UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

# APLICAÇÕES MATEMÁTICAS COM O TANGRAM E A TORRE DE HANÓI NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE CASO.

**Pesquisadores Responsáveis:**
Prof.ª Dra. Valmária Rocha da Silva Ferraz
Irismar da Silva Carvalho

TERESINA-PI
2024

IRISMAR DA SILVA CARVALHO

# APLICAÇÕES MATEMÁTICAS COM O TANGRAM E A TORRE DE HANÓI NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE CASO.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

**Orientadora:** Prof.ª Dr.ª Valmária Rocha da Silva Ferraz

TERESINA (PI)
2024

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

---

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de mestre em matemática intitulada: ***Aplicações Matemáticas com o Tangram e a Torre de Hanói no Ensino Médio: Um Estudo de caso,*** defendida pelo mestrando Irismar da Silva Carvalho, em 18 de julho de 2024 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Documento assinado digitalmente
gov.br VALMARIA ROCHA DA SILVA FERRAZ
Data: 10/08/2024 18:13:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª Drª Valmaria Rocha da Silva Ferraz
Presidente da Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br JACKELYA ARAUJO DA SILVA
Data: 10/08/2024 19:02:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª Drª Jackelya Araujo da Silva
Examinador Interno

Documento assinado digitalmente
gov.br FERNANDO FERRAZ DO NASCIMENTO
Data: 10/08/2024 18:26:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof Dr Fernando Ferraz do Nascimento
Examinador Interno

Afonso Norberto da Silva

Prof Dr Afonso Norberto da Silva
Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

C331a Carvalho, Irismar da Silva.
Aplicações matemáticas com o Tangram e a Torre de Hanói no ensino médio: um estudo de caso / Irismar da Silva Carvalho. -- 2024.
139 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientadora: Profa. Dra. Valmária Rocha da Silva Ferraz."

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Jogos didáticos. 3. Ensino-aprendizagem. 4. Torre de Hanói. 5. Tangram. 6. Ensino Médio. I. Ferraz, Valmária Rocha da Silva. II. Titulo.

CDD 510

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

*Dedico esse trabalho a Deus, aos meus pais, minha esposa e aos meus filhos que sempre me incentivaram e apoiaram nessa caminhada.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pelo o dom do conhecimento, disposição, saúde e pela graça de poder está realizando esse sonho na minha vida.

Aos meus Pais, José Luiz da Silva Carvalho e Laura Sipaúba da Silva, pela criação cheia de amor, carinho, retidão e educação dada aos seus filhos.

A minha esposa, Silmara Bezerra Paz Carvalho, Profª. Ma. companheira de profissão e formação, pelo apoio, (contribuições na organização, construção, desenvolvimento e conclusão desse trabalho), amor, carinho, compreensão e por segurar na minha mão nos momentos difíceis.

Aos meus filhos, João Victor Paz de Carvalho (contribuições efetivas na correção da escrita dessa dissertação) e Anna Flávia Paz de Carvalho, presentes de Deus na minha vida, pela compreensão, apoio e incentivo, vocês são a maior razão de tudo isso.

Aos meus irmãos, Ivaldo da Silva Carvalho, Francisca da Silva Carvalho e Francilene da Silva Carvalho, pelo carinho e por fazerem parte da minha história.

Ao meu sobrinho e afilhado, George Weverton Carvalho Soares pela admiração, respeito e companheirismo de momentos únicos na UFPI.

A minha ex-aluna, Milena Débora Cardoso estudante do curso de medicina da UFDPar, por me motivar a estudar para poder contribuir na sua caminhada em busca de conhecimento.

Aos meus sogros, Vitorino Pereira Paz filho (*in memoriam*) e Maria José da Solidade Bezerra pelo apoio e incentivo nesta caminhada.

A minha orientadora, Profª. Dra. Valmária Rocha da Silva Ferraz, pelo incentivo, paciência, atenção, dedicação e apoio, em especial quando reprovei na primeira turma do PROFMAT.

Agradeço especialmente aos professores examinadores da banca, Prof. Dr. Afonso Noberto da Silva, Prof. Dr. Afonso Noberto da Silva e Prof.ª Dr.ª Jackelya Araujo da Silva, por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora. Grato pela atenção dedicada à minha pesquisa e pelas valiosas sugestões que tornaram este trabalho ainda mais consistente e relevante.

Aos colegas de curso, pela amizade, troca de conhecimentos e convivência durante todos esses anos em especial ao André, Jaqueline e Lucas da turma 2017 a 2019 e ao Ediney, Ferdinando, Gerson, Valdério e Antonio Alencar pelos momentos aprendizagem e companheirismo.

Agradeço todos os professores do mestrado PROFMAT/UFPI que contribuíram para mais uma etapa de formação. Assim como a professora de Língua Inglesa Jeanne dos Santos Sampaio pela tradução do resumo.

A todos os alunos da escola lócus da pesquisa, de modo especial àqueles que participaram diretamente desse estudo, e aos profissionais que ali estiveram no apoio (gestora, secretária e o pessoal de apoio).

Enfim, a todos aqueles, que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização dessa conquista. O meu muito obrigado!

Conquistas sem riscos são sonhos sem méritos. Ninguém é digno dos sonhos se não usar as derrotas para cultivá-los.

(**Augusto Cury, 2008**)

**RESUMO**

O estudo se trata de uma pesquisa direcionada para a adoção de práticas alternativas como ferramenta pedagógica na construção dos conhecimentos matemáticos, tendo os jogos como instrumento facilitador do ensino e da aprendizagem matemática na Educação Básica. Tem como propósito objetivo analisar as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com o uso da Torre de Hanói e do Tangram para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, tendo como objetivos específicos: identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre a Torre de Hanói e o Tangram; explorar as possibilidades de aplicação dos conceitos matemáticos com o uso dos jogos em estudo; descrever os processos vivenciados com a experiência a partir da oficina aplicada; verificar as relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados. Por se tratar de uma pesquisa qualitativa descritiva do tipo estudo de caso utilizou-se como instrumentos de coleta de dados uma prova inicial; questionário semiestruturado com questões abertas e fechadas; oficinas práticas com os jogos; prova final e uma entrevista semiestruturada. Essa pesquisa teve como público-alvo os estudantes da 1ª série do Ensino Médio do (CETI) Acrísio Veras em Alto Longá-PI. Desses estudantes, 20 alunos foram escolhidos para participar da amostra a partir dos critérios de inclusão e exclusão preestabelecidos. Assim, os dados gerados, permitiram-nos identificar contribuições da utilização de aplicações matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática, os conhecimentos prévios dos alunos sobre os jogos o que tornou possível explorar as possibilidades da sua aplicação relacionada a conceitos matemáticos em estudo. Diante do exposto, concluímos que o uso dos jogos como ferramenta facilitadora da construção dos conhecimentos matemáticos no ambiente de sala de aula pode permitir o desenvolvimento do cognitivo, estimular pensamento criativo e contribuir para que a aprendizagem seja significativa e aconteça de forma dinâmica e prazerosa para ambos os integrantes desse processo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Ensino e Aprendizagem Matemática; Jogos; Tangram; Torre de Hanói.

**ABSTRACT**

The study is research aimed at the adoption of alternative practices as a pedagogical tool in the construction of mathematical knowledge, with games as an instrument to facilitate teaching and learning mathematics in basic education. It aims to analyze the contributions of the use of mathematical applications using the Tower of Hanoi and Tangram to the mathematical learning of students in the 1st year of high school, with specific objectives: identifying students' prior knowledge about the Tower of Hanoi and the tangram; explore the possibilities of applying mathematical concepts using the games under study; describe the processes experienced with the experience from the applied workshop; verify the relationships between teaching and learning mathematics based on applied games. As it is a qualitative descriptive research of the case study type and an initial test was used as data collection instruments; semi-structured questionnaire with open and closed questions; practical workshops with games; final test and a semi-structured interview. This research had as its target audience students in the 1st year of high school at the Dinâmica school in Alto Longá-PI. Of these students, 20 students were chosen to participate in the sample based on pre-established inclusion and exclusion criteria. Thus, the data generated allowed us to identify contributions from the use of mathematical applications using Tangram and the Tower of Hanoi for mathematical learning, students' prior knowledge about games, which made it possible to explore the possibilities of their application related to mathematical concepts under study. In view of the above, we conclude that the use of games as a tool to facilitate the construction of mathematical knowledge in the classroom environment can allow cognitive development, stimulate creative thinking and contribute to making learning meaningful and happening in a dynamic and enjoyable way for both members of this process.

**Key words:** Mathematics Teaching and Learning; Games; tangram; Tower of Hanoi.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE SIGLAS

| | |
|---|---|
| ANFOP | Associação Nacional pela Formação dos Profissionais da Educação |
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular |
| CAAE | Certificado de Apresentação de Apreciação Ética |
| CAEd | Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| CEP | Comitê de Ética em Pesquisa |
| CETI | Centro Estadual de Tempo Integral |
| CONEP | Comissão Nacional de Ética em Pesquisa |
| CNE | Conselho Nacional de Educação |
| CNPq | Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico |
| EM | Ensino Médio |
| IDEB | Índice de Desenvolvimento da Educação Básica |
| IES | Instituição de Ensino Superior |
| IMPA | Instituto de Matemática Pura e Aplicada |
| INEP | Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira |
| LDB | Lei de Diretrizes e Bases |
| MEC | Ministério da Educação e Cultura |
| OBMEP | Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PG | Progressão Geométrica |
| PI | Piauí |
| PIF | Princípio de Indução Finita |
| PNE | Plano Nacional de Educação |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| SAEB | Sistema de Avaliação da Educação Básica |
| SAEPI | Sistema de Avaliação Educacional do Piauí |
| SBM | Sociedade Brasileira de Matemática |
| SD | Sequência Didática |
| TALE | Termo de Assentimento Livre |
| TCLE | Termo de Consentimento Livre e Esclarecido |
| UAB | Universidade Aberta do Brasil |
| UFJF | Universidade Federal de Juiz de Fora |
| UFPI | Universidade Federal do Piauí |
| UESPI | Universidade Estadual do Piauí |
| USP | Universidade de São Paulo |

# SUMÁRIO

## INTRODUÇÃO

Diante do intenso movimento das reformas curriculares no Brasil, o Ensino Médio (EM) teve modificações pontuais em sua proposta curricular, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) entra em vigor em 2018 propondo mudanças referentes aos objetos do conhecimento, as habilidades e a carga horária prevista nessa etapa da Educação Básica, mudanças essas que envolvem pensar e organizar uma perspectiva metodológica que promova uma aprendizagem matemática significativa, tornando-se fundamental para assegurar o que está previsto como uma garantia pelo Plano Nacional de Educação (PNE), Lei nº 13005/2014. Desse modo, faz-se necessário uma formação que permita ao professor de matemática construir uma identidade profissional.

Nesse sentido, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que, segundo o seu regimento interno (2020), é um programa de pós-graduação *stricto sensu* em Matemática, reconhecido e avaliado pela CAPES, credenciado pelo Conselho Nacional de Educação – CNE, validado pelo Ministério da Educação. É um curso semipresencial na área de Matemática realizado por Instituições de Ensino Superior associadas em uma Rede Nacional, no âmbito do Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB). É coordenado pela Comissão Acadêmica Nacional, que opera sob a égide da Diretoria da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Torna se fundamental na formação, aprofundamento dos conhecimentos matemáticos e na pesquisa matemática em prol do ensino e do ensino e aprendizagem matemática na Educação Básica.

Para se ter visão de alguns problemas do ensino e a aprendizagem matemática dos alunos de EM, podemos usar os resultados das principais avaliações externas, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) organizadas pelo Instituto Nacional de Educação e Pesquisa (INEP) órgão do Ministério da Educação (MEC) e o Sistema de Avaliação do Estado do Piauí (SAEPI) coordenado pelo Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF), sendo realizada de forma censitária.

Os baixos percentuais de estudantes com aprendizado adequado para essa etapa da Educação Básica, são perceptíveis quando se compara a proficiência de Matemática com Língua Portuguesa, os dados do (SAEB) de 2021 mostram em termo de Brasil uma proficiência de 31% em língua portuguesa e de 5% em matemática, no estado do Piauí esses percentuais são de 21% em língua portuguesa e de 2% em matemática, no município de Alto Longá esses resultados são preocupantes, visto que, 8% são proficiente em língua portuguesa e 1% em matemática.

Todavia falar de proficiência de aprendizagem, remete-nos a conexão professor, prática docente, método, metodologia, materiais didáticos, avaliação e intervenção nos processos educacionais em uma sala de aula.

Pensar em aplicações matemáticas a partir de conhecimentos prévios do uso de instrumentos pedagógicos de apoio como os jogos é primordial quando se busca a inserção de ferramentas metodológicas alternativas e atraentes no ambiente de sala de aula.

O uso de jogos é temáticas de pesquisas há muitos anos, Vygotsky (1989) já defendia o uso do jogo para a criança devido as suas várias contribuições dentre elas a motivação para que pudessem aprender, essas contribuições podem ser ampliadas aos adolescentes que também podem ser estimulados através dessa metodologia. De acordo com D'Ambrosio "é no processo de unir a realidade à ação que se insere o indivíduo, claramente distinguindo das demais espécies animais pelo fato de sua ação ser sempre o resultado de uma relação dialética entre teoria-prática" (1986, p.38).

É na escola com um ensino pautado na criatividade e na criticidade matemática que se possibilita ao educando o pensamento criativo na essência da palavra, assim, torna-se indispensável promover uma ação didática em sala de aula que permita o desenvolvimento cognitivo do estudante tendo como base o estímulo a criação, pois, a "criatividade é a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de soluções apropriadas para uma situação problema" (Gontijo, 2006a, p.4), pautados na fluência, na flexibilidade, originalidade e elaboração.

Assim, justifica-se a teoria "[...] na medida em que seu efeito se faça sentir na condução do dia-a-dia na sala de aula" (D'Ambrosio, 1986, p.43), por isso faz-se essencial uma ação docente consciente e que promova a reflexão-ação diariamente.

Diante disso, buscar-se-á através desta pesquisa responder a seguinte questão problema: Quais as contribuições do uso da Torre de Hanói e do Tangram com aplicações matemáticas elementares para a aprendizagem dos alunos na 1ª série do Ensino Médio?

Para respondermos essa questão traçou-se como objetivo geral: Analisar as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio. E os objetivos específicos são: Identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre a Torre de Hanói e o Tangram; explorar as possibilidades de aplicação dos conceitos matemáticos com o uso dos jogos em estudo; descrever os processos vivenciados com a experiência a partir da oficina aplicada; verificar as relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.

Essa pesquisa é qualitativa descritiva do tipo estudo de caso, que teve como campo de estudo a cidade de Alto Longá (PI), mais especificamente o Centro de Educação em Tempo Integral (CETI) Acrísio Veras, o público alvo foram os estudantes da 1ª série do EM. Os 20 (vinte) participantes foram selecionados seguindo os critérios pré-estabelecidos. Tem-se como estratégias metodológicas: aplicação de um questionário com 17 itens; aplicação do primeiro instrumental avaliativo; aplicação das oficinas práticas com o uso dos jogos Tangram e da Torre de Hanói; aplicação de um segundo instrumental avaliativo diferente do primeiro; aplicação de entrevista semiestruturada com 20% de amostra (4 alunos) definidos por sorteio. Após a aplicação e coleta do material foram analisadas as informações de acordo com os objetivos da pesquisa.

A motivação surge da busca por entender que contribuições os jogos: Tangram, associado ao objeto do conhecimento potência na base dois com expoente inteiro negativo e Torre de Hanói associado ao objeto do conhecimento função exponencial, podem propiciar ao ensino e aprendizagem de matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio por meio de aplicações elementares. Eesse estudo está respaldada nos referenciais curriculares que regem a educação brasileira e em estudiosos que abarcam a temática em estudo como: Bardin (2016), D’Ambrosio (1986), Valente (2010), Gontijo (2006), Vygotsky (1989, 1997) e outros. Assim, esse trabalho encontra-se organizado em 4 capítulos.

Os seguintes capítulos estão distribuídos da seguinte forma: No 1º Capítulo apresenta-se a base teórica sobre o objeto de estudo e está dividido em subcapítulos: 1.1 Contexto histórico da matemática no Brasil e as perspectivas curriculares para o Ensino Médio; 1.2 O jogo e a aprendizagem matemática; 1.3 O uso do Tangram associado a potência de base 2 com expoente inteiro negativo; 1.4 O uso da Torre de Hanói com ênfase na função exponencial;

No 2º Capítulo, apresenta-se o percurso metodológico da pesquisa, subdividido em itens que contemplam: 2.1 - Tipo de pesquisa; 2.2 - Contextualização do *lócus* da investigação; 2.3 Participantes: população e amostra; 2.4 Instrumentos de coleta de dados; 2.5 - Organização dos dados coletados em categorias e 2.6 - análise de conteúdo a partir dos dados coletados, assim como o rigor e as informações referentes a submissão desse trabalho no Comitê de Ética em Pesquisa (CEP/UFPI).

No 3º Capítulo trata-se das relações entre os jogos e as aplicações matemática para a aprendizagem no Ensino Médio, distribuídos em 6 seções da (3.1 a 3.6), a última distribuída em três subseções a (3.6.1, 3.6.2 e 3.6.3) são apresentados os resultados das informações produzidas no campo empírico, categorizados e analisados a partir das vivências e das informações coletadas dos participantes, colaboradores da pesquisa. Por fim, no 4º Capítulo constará as “Considerações Finais”, a qual evidencia o alcance dos objetivos na visão do pesquisador, as contribuições resultantes do estudo e o impacto na sociedade, assim como possíveis estudos futuros.

# 1 APLICAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO MÉDIO COM USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS: ENSINO E APRENDIZAGEM

## 1.1 A matemática no Brasil e as perspectivas curriculares para o Ensino Médio

Um breve passeio pelo tempo nos permite resgatar um pouco da história do ensino de matemática no Brasil que se inicia de forma tímida com as escolas jesuítas no início do século XVII "o ensino da Matemática no Brasil principiou naturalmente por onde deveria começar, isto é, pela Lição de Algarismos, ou primeiras operações, ensino gradativamente elevado, mencionando-se em 1605 nos três colégios da Bahia, Rio de Janeiro e Pernambuco, a aula de Aritmética" (Leite, 1945, p. 163 apud Valente, 2007, p. 29).

Esse período se estende até 1759 quando o marquês de Pombal ordenou a expulsão dos jesuítas de todas as colônias. Com a chegada de D. João VI ao território em 1808, provocou-se mudanças na educação. Gomes (2013, p. 15) afirma que "Muitas instituições culturais e educacionais foram implantadas, como a Academia Real da Marinha (1808), no Rio de Janeiro, a Academia Real Militar (1810), também no Rio, destinadas a formar engenheiros civis e militares" percebe-se consolidação do ensino voltado para ofício militar, o ensino e aprendizagem matemática passa a ser empregado para aplicação nas construções militares e artilharia buscando-se, através da formação matemática, profissionais modernos com senso de rapidez, solidez e economia, tal filosofia perdura até a independência em 1822.

Durante os trabalhos da Assembleia Constituinte encarregada da elaboração da constituição, o Imperador D. Pedro I alerta para a necessidade de uma legislação especial para tratar da instrução pública, segundo a Constituição de 1824 que perdura durante todo o império no Art. 179 Inciso XXXII "A Instrução primária, e gratuita a todos os Cidadãos". Dar-se início a legalidade de oferta da educação pública gratuita em instituições oficiais de ensino primário no território brasileiro. O processo de gratuidade da instrução primaria se consolida com a primeira lei de instrução pública nacional no Império do Brasil de 15 de outubro de 1827, estabelecia a existência de escolas de primeiras letras em todas as cidades, vilas e lugares populosos.

> No ensino das primeiras letras, a Matemática estava presente: "primeiras letras" significavam, afinal, "ler, escrever e contar". É interessante notar que a lei de outubro de 1827 diferenciava a educação para meninos e meninas, prevendo escolas separadas para os dois sexos. O currículo para as escolas de meninos envolvia "ler, escrever, as quatro operações aritméticas, prática de quebrados, decimais e proporções, noções gerais de geometria, gramática da língua nacional, moral cristã e doutrina católica. As escolas para meninas existiriam nas localidades mais populosas, seriam dirigidas por professoras e em seu currículo eliminava-se a geometria e a prática de quebrados, incluindo-

> se o ensino de práticas importantes para a economia doméstica (Gomes, 2013, p. 15-16).

Com isso, dar-se a educação matemática no Brasil o amparo legal, passando a estabelecer um currículo norteador para os trabalhos dentro de suas instituições oficiais de ensino, embora traga a diferença entre a educação para meninos e meninas, sendo normal para aquela época.

Com o advento do movimento positivista influenciando significativamente a educação brasileira no final do século XIX, coube Benjamim Constant implantar um currículo científico para matemática através do Decreto nº 891 de 8 de novembro de 1890, por meio deste, dar- se o início do ensino pautado nas ideias filosóficas de Comte. Sarmento (2017, p. 32) afirma "a proposta apresentada por Benjamim Constant consistia em 7 anos para o ensino secundário, cujo eixo central era o ensino da matemática, considerada a ciência fundamental do positivismo". Mesmo existindo outras disciplinas na composição do currículo, as ideias positivistas defendidas por Comte não emplacam tornando inviável a continuidade do currículo implantado por Constant, com isso volta a vigorar a situação de ensino antes adotada no país.

A ruína das ideias do positivismo provocada pela aproximação dos matemáticos brasileiros com os franceses e alemães, permitiram que se iniciasse por aqui o processo de modernização do ensino de matemática. "Os estudos matemáticos no Brasil entraram numa nova fase. As visitas de Émile Boreal e Jacques Hadamard deram origem a um intenso relacionamento com a França[...]" (D'Ambrosio, 2008, p. 69).

Até aqui, o ensino da matemática no território brasileiro está fortemente direcionado a um seleto grupo de privilegiados voltado ao campo da engenharia, o cenário muda a partir de 1934, de acordo com Sarmento a criação da USP permite o início do programa de formação de discentes na área de matemática para atuarem na educação secundária, mesmo que ainda não houvesse uma política voltada para a formação de profissionais capazes de atuarem na educação superior no campo da matemática.

É impossível se pensar em preparar professores de matemática, nessa perspectiva sem que haja antes um programa direcionado a aqueles que tomaram para si a responsabilidade por esta formação, assim, percebe-se alguns equívocos cometidos no direcionamento dos rumos do ensino e aprendizagem de matemática no país. Os movimentos sociais e a derrocada das oligarquias na década de 30 propiciaram um cenário ideal para o surgimento e a implantação no país do movimento educacional conhecido como Escola Nova.

> No campo da educação matemática as transformações atingiram principalmente a atuação do professor em sala de aula, nesse sentido, o professor assume o papel de orientador e facilitador do ensino-aprendizagem, preocupando-se com o desenvolvimento psicológico do educando e como os seus interesses. O aluno tornou-se o centro da aprendizagem e um ser "ativo", participando de jogos, realizando atividades em pequenos grupos, manipulando muitos materiais (Sarmento, 2017, p. 35).

Nota-se, nessa vertente a preocupação com o educando e com as formas de oportunizá-los os conhecimentos e saberes matemáticos, a figura do professor passa a ter uma função de mediador auxiliando o educando a construir o seu próprio conhecimento. A constituição de 1934 no seu Art. 150 alínea "a" fixa o Plano Nacional de Educação, cria o Conselho Nacional de Educação e estabelece no seu Art. 156 os percentuais que a União e os entes federados deverão aplicar a educação. Cria-se no campo da pesquisa o CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico) e a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior) em 1951, órgãos estes que contribuem significativamente para o desenvolvimento da ciência brasileira.

Para o desenvolvimento da matemática, foi criado um ano depois o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) "a partir de então, a pesquisa de matemática no Brasil iniciou a sua institucionalização em nível nacional, atingindo o altíssimo padrão internacional que hoje desfruta" (D'Ambrosio, 2008, p. 89). A educação matemática se torna referência e começa a se difundir em todo o território nacional.

Com o advento do Movimento da Matemática Moderna no fim dos anos 50, o ensino de matemática se depara com intensas modificações. De acordo com Sarmento (2017, p. 38) "o ensino passou a ter uma abordagem internalista, isto é, a matemática por ela mesma, configurando-se pela aproximação da matemática pura como aquela desenvolvida nas escolas por meio de modelagem e transposição didática".

Devido ao tratamento dado ao ensino e aprendizagem, o professor passou a ser a figura central do processo, e o ensino proposto parecia estar distante do alcance dos alunos, em especial dos educandos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, diante disso na década de 70 entra em declínio, sai de cena a pedagogia tecnicista e passa a se adotar a pedagogia construtivista, na visão de Sarmento, a construção dos conhecimentos matemáticos passa a ser desenvolvida por meio do manuseio de materiais concretos, os educandos constroem os conhecimentos matemáticos de acordo com os níveis de inteligência.

Mais uma vez o professor assume o papel de mediador do processo onde o aluno é o protagonista e o seu erro não é mais visto como uma deficiência, mas como uma oportunidade pedagógica de intervenção para que se possa corrigir o processo, permitindo que através deste se possa contemplar o aprendizado pleno do educando.

Novas correntes filosóficas surgem no país dentre elas cita-se a Socioetnocultural.

> Essa corrente surge como crítica à "educação bancária", que apenas transmite ao/a aluno/a o conhecimento pronto e acabado, privilegiando uma valorização do saber trazido pelos/as alunos/as. Essa tendência se apoia nas ideias pedagógicas de Paulo Freire e na Etnomatemática de Ubiratan D'Ambrosio (Lara, 2003, p.16).

Cabe aqui citar a relevância do programa denominado Etnomatemática defendido por Ubiratan D'Ambrosio que o define como "as diferentes formas de matemática que são próprias de grupos culturais". Tal programa é ratificado pelos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) "documento que o Brasil se compromete a produzir com intuito de expandir a Educação Básica da população na década de 1990 por meio da Declaração de Nova Delhi, assinado em 16 de dezembro de 1993" (Valente, 2023, p. 14).

Diante das novas propostas para o ensino da matemática, o governo brasileiro deixou a cargo da Secretaria do Ensino Fundamental a construção dos PCN, foi criado um grupo de especialista composto por educadores brasileiros e educadores de países da América do Sul e da Europa. A nova matemática considerava-se como relevância social refletindo diretamente no que se propunha a ensinar (Valente, 2023).

Seguindo a linha cronológica, o documento curricular oficial previsto na LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira) 9394/96, foi homologado em 14 de dezembro de 2018 a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio. Após muitas discussões e oposições dos estudiosos das Universidades Públicas e de pesquisadores dos grupos de pesquisa da educação brasileira como a Anfope (Associação Nacional pela Formação dos Profissionais da Educação) e outros órgãos, estes pedem revogação do novo Ensino Médio que está pautado em Formação Geral Básica e Itinerários Formativos.

Justificando tal pedido, ao contexto e aos profissionais que elaboraram o documento até chegar na sua homologação. Assim, em relação ao ensino de matemática tem-se

> No Ensino Médio a área de matemática e suas tecnologias se propõe a consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens adquiridas ao longo do Ensino Fundamental. E, para tanto, coloca-se como pressuposto a inter-relação entre os conhecimentos já tanto explorados nos anos anteriores da escolarização dos estudantes, isso para possibilitar que eles tenham chances de construir uma visão mais integralizada da matemática e suas aplicações a fatos da realidade (Brasil, 2018, p.527).

Dessa forma, é notório que o ensino e aprendizagem matemática na etapa final da Educação Básica, não pode se dissociar dos conhecimentos prévios dos educandos, tomar como ponto de partida tais conhecimentos, permitirá a consolidação e o aprofundamento das competências e habilidades previstas em etapas anteriores. Direcionar o ensino e aprendizado matemático nas instituições de ensino para situações vivenciadas no cotidiano dos alunos, permitirá a utilização dos conhecimentos adquiridos nas salas de aula como ferramenta valiosa para a resolução de demandas que possam surgir no seu cotidiano.

Para esse fim, se faz necessário o uso de metodologias ativas que permitam que o estudante participe ativamente da construção e apropriação dos conhecimentos matemáticos, sendo protagonista da sua aprendizagem.

> Nas metodologias ativas, o professor atua como facilitador no processo de ensino-aprendizagem. Suas funções são as de provocar, construir, compreender e refletir, junto com o aluno, para orientar, direcionar e transformar a sua realidade. O aluno, em contrapartida, é o centro do processo, deve ter uma postura ativa, trabalhar com a autoaprendizagem, curiosidade, pesquisa e tomada de decisões, bem como gozar de autonomia e reflexão para que desenvolva uma atitude crítica e construtiva que o prepare à prática profissional (Santos, Lara e Luchesi 2022, p. 15).

Desse modo, o professor passa a ser um orientador do processo que objetiva incentivar os estudantes a apreenderem de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, uma dessas metodologias são os jogos, que além de uma ferramenta potente de socialização, quando planejada para fins pedagógicos, torna-se uma ferramenta poderosa no processo de ensino e aprendizagem.

## 1.2 O jogo e a aprendizagem matemática

Diante dos desafios impostos pelo atual contexto educacional vivenciado nas instituições de ensino no Brasil, faz se necessário que os agentes envolvidos nesse meio tão necessário para a evolução de uma sociedade, estejam cada vez mais distanciados de práticas educacionais retrógradas e tão pouco efetivas e busquem, através da contextualização, cada vez mais dar sentido aos conhecimentos que são abordados em sala de aula, evitando vícios e métodos que dificultam algo que clama por melhoras, nesse sentido o esforço do educador comprometido com essas transformações é fundamental.

> Sabe-se que há professores que ministram muito bem suas aulas, têm uma classe ótima e com rendimento, mas que não contam aquele truquezinho que se usa num certo tipo de equação. Deixam para pedir na prova justamente esse

> tipo de equação. E, satisfeitos, pensam: “Agora consegui pegar esses alunos que julgam tão sabidos. Agora eles estão nas minhas mãos”. Conseguem pegar os alunos, e as classes estão em suas mãos! Sua fama de “duro” corre; outros admiram “o quanto ele sabe” e alguns poucos, que têm um talento natural para matemática e que conseguem desvendar o truque, sentem-se realizados. Mas esses professores não estão na classe dos que eu considero como educadores. Têm mais vocação para caçador! Isso está ligado à visão de humanidade e à percepção de ser humano que esses professores têm (D’Ambrosio, 2005, p. 84).

Praticar o ensino de matemática de forma contextualizada não deve ser somente uma tendência pedagógica, mas um cuidado do professor no que diz respeito ao atendimento das necessidades do aluno em compreender as relações deste com o mundo ao qual estão inseridos, assim, delegando a eles a possibilidade do pertencimento a ação pedagógica, além do fato de permitir que estes aprendam com significado, é uma necessidade cada vez mais constante, dessa forma, recorrer a contextualização permitirá sair da abstração para algo palpável e compreensível, a adoção de atitudes humanizada dentro do contexto educacional corrobora para a construção de um conhecimento matemático com significado.

Dessa forma se faz necessário desenvolver uma educação matemática que promova a aprendizagem significativa, ou seja, uma aprendizagem desenvolvida a partir de experiências adquiridas por meio das relações que ocorrem entre o indivíduo e o meio do qual este faz parte, tais experiências possibilitam a geração de novos conhecimentos alicerçados em modificações desencadeadas por transformações permitindo que novos significados sejam dados aos já existentes, de uma forma mais elaborada e organizada. De acordo com Moreira

> Aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende (2016, p. 2).

Uma boa forma de dar significado aos conhecimentos matemáticos no dia a dia no ambiente escolar seria a adoção dos jogos matemáticos como ferramenta pedagógica. Segundo Campos (2019, p.14) “usar novas metodologias para ensinar é imprescindível na educação de hoje. Uma ferramenta valiosa são os jogos que auxiliam na aprendizagem significativa”. Para alcançar esses resultados, faz-se necessário um bom planejamento voltado para a elaboração didática que possibilite ganhos em relação ao que se pretende alcançar e fugir da condição do jogar por jogar.

Falar de jogos no processo de ensino e aprendizagem de matemática é antes de tudo refletir sobre práticas associadas a algo comum em nossas vidas, desde o princípio do desenvolvimento. “Os jogos nas aulas de matemática, destaca sua relevância, centralmente, devido à sua potencialidade para o desenvolvimento do pensar matemático, da criatividade e da autonomia dos educandos” (Ribeiro, 2009, p.13). A prática do jogo exige por parte de quem o pratica concentração para a tomada correta de decisão frente aos desafios que ele propõe.

Faz-se fundamental compreender a potencialidade do jogo como uma ferramenta pedagógica poderosa no desenvolvimento de metodologias de ensino e aprendizagem matemática, pois ele é capaz de despertar no educando a curiosidade, o interesse e a vontade em praticá-lo, que por sua vez irá propiciar aos seus praticantes o convívio com regras e estratégias que irão permitir vencer o jogo ou o adversário. Tomado pelo interesse que o jogo é capaz de propiciar, pois estamos tratando de algo que é inerente aos seus hábitos. Cabe ressaltar que a atenção, a prática e o envolvimento com a ação não são suficientes para garantir a aprendizagem.

> É necessário fazer mais do que simplesmente jogar um determinado jogo. O interesse está pelo prazer que esta atividade lúdica proporciona, entretanto, é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa ser útil à aprendizagem, principalmente para os adolescentes e adultos. Além disso [...] a atividade de jogo proposta, represente um verdadeiro desafio ao aluno, ou seja, que se torne capaz de gerar “conflitos cognitivos” ao aluno, despertando-o para a ação, para o envolvimento com a atividade, motivando-o ainda mais (Grando, 2004, p. 25).

São situações como as descritas acima que permitem ao professor desenvolver um aprendizado participativo e interessante, voltado para uma ação prazerosa e pertinente ao cotidiano do educando, a utilização de tal metodologia no processo de ensino e aprendizagem matemática pode oportunizar ao educando o convívio com os conhecimentos matemáticos sem os traumas que a disciplina por si só tende a despertar, quer seja por equívocos cometidos durante o desenvolvimento inicial do processo de ensino e aprendizagem, quer seja por ações pedagógicas equivocadas e ou por preconceitos adquiridos durante o seu desenvolvimento.

