$$\text{Polígono} = \text{Poli (muitos)} + \text{gono (ângulos)},$$

observe as figuras:



Questão 4.1.1. Escreva o nome de algum objeto que você conheça e que se parece com cada uma das figuras.

Questão 4.1.2. Separe as figuras em dois grupos, dizendo qual o critério que foi utilizado.

Questão 4.1.3. Separe as figuras em três grupos, dizendo qual o critério que foi utilizado.

Supõe-se que as respostas para as questões 4.1.2 e 4.1.3 envolvam expressões do tipo "pois são parecidas" ou ainda "porque são retas". De fato, neste momento o professor deve reunir as respostas para listar os elementos que as figuras possuem em comum, tais como: lados de mesma medida, ângulos retos e lados opostos paralelos.

Uma segunda hipótese prevê que os alunos cometam alguns erros, podendo ser necessário trocar de grupo alguma figura. É fundamental estabelecer qual vai ser o critério utilizado em cada uma das questões. Sugerem-se os seguintes critérios:

Para a separação em dois grupos:

Grupo 1: polígonos que apresentam pelo menos um ângulo reto (1, 2, 7 e 10);

Grupo 2: polígonos que não apresentam ângulos retos (3, 4, 6, 8, 9 e 11).

Para a separação em três grupos:

Grupo 1: polígonos que apresentam ângulo reto e, no mínimo, dois lados de mesma medida (1 e 2);

Grupo 2: polígonos com ângulo reto e todos os lados com medidas diferentes (7 e 10);

Grupo 3: polígonos sem ângulos retos (3, 4, 6, 8, 9 e 11).

Fica evidente o fato de que nem todas as figuras puderam ser classificadas. O professor deve comentar com os alunos o fato da figura com o número 5, o círculo, não pertencer a nenhum grupo, por não ser um polígono.

Após o questionário 4.1.1, deve-se formalizar as definições de cada figura. Neste trabalho não serão descritos com rigor o conteúdo e os exercícios que os alunos deverão resolver, pois isto pode ser encontrado em vários livros didáticos como (MACHADO, 1988), (IEZZI et al., 2001) e (GIOVANNI; BONJORNO; JUNIOR., 2005). Não deverão faltar as seguintes definições:

Definição 4.1.1. Matematicamente denominamos polígonos como sendo uma superfície plana limitada por uma linha poligonal fechada. Linha poligonal é uma linha que é formada apenas por segmentos de reta. Os polígonos precisam ser figuras fechadas. O número de lados de um polígono coincide com o número de ângulos.

Definição 4.1.2 (Triângulo)**.** Chama-se triângulo ao polígono que possui três lados.

Note que p é o semiperímetro do triângulo, ou seja, é a metade do perímetro.

Classificação dos Triângulos quanto à medida dos lados:

Triângulo equilátero: tem três lados congruentes.

Triângulo isósceles: tem dois lados congruentes.

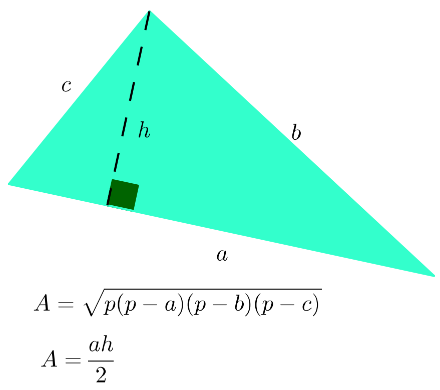


Figura 1 – Triângulo qualquer.

Triângulo escaleno: quaisquer dois lados não são congruentes.

Definição 4.1.3 (Quadrado)**.** Chama-se quadrado ao polígono que possui quatro lados congruentes e quatro ângulos retos. Veja Figura 2.

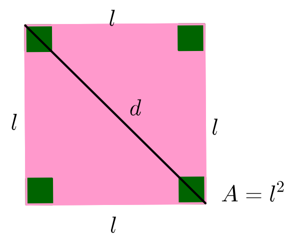


Figura 2 – Quadrado.

Definição 4.1.4 (Retângulo)**.** Chama-se retângulo ao polígono que possui quatro ângulos retos. Veja Figura 3.

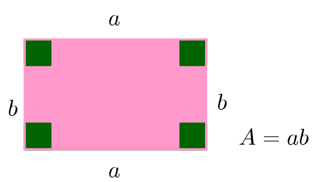


Figura 3 – Retângulo.

Definição 4.1.5 (Losango)**.** Chama-se losango ao polígono que possui quatro lados congruentes. Veja Figura 4.

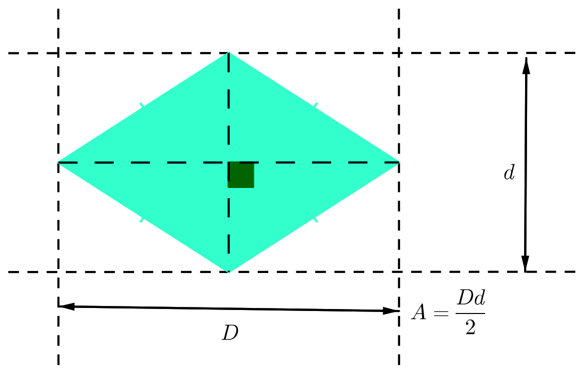


Figura 4 – Losango.

Definição 4.1.6 (Paralelogramo)**.** Chama-se paralelogramo ao polígono de quatro lados (quadrilátero) cujos lados opostos são iguais e paralelos. Por consequência, tem ângulos opostos iguais. Veja Figura 5.

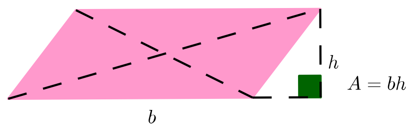


Figura 5 – Paralelogramo.

Definição 4.1.7 (Trapézio)**.** Chama-se trapézio ao quadrilátero que apresenta um único par de lados paralelos. Veja Figura 6.

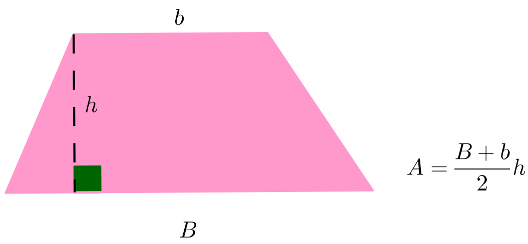


Figura 6 – Trapézio.

Principais Trapézios:

Isósceles: quando os lados não paralelos são congruentes.

Retângulo: quando possui um dos lados perpendicular às bases.

Para o conceito de perímetro e área de polígonos regulares sugere-se motivar as definições com o seguinte questionário:

Questionário 4.1.2 (Revisão de cálculo de perímetro e áreas)**.**

Questão 4.1.4. Observe as situações abaixo e diga qual o cálculo que deve-se fazer para determinar a resposta correta:

- quantidade de arame necessária para cercar um terreno retangular;
- quantidade de grama necessária para cobrir um terreno circular;
- quantidade de papel necessária para cobrir a tampa de uma caixa;
- quantidade de madeira necessária para fazer uma moldura de um quadro.

O aluno deverá ser capaz de, para cada item anterior, determinar o cálculo a ser feito em cada caso; com isso estará lembrando os conceitos de perímetro e área. Por exemplo, para a quantidade de arame necessária para cercar um terreno retangular, o aluno pode não lembrar da fórmula do perímetro, mas sugerir que o arame seja esticado e medido com uma trena. Já para o cálculo da quantidade de grama, pode sugerir que se conte quantos "quadrados de grama"de lados iguais cabem no terreno e recortar as sobras. Esta questão serve para que o professor verifique a necessidade de recapitular o cálculo formal de perímetros e áreas.

Mais algumas questões podem ser propostas com o objetivo de reforçar a diferença entre calcular um perímetro e calcular uma área. A próxima questão faz com que o aluno pense em como calcular o perímetro de uma região que não é um polígono. Se até esse momento, o aluno só baseou seu raciocínio em fórmulas, obrigatoriamente deverá pensar no conceito de perímetro.

Questão 4.1.5. Como se pode calcular o perímetro da Figura 7?

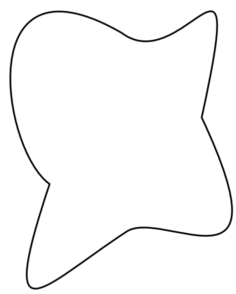


Figura 7 – Questão 4.1.5

O perímetro da Figura 7 é o contorno dela; como a figura não possui lados, para medir o seu perímetro devemos contorná-la com um barbante e depois esticá-lo e calcular a medida com auxílio de uma régua ou trena.

