



Universidade Federal do ABC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

**SIMETRIAS PLANAS
E ALGUNS PROBLEMAS DE
LADRILHAMENTO**

Aguinaldo Manoel Silva

Orientador: Prof. Dr. Armando Caputi

Santo André
2013



Universidade Federal do ABC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

**SIMETRIAS PLANAS
E ALGUNS PROBLEMAS DE
LADRILHAMENTO**

Aguinaldo Manoel Silva

**Trabalho apresentado como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática
sob orientação do Prof. Dr. Armando Caputi**

Santo André
2013



Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora.

Prof. Dr. Armando Caputi (UFABC) - Orientador

Prof^a. Dr^a. Bárbara Corominas Valério (USP)

Prof. Dr. André Ricardo de Oliveira Fonseca (UFABC)

Dedico este trabalho à minha família,
pelo seu apoio incondicional em espe-
cial à minha esposa Aldeir

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela presença constante.

Aos meus pais, Maria das Graças e Ananias que, com muito carinho, me incentivaram durante toda a minha caminhada acadêmica e não mediram esforços para que eu chegasse até aqui.

Aos meus irmãos Ademir e Aline que sempre me apoiaram com atenção e carinho.

A minha esposa Aldeir, que de forma amorosa e especial me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades.

Aos meus colegas de curso Roberta, Marcelo, Guilherme, Mariane, Cintia, Jeovah e Clayton, que fazem parte da minha história no PROFMAT e cuja experiência e amizade foram muito importantes para chegar até aqui.

Aos meus amigos Carlos Tofólis e Samuel Francisco, que compartilharam comigo tantos trajetos de estudo e risadas até a UFABC. Aprendi muito com vocês e agradeço por todo o apoio e amizade.

A todos os professores do curso, em especial ao meu orientador professor Armando Caputi, que lançou a ideia e me ajudou, com paciência e dedicação, a concluir esse trabalho.

Enfim, a todos os amigos que participaram comigo dessa jornada, o meu muito obrigado.

”A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o mundo”. Galileu Galilei

Resumo

O objetivo do trabalho é apresentar a classificação das figuras planas simétricas, de acordo com seus grupos de simetria.

Iniciamos falando sobre as isometrias do \mathbb{R}^2 e suas propriedades, destacando quatro tipos de isometrias: translações, rotações, reflexões e glissoreflexões).

Em seguida, no segundo capítulo, definimos o conceito matemático de simetria, de figuras simétricas e de grupos de simetria. A partir desses grupos de simetria, procedemos à classificação das figuras simétricas, analisando separadamente as classes das rosetas (figuras cujos grupos de simetrias são finitos), dos frisos (figuras para as quais as translações formam um subgrupo cíclico do grupo de simetria) e dos papéis de parede (figuras cujos grupos de simetrias possuem um subgrupo gerado por duas translações linearmente independentes).

O terceiro capítulo é dedicado a um breve estudo sobre os ladrilhamentos com polígonos regulares, de acordo com os tipos e quantidade de polígonos utilizados no ladrilhamento.

Encerramos com um série de atividades que podem ser desenvolvidas no Ensino Médio.

Abstract

The purpose of this work is to present the classification of symmetric plane figures according to its symmetry groups.

We start talking about isometries in \mathbb{R}^2 and its properties, highlighting four kinds of isometries: translations, rotations, reflections and glide reflections.

In the second chapter, we define the mathematical concept of symmetry, symmetrical figures and symmetry groups. We use such groups in order to classify symmetric figures, analasing independently: rosettes (figures with a finite symmetry group), frizes (figures whose symmetry group has a unique infinite cyclic subgroup of translations) and wallpapers (figures whose symmetry group has a subgroup generated by two translations linearly independent).

The third chapter is devoted to a brief study on regular tesslations of the plane, according with the number and type of the regular poligons involved.

Finally, we propose some activities that can be developed in high school.

Sumário

Introdução	9
1 Isometrias em \mathbb{R}^2	11
1.1 Conceitos e propriedades básicas	11
1.2 Tipos de isometria no plano	14
1.2.1 Translação	14
1.2.2 Rotação	15
1.2.3 Reflexão	18
1.2.4 Glissoreflexão	20
1.3 Composição de isometrias no plano	21
1.3.1 Translação seguida de uma translação	21
1.3.2 Translação seguida de uma rotação	22
2 Simetrias	24
2.1 Simetrias Planas	24
2.2 Análise das simetrias	26
2.2.1 Composição de simetrias	27
2.2.2 Tabelas de Produtos	29
2.3 Grupos	32
2.4 Rosetas	34
2.5 Frisos	35
2.5.1 Notação e classificação dos frisos	37
2.5.2 Os 7 grupos de frisos	38
2.6 Papéis de Parede	40
2.6.1 A Restrição Cristalográfica	42
2.6.2 Notação e tipos de papel de parede	48
2.6.3 Os 17 tipos de papéis de parede	49
3 Ladrilhamentos	57
3.1 Ladrilhamentos com polígonos regulares	57

4	Atividades sobre simetria	65
4.1	GeoGebra ©	65
	Referências Bibliográficas	71

Introdução

Durante nossa vida escolar, nos deparamos algumas vezes com a palavra **simetria**, tanto na Matemática como no estudo de outras disciplinas.

A palavra *Simetria* tem origem no grego *συμμετρία* (de *συν* "com" e *μετρον* "medida").

Mas, de uma maneira geral, temos uma concepção instintiva do significado de simetria. Muitos dos nossos ideais de beleza estão intimamente ligados a ela: quanto mais simétrica, mais bela. Podemos observar essa visão da simetria em diversas manifestações: nas Artes, Arquitetura, Música, Dança, Física, Biologia e claro, na Matemática.

Nosso objetivo nesse trabalho é, além de definir matematicamente uma figura simétrica, classificá-la de acordo com seu grupo de simetria, que são grupos compostos por conjuntos de isometrias planas.

Durante o desenvolvimento do trabalho, não iremos demonstrar todos os teoremas e definições, mas somente os mais importantes para a compreensão do mesmo.

Iniciamos falando sobre as isometrias planas e suas propriedades básicas, dando ênfase a algumas que serão importantes nas demonstrações seguintes.

Definiremos os tipos de isometrias no plano : *Translação*, *Rotação*, *Reflexão* e *Glissoreflexão*, determinando a expressão analítica de cada uma delas.

Em seguida, mostraremos alguns exemplos de que uma composição de isometrias planas sempre resulta em uma das quatro isometrias estudadas.

Assim, teremos a base necessária para estudar os diversos tipos de simetria em figuras planas. Iniciamos o estudo falando de figuras planas finitas, utilizando como exemplo dois polígonos regulares (quadrado e triângulo equilátero), encontrando o conjunto de simetrias de cada uma dessas figuras.

Apresentaremos então, o conceito matemático de grupo que, como dito acima será usado para classificar as figuras planas simétricas. Inicialmente vamos dividir as figuras em 3 grandes classes: *Rosetas*, *Frisos* e *Papéis de parede*.

As *Rosetas* são figuras cujo grupo de simetria contém um número finito

de isometrias. Nesse grupo não estão contidas translações e pode ser um grupo cíclico ou um grupo diedral.

Os *Frisos* são grupos de simetria que possuem translações em apenas uma direção, ou seja, as translações formam um subgrupo cíclico infinito. Veremos que existem 7 tipos de grupos de frisos.

Os *Papéis de parede* são grupos de simetria em que as translações são geradas por duas translações de amplitude mínima e linearmente independentes. Podemos classificá-los em 17 tipos diferentes e, assim como nos frisos, definiremos critérios para classificá-los num determinado grupo.

A seguir, faremos um breve estudo sobre o ladrilhamento com polígonos regulares, definindo a quantidade e os tipos de polígonos regulares que podem ser usados para ladrilhar o plano.

Por fim, apresentamos algumas atividades que podem ser desenvolvidas no Ensino Médio, com o software GeoGebra[®], que visam levar o estudante a tentar encontrar ele mesmo critérios de classificação para as simetrias de algumas figuras apresentadas.

Esperamos que esse trabalho possa oferecer informações importantes para aqueles que desejam estudar sobre simetria de figuras planas.

Capítulo 1

Isometrias em \mathbb{R}^2

Neste capítulo, vamos desenvolver o conceito matemático de *isometria* (iso = igual, metria = medida), mostrando as principais propriedades e demonstrando aquelas que serão utilizadas nos capítulos seguintes. A seguir, definiremos analiticamente as quatro isometrias planas que nos darão a base para o estudo das simetrias planas.

1.1 Conceitos e propriedades básicas

Denotando com $d(P, Q)$ a distância euclidiana entre os pontos P e Q , podemos definir isometria da seguinte maneira:

Definição 1.1 *Uma transformação T do plano é uma isometria quando:*

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

para quaisquer pontos P e Q .

Assim, T é uma isometria se preserva distâncias.

Dois figuras são ditas *congruentes* quando existe uma isometria que transforma uma na outra.

Vejamos algumas propriedades básicas das isometrias:

Propriedade 1.2 *Toda isometria leva pontos distintos em pontos distintos.*

Propriedade 1.3 *Toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares preservando a relação de um ponto estar entre outros dois e, consequentemente, leva retas em retas.*

Propriedade 1.4 *Toda isometria preserva ângulos. Isto é, se A, B e C são pontos não colineares, e $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ e $C' = T(C)$, então $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.*

Propriedade 1.5 *Toda isometria preserva a relação de paralelismo entre retas. Isto é, leva retas paralelas em retas paralelas.*

Propriedade 1.6 *Toda isometria preserva a relação de perpendicularismo entre retas. Isto é, leva retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Propriedade 1.7 *Toda isometria é uma transformação invertível e a inversa é também uma isometria.*

Propriedade 1.8 *A composta de duas isometrias é uma isometria*

Demonstração: Sejam $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrias.

Queremos mostrar que $d((T \circ S)(X), (T \circ S)(Y)) = d(X, Y)$, para todos $X, Y \in \mathbb{R}^2$.

Temos então que:

$$\begin{aligned} d((T \circ S)(X), (T \circ S)(Y)) &= d(T(S(X)), T(S(Y))) \\ &= d(S(X), S(Y)), \text{ pois } T \text{ é isometria} \\ &= d(X, Y) \text{ pois } S \text{ é isometria} \end{aligned}$$

Portanto, $T \circ S$ é uma isometria.

□

Propriedade 1.9 *Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria que fixa dois pontos distintos de uma reta ℓ , então T fixa todos os pontos de ℓ .*

Demonstração: Seja T uma isometria que fixa dois pontos distintos A e B de uma reta ℓ , ou seja $T(A) = A$ e $T(B) = B$.

Suponhamos que exista um ponto $C \in \ell$ tal que $C' = T(C) \neq C$. Nesse caso $d(A, C) = d(T(A), T(C)) = d(A, C')$, ou seja A está na mediana do segmento CC' .

Da mesma forma, teríamos que B estaria na mediana de CC' . Temos então, 2 casos a considerar:

1º) Se $CC' \subset \ell$ então A e B são pontos médios de CC' , logo $A = B$, uma contradição.

2º) Se $CC' \not\subset \ell$, então A e B são pontos de intersecção entre a mediana de CC' e ℓ . Como a intersecção entre duas retas é um ponto, temos novamente uma contradição, $A = B$.

Portanto, temos que T fixa qualquer ponto da reta ℓ .

□

Propriedade 1.10 *Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria que fixa três pontos não colineares, então T é a identidade.*

Demonstração: Seja T uma isometria que fixa três pontos não alinhados P, Q, R e seja X um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 .

Pela propriedade 1.9 segue que as retas PQ, PR e QR são fixadas pontualmente por T .

Tracemos então por X uma reta ℓ que intercepte o triângulo PQR em pelo menos dois pontos distintos. Como estes dois pontos são fixos por T , então ℓ também é fixa pontualmente por T .

Logo, $T(X) = X$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$, portanto T é a Identidade.

□

Propriedade 1.11 *Se duas isometrias coincidem em três pontos não colineares, então elas coincidem.*

Demonstração: Sejam T_1 e T_2 duas isometrias que coincidem em três pontos não colineares P, Q e R . Temos que:

$$\begin{aligned} T_1(P) &= T_2(P) = P' \\ T_1(Q) &= T_2(Q) = Q' \\ T_1(R) &= T_2(R) = R' \end{aligned}$$

Logo, se tomarmos:

$$\begin{aligned} T_1^{-1} \circ T_2(P) &= T_1^{-1}(P') = P \\ T_1^{-1} \circ T_2(Q) &= T_1^{-1}(Q') = Q \\ T_1^{-1} \circ T_2(R) &= T_1^{-1}(R') = R \end{aligned}$$

Assim, segue da propriedade 1.10 que:

$$T_1^{-1} \circ T_2 = I_d$$

Portanto, $T_1 = T_2$

□

1.2 Tipos de isometria no plano

1.2.1 Translação

Definição 1.12 Considere um vetor \vec{v} do plano. Uma translação de vetor \vec{v} é uma transformação $T_{\vec{v}}$ que a cada ponto P do plano faz corresponder um ponto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

Escrevemos a translação pelo vetor \vec{v} como:

$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$$

O vetor \vec{v} é denominado *vetor de translação*.

Vamos determinar a expressão analítica de uma translação de vetor \vec{v} .

Seja $P = (x, y)$ e $\vec{v} = (x_0, y_0)$. A translação $T_{\vec{v}}(P) = P'$ é dada por:

$$P' = T_{\vec{v}}(P) = (x + x_0, y + y_0)$$

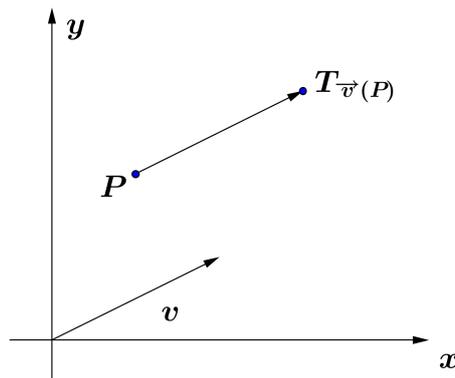


Figura 1.1: Translação $T_v(P)$

A translação é uma isometria. De fato, dados $P' = T_{\vec{v}}(P)$ e $Q' = T_{\vec{v}}(Q)$, temos que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v} = \overrightarrow{QQ'}$. Isto é, os segmentos PP' e QQ' são equipolentes¹ e, portanto, $PP'QQ'$ é um paralelogramo. Em particular, $d(P', Q') = d(P, Q)$.

Aplicando uma translação numa figura G do plano, obteremos uma figura G' , que é congruente a G , conforme a Figura 1.2:

$$G' = G + \vec{v}$$

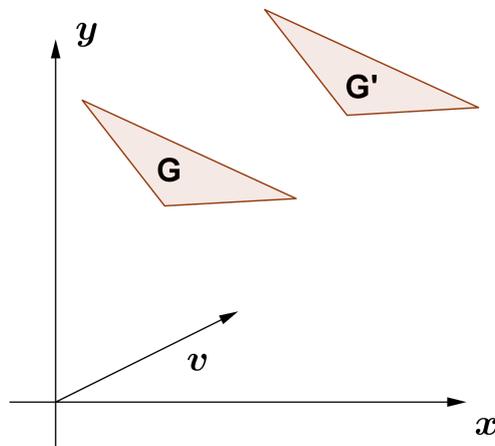


Figura 1.2: Translação de uma figura G por um vetor v

1.2.2 Rotação

Definição 1.13 Considere um ponto P_0 fixo do plano. Uma rotação de ângulo θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) em torno do ponto P_0 é uma transformação R_{θ, P_0} que a cada ponto P do plano faz corresponder um ponto P' desse mesmo plano, de forma que $P'P_0 = PP_0$, $\widehat{P'P_0P} = \theta$ e o sentido de P para P' é o sentido anti-horário.

O ângulo θ é chamado de *ângulo de rotação* e o ponto P_0 é o *centro de rotação*.

¹Dois segmentos orientados AB e CD , que não pertencem a mesma reta, são equipolentes quando têm a mesma direção, sentido e comprimento.

Queremos então determinar a expressão analítica de uma rotação de centro P_0 e ângulo θ . Vamos dividir em 2 casos:

1) $P_0 = (0, 0)$

Neste caso, temos um rotação $R_{\theta,0}$ em torno da origem. Sejam $O = (0, 0)$, $P = (x, y)$ um ponto, e $P' = R_{\theta,0}(P) = (x', y')$ sua imagem.

Se φ é o ângulo que o segmento OP faz como eixo OX no sentido positivo, então $P = (x, y) = (|OP| \cos \varphi, |OP| \sin \varphi)$ e, portanto:

$$R_{\theta,0}(x, y) = (|OP| \cos(\varphi + \theta), |OP| \sin(\varphi + \theta))$$

$$\iff R_{\theta,0}(x, y) = (|OP|(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi), |OP|(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi))$$

$$\iff R_{\theta,0}(x, y) = (|OP| \cos \theta \cos \varphi - |OP| \sin \theta \sin \varphi, |OP| \sin \varphi \cos \theta + |OP| \cos \varphi \sin \theta)$$

$$\iff R_{\theta,0}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta)$$

Logo,

$$R_{\theta,0}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

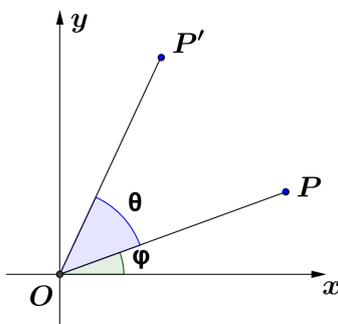


Figura 1.3: Rotação $R_{\theta,0}$

2) $P_0 = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$

Se $P = (x, y)$ é um ponto do plano, vamos determinar $R_{\theta,P_0}(P) = P'$ da seguinte maneira:

- Consideremos o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP_0}$ onde $O = (0, 0)$. Assim $\vec{v} = (x_0, y_0)$. Tomemos os eixos x' e y' como os eixos x e y respectivamente transladados pelo vetor \vec{v} . Então, determinaremos o ponto P_1 tal que $P_1 = P - \vec{v}$. Dessa

forma as coordenadas do ponto P_1 no sistema xy são iguais as coordenadas do ponto P no sistema $x'y'$.