A ação do professor baseada em jogos permite que o aluno desenvolva novas possibilidades na resolução de problemas, isso permite ao professor compreender o educando obtendo assim repertório necessário para consolidar a sua ação pedagógica (Grando, 2004). Oportunizar ao aluno o uso de uma ferramenta poderosa como o jogo na construção de estratégias para a resolução de problemas, podem possibilitar que este desenvolva de forma lúdica e segura um repertório de possibilidades que ajudaram a prepará-lo para conviver de forma segura em sociedade e até mesmo com o mundo do trabalho, sendo necessário o comprometimento com o caráter lúdico do jogo.

> Nesse contexto, o trabalho com jogos matemáticos pode vir a se tornar uma alternativa para a elaboração de didáticas que objetivem a otimização do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, no que diz respeito à assimilação de técnicas de criação de algoritmos e utilização do raciocínio lógico-matemático na resolução de problemas (Melo e Lima, 2022, p.3).

Diante do exposto, é importante propor jogos de estratégias que despertem a curiosidade na maioria dos alunos e possibilite o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, buscando respeitar o tempo de aprendizado de cada um, promovendo o ensino e aprendizado de matemática mais prazeroso e divertido, além de estimular a percepção de determinados algoritmos e o desenvolvimento de habilidades ligadas ao cálculo mental. Nesse sentido, propõe-se como jogos a serem adotados nesse trabalho o Tangram e a Torre de Hanói.

### 1.3 Tangram associado a potência de base 2 com expoente inteiro negativo

Os desafios propostos pela atual conjuntura vivenciada nas instituições de ensino no país, seja pelas novas perspectivas delineadas pela BNCC com relação ao currículo de matemática, ou pelos desafios constantes impostos pelo público atendido nessas instituições, público esse  submerso as efervescentes revoluções tecnológicas e sociais, que clama por mudanças nos padrões de ensino e aprendizagem em especial de matemática, que na maioria das vezes é vista como uma área do conhecimento pautada no rigor e na abstração tornando a ação pedagógica um processo complexo.

Visando atenuar tais desafios, propõe-se a adoção de práticas pedagógicas que favoreçam a construção do conhecimento em detrimento da sua reprodução. Nesse sentido, como já pautado anteriormente os jogos podem ser uma ferramenta eficaz na introdução, desenvolvimento, construção e consolidação de conhecimentos matemáticos.

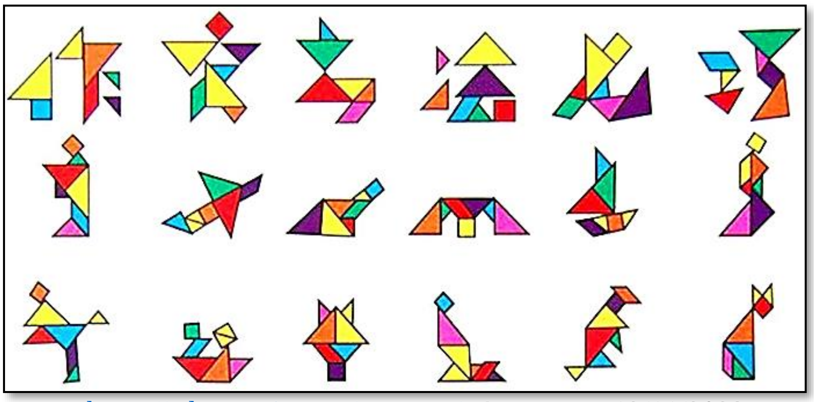
Dentro dessa linha, lançar-se-á o Tangram (Figura 01), um jogo milenar formado por 7 peças no formato de figuras geométricas, são elas: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um paralelogramo e um quadrado.

**Figura 01** - Quadrado formado pelas peças de um Tangram

Fonte: https://novaescola.org.br/. Acesso em 12/11/2023.

Tais peças quando reunidas formam um quadrado ou dependendo da forma como forem dispostas podem formar várias figuras envolvendo toda ou parte das peças, de acordo com a (Figura 02), disposta a seguir.

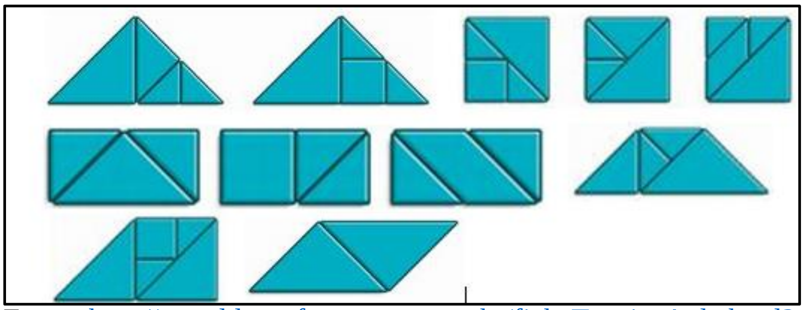
**Figura 02** - Construções feitas pela reunião de todas as peças de um Tangram.



Fonte: https://educamais.com/tangram/. Acesso em 12/11/2023.

A ideia central do jogo consiste na manipulação de todas as peças sem sobreposição com o intuito de obter tais formações a exemplos das construções obtidas na (Figura 02). Contudo, essas não são as únicas construções que se pode obter por meio de manipulações sem sobreposições das peças conforme nos mostra a (Figura 03) representada a seguir.

**Figura 03** - Formas geométricas feitas pela reunião das 7 peças de um Tangram.



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25696. Acesso em 12/11/2023.

Ao se manipular, sem sobreposição, algumas peças ou até mesmo todas as peças do Tangram, é possível construir formas geométricas planas conforme as apresentadas como exemplo nas ilustrações contantes nas Figuras 02 e 03, tais construções como as já vista e outras tantas podem ser obtidas com todas as 7 peças ou com partes dessas peças que compõem o jogo representado na Figura 01.

O Tangram é um jogo lúdico e milenar que não se sabe ao certo de onde se originou, mas, suspeita-se que este tenha sua origem na China.

> [...] é um jogo milenar que exige astúcia e reflexão. Originário da China e anterior ao século XVIII, pouco se sabe da sua verdadeira origem. Constituído por sete peças[...] pode se representar várias figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las. Segundo a Enciclopédia do Tangram é possível montar mais de 1700 [...]. A referência mais antiga conhecida é uma gravura em madeira datada de 1780 de Utamaro. O livro mais antigo foi publicado na China em 1813. [...] Os eruditos assumem que o Tangram começou no Oriente (Forster e Horbach, 2012, p.3-5).

Por trás da história do Tangram existem várias lendas enaltecendo a magia que envolve esse jogo milenar, que tem o poder de fascinar e desafiar a mente de seus praticantes, desenvolvendo o raciocínio lógico. Dentre tais lendas, destaca-se "o discípulo e o mestre", que relata:

> Um jovem chinês despedia-se do seu mestre para fazer uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse: Com esse espelho, registarás tudo o que vires durante a viagem para me mostrares na volta. O discípulo, surpreso, indagou: Mas mestre, como poderei mostrar-lhe, com um simples espelho, tudo o que encontrar durante a viagem? No momento em que fazia essa pergunta, o espelho caiu-lhe das mãos e quebrou-se em sete peças. Então o mestre disse: Agora poderás, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viste durante a viagem (Martins, Marques e Ramos, 2015, p. 11-12).

O Tangram não é utilizado apenas como jogo de descontração, se for bem explorado ele pode ser útil em psicologia, desenho, filosofia e pedagogia. Com relação a matemática, se bem planejado pode ser fundamental no desenvolvimento de conhecimentos como: ângulos, nome dos polígonos, diagonal, paralelismo e perpendicularidade, ponto médio, segmento de reta, simetria, semelhança, números inteiros e fracionários, porcentagem, decomposição de figuras geométricas, entre outros.

Neste estudo, propõe-se a sua utilização na exploração das ideias de potenciação na base 2 com expoentes inteiros negativos. Laranjeira (1997, p.37) defende que esse jogo quando bem explorado nas atividades de ensino e aprendizagem, “estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas”.

É nessa perspectiva que se dá ênfase ao jogo como potencial ferramenta capaz de proporcionar suporte lúdico no desenvolvimento dos conhecimentos sobre potenciação por meio da resolução de problemas envolvendo potências com expoente inteiro negativo na base 2. Ao fazer-se uma busca ao longo do tempo, nota-se inferências históricas relacionadas ao desenvolvimento dos conhecimentos sobre potenciação que datam de muito tempo **a.C.**, isso graças a contribuições de grandes matemáticos.

Os primeiros relatos tratando da operação com potenciação foram encontrados em **papiro egípcio** (2100-1580 **a.C.)**, cálculos em tabulinha de argila mostram as contribuições dos **babilônicos**, o **papiro** de **Rhind** escrito por volta de 1650 **a.C.**, traz em um dos seus problemas potências na base 7, o uso da denominação potência em contexto matemático é atribuído a **Hipócrates de Quio** 407 **a.C.**, por volta de 250 a.C., **Arquimedes** através do livro **Psammites** (Computador de Areia) mostra que números muito grande podem ser escritos como potência, 250 **d.C.**, em seu livro **Arithmetica** faz uso de abreviações para potência de número, a notação de potência utilizada atualmente é atribuída ao matemático francês **René Descarte** por meio da sua obra Géométrie 1637 d.C. (Richartz, 2005).

Percebe-se, diante do exposto que foi significativa a contribuição de grandes matemáticos e de civilizações no decorrer dos tempos para se chegar aos conhecimentos de potenciações, como os que são vivenciados atualmente em sala de aula. Cabe aqui, uma definição para potenciação, segundo Ramos et al. (2022, p.8) "A potenciação é uma operação da matemática que consiste no produto de fatores iguais, em que o número desses fatores é indicado pelo valor do expoente". "Seja $\boldsymbol{a}$ um número real positivo. Dado um $\boldsymbol{n > 0}$, a potência $\boldsymbol{a^n}$ é definida como o produto de fatores iguais ao número $\boldsymbol{a}$. Ou seja: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n fatores)" (Lima, 2016, p.8).

Ainda de acordo com Lima (2016) o produto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ com ($\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ números inteiros positivos) corresponde a propriedade fundamental da potência. Para definir $a^0$ mantendo a validade da propriedade fundamental é necessário considerar que $a^0 = 1$, o que torna verdade o fato de que $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$.

Em relação a propriedade fundamental, Lima (2016) defende que seja estendido ao conceito de potência, de forma que seja contemplado o expoente negativo mantendo a validade da propriedade fundamental abaixo:

$$\boldsymbol{a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

"Assim, a única maneira possível de definir a potência $a^n$ (com $\boldsymbol{n}$ inteiro) de tal maneira que a relação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ continue verdadeira, mesmo quando m e n são inteiros positivos ou negativos, consiste em pôr: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$" (Lima, 2016, p.9).

Tendo como referência a ordem cronológica do tempo, é fato, o quão antigo é esse conhecimento, muito embora tenha surgido da necessidade de escrever números muito grande como um produto de fatores iguais, diante de sua importância e complexidade no ato do processo de ensino e aprendizado, esse é um tema que merece atenção, visto que "Hoje a potenciação é utilizada não só na Matemática, mas em outras áreas como: economia, física, biologia, ciências da computação, engenharia, dentre outras" (Ramos et al., 2022, p.20).

Partindo desse pressuposto, é possível associar o ensino de potenciação em matemática com abordagem na metodologia de resolução de problemas, a BNCC prega que "no Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas" (Brasil, 2018, p. 531). O currículo de matemática associa as competências a habilidades que precisam ser desenvolvidas nessa etapa da Educação Básica, para tanto, cabe ao educando:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (Brasil, 2018, p. 531).

Para que alcancem e sejam asseguradas essas habilidades, os educandos do Ensino Médio em especial da 1ª série, devem vivenciar a construção dos conhecimentos de potência, ao se tratar de temas relacionados a função exponencial, função logarítmica e na área de ciências da natureza em especial Física, pode-se citar as representações em notação cientifica. Faz-se necessário, propor a esse público, ferramentas que permitam acima de tudo favorecer o desenvolvimento e a consolidação dos conhecimentos sobre potência. O que pode ser promovido através do uso de ferramentas lúdicas que permitam o favorecimento do ensino e aprendizagem dos conceitos de potenciação no que concerne ao uso de expoente inteiro negativo na base 2.

Todavia, caberá ao professor o planejamento, a organização e aplicação de um trabalho que busque coordenar as ações a serem desenvolvidas em tornos dos conhecimentos prévios dos educandos em relação ao material lúdico a ser adotado como ferramenta pedagógica. A apropriação desses conhecimentos no desenvolvimento de novos conceitos matemáticos propostos, é essência

> As atividades a serem desenvolvidas com o Tangram poderão ter maior êxito quanto maior for o conhecimento acerca deste material, principalmente por sua construção e a relação existente entre as suas peças. A exploração feita em torno deste material poderá ter maior ou menor profundidade, de acordo com o nível de conhecimentos que os alunos têm ou os objetivos que se busca alcançar (Martins, Marques e Ramos, 2015, p. 20).

Diante do exposto, é importante que, no planejamento, a atividade a ser abordada possa ser desenvolvida partindo de uma relação direta do conhecimento com a estrutura de composição do quebra-cabeça, nesse caso, destaca-se a relação da potência de base 2 com expoente inteiro negativo que deve ser estimulado diretamente pelo professor, a fim de construir conceitos e possibilidades de aprendizagem, tendo o professor como mediador que precisa ter "o objetivo de ensinar e, por meio de suas ações, garantir que o que está sendo ensinado realmente seja aprendido" (MEIER, 2004, p. 37). Faz-se necessário que o educador tome para si o controle das ações, isso permitirá que as metas e os objetivos traçados sejam alcançados.

Durante a construção do jogo no ambiente de sala de aula, cabe ao professor fornecer mediante a uma ação bem elaborada, através de uma sequência didática, mecanismos que permitam aos educandos desenvolver atividades coordenadas em oficinas de construção fazendo uso de objetos manipuláveis, a partir daí, estimular os alunos a fazer uso do quebra-cabeça praticando o jogo no que concerne o objetivo principal de sua prática que é a construção de formas mediante a manipulação de suas peças. Findado a fase de reconhecimento da dinâmica para o qual este se propõe, é hora de estimular a manipulação coordenada de tais peças por meio de sobreposição através de regras pré-estabelecidas, as ações devem estimular a determinação da fração correspondente a cada uma das 7 partes.

O foco agora está na identificação de um padrão que permita associar a fração corresponde a cada uma das peças do quebra cabeça ao que se pretende alcançar. Partir-se de uma situação determinada por (Lima, 2016) que relaciona sequências de progressão geométrica a potências na base 2 e os seus expoentes a uma sequência de progressão aritmética, conforme o Quadro 01.

**Quadro 01 -** Comparação entre os termos de uma progressão geométrica e aritmética

| **Progressão geométrica (PG)** | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Potências na base 2** | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ | $2^{10}$ |
| **Progressão aritmética (PA)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Fonte: Autor, 2024.

Fazendo essa comparação constata-se que é possível reduzir uma multiplicação a uma adição, na multiplicação por exemplo dos termos $(8 \times 64)$ da progressão geométrica, para obter o resultado do produto, basta somar os termos correspondentes a 8 e a 64 na progressão aritmética (3 + 6 = 9), assim, teremos o termo na progressão geométrica que corresponde a soma. (Nota-se na análise do Quadro de comparação que o valor em questão é 512.)

A regra explanada nada mais é que a extensão da propriedade fundamental da potenciação exposta anteriormente. A utilização da menor peça do quebra-cabeça como referência permite por sobreposição obter um conjunto de frações que correlacionam cada peça ao todo componente do jogo, coincidentemente cada uma das frações obtidas permite transformar o denominador em uma potência na base 2.

Assim, partindo-se da unidade representada pelo jogo e tomando como referência uma sequência de potências em que à esquerda da unidade é composta por potência de base 2 com expoente natural e à direita os termos fracionários da sequência, obtidos por meio da análise das peças do quebra-cabeça que será convertida para base 2 com expoente inteiro negativo. Pretende-se mediante a utilização dessa ferramenta lúdica pedagógica, desenvolver os conceitos sobre potenciação com expoente negativo buscando-se relacionar o jogo ao conceito de potenciação na base 2 com expoente inteiro negativo. O Quadro 02 a seguir nos dará uma visão da temática.

**Quadro 02 -** Sequência formada por potência de base 2 com expoente inteiro

| Sequência de potências | ⋯ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | $2^{-1}$ | $2^{-2}$ | $2^{-3}$ | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Produto para determinar os termos da sequência | ⋯ | $\frac{1}{2} \times 2^3$ $= 2^2$ | $\frac{1}{2} \times 2^2$ $= 2^1$ | $\frac{1}{2} \times 2^1$ $= 2^0$ $= 1$ | $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ $= 2^{-1}$ | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $= 2^{-2}$ | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ $= 2^{-3}$ | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$ $= \frac{1}{16}$ $= 2^{-4}$ | ⋯ |

Fonte: Autor, 2024.

Tomando como referência as informações contidas no (Quadro 02) conclui-se que a sequência de potências na base 2 com expoente inteiro é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e os expoente formam uma progressão aritmética de razão igual a –1, o que permitirá o desenvolvimento da temática em torno da relação do jogo Tangram e a potência de base 2 com expoente inteiro negativo.

## 1.4 O uso da Torre de Hanói com ênfase na função exponencial

Dando continuidade a relação de conceitos matemáticos aplicados ao jogo como ferramenta lúdica adotada na resolução de problemas, se propõe a vinculação do estudo de função exponencial ao jogo Torre de Hanói. Tratando-se de função exponencial é preciso lembrar que esse conceito matemático é abordado em especial no Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, tendo todo um contexto histórico.

De acordo com Santos (2018, p. 48) "O conceito de exponencial como função foi desenvolvido por Bernoulli em 1697 com a obra Principia Calculi Exponentialum seu Percurrentium, onde apresenta diversos cálculos em que a variável da função é o expoente".

Para chegar a tais conceitos, foram necessárias várias contribuições de grandes pensadores matemáticos, certamente decorrentes de falhas e acertos. Essas condições quando se tratam de conhecimentos matemáticos, são pontes para se chegar ao que se tem atualmente nos livros didáticos adotados nas instituições de ensino, esses subsídios foram essenciais para "o desenvolvimento da notação exponencial até que René Descartes, em meados de 1937, nos deixou a notação de potência utilizada hoje, pela utilização de numerais como expoente de uma determinada base" (Santos, 2018, p. 48).

Para definir função exponencial de acordo como Lima (2013, p 153-156):

> Seja $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, a função exponencial de base $a$, $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, representada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a contemplar as seguintes propriedades, para todo $m, n \in \mathbb{R}$:
> 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
> 2) $a^1 = a$;
> 3) $\begin{cases} m < n \Rightarrow a^m < a^n \ e \\ m < n \Rightarrow a^n < a^m \ quando \ 0 < a < 1 \end{cases}$;
> 4) A função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente;
> - Se $a > 1$ então $a^x$ cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande;
> - Se $0 < a < 1$ então $a^x$ torna-se arbitrariamente muito grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.
>
> 5) A função exponencial é contínua;
> 6) A função exponencial $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

A demonstração de tais propriedades não foram relacionadas porque não são exigidas nessa produção, mas são encontradas na obra "Números e funções reais da coleção PROFMAT". Não só as propriedades possuem relevância no contexto de função exponencial, como é preciso considerar que toda função também possui representação gráfica, esse tipo de apresentação de informações que são inerentes ao cotidiano do aluno, torna-se indispensável, pois, "Os gráficos, além do apelo visual, favorecem a observação de comportamento que são difíceis de serem percebidos em outras representações (numéricas, algébricas e por tabelas)" (Santos, 2018, p. 52-53).

Em se tratando da função exponencial as suas representações gráficas podem ser utilizadas como ferramentas para representar os mais diversos temas de fundamental relevância e importância social, crescimento populacional, taxa de transmissão de vírus em uma pandemia (SARS-COVID 19), desempenho de investimentos rentáveis ou não rentáveis no mercado financeiro, degradação de certos componentes radioativos, entre outros.

Documentos oficiais como a BNCC abordam tais temáticas nas habilidades previstas para a etapa final da Educação Básica. A temática relacionada a questões financeiras por exemplo, é retratada na habilidade EM13MAT304 que diz "Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros" (Brasil, 2018, p. 536).

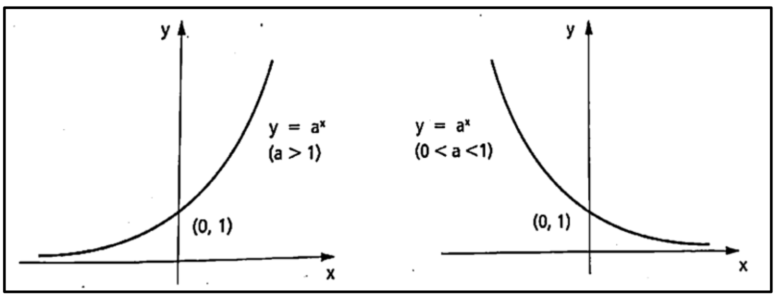
Nestes termos, visualiza-se a relação da função exponencial com a variação de grandezas pertinentes, tanto ao mundo financeiro como a outros contextos abordados em matemática, uma maneira prática de tratar variações de grandezas são as representações gráficas, conforme tratado na habilidade EM13MAT403.

> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função (Brasil, 2018, p. 539).

Com relação ao gráfico cartesiano da função exponencial $f(x) = a^x$, Iezzi (2013, p.33) afirma:

> 1º) a curva representativa está toda acima do eixo das abscissas $x$, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
> 2º) intersecta o eixo das ordenadas $y$ no ponto $(0,1)$;
> 3º) se $a > 1$, teremos o gráfico de uma função crescente e se $0 < a < 1$, teremos o gráfico de uma função decrescente;
> 4º) toma uma das formas representas na (Figura 04).

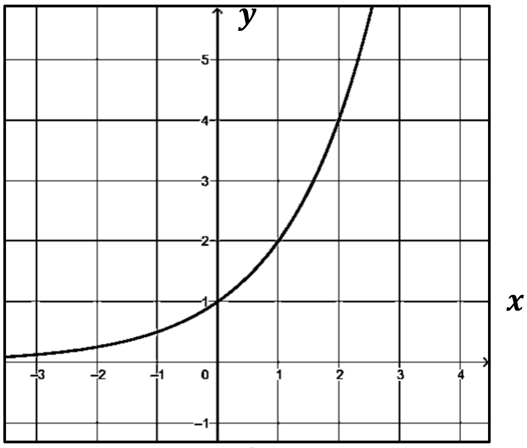
**Figura 04 -** Representação gráfica da função exponencial.




Fonte: Imagem do livro fundamentos de matemática elementar 2, logaritmo, 2013.

Tomando-se como exemplos práticos os gráficos das funções exponenciais nas bases 2 e $\frac{1}{2}$, onde $a = 2 > 1$ e $0 < a = \frac{1}{2} < 1$. Permitirá observar durante o emprego dessas duas situações por meio de construções gráficas, a visualização das determinações dadas por Iezzi (2013) conforme (Figuras 05 e 06).

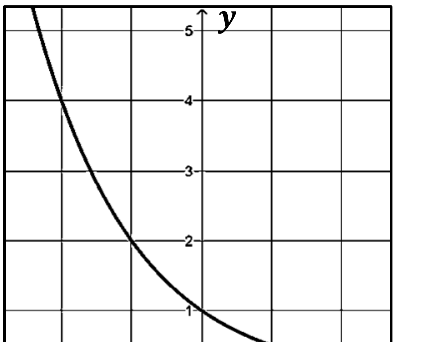
**Figura 05 -** Gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, com $a = 2$




Fonte: Autor. GeoGebra, 2024.

Na (Figura 05), viu-se o comportamento da curva do gráfico quando se trata de uma função exponencial crescente, ou seja, quando dado $f(x) = a^x$, tem-se $a > 1$.

**Figura 06 -** Gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, com $a = \frac{1}{2}$.




Fonte: Autor. GeoGebra 2024.

Na Figura 06, a curva retrata o comportamento do gráfico quando o que está em questão é uma função exponencial decrescente, ou seja, quando dado $f(x) = a^x$, tem-se $0 < a < 1$.

Os gráficos representados nas Figuras 05 e 06, permite-nos observar o comportamento da curva determinada pelas funções exponenciais $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, respectivamente crescente e decrescente, neles é possível constar que de fato a curva está acima do eixo das abscissas $\boldsymbol{x}$ e que ambos intersectam o eixo das ordenadas $\boldsymbol{y}$ no ponto (0,1).

Tratar do conceito de função exponencial em educação matemática é antes de tudo permear por um conhecimento que é considerado por partes dos educandos como difícil, ao mesmo tempo que é fundamental, pois este antecede o estudo de logaritmo, além do que, é indispensável em outras áreas das ciências exatas, como também nas ciências da saúde e nas ciências sociais.

Todavia, faz-se necessário permitir o uso de metodologias educacionais que proporcionem a aprendizagem matemática, evitando insucessos, seja por dificuldades adquiridas na Educação Básica, por desinteresse por parte dos educandos ou por métodos tradicionais adotados em sala de aula para a abordagem dos objetos do conhecimento previstos.

E como referência metodológica e instrumentos de ensino utilizar-se-á os jogos como ferramenta adotada para facilitar o ensino e aprendizagem matemático. Para Sousa (2023, p.27-28):

> O uso de jogos no ensino de matemática tem se mostrado uma ferramenta valiosa para auxiliar os alunos a compreenderem conceitos matemáticos de maneira mais clara e lúdica. [...] oferecem uma forma divertida e interativa de explorar conceitos matemáticos e aplicar esses conhecimentos em situações reais. Isso ajuda a motivar os alunos e aumenta o seu interesse pela disciplina. Um dos principais benefícios dos jogos é que eles incentivam os alunos a participarem ativamente do processo de aprendizagem, ajudando a tornar a matemática mais interessante e envolvente. Além disso, [...] ajudam a desenvolver habilidades sociais, como trabalho em equipe, comunicação e resolução de conflitos.

Assim, como uma forma de favorecer o pensamento criativo e o raciocínio lógico é essencial propiciar aos alunos ferramentas metodológicas com abordagens práticas envolvendo o lúdico, que também permitirá o desenvolvimento da capacidade de abstração e estruturação algorítmica. Nesse sentido o jogo Torre de Hanói se mostra como potencial ferramenta a ser associada a construção do conceito de função exponencial, visto que se trata de:

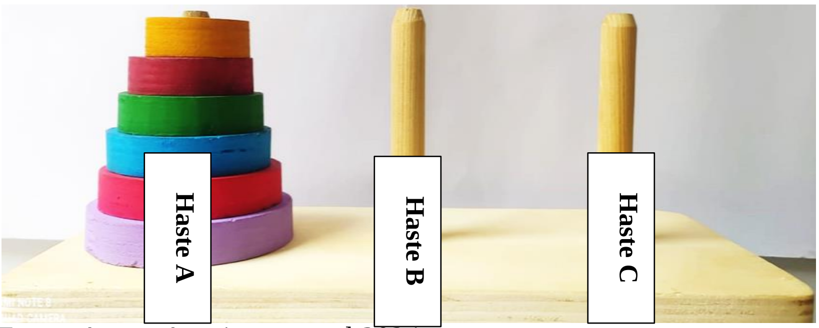
> Um jogo de raciocínio lógico, que possui regras simples, claras e um grande potencial para desenvolver o conteúdo de matemática e computação nos alunos, mas envolve o desenvolvimento dos quatro pilares do pensamento computacional (abstração, reconhecimento de padrão, decomposição e algoritmo). [...], que inclui a capacidade de abstrair detalhes e retirar o cerne do problema, reconhecer padrões, [...] decompor o problema existente em problemas menores e mais fáceis de resolver e de designar um passo a passo das etapas para a solução apropriada do problema (um algoritmo) (Rodrigues, 2020, p. 21).

De acordo com exposto, o jogo Torre de Hanói é uma ferramenta com muitas possibilidades que bem explorado pode favorecer o desenvolvimento de conceitos importantes, dentre eles os relacionados a função exponencial. Há todo um contexto histórico envolvendo o jogo Torre de Hanói, conforme se observa na lenda que diz.

> Quando Deus criou o mundo, colocou, no templo de Benares, o jogo de Hanói com 64 andares de ouro. Por determinação de Brama, os sacerdotes ficaram encarregados de transportar a Torre de ouro da haste A para a haste C, podendo usar a haste B como apoio, de acordo com as regras do jogo. Os movimentos, desde o princípio do mundo, são feitos pelos sacerdotes noite e dia, sem parar. Segundo a cresça dos hindus, a terminação desse jogo vai assinalar o fim do mundo [...] (Tahan, 1974, p. 140 apud Gualandi et al, 2021, p.97).

O trabalho de transportar toda a pilha formada por 64 discos dispostos em uma das três hastes na ordem decrescente de diâmetro da base para o topo, foi conferido aos monges por Brama que deveriam trabalhar dia e noite até que a missão estivesse completa (Rodrigues, 2020). Assim, segue a (Figura 07) que representa a Torre de Hanói com 3 hastes e 6 discos coloridos.

**Figura 07 -** Jogo “Torre de Hanói” com 6 discos coloridos.




Fonte: Autor. Arquivo pessoal 2024.

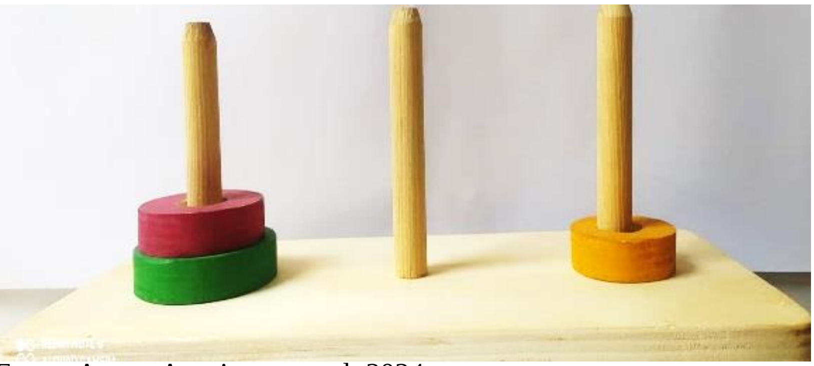
De acordo com a lenda, o jogo consiste no desafio de transportar todas as peças da torre da haste A para a C, utilizando a haste B como apoio, é importante ressaltar que a transferência também poderia ser feita da haste A para a B usando C como apoio, é essencial seguir as regras do jogo. Segundo Rodrigues (2020, p. 24) a “Primeira regra é mover um disco de cada vez; segunda regra a peça maior nunca pode ir sobre uma peça menor, em nenhuma circunstância”.

Logo a seguir (Figuras 08 a 15) estão dispostos todos os movimentos do jogo com três peças seguindo as regras descritas anteriormente.

**Figura 08 -** Posição inicial do jogo.

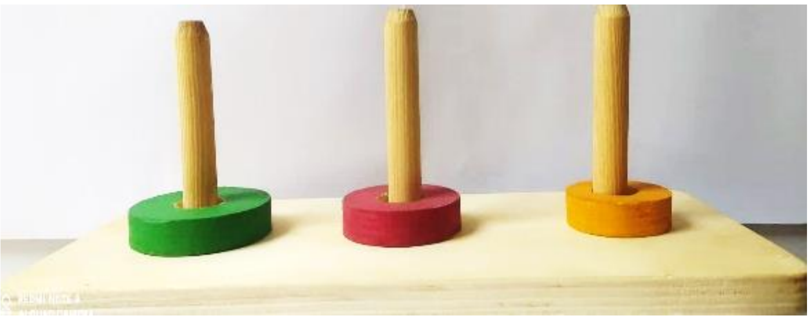
Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

**Figura 09 -**1º Movimento do jogo.



Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

**Figura 10 -** 2º Movimento do jogo.

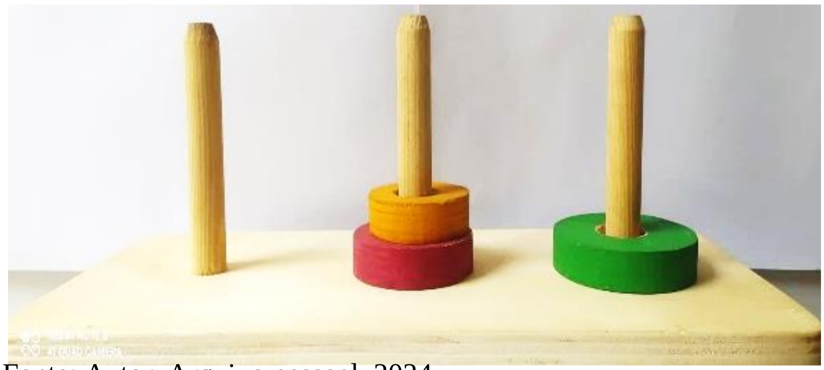


Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

**Figura 11 -** 3º Movimento do jogo.

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

**Figura 12 -** 4º Movimento do jogo.

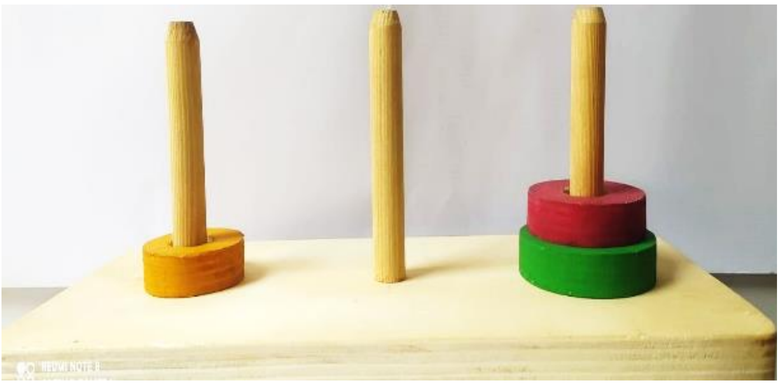


Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

**Figura 13 -** 5º movimento do jogo

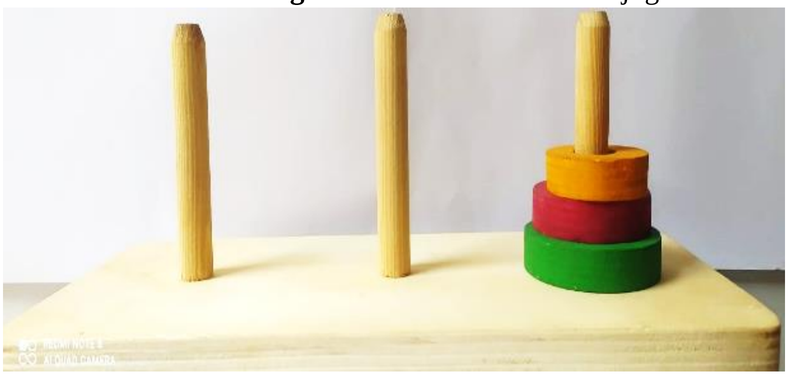
Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

**Figura 14** – 6º Movimento do jogo



Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

**Figura 15 -** 7º Movimento do jogo



Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

Ao observar os movimentos e as regras que regem esse jogo, podemos indagar-nos de onde vem o nome “**Hanói**”? Por volta do Século XIX, uma extensão da Ásia formada por Camboja, Laos e Vietnã formavam uma região conhecida como Indonésia Francesa, “Hanói, nome chinês que significa dentro do rio, era a capital da região norte do Vietnã e atual capital do país” (Silva, 2015, p. 32). O Vietnã é um país do continente asiático localizando entre a Índia e a China.