Questão 4.1.6. A área é a medida de uma superfície. As unidades de medida usual da área são m^2 (metros quadrados) e cm^2 (centímetros quadrados). Considere a Figura 8.

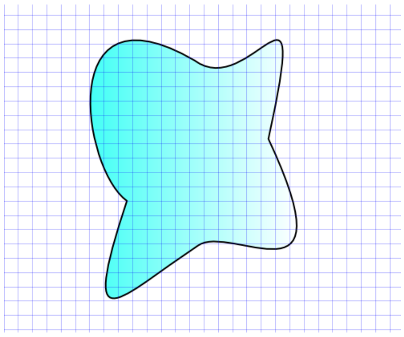


Figura 8 – Questão 4.1.6

Quantos quadrados (m^2 ou cm^2) são necessários para cobrir a região delimitada?

Para esse cálculo, novamente o aluno não poderá fazer o uso de fórmulas. Se julgar pertinente, o professor pode comentar que o cálculo exato da área ou regiões como da questão 4.1.6 é feito nas disciplinas de Cálculo I da graduação de cursos da área de Ciências Exatas e da Terra e Engenharias, uma vez conhecida a equação da curva.

Observação 4.1.1. Note que deve-se salientar que existem figuras notáveis como quadriláteros, triângulos e círculos que têm fórmulas específicas para o cálculo de suas áreas, conforme foi visto no Questionário 4.1.1.

Observação 4.1.2. É importante que sejam revistos alguns conceitos de Geometria Analítica como: eixos cartesianos, coordenadas de um ponto, localização de um ponto em relação a um quadrante do plano cartesiano, projeção ortogonal de um ponto em relação a uma reta ou segmento de reta. Esses conceitos serão utilizados na Aula 9. Para isso, o professor pode fazer uso somente do quadro e, com a ajuda dos alunos e através de exemplos, relembrar esses conceitos.

O professor deve mostrar, no final da Aula 1, alguns prismas e pirâmides (sem citar nomes) no quadro ou em acrílico e pedir para os alunos que, na próxima aula, tragam fotos e/ou figuras tiradas por eles ou através da internet de objetos que lembrem esses sólidos. As imagens poderão também ser recortadas de revistas, jornais ou folhetos de propaganda.

5 Prismas e Pirâmides

Lorenzatto (LORENZATO,) justifica a importância do ensino da Geometria para o dia-a-dia do indivíduo:

> A necessidade do ensino de Geometria pelo fato de que, um indivíduo sem esse conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas. Não poderá, ainda, utilizar-se da Geometria como facilitadora para compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano.

As próximas aulas abordam justamente as características enfatizadas em (LORENZATO,) tais como raciocínio visual e a associação do conteúdo com o cotidiano.

5.1 Aula 2 - Introdução ao estudo de Prismas e Pirâmides

Esta atividade é realizada para que o aluno desenvolva o pensamento geométrico e a percepção espacial. Quando identifica no seu cotidiano os prismas e as pirâmides, o aluno tem a possibilidade de associar o conteúdo abstrato com a natureza, a história e a construção civil.

No Ensino Médio, pode-se priorizar o estudo das pirâmides regulares. É necessário mencionar as pirâmides não regulares e oblíquas, mas se o aluno dominar o conteúdo de pirâmides regulares, com certeza, quando for preciso, saberá lidar com as demais.

Questão 5.1.1. Observe as fotos abaixo e faça o que se pede:


1


2


3


4


5


7

6


8


9


11

10

12

Separe as fotos em quatro grupos:

Grupo 1: sólidos que têm todas as faces iguais;

Grupo 2: sólidos que têm pelo menos uma face diferente;

Grupo 3: sólidos que têm bases iguais;

Grupo 4: sólidos que têm somente uma base.

É esperado que as fotos sejam separadas da seguinte forma:

Grupo 1: foto 6 (parte inferior);

Grupo 2: 1, 2 (tanto parte inferior quanto superior), 3, 4, 5, 6 (parte superior), 7, 8, 9, 10, 11 e 12;

Grupo 3: 3 (parte inferior), 6 (parte inferior), 7 (parte inferior), 10, 11 e 12;

Grupo 4: 1, 2 (parte superior), 3 (parte superior), 4, 6 (parte superior) e 7 (parte superior).

Convém salientar que as fotos 8 e 9 fazem parte de grupo 2, pois possuem, no mínimo, duas bases diferentes, mesmo que suas faces laterais sejam iguais.

Algumas fotos apresentam mais de um sólido geométrico (uma pirâmide sobre um prisma, por exemplo). Essas fotos poderão ser recortadas para que a classificação possa ser feita tranquilamente. Note que os alunos, realizando essa atividade, poderão notar a diferença entre prismas e pirâmides, em particular, troncos de pirâmides. Além disso, poderão perceber que alguns sólidos são regulares e outros, não. Esta última possibilidade deve ser considerada, pois possivelmente apareçam fotos de sólidos não regulares. Após esta atividade, o aluno deverá reconhecer as denominações *base* e *face* de um sólido geométrico.

5.2 Aula 3 - Estudo do Prisma

Nesta aula será feita a formalização dos conceitos abordados na Aula 2. Para construir a definição de prisma, serão utilizadas as fotos que pertencem ao Grupo 3 (sólidos que têm bases iguais) da Questão 5.1.1.

Definição 5.2.1. Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um destes polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Cada um destes polígonos chama-se uma face do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado vértice do poliedro.

Definição 5.2.2. Denominamos prisma a todo poliedro convexo em que:

- há duas faces chamadas bases que são polígonos congruentes contidos em planos paralelos distintos;

- as demais faces (chamadas faces laterais) são paralelogramos determinados por pares de lados correspondentes nas duas bases.

Podemos classificá-los em duas categorias:

Prismas retos: são prismas em que as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Por exemplo, a Figura 9 ilustra um prisma reto:

Figura 9 – Prisma reto.

Prismas oblíquos: são prismas em que as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases. A Figura 10 mostra um exemplo de prisma oblíquo:

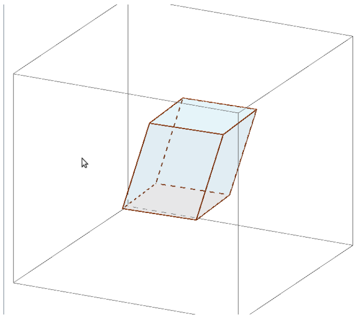


Figura 10 – Prisma oblíquo.

Observação 5.2.1. Os prismas retos em que as bases são polígonos regulares são chamados de prismas regulares. A Figura 11 mostra um exemplo de prisma reto regular e a Figura 12 sua respectiva planificação.

Note que a Figura 9 (embalagem) poderá ser planificada, para melhor entendimento do cálculo de sua área.

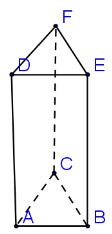


Figura 11 – Prisma reto de base triangular.

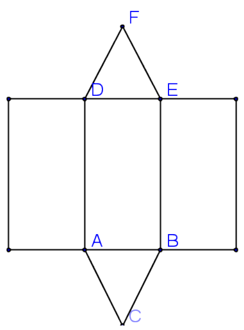


Figura 12 – Planificação do prisma reto de base triangular.

Nesta aula são essenciais as definições:

Definição 5.2.3 (Área lateral)**.** Dado um prisma regular P, sua área lateral é a soma das áreas das suas faces laterais. De modo geral,

$$A_l = n \cdot l \cdot h,$$

onde:

n é o número de lados do polígono regular,

l é o comprimento da aresta da base,

h é a altura do prisma.

Observação 5.2.2. No caso do prisma ser reto, mas não regular, deve-se mostrar que planificando o sólido, a área lateral pode ser calculada pela soma das áreas de todos os retângulos que constituem suas faces laterais.

Definição 5.2.4 (Área total)**.** A área total (A_t) de um prisma é dada por

$$A_t = A_l + 2A_b,$$

onde A_b é a área da base.

Observação 5.2.3. No final da aula, os alunos devem resolver exercícios de aplicação dos conhecimentos adquiridos, sob a orientação do professor. Exercícios referentes ao conteúdo da Aula 3 podem ser encontrados, por exemplo, em (MACHADO, 1988) e (IEZZI et al., 2001).

5.3 Aula 4 - Volume do Prisma

Nesta aula, o professor apresenta aos alunos como determinar o volume de um prisma, como reconhecer um paralelepípedo, em particular, um cubo bem como as suas diagonais. É importante que o aluno perceba que a área lateral, a área total e o volume de um paralelepípedo e de um cubo podem ser feitas da mesma maneira que ele aprendeu com os prismas em geral ou, se preferir, poderá trabalhá-las de forma particular. Esse conteúdo está descrito detalhadamente no livro (MACHADO, 1988).