Assim $P_1 = (x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0)$.

- Realizamos a rotação $R_{\theta,0}(P_1) = ((x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \operatorname{sen} \theta, (x - x_0) \operatorname{sen} \theta + (y - y_0) \cos \theta) = P_2$.

- Realizamos a translação $T_{\vec{v}}(P_2) = P'$, tal que o ponto P' será a rotação $R_{\theta,P_0}(P)$.

Assim:

$$R_{\theta,P_0}(P) = ((x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \operatorname{sen} \theta + x_0, (x - x_0) \operatorname{sen} \theta + (y - y_0) \cos \theta + y_0)$$

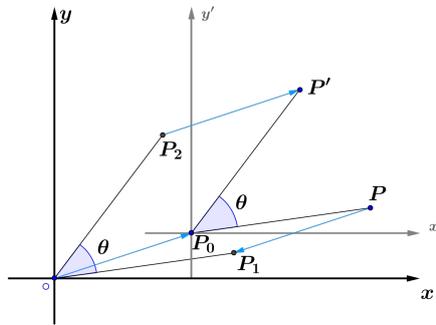


Figura 1.4: Rotação R_{θ,P_0}

Aplicando uma rotação numa figura G do plano, obteremos uma figura G' como ilustrado na Figura 1.5:

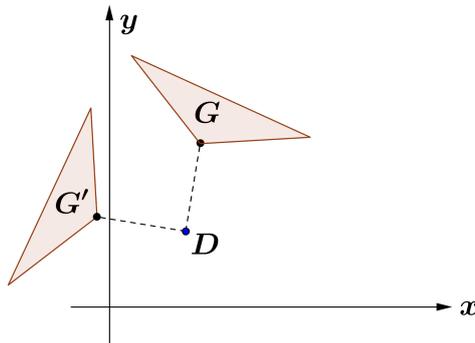


Figura 1.5: Rotação da figura G em torno do ponto D

1.2.3 Reflexão

Vamos encontrar a expressão analítica para a projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta ℓ . A partir dessa expressão definiremos a isometria de reflexão.

Definição 1.14 A projeção ortogonal de uma reta ℓ no plano é uma transformação designada $Proj_\ell$, que a cada ponto do plano associa o ponto P' onde a reta ℓ intersecta a reta perpendicular a ℓ que passa pelo ponto P .

Se ℓ é uma reta que faz um ângulo α , no sentido positivo, com o eixo OX , então $(\cos \alpha, \text{sen} \alpha)$ é um vetor paralelo a ℓ e $\ell : -x \text{sen} \alpha + y \cos \alpha = c$ é a sua equação cartesiana para algum $c \in \mathbb{R}$.

Se $P = (x_0, y_0)$ é um ponto do plano, então

$$\ell^\perp : x \cos \alpha + y \text{sen} \alpha = x_0 \cos \alpha + y_0 \text{sen} \alpha$$

é a reta perpendicular a ℓ que passa pelo ponto P_0 .

Então, se $P' = Proj_\ell(P) = (x', y')$, temos que (x', y') é a solução do sistema

$$\begin{cases} -x' \text{sen} \alpha + y' \cos \alpha = c \\ x' \cos \alpha + y' \text{sen} \alpha = x_0 \cos \alpha + y_0 \text{sen} \alpha \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$$P' = Proj_\ell(P) = (x_0 \cos^2 \alpha + y_0 \cos \alpha \text{sen} \alpha - c \text{sen} \alpha, x_0 \cos \alpha \text{sen} \alpha + y_0 \text{sen}^2 \alpha + c \cos \alpha)$$

Assim,

$$P' = Proj_\ell(P) = (x_0 \cos^2 \alpha + y_0 \cos \alpha \text{sen} \alpha, x_0 \cos \alpha \text{sen} \alpha + y_0 \text{sen}^2 \alpha) + c(-\text{sen} \alpha, \cos \alpha)$$

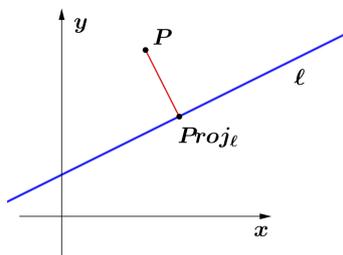


Figura 1.6: Projeção ortogonal $Proj_\ell$

Definição 1.15 Considere uma reta ℓ do plano. A reflexão F_ℓ em relação a reta ℓ é a transformação que a cada ponto P do plano associa o ponto $P' = F_\ell(P)$, de modo que ℓ é a mediatriz do segmento PP' .

Assim, $P' = (x', y')$ é o ponto do plano, tal que $Proj_\ell(P)$ é o ponto médio do segmento PP' .

Logo, se $P = (x, y)$ e $\ell : -x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha = c$, temos, pela definição 1.14, que:

$$F_\ell(x, y) = (x', y') = 2Proj_\ell(x, y) - (x, y)$$

$$\implies F_\ell(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \cos^2 \alpha + 2y \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - 2c \operatorname{sen} \alpha - x \\ 2x \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + 2y \operatorname{sen}^2 \alpha + 2c \cos \alpha - y \end{pmatrix}$$

$$\implies F_\ell(x, y) = \begin{pmatrix} x(2 \cos^2 \alpha - 1) + 2y \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - 2c \operatorname{sen} \alpha \\ 2x \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + y(2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1) + 2c \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\implies F_\ell(x, y) = (x \cos 2\alpha + y \operatorname{sen} 2\alpha, x \operatorname{sen} 2\alpha - y \cos 2\alpha) + 2c (-\operatorname{sen} \alpha, \cos \alpha)$$

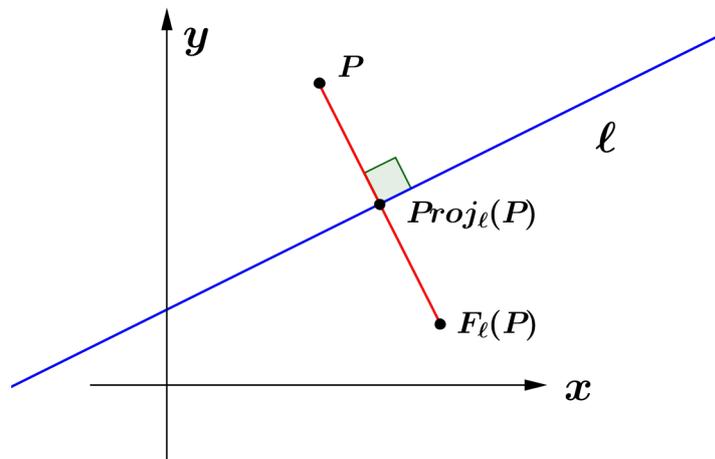


Figura 1.7: Reflexão F_ℓ

A reta ℓ é chamada de *eixo de reflexão*.

Aplicando uma reflexão numa figura G do plano, obteremos uma figura G' , que é congruente a G , como na Figura 1.8

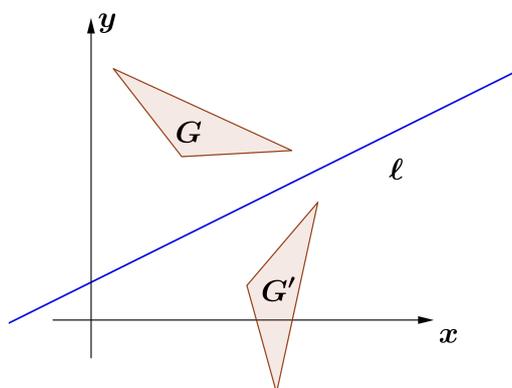


Figura 1.8: Reflexão da figura G em torno da reta ℓ

1.2.4 Glissoreflexão

Definição 1.16 Considere uma reta ℓ do plano e um vetor \vec{v} paralelo a ℓ . A glissoreflexão de vetor \vec{v} e eixo ℓ é a transformação $G_{\ell,v}$ que a cada ponto P do plano associa o ponto P' , que é obtido através da reflexão F_{ℓ} em torno da reta ℓ seguida da translação $T_{\vec{v}}$ ao longo do vetor \vec{v} .

Se $\ell : -x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha = c$ e $v = \lambda(\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, com $\lambda \neq 0$, temos que para todo $P = (x, y)$:

$$G_{\ell,v}(P) = (x \operatorname{cos} 2\alpha + y \operatorname{sen} 2\alpha, x \operatorname{sen} 2\alpha - y \operatorname{cos} 2\alpha) + 2c (-\operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} \alpha) + \lambda(\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$$

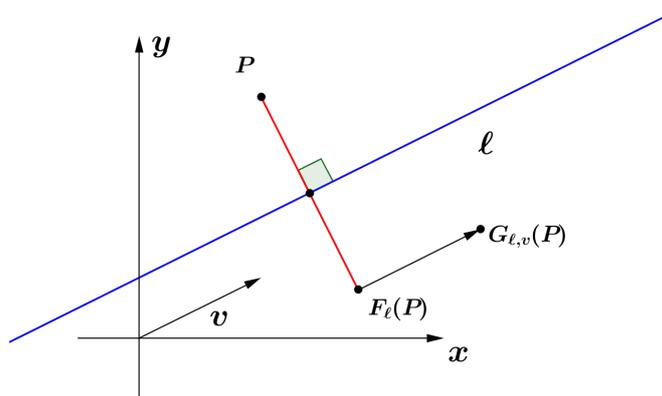


Figura 1.9: Glissoreflexão $G_{\ell,v}$

De modo análogo às isometrias anteriores, aplicando uma glissoreflexão a uma figura G do plano, obtemos uma figura G' que é congruente a figura G . É o que ilustra a Figura 1.10

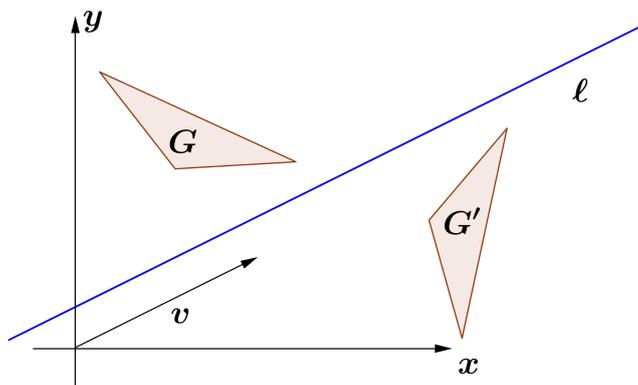


Figura 1.10: Glissoreflexão da figura G em torno da reta ℓ pelo vetor v

1.3 Composição de isometrias no plano

De acordo com a propriedade 1.8, provamos que a composta de duas isometrias é uma isometria. Pode-se provar que qualquer isometria do plano é de um dos quatro tipos estudados anteriormente.

Vamos então dar exemplo de duas composições de isometrias e determinar a isometria resultante.

1.3.1 Translação seguida de uma translação

Seja T_1 e T_2 , sendo T_1 uma translação da forma $P' = P + v_1$ e T_2 uma translação da forma $P'' = P' + v_2$. Aplicando T_1 seguida de T_2 num ponto P , temos:

(T_1) Transforma o ponto P em $P' = P + v_1$

(T_2) Transforma o ponto P' em $P'' = P' + v_2$. Como $P' = P + v_1$ temos que $P'' = P + v_1 + v_2$.

Fazendo $v_3 = v_1 + v_2$, temos que T_1 seguida de T_2 , pode ser definida como uma translação T_3 , sendo $T_3 = P + v_3$. Portanto, uma translação seguida de uma translação é uma translação.

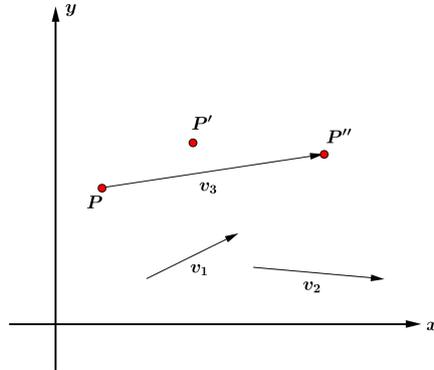


Figura 1.11: Composição $T_2 \circ T_1$

1.3.2 Translação seguida de uma rotação

Seja $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $P = (x, y)$, $T_{\vec{v}}$ uma translação onde $\vec{v} = (x_0, y_0)$ e uma rotação $R_{\theta, C}$, onde $C = (x_1, y_1)$ é o centro dessa rotação. Aplicando $T_{\vec{v}}$ seguida de $R_{\theta, C}$, num ponto P , temos que:

- Aplicando T ao ponto P temos:

$$T_{\vec{v}}(P) = P' = P + \vec{v} = (x + x_0, y + y_0)$$

- Em seguida aplicando $R_{\theta, C}$ ao ponto P' , temos que:

$$R_{\theta, C}(P') = P'' = \begin{pmatrix} ((x + x_0) - x_1) \cos \theta - ((y + y_0) - y_1) \operatorname{sen} \theta + x_1 \\ ((x + x_0) - x_1) \operatorname{sen} \theta - ((y + y_0) - y_1) \cos \theta + y_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

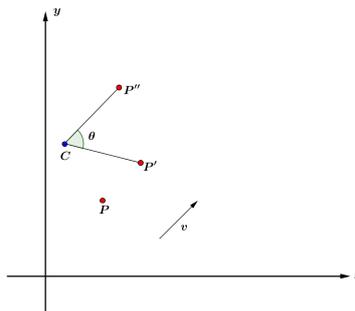


Figura 1.12: Composição $R_{\theta, C} \circ T_v$

Vamos mostrar que $R_{\theta, C}(P')$ é uma rotação de ângulo θ .

Para isso, precisamos encontrar um ponto $A(x_3, y_3)$ tal que $R_{\theta,C} \circ T_v = R_{\theta,A}$.

A rotação $R_{\theta,A}(P)$ é dada por:
 $R_{\theta,A}(P) = ((x-x_3) \cos \theta - (y-y_3) \operatorname{sen} \theta + x_3, (x-x_3) \operatorname{sen} \theta + (y-y_3) \cos \theta + y_3)$ **(2)**

Igualando **(1)** e **(2)**, temos que o ponto A será dado pela solução do sistema:

$$\begin{cases} x_3(1 - \cos \theta) + y_3 \operatorname{sen} \theta = (x_0 - x_1) \cos \theta - (y_0 - y_1) \operatorname{sen} \theta + x_1 \\ -x_3 \operatorname{sen} \theta + y_3(1 - \cos \theta) = (x_0 - x_1) \operatorname{sen} \theta + (y_0 - y_1) \cos \theta + y_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos o novo centro de rotação :

$$A = \left(x_1 - \frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}, y_1 - \frac{y_0}{2} + \frac{x_0}{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right)$$

Portanto, uma translação seguida de uma rotação de ângulo θ resulta numa rotação de ângulo θ .

A Figura 1.13 ilustra a composição como uma única rotação de centro A e ângulo θ .

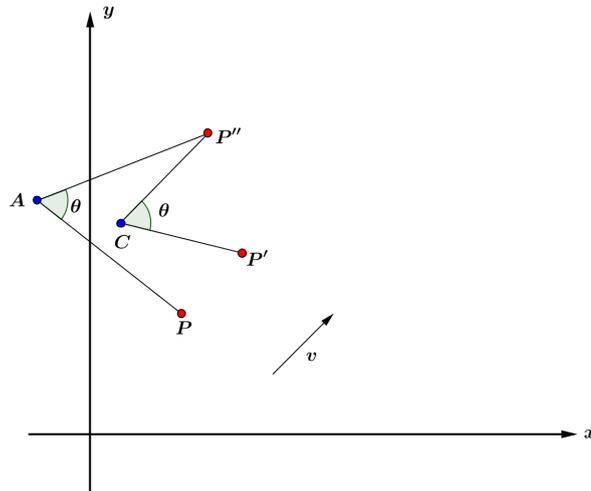


Figura 1.13: Rotação $R_{\theta,A}$

Capítulo 2

Simetrias

Neste capítulo, vamos desenvolver as ferramentas necessárias para classificar as figuras simétricas do plano. Iniciamos analisando os diferentes tipos de simetria em dois polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero. Em seguida, vamos definir grupo algébrico e veremos que as simetrias de uma figura plana formam um grupo.

Em seguida, vamos dividir as figuras planas em três tipos de classes: *Rosetas*, *Frisos* e *Papéis de Parede*, enunciando os teoremas e mostrando a classificação das figuras segundo seus grupos de simetria.