De acordo com Silva (2018), o precursor desse jogo desafiador do tipo quebra-cabeça, foi o matemático francês M. Édouard Lucas, que inventou o jogo quando ministrava aula de matemática na Lycées Saint-Louis. Essa instituição de ensino pública é uma Escola pós-secundária localizada em Paris capital da França. Ainda para Silva (2018) Lucas propôs comercialmente o jogo em 1883 como um problema no terceiro volume de sua obra Récréations Mathematiques. Algum tempo depois em 1889, o jogo foi apresentado de forma mais completa e elaborada.

A princípio, propõe-se que o jogo Torre de Hanói é uma ferramenta a ser adotada na introdução do conceito de função exponencial. Trata-se de uma intervenção pedagógica em que o jogo será aplicado como possibilidade metodológica no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de função exponencial para estudantes da primeira série da última etapa da Educação Básica. A metodologia será apresentada com a finalidade de “mostrar a matemática como algo indispensável na formação do indivíduo, que contribui para a compreensão do mundo pelo ser humano e que ele contribua de maneira significativa para a sociedade” (Rodrigues, 2020, p.32).

Dessa forma, permite-se o desenvolvimento de uma prática educacional que induza desenvolver no educando habilidades, tais como a capacidade de elaborar estratégias, modelar e solucionar problemas e favorece as relações sociais. Oportunizar isso no ambiente de aprendizagem corrobora para o enriquecimento das aulas de matemática.

É comum por parte dos educadores apresentar os conceitos de função exponencial em sala de aula por meio de exposições, em que as únicas ferramentas utilizadas para esse processo são os resumos dispostos em quadros-negros ou acrílicos, uso do livro didático e a partir de lista de exercícios de repetição, ou seja, prioriza-se a metodologia da mecanização do ensino e aprendizagem de matemática, como se essa fosse a única ferramenta disponível, embora ela seja necessária em alguns casos, é preciso permitir que os alunos experimentem metodologias voltadas a aplicabilidade e a contextualização no ensino e aprendizagem matemático, promovendo a aprendizagem significativa.

> O aluno precisa aprender com significado do que participa raciocinando, compreendendo, reconstituindo o saber historicamente desenvolvido e superando, assim, o seu modo de ver íntegro, fragmentado e parcial da realidade. Por isso, os conceitos ensinados nas aulas de matemática não podem ser desprovidos de significados (Rodrigues, 2020, p.33).

Sobretudo, cabe ao professor compreender que o conhecimento matemático precisa está associado as metodologias que permitam agregar significados durante as atividades pedagógicas, sejam em sala ou fora dela, tendendo a favorecer o desenvolvimento dos temas propostos no dia a dia no fazer pedagógico, sejam com foco no aprendizado ou nas transformações que tal conhecimento pode ajudar a promover no meio social ao qual o estudante está inserido. Isso pode se dar, através do planejamento de ações educativas contemplando as relações destas com o concreto, permitindo assim a construção do conhecimento amparado na investigação e descoberta de padrões que solidificam o aprendizado por meio de ações práticas.

Embora o trabalho em questão tenha como foco principal a função exponencial com vistas ao jogo, será possível direcionar outros conceitos matemáticos como generalização e fórmulas matemáticas. Relacionando-se o conhecimento matemático de função exponencial ao modelo matemático com a quantidade mínima de movimentos que permite transferir todos os discos do jogo da haste A para a C, usando a haste B como suporte, o aluno durante a prática coordenada do jogo poderá perceber uma das aplicações que o conteúdo possui. “Com isso, o jogo auxiliará na resolução de problemas e, por conseguinte, estimulará a construção de novos conceitos ou ideias matemáticas, formas motivadora, agradável e provocante” (Rodrigo, 2020, p. 34).

Na busca de facilitar o entendimento do jogo, acompanhe algumas estratégias que tem como finalidade vencer a partida utilizando o menor número de movimentos possíveis utilizando as regras do jogo, observe a (Figura 16) com uma única peça na composição.

**Figura 16 -** Número mínimo de movimentos para vencer o jogo com um disco.

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

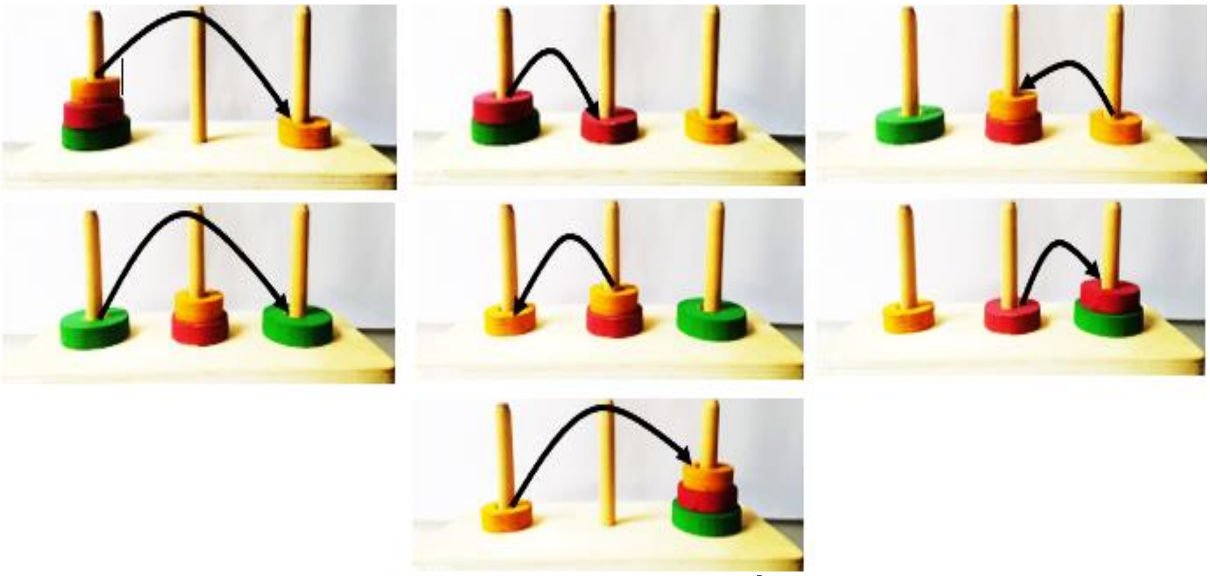
Nessa situação um único movimento é suficiente para vencer o jogo. Considerando a torre com dois discos (Figura 17), apresenta-se o número mínimo de movimentos para vencer.

**Figura 17 -** Número mínimo de movimentos para vencer o jogo com dois discos.

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

Nesse caso, movimenta-se o primeiro disco da haste A para a B, em seguida movimenta-se o segundo disco da haste A para a C e novamente movimenta-se o disco menor finalizando o jogo, que totaliza três movimentos. Segue, o jogo com três discos na (Figura 18).

**Figura 18 -** Número mínimo de movimentos para vencer o jogo com três discos.



Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

A estratégia que leva a vencer o jogo com o menor número de movimentos possíveis para transportar todos os três discos da haste A para a haste C, usando a haste B como apoio, consiste em mover o primeiro disco para a haste C, em seguida o segundo disco deverá ser movimentado para a haste B, depois se posiciona o primeiro disco sobre o segundo na haste B e, com um único movimento, transfere-se o terceiro disco para a haste C, novamente o primeiro disco deverá ser deslocado da haste B para a haste A, pela segunda vez iremos movimentar segundo disco da haste B para a C e por fim, aplicamos um quarto movimento no primeiro disco levando-o para a haste C, perfazendo então, 7 movimentos para vencer o jogo. Note que, o primeiro disco foi movimentado 4 vezes, o segundo disco foi movimentado 2 vezes e o terceiro e último disco é movimentado uma única vez.

Organizando-se essa estratégia no Quadro 03, é possível perceber um padrão que permite obter uma expressão algébrica que levará a quantidade mínima de movimentos necessário para transportar uma quantidade $\boldsymbol{n}$ qualquer de discos da posição inicial para a posição final, a obtenção de tal expressão consiste de percepção que permite associar o número de movimentos mínimos para uma certa quantidade $\boldsymbol{n}$ de peças do jogo.

**Quadro 03 -** Número de movimentos cada disco realiza no jogo.

| **Quantidade de discos** | **Quantidade de movimentos de cada um dos discos que compõe o jogo** | | | | | | | **Total de movimentos** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Disco 1** | **Disco 2** | $\cdots$ | **Disco j** | $\cdots$ | **Disco n – 1** | **Disco n** | |
| **1** | $1 = 2^0$ | | | | | | | $1 = 2^1 - 1$ |
| **2** | $2 = 2^1$ | $1 = 2^0$ | | | | | | $2 + 1 = 3 = 2^2 - 1$ |
| **3** | $4 = 2^2$ | $2 = 2^1$ | | | | | | $4 + 2 + 1 = 7 = 2^3 - 1$ |
| **4** | $8 = 2^3$ | $4 = 2^2$ | | | | | | $8 + 4 + 2 + 1 = 15 = 2^4 - 1$ |
| **5** | $16 = 2^4$ | $8 = 2^3$ | | | | | | $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 2^5 - 1$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| **n** | $2^{n-1}$ | $2^{n-2}$ | $\cdots$ | $2^{n-j}$ | $\cdots$ | 2 | 1 | $2^{n-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1$ |

Fonte: Autor, 2024.

Na comparação da quantidade de movimentos de cada disco, nota-se que, ao se incorporar um novo disco ao jogo o número de movimentos de cada um dos discos localizados sobre este irá dobrar na medida que se transporte o novo arranjo da haste inicial A para haste final C. Ou seja, acrescentando-se ao jogo de quatro discos um quinto disco, será necessário efetuar os 15 movimentos para levar os quatro discos para a haste de apoio B, sendo 8 para o 1º, 4 para o segundo, 2 para o 3º e 1 movimento para o quarto disco, então com 1 único movimento o quinto disco é transportado para a haste C. Para finalizar o jogo é necessário dispor os quatro discos sobre o quinto na ordem decrescente de diâmetro, de baixo para cima, mais uma vez se faz necessário 15 movimentos, sendo 8 movimentos para o 1º disco, 4 movimentos para o 2º disco, 2 movimentos para o terceiro e, por fim, 1 movimento para o quarto disco, dobrando o número de movimentos de cada um dos discos que formavam o jogo antes da incorporação da 5ª peça, conforme mostra a organização do Quadro 03.

Generalizando a ideia para $\boldsymbol{n}$ discos, considere $T_n$ como sendo a representação do número mínimo de movimentos para transportar $\boldsymbol{n}$ discos e $T_{n+1}$ como sendo o número mínimo de movimentos para transportar $\boldsymbol{n+1}$ discos da haste A para a haste C. Seja $T_{n+1}$, o número de movimentos mínimos para transportar $\boldsymbol{n+1}$ discos em função de $T_n$ que corresponde ao número mínimo de movimentos para transportar $\boldsymbol{n}$ discos.

Seguindo a dinâmica do jogo Torre de Hanói, para se transportar $\boldsymbol{n+1}$ discos, primeiro transporta-se os $\boldsymbol{n}$-ésimo discos com $T_n$ movimentos e, com um único movimento transportamos o $(\boldsymbol{n+1})$-ésimo disco e finaliza-se o jogo transportando os $\boldsymbol{n}$-ésimo discos fazendo mais uma vez $T_n$ movimentos, o que resulta em

$$\boldsymbol{T_{n+1} = T_n + 1 + T_n \Rightarrow} \qquad (\mathbf{1.1})$$

$$\boldsymbol{T_{n+1} = 2T_n + 1}\ (*) \qquad (\mathbf{1.2})$$

Suponha, que o número de movimentos mínimos necessários para transportar $\boldsymbol{n}$ discos da hasta A para a haste C, seja determinado pela da expressão $T_n$, dado por

$$\boldsymbol{T_n = 2^n - 1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o Princípio da Indução Finita (PIF) para demonstrar que o uso dessa expressão é válido para tal finalidade, temos:

1) Proposição $T_n$ é verdadeira para $\boldsymbol{n = 1}$, pois $\boldsymbol{T_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1}$, fato que pode ser verificado facilmente com o jogo de um disco.

2) Suponha que para $\boldsymbol{n}$ discos a proposição $T_n$ seja verdadeira, isto é, $\boldsymbol{T_n = 2^n - 1}$. Verificando se a proposição também é validade para $\boldsymbol{n + 1}$ discos, ou seja,

$$\boldsymbol{T_{n+1} = 2^{n+1} - 1}. \qquad (\boldsymbol{1.3})$$

De acordo com a equação $(\boldsymbol{1.2})$, temos que

$$\boldsymbol{T_{n+1} = 2T_n + 1} \qquad (\boldsymbol{1.4})$$

Da hipótese de indução temos que $\boldsymbol{T_n = 2^n - 1}$, substituindo na equação $(\boldsymbol{1.4})$, teremos:

$$\boldsymbol{T_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1} \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{1.5})$$

$$\boldsymbol{T_{n+1} = 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 1 + 1} \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{1.6})$$

$$\boldsymbol{T_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1} \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{1.7})$$

$$\boldsymbol{T_{n+1} = 2^{n+1} - 1.} \qquad (\boldsymbol{1.8})$$

Portanto, pelo princípio da indução finita (PIF), temos que $T_n \Rightarrow T_{n+1}$, ou seja, $T_n$ é verdadeira para todo $\boldsymbol{n}$ pertencente aos naturais.

Ainda da análise das informações dispostas no Quadro 03, constatou-se que o número de movimentos de cada discos do jogo dobra na medida que se acrescenta um novo disco, sendo assim, utilizando $T_1(n)$ para representar o número de movimentos do disco 1 no jogo e do fato do número de movimentos dobrar a cada vez que um novo disco é incorporado, segue que, para um jogo com $\boldsymbol{n + 1}$ discos, o número de movimentos do disco 1 é da forma $T_1(n+1)$, cujo o valor em função de $T_1(n)$, ou seja, o número de movimentos do disco 1 para um jogo com $\boldsymbol{n}$ discos é

$$\boldsymbol{T_1(n + 1) = T_1(n) + T_1(n)} \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{2.1})$$

$$\boldsymbol{T_1(n + 1) = 2T_1(n)} \qquad (\boldsymbol{2.2})$$

Da generalização da última linha por exemplo, o número de movimentos do primeiro disco que se encontra representado na última linha e na segunda coluna do Quadro 03 está expresso por $\boldsymbol{2^{n-1}}$. Admitindo se $T_1(n)$ como o número de movimentos do primeiro disco para um jogo com $\boldsymbol{n}$ discos, dado por

$\boldsymbol{T_1(n) = 2^{n-1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\boldsymbol{n}$ representa o número total de discos na torre.

**Por indução:**

1) Para $\boldsymbol{n = 1}$, $\boldsymbol{T_1(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1}$, de fato é verdadeiro, pois nesse caso tem-se apenas um disco.

2) Suponha que a proposição seja válida para algum natural $\boldsymbol{n}$ diferente de 1, ou seja, $\boldsymbol{T_1(n) = 2^{n-1}}$. Verificando se a proposição também é válida para $\boldsymbol{n + 1}$ discos, seja.

$$\boldsymbol{T_1(n+1) = 2^{(n+1)-1}}. \qquad (\mathbf{2.3})$$

De $(\mathbf{2.2})$, tem-se:

$$\boldsymbol{T_1(n+1) = 2T_1(n)} \qquad (\mathbf{2.4})$$

Da hipótese de indução sabemos que $\boldsymbol{T_1(n) = 2^{n-1}}$, substituindo em $(\mathbf{2.4})$, teremos:

$$\boldsymbol{T_1(n+1) = 2 \cdot 2^{n-1}} \Rightarrow \qquad (\mathbf{2.5})$$

$$\boldsymbol{T_1(n+1) = 2^{1+n-1}} \Rightarrow \qquad (\mathbf{2.6})$$

$$\boldsymbol{T_1(n+1) = 2^{(n+1)-1}} \qquad (\mathbf{2.7})$$

Portanto, por (PIF), temos que $\boldsymbol{T_1(n)} \Rightarrow \boldsymbol{T_1(n+1)}$, ou seja, $\boldsymbol{T_1(n)}$ é verdadeira para todo $\boldsymbol{n}$ pertencente aos naturais.

Dando continuidade as análises das informações constantes do Quadro 03, é notório a regularidade existente entre o número de movimentos mínimos de cada disco, isto é, a forma de calcular os movimentos está estritamente ligada ao número de discos do jogo.

O número mínimo de movimentos necessário para mover o **j-ésimo** disco do jogo composto por $\boldsymbol{n}$ discos da haste A para a haste C é da forma

$$\boldsymbol{T_j(n) = 2^{n-j}},\ \forall\, j, n \in \mathbb{N} \text{ e } j \leq \boldsymbol{n}.$$

**Utilizando indução:**

Para o caso em que $\boldsymbol{n = 1}$, então $\boldsymbol{j = 1}$, passo demonstrado logo acima. Por outro lado, se $\boldsymbol{j = n \neq 1,}$ isso levará a

$$\boldsymbol{T_j(j) = 2^{j-j} = 2^0 = 1.}$$

De fato, isso é verdade, pois, o **j-ésimo** disco corresponderá a última peça localizada na base da Torre de Hanói, essa fará um único movimento conforme dados constantes na diagonal principal que vai da 3ª para a 7ª linha e da 2ª para a 6ª coluna do Quadro 03.

Dessa forma, considerando que $1 \leq j < n$ e aplicando o (PIF), teremos:

1) Para $\boldsymbol{n = 1}$, não há o que mostrar.

2) Supondo que para algum natural $\boldsymbol{n}$ diferente de 1, a proposição $\boldsymbol{T_j(n) = 2^{n-j}}$ é verdadeira, ou seja, para movimentar uma torre com $\boldsymbol{n}$ discos é preciso fazer uma quantidade mínima de $\boldsymbol{2^{n-j}}$ movimentos com o **j-ésimo** disco.

Verificando a validade para $\boldsymbol{n + 1}$ discos, das demonstrações anteriores, tem-se que para transportar $\boldsymbol{n + 1}$ discos da haste A para a haste C é suficiente mover a torre com $\boldsymbol{n}$ discos duas vezes, sendo assim, o **j-ésimo** disco realizará duas vezes $\boldsymbol{T_j(n)}$ movimentos.

Dessa forma,

$$\boldsymbol{T_j(n+1) = T_j(n) + T_j(n) = 2 \cdot T_j(n)} \qquad (\boldsymbol{3.1})$$

Da hipótese de indução, temos que $\boldsymbol{T_j(n) = 2^{n-j}}$, substituindo em $(\boldsymbol{3.1})$, tem-se:

$$\boldsymbol{T_j(n+1) = 2 \cdot 2^{n-j}} \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{3.2})$$

$$\boldsymbol{T_j(n+1) = 2^{n-j+1}} \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{3.3})$$

$$\boldsymbol{T_j(n+1) = 2^{(n+1)-j}} \qquad (\boldsymbol{3.4})$$

Portanto, está provado que a proposição $\boldsymbol{T_j(n) = 2^{n-j}}$ é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Tomando os termos da última linha do Quadro 03, tem-se sequência formada por $2^{n-1}$, $2^{n-2}$, $2^{n-3}$, $\cdots$, $2^{n-j}$, $\cdots$, $2^2$, 2, 1 que se trata de uma progressão geométrica (PG) formada por $\boldsymbol{n - 1}$ termos e razão $2^{-1}$, a soma dos termos dessa sequência, levará ao número mínimo de movimentos necessários para transportar $\boldsymbol{n}$ discos da haste A para a haste C no jogo Torre de Hanói, a soma em questão, corresponde a soma dos termos de uma progressão geométrica.

De acordo com Morgado (2015, p.53) “A soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos de uma progressão geométrica $(a_n)$ de razão $q \neq 1$, é $\boldsymbol{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$”. Para mostrar a validade da expressão que permite calcular a soma dos termos desse tipo de progressão, considera-se a definição de progressão geométrica.

> Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão $q$, partindo do 1º termo, para avançar 1 termo, basta multiplicar o 1º termo pela razão $q$ $(a_2 = a_1 \cdot q)$; para avançar 2 termos, basta multiplicar o 1º termo pelo quadrado da razão $q$, ou seja, por $q^2$ $(a_3 = a_1 \cdot q^2)$; para avançar 3 termos, basta multiplicar o 1º termo por $q^3$ $(a_4 = a_1 \cdot q^3)$; e assim por diante (Dante, 2020, p.137).

Conforme a definição dada, para obter um termo de uma progressão geométrica, basta multiplicar o termo anterior por uma constante chamada razão. Tomando como referência a definição, mostra-se que a expressão $\boldsymbol{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$ é válida na determinação da soma dos termos da PG.

**Demonstração:**

Considere a equação

$$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n} \qquad (\mathbf{4.1})$$

como sendo a soma dos termos de uma PG com $\boldsymbol{n}$ termos.

Multiplicando $(\mathbf{4.1})$ pela a razão $\boldsymbol{q}$ da PG, temos:

$$\boldsymbol{q \cdot (S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \Rightarrow} \qquad (\mathbf{4.2})$$

$$\boldsymbol{q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \cdots + q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n \Rightarrow} \qquad (\mathbf{4.3})$$

$$\boldsymbol{qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}} \qquad (\mathbf{4.4})$$

Subtraindo $(\mathbf{4.4})$ de $(\mathbf{4.1})$ tem-se:

$$\boldsymbol{S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1} \Leftrightarrow} \qquad (\mathbf{4.5})$$

$$\boldsymbol{S_n(1 - q) = a_1 - a_1q^n \Leftrightarrow} \qquad (\mathbf{4.6})$$

$$\boldsymbol{S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n) \Leftrightarrow} \qquad (\mathbf{4.7})$$

$$\boldsymbol{S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}} \qquad (\mathbf{4.8})$$

O que prova a validade da expressão que permite calcular a soma dos termos de uma PG. Aplicando $(\mathbf{4.8})$ para calcular a soma do número mínimo de movimentos de $\boldsymbol{n}$ discos na torre de Hanói, tem-se:

$$\boldsymbol{S_n = 2^{n-1}\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}}} \Rightarrow \qquad (\mathbf{4.9})$$

$$\boldsymbol{S_n = 2^{n-1}\frac{1-2^{-n}}{2^{-1}}} \Rightarrow \qquad (\mathbf{4.10})$$

$$\boldsymbol{S_n = 2^n \cdot (1-2^{-n})} \Rightarrow \qquad (\mathbf{4.11})$$

$$\boldsymbol{S_n = 2^n - 2^{n-n}} \Rightarrow \qquad (\mathbf{4.12})$$

$$\boldsymbol{S_n = 2^n - 2^0} \Rightarrow \qquad (\mathbf{4.13})$$

$$\boldsymbol{S_n = 2^n - 1 = T_n} \qquad (\mathbf{4.14})$$

Mostrando por meio da expressão que permite somar os termos de uma PG, é possível determinar a fórmula que leva ao número de movimentos mínimos de $\boldsymbol{n}$ discos no jogo Torre de Hanói, com $n \in \mathbb{N}$. Além das formas adotadas anteriormente para mostrar que o número de movimentos mínimos aplicados para deslocar uma quantidade de $\boldsymbol{n}$ discos da posição inicial para a final é dado pela expressão $\boldsymbol{T_n = 2^n - 1}$. Outra forma de demonstrar a validade da proposição que leva ao número mínimo de movimentos necessários para mover $\boldsymbol{n}$ discos é utilizar a recorrência par demonstrar a validade de $\boldsymbol{T_n}$.

No jogo, tem-se que o número de movimentos mínimos de $\boldsymbol{n+1}$ discos é da forma $\boldsymbol{T_{n+1} = 2T_n + 1}$, com $\boldsymbol{T_n}$ representando o número mínimo de movimentos de $\boldsymbol{n}$ discos.

A equação $\boldsymbol{T_{n+1} = 2T_n + 1}$ é uma recorrência linear não-homogênea de primeira ordem da forma $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n + f(n)}$ (Morgado, 2015). Para resolvê-la, de início deve se obter uma solução para $\boldsymbol{T_{n+1} = 2T_n}$.

**Escrevendo:**

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{T_2 = 2T_1} \\ \boldsymbol{T_3 = 2T_2} \\ \boldsymbol{T_4 = 2T_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{T_{n-1} = 2T_{n-2}} \\ \boldsymbol{T_n = 2T_{n-1}} \end{array}\right\} n - 1 \text{ termos.}$$

Multiplicando membro a membro os termos das equações acima, tem-se:

$$\boldsymbol{T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot \cdots \cdot T_{n-1} \cdot T_n = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2) \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \cdots \cdot T_{n-2} \cdot T_{n-1}}$$

Cancelando os termos semelhantes, vem

$$\boldsymbol{T_n = 2^{n-1} \cdot T_1} \qquad (\mathbf{5.1})$$

Como $\boldsymbol{T_1 = 1}$, então $\boldsymbol{T_n = 2^{n-1}}$ que é uma solução da recorrência $\boldsymbol{T_{n+1} = 2T_n}$. Fazendo $\boldsymbol{T_n = 2^{n-1} \cdot y_n}$ e substituindo na equação $\boldsymbol{T_{n+1} = 2T_n + 1}$, tem-se:

$$\boldsymbol{2^{n+1-1} \cdot y_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot y_n + 1 \Rightarrow} \qquad (\mathbf{5.2})$$

$$\boldsymbol{2^{n} \cdot y_{n+1} = 2^{n} \cdot y_n + 1 \Rightarrow} \qquad (\mathbf{5.3})$$

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + 2^{-n}}. \qquad (\mathbf{5.4})$$

Resolvendo a equação da recorrência $(\mathbf{5.4})$, tem-se:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{y_2 = y_1 + 2^{-1}} \\ \boldsymbol{y_3 = y_2 + 2^{-2}} \\ \boldsymbol{y_4 = y_3 + 2^{-3}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_{n-1} = y_{n-2} + 2^{-(n-2)}} \\ \boldsymbol{y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}} \end{array}\right\} n - 1 \text{ termos.} \qquad (\mathbf{5.5})$$

Somando membro a membro os termos das equações acima, tem-se:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{y_2 + y_3 + y_4 + \cdots + y_{n-1} + y_n =} \\ \boldsymbol{\left(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-2)} + 2^{-(n-1)}\right) +} \\ \boldsymbol{+ y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1}} \end{gathered} \qquad (\mathbf{5.6})$$

Cancelando os termos semelhantes membro a membro, vem

$$\boldsymbol{y_n = y_1 + \left(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-2)} + 2^{-(n-1)}\right)} \qquad (\mathbf{5.7})$$

Note que, $\boldsymbol{2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-2)} + 2^{-(n-1)}}$ é a soma dos termos de uma PG em que $a_1 = 2^{-1}$, o número de termos é $\boldsymbol{n - 1}$ e a razão $\boldsymbol{q} = 2^{-1}$. Assim,

$$\boldsymbol{y_n = y_1 + 2^{-1} \frac{1 - 2^{-(n-1)}}{1 - 2^{-1}} \Rightarrow} \qquad (\mathbf{5.8})$$

$$\boldsymbol{y_n = y_1 + 2^{-1} \frac{1 - 2^{-(n-1)}}{2^{-1}} \Rightarrow} \qquad (\mathbf{5.9})$$

$$\boldsymbol{y_n = y_1 + 1 - 2^{-(n-1)}} \qquad (\mathbf{5.10})$$

Partindo do fato que $\boldsymbol{T_1 = 1}$, tem-se

$$\boldsymbol{T_n = 2^{n-1} \cdot y_n \Rightarrow} \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{T_1 = 2^{1-1} \cdot y_1 \Rightarrow} \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{1 = 2^0 \cdot y_1 \Rightarrow} \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{y_1 = 1} \tag{5.14}$$

Daí, segue que a equação $(\boldsymbol{5.10})$ pode ser escrita na forma:

$$\boldsymbol{y_n = 1 + 1 - 2^{-(n-1)} \Rightarrow} \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{y_n = 2 - 2^{-(n-1)}} \tag{5.16}$$

Substituindo $(\boldsymbol{5.16})$ em $\boldsymbol{T_n = 2^{n-1} \cdot y_n}$, chegar-se-á

$$\boldsymbol{T_n = 2^{n-1} \cdot (2 - 2^{-(n-1)})} \tag{5.17}$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$\boldsymbol{T_n = 2^{n-1} \cdot 2 - 2^{n-1} \cdot 2^{-(n-1)} \Rightarrow} \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{T_n = 2^{n-1+1} - 2^{n-1-n+1} \Rightarrow} \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{T_n = 2^n - 2^0 \Rightarrow} \tag{5.20}$$

$$\boldsymbol{T_n = 2^n - 1} \tag{5.21}$$

Novamente, fica comprovado que a expressão que permite calcular o número mínimo de movimentos para transportar um número natural $\boldsymbol{n}$ de discos qualquer da haste A para a haste C é $\boldsymbol{T_n = 2^n - 1}$. Dessa forma, de acordo com a lenda, o número mínimo de movimentos para transportar 64 discos descrito na lenda da haste inicial para a haste final no jogo Torre de Hanói é o número $\boldsymbol{T_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615}$.

Apostar numa ferramenta pedagógica de excepcional potencialidade, permite ao educador explorar os mais diversos contextos em todos os segmentos da sala de aula. Nos anos iniciais o jogo pode auxiliar no desenvolvimento da coordenação motora, na percepção de ordem tal como maior, menor, crescente e decrescente, pode ser implementado como atividade interdisciplinar de arte e matemática na medida que se propõe oficinas de construção do próprio jogo, nos anos finais pode ser uma ferramenta de estratégia que envolva contagem das mais simples a mais complexas, assim como no Ensino Médio, tem-se o trabalho com PG e função exponencial foco deste trabalho, na educação superior o jogo pode ser associado a conceitos que tratam do Princípio de Indução Finita, Recorrência e até mesmo ao sistema numérico binário. Sobretudo, ao planejar atividades envolvendo a Torre de Hanói como instrumento de ensino e aprendizagem é necessário considerar que

> sua utilização na educação é muito válida, uma vez que desenvolve no aluno habilidades para entender a simbolização, a diferenciação de core, (se colorido os discos), o sequenciamento, a generalização, o raciocínio lógico, a ação exploratória, a contagem e o planejamento de ação, a coordenação motora, a lógica, o raciocínio matemático, a identificação de formas, o estabelecimento de estratégias e a contagem de movimentos e raciocínio (Rodrigues, 2020, p. 55).

Partindo desse pressuposto, pensou-se no desenvolvimento dos conhecimentos sobre função exponencial, privilegiando o potencial lúdico e interativo do jogo. Ao jogar, os alunos serão incentivados a desenvolver estratégia que relacione o número mínimo de movimentos necessários para levar os discos da posição inicial para a posição final, de modo que aplicando as ideias de contagem estes possam por meio de generalização, estabelecer um padrão lógico que torne possível associar sequências numéricas dos movimentos mínimos construída durante a prática do jogo a uma expressão matemática que permita calcular a quantidade mínima de movimentos necessários para transportar um número natural $\boldsymbol{n}$ de discos qualquer a uma função exponencial da forma $\boldsymbol{T_n = 2^n - 1}$.

# 2 PERCURSO METODOLÓGICO

Almejando responder à questão norteadora **“**Quais as contribuições do uso do Tangram e da Torre de Hanói com aplicações matemáticas elementares para a aprendizagem dos alunos na 1ª série do Ensino Médio?” essa pesquisa é do tipo qualitativa. Com isso, o foco é promover a reflexão e a ação no decorrer do estudo considerando “o ato de não apenas resolver problemas para aprender Matemática, mas ainda o ato de aprender a resolver problemas” (Proença, 2021, p.12), e além disso, perceber a existência de outros fatores que fazem com que essa aprendizagem aconteça nos processos de introdução, aprofundamento e consolidação que são alcançados a partir do planejamento, da ação metodológica, da avaliação, do feedback aos alunos e das intervenções no decorrer da prática do professor.

Utilizar-se de jogos para ensinar é uma metodologia que já era defendida por Platão (427-348), por Aristóteles (384-382) e por Comenius (1997) que se referia ao uso de materiais, de simulações e situações concretas como fontes enriquecedoras de aprendizagem. Desse modo, essa pesquisa vem aprofundar um pouco sobre esse uso e como ele pode ser visto e vivenciado para a construção de conceitos matemáticos que resultam na aprendizagem de adolescentes do Ensino Médio.