A definição principal desta aula é a de volume de um prisma.

Definição 5.3.1. O volume de um prisma é determinado pelo produto da sua área da base pela altura.

O conceito de volume de prisma será recapitulado na Aula 6, por ocasião da verificação da fórmula do volume da pirâmide.

Alguns prismas mais conhecidos são o paralelepípedo e o cubo que são definidos a seguir.

Paralelepípedo: é o prisma cujas bases são paralelogramos. Em particular, um prisma reto cujas bases são retângulos é denominado paralelepípedo retângulo (ou paralelepípedo reto-retângulo). Este é o caso das Figuras 13 e 14.

Cubo: é o prisma em que todas as faces são quadradas, ou seja, trata-se de um prisma quadrangular regular em que a altura é igual à medida da aresta da base. O cubo

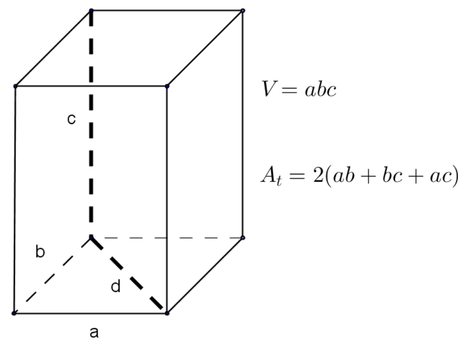


Figura 13 – Paralelepípedo retângulo.

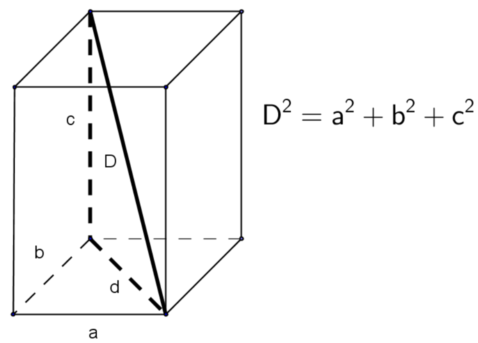


Figura 14 – Paralelepípedo e sua diagonal.

é o caso particular de paralelepípedo retângulo em que todas as arestas são iguais. Um exemplo de cubo pode ser visto na Figura 15, na parte inferior do sólido.

Figura 15 – Cubo com pirâmide sobreposta.

De maneira abstrata, podemos visualizar o cubo na Figura 16.

Observação 5.3.1. No final da aula, os alunos devem resolver exercícios de aplicação dos conhecimentos adquiridos, sob a orientação do professor.

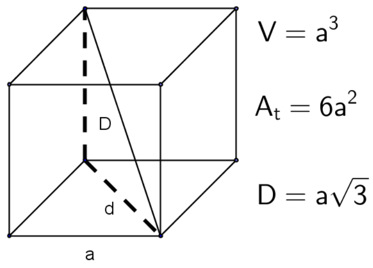


Figura 16 – Cubo.

5.4 Aula 5 - Avaliação

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BIBLIOTECA DIGITAL DA CÂMARA DOS DEPUTADOS, 1996), aprovada em 1996, prioriza a avaliação qualitativa. Desde então, as avaliações baseadas em um processo mecânico e que consiste unicamente na memorização de fórmulas precisam ser repensadas. Deve-se ser exigente, mas priorizar o raciocínio dos alunos. Um exemplo disso: ao questionar um aluno em uma avaliação qual a quantidade de papel necessária para cobrir uma pirâmide reta, cuja base é um quadrado de aresta a que foi colada em uma das faces de um cubo, também de aresta a o aluno, para responder, precisaria primeiro entender o que está sendo questionado, ou seja, não existe uma fórmula pronta para esse cálculo. Ele tem que entender a forma desse sólido resultante e, se ele souber calcular as áreas das faces laterais da pirâmide (triângulos isósceles) e do cubo e entender que a base da pirâmide e a face superior do cubo não serão cobertos por papel, pois estão colados, o problema estará resolvido.

Da mesma forma, o aluno deve ser capaz de interpretar o problema ao se deparar com sólidos inscritos em outros. Por exemplo: para calcular o volume de um prisma reto inscrito em um cilindro de raio r, ele deve perceber que a base do prisma está inscrita no círculo de raio r e que a altura do prisma é a altura do cilindro.

Muitos professores têm dificuldades para construir uma avaliação consistente e coerente com os conteúdos ensinados. De fato, nos cursos de graduação de Licenciatura em Matemática normalmente não é discutido como elaborar uma avaliação. É necessário que a avaliação tenha exercícios que contemplem os objetivos do professor. Para justificar a escolha dos exercícios, sugere-se que o professor escreva quais conteúdos foram abordados na questão, evidenciando o planejamento. É importante também que o professor resolva as questões da avaliação antes de aplicá-la aos alunos, para evitar que tenham dados digitados errados, figuras com dificuldade de entendimento e questões mal elaboradas.

O objetivo da avaliação não é classificar os alunos, mas definir estratégias para as aulas seguintes, identificando as falhas e dando sequência aos conteúdos compreendidos como consta na Lei das Diretrizes e Bases da educação Nacional (BIBLIOTECA DIGITAL DA CÂMARA DOS DEPUTADOS, 1996).

Seguem alguns exemplos de exercícios para as avaliações. Após cada questão, está explícito qual o objetivo da mesma para auxiliar o professor que não possui experiência ou sente dificuldades em sintetizar o que deve ser contemplado (sugestão: teste valendo 4 pontos).

1. Um cubo possui diagonal de face com $\sqrt{32}\ cm$, medida igual à da altura de um prisma regular de base triangular com aresta da base medindo 4 cm. Encontre a área total de cada sólido.

   Resposta: $A_t = 96\,cm^2$ e $V = 8(\sqrt{3} + 6\sqrt{2})\,cm^3$

   [*] Note que o aluno deverá perceber que, como conhece o valor da diagonal da face, poderá determinar o valor da aresta do cubo. Dessa forma, fica fácil o cálculo das áreas totais dos sólidos que poderão ser feitas através de suas planificações. Também é necessário que o aluno interprete o problema, pois os dados não são fornecidos diretamente. Os conteúdos envolvidos são: área total do cubo e do prisma regular de base triangular.

2. A Figura 17 mostra a planificação de uma caixa plástica sem tampa: obtenha o

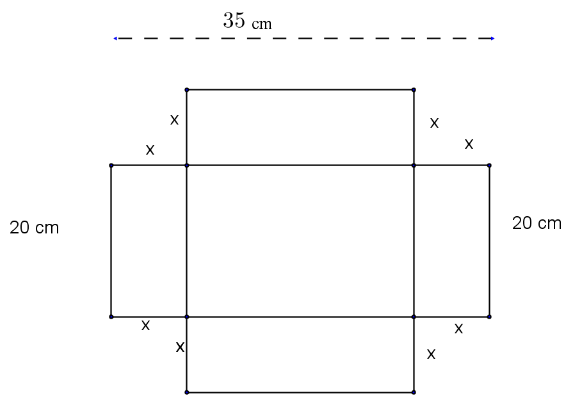


Figura 17 – Exercício 2.

   valor de x de modo que a caixa possa comportar exatamente o conteúdo de duas latinhas de refrigerante, de 330 ml cada.

   Resposta: $16,5\,cm$ ou $1\,cm$

[*] Note que o aluno deverá perceber que a caixa é um paralelepípedo reto-retângulo de comprimento $35 - 2x\ cm$, largura $20\,cm$ e altura $x\ cm$. Dessa forma, poderá calcular o valor de x através da resolução de uma equação do segundo grau, uma vez que é conhecido o valor do volume desse paralelepípedo. Os conteúdos envolvidos são: planificação do sólido e volume de um paralelepípedo.

3. Um reservatório tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e mede $0,50\ m$ de largura, $1,20\ m$ de comprimento e $0,70\ m$ de altura. Estando o reservatório com certa quantidade de água, coloca-se dentro dele uma pedra com formato irregular, que fica totalmente coberta pela água. Observa-se, então, que que o nível da água sobe $1\,cm$. Determine o volume da pedra.

   Resposta: $6\,dm^3$

   [*] Note que o aluno deverá perceber que, independente da forma da pedra, o volume de água que aumentará será o de um paralelepípedo com mesma base que a do reservatório e com altura $1\ cm$. Conteúdo envolvido: volume de paralelepípedo.

4. Um prisma hexagonal regular tem para altura a diagonal de um cubo de aresta a. Se o volume do cubo é igual ao do prisma, determine a área da base do prisma.