2.1 Simetrias Planas

Definição 2.1 *Uma simetria de uma figura $F \subset \mathbb{R}^2$ é uma isometria $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(F) = F$.*

Uma simetria de F é sempre uma bijeção de \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R}^2 , portanto se $g(F) = F$, também $g(\mathbb{C}F) = \mathbb{C}F$, em que $\mathbb{C}F$ designa o complementar de F . As simetrias de F coincidem com as simetrias do $\mathbb{C}F$.

A Identidade é a simetria trivial de qualquer figura e a única que preserva todas as figuras. *Figuras simétricas* são aquelas que possuem outras simetrias além da Identidade.

Vejamos alguns exemplos de figuras simétricas:

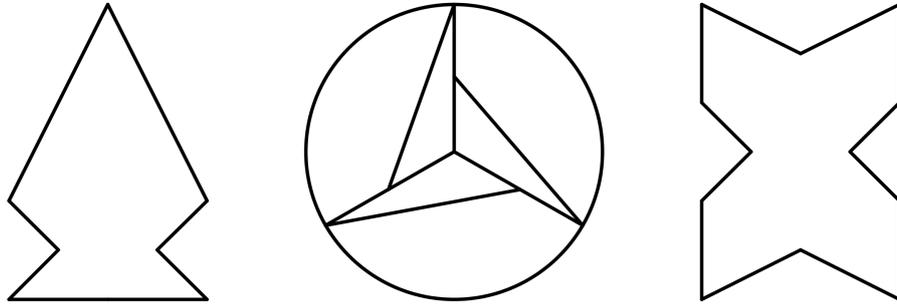
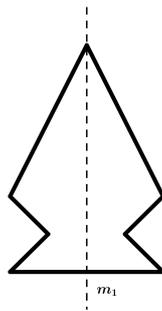
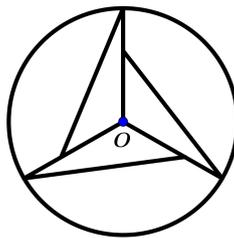


Figura 2.1: Figuras simétricas

As simetrias das figuras na Figura 2.1 são descritas da seguinte forma:

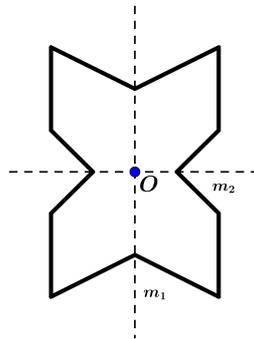


- 1) Identidade
- 2) Reflexão no eixo m_1



- 1) Identidade
- 2) Rotação de $\frac{1}{3}$ de volta ¹ e centro O
- 3) Rotação de $\frac{2}{3}$ de volta e centro O .

¹Indicaremos as medidas de rotação como frações de uma volta completa no sentido anti-horário



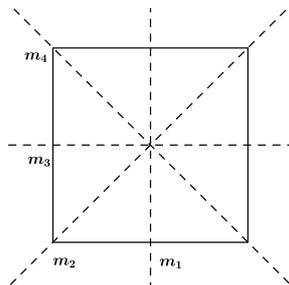
- 1) Identidade
- 2) Reflexão no eixo m_1
- 3) Reflexão no eixo m_2
- 4) Rotação de $\frac{1}{2}$ volta e centro O

Definição 2.2 *Uma figura simétrica é dita finita quando não tem nenhuma simetria de translação não trivial.*

2.2 Análise das simetrias

Nesta seção identificaremos as diversas simetrias do quadrado e do triângulo retângulo. Vamos determinar as tabelas de produto das simetrias desses polígonos e, através da análise das composições, determinar um processo de classificação dessas simetrias.

Vamos iniciar indicando as várias simetrias do quadrado:



- 1) Identidade
- 2) Rotação de $\frac{1}{4}$ de volta
- 3) Rotação de $\frac{1}{2}$ de volta
- 4) Rotação de $\frac{3}{4}$ de volta

- 5) Reflexão no eixo m_1
- 6) Reflexão no eixo m_2
- 7) Reflexão no eixo m_3
- 8) Reflexão no eixo m_4

Se considerarmos a identidade como uma rotação, a rotação de ângulo nulo, verificamos que o quadrado tem 4 simetrias de rotação e 4 simetrias de reflexão.

Seja m_n a reflexão do quadrado no eixo m_n e r^n a rotação de $\frac{n}{4}$ de volta do quadrado. A Figura 2.2 mostra o efeito de m_n e r^n :

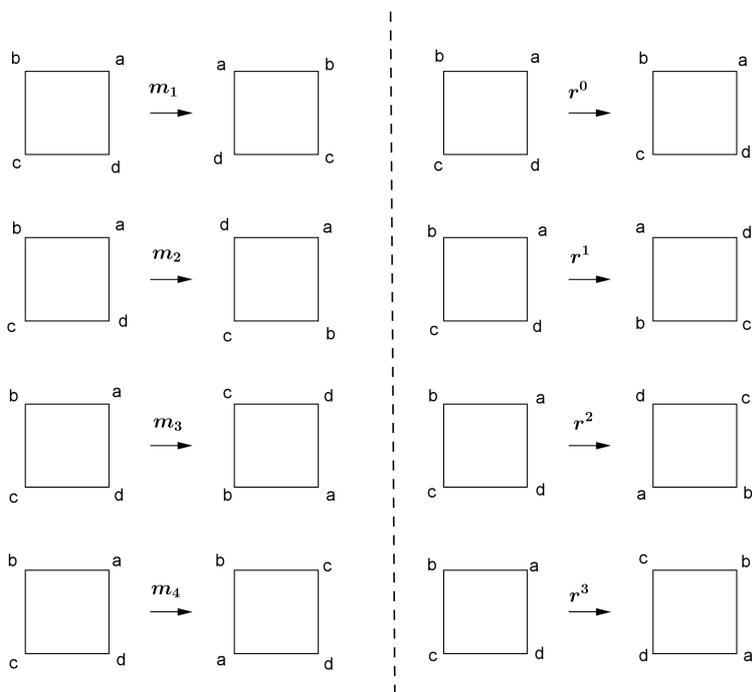


Figura 2.2: Simetrias do quadrado

De um modo geral, o polígono regular com n lados, tem exatamente n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão.

2.2.1 Composição de simetrias

Vamos agora mostrar um exemplo que compoendo duas simetrias do quadrado, o resultado é uma das oito simetrias indicadas anteriormente. Tomaremos como exemplo o quadrado, mas o raciocínio é análogo para os outros

polígonos regulares.

Usaremos a notação $r^1 m_4$ para escrever a composição $r^1 \circ m_4$.

Combinando os diagramas adequados da Figura 2.2, vamos determinar o efeito de $r^1 m_4$.

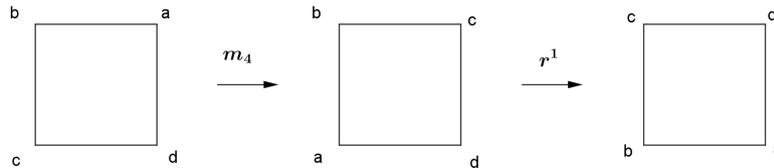


Figura 2.3: Simetria $r^1 m_4$

Observando a figura 2.2, verificamos que, de acordo com a propriedade 1.11, a simetria $r^1 m_4$ é igual à reflexão no eixo m_3 .

Vamos definir então as seguintes notações que serão utilizadas na identificação das simetrias dos polígonos regulares:

- 1 equivale a simetria identidade da figura
- r equivale a menor simetria de rotação de um polígono regular no sentido anti-horário. Para o quadrado r equivale a $\frac{1}{4}$ de volta, para o pentágono a $\frac{1}{5}$ de volta e assim por diante.
- r^n equivale a operar r um número n de vezes. Por exemplo, no quadrado r^2 equivale a $\frac{1}{2}$ volta. Observa-se que valem as propriedades da potenciação a saber: $r^a \cdot r^b = r^{a+b}$ e $r^0 = 1$.
- r^{-1} equivale a menor simetria de rotação da figura no sentido horário. Ou seja, r^{-1} é a rotação inversa a rotação de r .
- Utilizaremos m para designar a simetria de reflexão de eixo m . Vejamos alguns exemplos:

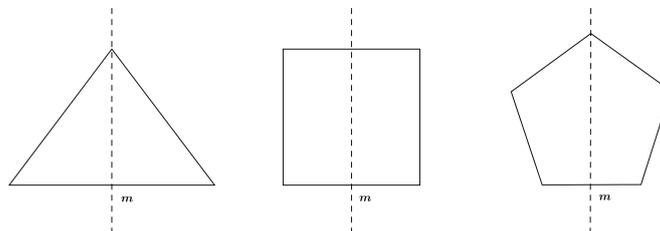


Figura 2.4: Reflexão de eixo m

- m^2 equivale a operar a reflexão m duas vezes. Portanto $m^2 = 1$.

Observe que $r^\ell = 1$ quando ℓ é o número de lados do polígono regular.

Nessa notação, as quatro simetrias de rotação do quadrado são escritas como $1, r, r^2$ e r^3 .

Dado um polígono de n lados as simetrias de rotação: $1, r, r^2, r^3, \dots$ e de reflexão m, mr, mr^2, \dots , são chamadas de simetrias na *forma-padrão*.

De acordo com a afirmação acima, as 8 simetrias do quadrado podem ser representadas por $1, r, r^2, r^3, m, mr, mr^2$ e mr^3 . Assim, as reflexões no eixos m_1, m_2, m_3 e m_4 da figura 2.2 são representadas respectivamente por m, mr, mr^2 e mr^3 .

É possível provar que essas oito simetrias são as únicas simetrias do quadrado.

Exemplo 2.3 Determinar qual das 8 simetrias é equivalente a r^2mr^3mr .

Utilizando os diagramas da figura 2.2, temos:

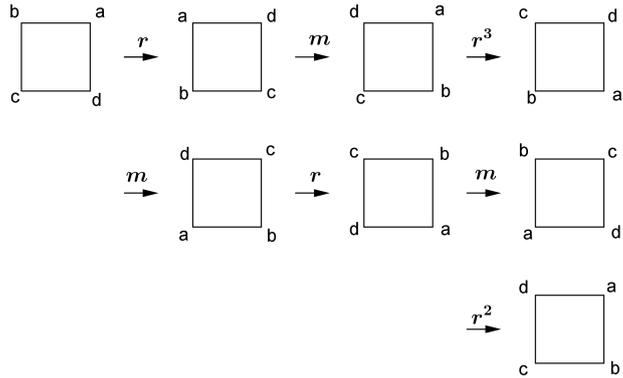


Figura 2.5: Simetria r^2mr^3mr

De acordo com a propriedade 1.11 concluímos que r^2mr^3mr é equivalente a simetria mr .

Mas, visto que o método acima exige um grande trabalho, precisamos determinar um método mais eficiente de identificar uma composição de duas ou mais simetrias. A próxima seção é dedicada a esse estudo.

2.2.2 Tabelas de Produtos

As tabelas de produtos de simetria têm como objetivo combinar duas simetrias de uma figura e escrever o resultado na forma padrão.

Vejamos uma tabela inicial de produtos das simetrias de um triângulo equilátero:

	1	r	r²	m	mr	mr²
1	1	r	r ²	m	mr	mr ²
r	r	r ²	r ³	rm	rmr	rmr ²
r²	r ²	r ³	r ⁴	r ² m	r ² mr	r ² mr ²
m	m	mr	mr ²	mm	mnr	mnr ²
mr	mr	mr ²	mr ³	mrm	mrmr	mrmr ²
mr²	mr ²	mr ³	mr ⁴	mr ² m	mr ² mr	mr ² mr ²

Figura 2.6: Tabela de Produtos - Simetrias do Triângulo Equilátero

Cada elemento da tabela representa a composição da simetria associada à linha pela simetria associada à coluna.

Entretanto, observamos que nem todos os elementos da tabela estão escritos na forma-padrão. Precisamos encontrar as simetrias na forma-padrão que são equivalentes a esses elementos.

De uma maneira geral, isso significa "mover o m " para a esquerda da representação.

Utilizaremos, então, a seguinte proposição:

Proposição 2.4 *Dado $n \geq 1$ e dado qualquer polígono regular de ℓ lados, com $\ell > n$, resulta*

$$r^n m = m r^{\ell-n}$$

onde r é a rotação de ângulo mínimo e m um dos eixos de reflexão do polígono.

Demonstração: Provaremos por indução.

Vamos mostrar que a proposição vale para $n=1$.

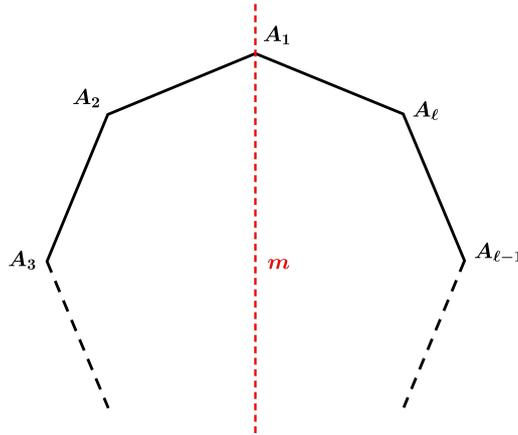
Queremos provar que:

$$r m = m r^{\ell-1}$$

Para mostrar que duas simetrias g e h são equivalentes, de acordo com a propriedade 1.11, basta provar que, para três pontos distintos A , B e C :

$$\begin{aligned}g(A) &= h(A) \\g(B) &= h(B) \\g(C) &= h(C).\end{aligned}$$

Tomemos o polígono regular de ℓ lados, sendo m um eixo de reflexão desse polígono.



Fazendo $g = rm$ e $h = mr^{\ell-1}$, temos que:

$$\begin{aligned}g(A_1) &= A_2 & h(A_1) &= A_2 \\g(A_2) &= A_1 & h(A_2) &= A_1 \\g(A_{\ell}) &= A_3 & h(A_{\ell}) &= A_3\end{aligned}$$

Logo, $g = h$

Assim a proposição vale para $n = 1$.

Suponha que vale para um certo n . Queremos provar que vale para $n + 1$ ou seja, que $r^{n+1}m = mr^{\ell-(n+1)}$

$$\begin{aligned}r^{n+1}m & \\ &= r^n \cdot r \cdot m \\ &= r^n \cdot m \cdot r^{\ell-1} \\ &= m \cdot r^{\ell-n} \cdot r^{\ell-1} \\ &= m \cdot r^{\ell-n-1} \cdot r^{\ell}\end{aligned}$$

Como $r^{\ell} = 1$ para todo polígono regular temos

$$\begin{aligned} &= m \cdot r^{\ell-n-1} \cdot 1 \\ &= m \cdot r^{\ell-n-1}\end{aligned}$$

□

Utilizando a proposição 2.4, podemos reescrever a tabela de produtos das simetrias do triângulo:

\triangle	1	r	r²	m	mr	mr²
1	1	r	r ²	m	mr	mr ²
r	r	r ²	1	mr ²	m	mr
r²	r ²	1	r	mr	mr ²	m
m	m	mr	mr ²	1	r	r ²
mr	mr	mr ²	m	r ²	1	r
mr²	mr ²	m	mr	r	r ²	1

Figura 2.7: Tabela de Produtos - Simetrias do Triângulo

Da mesma forma, podemos encontrar a tabela de produtos das simetrias do quadrado.

\square	1	r	r²	r³	m	mr	mr²	mr³
1	1	r	r ²	r ³	m	mr	mr ²	mr ³
r	r	r ²	r ³	1	mr ³	m	mr	mr ²
r²	r ²	r ³	1	r	mr ²	mr ³	m	mr
r³	r ³	1	r	r ²	mr	mr ²	mr ³	m
m	m	mr	mr ²	mr ³	1	r	r ²	r ³
mr	mr	mr ²	mr ³	m	r ³	1	r	r ²
mr²	mr ²	mr ³	m	mr	r ²	r ³	1	r
mr³	mr ³	m	mr	mr ²	r	r ²	r ³	1

Figura 2.8: Tabela de Produtos - Simetrias do Quadrado

Analisando as simetrias nos polígonos regulares e suas composições, podemos perceber que elas possuem uma estrutura de *grupo algébrico*. Nas seções seguintes, vamos definir *grupo* e identificar os diferentes grupos de simetria, de acordo com as isometrias que cada um deles possui.

2.3 Grupos

Definição 2.5 *Seja G um conjunto e $*$ uma operação binária definida sobre G . O par ordenado $(G, *)$ é um grupo se são satisfeitas as seguintes propriedades:*

• **Associatividade:** Para quaisquer elementos $a, b, c \in G$ temos que $(a * b) * c = a * (b * c)$.

• **Elemento Neutro:** Existe um elemento $e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$, para todo $a \in G$.

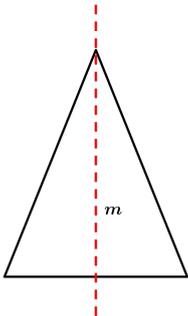
• **Elemento Inverso:** Para todo elemento $a \in G$, existe $a' \in G$, tal que $a * a' = a' * a = e$, onde e é o elemento neutro do grupo.

Para o estudo das simetrias, tomamos o conjunto G formado pelas simetrias de uma dada figura e a operação binária de composição de funções. O grupo G é chamado de grupo de simetria da figura.

A simetria identidade é o elemento neutro do grupo. Se S é uma simetria do grupo, a simetria S^{-1} é o seu elemento inverso no sentido algébrico.