É nesse cenário que se propõe a investigar de maneira a tomar sucessivamente diferentes contornos no delineamento desse capítulo, na qual apresenta-se o percurso metodológico da pesquisa, subdividido em itens que contemplam: 2.1 - Tipo de pesquisa; 2.2 - Contextualização do *lócus* da investigação; 2.3 Participantes: população e amostra; 2.4 Instrumentos de coleta de dados; e, 2.5 - Organização dos dados coletados em categorias e 2.6 - análise de conteúdo a partir dos dados coletados.

## 2.1 Tipo de pesquisa

Essa proposta de investigação é um estudo empírico, do tipo qualitativo como “aquele que engloba a ideia de subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. [...] também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências[...]” (Bicudo, 2004, p.111). Além de oportunizar aprender como funciona a realidade social de um ambiente por proximidade entre os participantes, numa vivência que os faça perceber que o professor nem sempre será aquele que ensina e sim é aquele que conduz um processo por ter objetivos a alcançar, mas que ao ensinar também aprende e vice versa. De acordo com Bardin (2016) seria incorporar a questão do significado e da intencionalidade [...]

"tanto no seu advento quanto nas suas transformações, como construções humanas significativas".

Visto que ao vivenciar-se as oficinas práticas com os jogos foram oportunizados a aprender com prazer e significar os conceitos matemáticos, provocando a si mesmos e aos outros que estavam grupalmente vivenciando a cooperação e/ou colaboração nos seus processos de desenvolvimento. Na visão de Gil (2019) as pesquisas qualitativas por sua vez caracterizam-se pela utilização de dados qualitativos, com o propósito de estudar a experiência vivida das pessoas e ambientes sociais complexos, segundo a perspectiva dos próprios atores sociais. Os alunos registraram e descreveram seus saberes experienciais e de certa maneira foram capazes de fazer uma avaliação pessoal da sua aprendizagem a partir das experiências, ou seja, houve uma oportunização de reflexão acerca dos desafios enfrentados no ensino e na sua aprendizagem matemática.

Deste modo, por ser de natureza descritiva e interpretativa, citado por Cervo e Bervin (2007), a pesquisa descritiva observa, registra, analisa e correlaciona fatos e/ou fenômenos sem manipulá-los. Isso é uma maneira de descobrir com maior efetividade a ocorrência de frequência, podendo haver a relação e conexão com os outros, além de perceber a sua natureza e características nas mais variadas situações.

Gil (2019) traz a pesquisa descritiva como "aquela que tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou estabelecimento de relações entre variáveis" (p.27). No que se refere a explicativa o autor define "tem como propósito identificar fatores que determinam ou contribuem para as ocorrências de fenômenos" (p.57). Diante dessa definição este estudo de caso foi feito pautado nessa descoberta das características, na relação entre as variáveis encontradas e na análise dos fatores que puderam ter inferido para se chegar num determinado fenômeno - as aplicações matemáticas e a aprendizagem.

## 2.2 Lócus da pesquisa

O estudo aconteceu no município de Alto Longá, no estado do Piauí, segundo o censo de 2022 a cidade tem 13.479 pessoas, tendo uma queda populacional comparada ao censo de 2010 e fica a aproximadamente 80 km da capital Teresina. A educação é atendida pela rede municipal de ensino e pela rede estadual, além de contar com uma escola da rede privada de ensino. A rede municipal é responsável pela Educação Infantil até o 9º ano dos anos finais do

Ensino Fundamental e a rede estadual atende duas escolas, sendo uma do 8º ano a 2ª série do Ensino Médio regular e a Educação de Jovens e Adultos e a escola (CETI) Acrísio Veras que será o lócus dessa pesquisa. Essa instituição passou a funcionar em Tempo Integral em 2023, atendendo aos alunos do Ensino Médio regular e técnico. Nessa pesquisa foi preservado a exposição dos participantes que terão nomes fictícios.

A escola atualmente tem **291** alunos matriculados, distribuídos de acordo com a Tabela 01.

**Tabela 01 -** Alunos matriculados por turma no Ensino Médio do (CETI) Acrísio Veras.

| **TURMAS** | **1ª SÉRIE** | | | | **2ª série** | | **3ª SÉRIE** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **SALA** | A | B | C | D | A | B | A | B | C | D |
| **QUANTIDADE** | 28 | 29 | 34 | 32 | 35 | 18 | 27 | 33 | 31 | 24 |
| **TOTAL** | 123 | | | | 53 | | 115 | | | |

Fonte: Elaborada pelo Autor com base nos dados informados pela escola, 2024.

Ao analisar os resultados das avaliações externas em termos de País, Estado e Escola tem-se a porcentagem relacionada a proficiência matemática na 3ª série do Ensino Médio, de acordo com a Tabela 02.

**Tabela 02 -** Comparação em percentuais da aprendizagem em Língua Portuguesa e Matemática de 2017 a 2021 dos alunos da 3ª série do Ensino Médio

| **ESFERA** | **PERÍODO** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **2017** | | **2019** | | **2021** | |
| | L.PORT. | MAT. | L.PORT. | MAT. | L.PORT. | MAT. |
| **BRASIL** | 23% | 4% | 32% | 6% | 30% | 4% |
| **PIAUÍ** | 13% | 2% | 22% | 3% | 21% | 2% |
| **ALTO LONGÁ** | 20% | 1% | 16% | 3% | 8% | 1% |

Fonte: Elaborada pelo Autor com base no site https://qedu.org.br/municipio/2200301-alto-longa.

O SAEB é o sistema de avaliação da Educação Básica que considera vários fatores que geram o IDEB das redes de ensino e das escolas e dois fatores são preponderantes que é o fluxo de aprovação e a proficiência dos alunos em Língua Portuguesa e Matemática nos Anos Finais de cada ciclo de ensino, assim, percebe-se, de acordo com a Tabela 02, o quão é preocupante a situação da aprendizagem matemática no final da Educação Básica, mesmo considerando que em 2021 os alunos estavam com quase dois anos de pandemia. Ao analisar os resultados de 2017, tinha-se uma situação semelhante em matemática, inclusive com os mesmos percentuais. Diante disso, segue a Tabela 03 apresentando as médias de proficiência, o fluxo de aprovação e a nota gerada a partir desse cálculo chamada IDEB.

**Tabela 03 -** Médias de proficiência, o fluxo de aprovação e o IDEB de 2021 dos alunos da 3ª série do Ensino Médio

| | 2021 | | | |
|---|---|---|---|---|
| **ESFERA** | **L.PORT.** | **MAT.** | **APROVAÇÃO** | **IDEB** |
| **BRASIL** | 4,43 | 4,64 | 0,85 | 3,9 |
| **PIAUÍ** | 4,21 | 4,35 | 0,87 | 3,7 |
| **ALTO LONGÁ** | 4,35 | 4,2 | 0,79 | 3,4 |

Fonte: elaborada pelo autor de acordo com https://qedu.org.br/municipio/2200301-alto-longa. Acesso em 28/10/2023.

De acordo como o Instituto Anísio Teixeira, as matrizes de referência não se confundem com os currículos, que são muito mais amplos, e não podem ser confundidas com procedimentos, estratégias de ensino ou orientações metodológicas, pois são recortes dos conteúdos curriculares estabelecidos para determinada etapa ou ciclo escolar. Portanto, constituem-se uma referência tanto para aqueles que irão participar do teste, garantindo transparência ao processo e permitindo-lhes uma preparação adequada, quanto para a análise dos resultados dos testes aplicados [...][1].

A proficiência dos alunos é calculada com base numa escala de aprendizagem que no EM está dividida em 10 (dez) níveis. Ao analisar que esses testes são recortes do que deverá ser ensinado para esses alunos, a situação é preocupante, visto que estão nessa situação de médias abaixo de 5, considerando o 10 como nota máxima, chegando na média final encontram-se abaixo de 4.

Vale refletir sobre a situação de aprovação, de acordo com a Tabela 03, busca-se as porcentagens de aprovação nos anos anteriores de ensino, percebendo-se que com o passar dos anos, tanto aumenta o fluxo de reprovação como a taxa de desistência dos estudantes do EM, entende-se que o município tem um percentual de reprovação maior que o nacional e o estadual, mas que se aproxima desses. Nessas condições, a escola deixa de ser o lugar de possibilidades nessa idade para aqueles que reprovam e que, na maioria das vezes, desistem de estudar para trabalhar, ou mesmo por falta de perspectivas de desenvolvimento intelectual e profissional através da educação.

Acredita-se, que o problema não está no ato de reprovar, mas no que está envolvido por trás do desenvolvimento e das possibilidades ofertadas a esses estudantes que ficam nessa

[1] Informações sobre as Matrizes e escalas de referência do SAEB. Disponíveis em https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas. Publicado em 31/08/2020, 14h38, atualizado em 26/09/2023, 15h30.

situação. Se não estão proficientes, quer dizer que não aprenderam o mínimo do que estava previsto para essa etapa da Educação Básica, porém, quando se chega a esse máximo, necessita-se refletir sobre que possibilidades foram ofertadas para mudar tal contexto. E essa realidade não é somente local, mas nacional e está precisando de políticas públicas efetivas para a educação que inicia na Educação Infantil e se consolida no EM, portanto não é só nessa etapa. É uma mudança não somente de métodos, mas de investimentos, de valorização, de acolhida, de respeito ao aprender, visto que esse é um direito que está na Constituição Federal e que pouco se tem feito valer a sua qualidade.

Contudo, enquanto professor que tem o dever de fazer esse direito valer a partir das condições dadas, carece-se de qualificação e da prática com responsabilidade para garantir aos alunos a aprendizagem e ir até além disso. É por isso, que se escolheu esse espaço de vivência profissional para procurar contribuir com a qualificação do trabalho docente ao qual desenvolvido e de permitir a outros profissionais conhecer também essas possibilidades.

### 2.3 Participantes da pesquisa

Este estudo teve como participantes: Uma amostra de 20 (vinte) alunos da 1ª série do Ensino Médio devidamente matriculados nessa turma, que foram público-alvo da aplicação da pesquisa. Todos os participantes ao aceitarem contribuir com a pesquisa assinaram o Termo de Assentimento Livre – TALE (Anexo 01), de acordo com a Resolução 510 - Comitê de Ética em Pesquisa (CEP/UFPI) e a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), no caso para os alunos menores de idade, foi assinado pelos pais e/ou responsáveis legais.

Além disso, a direção da escola autorizou a aplicação da pesquisa a partir do ofício encaminhado na primeira visita a escola, que foi também o momento de diálogo entre o professor pesquisador e os estudantes da turma para apresentar os objetivos propostos para tal estudo, que só aconteceu a partir da autorização desse projeto pelo CEP e CONEP. Sob o nº do Parecer 6.851.998, CAAE de nº 77813224.1.0000.5214.

De acordo com a Resolução 510 é garantido o direito de os sujeitos serem informados sobre a pesquisa; desistir a qualquer momento que desejar; ter sua privacidade respeitada; garantido a confidencialidade das informações pessoais; escolher quais as informações podem ou não serem divulgadas; se houver danos no decorrer da pesquisa poderá ser indenizado; se houver despesas por conta da pesquisa poderá ser ressarcido, assim serão respeitadas todas as normativas das resoluções do CEP e CONEP.

Para preservar a identidade, a privacidade e a confidencialidade os participantes foram identificados através de pseudônimos. As imagens não serão divulgadas com a identificação da face dos mesmos e somente o pesquisador e sua orientadora terão acesso aos dados coletados e caso esse conselho solicite serão repassados a esse colegiado.

Vale ressaltar que esta pesquisa envolve riscos mínimos, e que por qualquer motivo de constrangimento, desconforto ou ansiedade, durante as oficinas ou entrevistas, se acontecer, será contornado a partir do diálogo com o pesquisador responsável pela coleta das informações, que suspenderá imediatamente a atividade e tomará as devidas providências de apoio, seja físico, moral ou psicológico. Contudo, se o participante após os esclarecimentos não se sentir à vontade para continuar poderá a qualquer momento se desvincular da pesquisa sem nenhum prejuízo.

No que se refere aos benefícios, trará maior conhecimento sobre o tema abordado, sem benefício material direto para o participante. Os benefícios são de ordem pessoal e coletiva. Desse modo, este estudo aumenta o conjunto de pesquisas sobre as aplicações matemáticas a partir do uso de jogos no EM. Espera-se, também contribuir para gerar conhecimento sobre a temática no exercício da docência neste âmbito de atuação, a partir de publicações e apresentações em seminários, congressos e similares, mas sempre garantindo a confidencialidade dos dados coletados.

Nessas premissas, buscar-se-á possibilitar aos estudantes participantes que percebam as construções dos conceitos e da teoria a partir da manipulação de jogos, ou seja, da gamificação para aprenderem matemática significativamente. Contribuir para a ressignificação de propostas de ensino e de intervenções pedagógicas no contexto da sala de aula. Portanto, acredita-se que os benefícios superaram os prováveis riscos que poderiam vi a ocorrer no desenvolvimento da pesquisa.

## 2.4 Instrumentos de coleta de dados

Pela profundidade necessária ao se fazer um estudo de caso, embasa-se no seu conceito de acordo com Ponte (2006)

> É uma investigação [...] que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse (Ponte, 2006, p.2).

Assemelha-se ao que define Lara e Borges (2012, p.12) “o estudo de caso, como método de pesquisa, permite uma investigação envolvendo situações concretas no contexto da vida cotidiana, ou seja, situações pontuais, intencionalmente escolhidas, incluindo situações vivenciadas na sala de aula”. Diante do exposto, utilizar-se-á como instrumentos para esse estudo de caso: a análise de documentos (prova), a observação (aplicação dos jogos) e a entrevista com uma amostra dos participantes.

De fato, para alcançar os objetivos utilizou-se como instrumentos de coleta de dados 1º) um questionário de pesquisa (Apêndice 01); 2º) aplicação de um teste inicial sobre os objetos do conhecimento em estudo, ou seja, sobre as aplicações matemáticas (Apêndice 05); 3º) aplicação e registros das oficinas com os jogos “Tangram e Torre de Hanói” (Apêndice 03 e 04); 4º) aplicação do teste após as oficinas (Apêndice 06); 5º) aplicação de entrevista semiestruturada com uma amostra de 20% dos alunos participantes, totalizando 4 alunos (Apêndice 02). Segue o detalhamento de como aconteceu esses momentos:

Buscou-se através de testes de verificação dos conhecimentos prévios dos alunos, entender o quão estes trazem consigo sobre potenciação e suas propriedades com expoente inteiro negativo e sobre função exponencial e seus elementos estruturantes. O instrumento avaliativo constava de uma avaliação de 08 questões acerca da temática, sendo apresentado ao público-alvo da pesquisa após abordagem dos conhecimentos em questão pelo professor pesquisador e titular das turmas “A” da primeira série do EM.

Após a correção do professor pesquisador responsável, foi feita a devolutiva com rendimento de cada aluno participante, o pesquisador ciente dos rendimentos individuais e coletivos iniciou a aplicação através das oficinas pedagógicas usando os jogos Tangram e Torre de Hanói para consolidar as competências e habilidades que permitiam ao aluno se apropriar dos conhecimentos abordados. Portanto, a metodologia ativa adotada no processo de intervenção, objetivou apresentar ao educando ferramentas práticas comum do seu dia a dia, para que se apropriasse destas na construção dos conhecimentos.

Os instrumentais tiveram como base os jogos e suas regras que foram previamente apresentadas pelo pesquisador, a dinâmica consistiu na relação direta entre os conhecimentos em questão e gamificação. A ação metodológica durante o transcorrer das oficinas permitiu que o educando adquirisse segurança e confiança nas suas tomadas de decisões, adotando pra si a responsabilidade e a compreensão na construção da sua aprendizagem, nesse processo foram feitas anotações das observações no que se refere a compreensão da proposta, engajamento, participação e colaboração grupal, além de outros fatores.

Objetivou-se por meio da adoção desse mecanismo comparar o ensino aprendizagem de matemática abordado costumeiramente nas salas de aula da instituição pública de ensino com o ensino de matemática, tendo como visão a utilização de metodologias ativas como a gamificação.

Esgotado o processo de conclusão das oficinas, o professor pesquisador novamente submeteu o público investigado a uma nova avaliação de 08 questões que permitiu observar se as habilidades foram consolidadas ou não, para assim poder intervir no processo de ensino e aprendizagem, permitindo assim a conclusão dessa etapa de coleta e categorização dos dados, além de permitir afirmar ou não a tese, se de fato o uso da metodologia com os jogos por meio de oficinas no ambiente da sala de aula permite de forma satisfatória a apropriação dos conhecimentos em estudo.

A partir desses momentos de investigação e registros para fechar a coleta de dados utilizou-se uma entrevista semiestruturada com 4 alunos da turma, o que representa uma amostra de 20% (vinte por cento dos participantes), abordando a temática e o ponto de vista dos mesmos, visto que de acordo com Moreira e Caleffe (2008, p.169) ela inclui os temas a serem discutidos, mas eles não são introduzidos da mesma maneira e nem na mesma ordem, assim como Gil (2019, p.129) nos coloca a importância de estar atento a priorizar os tópicos essenciais para se aproveitar o potencial das informações em prol da pesquisa. A entrevista foi registrada mediante as anotações e/ou a gravação de voz de acordo com a autorização dos participantes.

### 2.5 Organização dos dados encontrados

Os dados coletados foram organizados a partir da triangulação dos achados na observação, aplicação e entrevistas feitas no decorrer da pesquisa. De acordo com Gil (2019) “quando são obtidos informações de três diferentes fontes e pelo menos duas delas mostram convergência, o pesquisador percebe que os resultados podem ser corroborados” (p. 184), nessa busca que se pautou esse estudo, a fim de corroborar ou não as informações para se observar as aplicações previstas.

Visto ser um estudo de caso amplo, por contar com documentos de registros ou entrevistas de 20 participantes, almejando compreender esses documentos a fim de categorizar os dados de acordo com Bardin (2016) seguindo dois momentos que correspondem a organização desse processo: 1) pré-análise: onde foi feita a operacionalização e sistematização das ideias iniciais oportunizando a construção de esquemas para um plano de análise. Sendo a hora de escolher os documentos, a formular hipóteses e objetivos para a elaboração dos indicadores que nortearam a análise final.

2) a exploração do material: após a estruturação da pré-análise, considerando todas as suas especificidades, o momento da exploração "é a aplicação sistemática das decisões tomadas" (p.131) sendo nesse momento que se exaustiva as "possibilidade de codificação, decodificação ou enumeração em função das regras previamente formuladas", contribuindo com esse procedimento no que se refere as informações capitadas nas entrevistas utilizou-se

> [...] uma técnica auxiliar na análise e interpretação dos dados produzidos o *software* de análise estatística textual, de acesso livre e mantido por pesquisadores, nomeado de *Interface de R pour lês Analyses Multidimensionnelles de Textes et de Questionnaires* (IRAMUTEQ). Esse, possibilita através de frequência e/ou coocorrências de palavras, gerar os grafos: Similitudes e Nuvens de Palavras [...] (Carvalho, 2021, p.86).

Diante dessa técnica buscar-se tratar os resultados já encontrados na análise dos documentos de registros das oficinas aplicadas, dos registros do pesquisador na hora de sua aplicação e das entrevistas feitas para consolidar a pesquisa. Ludke (2020) afirma que a construção de categorias não é fácil, mas que brotam de início das escolhas teóricas feitas a partir da temática utilizada na pesquisa, que será modificado no decorrer da pesquisa com o contato entre o campo empírico e o campo teórico que estarão a todo o momento se confrontando e assim vai gerando novas concepções e focos de interesse.

## 2.6 Análises dos dados produzidos

Após a organização dos dados, esses foram analisados de maneira a tornarem-se válidos, embasados em referenciais teóricos que respaldam a pesquisa. Nesse momento utilizou-se a unidade de registro e de contexto, buscando se descobrir os núcleos de sentido que ali estavam através da comunicação escrita ou falada, "geralmente, quanto maior é a unidade de contexto mais as atitudes ou valores se afirmam numa análise avaliativa, ou mais numerosas são as coocorrências numa análise de contingência" (Bardin, 2016, p.137).

Utiliza-se as regras de enumeração seguindo a presença ou ausência de frequência de acordo com os objetivos em estudo. Ao estar de posse do material analisar-se as coocorrências a partir das modalidades qualitativas de associação, equivalência e/ou oposição, buscando a mais pertinente. Na concepção de Ludke na categorização "é preciso que o pesquisador vá além, ultrapasse a mera descrição, buscando realmente acrescentar algo à discussão já existente sobre o assunto focalizado" (2020, p.58) sendo o momento de estabelecer conexões entre os achados e a possibilidade de encontrar novas explicações e interpretações referentes a temática em estudo, contribuindo assim para a construção do conhecimento e da pesquisa, tanto na esfera local como para a construção da ciência em termos gerais.

# 3 AS RELAÇÕES ENTRE OS JOGOS E AS APLICAÇÕES MATEMÁTICA PARA A APRENDIZAGEM NO ENSINO MÉDIO

## 3.1 A relação dos participantes da pesquisa com o objeto da pesquisa.

Após a tramitação do trabalho de pesquisa no formato de projeto pelo Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Piauí e após sua aprovação, iniciam-se as tratativas no intuito de aplicar a pesquisa no ambiente escolar. A pesquisa se inicia no dia 30 de maio com a seleção dos 20 alunos, todos estudantes da 1ª série do Ensino Médio do (CETI) Acrísio Veras localizada na cidade de Alto Longá, no estado do Piauí, os participantes foram escolhidos levando em consideração os critérios de inclusão e exclusão descritos anteriormente no corpo desse trabalho, após esse momento o professor pesquisador convocou uma reunião que foi realizada no dia 31 de maio na sede da referida escola com os responsáveis e os participantes do trabalho. Na oportunidade, foram apresentados os objetivos da pesquisa, os termos de consentimento direcionados aos pais ou responsáveis e o termo de assentimento voltado para os estudantes selecionados.

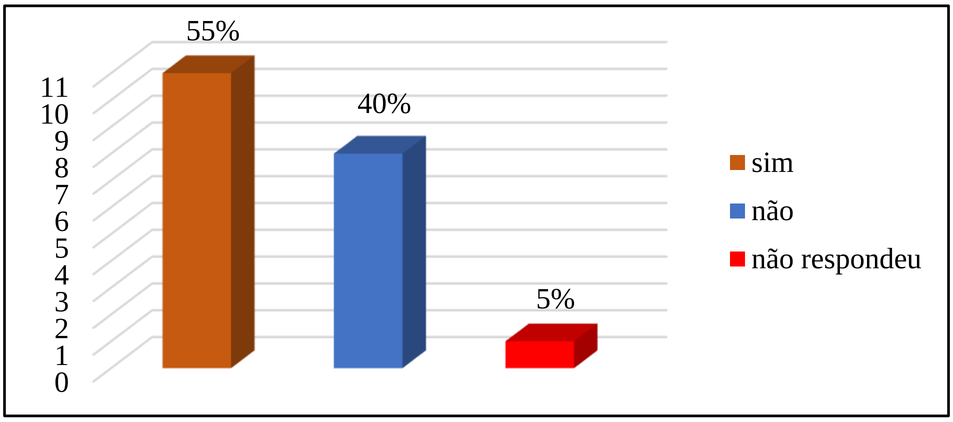
O professor esclareceu todos os questionamentos levantados durante a realização da assembleia e finalizou o encontro agradecendo os presentes pela colaboração e colheu as assinaturas nos termos supracitados permitindo assim a realização do trabalho de pesquisa, que teve seu início com a aplicação de um questionário contendo 17 perguntas, sendo 15 fechadas e 2 abertas, todas versando sobre o objeto da pesquisa conforme (Apêndice 01).

O primeiro questionamento foi voltado para a prática de jogos, ferramenta da qual o pesquisador se apropria para investigar a relação desse com o processo de ensino e aprendizagem no ambiente de sala de aula, o seu uso segue do apelo por aulas mais interessantes envolvendo instrumentos lúdicos relacionados ao objeto do conhecimento, permitindo o estímulo do raciocínio lógico dos participantes desse tipo de abordagem, a lidar com situações e conflitos do meio em que estes indivíduos estão inseridos (Lara, 2003).

O uso dessa ferramenta como uma atividade, pode possibilitar ao educando clareza de pensamento e o desenvolvimento da criatividade e do raciocínio lógico, essas qualidades são importantes no processo de ensino e aprendizagem matemática. De acordo com Lara os jogos, “quando bem elaborados, eles podem ser vistos como uma estratégia de ensino que poderá atingir diferentes objetivos que variam desde o simples treinamento, até a construção de um determinado conhecimento” (2003, p. 20), o que condiz com um dos objetivos dessa pesquisa, relacionar os jogos a construção do conhecimento e com isso desenvolver o pensamento criativo e a criatividade matemática, que na visão de Gontijo (2020, p. 16) “é uma propriedade dinâmica da mente humana e que o potencial criativo de uma criança pode ser tanto desenvolvido como inibido” aqui a proposta foi direcionada para o desenvolvimento de tais habilidades.

Em reposta ao questionamento, se o participante pratica algum tipo de jogo? O resultado mostra que 55% da amostra composta por 20 alunos responderam sim para prática de algum tipo de jogo, ou seja, 11 alunos. 8 alunos disseram não praticar nenhum tipo de jogo o que equivale a 40% da amostra, somente 1 individuo não sabe ou não respondeu a pesquisa, ou seja, 5%, veja a representação no gráfico (Figura 19).

**Figura 19 -** Comparativo entre os estudantes da pesquisa sobre a prática de jogos no cotidiano



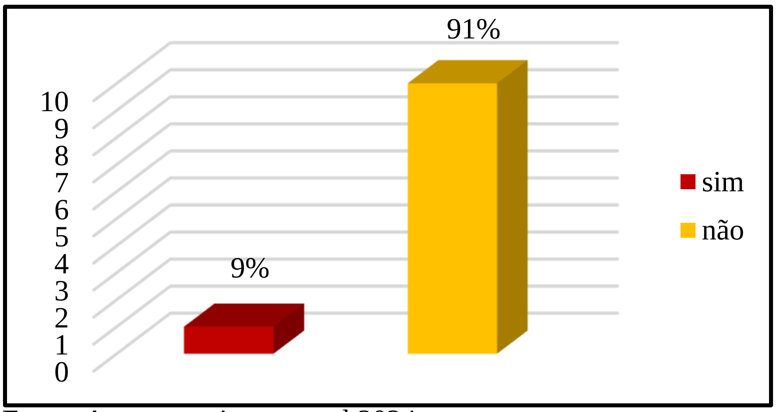

Fonte: Autor, arquivo pessoal 2024.

Considerando os 11 participantes que disseram praticar algum tipo de jogo, 4 deles afirmaram já ter praticado o jogo Tangram, o que equivale a 36%, já para os outros 64% o que corresponde aos outros 7 participantes, afirmam não terem jogado Tangram, mostrando que o jogo em questão não faz parte do repertório de jogos praticados por eles. Aos que afirmam ter feito uso do jogo, 75% praticou na escola, ou seja, 3 participantes, essa informação é um tanto quanto interessante, pois o fato de serem alunos do mesmo ambiente escolar, não faz com que a prática seja comum ao público, muito embora, todos sejam estudantes oriundos da rede municipal de ensino, algo que pode explicar essa incoerência na informação, podendo estar relacionada a escolha aleatória dos participantes, visto que esses vêm de instituições distintas da rede municipal de ensino, a qual é a responsável pela Educação Básica no que tange os anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental. Apenas 1 participante, o que corresponde a 25% dos que afirmam ter jogado Tangram, não aprendeu o jogo na escola, mostrando ainda que esse tipo de jogo não é comum no ambiente de sala de aula das instituições de ensino da rede municipal.

Com relação ao tempo de prática do jogo, 1 aluno o pratica a menos de um ano, ou seja, 25%, enquanto os outros 3 já o praticam há mais de 5 anos, em relação a esses 75% com mais tempo de prática com o jogo, pode estar relacionado a adoção deste por colegas professores como ferramenta de apoio para o desenvolvimento de algum objeto do conhecimento em alguma escola da rede municipal de ensino já há algum tempo. Entre os que fazem uso do jogo, 50% afirmam que a concentração melhorou após a sua prática e para os outros 50% o jogo não interfere na sua concentração, ou seja, 2 participantes. Sobre o jogo ter contribuído de alguma forma para o aprendizado na escola, 50% acredita que sim e 50% acredita que não, ou seja, 2 participantes afirmam que o jogo contribui para o aprendizado e 2 participantes não condicionam a melhora do aprendizado na escola ao jogo.

Na análise referente ao jogo torre de Hanói, somente 1 dentre os 11 participantes que responderam praticar algum tipo jogo, o que corresponde a aproximadamente 9%. Para os outros 91% (10) dos participantes, o jogo torre de Hanói não está entre aqueles que compõe o repertório de jogos comum em suas práticas. Para o participante que pratica o jogo – o qual afirma que aprendeu na escola e joga a menos de um ano - o jogo tem contribuído para o aprendizado dentro da escola e a sua prática tem ajudado na sua concentração durante as aulas. Sobre o fato de um único participante da pesquisa ter aprendido o jogo dentro da escola, pode estar condicionado ao fato de alguma instituição de ensino da rede municipal está utilizando essa ferramenta em espaços recreativos, o gráfico apresentado na Figura 20 mostra a relação dos participantes da pesquisa com o jogo em questão.

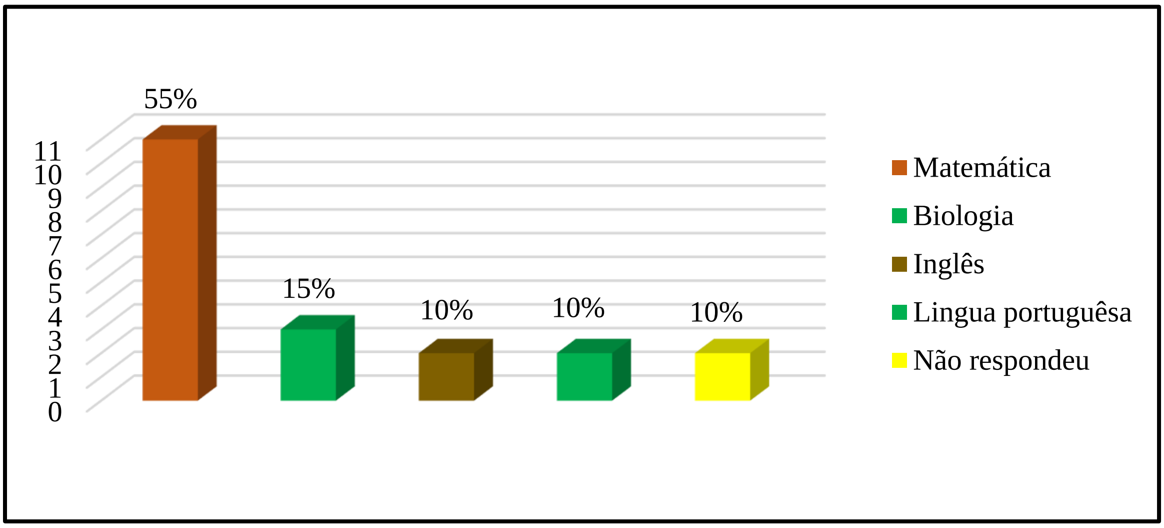
**Figura 20 -** Relação dos participantes da pesquisa com a prática do jogo torre de Hanói.




Fonte: Autor, arquivo pessoal 2024.

Ao serem abordados sobre qual a área do conhecimento tem dificuldade, 11 participantes se reportou a matemática, o que responde por 55% dos pesquisados, os outros ficaram divididos entre as áreas de conhecimento como biologia, inglês, linguagem ou não responderam à pesquisa, conforme demonstra o gráfico (Figura 21) contendo os dados levantados.

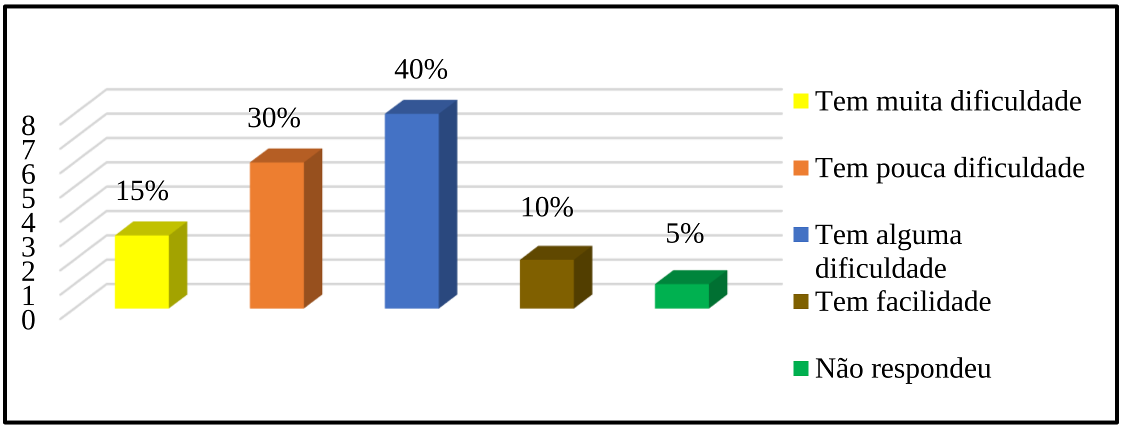
**Figura 21 -** Dificuldade dos participantes com relação a área do conhecimento.




Fonte: Autor, arquivo pessoal 2024.

Os dados referentes a relação dos participantes com o aprendizado matemático coletados na pesquisa, mostram que, de alguma forma, a maioria dos participantes apresentam dificuldade relacionada a essa área do conhecimento conforme podemos observar no gráfico da (Figura 22).