   Resposta: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$ unidades de área

   [*] Note que o aluno deverá perceber que basta calcular a diagonal do cubo, que ele obterá a altura do prisma. Dessa forma facilitará a resolução do problema. Conteúdo envolvido: volume de um prisma.

5.5 Aula 6 - Estudo da Pirâmide

Antes de iniciar o estudo de pirâmides, é interessante propor uma conversa com os alunos acerca de sua importância histórica. O professor deve incentivar que os alunos lembrem das aulas de História quando estudaram sobre o Antigo Egito, onde os faraós construíram, entre outras, a pirâmide mais famosa, Quéops, para servirem como túmulos. Dessa forma, o professor estaria inclusive fazendo uso da interdisciplinariedade: Matemática e História (DANTES, 1970). Pode-se também comentar o fato de existir uma pirâmide de vidro e metal "famosa", cuja construção terminou em 1989 em frente ao Museu do Louvre em Paris, na França, que inclusive fez parte da trama do filme "O Código Da Vinci"(veja Foto 1 da Questão 5.1.1). Com essa conversa informal, poderá ser criado um clima cordial na sala de aula e os alunos serão motivados ao estudo das pirâmides.

Antes de formalizar a definição de pirâmide, convém recapitular quais as figuras pertencem ao Grupo 4 da Aula 2 (sólidos que têm somente uma base): 1, 2 (parte superior), 3 (parte superior), 4, 6 (parte superior) e 7 (parte superior).

As seguintes definições não devem faltar na Aula 6:

Definição 5.5.1. Denomina-se pirâmide a todo poliedro convexo em que há uma face chamada base em um dado plano e apenas um vértice fora desse plano. As demais faces da pirâmide (faces laterais) são os triângulos determinados, cada um deles, por dois vértices consecutivos da base e o vértice da pirâmide. Veja Figuras 18 e 19.

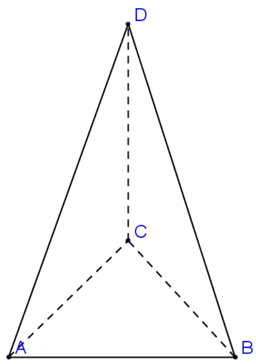


Figura 18 – Pirâmide de base ABC e vértice D.

Definição 5.5.2 (Pirâmide reta)**.** Uma pirâmide é dita reta quando todas as faces laterais são triângulos isósceles. Veja Figura 19, cuja pirâmide deverá ser construída pelo professor.

Figura 19 – Pirâmide reta.

Definição 5.5.3 (Pirâmide oblíqua)**.** Uma pirâmide é dita oblíqua quando nem todas as suas faces laterais forem triângulos isósceles.

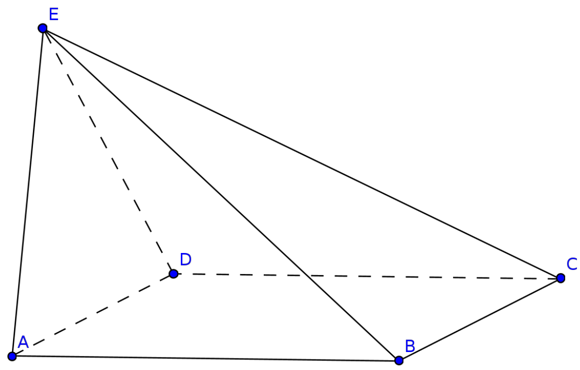


Figura 20 – Pirâmide oblíqua.

Definição 5.5.4 (Pirâmide regular)**.** Uma pirâmide é denominada regular quando for reta e a sua base for um polígono regular. Veja Figura 18.

Observação 5.5.1. Numa pirâmide regular, as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. A altura de qualquer um desses triângulos, relativamente ao lado da base, é denominada apótema da pirâmide.

Observação 5.5.2. Normalmente os alunos têm dificuldade em diferenciar a altura da pirâmide da altura de uma de suas faces laterais. Por isso, é importante ressaltar a diferença, mostrando através de figuras e sólidos bem como fazer exercícios do cálculo de áreas envolvendo esses itens. Convém ressaltar que, da mesma maneira que se procedeu para calcular áreas de prismas, planificando-os, os alunos deverão planificar as pirâmides, a fim de calcular as áreas de suas superfícies (áreas dos triângulos, que são as faces laterais e área da base).

Observação 5.5.3. No final da aula, os alunos devem resolver exercícios de aplicação dos conhecimentos adquiridos, sob a orientação do professor.

5.6 Aula 7 - Volume da Pirâmide

Nessa aula, será feita a seguinte verificação da fórmula do volume da pirâmide: o professor, fazendo uso dos sólidos de acrílico (uma pirâmide com mesma base e mesma altura de um prisma) coloca água na pirâmide e passa, com o auxílio de um funil, para o prisma, mostrando (com o auxílio de uma régua) que o volume de água ficará na terça-parte da altura do prisma.

Outra maneira de fazer essa verificação é, usando os sólidos descritos anteriormente, colocar o conteúdo de três pirâmides no interior de um prisma, a fim de perceber que o volume de um prisma é o triplo do volume de uma pirâmide de mesma altura e mesma base.

A princípio, parece que as Aulas 6 e 7 podem ser dadas em somente um encontro. No entanto, no bimestre (ou trimestre) em que são estudados prismas e pirâmides, uma grande dificuldade que os alunos encontram é perceberem a diferença entre altura da pirâmide e altura de uma de suas faces. Por isso, é prudente que essas aulas fiquem separadas para ter um maior tempo para a realização de exercícios de fixação. Um exemplo de exercício de fixação:

Exemplo 5.6.1. A base de uma pirâmide regular é um quadrado de 24 cm de perímetro, e sua área lateral é 10 vezes a área da base. Seu volume, em m^3, é um número entre:

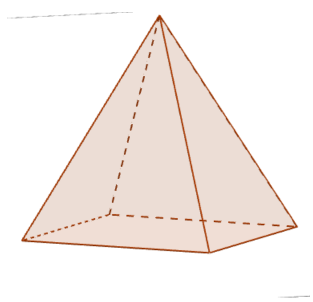
a) 0 e 200

b) 200 e 400

c) 400 e 600

d) 600 e 800

e) 800 e 1000



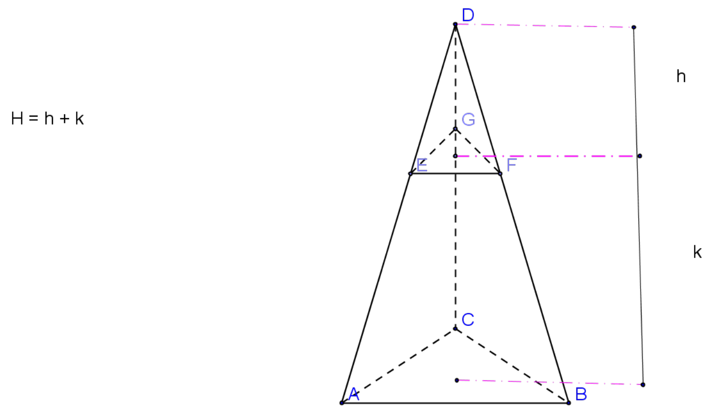
Esse exemplo envolve os conteúdos: perímetro de um quadrado, área de um quadrado, área lateral da pirâmide, apótema da pirâmide (o aluno terá que determiná-la para descobrir a altura da pirâmide) e volume da pirâmide.

Resposta: letra b.

Observação 5.6.1. No final da aula, os alunos devem resolver exercícios de aplicação dos conhecimentos adquiridos, sob a orientação do professor.

5.7 Aula 8 - Troncos de Pirâmides

Definição 5.7.1 (Tronco de pirâmide)**.** Seja uma pirâmide de altura H e base B. Quando um plano secciona esse sólido de maneira transversal, ou seja, perpendicularmente a sua altura, determina dois novos sólidos: uma pirâmide de altura h e base b e um tronco de pirâmide de bases B e b.



Valem as seguintes relações:

$$\frac{V}{v} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \tag{5.1}$$

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{H}{h}\right)^3, \tag{5.2}$$

onde

V: volume da pirâmide original, de base B;

v: volume da pirâmide menor, de base b;

H: altura da pirâmide original;

h: altura da pirâmide menor, de base b.

Um exemplo de exercício sobre pirâmides:

Exemplo 5.7.1. Duas pirâmides têm a mesma altura de 15 m. A primeira tem por base um quadrado de 9 m de lado e a segunda um hexágono regular de mesma área. Determine a área da secção paralela à base traçada a 10 m de distância do vértice, na segunda pirâmide.

Este exemplo engloba os conteúdos: área do quadrado e relações de tronco de pirâmide que envolvem áreas.