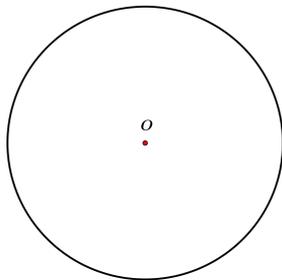
Denotando $\Omega(F)$ como o grupo de simetrias de uma figura F e I a simetria identidade, vamos analisar três exemplos:

Exemplo 1:



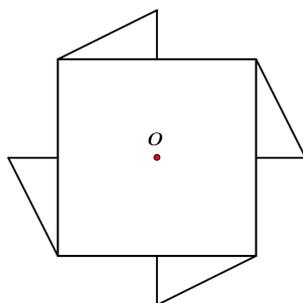
Para o triângulo acima, o grupo de simetrias é dado por $\Omega(F) = \{I, F_m\}$

Exemplo 2:



Para a circunferência acima, o grupo de simetrias é dado por $\Omega(F) = \{R_{\theta,O} \text{ com } 0 \leq \theta < 2\pi\} \cup \{F_\ell \text{ onde } \ell \text{ são todas as retas que passam por } O\}$.

Exemplo 3:



Para a figura acima, o grupo de simetrias é dado por $\Omega(F) = \{I, R_{\frac{\pi}{2},O}, R_{\pi,O}, R_{\frac{3\pi}{2},O}\}$.

Observação: O número de isometrias de uma figura pode ser finito, como nos exemplos 1 e 3, ou infinito, como no exemplo 2.

Iremos agora subdividir os grupos de simetrias planas em três classes: Rosetas, Frisos e Papéis de Parede. Identificaremos os tipos de grupos de simetria e enunciaremos os Teoremas de Classificação das figuras simétricas de cada classe.

2.4 Rosetas

Vamos agora classificar as simetrias que possuem grupos finitos formados apenas por rotações e reflexões.

Definição 2.6 Dizemos que um grupo de simetria de uma figura F fixa um ponto P , se qualquer isometria g do grupo é tal que $g(P) = P$.

Nos exemplos 2 e 3 da seção anterior, verificamos que o ponto O do plano se mantém fixo por qualquer isometria do grupo de simetria da figura. Já no exemplo 1, qualquer ponto P da reta m se mantém fixo.

Definição 2.7 Uma figura cujo grupo de simetria é finito é chamada de roseta.

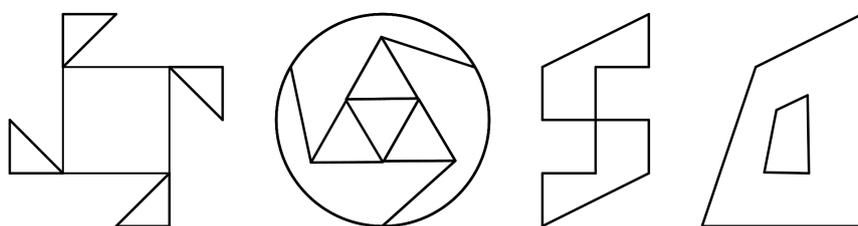
Pode se provar que um grupo finito de simetrias sempre possui ponto fixo.

A seguir, enunciaremos o Teorema de Classificação das Rosetas

Teorema 2.8 *Se G é um grupo de simetria de uma roseta, então G é um grupo cíclico ou um grupo diedral. Mais especificamente, se G é formado por n rotações, então é um grupo cíclico de ordem n . Se G é formado por n rotações e n reflexões, então é um grupo diedral de ordem $2n$.*

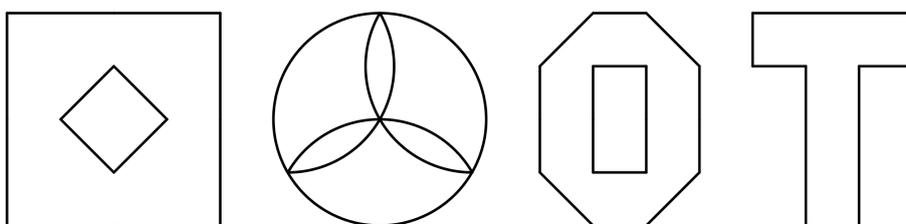
Os grupos cíclicos de ordem n são representados por C_n e os grupos diedrais de ordem $2n$ são representados por D_n .

As figuras seguintes são exemplos de rosetas do tipo C_4 , C_3 , C_2 e C_1 respectivamente:



As rosetas do tipo C_1 têm apenas a Simetria Identidade como única simetria.

As figuras seguintes são exemplos de rosetas do tipo D_4 , D_3 , D_2 e D_1 , respectivamente:



Uma roseta do grupo D_1 também é definida com tendo *Simetria Bilateral*.

Observação: Os grupos C_n e D_n com $n \geq 2$ possuem um único ponto fixo.

2.5 Frisos

Na seção anterior estudamos figuras que não têm simetria de translação. Agora abordaremos os frisos: figuras que possuem grupos com simetria de

translação em uma única direção. As figuras seguintes apresentam alguns exemplos desses casos:

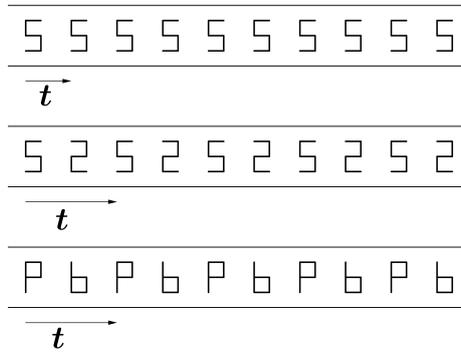


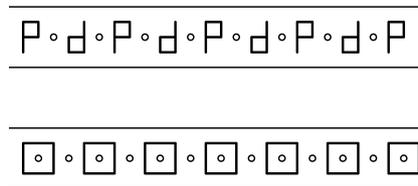
Figura 2.9: Exemplos de Frisos

Para o estudo dos frisos, vamos adotar a seguinte notação:

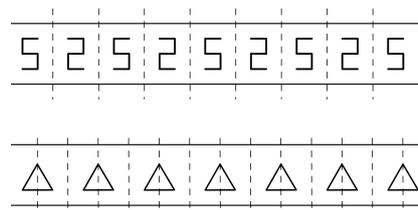
- t representa a menor simetria de translação para a direita.
- t^{-1} é o inverso de t .

Vamos estudar os frisos, de acordo com os seus grupos de simetria.

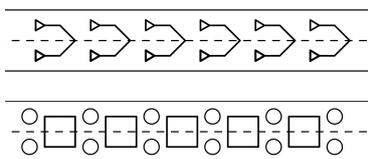
Nas figuras abaixo, os frisos tem simetria de rotação e o sinal \circ indica os centros de rotação:



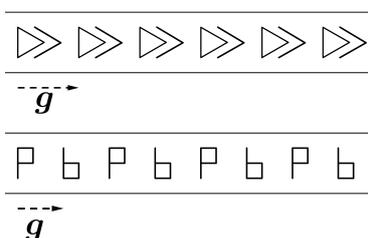
As figuras seguintes mostram exemplos de frisos com simetria de reflexão vertical:



As figuras abaixo mostram exemplos de frisos com simetria de reflexão horizontal:



Por fim, as figuras seguintes mostram exemplos de frisos com simetria de glissoreflexão:



Adotaremos g como a menor simetria de glissoreflexão para a direita.

2.5.1 Notação e classificação dos frisos

Um grupo de friso, por definição, deve ter simetria de translação em uma única direção. É também possível que tenha simetria de glissoreflexão, de rotação, reflexão horizontal ou reflexão vertical - mas nem todas as combinações dessas simetrias podem ocorrer.

Existem várias notações utilizadas para classificar os tipos de frisos. Utilizaremos a notação standard cristalográfica, que é constituída por 4 símbolos, que são:

(A) **1º símbolo**

- **p** é igual para todos os tipos de frisos e representa a repetição na direção horizontal (translação) características deste tipo de padrão.

(B) **2º símbolo**

- **m** - o friso tem reflexão de eixo vertical
- **1** - o friso não tem reflexão de eixo vertical

(C) **3º símbolo**

- **m** - o friso tem reflexão de eixo horizontal
- **a** - o friso tem glissoreflexão mas não tem reflexão horizontal
- **1** - o friso não tem reflexão de eixo horizontal nem glissoreflexão.

(D) **4º símbolo**

- **2** - existe rotação (meia-volta)

- 1 - não existe rotação.

Vamos então, enunciar o Teorema de Classificação dos Frisos, utilizando a notação standard cristalográfica:

Teorema 2.9 *Seja G o grupo de simetrias de um friso. Então G pode ser classificado em 7 tipos diferentes de acordo com as simetrias que o compõem, a saber: $p111$, $pm11$, $p1m1$, $p1a1$, $pma2$, $pmm2$ e $p112$.*

Podemos utilizar o fluxograma abaixo como algoritmo para classificar os 7 grupos de frisos:

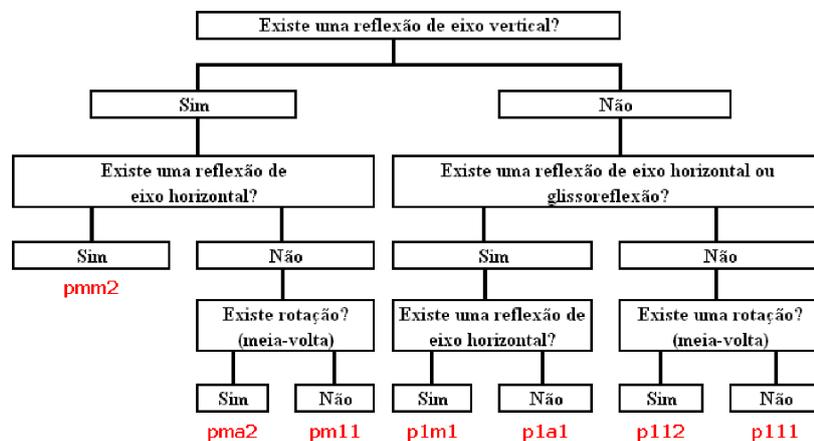


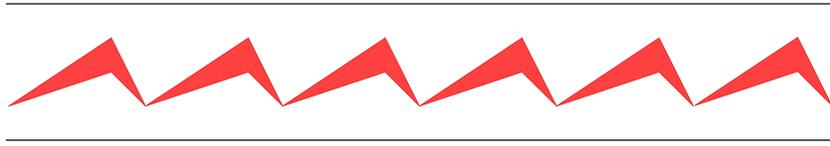
Figura 2.10: Algoritmo de classificação dos frisos

2.5.2 Os 7 grupos de frisos

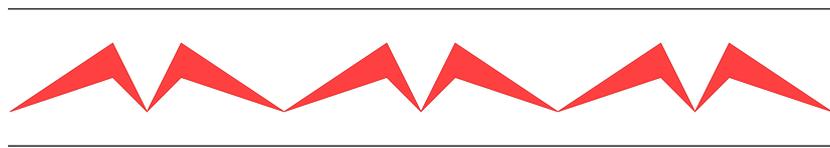
Vamos ilustrar os sete grupos de friso a partir do mesmo padrão:



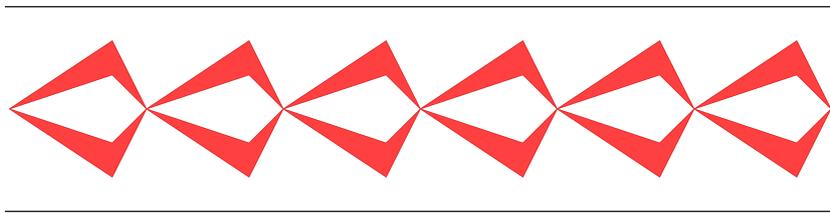
1. $p111$



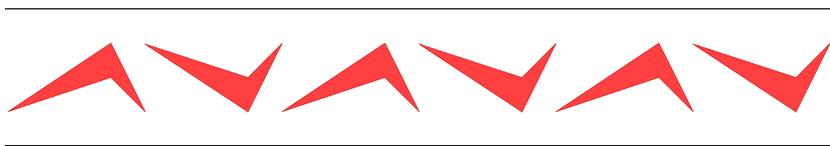
2. $pm11$



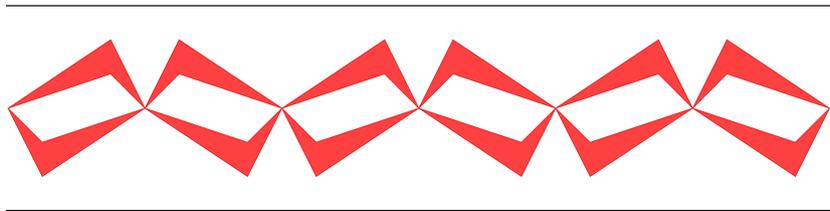
3. $p1m1$



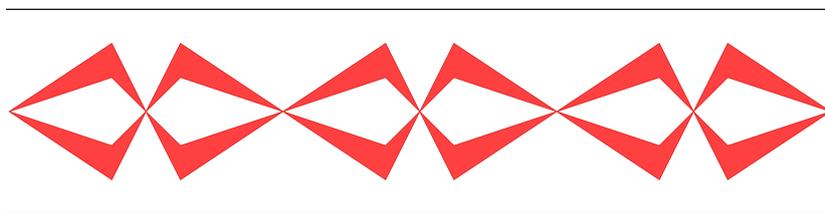
4. $p1a1$



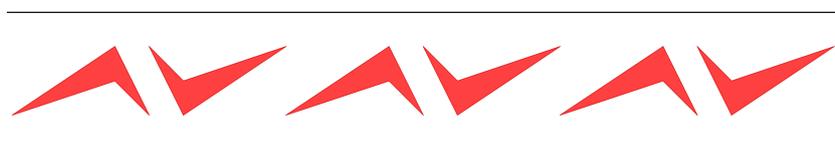
5. $pma2$



6. $pmm2$



7. $p112$



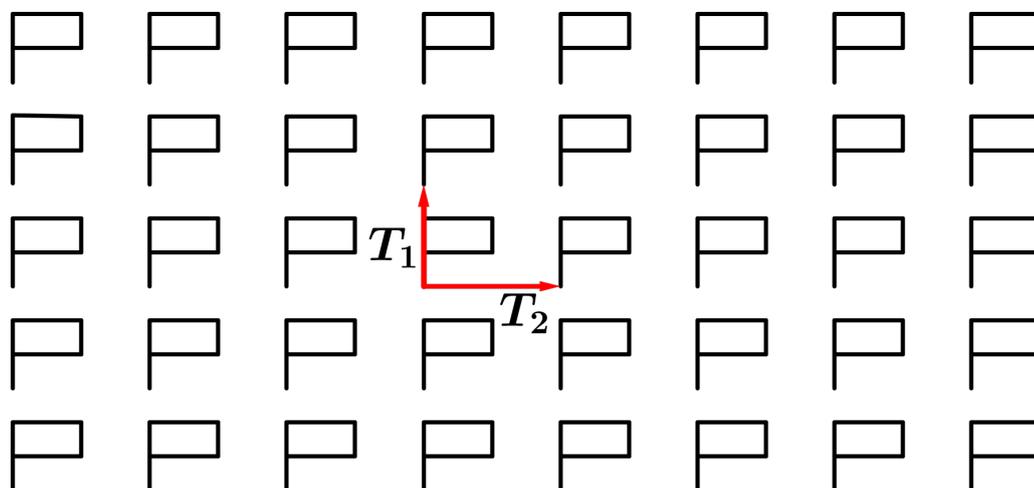
2.6 Papéis de Parede

Estudaremos agora os grupo de papéis de parede, que são grupos que possuem isometrias de translações em mais de uma direção. Estudaremos o Teorema da Restrição Cristalográfica, que afirma que os centros de rotação de um grupo de papel de parede podem ser somente de ordem 2,3,4 ou 6. A seguir, utilizaremos a notação cristalográfica para definir e classificar os 17 tipos de papéis de parede e daremos um exemplo de cada um deles.

Definição 2.10 *Um grupo de isometrias G é chamado de grupo cristalográfico se, e somente se, o subgrupo de todas as translações de G é gerado por duas translações linearmente independentes.*

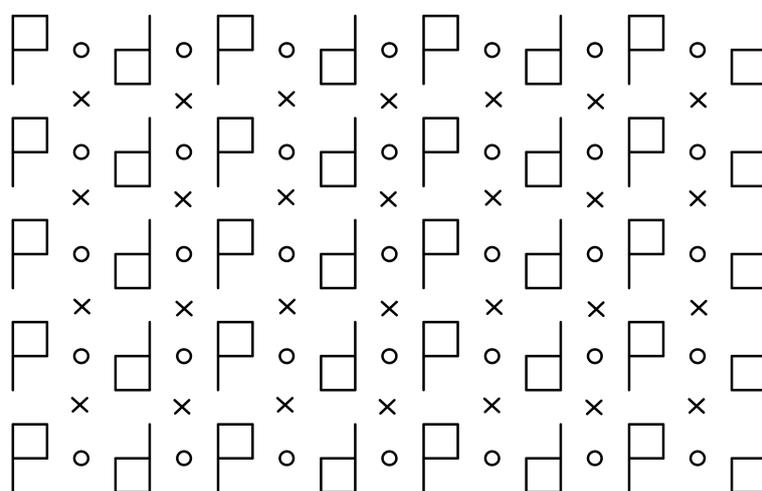
Dados duas translações T_1 e T_2 denotaremos como $\langle T_1, T_2 \rangle$ o grupo das isometrias de translação geradas por T_1 e T_2 . Assim, qualquer grupo de papel de parede G pode ser considerado como um grupo de isometrias cujas translações estão em um subgrupo do tipo $\langle T_1, T_2 \rangle$.