**Figura 22 -** Relação dos participantes da pesquisa com a área do conhecimento matemática.



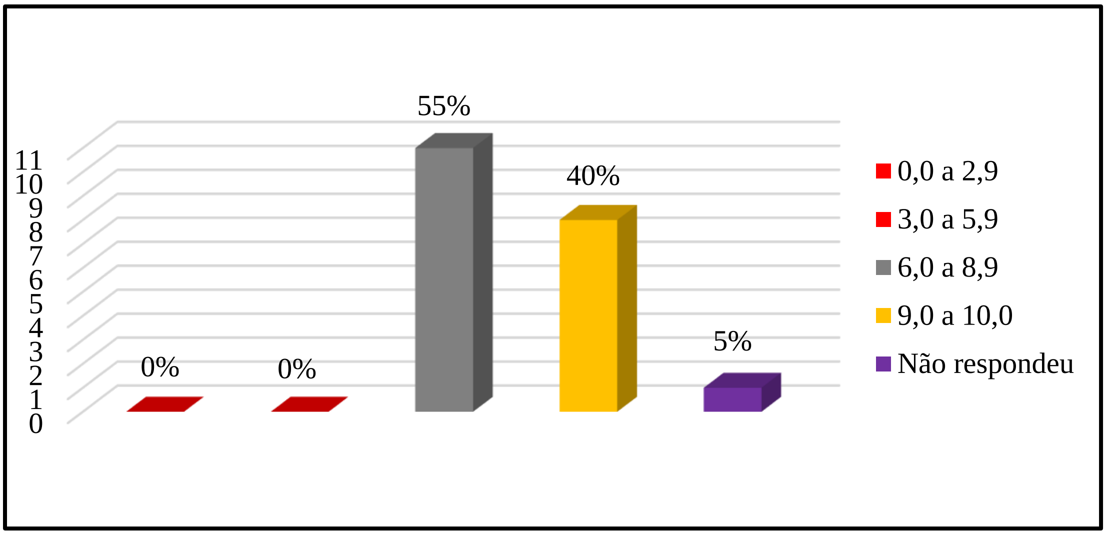

Fonte: Autor, arquivo pessoal 2024.

As informações apresentadas no gráfico acima, demonstram que dentre os participantes da pesquisa 15% têm muita dificuldade em matemática, 30% demonstram ter pouca dificuldade, diferentemente dos 40% que afirmam ter alguma dificuldade, somente 10% dos participantes afirmam ter facilidade quanto ao conhecimento de matemática e finalizando estudo dos dados coletados, 5% não sabem ou não responderam à pesquisa. Comparando os dois questionamentos anteriores é possível observar uma correlação entre o que foi coletado na pesquisa relacionada a área do conhecimento em que os participantes apresentam maior dificuldade e a relação dos pesquisados com o aprendizado matemático, nos dois itens a maioria admitiu ser a matemática a área do conhecimento que causa mais temor no dia a dia dos participantes no ambiente escolar.

Seguindo na observação das temáticas abordadas no questionário, vejamos o que os participantes falaram sobre qual a metodologia o (a) educador (a) matemático mais utilizou com a turma de cada integrante da pesquisa no ano letivo de 2023. Para a maioria, a metodologia que mais foi aplicada em sala de aula durante o ano letivo de 2023 foi a aula expositiva, resposta dada por 65% da amostra que compõe a pesquisa, ou seja, para 13 dos 20 estudantes que responderam ao questionário a metodologia predominante em sala de aula é a expositiva. Assim, o docente optou por uma abordagem em que o professor é o centro do processo, impossibilita ao educando um espaço de discursões que oportunizem aos mesmos colocarem-se diante de um movimento reflexivo e crítico que oportunize o "enriquecimento do vocabulário, a riqueza de ideias, a desinibição, facilitando a comunicação e a interação social entre alunos e professores" (Valle, 2015, p. 81).

Questionados sobre o desempenho escolar no ano de 2023 em relação a área de conhecimento matemático, da amostra composta por 20 participantes, 11 responderam que tiveram média anual entre 6,0 e 8,9, ou seja, 55%, já para 40% dos pesquisados o que corresponde a 8 estudantes, a média ficou entre 9,0 e 10,0 e apenas 5%, ou seja 1 aluno não sabe ou não respondeu a pesquisa. Como podemos observar na representação gráfica da (Figura 23) mostrando que a maioria dos estudantes obtiveram média entre 6,0 e 8,9 em relação a matemática, em se tratando desta área de conhecimento parece algo normal a não ser o fato de 40% dos participantes afirmarem que a média ficou de 9,0 a 10,0, que não é muito comum em especial por se tratar de matemática e suas tecnologias que normalmente apresenta números preocupantes nas avaliações externas em especial no município onde a pesquisa foi realizada.

**Figura 23 -** Desempenho escolar dos participantes da pesquisa em matemática em 2023




Fonte: Autor, arquivo pessoal 2024.

Retomando a temática relacionada ao uso de jogos como ferramenta que auxilia na construção do conhecimento, questiona-se, você acha que de alguma forma os jogos podem contribuir com o processo de ensino e aprendizagem matemática no ambiente de sala de aula? Para 90% dos participantes da pesquisa, sim, o jogo é uma ferramenta que pode contribuir para o ensino e aprendizagem matemática em sala de aula correspondendo a 18 dos 20 estudantes selecionados para compor a amostra. A resposta obtida nesse item corrobora para o que defende Campos “todos os jogos tem seus benefícios, qualquer um pode ser proveitoso desde que o professor encontre coerência neste recurso, dando sentido as tarefas e aos seus conteúdos” (2019, p. 38). De fato, o sucesso de qualquer possibilidade metodológica depende do planejamento estratégicos e do significado dado diante da ação pedagógica.

Concluindo os questionamentos acerca da pesquisa em desenvolvimento, segue o Quadro 04, respondendo à questão aberta do questionário.

**Quadro 04 -** Descrição das respostas dos participantes referente a questão 17 do questionário

| **Como você gostaria que fossem as suas aulas de matemática no Ensino Médio?** | |
|---|---|
| NOME | **DESCRIÇÃO DA RESPOSTA** |
| **Alfa** | Gostaria que fossem mais fáceis. |
| **Beta** | Mais expositiva e bem dinâmica. |
| **Gama** | Não respondeu. |
| **Delta** | Aulas práticas, expositivas para que o reforço na aprendizagem e no entendimento fosse melhor para compreender. |
| **Epsilon** | Com mais aulas práticas para vermos até onde vai o nosso aprendizado e para nos concentrarmos cada vez mais. |
| **Zeta** | Aulas mais interativas com o aluno, como por exemplo, fazer jogos que envolvam a matemática. |
| **Eta** | Do mesmo jeito que está sendo. |

| | |
|---|---|
| **Téta** | Aula expositivas e resolvendo exercícios. |
| **Capa** | Com os professores passando a matéria, formulando questões e chamando os alunos no quadro para ensina-los a responder as questões. |
| **Lambda** | Não respondeu. |
| **Miu** | Bem explicadas e com simulados igual aos do SAEB. |
| **Omicron** | Queria ter mais aulas de matemática, porque acho que ajudaria mais. |
| **Pi** | Com várias dinâmicas e atividades impressa. |
| **Ró** | Eu gostaria que tivesse algo para nós criarmos. |
| **Sigma** | Não tenho um meio específico. |
| **Tau** | Gostaria que as aulas fossem mais dinâmicas, com mais parte teórica, pois acredito que isso ajudaria mais para facilitar o ensino, tendo primeiro a parte teórica com exemplos e resumido para melhor entendimento. |
| **Fi** | Já está bom assim. |
| **Qui** | Queria que fossem aulas práticas e no quadro com algumas explicações. |
| **Psi** | Dinâmicas com práticas para vermos a matemática atuando no nosso dia a dia, pois isso desperta o interesse nos alunos e curiosidade em saber mais. |
| **Omega** | Mais devagar, porque as vezes eu acho que passam os assuntos muito rápido, também podem ser mais dinâmicas. |

Fonte: pesquisador (Apêndice 01), 2024.

Diante do exposto, percebe-se uma ocorrência de discursos que levam a compreensão da importância de se utilizar estratégias que saiam de um modelo unicamente expositivo, a maioria dos alunos afirmou quererem aulas "*dinâmicas, práticas, que despertem a criatividade*", porém é perceptível uma fragilidade nas falas, tendo alguns que não sabem nem mesmo o que responder, o que demonstra a precariedade de alternativas para esses jovens até mesmo se colocarem diante da exposição de uma opinião.

## 3.2 Abordagem teórica e expositiva dos conhecimentos: potência de base dois com expoente inteiro negativo e função exponencial no ambiente de sala de aula.

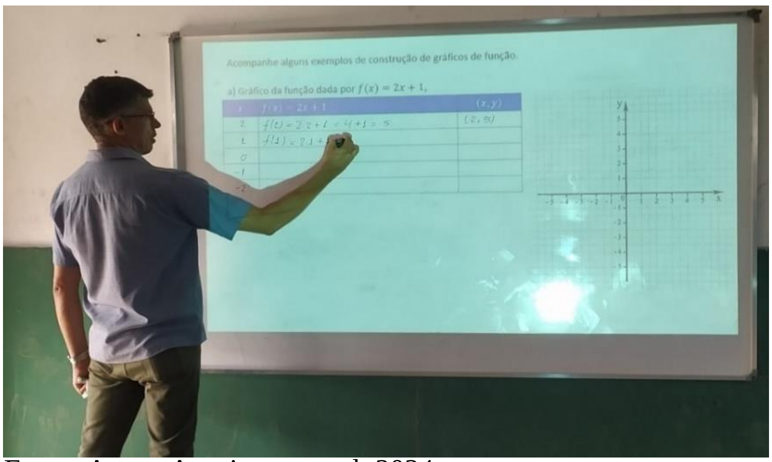
Nessa Categoria, apresenta-se a análise dos resultados alcançados com a utilização do procedimento metodológico conhecido como método expositivo de ensino, tal processo comum no dia a dia em sala de aula, permite que o professor tome o quadro de anotações como ferramenta de transmissão daquilo que julga prudente para o ensino e aprendizagem matemática. Desse modo, ao educando cabe o papel de registrar por meio de anotações ou captura digitais de imagens as definições e os exercícios de aplicação voltados a repetições de modelos apresentados pelo professor (Beatriz D'Ambrosio, 1989). A apropriação dessa ferramenta comum adotada por professores da área de matemática e suas tecnologias em práticas de ensino em sala aula, em instituições de ensino de todo o país, expõe a crença de que é possível aprender matemática tendo como fonte de ensino a transmissão do conhecimento e que a resolução de problemas está condicionada ao que foi determinado pelo professor.

Esse procedimento metodológico comumente utilizado pelo professor de matemática no ambiente de sala de aula, é conhecido como método de ensino tradicional, estamos nos referindo aos procedimentos metodológicos que se estenderam por muito tempo nas instituições de ensino e que se mantém (Saviani, 1991). Portanto, faz-se necessário a busca constante de superação dessa corrente pedagógica que advém "[...]da memorização de definições, enunciados de leis, síntese e resumos que lhes são oferecidos no processo de educação formal[...]" (Mizukami,1986). Tal método presente ainda hoje nas instituições de ensino se consolidou por meio de uma abordagem científica indutiva. Assim, esquematiza-se em três momentos fundamentais, a observação, a generalização e a confirmação (Saviani, 1991). A aprendizagem nesse processo é notada no fato do aluno reproduzir o que lhe foi transmitido no transcorrer do percurso, isso se dar a partir do momento em que se constata que ele conseguiu atingir os objetivos propostos pelo professor.

Tendo como ferramenta de ensino o método expositivo, foram feitas as primeiras abordagens sobre os conhecimentos matemáticos que tratam de potência de base dois com expoente inteiro negativo e função exponencial. De início, o professor pesquisador munido de um plano de aula, contendo a ementa que trata do objeto de conhecimento, as habilidades e os objetivos a serem alcançados no decorrer do processo de ensino e aprendizagem adotados na pesquisa, reuniu-se no contraturno de funcionamento do (CETI) Acrísio Veras com os 20 estudantes selecionados para desenvolver o trabalho em questão.

Por um período equivalente a uma hora o professor pesquisador expôs os conhecimentos foco da pesquisa em sala de aula, por meio de anotações, tendo como ferramenta o quadro branco e pincéis coloridos, computador e um projetor de imagem, conforme se pode observar na (Figura 24).

**Figura 24 -** Momento de exposição da aula teórica na sala de aula




Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

Partindo da temática relacionada a potenciação e suas propriedades, o professor apresentou aos participantes definições, propriedades, regras e exemplos contendo aplicações sobre os conhecimentos, o trabalho prosseguiu, com uma abordagem de forma generalizada direcionada para potência com expoente inteiro negativo, objeto de estudo dessa pesquisa, dando continuidade ao uso da metodologia expositiva por mais uma hora, o pesquisador redireciona o foco para o estudo sobre função e seus elementos, durante essa parte da exposição, ateve-se a definições, conceitos, aplicações e construções atreladas ao tema, na sequência, restringiu-se a abordagem ao estudo da função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, tal que, $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $x \in \mathbb{Z}$, concluindo o último objeto de estudo adotado para compor a pesquisa, o momento foi finalizado com a distribuição e discussão de uma lista de atividades (Figura 25) voltada a temática abordada em sala de aula.

**Figura 25 -** Participantes da pesquisa analisando e respondendo as atividades propostas na sala.

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

No segundo encontro, dando continuidade ao desenvolvimento do trabalho, o professor pesquisador submeteu os estudantes participantes da pesquisa a um teste de verificação do aprendizado (Apêndice 05) referentes aos conhecimentos trabalhados de forma expositiva no encontro anterior. O teste era composto de oito questões subjetivas, por um período de mais ou menos uma hora e meia, onde os alunos responderam a uma lista de problemas contendo: resolução de potenciação com expoente inteiro, construção de sequências numéricas envolvendo potências de expoente inteiros, aplicação das propriedades das potências, o inverso de uma fração tendo como denominador uma potência com expoente inteiro positivo, classificação de uma função exponencial, análise gráfica da função exponencial e construção do gráfico da função afim e exponencial no mesmo plano cartesiano definido na malha quadriculada.

### 3.3 Aplicação da oficina com o quebra cabeça Tangram relacionado ao objeto do conhecimento potência de base 2 com expoente inteiro negativo.

Durante a apresentação dos jogos no ambiente de sala de aula, notou-se um ar de surpresa, curiosidade e ao mesmo tempo um certo receio por parte dos estudantes participantes da pesquisa, o que os levou a questionamentos tais como: O que é isso na sua mão professor? Sério que isto tem relação com o ensino e aprendizagem matemática? Diante disso, coube ao pesquisador dar credibilidade a tal ferramenta pedagógica que para a maioria parecia estranha para aquele contexto de ensino e aprendizado, mas que era capaz de prender a atenção e despertar a curiosidade do público-alvo envolvido no processo de construção do conhecimento.

Seguindo com a proposta, o professor pesquisador apresentou a primeira oficina didática (Apêndice 03) direcionada ao uso do jogo Tangram como ferramenta de ensino adotada na construção do conhecimento potenciação na base 2 com expoente inteiro negativo, pensando-se na utilização desse jogo como ferramenta manipulativa com instrumento alternativo para o processo de ensino e aprendizagem matemática, buscou-se meios para tornar as aulas de matemática mais atrativas e dinâmicas, considerando o jogo no intuito da manipulação de suas peças para alcançar a resolução de situações problemas relacionados ao objeto do conhecimento citado, para isso, parte-se da ideia de que o jogo

> Tangram pode estar ao serviço de uma estratégia que favorece a transição para uma abstração e para níveis de formalização sustentados e significativos, condição incontornável do sucesso numa disciplina tão mal-amada como é a Matemática. Provavelmente, porque sendo uma disciplina que alicerça o pensamento e as iniciativas científicas, tende a ser ensinada como se estivéssemos perante um ato de fé. [...] talvez possa contribuir, a seu modo, para transformar as atividades de aprendizagem em Matemática em atividades capazes de suscitar a inteligência e a atividade inteligente dos alunos (de Assis Silva, 2021, p.46).

Entendendo-se que o Tangram é uma ferramenta interessante, que dentre tantas as possibilidades no campo da educação matemática, poderíamos vinculá-lo ao desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao estudo da potenciação, tendo como ponto de partida a potência na base 2 com expoente inteiro negativo.

Buscando-se, uma abordagem diferente do que costuma ocorrer no dia a dia em sala de aula, optou-se pela apresentação de uma oficina que contemplasse desde a construção do jogo utilizando ferramentas comuns do cotidiano dos participantes da pesquisa, até a resolução de problemas que demandem para a sua solução competências e habilidades desenvolvidas com a prática do mesmo. Segue o detalhamento da oficina em forma de uma sequência didática que estar descrita de acordo com o Quadro 05.

**Quadro 05 -** Detalhamento da 1ª Oficina Didática com o Tangram

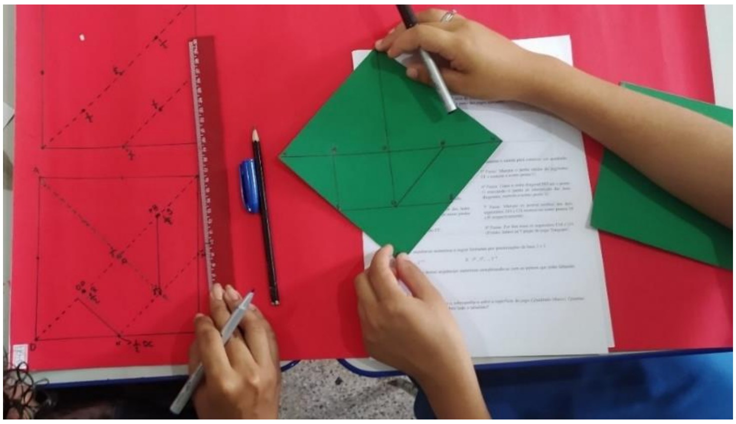
| ITEM | DETALHAMENTO DAS AÇÕES |
|---|---|
| 1º | Traz o passo a passo a ser seguido para a confecção e as ferramentas necessárias para medição, marcação, coloração e corte. |
| 2º | Reescrever e completar duas sequências numéricas formadas por potenciações na base dois e três com expoentes inteiros. |
| 3º | Tomar como referência a menor peça dentre as 7 que compõe o jogo e por meio de translação. sobrepô-la a superfície do quadrado 14 x 14 utilizado como base na construção do Tangram, registrando quantidade de vezes que a peça em questão foi utilizada para a total cobertura desta superfície. |
| 4º | Tem-se um quadro contendo seis linhas e quatro colunas, onde o participante da pesquisa é desafiado a completar a primeira coluna nomeando a forma geométrica de cada peça do jogo, deverá completar a terceira coluna lançando mão do procedimento adotado como ferramenta de resposta no item três para determinar a fração correspondente a cada peça distinta do quebra-cabeça e na quarta e última coluna o participante deverá apresentar a fração de cada peça em relação ao todo, |
| 5º | Escrever o denominador de cada fração obtida na quarta linha da tabela como uma potência na base 2 |
| 6º | Escrever cada potência que se encontra no denominador de cada fração, do item anterior fazendo isso, alcança-se o principal objetivo do jogo, a construção do conhecimento sobre potenciação com expoente inteiro negativo por meio da utilização das peças do jogo Tangram. |
| 7º | Traz um quadro contendo onze linhas e três colunas, primeira coluna o colaborador deve obter o quociente das divisões, que tem como divisor o número natural 2 e dividendo inicial o número natural 16 e como dividendo final o número racional $\frac{1}{32}$, na segunda coluna o participante deverá decompor cada quociente em produto de fatores iguais a 2 ou $\frac{1}{2}$ e na terceira coluna, cada quociente obtido deverá ser escrito como uma potência na base dois. |

Fonte: pesquisador (Apêndice 03), 2024.

Diante da proposta acima, ao concluir os 7 itens, consolida-se o propósito com essa oficina que foi executada no terceiro encontro. O jogo Tangram foi utilizado como ferramenta na construção do conhecimento da potenciação na base 2 com expoente inteiro negativo, sendo pensado e desenvolvido com a supervisão do professor pesquisador no ambiente de sala de aula, no contraturno de funcionamento da escola.

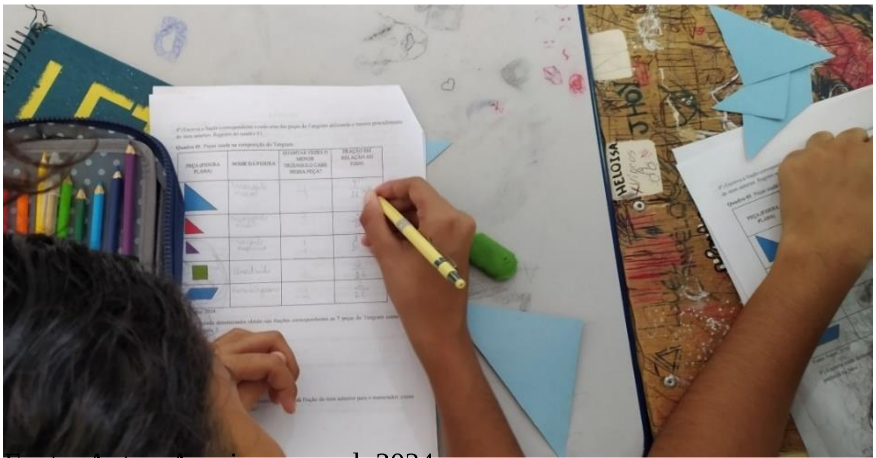
Para iniciar os trabalhos o professor responsável pela pesquisa dividiu os participantes em duplas, de modo a propiciar a interação e a colaboração entre os componentes permitindo assim o trabalho cooperativo e o compartilhamento de experiências. Seguindo com a proposta, cada componente das dez duplas formadas com os colaboradores do estudo, receberam papel cartão, cópias com as orientações da oficina proposta a ser aplicada, materiais de medição, marcação, coloração e corte, ofertados pelo pesquisador. Após isso, propôs-se que cada um dos participantes fizesse uso desses instrumentos e/ou ferramentas para concluir as demandas propostas na oficina, iniciaram pela confecção do jogo, ação que está ilustrada nas Figuras 26 e 27.

**Figura 26** – Os participantes da pesquisa construindo as peças do jogo Tangram.



Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

**Figura 27 -** Os participantes da pesquisa resolvendo os problemas abordados na oficina I.



Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

Durante a execução dos trabalhos, o professor pesquisador encarregou-se do registro de imagens, do apoio e da orientação dos estudantes em relação aos questionamentos e dúvidas que surgiram no transcorrer do desenvolvimento, produções e conclusão da oficina. O trabalho prosseguiu por um período de mais ou menos duas horas e meia. Entre as principais dúvidas levantadas no transcorrer das produções, destacam-se, dificuldade na manipulação das peças do jogo durante a execução dos movimentos de rotação e translação, utilizados para efetuar a sobreposição da peça menor sobre as peças maiores, a fim de obter por meio de comparação, o número necessário de vezes que a superfície menor é utilizada para cobrir a superfície das peças maiores do quebra-cabeça, a dificuldade de alguns em perceber a regularidade no expoente durante a complementação da sequência formada por potenciação de mesma base.

Um outro questionamento levantado pelos participantes, surgiu no momento de apresentar resposta ao problema que trata da associação de cada peça componente do jogo ao número de partes do todo, nessa ação, cada participante deveria expressar por meio de fração cada uma das partes componentes do quebra-cabeça, para isso deveriam considerar os resultados alcançados durante a sobreposição da unidade a menor sobre as maiores, ainda sobre os questionamentos levantados no ato da execução da oficina, ocorreu no momento de responder o problema 6, na tentativa de obter uma resposta, os participantes foram instigados a utilizarem como referência as informações dispostas na última coluna do quadro que compõe o problema 4. Ao serem motivados a proceder com a inversão da base de uma potência, os participantes demonstraram dificuldade no momento da alteração do sinal do expoente da potência, visto que, ao que parece não era um hábito comum em práticas matemáticas dos colaboradores no dia a dia no ambiente de sala de aula.

O questionamento final ficou por conta da divisão de um número racional por um número natural, procedimento necessário para completar a primeira coluna da tabela, presente no último problema da oficina que se encontra detalhada no Quadro 01. Todavia, as dúvidas que surgiram durante o trabalho foram esclarecidas pelo professor pesquisador que forneceu auxílio a todos os grupos sempre que foi solicitado.

## 3.4 Aplicação da oficina com a Torre de Hanói associada ao objeto do conhecimento função exponencial.

Para o quarto encontro, o tema sugerido foi a Torre de Hanói aplicada a construção do conhecimento matemático, a adoção do jogo como ferramenta metodológica mediadora do processo de ensino-aprendizagem do conhecimento função exponencial, teve como finalidade proporcionar aos participantes da pesquisa uma abordagem matemática mais humana e participativa, para tanto, fez-se necessário que a proposta voltada para a inserção do lúdico no ambiente de sala de aula sofresse adaptações tais como, desvincular o jogo da prática recreativa, adoção de um sistema de regras como as descritas no Quadro 06, adaptação da ferramenta para o contexto escolar mediante a sua vinculação a um objeto do conhecimento, promover relações sociais permitindo que os alunos participantes da pesquisa pudessem por meio de colaboração durante o desenvolvimento da ação e assim permitir aos praticantes relacionar o abstrato com o concreto impulsionando o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

A implementação da ferramenta buscou condicionar sua prática a resolução de problemas, utilizando uma abordagem condicionada a atividade matemática permitindo o desenvolvimento de conceitos relacionados ao objeto do conhecimento associado ao jogo como ponto de partida, de acordo com Rodrigues

> O jogo pode ser útil para dar introdução, desenvolvimento ou a fixação de conceitos matemáticos em sala de aula. Em consequência, propõe-se um

> problema que permita que estes sejam introduzidos de forma fascinante e, também, favoreça a criatividade para elaborar métodos de resolução e busca de solução. Desse modo, o jogo pode ser um instrumento metodológico que auxilia no desenvolvimento da matemática, pois contribui para a formação do pensamento lógico-matemático, aprimoramento da argumentação e da organização do pensamento, toda de decisão, necessárias para a aprendizagem da matemática (2020, p. 33).

Partindo desse pressuposto, o professor pesquisador apresentou aos participantes a ferramenta de ensino e aprendizagem em que a prática do jogo Torre de Hanói foi utilizada como base na construção do conhecimento. Para o desenvolvimento da metodologia os componentes da pesquisa foram divididos em duplas e a estes foram entregues a II oficina (Apêndice 04), um jogo de três hastes e 6 discos de cores e tamanhos de diâmetro distintos. A oficina foi estruturada em forma de sequência didática composta de problemas com solução condicionada a prática do jogo e ao número mínimo de movimentos para transportar todos os ***n*** discos da haste A para a haste C, utilizando a haste B como suporte para vencê-lo, perfazendo o menor número de movimentos possível.

A oficina foi dividida em duas partes, a primeira parte trata das regras do jogo conforme Quadro 06.

**Quadro 06 -** Regras do jogo Torre de Hanói

| REGRA | DESCRIÇÃO DETALHADA DA REGRA |
|---|---|
| 1ª | Pode se mover um único disco por vez. |
| 2ª | Um disco de diâmetro maior não pode ser colocado sobre um disco de diâmetro menor. |
| 3ª | Um disco deve estar sempre numa das três hastes ou em movimento. |
| 4ª | O jogo termina quando todos os discos da haste A forem removidos para a haste C com movimentos que obedecem às regras do jogo. |
| 5ª | O vencedor do jogo será o competidor que conseguir transferir todos os discos da haste A para a haste C desferindo o menor número de movimentos possíveis. |

Fonte: pesquisador (Apêndice 04), 2024.

A segunda parte, consta de uma lista composta por oito problemas relacionados a situações matemáticas, que podem ser solucionados mediante a prática coordenada do jogo, durante a execução da atividade, os componentes da pesquisa organizados em grupos deveriam identificar meios e padrões capazes de facilitar a resolução das situações problemas levantados na sequência didática, proposta na oficina descrita no Quadro 07.

**Quadro 07 -** Detalhamento da 2ª Oficina Didática com a torre de Hanói

| PROBLEMA | DETALHAMENTO DAS AÇÕES |
|---|---|
| 1º | Utilizar o jogo para preencher os Quadros 01 e 02 com o menor número de movimentos necessários para uma quantidade de discos variando de 1 até n discos. |
| 2º | Responder se é sempre possível determinar o menor número de movimentos que permita transferir uma quantidade n de discos qualquer da haste A para a haste C obedecendo às regras do jogo. Em caso afirmativo, justificar a resposta. |
| 3º | Responder sobre a dinâmica do jogo:<br>• Se existe alguma relação matemática entre o número de disco n da torre e o número mínimo de movimentos $T_n$ necessário para efetuar a transferência de todos os discos da haste A para a haste C;<br>• Se existe uma função matemática real $T_n$, de variável real n que possa representar essa situação. |
| 4º | Responder o que acontece com o número de movimentos quando o número de discos aumenta de:<br>• uma para duas unidades?<br>• duas para três unidades?<br>• três para quatro unidades?<br>• n – 1 unidades para n unidades?<br>• que tipo de função descreve esse comportamento? |
| 5º | Localizar no plano cartesiano as coordenadas obtidas nas 5 primeiras linhas do Quadro 02 respondido no 1º problema, considerando no eixo horizontal das abscissas $\boldsymbol{x}$ o número de discos $\boldsymbol{n}$ e no eixo vertical das ordenadas $\boldsymbol{y}$ o número mínimo de movimentos $\boldsymbol{T_n}$. |
| 6º | Construir no pano cartesiano o gráfico da função $T_n$ obtida no item a) do problema 3. |
| 7º | Construir o gráfico da função afim $F(n) = 2n + 1$ no plano cartesiano, considerando n o número de discos. |
| 8º | Responder por meio da análise dos gráficos obtidos nos problemas 6 e 7:<br>qual é a função que cresce mais rápido?<br>para qual valor de $\boldsymbol{n}$ as linhas que representam os gráficos de $\boldsymbol{T_n}$ e $\boldsymbol{F(n)}$ coincidem? |

Fonte: pesquisador (Apêndice 04), 2024.

Em conformidade com a descrição no Quadro acima, têm-se a oficina que busca responder os 8 problemas propostos, tendo como recurso didático o jogo Torre de Hanói na construção do conhecimento sobre função exponencial. O professor pesquisador deu início aos trabalhos formando duplas e distribuindo as oficinas a cada integrante dos 10 grupos juntamente com um jogo para cada dupla conforme (Figura 28).

**Figura 28 -** Oficina com o jogo Torre de Hanói 1º momento.

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

Assim como foi proposto em todos os momentos dessa pesquisa, o professor buscou orientar e conduzir as produções de acordo com as demandas que iam surgindo no processo. A oficina se estendeu por um período correspondente a 2 horas e meia com intervalo de 20 minutos conforme (Figura 29).

**Figura 29 -** Resolução dos problemas propostos na oficina II.

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

Tendo como ponto de partida a manipulação do jogo, segundo regras preestabelecidas, propôs-se aos participantes uma competição entre os integrantes de cada equipe, de modo que cada um tentasse derrotar o seu adversário fazendo os deslocamentos dos discos da primeira para a terceira haste, no menor número de movimentos possível, concluída essa parte fundamental para que todos se apropriassem das regras e do entendimento do jogo, seguiu-se para a resolução dos problemas propostos.

Para isso, os componentes deveriam direcionar os esforços em conjunto para obter o número ótimo de movimentos necessários para a transferência dos discos e resolver os oito problemas, assim, a competição de cada dupla passaria a ser com o jogo, ou seja, transferir qualquer número de discos da haste A para a haste C na menor quantidade de movimentos possíveis. Dessa forma deram-se início as tentativas com um disco, depois dois, três, até chegarem a 6 discos, após essa competição, os participantes foram indagados pelo professor responsável pela pesquisa; é possível fazer a transferência dos discos em uma quantidade mínima de movimentos?

Diante da devolutiva dos participantes, partiu-se para resolução dos problemas organizados na oficina II.

No primeiro problema, propôs-se uma competição entre os participantes de cada equipe, a finalidade da concorrência era que um tentasse vencer o outro fazendo uso das regras do jogo. Durante a disputa, os participantes deveriam efetuar a transferência dos discos de uma haste para a outra com o menor número de movimentos possíveis considerando a quantidade de discos relacionados na primeira coluna do Quadro 01, o resultado alcançado pelo vencedor de cada rodada deveria ser anotado e, ao final do embate, esses deveriam ser utilizados para preencher a segunda coluna do mesmo quadro.

Concluída essa etapa, o desafio agora era completar a segunda e a terceira coluna do Quadro 02 com o menor número de movimentos possíveis para vencer o jogo, ou seja, os esforços dos componentes de cada equipe deveriam estar voltados para deslocar os discos da haste inicial para a haste final no menor número de movimentos possível levando-os a solução correta do problema, situações e indagações foram levantadas em torno do preenchimento da terceira coluna, pois, a determinação do número mínimo de movimento para qualquer quantidade de discos estava condicionado a obtenção de um padrão que levaria a uma expressão matemática constituída por uma diferença entre dois valores, sendo um desses uma potência na base 2.

Na hora de definir esse padrão, os participantes tiveram dificuldade, pois era necessário condicionar o número de movimentos obtidos na segunda coluna do quadro a uma potenciação, as tentativas e questionamentos perduraram por um certo período, até perceberem que o expoente da potência deveria corresponder ao número de discos utilizados no jogo e que o valor a ser subtraído da potência correspondia a uma unidade, conforme pode se observar em recorte obtido da resposta dada por um participante na Figura 30.