Resposta: $36\,m^2$

Observação 5.7.1. O professor deve chamar a atenção dos alunos no sentido desses perceberem que as fotos 5, 8 e 9 da Aula 2 mostram troncos de pirâmides. No final da aula, os alunos devem resolver exercícios de aplicação dos conhecimentos adquiridos, sob a orientação do professor.

Observação 5.7.2. O professor pode informar aos alunos que existe uma fórmula para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide, mas que esse pode ser determinado pelas relações vistas 5.1 e 5.2, pois se eles souberem os volumes das pirâmides original V e menor v, basta fazer a subtração e encontrarão o resultado.

5.8 Aula 9 - Uso do Geogebra 3D

Muitos professores já estão acostumados a usar o Geobebra 2D. No entanto, existe uma versão recente do Geogebra 3D que é interessante para fixar conceitos através da visualização dos sólidos. Aqui convém salientar que o objetivo dessa atividade não é ensinar o professor a usar esses recursos, somente sugerir o seu uso. Além disso, esses recursos podem ser usados no estudo de outros sólidos. Versões de *software* GeoGebra 3D, estão disponíveis em $http://code.google.com/p/geogebra/$.

É necessário que seja instalado o também o Java no computador que o professor utilizará. Para instalar o Java $http://java.com/pt_BR/download/index.jsp$.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PARÂMETROS..., 1999), especificamente na Parte III — Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias —, uma das habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, dentro do contexto sócio- cultural do educando, é utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Para a próxima atividade, existem duas possibilidades. A primeira é que os alunos façam a atividade toda no papel e depois verifiquem no *software* e a segunda é realizar as duas tarefas simultaneamente.

1. Primeiramente, no campo "Entrada" e com a janela de visualização 3D aberta, marque três pontos no plano $z = 0$. Por exemplo, os pontos podem ser escolhidos no primeiro, segundo e terceiro quadrantes. Sejam $A(1,2)$ $B(-4,2)$ e $C(-2,-2)$, três pontos no plano como mostra a Figura 21.

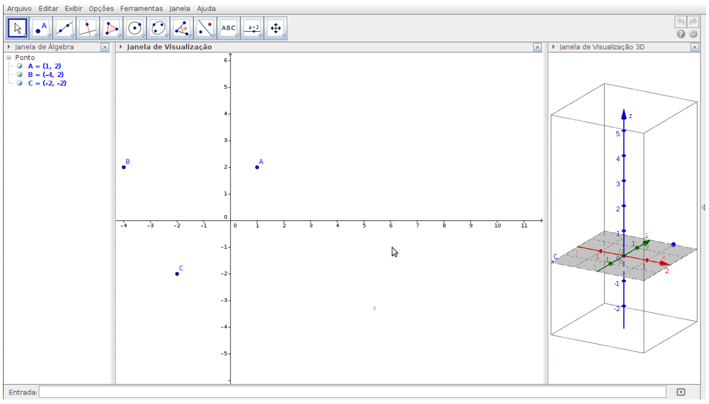


Figura 21 – Pontos A, B e C.

2. Em seguida, traçar o triângulo ABC, utilizando a função "Polígono" como mostra a Figura 22.

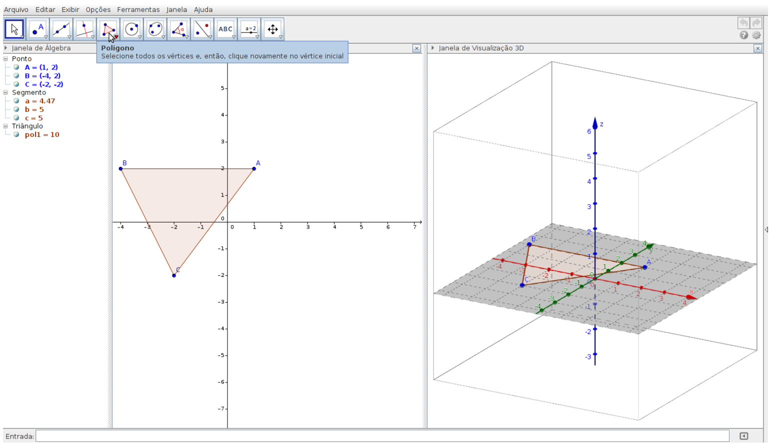


Figura 22 – Triângulo ABC.

Note que quando traçado o polígono ABC na janela de visualização 2D, ele aparece automaticamente na janela de visualização 3D.

3. Construir, utilizando a função "Controle deslizante" , um segmento d. Este segmento será a altura da Pirâmide. A função "Controle deslizante" permite que se modifique o comprimento do segmento, conforme desejado. Veja Figura 23.

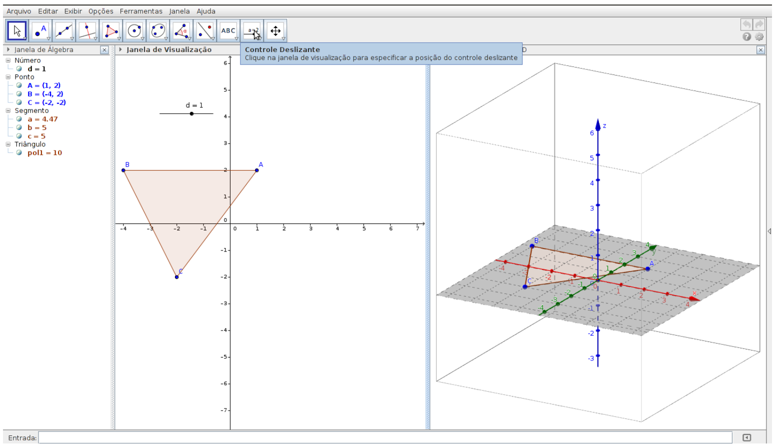


Figura 23 – Construção do segmento d.

4. Na janela $3D$, construir um plano paralelo ao plano $z = 0$ e cuja distância ao mesmo seja d. Identificar que este plano é o lugar geométrico do vértice da pirâmide de altura d e base ABC. Para construir o plano, pode-se traçar uma reta perpendicular ao plano $z = 0$ passando por B e com centro em B traçar uma esfera de raio d. Seja E o ponto de interseção da esfera com a reta, pelo ponto E traçar o plano paralelo à $z = 0$ utilizando a função "Plano Paralelo". Veja Figura 24.

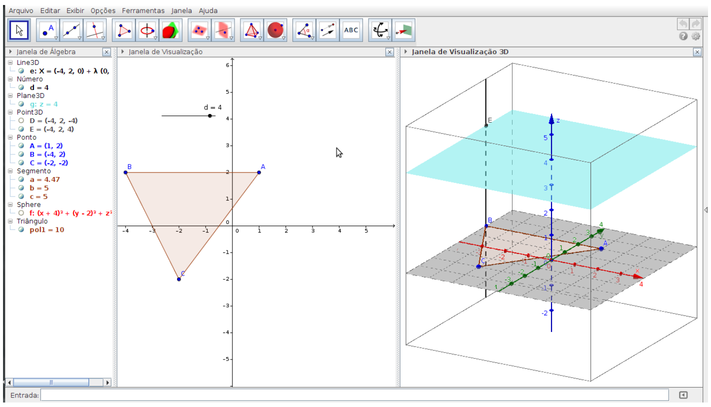


Figura 24 – Construção do plano $z = d$.

5. Marcar um ponto F no plano, usando a função "Marcar ponto em objeto". Construir a pirâmide $ABCF$, utilizando a função "Pirâmide" cujo ícone está amplido na Figura 25.

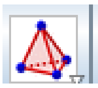


Figura 25 – Ícone pirâmide

6. A pirâmide $ABCF$ pode ser vista na Figura 26.

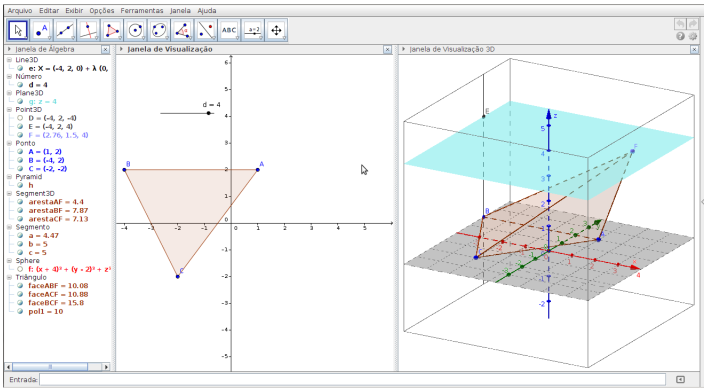


Figura 26 – Construção da pirâmide $ABCF$

.