A figura abaixo mostra um exemplo de papel de parede gerado por T_1 e T_2 :



Uma dos critérios importantes para classificar os papéis de parede é a existência ou não de simetria de rotação no mesmo. Por isso, vamos estudar a simetria de rotação em um papel de parede.

Inicialmente, vamos construir um papel de parede com simetria de rotação de $\frac{1}{2}$ volta:

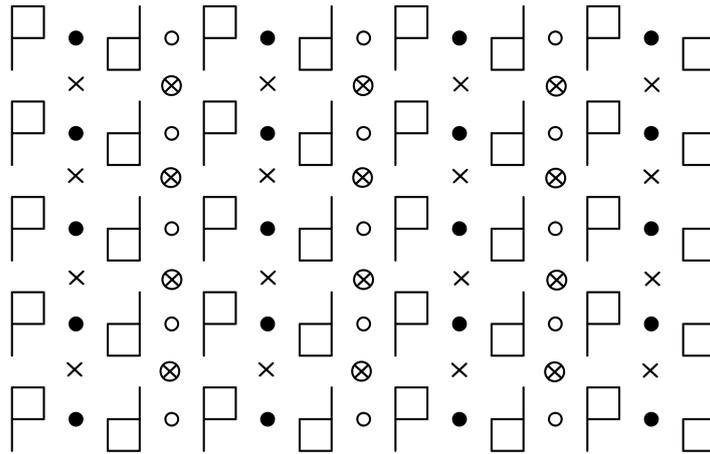


Os símbolos \circ e \times indicam alguns dos centros de rotação (simetria de rotação de $\frac{1}{2}$ volta) do papel de parede.

Vamos então contar os centros de rotação num papel de parede. Apesar de parecer absurdo, já que os mesmos são infinitos, usamos a idéia de simetria para distinguir os diferentes centros de rotação.

Definição 2.11 *Dois centros de rotação A e B num papel de parede são equivalentes, quando existe uma simetria g do papel de parede tal que $g(A) = B$.*

No exemplo abaixo, os centros de rotação \bullet são todos equivalentes uns aos outros, assim como os centros de rotação \circ , \times e \otimes .



Cada simetria de rotação tem um centro. Vamos analisar quais rotações podem ocorrer para cada um deles. Se a menor simetria de rotação com esse centro é a rotação de $\frac{1}{2}$ volta, diz-se que o centro de rotação tem ordem 2; se a menor rotação é de $\frac{1}{3}$ de volta, então o centro de rotação é de ordem 3 e assim por diante. A próxima seção será dedicada ao estudo dos possíveis valores dos centros de rotação.

2.6.1 A Restrição Cristalográfica

Definição 2.12 *Sejam G um grupo cristalográfico e P um ponto no plano, o **reticulado** por P determinado pelo grupo G é o conjunto de todas as imagens de P pelas translações de G .*

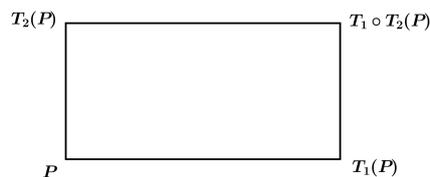


Figura 2.11: Quadrilátero

Como toda translação de um grupo de papel de parede é da forma $T_2^j \circ T_1^i$, então todos os pontos $A_{i,j}$ formam um reticulado translação, onde $A_{i,j} = T_2^j \circ T_1^i$.

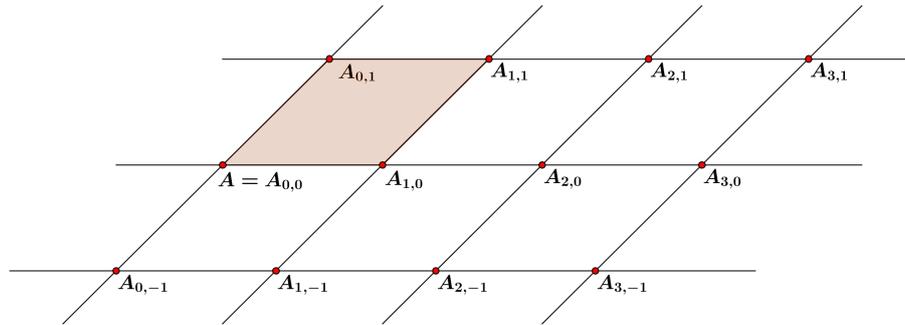


Figura 2.12: Reticulado Translação

Utilizaremos algumas definições para classificar os grupos cristalográficos:

Definição 2.13 *Seja G um subgrupo cristalográfico com subgrupo de translações dado por $\langle T_1, T_2 \rangle$, uma célula unitária determinada por G com respeito ao ponto $A_{i,j}$ é um quadrilátero com vértices $A_{i,j}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$.*

Uma célula unitária é sempre uma região do plano determinada por um paralelogramo.

Um reticulado com uma célula unitária retangular é chamado *retangular*, um reticulado com uma célula unitária rômbrica é chamado *rômbrico*².

Definição 2.14 *Seja G um grupo cristalográfico, dotado de uma reflexão F_ℓ . Seja A um ponto em ℓ e T_{AP} uma translação em G . Dizemos que T_{AP} é uma translação de amplitude mínima se, e somente se, para toda translação T_{CD} em G tivermos $\|\vec{AP}\| \leq \|\vec{CD}\|$.*

Definição 2.15 *Uma isometria é ímpar quando é dada pela composição de um número ímpar de reflexões e par quando é dada por um número par de reflexões. Portanto, temos que as reflexões e glissoreflexões são isometrias ímpares e as translações e rotações são isometrias pares.*

Proposição 2.16 *Se G um grupo cristalográfico contém isometrias ímpares, então o reticulado translação é rômbrico ou retangular*

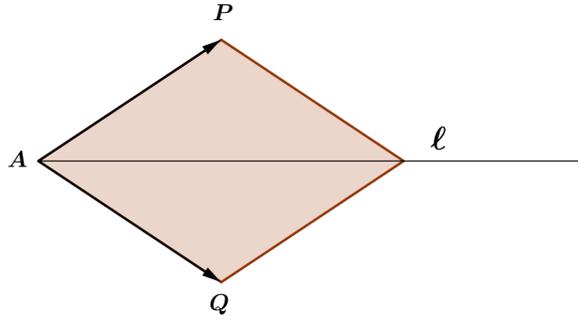
²Um quadrilátero rômbrico é um quadrilátero com todos os lados iguais, mas não é um quadrado

Demonstração:

Suponhamos $F_\ell \in G$, vamos mostrar que ℓ é paralela a uma diagonal de uma célula unitária rômbrica ou que ℓ é paralela a um lado de uma célula unitária retangular.

Sejam A um ponto em ℓ e T_{AP} uma translação de amplitude mínima em G . Vamos analisar 2 casos:

1º caso - $AP \neq \ell$ e $AP \not\perp \ell$, consideremos então $Q = R_\ell(P)$. Vemos então que $R_\ell \circ T_{AP} \circ R_\ell = T_{AQ}$, então temos que $T_{AQ} \in G$.



Como $AP = AQ$ e A, P, Q não são colineares, temos que as translações de G estão no conjunto $\langle T_{AP}, T_{AQ} \rangle$.

Além disso, $T_{AP}(Q) = B \in \ell$ e $ABPQ$ é uma célula unitária rômbrica do reticulado translação de G , e como A e $B \in \ell$ e AB é a diagonal desta célula, segue que ℓ contém a diagonal da célula unitária rômbrica.

2º caso - $AP \subset \ell$ ou $AP \perp \ell$. Consideremos a a reta perpendicular a reta que contém o segmento AP em A e sejam m a mediatriz de AP e $n = F_a(m)$.

Considerando T_{AM} a translação de amplitude mínima em G que não está em $\langle T_{AP} \rangle$, temos que M está em m, n ou entre m e n , pois caso contrário $T_{AP}^{\pm 1} \circ T_{AQ}$ é menor que T_{AM} .

Logo, considerando T_{AM} e sua inversa, podemos supor, sem perda de generalidade que T_{AM} é tal que M está em m , em a ou entre m e a .

Seja $S = F_\ell(M)$, podemos assumir que M está entre m e a .

Se $\ell = AP$, então $T_{AS} \circ T_{AM}$ é uma translação em G menor que T_{AP} ; se $\ell \perp AP$, então $T_{SA} \circ T_{AM}$ é uma translação em G menor que T_{AP} .

Portanto, devemos ter M em m ou em a . Se M está em m , então $\langle T_{AM}, T_{AS} \rangle = \langle T_{AP}, T_{AM} \rangle$, já que $T_{AS} \circ T_{AM} = T_{AP}$.

Logo, ℓ é paralela a diagonal de uma célula unitária rômbrica com relação ao ponto A e gerando translações T_{AM} e T_{AS} .

Por outro lado, se M está em a , então $\langle T_{AP}, T_{AM} \rangle$ é o grupo de todas as translações em G e ℓ é paralela ao lado de uma célula unitária retangular para G .

Assim, segue o seguinte corolário:

Corolário 2.17 *Se F_ℓ está em um grupo de papel de parede G , então ℓ é paralela a diagonal de uma célula unitária rômbrica para G ou ℓ é paralela ao lado de uma célula unitária retangular para G .*

Suponhamos agora, que o grupo de papel de parede G não contém reflexões mas contém uma reflexão com deslizamento com eixo ℓ .

Teorema 2.18 *Se um grupo de papel de parede G contém uma glissoreflexão, então G tem um reticulado translação que é rômbrico ou retangular.*

Seja G_ℓ uma glissoreflexão de eixo ℓ em um grupo de papel de parede G .

O menor grupo que contém uma reflexão com deslizamento e uma translação é o grupo de friso do tipo **plal** que contém uma glissoreflexão G_ℓ de eixo ℓ e G_ℓ^2 uma translação ao longo de ℓ .

Portanto, podemos supor que G_ℓ^2 é a translação de amplitude mínima que fixa ℓ .

Sejam $A \in \ell$ e a a reta perpendicular a ℓ em A , $m = G_\ell(a)$, $p = G_\ell^2(a)$ e $P = G_\ell^2(A)$. Temos então que T_{AP} é a translação de amplitude mínima em G_ℓ .

Seja T_{AB} a translação de amplitude mínima em G que não está em $\langle G_\ell^2 \rangle$, já que $T_{AP}^{\pm 1} \circ T_{AB}$ não pode ser menor que T_{AB} , podemos supor, sem perda de generalidade, que B está em a ou entre a e p .

Se B está em a , então G tem um reticulado translação retangular e ℓ é paralela ao lado de uma célula unitária retangular.

Se B está entre a e p , considerando $C = F_\ell(b)$, então T_{AC} está em G , pois $T_{AC} = G_\ell \circ T_{AB} \circ G_\ell^{-1}$.

Portanto, $T_{AC} \circ T_{AB} = G_\ell^2$ e B está em m .

Logo, ABPC é uma célula unitária rômbrica com ℓ contendo uma diagonal.

□

Se uma glissoreflexão G_ℓ leva o ponto A ao ponto P no reticulado translação determinado por A para um grupo de papel de parede G , então G_ℓ seguida pela T_{AP} deve ser uma reflexão, pois a composição $G_\ell \circ T_{AP}$ é uma isometria ímpar fixando o ponto A . Em particular, isso prova que:

Teorema 2.19 *Se uma glissoreflexão em um grupo de papel de parede G fixa um reticulado translação para G , então G contém uma reflexão.*

Assim, concluímos os resultados sobre grupos cristalográficos que contêm isometrias ímpares e translações. Analisemos agora, os grupos desse tipo que contêm rotações.

Seja um grupo G de isometrias que contém rotações, dizemos que um ponto P é um n -centro de G se, e somente se, o subgrupo das rotações de G com centro em P é um grupo cíclico finito.

Essa afirmação pode ser traduzida da seguinte forma: P é n -centro de $G \Leftrightarrow$ o subgrupo $H = \{R_{\theta, P} \in G; 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = C_n$ para algum $n > 1$.

Assim, seja P um n -centro de um grupo de simetria $\Omega(F)$ de uma figura F , então P é chamado n -centro de F ou n -centro de simetria de F .

É fácil verificar a seguinte proposição:

Proposição 2.20 *Seja P um n -centro de um grupo cristalográfico G . Se Q é a imagem de P por uma isometria de G , então Q é um n -centro de G .*

Proposição 2.21 *Se ℓ é um eixo de simetria de uma figura F e m é a imagem de ℓ por alguma isometria do grupo $\Omega(F)$, então m é um eixo de simetria de F .*

Teorema 2.22 *Se $R_{\frac{2\pi}{n}, A}$ e $R_{\frac{2\pi}{n}, P}$, com $P \neq A$ e $n > 1$, estão em um grupo de papel de parede G , então $2AP$ não é menor que o comprimento da translação de amplitude mínima em G .*

Demonstração:

Suponhamos que as rotações $R_{\frac{2\pi}{n}, A}$ e $R_{\frac{2\pi}{n}, P}$, com $P \neq A$ e $n > 1$ estão em um grupo de papel de parede G . Então G contém a composição $R_{\frac{2\pi}{n}, P} \circ R_{-\frac{2\pi}{n}, A}$ é uma translação não trivial $T_2^j \circ T_1^i$ para algum i e j .

Assim,

$$R_{\frac{2\pi}{n}, P} = T_2^j \circ T_1^i \circ R_{\frac{2\pi}{n}, A} \text{ e}$$

$$R_{\frac{2\pi}{n}, P}(A) = T_2^j \circ T_1^i \circ R_{\frac{2\pi}{n}, A}(A) = T_2^j \circ T_1^i(A) = A_{ij}$$

Portanto P é ponto médio de A e A_{ij} (quando $n = 2$) ou então $\triangle APA_{ij}$ é isósceles.

Pela desigualdade triangular temos ainda que $2AP = AP + PA_{ij} \geq AA_{ij} > 0$, desta forma, $2AP$ não é menor que o comprimento da translação de amplitude mínima. \square

O teorema acima mostra que:

1. Dois n -centros para um mesmo n , não podem estar próximos.
2. Um 2-centro e um 4-centro não podem estar próximos.
3. Um 3-centro e um 6-centro não podem estar próximos.
4. Um 2-centro e um 6-centro não podem estar próximos.

Utilizaremos então a conclusão (1) para mostrar que os possíveis valores de n tal que existe um n -centro em um grupo de papel de parede G são restritos.

Teorema 2.23 (Teorema da Restrição Cristalográfica)

Se P é um n -centro para um grupo de papel de parede, então n é igual a 2, 3, 4 ou 6.

Demonstração

Suponhamos que um ponto P é um n -centro para um grupo de papel de parede G .

Consideremos Q um n -centro para algum n , com a mínima distância possível de P com $P \neq Q$, a existência do ponto Q é assegurada pelos 2 teoremas anteriores.

Sejam $R = R_{Q, \frac{2\pi}{n}}(P)$ e $S = R_{R, \frac{2\pi}{n}}(Q)$, logo R e S são n -centros, e $PQ = QR$ e $RQ = RS$.

Se $S = P$, então $n = 6$, conforme a figura abaixo:

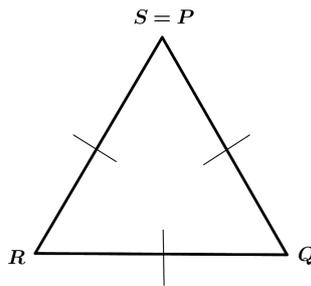


Figura 2.13: Caso $n=6$

Se $S \neq P$, então devemos ter $SP \geq PQ = RQ$, portanto, se $S \neq P$, então $n \leq 4$.

Assim concluímos que $n = 2, 3, 4$ ou 6 .

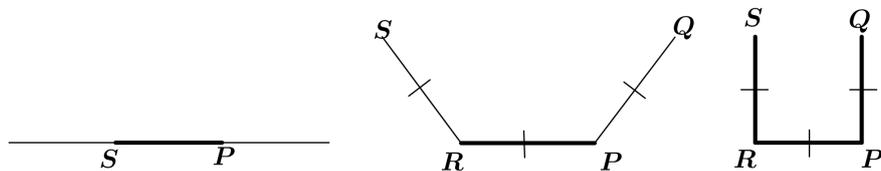


Figura 2.14: Caso $n = 2, 3$ e 4 respectivamente

2.6.2 Notação e tipos de papel de parede

Utilizaremos a notação cristalográfica para a classificação dos 17 tipos de papéis de parede. Ela é constituída da seguinte maneira:

(A) **1º símbolo**

- **p**: utilizado quando temos uma célula unitária simples.
- **c**: utilizado quando temos uma célula unitária de face centrada.

(B) **2º símbolo**

• **n**: dígito que representa a maior ordem de simetria rotacional. Como provado na seção anterior pode ser 1 (nenhuma rotação), 2, 3, 4 ou 6.

(C) **3º e 4º símbolos**

- **m**: o papel de parede possui reflexão
- **g**: o papel de parede possui glidereflexão
- **1**: o papel de parede não possui reflexão nem glissoreflexão.

Vamos agora enunciar o Teorema de Classificação dos papéis de parede, utilizando a notação standard cristalográfica.