**Figura 30 -** Print da resposta dada pelo aluno Tau no preenchimento da terceira coluna do Quadro 02 no problema 1.

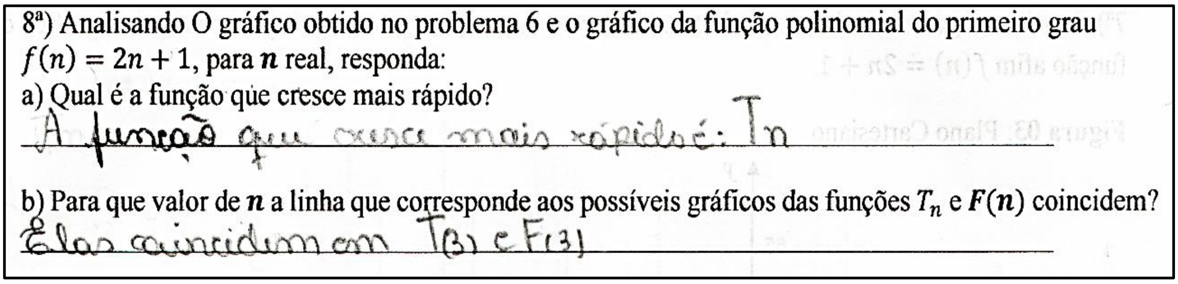
| Número de Discos (n) | Número mínimo de Movimentos $T_n$. | Representação do número mínimo e movimentos $T_n$ utilizando potência na base 2. |
|---|---|---|
| **1** | $T_1 = 1$ | $T_1 = 2^1 - 1 = 1$ |
| **2** | $T_2 = 3$ | $T_2 = 2^2 - 1 = 3$ |
| **3** | $T_3 = 7$ | $T_3 = 2^3 - 1 = 7$ |
| **4** | $T_4 = 15$ | $T_4 = 2^4 - 1 = 15$ |
| **5** | $T_5 = 31$ | $T_5 = 2^5 - 1 = 31$ |
| ... | ... | ... |
| **n** | $T_n$ | $T_n = 2^n - 1$ |

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

Seguindo com as dúvidas, no momento de responder o problema 4 da oficina, os questionamentos sugiram diante da compreensão em relação ao número de movimentos e a quantidade de discos quando se acrescenta um novo disco a quantidade anterior. Algum tempo depois notaram a relação do problema com as respostas fornecidas nos Quadros 01 e 02 do primeiro item. Seguindo na busca de respostas aos problemas propostos, os participantes ficaram na dúvida no momento de registrar os pontos no plano cartesiano fornecido no problema 5, por se tratar da localização de pontos no plano envolvendo coordenadas, deduziram que deveriam utilizar uma linha contínua para uni-los, o que não é possível, pois os números envolvidos nessa relação tratam-se dos naturais.

Seguindo com a conclusão da resolução dos problemas, os integrantes da pesquisa mais uma vez ficaram em dúvidas ao buscarem responder o item b) do oitavo problema, esse item trazia como proposta aos participantes a análise dos gráficos gerados nos problemas 6 e 7 para identificar o valor do $\boldsymbol{n}$ em que os gráficos correspondentes as funções descritas nesses problemas coincidiriam, postos na Figura 31 que mostra a resposta do participante de codinome **Psi**.

**Figura 31 -** Print da resposta dada pelo aluno Psi ao problema 8



8ª) Analisando O gráfico obtido no problema 6 e o gráfico da função polinomial do primeiro grau $f(n) = 2n + 1$, para $\boldsymbol{n}$ real, responda:

a) Qual é a função que cresce mais rápido?

A função que cresce mais rápido é: Tn

b) Para que valor de $\boldsymbol{n}$ a linha que corresponde aos possíveis gráficos das funções $T_n$ e $\boldsymbol{F(n)}$ coincidem?

Elas coincidem com T(3) e F(3)

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024.

Diante disso, coube ao professor pesquisador esclarecer todas as dúvidas levantadas no desenvolvimento e na resolução dos problemas propostos na segunda oficina didática e fornecer estímulos por meio de dicas, garantido aos participantes confiança e segurança na busca da construção do conhecimento sobre função exponencial, tendo como metodologia o jogo da Torre de Hanói.

### 3.5 Registro das aprendizagens matemáticas em prova escrita.

Uma das ferramentas utilizadas como inferência do trabalho desenvolvido com a amostra selecionada no transcorrer da pesquisa, foi o teste escrito ou prova, averiguou-se nesta ação que ocorreu em dois momentos distintos, se o modelo metodológico adotado como instrumental pedagógico pelo professor pesquisador, era ou não eficaz na construção dos conhecimentos associados aos objetos de estudo e se a ferramenta em questão permitiu aos participantes desse estudo algum desenvolvimento ou a consolidação de alguma habilidade.

No primeiro momento o pesquisador juntamente com os educandos selecionados, utilizaram o ambiente interno de funcionamento da escola no contraturno para, através de exposição, iniciar os primeiros contatos com o objeto do conhecimento, a ação se deu por meio de aulas expositivas em que o responsável pelo estudo utilizou recurso didático a projeção de imagem no quadro branco, para apresentar regras e definições relacionadas aos conhecimento sobre potenciação na base 2 com expoente inteiro negativo e função exponencial.

Já o segundo momento de aplicação do teste, ocorreu após a realização da Oficina I que tratara do jogo Tangram como ferramenta na construção do conhecimento potência de base 2 com expoente inteiro negativo e da Oficina II focada na prática do jogo Torre de Hanói como ferramenta utilizada na construção do conhecimento de função exponencial, essas metodologias alternativas foram adotadas na pesquisa como base para construção do conhecimento matemático e foram apresentadas aos estudantes na forma de sequências didáticas (SD) organizadas de modo a condicionar a prática dos jogos a resolução de problemas, envolvendo os conhecimentos citados, terminado esse segundo momento, os participantes do estudo foram convidados a responder um teste ou prova escrita tendo como padrão de elaboração o primeiro teste aplicado antes da conclusão das oficinas, o mesmo foi constituído de problemas similares ao primeiro.

É importante ressaltar que a ferramenta adotada como forma de verificação de aprendizado supracitada, não é a única, mas a sua adoção se justifica pelo fato de ser uma prática comum no ambiente educacional do qual o público participante faz parte. Entretanto, a adoção não está condicionada ao fato de que tal modelo seja eficaz para tal averiguação, como também, não há garantia de que as possíveis observações feitas tomando como base esse tipo de verificação de aprendizado, sejam de fato condizentes com a realidade e muito menos com o que se pretende alcançar.

Tratando-se de um processo de construção do conhecimento espera-se resultados positivos e uma forma de averiguar se tais resultados ocorreram ou não é avaliação da ação desenvolvida durante o processo, a avaliação, na visão de Ubiratan D'Ambrosio "serve para que o professor verifique o que de sua mensagem foi passado, se seu objetivo de transmitir ideias foi atingido" (2012, p. 65). Nessa perspectiva, lançou-se mão de teste escrito como modelo de comparação entre duas ações distintas para alcançar os mesmos objetivos, o instrumental adotado consta no (Apêndice 05) avaliação inicial e no (Apêndice 06) avaliação final.

Faz-se necessário esclarecer que a intenção por trás da prática avaliativa adotada, não é medir conhecimentos supostamente adquiridos pelos participantes da pesquisa durante a abordagem pedagógica, mas sim, averiguar se a proposta de trabalho foi entendida e absorvida pelos alunos pesquisados, na busca de uma ação mais apropriada no que tange o processo avaliativo da ação pedagógica. Diante do exposto, é fundamental o entendimento de que a avaliação não consiste no ato de simplesmente verificar se os avaliados reúnem ou não aptidões no que diz respeito a "dar conta" das propostas delineadas, ou perceber, de início, se esses trazem ou não consigo dificuldades em grau elevado, ou não, de determinado objeto do conhecimento (Hoffmann, 2001).

Nesse sentido, buscar-se-á comparar as duas metodologias adotadas para a apresentação do objeto do conhecimento em questão, durante a realização da pesquisa desenvolvida no (CETI) Acrísio Veras com estudantes da 1ª série do Ensino Médio na cidade de Alto Longá no estado do Piauí no contraturno de funcionamento.

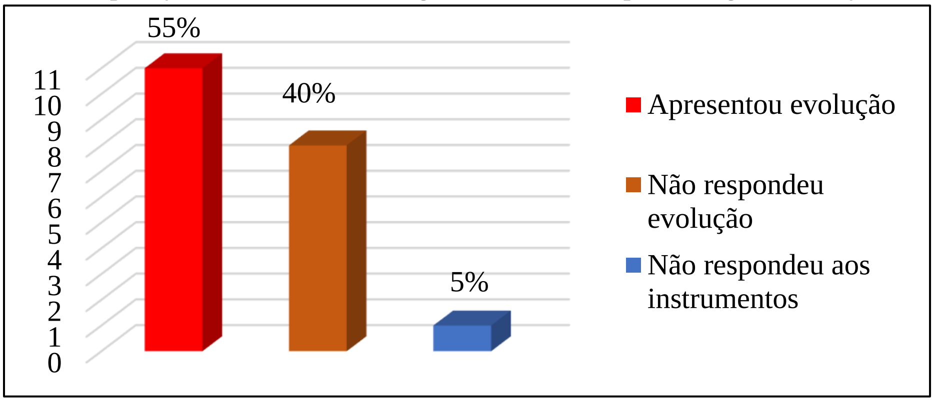
Sobre as formas de avaliar, entende-se que este ato fundamental e necessário que não é simples, mas, é indispensável no que concerne à eficácia do processo de ensino e aprendizagem de qualquer área do conhecimento, em especial matemática e suas tecnologias, deve ser contínuo e abrangente no que diz respeito a tomada de decisões para correção ou readequação dos rumos do processo de ensino e aprendizagem, tendo a avaliação como uma das suas finalidades

> [...] de conhecer os estudantes cada vez melhor, tateando em busca de questões que verdadeiramente os provoquem a agir, à escuta de suas próprias questões, propondo em conjunto situações que lhes sejam verdadeiramente problemáticas a ponto de lhes despertar a atividade, a curiosidade (Hoffmann, 2001, p.86).

Corroborando com a visão da Hoffmann, defende-se que o instrumental avaliativo adotado será utilizado só a título de parâmetro comparativo, no que o grupo pontuou ao ser submetido aos dois momentos, em que se fez uso do instrumento citado anteriormente como forma de investigação do aprendizado. Entende-se que, por meio de investigação, é possível gerar conhecimento acerca do desconhecido, sendo assim, optou-se por estar nesses dois intervalos aplicando a prova escrita ou teste, objetivando "investigar para conhecer e conhecer para agir são dois algoritmos básicos para a produção de resultados satisfatórios" (Luckesi, 2011, p. 149).

Apropriando-se da proposta com vistas no que o autor defende, fez-se por meio de comparação dos testes 1 e 2 o levantamento dos dados referentes ao desempenho dos participantes da pesquisa registrados no gráfico (Figura 32) abaixo.

**Figura 32 -** Comparação entre as metodologias de ensino e aprendizagem alcançadas na pesquisa

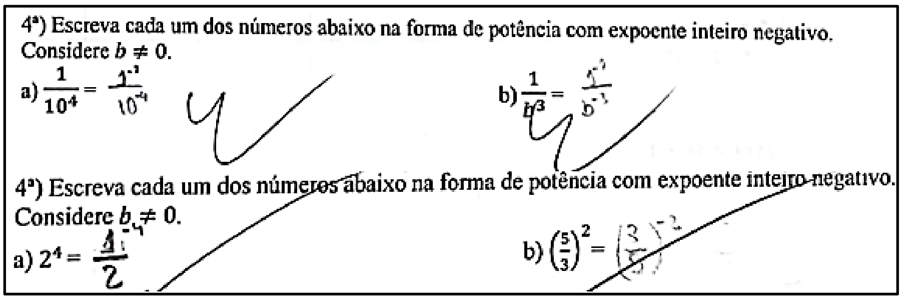



Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

Considerando as informações contidas no gráfico representado na figura acima, verifica-se que para 55% dos participantes, ou seja, 11 alunos apresentaram melhoras no desempenho, levando em consideração as competências e habilidades investigadas no processo de obtenção de dados, enquanto que para 8 participantes o que corresponde 40% da amostra não apresentaram desempenho do 1º para 2º teste de verificação do aprendizado das habilidades e competências propostas durante a construção do conhecimento, e somente um dos participantes, ou seja, 5% da amostra deixou de fazer um dos testes e, portanto, não foi considerado para conclusão dos resultados comparativos entre as duas etapas investigativas do processo de ensino e aprendizado proposto para a obtenção de informação para esta etapa do trabalho.

Tomando o método avaliativo ao qual os participantes da pesquisa foram submetidos, pontua-se a evolução identificada durante a análise feita do instrumental de avaliação inicial e final aplicado pelo professor pesquisador, dentre os estudantes que apresentaram evolução, destaca-se **Ômega**, que na avaliação inicial após participação na aula expositiva ministrada pelo professor pesquisador, tratando sobre potência com expoente inteiro, não demonstrou haver desenvolvido as habilidades relacionadas a conversão de uma potência de expoente inteiro positivo para uma com expoente inteiro negativo, já na observação dos problemas similares da segunda avalição, notou-se, que após o desenvolvimento das oficinas que relacionavam o objeto do conhecimento com a prática de jogos, o aluno havia fornecido resposta condizente com o proposto no problema, fato explícito na Figura 33, que contem respectivamente as respostas obtidas nos dois testes.

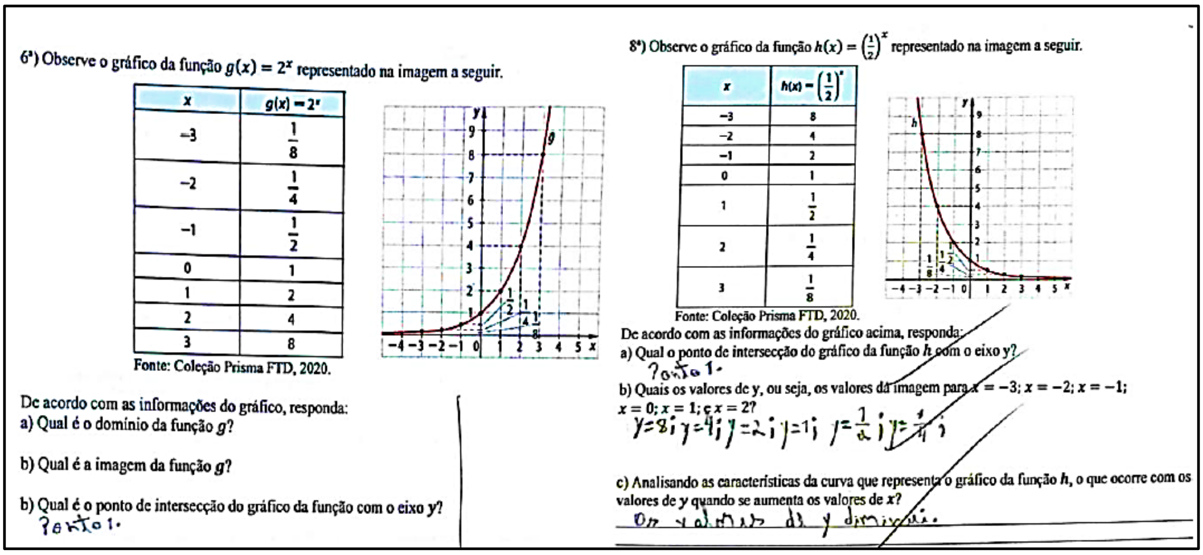
**Figura 33** - Print da resposta dada pelo aluno Ômega ao problema 4 nos testes inicial e final




Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

Comparando as respostas dadas pelo estudante **Eta**, ao fazer a análise e interpretação da representação gráfica de uma função exponencial, notou se por parte deste a falta da habilidade após o primeiro teste, quando se verificou o problema similar no segundo teste, onde nota-se que o aluno em questão havia adquirido essa habilidade de acordo com a Figura 34, contendo as respectivas imagens das respostas dadas no teste inicial e final.

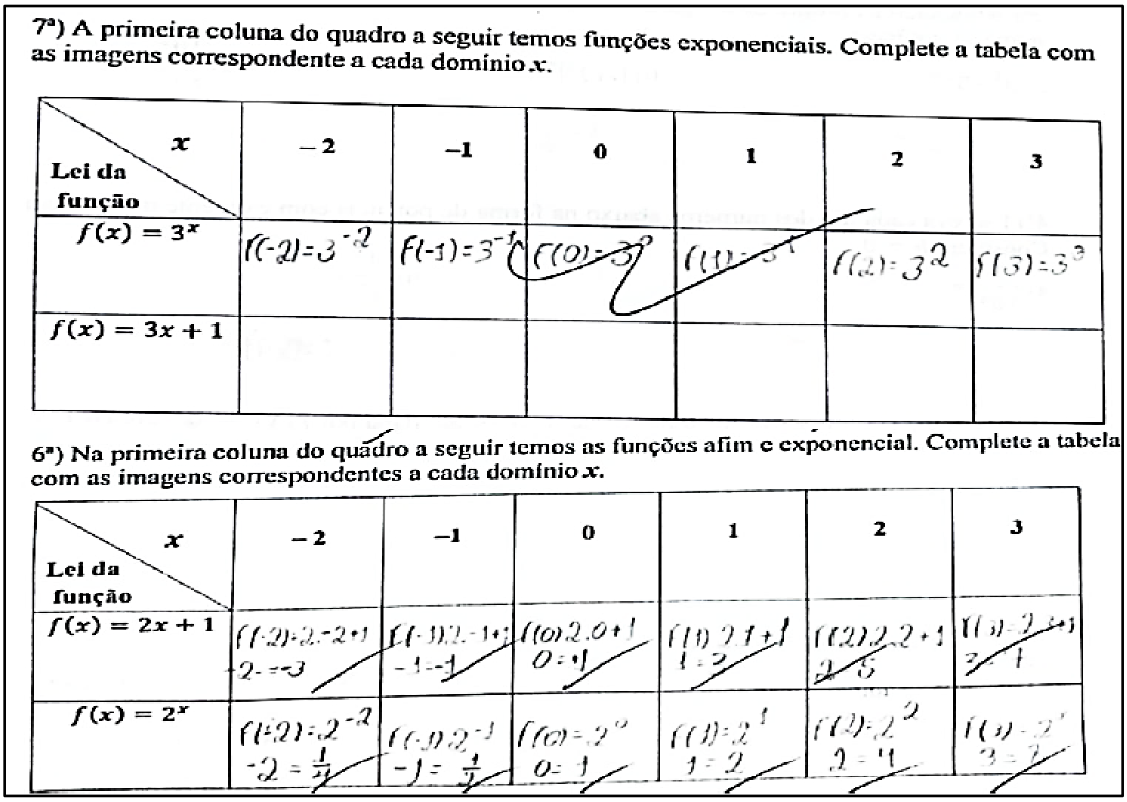
**Figura 34** - Print da resposta dada pelo aluno Eta aos problemas 6 e 8 nos testes inicial e final




Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

Na comparação das repostas apresentadas ao problema que tratava da determinação da imagem por meio da lei que expressa uma função, apresenta-se a resposta do estudante **Zeta**, na Figura 35, posta a seguir, mostrando a resposta fornecida respectivamente ao problema nas provas inicial e final.

**Figura 35 -** Print da resposta dada pelo aluno Zeta aos problemas 7 e 6 nos testes inicial e final



7ª) A primeira coluna do quadro a seguir temos funções exponenciais. Complete a tabela com as imagens correspondente a cada domínio $x$.

| Lei da função \ $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3^x$ | $f(-2)=3^{-2}$ | $f(-1)=3^{-1}$ | $f(0)=3^{0}$ | $f(1)=3^{1}$ | $f(2)=3^{2}$ | $f(3)=3^{3}$ |
| $f(x) = 3x + 1$ | | | | | | |

6ª) Na primeira coluna do quadro a seguir temos as funções afim e exponencial. Complete a tabela com as imagens correspondentes a cada domínio $x$.

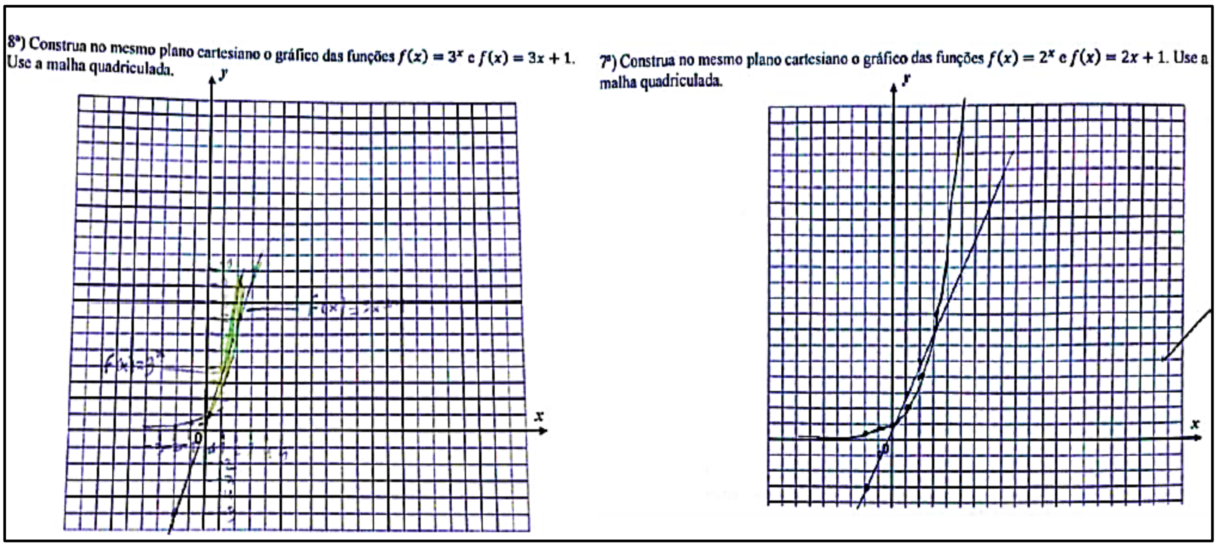
| Lei da função \ $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2x + 1$ | $f(-2)=2.-2+1$ $-2=-3$ | $f(-1)=2.-1+1$ $-1=-1$ | $f(0)=2.0+1$ $0=1$ | $f(1)=2.1+1$ $1=3$ | $f(2)=2.2+1$ $2=5$ | $f(3)=2.3+1$ $3=7$ |
| $f(x) = 2^x$ | $f(-2)=2^{-2}$ $-2=\frac{1}{4}$ | $f(-1)=2^{-1}$ $-1=\frac{1}{2}$ | $f(0)=2^{0}$ $0=1$ | $f(1)=2^{1}$ $1=2$ | $f(2)=2^{2}$ $2=4$ | $f(3)=2^{3}$ $3=7$ |

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

Ao analisar a resposta dada ao problema, nota-se que no teste inicial falta maturidade e segurança ao participante no momento de respondê-lo no primeiro teste, já no segundo teste ocorrido após a aplicação das oficinas que relacionam os jogos ao objeto do conhecimento em estudo, verifica-se que o estudante consegue apresentar respostas condizentes com o que é proposto no problema.

Na análise final, vamos fazer a comparação entre as respostas dadas pelo estudante **Teta** ao problema que consiste em representar graficamente uma função real no plano cartesiano, especificado na Figura 36 que mostra a construção pelo referido participante nos testes final e inicial respectivamente.

**Figura 36 -** Print da resposta dada pelo aluno Teta aos problemas 8 e 7 nos testes inicial e final




Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

Fazendo uma relação entre as respostas fornecidas pelos dois alunos, aos dois problemas anteriores, considerando os dois testes, notou-se que Zeta não dominava a habilidade de determinar a imagem de uma função real, quando se tem como ponto de partida a utilização do domínio mediante a aplicação deste a uma lei que determina a função. Já o estudante Teta, na primeira prova parecia não ter segurança na hora de fazer a representação do gráfico de uma função real no plano cartesiano, mas depois das oficinas práticas em que os participantes tiveram a oportunidade de construir o próprio conhecimento, o estudante, ao apresentar respostas para o problema similar ao do primeiro teste, demonstra segurança e conhecimento na representação dada, tanto para o gráfico da função afim quanto para o da função exponencial.

Interpretando as respostas dadas pelos quatro estudantes escolhidos de forma aleatória pelo professor pesquisador entre os onze participantes que demonstraram evolução no desenvolvimento da pesquisa, é notória a evolução alcançada por esses na comparação entre os respectivos testes inicial e final, aplicado após as duas metodologias utilizadas na abordagem do objeto do conhecimento em sala de aula.

### 3.6 Experiências dos estudantes em relação a pesquisa (entrevista).

Nesta seção, apresentam-se os resultados da investigação por meio da análise interpretativa das informações produzidas no campo empírico, tendo como referência o diálogo com 5% dos participantes que compõem a amostra do estudo e a teoria utilizada como base de sustentação para a pesquisa. Esse movimento dialógico nos permitiu compreensões e revelações relacionadas ao objeto de estudo, possibilitando encontrar respostas para a questão norteadora da investigação.

Desse modo, a análise da entrevista (Apêndice 02) composta por 7 questões abertas, propõe questionamentos em que os participantes são motivados a produzir um relato sobre as ações desenvolvidas pelo professor pesquisador no transcorrer da pesquisa, as abordagens contemplam a estrutura organizacional concebida no desenvolvimento do trabalho que foi direcionado aos estudantes da 1ª série do EM no (CETI) Acrísio Veras localizada no município de Alto Longá no Piauí, a conversa com os participantes do estudo, permitiu o levantamento de informações que estão divididas em três subseções representando as categorias que são respectivamente: 3.6.1 – Os jogos na sala de aula: o jogo como ferramenta de construção do conhecimento; 3.6.2 – Práticas educativas com materiais manipulativos: relações dos jogos com o objeto do conhecimento e 3.6.3 – A ação pelo contexto do participante: um relato das experiências vivenciadas durante a pesquisa e a expectativa em torno do ensino e aprendizagem matemática no Ensino Médio.

Os dados produzidos pela abordagem investigativa, foram gerados por meio da análise da fala dos entrevistados que geraram por meio do software de análise textual - *Interface de R pour les Analyses Multidimensionnelles de Textes et de Questionnaires* – IRAMUTEQ, tabelas de frequências, nuvem de palavras e grafo de similitude, revelando assim as ligações e outras características textuais, o posicionamento e a estruturação de palavras no texto, de forma que foram retornados indicadores e visualizações intuitivas sobre a estrutura e sobre os ambientes do texto proposto para análise (Camargo e Justo, 2018).

Este tipo de análise permite identificar as coocorrências entre as palavras e seu resultado traz indicações da conexidade entre as palavras, auxiliando na identificação da estrutura do conteúdo de um corpus textual (Flament, 1981). Portanto, segue as análises feitas a partir das categorias preestabelecidas e contempladas com as análises das coocorrências, a partir dos discursos dos participantes.

### 3.6.1 Os jogos na sala de aula: o jogo como ferramenta de construção do conhecimento

Nessa subseção, faz-se uma análise da percepção dos participantes da entrevista. No que diz respeito a aulas envolvendo os conhecimentos dos jogos, para os quatro colaboradores, esse tipo de abordagem é dinâmica, prática e mais atrativa do que as aulas teóricas, que, segundo eles, tem contribuído muito pouco para no aprendizado de matemática.

Reproduzindo alguns relatos colhidos, no momento da abordagem individual, em que cada um pôde externar o seu ponto de vista em relação às experiências vivenciadas no desenvolvimento do trabalho, notou-se o entendimento que cada participante internalizou pós experiências, dentre eles, destaca-se as considerações a respeito do que cada um achou das aulas envolvendo os jogos. Capa diz, “Achei bem dinâmico, normalmente as aulas são mais teóricas”, já Épsilon afirma, o importante foi o impacto no aprendizado, pois, “Eu consegui aprender de forma mais rápida e prática, quando as aulas envolveram os jogos do Tangram e a Torre de Hanói, porque na prática é sempre mais fácil de aprender”.

Ao responderem se de alguma forma a oficina com o jogo Tangram focada na resolução de problemas envolvendo potência na base 2 com expoente inteiro negativo, contribuiu para o a aprendizado e de que forma foi essa contribuição? Psi, afirma “Eu sempre achei o Tangram uma figura muito interessante, [...] desde quando eu a conheci no 5º ano [...] a partir dessas aulas aprendendo sobre potência com base dois e expoente inteiro negativo, vimos o Tangram sendo montado de uma forma mais bonita, [...] antes eu olhava somente como uma figura geométrica, formada por várias outras figuras geométricas, que para mim não tinha sentido, só que a partir daquele momento a gente começou a resolver problemas usando Tangram [...] aprendi uma forma diferente de estudar [...] usando Tangram para fazer isso”.

No questionamento a respeito das regras do Jogo Torre de Hanói, verificou-se estas regras de alguma forma contribuíram para que o jogo fosse vencido com a menor quantidade de movimentos possíveis, entre as respostas fornecidas pelos participantes destacam-se a dada por Capa “Sim! Tentei várias vezes, me colocou para pensar, para poder fazer o mínimo de movimentos. A gente não consegue de primeira, tem que ir tentando até conseguir”. Já para Zeta, “O mais importante foi quando eu descobri a lógica por trás do jogo, antes disso estava jogando por jogar, perceber a lógica fez despertar a minha mente para o verdadeiro propósito do jogo”.

Diante dos relatos expostos pelos alunos selecionados na amostra que compõe a pesquisa é possível perceber a segurança ao descrever os processos vivenciados com a experiência a partir das oficinas aplicadas e verifica-se em cada resposta fornecida as relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.

### 3.6.2 Práticas educativas com materiais manipulativos: relações dos jogos com o objeto do conhecimento

Na sequência, são analisadas as questões 4, 5 e 6 que tratam respectivamente da relação da expressão que permite determinar o número mínimo de movimentos para uma quantidade ***n*** qualquer de discos com uma função exponencial, da estratégia metodológica adotada pelo professor pesquisador no desenvolvimento do trabalho e se o trabalho de alguma forma contribuiu para o aprendizado.

Na visão de Psi, o jogo Torre de Hanói "é uma brincadeira de matemática muito interessante, porque a partir do momento que encontramos a expressão correta [...] consegui compreender [...] e entendi a função exponencial, [...] o jogo como todas as outras coisas da nossa vida contêm matemática [...]. Eu comecei a ver que as regularidades numéricas ajudam muito na vida da gente e em problemas". Já Zeta relata que, "Sim, pude perceber na prática a lógica por trás do jogo que leva a uma expressão matemática que permite calcular o número mínimo de movimentos".

Dando sequência na análise das falas, o pesquisador sugeriu que os participantes fizessem comentários em relação as estratégias adotadas por ele no desenvolvimento do trabalho de pesquisa, para Zeta, "a metodologia adotada pelo professor foi fundamental para que houvesse entendimento da nossa parte, o tempo foi suficiente para aplicação das atividades, a organização permitiu que todos pudessem acompanhar, as oficinas foram organizadas de modo que houvesse uma relação com a prática dos jogos e os problemas abordados, [...] os alunos estavam mais focados do que nas aulas na sala de aula e isso faz o trabalho de aprendizado ocorrer de forma respeitosa". Para o aluno Épsilon, "Ajudou muito, pois era a primeira vez que estava fazendo trabalho [...] isso foi feito de uma forma diferente do que se faz todo dia que é aula no quadro, explicação do quadro, [...] as aulas práticas que foram a melhor parte, pois a gente aprende mais e de uma maneira mais fácil, sobre a metodologia dele, sempre foi a melhor, com ele sempre é mais fácil entender".

Tratando do ponto de vista dos participantes em relação as contribuições para o aprendizado com esse tipo de aula, e Psi afirma que "esse tipo de aula nos ajudou muito, porque algumas coisas eu não conseguia compreender como aquilo acontecia, [...] com esse novo método, [...] que aprendemos nessas aulas, ajudou na nossa compreensão. A cada encontro se aprendia algo diferente e quando o professor perguntava para gente o que aprendemos conseguíamos falar, porque tínhamos realmente vivido aquilo, ou seja, tínhamos compreendido de forma correta". Já na opinião de Épsilon, esse tipo de aula contribuiu muito, "porque tem uma base de conhecimento muito maior e fazendo as coisas na prática é mais fácil aprender" opinião compartilhada por Zeta que disse "Essas aulas são úteis para a vida além de permitir que se possa aprender por meio de práticas".

Nota-se, no relato obtido por meio da entrevista fornecida pelos participantes da pesquisa, que as contribuições vindas da utilização de aplicações matemáticas com o uso do Tangram e da torre de Hanói para a aprendizagem matemática, permitiu explorar as possibilidades de aplicação dos conceitos matemáticos com o uso desses jogos na construção do conhecimento matemático em sala de aula.

### 3.6.3 A ação pelo contexto do participante: um relato das experiências vivenciadas durante a pesquisa e a expectativa em torno do ensino e aprendizagem matemática no Ensino Médio

Partido dos relatos gerais produzidos pelos 5% dos participantes que compunha a amostra selecionada para participar da pesquisa, gerou-se com o auxílio do software de análise textual IRAMUTEQ as tabelas de frequência, nuvens de palavras e grafos de similitude constante nos (Anexos C, D e E).

Para analisar os relatos de experiências e as expectativas dos participantes em relação as aulas do ensino médio, foi organizado o Quadro 08 com partes do discurso.