7. O aluno utiliza a opção "Mover" para deslizar o ponto F sobre o plano $z = d$. Neste momento é ideal explorar a seguinte ideia: pirâmides de mesma base e mesma altura terão o mesmo volume, não importa a posição do ponto F, desde que esteja sobre o plano $z = d$. Além disso, reforçar que esta ideia é válida tanto para pirâmides retas, quanto para pirâmides quaisquer e não importa qual é o polígono da base. Para calcular o volume, use a opção "Área " na janela 2D para calcular a área da base. Após, basta multiplicar por $\dfrac{d}{3}$ e se obter o resultado.

5.9 Aula 10 - Avaliação

As mesmas considerações feitas na introdução da Aula 5 (teste sobre prismas) são válidas para a prova sobre pirâmides. Exemplos de exercícios que podem ser usados em avaliações (sugestão 6 pontos):

Vale ressaltar que se o aluno visualizar os sólidos sem memorizar fórmulas, poderá dessa forma, com cálculos da Geometria Plana, resolver os problemas de Geometria Espacial. Pode-se, inclusive, permitir que os alunos façam o manuseio dos sólidos de acrílico por ocasião das avaliações, permitindo que os mesmos façam as deduções das fórmulas necessárias.

1. Observe a Figura 27, que representa um cubo, cujas arestas medem 36 cm. Seja X um ponto da aresta AE. Determine a medida de AX, em cm, para que o volume da pirâmide $XABCD$ seja $\frac{1}{9}$ do volume do cubo.

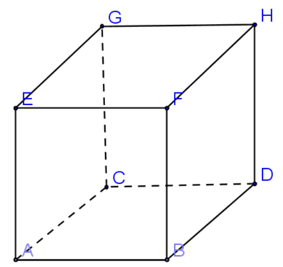


Figura 27 – Exercício 1.

Resposta: 12 cm

[*] Note que o aluno deve perceber que a base da pirâmide é a mesma base do cubo e que a altura da pirâmide será o comprimento do segmento. Conteúdos envolvidos: conceito de cubo, volume da pirâmide.

2. Um pintor depositou a tinta que iria utilizar para pintar um muro em um recipiente de forma cúbica de altura h, deixando-o completamente cheio. Após utilizar 192 litros de tinta, a altura h diminuiu 30 cm. Determine a capacidade total do recipiente, em litros.

Resposta: 512 litros

[*] Note que o aluno deverá perceber que, como a forma do recipiente é cúbica, suas arestas são todas iguais a a e, no momento em que foram usados os 192 litros de tinta, a quantidade dessa que permaneceu no cubo, forma um paralelepípedo de base

quadrada e altura h, dessa forma, como ele conhece o volume desse paralelepípedo de tinta, fica fácil o cálculo. Conteúdos envolvidos: conceito de cubo e volume do paralelepípedo.

3. Calcule o volume da pirâmide triangular, indicada na Figura 28, sabendo que o volume do cubo, onde está contida, é 64 cm^3.

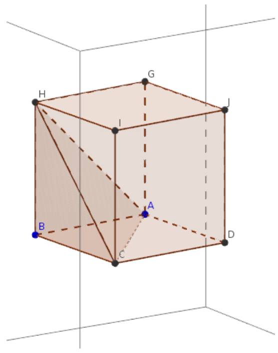


Figura 28 – Exercício 3.

Resposta: $\dfrac{32}{3}\,cm^3$

[*] Note que o aluno deverá perceber que a área da base da pirâmide é igual à área da metade do quadrado que é base do cubo e que a altura dessa é igual à medida da aresta do cubo. Conteúdos envolvidos: conceito de cubo, volume da pirâmide.

4. Uma pirâmide quadrangular regular, cujo apótema mede 5 cm está inscrita em um cilindro circular reto, cuja área da base é $18\pi\ cm^2$. Determine a área total e o volume dessa pirâmide.

Resposta: $A_t = 96\ cm^2$ e $V = 48\ cm^3$

[*] Note que o aluno deverá perceber que a base da pirâmide, que é um quadrado, está inscrita na base do cilindro, ou seja, trata-se de um quadrado inscrito em um círculo. Dessa forma, ele tem como determinar o raio do círculo, o lado do quadrado l e, por ter o apótema da pirâmide g, pode também determinar a altura h, aplicando Pitágoras no triângulo retângulo, cuja hipotenusa é g e cujos catetos são h e o apótema da base a. Também ele deverá ser capaz de notar que para o cálculo da área lateral é necessário que ele calcule a área das quatro faces laterais, que são triângulos com base l e altura g. Observe que neste momento, o aluno ainda não sabe o que é um cilindro, mas basta que o professor, de maneira informal, o tenha orientado no sentido de que se trata de um sólido semelhante a um prisma, cujas bases são circulares. Conteúdos envolvidos: áreas e volume de pirâmide.

5. Uma caixa, na forma de paralelepípedo reto retângulo de base quadrada, contém uma pirâmide, cujos vértices são os pontos médios das arestas do fundo da caixa.

O vértice superior da pirâmide toca a tampa da caixa. Determine a razão entre os volumes da pirâmide e da caixa.

Resposta: $\frac{1}{6}$

[*] Note que o aluno deve perceber que como a base da pirâmide tem vértices nos pontos médios de um quadrado de lado l, ele poderá , chamando de x a aresta da base dessa pirâmide, construir um triângulo retângulo, cujos catetos sejam $\frac{l}{2}$ e hipotenusa x. Conhecido o valor de x em função de l, poderá determinar a razão pedida. É claro que ele terá que notar que as alturas dos dois sólidos são iguais e poderão ser simplificadas. Conteúdos envolvidos: volumes de paralelepípedo e pirâmide.

6. Uma pirâmide regular hexagonal de altura 6 cm é seccionada por um plano paralelo à base e distante 4 cm dela, resultando em dois novos sólidos: uma nova pirâmide e um tronco. Determine:

   a) Quantas vezes o volume da nova pirâmide cabe no tronco;

   Resposta: 26 vezes

   b) a área da base da pirâmide original, sabendo que a área da base da pirâmide obtida é $16\sqrt{3}\ cm^2$.

   Resposta: $144\sqrt{3}\ cm^3$

   [*]Note que o aluno deverá perceber que a altura da nova pirâmide será de 2 cm e, usando as relações de tronco, o problema ficará resolvido. Conteúdos envolvidos: relações de áreas e volumes de troncos de pirâmide.

Observação 5.9.1. O professor poderá avaliar os alunos com duas provas. A primeira, consiste de um teste sobre prismas, valendo 4 pontos (Aula 5) e a segunda prova envolvendo prismas e pirâmides, no valor de 6 pontos (Aula 10).

É interessante que o professor não se detenha somente ao livro-texto nem em seus exercícios. O professor pode elaborar listas de exercícios, fazendo uma coletânea de vários livros didáticos como (MACHADO, 1988), (IEZZI et al., 2001) e outros. Inclusive nas aulas que antecedem às avaliações podem ser propostos aos alunos testes de vestibulares, de concursos e questões do ENEM, pois esta é uma maneira de revisar os conteúdos.

5.10 Aula 11 - Comentário sobre a Avaliação

Nesta aula, o professor, com a ajuda de seus alunos, resolve no quadro todas as questões da avaliação, comentando os possíveis erros cometidos por eles e as várias maneiras de resolver cada questão. Este procedimento é fundamental para que o aluno aprenda com seus erros e perceba que existem várias formas de resolver um determinado problema.

6 Conclusão

6.1 Possíveis continuações ou desdobramentos

É importante ressaltar que o professor deve priorizar o estudo de prismas e pirâmides retas, uma vez que, no momento em que o aluno consegue trabalhar com esses sólidos facilmente, também conseguirá fazê-lo no caso de sólidos oblíquos. Nesse caso, o professor deve mostrar aos alunos no quadro, no Geogebra ou com sólidos de acrílico esses prismas e pirâmides oblíquos e comentar a maneira como trabalhar com eles.

A fim de dar continuidade a esse trabalho, registra-se a intenção por parte da proponente, juntamente com suas orientadoras, de proporcionar aos professores que atuam no Ensino Médio, preferencialmente os entrevistados na pesquisa, encontros para discussão do ensino de Geometria Espacial, constituindo, assim, um projeto na modalidade "extensão" para contribuir na formação continuada desses professores. Esses encontros poderão ser em forma de oficinas para colocar em prática as atividades propostas.

A proponente do trabalho pretende implantar em todas as suas turmas regulares as atividades aqui sugeridas.

6.2 Considerações finais

Ao término desse trabalho, espera-se salientar a importância do ensino da Geometria no Ensino Básico, bem como, mostrar que é possível ensinar os referidos conteúdos de forma prazerosa e atraente.