Teorema 2.24 *Seja G o grupo de simetria de um papel de parede. Então G pode ser classificado em 17 tipos diferentes de grupos de acordo com as isometrias que o compõem, a saber: $p1$, $p2$, pm , pg , cm , pmm , pmg , pgg , cmm , $p4$, $p4m$, $p4g$, $p3$, $p31m$, $p6$ e $p6m$.*

Utilizando a tabela abaixo, podemos realizar um algoritmo para a classificação dos papéis de parede:

Menor simetria de rotação	Existe uma reflexão?			
	Sim		Não	
$\frac{1}{6}$	p6m		p6	
$\frac{1}{4}$	Há eixos de reflexão que se intersectam a 45°?			
	Sim: p4m		Não: p4g	
$\frac{1}{3}$	Há centros de rotações fora dos eixos de reflexão?			
	Sim: p31m		Não: p3m1	
$\frac{1}{2}$	Há eixos de reflexão perpendiculares			Existe uma glissoreflexão?
	Sim		Não	
	Há centros de rotações fora dos eixos de reflexão?		pmg	Sim
Sim: cmm Não: pmm		pgg		p2
Nenhuma	Há eixos de glissoreflexão fora dos eixos de reflexão?			Há glissoreflexões?
	Sim: cm		Não: pm	

Figura 2.15: 17 tipos de papéis de parede

2.6.3 Os 17 tipos de papéis de parede

Vejamos algumas características dos 17 grupos de papéis de parede.

1. **p1** - Os dois vetores geradores T_1 e T_2 podem ser inclinados em qualquer ângulo um em relação ao outro.
2. **p2** - Assim como o anterior, os dois vetores geradores T_1 e T_2 podem ser inclinados em qualquer ângulo um em relação ao outro.
3. **pm** - Os eixos de reflexão são paralelos a um vetor gerador e perpendicular ao outro.
4. **pg** - O vetor v da glissoreflexão é paralelo a um dos vetores de translação e perpendicular ao outro.
5. **cm** - Neste grupo, o eixo de reflexão é paralelo ao vetor da glissoreflexão.
6. **pmm** - Este grupo de simetria possui eixos de reflexão perpendiculares.
7. **pmg** - Os centros de rotação não se encontram nos eixos de reflexão.
8. **pgg** - Os vetores das glissoreflexões são perpendiculares e os centros de rotação não estão sobre esses eixos.
9. **cmm** - Os centros de rotação não estão sobre os eixos de reflexão.

10. **p4** - Os centros de rotação de ordem 2 estão entre os centros de rotação de ordem 4.

11. **p4m** - Os eixos de reflexão formam um ângulo de 45° um com o outro, de modo que os quatro eixos de reflexão passam pelos centros de rotação de ordem 4.

12. **p4g** - Os eixos de reflexão são perpendiculares e nenhum dos centros de rotação encontram-se em eixos de reflexão.

13. **p3** - É o grupo mais simples que possui uma rotação de ordem 3.

14. **p31m** - Os eixos de reflexão formam um ângulo de 60° um com o outro. Alguns dos centros de rotação encontram-se nos eixos de reflexão e outros não.

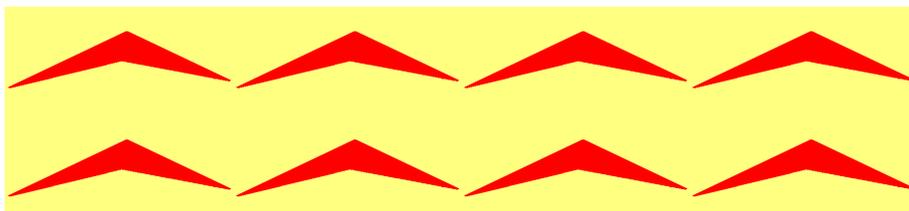
15. **p3m1** - Os eixos de reflexão formam um ângulo de 60° um com o outro. Todos os centros de rotação estão sobre os eixos de reflexão.

16. **p6** - É o primeiro grupo que possui uma rotação de ordem 6.

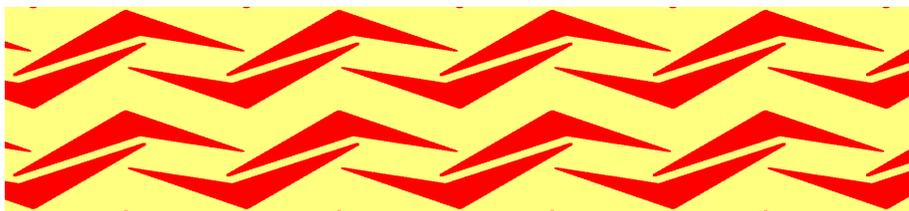
17. **p6m** - Os eixos de reflexão encontram-se nos centros de rotação. Nos centros de rotação de ordem 6, seis eixos de reflexão se encontram e estão inclinados a 30° um do outro.

Utilizando o programa Kali³, vamos dar um exemplo de cada tipo de papel de parede.

1. **p1**



2. **p2**

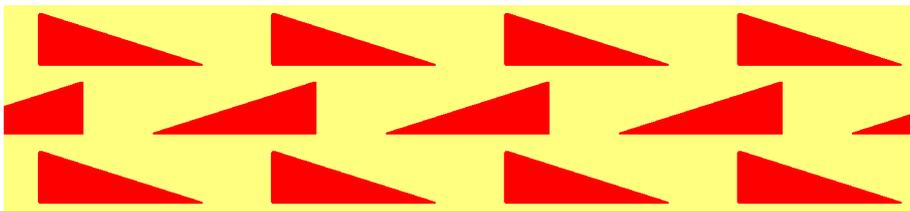


³Software livre, disponível para download em <http://www.geom.uiuc.edu/software/download/kali.html>, em 31/08/2013.