**Quadro 08 -** Relatos de experiências vivenciadas na pesquisa e expectativas em relação ao Ensino Médio.

| RELATOS DE EXPERIÊNCIAS |
|---|
| O professor convidou uns alunos para fazer parte de uma pesquisa e eu me coloquei à disposição. As aulas foram bem dinâmicas com jogos como o Tangram a torre de Hanoi. Teve as estratégias de quantos movimentos você consegue e qual o número mínimo de movimentos que você conseguia. Depois respondemos algumas questões sobre os jogos e suas construções, teve uma prova no início e uma prova sobre as oficinas (Capa, 2024). |
| No processo do projeto do professor, ele me chamou e mais alguns alunos no total foram 20, no início ele fez a proposta do jogo dele mostrando o que ele queria passar para nós e a cada aula fomos aprender mais, na primeira aula as atividades no quadro, depois ele passa um trabalho para fazer o Tangram, em seguida passou mais atividades e chegou a parte que achei mais legal de todo o processo que foi a parte de montar a torre e com isso eu aprendi através do que ele queria alcançar com o projeto (Épsilon, 2024). |
| Antes do projeto começar o professor fez uma pergunta que me tocou muito em sala de aula: "você gosta de matemática?" aí a maioria dos alunos, assim como eu, ficaram sem entender, porque é uma pergunta que geralmente a pessoa responderia "Não, eu não gosto de matemática, porque é uma coisa muito difícil" só que aquela coisa, me tocou muito, então desde aquele dia eu comecei a olhar diferente. Antes eu gostava de matemática, mas não era tão assim. A partir da nossa resposta que gostávamos de matemática, eu e outros colegas da minha turma, ele convidou a gente para fazer parte desse trabalho para a sua pesquisa. A partir do primeiro dia que começamos eu sentir uma diferença |

| |
|---|
| muito grande, porque nas aulas teóricas geralmente a gente se preocupa muito em aprender e decorar para saber aquilo, para na hora de usar saber como aplicar, mas tem que saber porque o porquê daquilo, com essas aulas eu senti uma grande diferença e isso ajudou muito porque às vezes quando nós vamos fazer as questões, a gente se lembra a partir do que vivenciamos e entendemos, porque isso aqui acontece, como por exemplo uma fração é desse jeito, porque esse número foi multiplicado tantas vezes da mesma forma, e isso foi assim uma coisa inexplicável, porque a gente transformou a matemática em uma parte da vida, foi muito bonita porque a gente viu a matemática na sua beleza completa e como ela age de forma natural, mesmo sem a gente muitas vezes entender passamos a percebê-la em nossa vida diariamente (Psi, 2024). |
| Tudo começou em um dia quando o professor pesquisador entrou em nossa sala e propôs aos estudante a possibilidade de participar desse trabalho de matemática, alguns alunos aceitaram e outros não, passados alguns dias ele passou o cronograma para gente, tipo o dia e os horários em que aconteceriam o trabalho, na primeira aula ele passou um conteúdo novo e relembrou um passado explicando tudo em sala de aula, na aula seguinte ele fez uma prova para identificar o que a gente não tinha entendido para ele explicar para gente e na mesma aula ele já começou a explicar sobre jogos, dessa aula em diante a gente começou a se envolver mais com os jogos sendo eles o Tangram e a torre de Hanói, o Tangram podemos confeccionar ele em casa e na sala de aula utilizando papel cartão depois do auxílio do professor é quando chegamos na oficina o professor nos ensinou a jogar manipulando as suas peças, na sequência foi a vez de jogar o jogo torre de Hanói após a pratica desse jogo, nós fomos desafiados pelo professor a conseguir montar o jogo em menos tentativas passado um tempo descobrimos que havia uma lógica por traz disso aí o professor pode explicar pra gente tudo certinho e detalhadamente, gostei muito da ideia do professor trazer aulas aos sábados pois deu para aprender muitas coisa que não seria possível no horário normal das aula de matemática, conteúdos novos como funções representadas por gráfico, o aprendizado com os jogos torre de Hanói, o Tangram, não sabia jogar e graças a essas aula eu consegui esses jogos envolve muita lógica e foi difícil aprender a lógica deles mas com o auxílio do professor foi possível ele tinha paciência, tinha dialogo fácil de entendimento, o que diminuiu as dificuldade na hora de aprender acredito eu que com o fim das atividades, entendemos a proposta que o professor quis deixar para agente em relação aos conteúdos pois estávamos focado em aprender (Zeta, 2024). |
| **EXPECTATIVAS** |
| Assim como essas aulas do curso, mais dinâmicas com orientação mais próxima (Capa, 2024). |
| Poderia ser bem dividido com prática e teórica porque é mais uma base de aprendizagem e na prática é mais fácil como tenho falado desde o começo, quanto se envolve teoria e prática na aprendizagem o aluno aprende mais e também com mais facilidade e isso ainda até ajuda nos objetivos traçados pelo professor (Épsilon, 2024). |
| Teórica e prática, porquê sem a teoria não existe a prática, a teoria sempre é muito importante porque vem da leitura e a gente aprender a fazer os cálculos e ficar aqui na nossa mente, só que com a prática a gente aperfeiçoa essa teoria, a gente vê a matemática trabalhando a nosso favor e começa a trabalhar junto com ela, entendendo e se alinhando cada vez mais com ela (Psi, 2024). |
| Raramente ocorre um tipo de aula em que a brincadeira esteja relacionada ao aprendizado, acredito que esse tipo de aula em que o aluno pode brincar com a matemática seria fundamental para o desenvolvimento do aprendizado. Eu gostaria que as aulas saíssem do modelo utilizado constantemente e que os professores dessem dicas em formas de macetes para estudo e uma aprendizagem mais eficaz (Zeta, 2024). |

Fonte: Autor. Arquivo pessoal, 2024

Percebe-se por meio da análise das informações descritas através das falas dos participantes (Quadro 08) que existe uma relação entre elas permitindo-nos chegar a algumas conclusões, buscando por meio destas o contexto que liga a aula aos jogos Tangram e Torre de Hanói, identificou se no relato do participante Capa que “as aulas foram bem dinâmicas com jogos como o Tangram a Torre de Hanói”.

Analisando a fala de Zeta, “na sala de aula, o professor nos ensinou a jogar manipulando as peças, fomos desafiados a aprender muitas coisas que não seria possível no horário normal das aulas de matemática”. Observou-se a relação da aula, com o professor, o aluno, o jogar e a lógica conforme se nota no seu relato “não sabia jogar, graças a essas aulas eu consegui, esses jogos envolvem muita lógica e foi difícil aprender, com o auxílio do professor diminuiu as dificuldades na hora de aprender”.

Ao analisar os grafos de similitude (anexo E), percebe-se a relação exposta entre as palavras: porque, muita, gente, não, gosta, muito, matemática e aula. Observando o seu discurso, notou-se a indagação, por que muita gente não gosta muito de matemática e de suas aulas? Nas suas respostas eles relatam isso partindo de um questionamento do professor ao indagar aos alunos em sua sala de aula, você gosta de matemática? No entendimento do participante, “a maioria dos alunos, assim como ele, ficaram sem entender, porque é uma pergunta que geralmente a pessoa responderia “Não, eu não gosto de matemática, porque é uma coisa muito difícil” [...] com essas aulas eu senti uma grande diferença e isso ajudou muito porquê [...] a partir do que vivenciamos e entendemos, porque a gente viu a matemática na sua beleza completa e como ela age de forma natural”.

O participante ainda faz uma observação em sua fala que remete a relação exposta no grafo entre o gostar e o não gostar de matemática, no seu entender, “é comum as pessoas não gostar de matemática, a atitude do professor me tocou muito, então desde aquele dia eu comecei a olhar diferente. Antes eu gostava de matemática, mas não era tão assim, [...] A partir do primeiro dia que começamos, eu sentir uma diferença muito grande, passei a percebê-la em nossa vida diariamente”.

O participante Épsilon traz na sua fala uma situação que explica a relação entre as palavras projeto, sala, aula, aprender, querer e conteúdo, na medida em que percebe o aprendizado adquirido por meio das atividades relacionadas aos conteúdos trabalhados em sala de aula quando diz “no projeto, o professor convidou alguns alunos num total de 20, no início ele fez a proposta do jogo mostrando o que ele queria passar para nós e a cada aula fomos aprender mais, na primeira aula as atividades no quadro, depois ele passa um trabalho para fazer o Tangram, em seguida passou mais atividades e chegou a parte que achei mais legal de todo o processo, que foi a parte de montar a torre e com isso eu aprendi o que se queria alcançar com o projeto".

Nota-se, mediante as colocações proferidas nas suas falas, que os participantes descrevem o processo vivenciado com as experiências a partir das oficinas aplicadas em sala de aula que relacionavam os jogos aos respectivos objetos do conhecimento, potência de base 2 com expoente inteiro negativo e função exponencial e essas mesmas falas despertam para a necessidade de novos rumos no que diz respeito as abordagens pedagógicas nas aulas do EM, nessa linha buscou-se averiguar no último questionamento da entrevista.

Sobre como eles imaginam as aulas de matemática no Ensino Médio, Capa diz, "aulas mais dinâmicas", para o participante Psi elas devem contemplar "Teoria e prática, porquê sem a teoria não existe a prática, a teoria sempre é muito importante porque [...] fixa na mente, [...] com a prática a gente aperfeiçoa essa teoria, a gente vê a matemática trabalhando a nosso favor e começa a trabalhar junto com ela, entendendo e se alinhando cada vez mais com ela".

Já para Épsilon, as aulas do EM "Poderiam ser divididas entre prática e teórica, porque aprendizagem na prática é mais fácil e quanto se envolve teoria e prática na aprendizagem, o aluno aprende mais e também com mais facilidade e isso ainda até ajuda nos objetivos traçados pelo professor".

Assim o participante Zeta diz "Raramente ocorre um tipo de aula em que a brincadeira esteja relacionada ao aprendizado, acredito que esse tipo de aula em que o aluno pode brincar com a matemática seria fundamental para o desenvolvimento do aprendizado. Eu gostaria que as aulas saíssem do modelo utilizado constantemente e que os professores dessem dicas em formas de macetes para estudo e uma aprendizagem mais eficaz".

Nessa última análise do discurso proferido pelos participantes durante a entrevista, nota-se o desejo de mudanças no ensino, sendo assim, faz-se necessário a adoção de metodologias significativas no processo. Isso se justifica no discurso de como esses preferem as aulas de matemática no EM. Para possibilitar isso, torna-se necessário estudos no sentido de promover metodologias que relacionem a teoria com a prática. O uso dos jogos associados a objetos do conhecimento pode favorecer o fazer pedagógico desde que se evite infantilizar o processo.

# 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito desse trabalho não é apresentar uma fórmula pronta e acabada para o ensino e aprendizagem de potência na base 2 com expoente inteiro negativo e função exponencial, mas instigar o uso dos jogos como ferramenta pedagógica facilitadora do ensino e da aprendizagem matemática no intuito de consolidar as habilidades e competências relacionadas a esses objetos do conhecimento na 1ª série do EM.

Com a adoção das competições olímpicas, em especial a OBMEP, passou-se a adotar os problemas e as soluções dessas e de outras competições em práticas pedagógicas, envolvendo a preparação de estudantes para a disputa tanto da fase classificatória quanto da segunda fase, permitindo envolver o uso do lúdico como forma de resolução desses problemas, tornando o ensino e a aprendizagem de matemática mais atraentes e desafiadores. A partir de então, percebeu-se que seria possível propiciar uma matemática mais construtiva e dinâmica para os alunos no ambiente de sala de aula, surgiam ali respostas para inquietações, respostas essas não alcançadas em épocas de estudante e no início de vida no magistério.

O trabalho e a vivência de PROFMAT oportunizam a percepção da importância do professor de matemática na vida do educando, tanto de forma positiva como do contrário, foi daí então que se buscou, por meio desse estudo, compreender as contribuições do uso da Torre de Hanói e do Tangram para as aplicações matemáticas elementares e para a aprendizagem dos alunos na 1ª série do Ensino Médio.

Durante a análise dos dados ficaram perceptíveis as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, entre os dados que comprovam essas contribuições estão os registrados no gráfico da (Figura 32), que mostra a comparação entre o antes e o depois da aplicação dos jogos como metodologias utilizadas na construção do conhecimento. Seguindo com as observações dos resultados alcançados, é possível notar nos prints - produzidos como recortes da comparação feita entre as respostas dadas por alguns dos participantes a problemas similares nos dois instrumentais avaliativos aplicados - que de fato houve sim evolução no que diz respeito as duas abordagens metodológicas adotadas pelo professor pesquisador durante o desenvolvimento do trabalho, vide (Figuras 33, 34, 35 e 36). Isso nos mostra a potencialidade dos jogos no momento de explorar as possibilidades da sua aplicação relacionada a conceitos matemáticos em estudo.

O uso da entrevista como ferramenta para obtenção de dados permite identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os jogos utilizados pelo professor no desenvolvimento de suas atividades conforme o relato de um participante que afirma: “a organização permitiu que todos pudessem acompanhar. As oficinas foram organizadas de modo que houvesse uma relação com a prática dos jogos e os problemas abordados, [...] os alunos estavam mais focados do que nas aulas na sala de aula e isso faz o trabalho de aprendizado ocorrer de forma respeitosa”. No trecho mostra-se a capacidade do participante em descrever os processos vivenciados com a experiência a partir da oficina aplicada.

Tomando-se como referência as respostas dadas pelos participantes aos três primeiros questionamentos da entrevista destacadas na (subseção 3.6.1), eles trazem a suas considerações sobre as relações dos objetos do conhecimento com os jogos adotados pelo professor como ferramenta pedagógica e os aprendizados adquiridos por meio dessa experiência, o que permite verificar as relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.

A adequação do processo de ensino e aprendizado matemático com uso de metodologias ativas, permitirá que as instituições de ensino ao promoverem tais adequações se aproximem da clientela que hoje as frequentam, encarregadas do acolhimento de jovens e adolescentes tomados pelas sensações provocadas por evoluções nos padrões de comportamentos, sejam eles causados pelas mudanças sociais ou pelos avanços das novas tecnologias que dão novos rumos e significados as formas de relações e convívio com o conhecimento, alertam para a necessidade de uma escola capaz de ofertar salas de aulas mais inclusivas e dinâmicas.

Propiciar espaços com metodologias de ensino a aprendizagem matemáticas atrativas e diversificadas, permitirá ao público partícipe desses ambientes o sentimento de pertencimento, sendo assim, faz-se necessário a revitalização do currículo de matemática, a adoção de novas metodologias de ensino e aprendizado, a promoção do protagonismo do educando e o ensino voltado para a mitigação de problemas do cotidiano, permitindo a estes apropriarem-se dos conhecimentos matemáticos para solucionarem problemas que favoreçam o melhoramento da sua condição social. Portanto, se faz necessário tornar os espaços escolares mais atrativos e acolhedores ressignificando as práticas tradicionalistas.

Diante do exposto, concluímos que o uso dos jogos como ferramenta facilitadora da construção dos conhecimentos matemáticos no ambiente de sala de aula permite o desenvolvimento do cognitivo, estimula o pensamento criativo e contribuí para o aprendizado significativo de forma dinâmica e prazerosa para ambos os integrantes desse processo. Espera-se que os resultados aqui apresentados por esse trabalho de pesquisa possam, de alguma forma, contribuir para que professores da área do conhecimento de matemática tenham outras perspectivas no momento de abordar os objetos do conhecimento antes citados nas suas aulas, seja na escola onde a pesquisa foi desenvolvida, seja em outras instituições de ensino da Educação Básica.

Isso posto, concluo essa pesquisa com o sentimento de muito aprendizado durante todo o processo, que esse trabalho seja uma fonte de pesquisa e informação que, se bem planejada e trabalhada, poderá oportunizar ao professor de matemática, em especial aos da Educação Básica, suporte para uma aula mais colaborativa e interativa, em que os principais atores do processo, “os estudantes”, poderão construir o seu próprio conhecimento. Ao professor, maestro desse enredo, caberá o papel de mediador e orientador da ação prática no dia a dia em sala de aula, pois é nesse espaço, com boas práticas, que um professor pode contribuir para a transformação da realidade educacional.

## REFERÊNCIAS


ANFOPE. **Associação Nacional pela Formação dos Profissionais da Educação**. Disponível em: https://www.anfope.org.br/ . Acesso em: 22 jul. 2024.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 99-112.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** 2018. Disponível em:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 05 nov. de 2023.

_______. **Base Nacional Comum Curricular. Ensino Médio**. Brasília: MEC. Versão entregue ao CNE em 03 de abril de 2018. Disponível em: http://download.basenacional comum.mec.gov.br/. Acesso em: 04 abri 2023.

_______. Diretoria de Avaliação da Educação Básica (DAEB). **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Documento referência, versão 1.0. Brasília, DF: INEP, 2020. Disponíveis em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/ saeb/ matrizes-e-escalas. Acesso em: 20 de dez. de 2023.

_______. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. Disponível em https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pi/alto-longa/panorama. Acesso em: 30 out. de 2021.

_______. Instituto Nacional de Educação e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). ***IDEB:* resultados e metas,** 2021. Disponível em: http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado /resultadoBrasil.seam?cid=1594313. Acesso em: 30 out. 2023.

_______. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Escalas de proficiência do SAEB**. Brasília, DF: INEP, 2020.

_______. 24 de março de 1824 (Lei) **Constituição Política do Imperio do Brazil** (de 25 de março de 1824**).** Disponíveis e em: < https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/ constituicao24.htm >. Acesso em 05 de nov de 2023.

_______**.** Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996.** Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm . Acesso em: 22 jan. 2024.

_______. **QEdu:** Aprendizado. Disponível em: https://qedu.org.br/brasil/aprendizado . Acesso em: 20 fev. 2024.

CAMARGO, B. V.; JUSTO, A. M. **Tutorial para uso do software IRAMUTEQ**. Laboratório de Psicologia Social da Comunicação e Cognição - UFSC – Brasil, Florianópolis, 21 de novembro de 2018. Disponível em http://iramuteq.org/documentation/fichiers/tutoriel-portugais-22-11-2018. Acesso em: maio de 2024.

CAMPOS, A. M. A. **Jogos matemáticos: uma nova perspectiva para a discalculia**. 2. ed. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2019. 96p.: 21cm.

CAMPOS, F. Exposição de Motivos. In: BRASIL. Ministério da Educação e Saúde Pública. **Organização do Ensino Secundário**. Porto Alegre: Livraria Globo, 1933. p. 5-10. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-21241-4-abril-1932-503517-publicacaooriginal-81464-pe.html . Acesso em 05 de out de 2023.

CARVALHO, S. B. P. **A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:** Dimensões Estruturantes da Prática Educativa. Dissertação (Mestrado em Educação). 156 f. Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal do Piauí, 2021.

CERVO, A. L.; BERVIN, P. A. **Metodologia Científica**. 6. ed. São Paulo: Pearson Pretince Hall, 2007.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação matemática. – São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

_____________, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. ______. ***Educação Matemática*:** da teoria à prática. 12ª ed. Campinas: Papirus, 2005.

_____________, U., 1932 – **Educação matemática:** Da teoria a pratica /Ubiratan D'Ambrosio. – 23ª ed. – Campinas, SP: Papirus, 2012.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates. SBEM. Ano II N**, v. 2, p. 15-19, 1989. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf. Acesso em: 10 de Mai de 2024.

DANTE, L. R. **Matemática em contexto:** função exponencial, função logarítmica e sequência / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. –1. ed. – São Paulo: Ática, 2020.

DE ASSIS SILVA, F. X. **Educação matemática e tangram**: estudo exploratório. 2021. Disponível em: https://repositorioaberto.up.pt/bitstream/10216/134318/5/478720.2.pdf . Acesso em de 14 jun de 2024.

FLAMENT, C. (1981). **Análise de similaridade:** uma técnica de pesquisa sobre representações sociais. Cadernos de Psicologia Cognitiva. 1, 375-395.

FORSTER, C.; HORBACH, I. C. **Ensino de Geometria Plana com o Auxílio do Tangram,** 2012. Disponível em: < http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE Horbach_Ivan.pdf>. Acesso em 27 de jan de 2024.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

GOMES, M. L. M. **História do ensino da matemática:** uma introdução/ Maria Laura Magalhães Gomes. – Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013 68p.; 27cm.

GONTIJO, C. H. **Resolução e formulação de problemas**: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em matemática. *In:* Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais**... Recife, 2006.

________, C. H.; FONSECA, M. G. **Criatividade em matemática**: lições da pesquisa – Curitiba: CRV, 2020. 174 p.

GRANDO, R. C. **O jogo e matemática no contexto da sala de aula**/ Regina Célia Grando. 1ª ed. – São Paulo: Paulus, 2004 – (Coleção pedagogia e educação).
GUALANDI, J. H. **Ensino de Matemática:** Desafios e Possibilidades/ Jorge Henrique Gualandi. Editora BAGAI, 2021. 200 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=gwU7EAAAQBAJ&dq=ensino+de+matematica+desafios+e+possibilidades&lr=&hl=pt-BR&source=gbs_navlinks_s >. Acesso em: 04 de fev de 2024.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho / Jussara Hoffmann. – Porto Alegre: Mediação, 2001. 144 p.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar,** 2: logaritmo/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dulce, Carlos Murakami. – 10. ed. – São Paulo: Atual, 2013.

LARA, I. C. M.; BORGES, R. M. R. **A resolução de problemas de divisão partitiva nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** VIDYA, v. 32, n. 1, p.9-20, jan./jun., 2012 - Santa Maria, 2012. ISSN 0104-270.

LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série** / Isabel Cristina Machado de Lara. – 1. Ed – São Paulo: Rêspel, 2003. 176 p.; 23 cm.

LARANJEIRA, M. I. (Coord.). **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2007.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. – [ 2.ed.]. – [reimpr.]. – Rio de Janeiro: E.P.U., 2020.

LUCHESI, B. M. **Guia prático de introdução às metodologias ativas de aprendizagem** [recurso eletrônico]/ organizadoras: Bruna Moretti Luchesi, Ellys Marina de Oliveira Lara, Mariana Alvina dos Santos. – Campo Grande, MS : Ed. UFMS, 2022.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem componente do ato pedagógico** / Cipriano Carlos Luckesi. – 1. ed. – São Paulo: Cortez, 2011.

LIMA, E. L. **Logaritmos**/ Elon Lages Lima. – 6. Ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2016. 134 p. (Coleção Professor de Matemática; 1)

_____, E. L. **Números e Funções Reais**/ Elon Lages Lima. – Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p. (Coleção PROFMAT,07).

MARTINS, A.; MARQUES, G.; RAMOS, J. **O ensino da geometria por meio do Tangram no 9º ano do Ensino Fundamental.** Santana-AP, n. 9, p. 45, 2015. Disponível em: < file:///D:/Downloads/silo.tips_o-ensino-da-geometria-por-meio-do-tangram-no-9-ano-do-ensino-fundamental.pdf >. Acesso em 27 de jan de 2024.

MEIER, M. **O Professor Mediador na Ótica dos Alunos do Ensino Médio.** 2004. 165f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Do Paraná, Curitiba. 2004.

MELO, C. H. C.; LIMA, C. N. de. A importância dos jogos no ensino de Matemática no Ensino Fundamental II. **Revista Educação Pública,** Rio de Janeiro, v. 22, nº 39, 18 de outubro de 2022. Disponível em: < https://educacaopublica.cecierj. edu.br/artigos/22/39/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-de-matematica-no-ensino-fundamental-ii >. Acesso em 20 de jan de 2024.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986

MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa?** 2010. Instituto de Física–UFRGS. Porto Alegre, 2016.

MOREIRA, H. e CALEFFE, L.G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MORGADO, A. C. **Matemática Discreta** / Augusto César Morgado; Paulo Cezar Pinto Carvalho. Capa de Pablo Diego Regino. – Rio de Janeiro: SBM, 2015. 294 p. (Coleção PROFMAT; 12)

PIAGET, J. **A linguagem e o pensamento da criança**. Tradução Manuel Campos. São Paulo: Martins Fontes, 1986.

PONTE, J. P. Estudos de Caso em Educação Matemática. **Bolema**, 25, 105-132, 2006. Esse artigo é uma versão revista e atualizada de um artigo anterior: Ponte, JP (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante,** 3 (1), 3-18. (republicado com autorização). Acesso em 28 out. de 2023. Disponível em https://www.researchgate.net/publication/277117517_Estudos_de_Caso_em_Educacao_Matematica.

PROENÇA, C. P. Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. **Revista de Educação Matemática,** São Paulo, SP, v. 18, 2021, p. 1-14 – e021008. Uma publicação da Regional São Paulo, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/348959265_Resolucao_de_Problemas_uma_proposta_de_organizacao_do_ensino_para_a_aprendizagem_de_conceitos_matematicos. Acesso em: 01 de nov. 2023.

PROFMAT**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.** Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/. Acesso em: 22 jul. 2024.

RAMOS, L. S. et al. Práticas de ensino sobre potenciação e resolução de problemas nos ENEM. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática,** 2022, 10.2: e22043-e22043. Disponível em: <https://doi.org/ 10.26571/REAMEC.v10i2.13848 >. Acesso em 01 de fev de 2024.

RIBEIRO, F. D. Jogos e modelagem na educação matemática/ Flávia Dias Ribeiro. 1ª ed. – São Paulo: Saraiva, 2009. GRANDO, Regina Célia. **O jogo e matemática no contexto da sala de aula**/ Regina Célia Grando. 1ª ed. – São Paulo: Paulus, 2004 – (Coleção pedagogia e educação).

RICHARTZ, M. "**Potenciação: um estudo didático."** (2005). Disponível em : < https:// repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96531 > . Acesso em 30 de jan de 2024.

RODRIGUES, W. M. **Dime e o mistério da Torre de Hanói**/ Walter Martins Rodrigues, William Rodrigues da Silva, Romeu Rodrigues da Silva – Curitiba: CRV, 2020. 58 p.

SANTOS, J. dos. 1992-S237i **Introdução ao conceito da função exponencial:** um olhar para 2018 a educação inclusiva / Jaqueline dos Santos. -- 2018. 92 p.: il.; 30 cm, Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3847&id2=150641341 >. Acesso em: 04 de fev de 2024.

SANTOS, M. A; LARA, E. M. O; LUCHESI, B M. **Guia prático de introdução às metodologias ativas de aprendizagem** [recurso eletrônico]. – Campo Grande, MS : Ed. UFMS, 2022. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/bitstream/123456789/4667/6/4%20-%20guia%20pr%c3%81tico %20de% 20introdu%c3%87%c3%83o%20%c3%80s% 20 metodologias%20ativas%20de%20aprendizagem.pdf . Acesso em: 15 maio 2024.

SARMENTO, A. K. C. **Ensino de Matemática:** os professores e suas concepções. Teresina: EDUFPI, 2017.

SAVIANI, D. **Escola e democracia**. 24. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

SILVA, C. A. da. **A torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensinoaprendizagem de função exponencial e resolução de problemas**. 2015. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2015. Disponível em: < https://profmat-sbm.org.br/dissertações > Acesso em: 05 de fev de 2024.

SILVA, R. J. M. S. **Explorando a Matemática do Jogo Torre de Hanói** / Renato José Menezes Silva. - 2018. 42 f. : il. Disponível em: < https://profmat-sbm.org.br/dissertações > Acesso em: 01 de fev de 2024.

SOUSA, F. C. M. **Torre de Hanói: ensino de potenciação e uma extensão com 4 pinos [recurso eletrônico]** / Francisco das Chagas Melo de Sousa. - 2023. 79 f. : il. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7227&id2 = 171057206 >. Acesso em 04 de fev de 2024.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil**, 1730-1930/ Wagner Rodrigues Valente. 2ª edição – São Paulo: Annablume: FAPESP, 2007. 214 p. ; 14x21 cm.

_________, W. R. Revista de Educação Matemática (REMat), São Paulo (SP), v.20, Edição Especial: **VIII Fórum Paulista de Formação de Professores que Ensinam Matemática**, p.1-23, e023094,2023, eISSN: 2526-9062DOI: 10.37001/remat25269062 v20id372Sociedade Brasileira de Educação Matemática–Regional São Paulo (SBEM-SP). Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/374301837_A_matematica_do_ensino_e_os_documentos_curriculares_historia_da_producao_de_novos_saberes >. Acesso em 02 de jan de 2024.

________, W. R. História da Educação Matemática: considerações sobre suas potencialidades na formação do professor de matemática. **Bolema,** Rio Claro – SP, v. 23, n. 35, p. 123-136, abr. 2010.

VYGOTSKY. L. S. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1989.

VIGOTSKI, L. S. O significado histórico da crise em psicologia: uma investigação metodológica. 1997. Em L. S. Vygotsky. **As obras reunidas de L. S. Vygotsky** (Vol. 3: problemas da teoria e história da psicologia (p. 233-343). Nova Iorque, NY: Plenário.

# APÊNDICES

**APÊNDICE 01:** QUESTIONÁRIO DE PESQUISA

Prezado(a) educando(a), estamos desenvolvendo uma pesquisa intitulada "**APLICAÇÕES MATEMÁTICAS COM USO DO TANGRAM E DA TORRE DE HANÓI NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE CASO NO CETI "ACRÍSIO VERAS", EM ALTO LONGÁ - PIAUÍ**", referente a uma dissertação de mestrado, com o objetivo de Analisar as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, verificando se há, ou não relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.
Desde já, agradecemos pela colaboração!

Profa. Dra. Valmária Rocha Silva Ferraz (Orientadora)
Irismar da Silva Carvalho (Orientando)

**DATA:** _____/_____/ 2024
**Escolha um pseudônimo (nome fictício):**_________________________________________
**SEXO:** Feminino ( ) ( ) Masculino
**Idade**: _______________

1. Você pratica algum tipo de jogo?
( ) Sim
( ) Não
Obs.: Se a sua resposta ao item anterior foi **NÃO**, passe para a questão 12.

⁎ Responda as questões de 1 a 6 sobre o jogo Tangram

2. Você já jogou Tangram?
( ) Sim
( ) Não
Obs.: Se a sua resposta ao item anterior foi **NÃO**, passe para a questão 7.

3. Onde você aprendeu esse jogo?
( ) Na escola
( ) Com amigos ou parentes
( ) Livros
( ) Na internet

4. Há quanto tempo você joga Tangram?
( ) há menos de 1 ano
( ) 1 a 2 anos
( ) 2 a 5 anos
( ) mais de 5 anos

5. Você acha que a sua concentração melhorou depois que começou a jogar Tangram?
( ) Sim
( ) Não

6. De alguma forma o jogo contribui para o aprendizado dentro da escola?
( ) Sim
( ) Não

⁎ Responda as questões de 7 a 11 sobre o jogo Torre de Hanói

7. Você já jogou Torre de Hanói?
( ) Sim
( ) Não
Obs.: Se a sua resposta ao item anterior foi **NÃO**, passe para a questão 12.

8. Onde você aprendeu esse jogo?
( ) Na escola
( ) Com amigos ou parentes
( ) Livros
( ) Na internet

9. Há quanto tempo você joga Torre de Hanói?
( ) há menos de 1 ano
( ) 1 a 2 anos
( ) 2 a 5 anos
( ) mais de 5 anos

10. Você acha que a sua concentração melhorou depois que começou a jogar Torre de Hanói?
( ) Sim
( ) Não

11. De alguma forma o jogo contribui para o aprendizado dentro da escola?
( ) Sim
( ) Não

12. Qual área do conhecimento você tem mais dificuldade na escola?
______________________________________________________

13. Qual é a sua relação com o aprendizado na área de matemática?
( ) tem muita dificuldade
( ) tem pouca dificuldade
( ) tem alguma dificuldade
( ) tenho facilidade

14. Qual das metodologias a seguir o (a) educador (a) matemático mais utilizou com a sua turma durante ano letivo de 2023? Marque apenas uma das alternativas.
( )  aulas expositivas (uso de quadro, pincel e livro didático)
( ) aulas expositivas com aplicação de oficinas práticas
( ) resolução de exercícios do livro didático
( ) aulas dinâmicas e contextualizadas
( ) aulas com oficinas de construções

15. Com relação ao seu desempenho escolar no ano passado (2023) na área de conhecimento matemática, qual foi a sua média anual?
( ) 0,0 a 2,9
( ) 3,0 a 5,9
( ) 6,0 a 8,9
( ) 9,0 a 10,0

16. Você acha que de alguma forma os jogos podem contribuir com o processo de ensino e aprendizado matemático em sala de aula?
( ) Sim
( ) Não

17ª) Como você gostaria que fossem as suas aulas de matemática no Ensino Médio?
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

**APÊNDICE 02:** ENTREVISTA

Prezado(a) educando(a), estamos desenvolvendo uma pesquisa intitulada "**APLICAÇÕES MATEMÁTICAS COM USO DO TANGRAM E DA TORRE DE HANÓI NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE CASO NO CETI "ACRÍSIO VERAS", EM ALTO LONGÁ - PIAUÍ**", referente a uma dissertação de mestrado, com o objetivo de Analisar as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, verificando se há, ou não relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.
Desde já, agradecemos pela colaboração!

Profa. Dra. Valmária Rocha Silva Ferraz (Orientadora)
Irismar da Silva Carvalho (Orientando)

**DATA: _____/_____/** 2024
**Escolha um pseudônimo (nome fictício):________________________________________**

1ª) O que você achou das aulas envolvendo os jogos?

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

2ª) As oficinas de construção do Tangram aplicadas para chegar à resolução de problemas envolvendo potência na base 2 com expoente inteiro negativo, contribuiu para o teu aprendizado? De que forma?

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

3ª) As regras do jogo Torre de Hanói, te ajudaram a compreender as estratégias para vencê-lo executando o menor número de movimentos?

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

4ª) A prática do jogo, que leva a uma expressão que permite determinar a quantidade mínima de movimentos para qualquer número de discos, foi suficiente para o seu entendimento sobre função exponencial? De que forma?

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

5ª) Comente sobre as estratégias utilizadas pelo professor aplicador e a participação dos estudantes no desenvolvimento das atividades propostas? (Metodologia, tempo, organização, tipo de atividade, exercícios, exposição, orientação, atendimento aos grupos, comportamento dos participantes, concentração, respeito, etc.)

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

6ª) Esse tipo de aula contribui de alguma forma para a sua aprendizagem? Comente sobre.

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

7ª) Como você gostaria que focem as suas aulas de matemática no Ensino Médio?

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

**APÊNDICE 03:** OFICINA I

SERÁ REALIZADA COM 100% DA AMOSTRA SELECIONADA NO CETI "ACRÍSIO VERAS" EM ALTO LONGÁ – PIAUÍ

**OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS: PROBLEMATIZANDO ALGORITMOS: POTENCIAÇÃO.**

Prezado(a) educando(a), estamos desenvolvendo uma pesquisa intitulada "**APLICAÇÕES MATEMÁTICAS COM USO DO TANGRAM E DA TORRE DE HANÓI NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE CASO NO CETI "ACRÍSIO VERAS", EM ALTO LONGÁ - PIAUÍ**", referente a uma dissertação de mestrado, com o objetivo de Analisar as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, verificando se há, ou não relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.
Desde já, agradecemos pela colaboração!