As atividades propostas têm como objetivo auxiliar os professores na preparação de suas aulas, com o intuito de recapitular conteúdos relacionados à Geometria Plana e incentivar o uso de materiais concretos nas aulas de Geometria Espacial.

O instrumento de avaliação também deve ser repensado, pois deve ser feito com o objetivo de melhorar o desenvolvimento do ensino-aprendizagem do aluno. A avaliação deve priorizar o raciocínio, estimulando o aluno a ir em busca da solução e ser capaz de relacionar o conteúdo estudado com outras áreas ampliando seu raciocínio lógico. Convém reforçar que essa avaliação deve ser feita com objetivo de melhorar a qualidade do ensino e, portanto, com bastante exigência.

Dessa forma, espera-se auxiliar os alunos nas resoluções de problemas e despertar um interesse maior pelos conteúdos que foram abordados, contribuindo no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.

Ao término desse trabalho, espera-se que as atividades aqui propostas sirvam para que os professores constatem a importância de recapitular pré-requisitos, ou mesmo de ensiná-los pela primeira vez, já que nem sempre os alunos os estudam adequadamente. Também é importante que a maneira de avaliar seja repensada, priorizando o raciocínio e não a mera memorização.

Deve-se ter em mente o que se espera dos alunos: serem meros repetidores de conceitos ou cidadãos críticos, que usem o raciocínio e que vejam a Matemática como uma forma de ajudá-los a resolver seus problemas. Sabe-se que nem sempre os alunos conseguem aplicar os conhecimentos adquiridos tão logo estes sejam aprendidos, mas é bom que saibam que poderão utilizá-los, sempre que necessários.

Referências

ALMEIDA, G. P. de. *Transposição Didática: Por onde começar?* Curitiba, PR, Brasil: Cortez Editora, 2011. 21, 60

BIBLIOTECA DIGITAL DA CÂMARA DOS DEPUTADOS. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. [S.l.], 1996. Disponível em: <http://bd.camara.gov.br>. 40, 41

DANTES, S. S. tradução de Heloysa de L. *A Egiptologia*. São Paulo, SP, Brasil: Difusão Europeia do Livro, 1970. 42

GIANCATERINO, R. *A Matemática sem rituais*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Wak Editora, 2009. 14

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; JUNIOR., J. R. G. *Matemática Completa*. São paulo, SP, Brasil: Editora FTD, 2005. 28

GONZATTO, M. Por que 89% dos estudantes chegam ao final do ensino médio sem aprender o esperado em matemática? *Jornal Zero Hora*, Porto Alegre, RS, Brasil, 2012. 26

IEZZI, G. et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*. São Paulo, SP, Brasil: Atual Editora, 2001. 28, 38, 53

LORENZATO, S. Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 33

MACHADO, A. dos S. *Matemática: Temas e Metas*. São Paulo, SP, Brasil: Atual editora, 1988. 28, 38, 53

PARÂMETROS Curriculares Nacionais - Ensino Médio. [S.l.], 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. 47

PAVANELLO, R. M. O abandono da geometria no brasil. Campinas, SP, Brasil, n. 1, p. 7 – 17, 1993. 14

SEED. *Diretrizes Curriculares de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio*. [S.l.], 2008. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao-.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/2_edicao/matematica.pdf?>>. Acesso em: 6.7.2009. 15

Anexos

ANEXO A – Memorial

Sou professora da rede pública desde 1989 e percebi, ao longo desse período, que muitas vezes os professores justificam a forma de ensinar e avaliar seus alunos de diversas formas: os alunos não têm base, os salários são baixos, falta tempo para melhor preparar as aulas ou ainda porque são obrigados a trabalhar em várias escolas. A cobrança das direções de escola e/ou das secretarias de educação é grande no sentido de que diminuam os índices de reprovação sem a preocupação com a qualidade do ensino.

Trabalho em uma escola técnica (IFRS- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - Campus Rio Grande) em que consigo ser exigente, sem deixar de ser "parceria" dos alunos. Essa escola é reconhecida na cidade por preparar seus alunos para a vida, para o mercado de trabalho e para realização de concursos que exijam conhecimento teórico. E isso reforça minha teoria de que quanto mais eficiente for o instrumento de avaliação, mais o aluno estuda e quanto mais o aluno estuda, mais ele aprende e obtém sucesso escolar. A Geometria Espacial é um assunto que a maioria dos alunos gosta, pois se refere a temas que eles convivem no seu dia-a-dia: formatos dos prédios, da própria sala-de-aula, das lajotas, dos galpões, da caixa de giz, dos canudos de refrigerante e das casquinhas do sorvete. Justifico a importância do conteúdo através de exemplos práticos como em suas casas eles poderem fazer o cálculo do número de ladrilhos a serem usados, a quantidade de tinta usada em uma pintura, a quantidade de papel para forrar uma caixa, ou de água que cabe em um aquário. Resumindo: o estudo dos sólidos geométricos é muito bem visto pelos alunos.

Na aula inaugural do PROFMAT 2011, o professor Elon Lages Lima, um dos idealizadores desse mestrado, disse que um bom professor é aquele que:

- domina o conteúdo a ser desenvolvido;

- tem facilidade em explicar aquilo a que se propõe;

- gosta de ensinar (tem vocação);

- tem empatia com os alunos, fazendo com que suas aulas transcorram de forma cordial, mas com disciplina.

Agradeço por ter tido ótimos professores no transcorrer de minha vida escolar, desde a primeira série do Ensino Fundamental. Quando me refiro a ótimos professores, quero dizer: exigentes e que proporcionavam um clima cordial com disciplina. Desses, guardo ótimas lembranças e jamais vou esquecê-los. Também tive aqueles que sabiam o conteúdo, mas não sabiam explicar ou se achavam os “donos” da verdade e tive aqueles que não exigiam, desses não lembro, muitas vezes, nem do nome.

Na minha graduação, que foi licenciatura na FURG, concluída em 1982, tive excelentes professores. Um deles me disse, quando questionei sobre a ocasião em que veríamos determinado conteúdo, que não veríamos, mas com a formação que estávamos tendo, poderíamos usar qualquer livro didático que saberíamos desenvolvê-lo e explicá-lo. Minha formação pedagógica foi focada na confecção de planos de aula, na maneira de apagar o quadro, na elaboração de uma prova com questões médias, fáceis e difíceis. ou seja: aprendi a dar aula “dando” aula. Mas isso para mim nunca foi problema, pois acho, de acordo com o que falei no início, que o professor, além de dominar o conteúdo, tem que ter vocação para ensinar. Dessa forma, me tornei professora desde então e me considero uma “boa professora”.

Atualmente acho que está sendo priorizada, de maneira equivocada, a parte pedagógica em detrimento do conteúdo. E volto a frisar: é mais fácil ensinar alguém que sabe o conteúdo a dar aula, do que o conteúdo a alguém cheio de recursos e teorias pedagógicas. Vejo que muitos licenciados chegam nas salas de aula dominando o uso de jogos, de blocos lógicos, softwares, mas com muito pouco embasamento teórico, pois os quadros de sequência lógica das licenciaturas têm sido modificados de forma que, cada vez mais, seja priorizada a parte pedagógica, ou seja, os licenciados estão se formando sabendo “como”ensinar, mas não sabendo “o que” ensinar.

Ouvi de um dos professores com os quais fiz a pesquisa que consta nesse trabalho, que as avaliações que ele realiza com seus alunos são baseadas em exercícios de aplicação de fórmulas, que inclusive são fornecidas aos alunos no momento da prova, pois “não dá para exigir muito deles, porque a maioria não sabe a diferença entre um triângulo e um quadrado”.