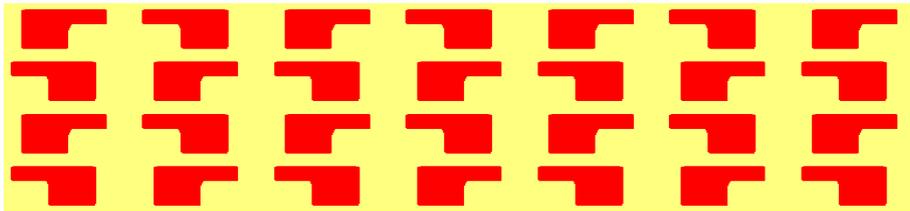
3. pm



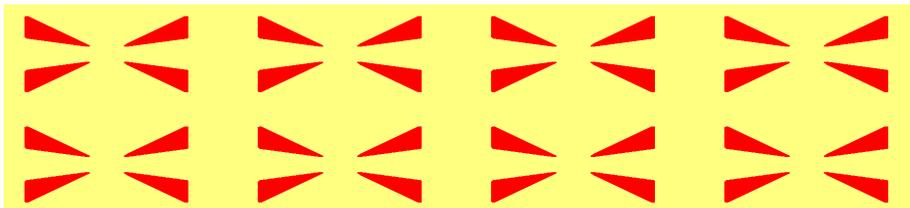
4. pg



5. cm



6. pmm



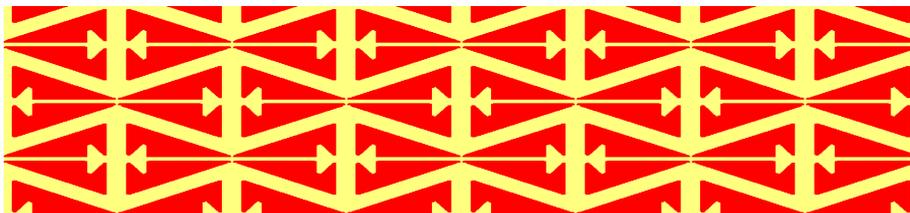
7. pmg



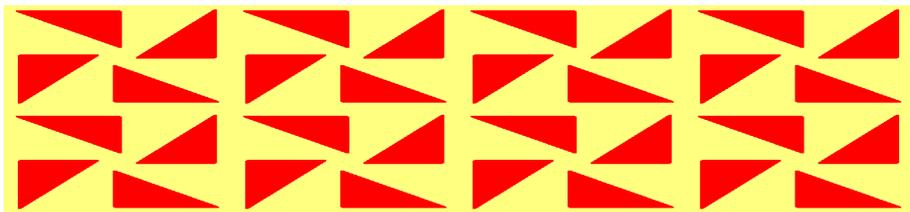
8. pgg



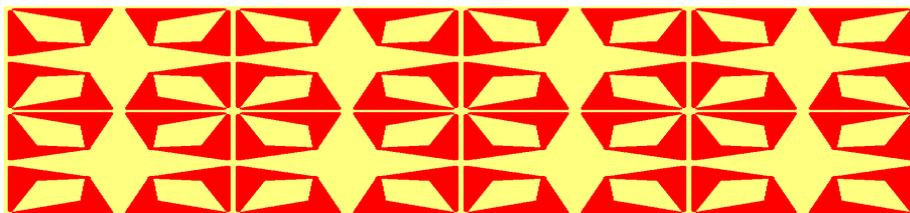
9. cmm



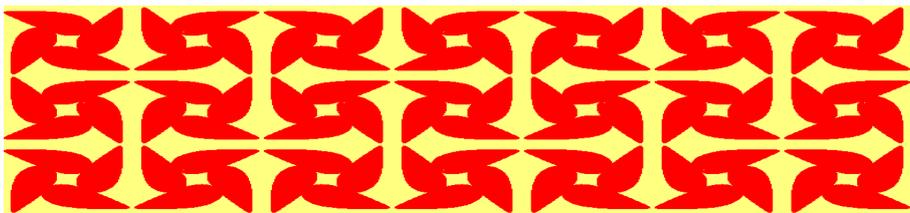
10. p4



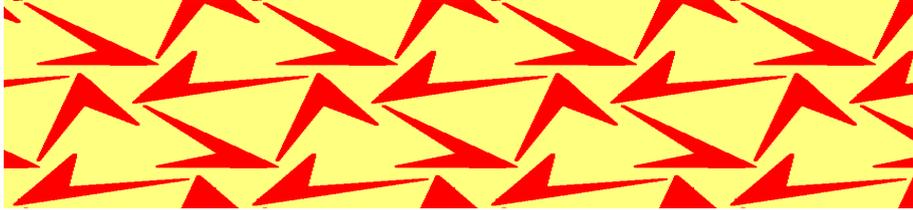
11. p4m



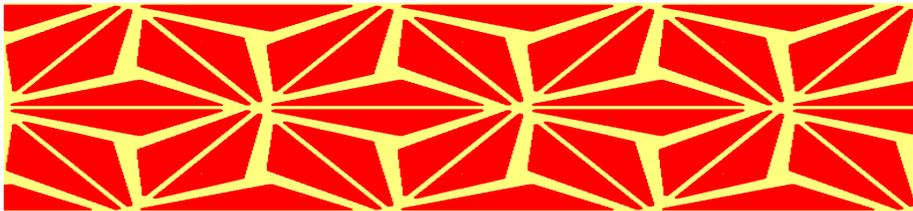
12. p4g



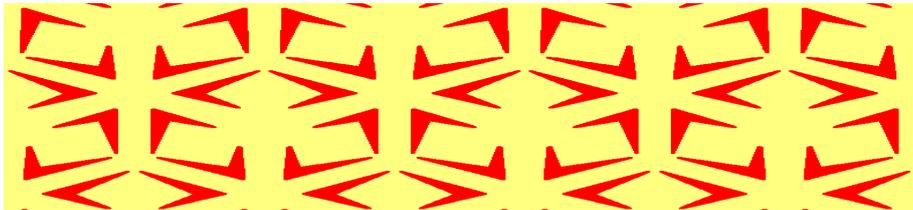
13. **p3**



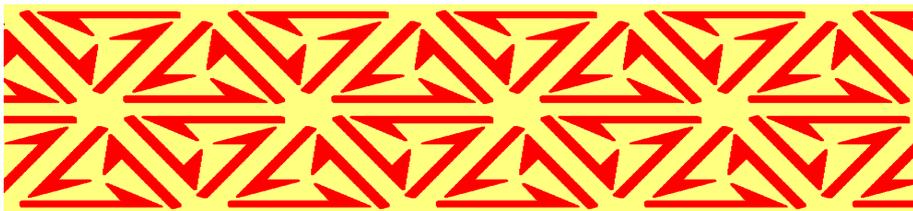
14. **p31m**



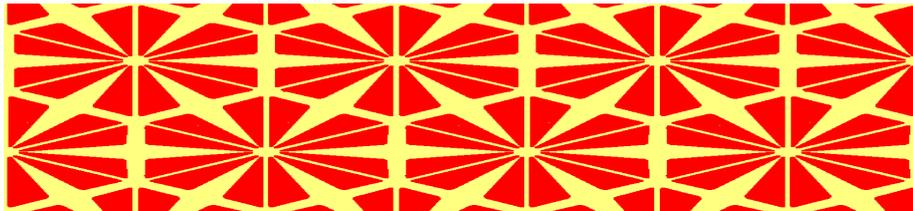
15. **p3m1**



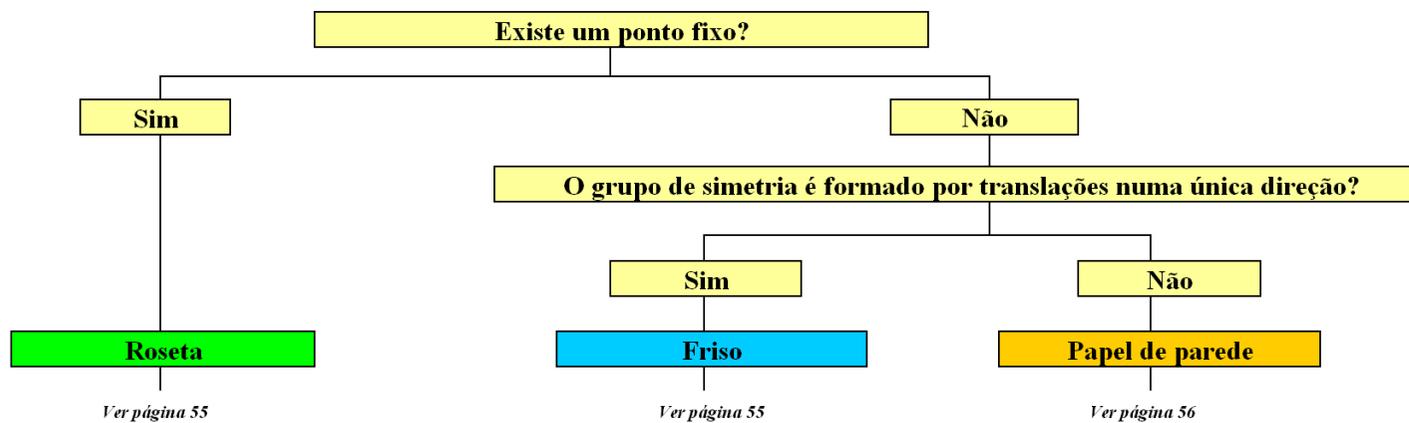
16. **p6**



17. **p6m**



FLUXOGRAMA PARA CLASSIFICAÇÃO DE FIGURAS SIMÉTRICAS



54

Figura 2.16: Fluxograma para classificação de figuras simétricas

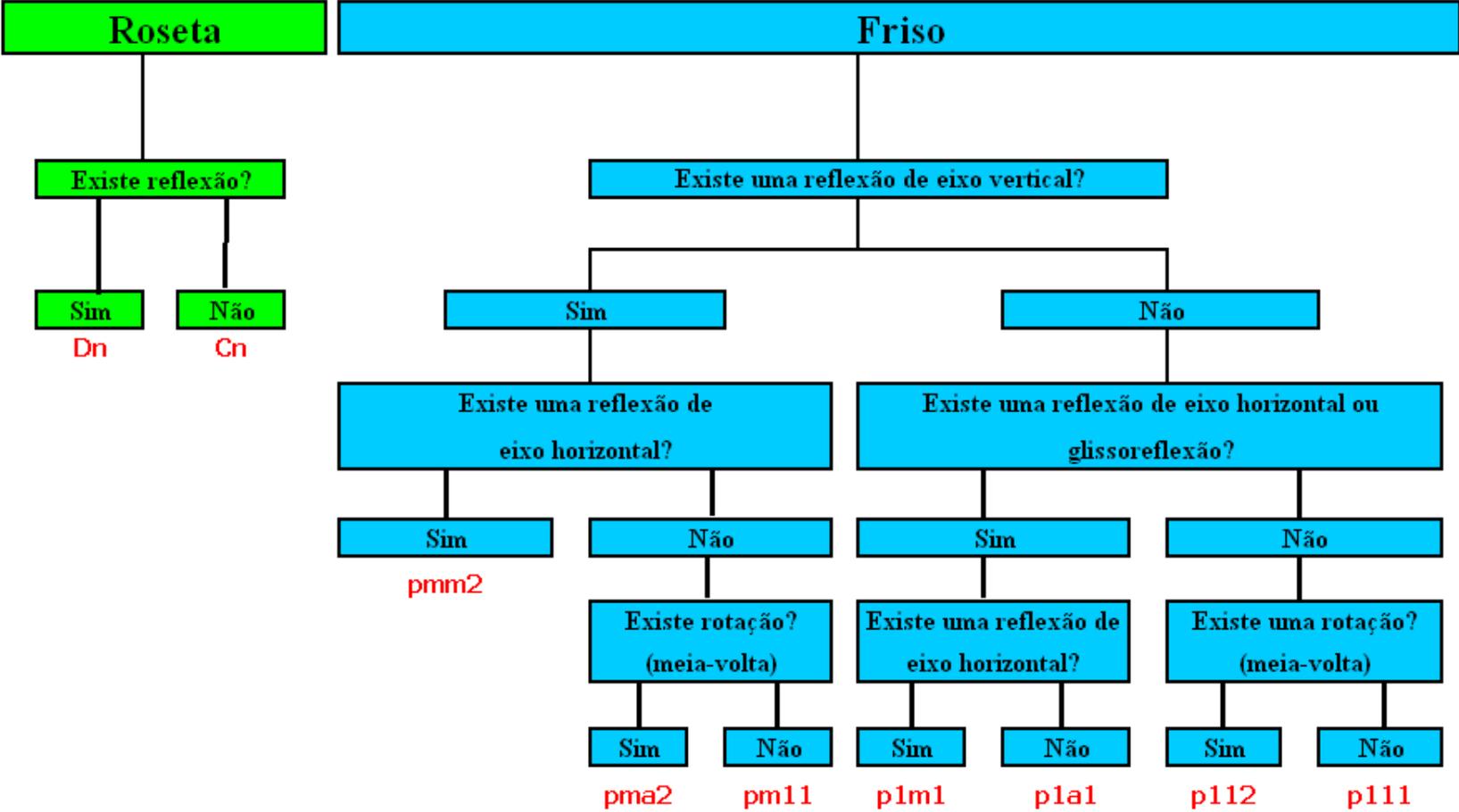


Figura 2.17: Fluxograma para classificação das Rosetas e Frisos

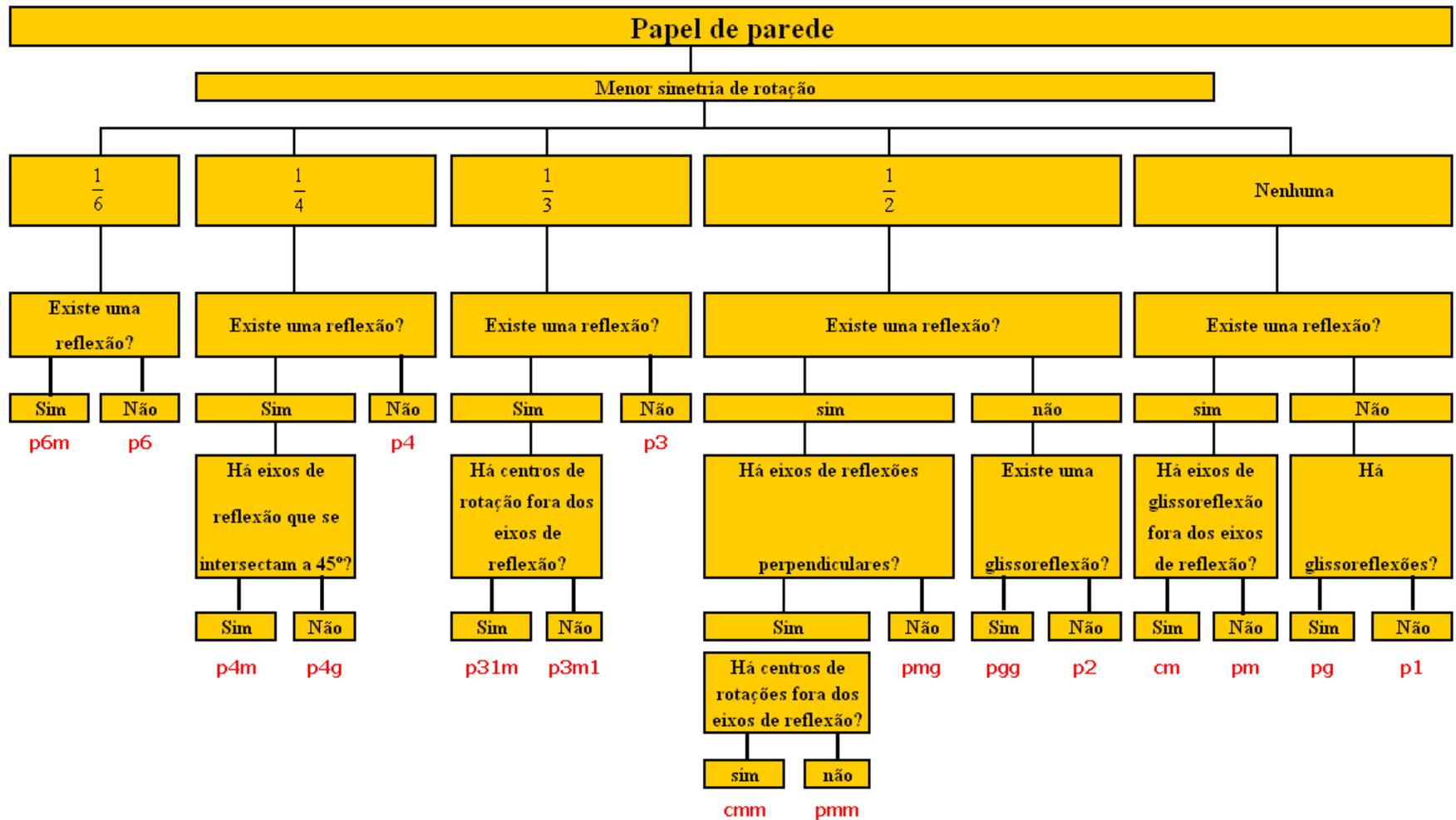


Figura 2.18: Fluxograma para classificação dos Papéis de Parede

Capítulo 3

Ladrilhamentos

A arte do ladrilhamento consiste no preenchimento do plano, por figuras planas, sem sobreposições ou "buracos". Ela existe desde que o homem começou a usar pedras para cobrir o chão e as paredes da sua casa. Existem peças de ladrilhos que datam de 5000 a.C..

Neste capítulo estudaremos os casos de ladrilhamentos com polígonos regulares .

O estudo do ladrilhamento com polígonos regulares está diretamente relacionados aos grupos cristalográficos estudados anteriormente.

De uma maneira informal, um ladrilhamento em \mathbb{R}^2 é um conjunto (T_1, T_2, \dots) de regiões poligonais que cobrem todo o plano sem deixar brechas, nem sobreposições de áreas não-nulas.

Formalmente podemos definir assim:

Definição 3.1 *Ladrilhamento em \mathbb{R}^2 é uma família de regiões poligonais $\{T_i, \text{ com } i \in \mathbb{N}\}$ tal que:*

- $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \dots = \mathbb{R}^2$
- *A intersecção de dois polígonos é sempre um lado, ou um vértice ou vazia*

3.1 Ladrilhamentos com polígonos regulares

Nesta seção, queremos mostrar que existem apenas 11 tipos de ladrilhamentos do plano que obedecem as seguintes condições:

1. Os ladrilhos são polígonos regulares.
2. A distribuição ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Esse tipo de ladrilhamento é chamado de *mosaico regular* e é o que estudaremos neste capítulo.

Observação: Uma condição importante para construir um ladrilhamento é que a soma dos ângulos dos polígonos ao redor de cada vértice deve ser 2π .

Inicialmente, vamos provar que não é possível ladrilhar o plano com 4 ou mais tipos distintos de polígono regulares em cada vértice do ladrilhamento.

Considere quatro polígonos regulares com número distintos de lados, digamos $k < l < m < n$. Chamando de A_k, A_l, A_m e A_n as medidas dos ângulos internos de um polígono com k, l, m e n lados respectivamente, temos que a soma dos ângulos desse polígonos é dada por:

$$A_k + A_l + A_m + A_n \geq A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} > 2\pi$$

Portanto, não existe ladrilhamento com 4 ou mais tipos de polígonos.

Vamos então abordar os casos de ladrilhamentos de acordo com os tipos distintos de polígonos regulares que são usados como ladrilhos.

• **1º caso:** 1 polígono regular

Para ladrilharmos o plano com p polígonos regulares de n lados em cada vértice, devemos ter:

$$p \cdot \pi \left(\frac{n-2}{n} \right) = 2\pi$$

$$\iff p \cdot \pi \left(1 - \frac{2}{n} \right) = 2\pi$$

$$\iff p = \frac{2n}{n-2}$$

$$\iff p - 2 = \frac{4}{n-2}$$

Como $p - 2$ é um número inteiro positivo, então $n - 2$ é divisor positivo de 4 (1, 2, ou 4). Temos então as seguintes possibilidades:

- $n - 2 = 1 \Rightarrow n = 3$ e $p = 6$
- $n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4$ e $p = 4$
- $n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$ e $p = 3$

Os resultados acima são visualizados na seguinte tabela:

n <i>número de lados do polígono</i>	m <i>número de polígonos por vértice</i>
3	6
4	4
6	3

Assim, utilizando apenas 1 tipo de polígono regular, podemos ter em cada vértice 6 triângulos (que denotaremos por 3.3.3.3.3.3), 4 quadrados (4.4.4.4) ou 3 hexágonos (6.6.6). As figuras a seguir são exemplos de cada tipo de ladrilhamento.

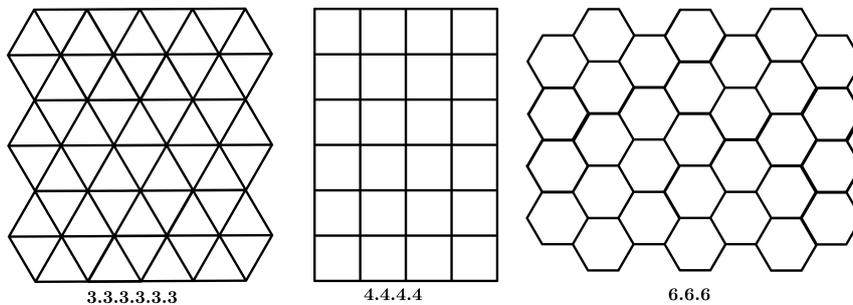


Figura 3.1: Ladrilhamentos com 1 tipo de polígono regular

• **2º caso:** 2 polígonos regulares

Considere dois polígonos regulares com m e n lados. Esses polígonos tem ângulos internos $A_n = \pi\left(\frac{n-2}{n}\right)$ e $A_m = \pi\left(\frac{m-2}{m}\right)$ respectivamente.

Se considerarmos em um vértice p cópias do primeiro e q cópias do segundo, a soma dos ângulos internos destes polígonos deve satisfazer a equação:

$$\pi\left(\frac{n-2}{n}\right)p + \pi\left(\frac{m-2}{m}\right)q = 2\pi$$

que é equivalente à equação

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)p + \left(\frac{m-2}{m}\right)q = 2$$

Sem perda de generalidade, vamos assumir $3 \leq m < n$. Queremos provar que $m < 6$.

Concluimos então que:

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)p + \left(\frac{m-2}{2}\right)q > \left(\frac{m-2}{m}\right)p + \left(\frac{m-2}{2}\right)q = \left(\frac{m-2}{m}\right)(p+q)$$

Observamos que, se $m > 6$, então

$$\frac{m-2}{m} \geq \frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}$$

de modo que devemos ter $\left(\frac{2}{3}\right)(p+q) < 2$.

Como o número $p+q$ de polígonos que se encontram em cada vértice é ao menos 3, temos um absurdo, de modo que não podemos ter $m > 6$.

Vamos então, estudar os casos $m = 3, 4, 5$ ou 6 .

• **m=6** - Neste caso, temos um hexágono regular com ângulo interno igual a $\frac{2\pi}{3}$. Se tivermos 2 cópias deste polígono, a soma dos seus ângulos será $\frac{4\pi}{3}$ e os $\frac{2\pi}{3}$ restantes não são suficientes para acomodar um polígono com $n > 6$ lados. Logo, não podemos ter $m = 6$.

• **m=5** - Com raciocínio análogo ao caso $m = 6$, provamos que não podemos ter $m = 5$.

• **m=4** - Neste caso, temos um quadrado cujo ângulo interno é $\frac{\pi}{2}$. Sendo assim, devemos ter $q < 3$ e restam 2 casos a analisar:

* **q=2**

$$A_n \cdot p + A_m \cdot q = 2\pi$$

$$A_n \cdot p + \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi$$

$$A_n \cdot p = \pi$$

Precisamos encontrar polígonos regulares de $n > 4$ lados que tenham ângulos internos submúltiplos de π . Concluimos que não existe o polígono procurado.

* **q=1**

$$A_n \cdot p + A_m \cdot q = 2\pi$$

$$A_n \cdot p + \frac{\pi}{2} \cdot 1 = 2\pi$$

$$A_n \cdot p = \frac{3\pi}{2}$$

Precisamos encontrar polígonos regulares de $n > 4$ lados que tenham ângulos internos submúltiplos de $\frac{3\pi}{2}$. A única opção é $n = 8$ e $p = 2$.

• **m=3** - Neste caso, temos um triângulo com ângulo interno de $\frac{\pi}{3}$. Sendo assim, devemos ter $q < 5$ e sobram 4 casos para analisar.

*** q=4**

$$A_n \cdot p + A_m \cdot q = 2\pi$$

$$A_n \cdot p + \frac{\pi}{3} \cdot 4 = 2\pi$$

$$A_n \cdot p = \frac{2\pi}{3}$$

Precisamos encontrar polígonos regulares de $n > 3$ lados que tenham ângulos internos submúltiplos de $\frac{2\pi}{3}$. A única opção é $n = 6$ e $p = 1$.

*** q=3**

$$A_n \cdot p + A_m \cdot q = 2\pi$$

$$A_n \cdot p + \frac{\pi}{3} \cdot 3 = 2\pi$$

$$A_n \cdot p = \pi$$

Temos então que encontrar polígonos regulares com $n > 3$, que tenham ângulos internos submúltiplos de π . A única opção é $n = 4$ e $p = 2$.

*** q=2**

$$A_n \cdot p + A_m \cdot q = 2\pi$$

$$A_n \cdot p + \frac{\pi}{3} \cdot 2 = 2\pi$$

$$A_n \cdot p = \frac{4\pi}{3}$$

Assim, devemos encontrar polígonos regulares com $n > 3$, que tenham ângulos internos submúltiplos de $\frac{4\pi}{3}$. A única opção é $n = 6$ e $p = 2$.

*** q=1**

$$A_n \cdot p + A_m \cdot q = 2\pi$$

$$A_n \cdot p + \frac{\pi}{3} \cdot 1 = 2\pi$$

$$A_n \cdot p = \frac{5\pi}{3}$$

Precisamos encontrar polígonos regulares com $n > 3$, que tenham ângulos internos submúltiplos de $\frac{5\pi}{3}$. A única opção é $n = 12$ e $p = 2$.

Os resultados acima podem ser visualizados na seguinte tabela:

m <i>número de lados do polígono m</i>	q <i>número de polígonos "m" por vértice</i>	n <i>número de lados do polígono n</i>	p <i>número de polígonos "n" por vértice</i>
4	1	8	2
3	4	6	1
3	3	4	2
3	2	6	2
3	1	12	2

As figuras abaixo são exemplos de cada tipo de ladrilhamento.

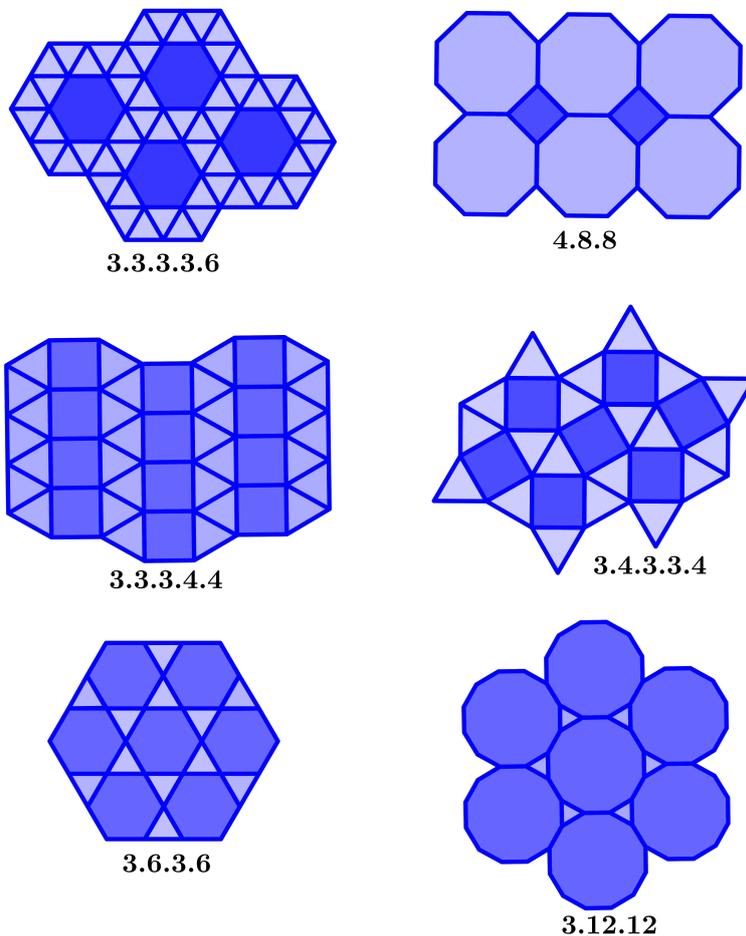


Figura 3.2: Ladrilhamentos com 2 tipos de polígonos regulares

• **3º caso:** 3 polígonos regulares

Sejam l , m e n o número de lados dos polígonos envolvidos, com $l < m < n$, e sejam A_l , A_m e A_n as medidas dos ângulos internos de um polígono com l , m e n lados respectivamente.