Não devemos nos basear em “desculpas”. É fundamental nos preocupamos com a qualidade do ensino e isto só será possível quando questionarmos a forma de ensinar e a forma de avaliar nossos alunos. Reforçando essa ideia, Geraldo Peçanha de Almeida em (ALMEIDA, 2011):

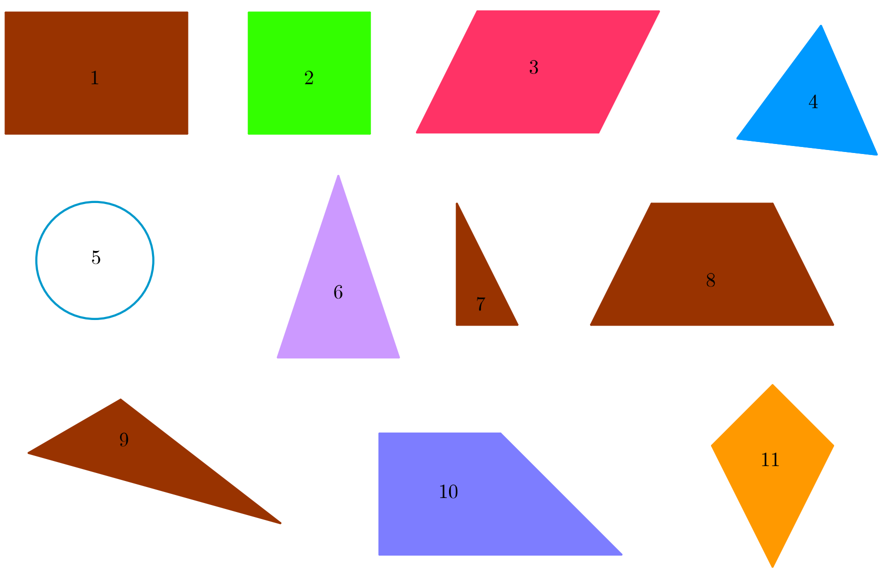
> Assim, é o professor o melhor software de todos. Ele é o elemento de maior força. Por sua inteligência, sua capacidade de raciocinar com base

> em fontes diversas, suas várias experiências, ele segue garantindo que o seu sistema natural de informação elabore saídas e respostas pertinentes à realidade de cada sala-de-aula. É o software chamado professor que faz movimentar, que dá vida a um hardware chamado escola. Sem a presença dele, não há escola.

Tenho certeza de que a forma com que ensinamos e avaliamos na escola em que atuo dá bons frutos, pois mais de oitenta por cento de nossos alunos ingressam em universidades públicas e/ou conseguem bons empregos. Seus resultados em vestibulares, ENEM, concursos públicos, Olimpíadas de Matemática são muito satisfatórios. E, justamente, quando vejo meus alunos encaminhados, felizes e agradecidos pelos ensinamentos adquiridos é que tenho certeza de que acertei quando escolhi ser PROFESSORA.

ANEXO B – Questionários

Questionário B.0.1 (Revisão de tipos de polígonos)**.** Para responder às questões, observe as figuras:



Questão B.0.1. Escreva o nome de algum objeto que você conheça e que se parece com cada uma das figuras.

Questão B.0.2. Separe as figuras em dois grupos, dizendo qual o critério que foi utilizado.

Questão B.0.3. Separe as figuras em três grupos, dizendo qual o critério que foi utilizado.

Para o conceito de perímetro e área de polígonos regulares sugere-se motivar as definições com o seguinte questionário:

Questionário B.0.2 (Revisão de cálculo de perímetro e áreas)**.**

Questão B.0.4. Observe as situações abaixo e diga qual o cálculo que deve-se fazer para determinar a resposta correta:

- quantidade de arame necessária para cercar um terreno retangular;
- quantidade de grama necessária para cobrir um terreno circular;
- quantidade de papel necessária para cobrir a tampa de uma caixa;
- quantidade de madeira necessária para fazer uma moldura de um quadro.

Questão B.0.5. Como se pode calcular o perímetro da Figura 29?

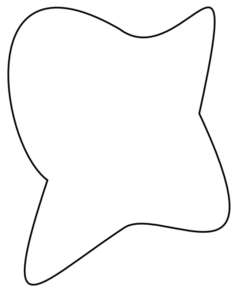


Figura 29 – Questão B.0.5

Questão B.0.6. A área é a medida de uma superfície. As unidades de medida usual da área são m^2 (metros quadrados) e cm^2 (centímetros quadrados). Considere a Figura 30. Quantos quadrados (m^2 ou cm^2) são necessários para cobrir a região delimitada?

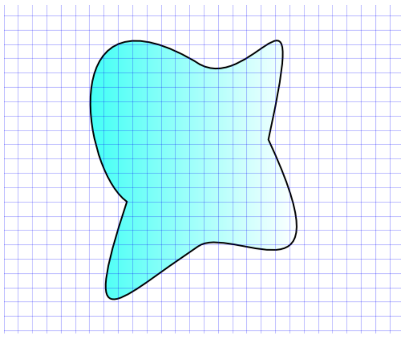


Figura 30 – Questão B.0.6

ANEXO C – Introdução aos Prismas e Pirâmides

Questão C.0.7. Observe as fotos abaixo e faça o que se pede:


1


2


3


4


5

6


7


8

9

10

11

12

Separe as fotos em quatro grupos:

Grupo 1: sólidos que têm todas as faces iguais;

Grupo 2: sólidos que têm pelo menos uma face diferente;

Grupo 3: sólidos que têm bases iguais;

Grupo 4: sólidos que têm somente uma base.

ANEXO D – Avaliação

D.1 Teste

1. Um cubo possui diagonal de face com $\sqrt{32}\ cm$, medida igual à da altura de um prisma regular de base triangular com aresta da base medindo 4 cm. Encontre a área total de cada sólido.

2. A figura abaixo mostra a planificação de uma caixa plástica sem tampa: obtenha

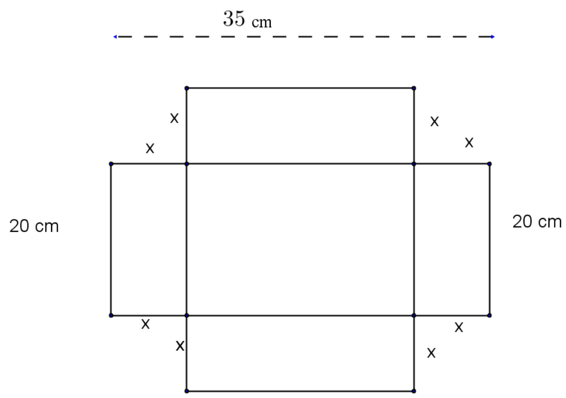


Figura 31 – Exercício 2.

o valor de x de modo que a caixa possa comportar exatamente o conteúdo de duas latinhas de refrigerante, de 330 ml cada.

3. Um reservatório tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e mede $0,50\ m$ de largura, $1,20\ m$ de comprimento e $0,70\ m$ de altura. Estando o reservatório com certa quantidade de água, coloca-se dentro dele uma pedra com formato irregular, que fica totalmente coberta pela água. Observa-se, então, que que o nível da água sobe $1\,cm$. Determine o volume da pedra.

4. Um prisma hexagonal regular tem para altura a diagonal de um cubo de aresta a. Se o volume do cubo é igual ao do prisma, determine a área da base do prisma.

D.2 Prova

1. Observe a Figura 32, que representa um cubo, cujas arestas medem 36 cm. Seja X um ponto da aresta AE. Determine a medida de AX, em cm, para que o volume da pirâmide $XABCD$ seja $\frac{1}{9}$ do volume do cubo.

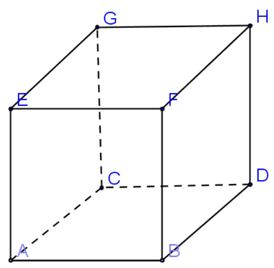


Figura 32 – Exercício 1.

2. Um pintor depositou a tinta que iria utilizar para pintar um muro em um recipiente de forma cúbica de altura h, deixando-o completamente cheio. Após utilizar 192 litros de tinta, a altura h diminuiu 30 cm. Determine a capacidade total do recipiente, em litros.

3. Calcule o volume da pirâmide triangular, indicada na Figura 33, sabendo que o volume do cubo, onde está contida, é 64 cm^3.

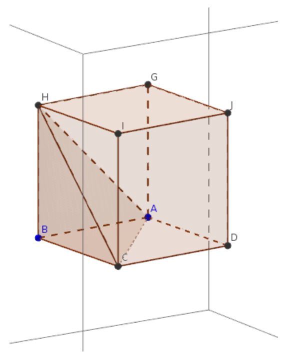


Figura 33 – Exercício 3.

4. Uma pirâmide quadrangular regular, cujo apótema mede 5 cm está inscrita em um cilindro circular reto, cuja área da base é 18π cm^2. Determine a área total e o volume dessa pirâmide.

5. Uma caixa, na forma de paralelepípedo reto retângulo de base quadrada, contém uma pirâmide, cujos vértices são os pontos médios das arestas do fundo da caixa.

O vértice superior da pirâmide toca a tampa da caixa. Determine a razão entre os volumes da pirâmide e da caixa.

6. Uma pirâmide regular hexagonal de altura 6 cm é seccionada por um plano paralelo à base e distante 4 cm dela, resultando em dois novos sólidos: uma nova pirâmide e um tronco. Determine:

   a) Quantas vezes o volume da nova pirâmide cabe no tronco;

   b) a área da base da pirâmide original, sabendo que a área da base da pirâmide obtida é $16\sqrt{3}\ cm^2$.