Considerando em um vértice p_l cópias do primeiro, p_m cópias do segundo e p_n cópias do terceiro, a soma dos ângulos internos destes polígonos neste vértice é dado por

$$p_l A_l + p_m A_m + p_n A_n$$

Vamos analisar as possibilidades de acordo com os possíveis valores de l :

• **l=3**

Neste caso teremos $p_l \cdot \frac{\pi}{3} + p_m A_m + p_n A_n = 2\pi$

Se $p_l = 1$, temos $p_m A_m + p_n A_n = \frac{5\pi}{3}$. Como $m, n > 3$, temos que a única opção é $m = 4$, $p_m = 2$ e $n = 6$, $p_n = 1$.

Se $p_l = 2$, temos $p_m A_m + p_n A_n = \frac{4\pi}{3}$. Como $m, n > 3$, e $m \neq n$ concluímos que não existem os polígonos procurados.

Se $p_l \geq 3$, temos que $p_m A_m + p_n A_n \leq \pi$. Considerando os menores valores possíveis para m e n respectivamente 4 e 5, temos que $p_m \cdot \frac{\pi}{2} + p_n \cdot \frac{3\pi}{5} > \pi$. Assim, não podemos ter $p_l \geq 3$.

• **l=4**

Neste caso teremos $p_l \cdot \frac{\pi}{2} + p_m A_m + p_n A_n = 2\pi$

Se $p_l = 1$, temos $p_m A_m + p_n A_n = \frac{3\pi}{2}$. Como $m, n > 4$, temos que a única opção é $m = 6$, $p_m = 1$ e $n = 12$ e $p_n = 1$.

Se $p_l \geq 2$, temos $p_m A_m + p_n A_n \leq \pi$. Considerando os menores valores para m e n , respectivamente 5 e 6, temos que $p_m \cdot \frac{3\pi}{5} + p_n \cdot \frac{2\pi}{3} > \pi$. Assim, não podemos ter $p_l \geq 2$.

Os resultados acima são visualizados na seguinte tabela:

l número de lados do polígono l	p_l número de polígonos "n" por vértice	m número de lados do polígono m	p_m número de polígonos "m" por vértice	n número de lados do polígono n	p_n número de polígonos "n" por vértice
3	1	4	2	6	1
4	1	6	1	12	1

As figuras abaixo são exemplos de cada tipo de ladrilhamento:

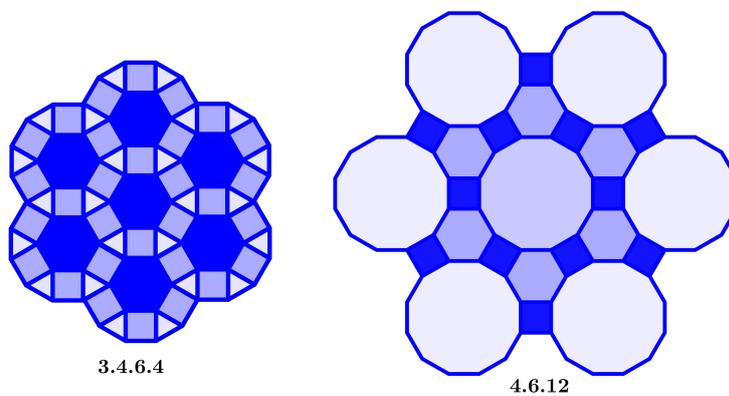


Figura 3.3: Ladrilhamentos com 3 tipos de polígonos regulares

Capítulo 4

Atividades sobre simetria

Neste capítulo, vamos apresentar algumas atividades que podem ser desenvolvidas com os estudantes do Ensino Médio sobre simetria. Para isso utilizaremos o programa GeoGebra[©].

4.1 GeoGebra[©]

GeoGebra[©] é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra numa única interface gráfica.

Ele permite realizar construções geométricas como a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc, assim como permite inserir funções e alterar esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser inseridas diretamente.

Assim, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Temos então a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

No site oficial podem ser obtidas mais informações sobre instalação e ajuda para utilização do GeoGebra[©]:

www.geogebra.org

A figura a seguir mostra a página inicial do GeoGebra ©:

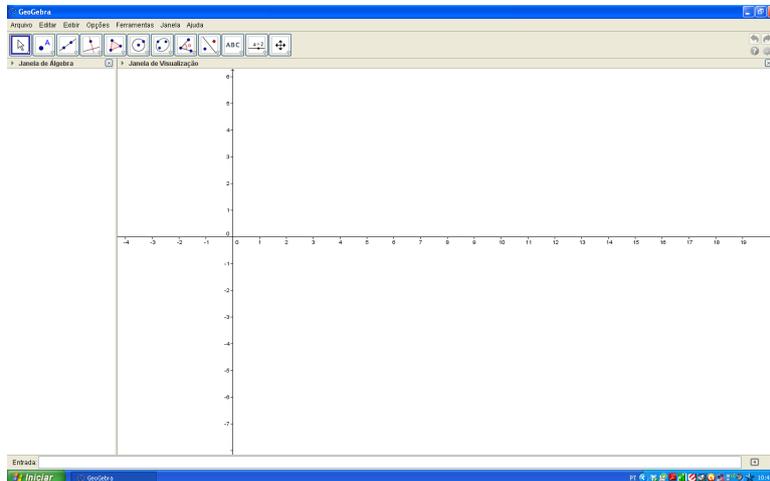


Figura 4.1: Tela Inicial do programa GeoGebra ©

Realizaremos as atividades considerando que os alunos já têm conhecimento prévio das principais funções do GeoGebra ©

Atividade 1 - Identificação de figuras simétricas

O objetivo da atividade é encontrar os eixos de simetria nas figuras dadas, para que o aluno conclua que há figuras que possuem um ou mais eixos de simetria de reflexão (que chamaremos simétricas) e algumas que não possuem eixo de simetria de reflexão (assimétricas).

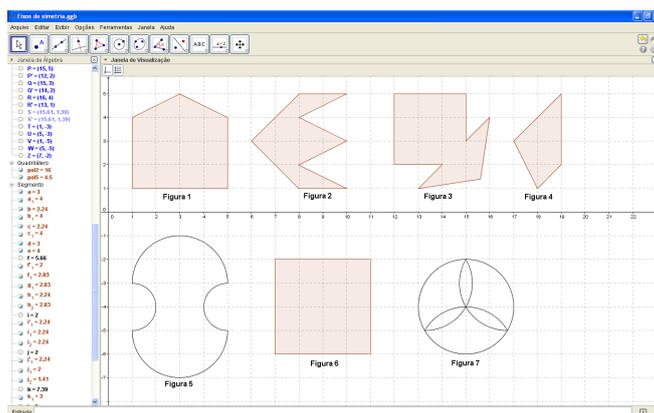


Figura 4.2: Atividade Eixos de Simetria

Desenvolvimento

- Abra o arquivo *Figura 1* (veja Figura 4.2) da pasta *Eixos de simetria*¹.
- Construa a(s) reta(s) que é(são) eixo(s) de simetria(s) de reflexão da figura.
- Essa figura tem simetria de rotação? Em caso afirmativo, encontre o centro de rotação.
- Repita as operações anteriores para os arquivos *Figura 2*, *Figura 3*, *Figura 4*, *Figura 5*, *Figura 6* e *Figura 7*.

Observação: Como atividade complementar, pode-se solicitar aos alunos que encontrem as equações das retas que são eixos de simetria de reflexão das figuras, assim como as coordenadas dos pontos que são centros de rotação.

Atividade 2 - Completando figuras simétricas.

O objetivo da atividade é completar as figuras, de modo a gerar novas figuras com simetria de reflexão.

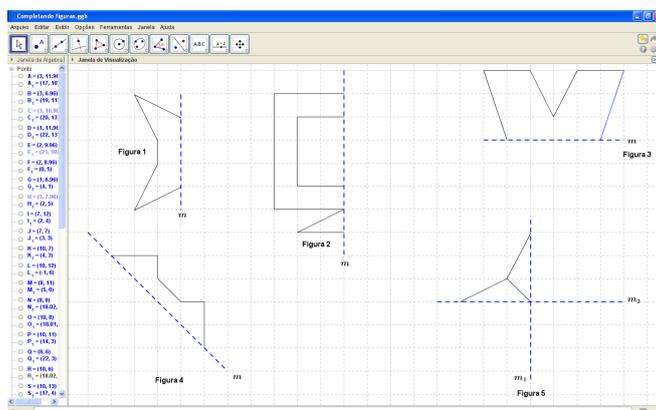


Figura 4.3: Atividade Completando Figuras

Desenvolvimento

- Abra o arquivo *Figura 1* (veja Figura 4.3) da pasta *Completando figuras*².

¹Essa pasta deve ser preparada com antecedência pelo professor e conterá as figuras de 1 a 7 dessa atividade

²Essa pasta deverá ser preparada com antecedência pelo professor e conterá as figuras 1 a 5 dessa atividade

- Complete a figura, de modo que a(s) reta(s) indicada(s) seja(m) eixo(s) de simetria de reflexão.
- A figura formada tem simetria de rotação? Em caso afirmativo, encontre o centro de rotação.
- A figura formada tem outros eixos de simetria de reflexão além da reta indicada na figura? Em caso afirmativo, encontre o novo(s) eixo(s) de reflexão.
- Repita as operações anteriores para os arquivos *Figura 2* a *Figura 5*.

Na próxima atividade, vamos construir figuras simétricas finitas com simetria de rotação.

Atividade 3- Construindo figuras com simetria de rotação

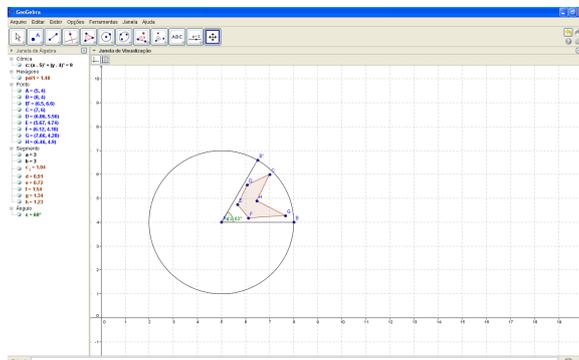
O objetivo da atividade é construir rosetas, ou seja, figuras simétricas finitas com simetria de rotação.

Nesta atividade, vamos construir rosetas que tem simetria de rotação de ordem 6. Para isso, construiremos no GeoGebra[®] uma ferramenta na qual clicamos num hexágono qualquer e num ponto P do plano e teremos uma roseta com centro (ponto fixo) em P .

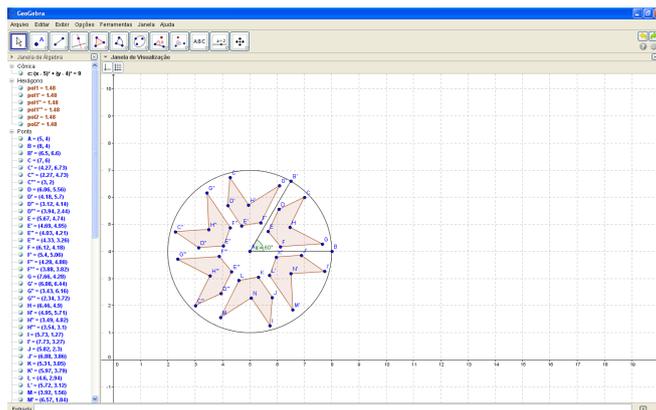
Desenvolvimento

1ª parte - Construção da ferramenta Roseta de ordem 6.

- 1º) Construimos uma circunferência c de centro A e raio AB .
- 2º) Utilizando a ferramenta *Ângulo com amplitude fixa* construímos um ângulo de 60° com vértice em A . Chamaremos de ângulo BAB' .
- 3º) Construimos os segmentos AB e AB' .
- 4º) Construimos o hexágono $CDEFGH$ interno ao setor circular $\widehat{BAB'}$.



5º) Utilizando a ferramenta *Rotação em torno de um ponto por um ângulo* realizamos a rotação de 60° do polígono $CDEFGH$ obtendo o polígono $C'D'E'F'G'H'$. Realizamos a mesma operação para esse novo polígono, e assim sucessivamente até preechermos a circunferência. O resultado final é mostrado a figura a seguir.



6º) No menu *Ferramentas*, clicamos na guia *Criar nova ferramenta*. Aparecerá então uma guia *Objetos Finais*. Clique em todos os hexágonos que são reflexão do primeiro (5 no total).

7º) Clique no botão *Próximo* e aparecerá a guia *Objetos iniciais*. Apague todos os pontos que aparecerem na guia e clique no hexágono $CDEFGH$ e no ponto A .

8º) Clique no botão *Próximo* e crie um nome para sua ferramenta (por exemplo Roseta Ordem 6).

2ª parte - Determinação das rotações e reflexões contidas numa roseta de ordem 6.

1º) Construa duas rosetas de centro P e ordem 6 utilizando a ferramenta construída na 1ª parte. A primeira roseta deverá ser construída com um hexágono não regular e a segunda roseta com um hexágono regular.

2º) Existem retas que são eixos de reflexão na 1ª roseta? E na segunda? Em caso afirmativo, construa os eixos de reflexão da figura.

3º) Observando a figura construída, responda:

a) Quais são os possíveis ângulos de rotação com centro em P dessas figuras?

b) Caso a figura tenha eixos de rotação, existe relação entre o número de eixos de reflexão e os ângulos de rotação dessa figura?

OBS: Podemos obter rosetas com outras ordens e outros polígonos como base utilizando o mesmo método, basta adequarmos os procedimentos de construção da ferramenta. A figura abaixo mostra algumas rosetas construídas utilizando-se a ferramenta da 1ª parte da atividade.

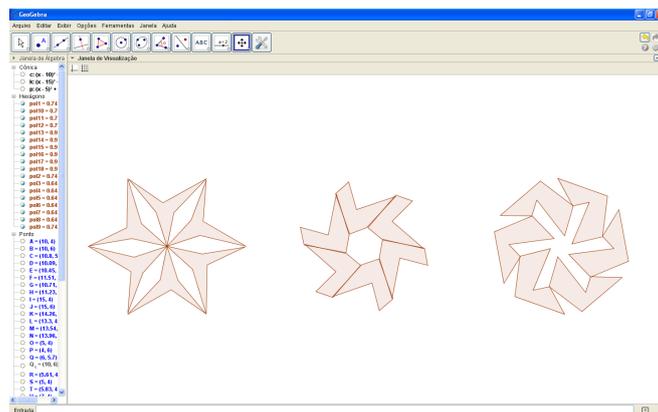


Figura 4.4: Rosetas de ordem 6

Podemos então construir rosetas com outras ordens, para levar o aluno a inferir que, quando existem reflexões, o número de eixos de simetria na figura é igual ao número de rotações da mesma.

Desenvolvemos nesse trabalho atividades relacionadas a rosetas, mas podemos também construir atividades semelhantes para estudar os frisos e os papéis de parede.

Referências Bibliográficas

- [1] FARMER, DAVID W. *Grupos e Simetria*. Coleção O Prazer da Matemática. The American Mathematical Society, 1996.
- [2] MARTIN, GEORGE E. *Trasformation Geometry - An Introduction to Symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1982.
- [3] RADAELLI, PAOLO G. *Symmetry in Crystallography*. Oxford Science Publications
- [4] NASCIMENTO, JORGE COSTA DO. *Transformações no plano*. UFBA - Disponível em <http://www.rpm.org.br/5e/docs/of7.pdf>. Acessado em 05/09/2013
- [5] PROJETO ATRACTOR. *Simetria de uma figura plana*. Disponível em <http://www.atractor.pt/mat/orbifolds/dvd.pdf>. Acessado em 05/09/2013
- [6] FERREIRA, ANTONIO. *Construção dos 7 tipos diferentes de frisos*. Colégio Internato dos Carvalhos, 2011 - Disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=0wlQ-H0F-10>. Acessado em 05/09/2013
- [7] FERREIRA, SUZANA. *Transformações Geométricas e Simetrias*. Coimbra, 2000 - Disponível em http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/Frisos_pavimentacoes.pdf - Acessado em 05/09/2013
- [8] NEVES, MARIA AUGUSTA FERREIRA. *Isometrias*. Porto Editora - Disponível em <http://www.slideshare.net/mariacferreira/isometrias-porto-ed1>. - Acessado em 05/09/2013
- [9] FERNANDES, VINICIUS; MANOEL, MIRIAN. *Teoria de Grupos aplicadas aos padrões de papel de parede*. ICMC, São Carlos - 2011. Disponível em http://www2.icmc.usp.br/biblio/BIBLIOTECA/not_did/ND_81.pdf. - Acessado em 05/09/2013

- [10] CAMBRAIA JUNIOR, ADY. *Estudando Transformações Geométricas*. Universidade Federal de Viçosa, 2005. Disponível em <http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20350/2012-I/Texto2%20-%20MAT%20350%20-%202012-I.pdf> - Acessado em 05/09/2013
- [11] JOYCE, DAVID E.. *The 17 plane symmetry group* - Clark University. Disponível em <http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/seventeen.html> - Acessado em 05/09/2013
- [12] MATEMÁTICA ESSENCIAL *Grupos*. - Disponível em <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/algebra/grupos.htm> - Acessado em 05/09/2013
- [13] SELLIN, WEVERSSON *Grupos e Simetria*. UNIFEMM, 2006. Disponível em <http://www.unisete.br/net/Simetrias.pdf> - Acessado em 05/09/2013