Profa. Dra. Valmária Rocha Silva Ferraz (Orientadora)
Irismar da Silva Carvalho (Orientando)

**DATA: _____/_____/** 2024
**Escolha um pseudônimo (nome fictício):_________________________________________**

**1- Tópicos abordados.**

- Polígonos;
- Fração;
- Potenciação;
- Potenciação com expoente inteiro positivo;
- Potenciação com expoente inteiro negativo.

**2- Objetivos de aprendizagem.**

- Compreender a partir de uma regularidade numérica o cálculo de uma potência com expoente inteiro positivo e negativo;
- Calcular potências com expoente inteiro negativo;
- Resolver problema envolvendo potência com expoente inteiro negativo.

**3- Público Alvo.**

Estudantes da 1ª série do Ensino Médio CETI "Acrísio Veras"

**4- Pré-requisitos.**

- Domínio das quatro operações;
- Compreende como potência um produto de fatores iguais;

- Reconhece os termos de uma potência;
- Domínio das propriedades das potenciações;
- Reconhece e constrói polígonos;
- Constrói a partir de um quadrado de 14cm x 14cm as sete peças que compõem um Tangram.

**5- Materiais.**

- Quadro;
- Pincel;
- Papel cartão;
- Régua e esquadro;
- Lápis de cor;
- Tangram;
- Tesoura sem ponta;
- Cola;
- Papelão.

**6- Metodologia de abordagem.**

- Trabalho em grupos;
- Discussão sobre o tema abordado;
- Construção das peças do Tangram;
- Uso de regularidade numérica;
- Resolução de problemas utilizando Tangram;
- Construção de tabelas numéricas;
- Associação de fração a potência de base 2 com expoente inteiro negativo.

**7- Descrição detalhada da atividade.**

- Organização de 10 grupos com 2 integrantes através de sorteio, distribuição do material a ser utilizado durante os trabalhos e confecção de 3 unidades quadrada de 14cm x 14cm congruentes por grupo;
- Aplicação de um questionário investigativo sobre o conhecimento prévio dos estudantes sobre o jogo e os conhecimentos abordados;
- Promoção de um diálogo informal acerca de potenciação com expoentes inteiros positivos e negativos;
- Apresentação de sequências numéricas incompletas envolvendo potenciações de bases dois e três com expoentes inteiros positivos e negativos aos grupos;
- Os grupos deverão completar as sequências numéricas formadas por potências de bases 2 e 3 com os termos que estão faltando;
- Os grupos deverão completar uma sequência formada por potências de base 2, utilizando divisão por 2, partindo da maior para a menor potência;
- Utilização de potência de base dois para representar cada uma das peças que constituem um Tangram;
- Intervenção do professor aplicador no sentido de completar os conhecimentos em construção acerca de potenciação com expoente inteiro.

## 8- **Tempo previsto**

Quatro aula de 60 minutos.

## 9- **Lista de Problemas**

1ª) Utilize régua, esquadro, papel cartão, lápis, pincel permanente e caneta para construir um quadrado de 14cm x 14cm.

1º Passo: Construa com régua no papel cartão um quadrado de 14cm x 14cm, nomeie cada um dos vértices com os pontos A, B, C e D;

2º Passo: Trace a diagonal AC do quadrado;

3º Passo: Marque os pontos médio dos lados consecutivos AD e CD, nomeie-os como pontos E e F;

4º Passo: Trace o segmento EF;

5º Passo: Marque o ponto médio do segmento EF e nomeie-o como ponto G;

6º Passo: Trace a outra diagonal BD até o ponto G marcando o ponto de intersecção das duas diagonais, nomeie-o como ponto H;

7º Passo: Marque os pontos médios dos dois segmentos AH e CH nomeie-os como pontos M e N respectivamente;

8º Passo: Por fim trace os segmentos EM e GN. (Pronto, temos as 7 peças do jogo Tangram)

2ª) Observe as sequências numéricas a seguir formadas por potenciações de base 2 e 3.

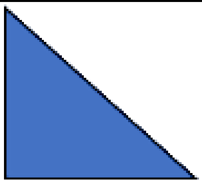
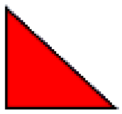
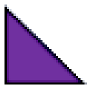
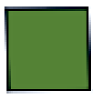
I. $2^5$ , $2^4$, ..., $2^{-5}$ II. $3^4$ , $3^3$, ..., $3^{-4}$

Reescreva cada uma dessas sequências numéricas completando-as com os termos que estão faltando.

3ª) Utilize a menor peça do jogo e, sobreponha-a sobre a superfície do jogo (Quadrado Maior). Quantas peças seriam necessárias para cobrir todo o tabuleiro?

4ª) Escreva a fração correspondente a cada uma das peças do Tangram utilizando o mesmo procedimento do item anterior. Registre no quadro 01.

**Quadro 01**: Peças usada na composição do Tangram.

| PEÇA (FIGURA PLANA) | NOME DA FIGURA | QUANTAS VEZES O MENOR TRIÂNGULO CABE NESSA PEÇA? | FRAÇÃO EM RELAÇÃO AO TODO. |
|---|---|---|---|
|  | | | |
|  | | | |
|  | | | |
|  | | | |
|  | | | |

Fonte: Autor, 2024.

5ª) Escreva cada denominador obtido nas frações correspondentes as 7 peças do Tangram como uma potência na base 2.

6ª) Transfira a potência obtida no denominador de cada fração do item anterior para o numerador, como ficou o expoente de cada uma delas?

7ª) No quadro 02, temos uma sequência de potências na base 2 obtidas por divisão por 2, iniciando com $16 \div 2 = 8$ e terminando com $\frac{1}{32} \div 2 = \frac{1}{64}$, o que nos dar as respectivas potências: $2^3$ e $2^{-6}$ na base 2. Complete a tabela com os valores que faltam seguindo o modelo.

**Quadro 03**: Sequência de potências na base 2 obtidas por meio da divisão por 2.

| Quociente da divisão por 2 | Decomposição do quociente na base 2 | Potência de base 2 |
|---|---|---|
| $16 \div 2 = 8$ | $8 = 2 \times 2 \times 2$ | $8 = 2^3$ |
| $8 \div 2 =$ | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| $\frac{1}{32} \div 2 = \frac{1}{64}$ | $\frac{1}{64} = \frac{1}{2\times2\times2\times2\times2\times2}$ | $\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ |

Fonte: Autor, 2024.

**APÊNDICE 04:** OFICINA II

SERÁ REALIZADA COM 100% DA AMOSTRA SELECIONADA NO CETI "ACRÍSIO VERAS" EM ALTO LONGÁ – PIAUÍ

**OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS E REAIS: PROBLEMATIZANDO ÁLGEBRA: FUNÇÃO EXPONENCIAL.**

Prezado(a) educando(a), estamos desenvolvendo uma pesquisa intitulada "**APLICAÇÕES MATEMÁTICAS COM USO DO TANGRAM E DA TORRE DE HANÓI NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE CASO NO CETI "ACRÍSIO VERAS", EM ALTO LONGÁ - PIAUÍ**", referente a uma dissertação de mestrado, com o objetivo de Analisar as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, verificando se há, ou não relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.
Desde já, agradecemos pela colaboração!

Profa. Dra. Valmária Rocha Silva Ferraz (Orientadora)
Irismar da Silva Carvalho (Orientando)

**DATA:** _____/_____/ 2024
**Escolha um pseudônimo (nome fictício):**________________________________________

**01 - Tópicos abordados.**

1.1- Sequência numérica recursiva;
1.2- Permutação;
1.3- Ordenação;
1.4- Indução Matemática;
1.5- Recorrência;
1.6- Potenciação na base 2 com expoente natural;
1.7- Álgebra.
1.8- Plano cartesiano;
1.9- Função exponencial.

**02 - Objetivos de aprendizagem.**

2.1- Compreender a dinâmica e as regras do jogo a torre de Hanói;

2.2- Realizar a troca dos discos da haste A para a haste C com o menor número de movimentos possível;

2.3- Identificar que quanto maior for a quantidade de discos, maior será a quantidade de movimentos, mediante a prática do jogo utilizando diferente números de discos, iniciando com um número mínimo e acrescentando um disco a cada nova jogada;

2.4- Associar a quantidade mínima de movimentos a uma relação algébrica envolvendo potenciação na base 2 com expoente natural;

2.5- Localizar no plano cartesiano os pontos que associa o número de discos ao domínio e a quantidade mínima de movimentos obtida para mudar os discos da haste A para a haste C com a imagem de uma relação;

2.6- Obter por meio da observação de um padrão a expressão algébrica que relaciona o número mínimo de movimentos de $\boldsymbol{n}$ no jogo;

2.7- Reconhecer que a expressão algébrica obtida tem relação direta com a função exponencial;

2.8- Relacionar a linha que une os pontos do plano cartesiano que associa o número de discos ao número mínimo de movimentos ao gráfico de uma função exponencial;

2.9- Identificar que a linha determinada no universo dos reais para as duas expressões algébrica tem um ponto em comum e determinar esse ponto.

**03 - Público Alvo.**

3.1- Estudantes da 1ª série do Ensino Médio CETI "Acrísio Veras".

**04 - Pré-requisitos.**

4.1- Domínio das quatro operações;
4.2- Compreende como potência um produto de fatores iguais;
4.3- Reconhece os termos de uma potência;
4.4- Representa informações em tabelas e gráficos;
4.5- Localiza pontos no plano cartesiano;
4.6- Constrói o gráfico de uma função;
4.7- Compara diferentes tipos de função por meio da sua representação gráfica;

**05 - Materiais.**

5.1- Lista de problemas;
5.2- Quadro;
5.3- Pincel;
5.4- Malha quadriculada;
5.5- Caneta;
5.6- Lápis;
5.7- Régua e esquadro;
5.8- Borracha;
5.9- Torre de Hanói;
5.10- Discos de madeira com diâmetros distintos.

**06 - Metodologia de abordagem.**

6.1- Aplicação de questionário;
6.2- Trabalho em grupos;

6.3- Discussão sobre o tema abordado;
6.4- Apresentação das regras do jogo;
6.5- Uso de regularidade numérica;
6.6- Resolução de problemas utilizando a torre de Hanói;
6.7- Apresentação dos resultados alcançados.

**07 - Descrição detalhada da atividade.**

7.1- Apresentação da proposta de trabalho para os estudantes da 1º série do Ensino Médio;
7.2- Aplicação de um questionário investigativo sobre o conhecimento prévio dos estudantes sobre o jogo e os conhecimentos abordados;
7.3- Explanação informal através de diálogo da temática que aborda o jogo torre de Hanói e função exponencial;
7.4- Organização dos estudantes participantes em grupos de 2;
7.5- Distribuição dos materiais a serem utilizados nas atividades com o jogo da torre de Hanói;
7.6- Disponibilização de uma lista de problemas para cada grupo que poderão ser solucionados com a ajuda das habilidades desenvolvidas com a torre de Hanói;
7.7- Monitoramentos e acompanhamentos dos grupos durante a resolução dos problemas objetivando o esclarecimento de eventuais dúvidas que possam surgir durante a aplicação e dinâmica do jogo como ferramenta na obtenção das soluções;
7.8- Intervenção do professor aplicador no sentido de completar os conhecimentos em construção acerca do jogo torre de Hanói.

**08 - Tempo previsto**

8.1- 06 aulas de 60 minutos.

O problema das torres de Hanói foi proposto pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883. O jogo consiste em mover os discos da haste original **(“A”)** para uma de destino **(“C”)**.

**09 - Regra do jogo**

R.1- Pode-se mover um único disco por vez;
R.2- Um disco de diâmetro maior não pode ser colocado sobre um disco de diâmetro menor;
R.3- Um disco deve estar sempre numa das três hastes, ou em movimento;
R.4- O jogo termina quando o todos os discos da Haste **A** estiverem na Haste **C** com movimentos segundo as regras anteriores;
R.5- Vencerá o jogo aquele que transferir todos os discos na menor quantidade de Movimentos possível.

A tarefa aqui é encontrar a regra de movimentação ótima (que atinja o objetivo com um número mínimo de movimentos).

## 10 - Lista de Problemas

1ª) Utilizando o jogo, tente preencher os quadros 01 e 02 a seguir com o menor número de movimentos necessários para atingir o objetivo deste desafio.

**Quadro 01:** Número de movimentos necessários para vencer o Jogo.

| Número de Discos (n) | Número mínimo de movimentos. |
|---|---|
| **1** | |
| **2** | |
| **3** | |
| **4** | |
| **5** | |

Fonte: Autor, 2024.

**Quadro 02:** Número de movimentos mínimos necessários para vencer o Jogo.

| Número de Discos (n) | Número mínimo de Movimentos $T_n$. | Representação do número mínimo e movimentos $T_n$ utilizando potência na base 2. |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |
| **3** | | |
| **4** | | |
| **5** | | |
| … | … | … |
| **n** | | |

Fonte: Autor, 2024.

2ª) É Possível sempre chegar ao objetivo desejado, isto é, determinar um número mínimo de movimentos que permita transferir todos os discos da haste **A** para a haste **C**, seguindo as regras do jogo? Caso positivo, justifique a sua resposta.

___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________

3ª) Sobre a dinâmica do jogo, responda:

a) Existe, nessa atividade, alguma relação matemática entre o número de discos $\boldsymbol{n}$ da torre e o número mínimo de movimentos $T_n$ necessário para efetuar a sua transferência da haste de origem **(A)** para a haste final **(C)**?

___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________

b) Existe uma função matemática real $T_n$, de variável real **n** que possa representar esta situação?

___________________________________________________________________________

4ª) O que acontece com o número de movimentos quando:
a) O número de discos aumenta de **uma** para **duas** unidades?

b) E de **duas** unidades para **três** unidades?

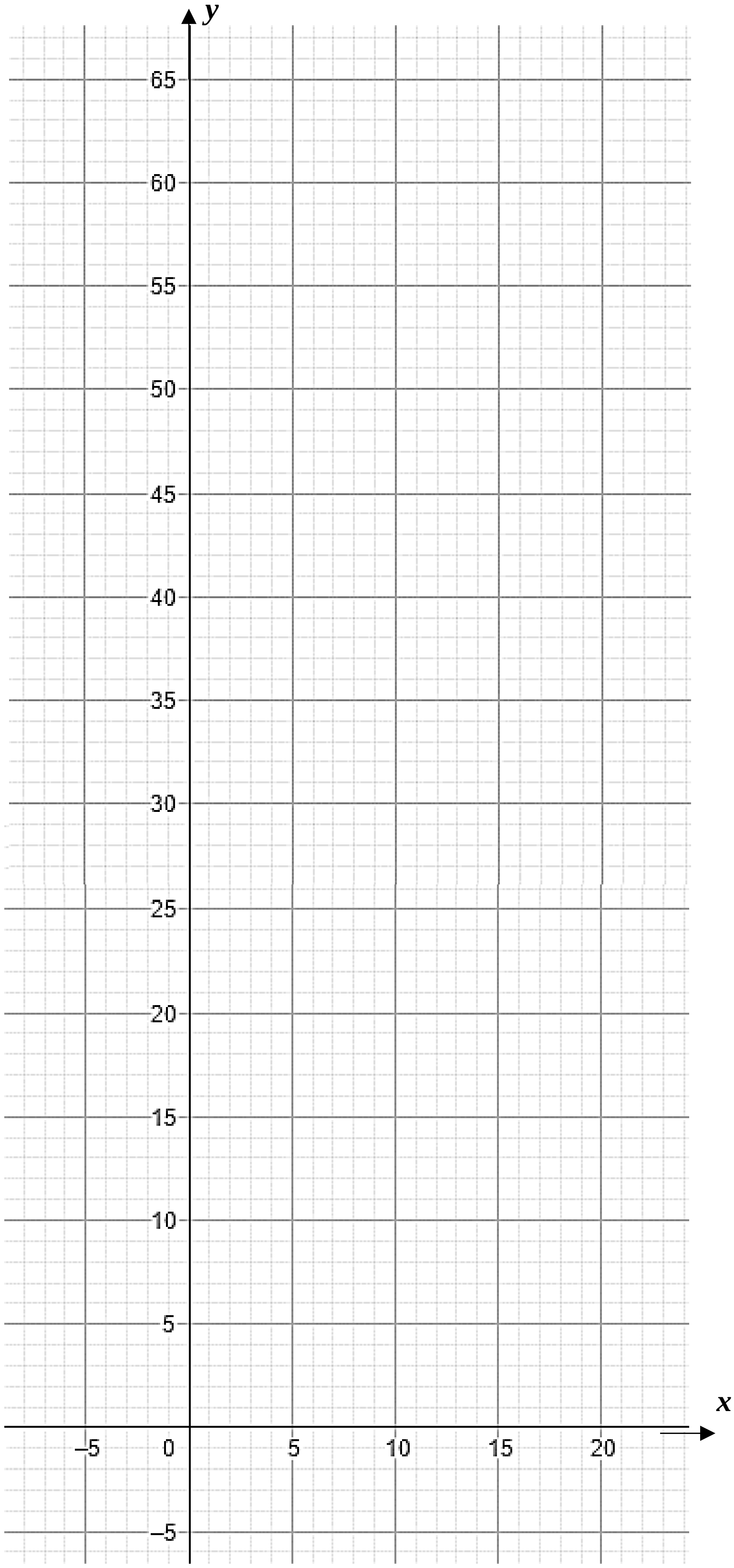
c) E de **três** para **quatro** unidades?

d) E de $\boldsymbol{n-1}$ unidades para $\boldsymbol{n}$ unidades?

e) Que tipo de função descreve este comportamento?

5ª) Localize no plano cartesiano da figura 01 os pontos correspondes a resposta das 5 primeiras linhas do quadro 02 respondida no 1° problema. Considere no eixo horizontal $\boldsymbol{x}$ o número de discos $\boldsymbol{n}$ e no eixo vertical $\boldsymbol{y}$ o número mínimo de movimentos $T_n$ obtidos.

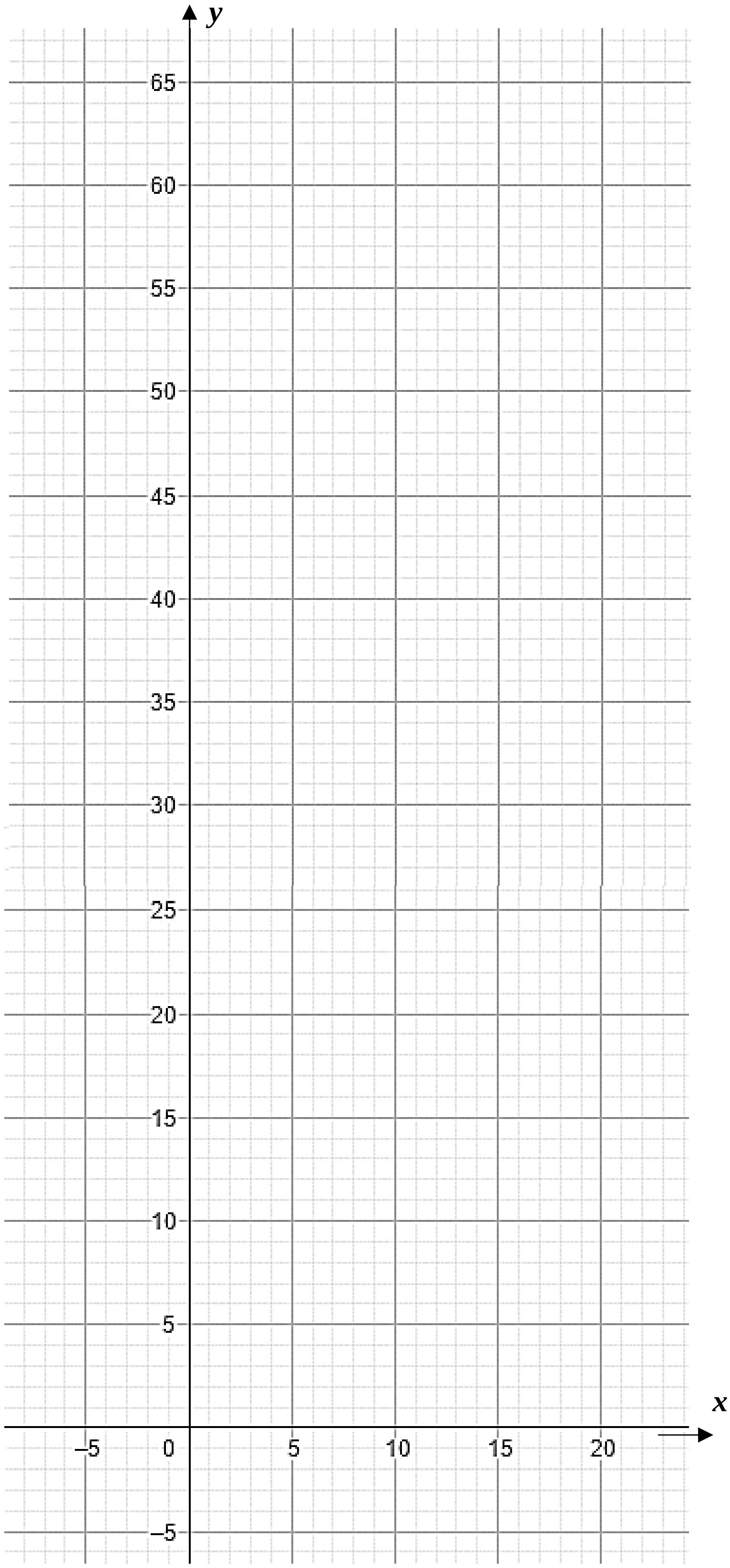
**Figura 01**: Plano Cartesiano




Fonte: Autor, 2024 GeoGebra.

6ª) Utilize o plano cartesiano da figura 02 para construir o gráfico da função $T_n$ obtida na questão 3.

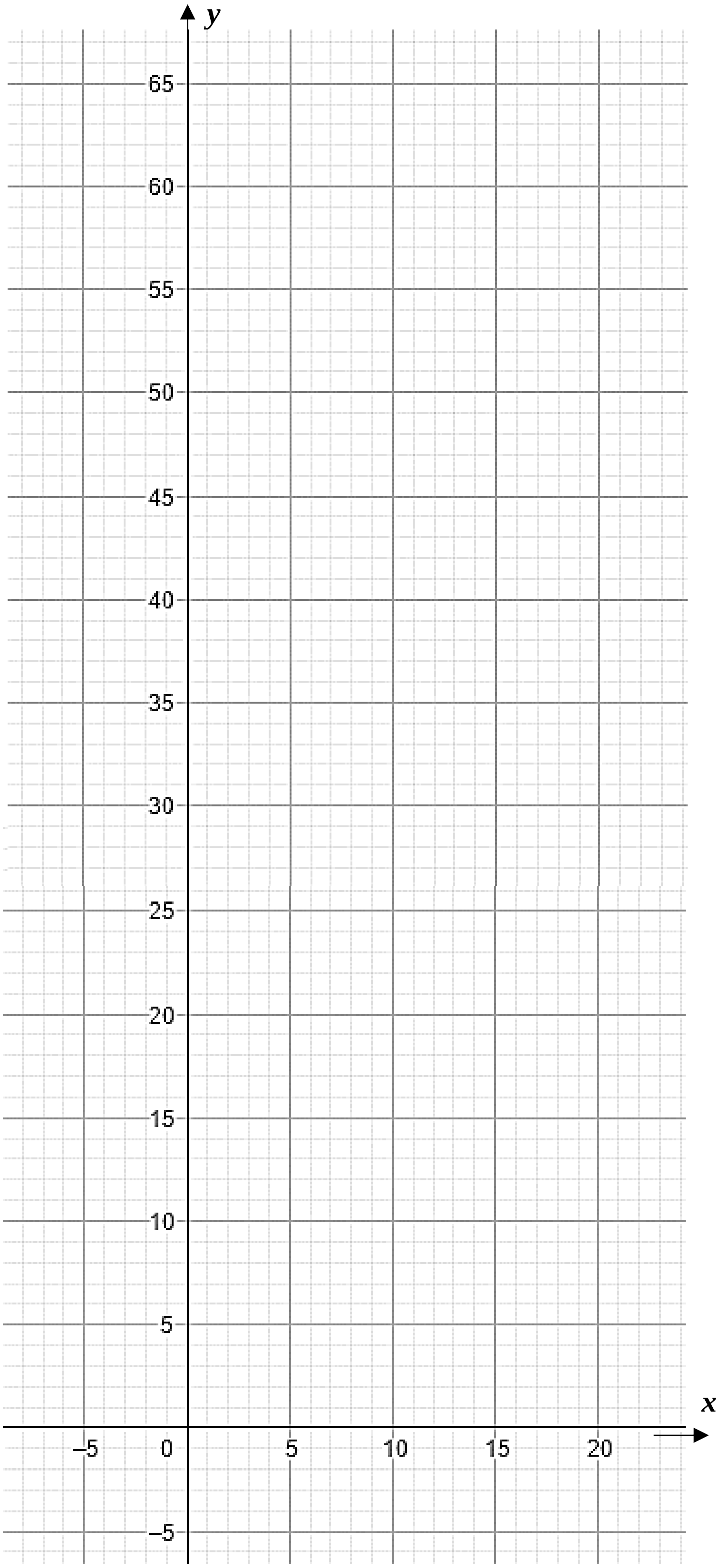
**Figura 02**: Plano Cartesiano




Fonte: Autor, 2024 GeoGebra.

7ª) Considere agora $\boldsymbol{n}$ o número de discos. Utilize o plano cartesiano a seguir para construir o gráfico da função afim $f(n) = 2n + 1$.

**Figura 03**: Plano Cartesiano




Fonte: Autor, 2024 GeoGebra.

8ª) Analisando O gráfico obtido no problema 6 e o gráfico da função de primeiro grau $f(n) = 2n + 1$, para $\boldsymbol{n}$ real, responda:
a) Qual é a função que cresce mais rápido?

___

b) Para que valor de $\boldsymbol{n}$ a linha que corresponde aos possíveis gráficos das funções $T_n$ e $\boldsymbol{F(n)}$ coincidem?

___

(Importante: no caso de domínio composto por números inteiros, o gráfico da função é representado por pontos e não por uma linha contínua, isso ocorre porque não há uma densidade numérica entre dois números naturais consecutivos, diferentemente de quando se considera como domínio os números reais.)

**APÊNDICE 05:** AVALIAÇÃO INICIAL

**DATA:** _____/_____/ 2024
**Escolha um pseudônimo (nome fictício):**__________________________________________
Você se considera uma pessoa do sexo:
( ) Masculino ( ) Feminino

1ª) Nos nossos estudos sobre potenciação vimos que o valor de potenciação corresponde ao produto de fatores iguais a base da potência, por exemplo, generalizando essa definição, temos:

$$\underbrace{\boldsymbol{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = b}}_{\textbf{\textit{n fatores}}}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{Z}.$$

Calcule o valor de cada potenciação a seguir:

a) $2^5 =$

b) $17^0 =$

c) $3^{-4} =$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

2ª) A seguir temos duas sequências formadas por potenciações na base 2 e na base 5.

I. $2^6, 2^5, \ldots, 2^{-4}, 2^{-5}$

II. $5^4, 5^3, \ldots, 5^{-6}, 5^{-7}$

Complete cada uma dessas sequências com os termos que estão faltando.

3ª) Aplicando as propriedades gerais das potências, reduza cada uma das expressões a seguir numa só potência:

a) $3^5 \cdot 3^{-9} =$

b) $[(y)^2]^5 =$

c) $\frac{10^5}{10^7} =$

4ª) Escreva cada um dos números abaixo na forma de potência com expoente inteiro negativo. Considere $b \neq 0$.

a) $\frac{1}{10^4} =$

b) $\frac{1}{b^3} =$

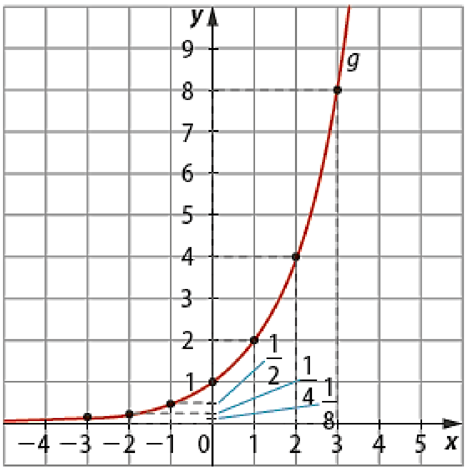
5ª) Por definição, sabemos que toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, com $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, é denominada função exponencial de base $\boldsymbol{a}$. Se $\boldsymbol{a > 1}$, a função é crescente, agora se $0 < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{1}$, a função é decrescente. Dessa forma, classifique cada função exponencial a seguir como sendo crescente ou decrescente.

a) $\boldsymbol{y} = 2^x$

b) $\boldsymbol{f(x)} = (0{,}7)^x$

6ª) Observe o gráfico da função $g(x) = 2^x$ representado na imagem a seguir.

| $x$ | $g(x) = 2^x$ |
|---|---|
| $-3$ | $\frac{1}{8}$ |
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |




Fonte: Coleção Prisma FTD, 2020.

De acordo com as informações do gráfico, responda:

a) Qual é o domínio da função $\boldsymbol{g}$?

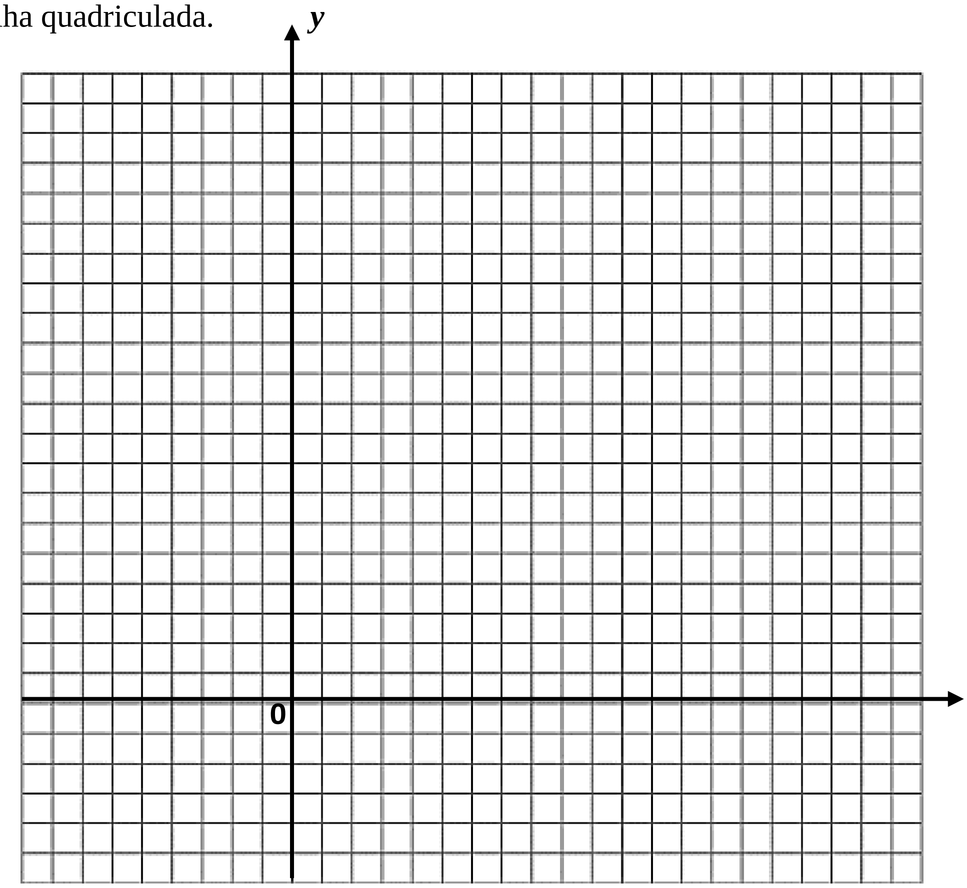
b) Qual é a imagem da função $\boldsymbol{g}$?

b) Qual é o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo $\boldsymbol{y}$?

7ª) A primeira coluna do quadro a seguir temos funções exponencial e afim. Complete a tabela com as imagens correspondente a cada domínio $\boldsymbol{x}$ localizado na 1ª linha.

| $\boldsymbol{x}$ / **Lei da função** | **– 2** | **–1** | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3^x$ | | | | | | |
| $f(x) = 3x + 1$ | | | | | | |

8ª) Construa no mesmo plano cartesiano o gráfico das funções $f(x) = 3^x$ e $f(x) = 3x + 1$. Use a malha quadriculada.




Boa prova!

**APÊNDICE 06:** AVALIAÇÃO FINAL

**DATA:** _____/_____/ 2024
**Escolha um pseudônimo (nome fictício):**__________________________________________
Você se considera uma pessoa do sexo:
( ) Masculino ( ) Feminino

1ª) A seguir temos duas sequências formadas por potenciações na base 3 e na base 7.
I. $3^{-2}, 3^{-1}, \ldots, 3^{3}, 3^{4}$ II. $7^{2}, 7^{1}, \ldots, 7^{-2}, 7^{-3}$

Complete cada uma dessas sequências com os termos que estão faltando.

2ª) Por definição, sabemos que toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}^{*}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = a^{x}}$, com $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, é denominada função exponencial de base $\boldsymbol{a}$.
Qual das funções a seguir é uma função exponencial?
a) $\boldsymbol{y} = (2x - 1)^{2}$ b) $\boldsymbol{f(x)} = 2x^{3} - 4x^{2} + 8$ c) $\boldsymbol{f(x)} = 3^{x} - 4$
d) $\boldsymbol{f(x)} = \left(\frac{5}{x}\right)^{2}$ e) $\boldsymbol{y} = \left(\sqrt{3x}\right)^{4}$

3ª) Nos nossos estudos sobre potenciação vimos que o valor de potenciação corresponde ao produto de fatores iguais a base da potência, por exemplo, generalizando essa definição, temos:
$\underbrace{\boldsymbol{a^{n} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = b}}_{\textbf{\textit{n fatores}}}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Calcule o valor de cada potenciação a seguir:

a) $5^{-2} =$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} =$

4ª) Escreva cada um dos números abaixo na forma de potência com expoente inteiro negativo.
a) $2^{4} =$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2} =$

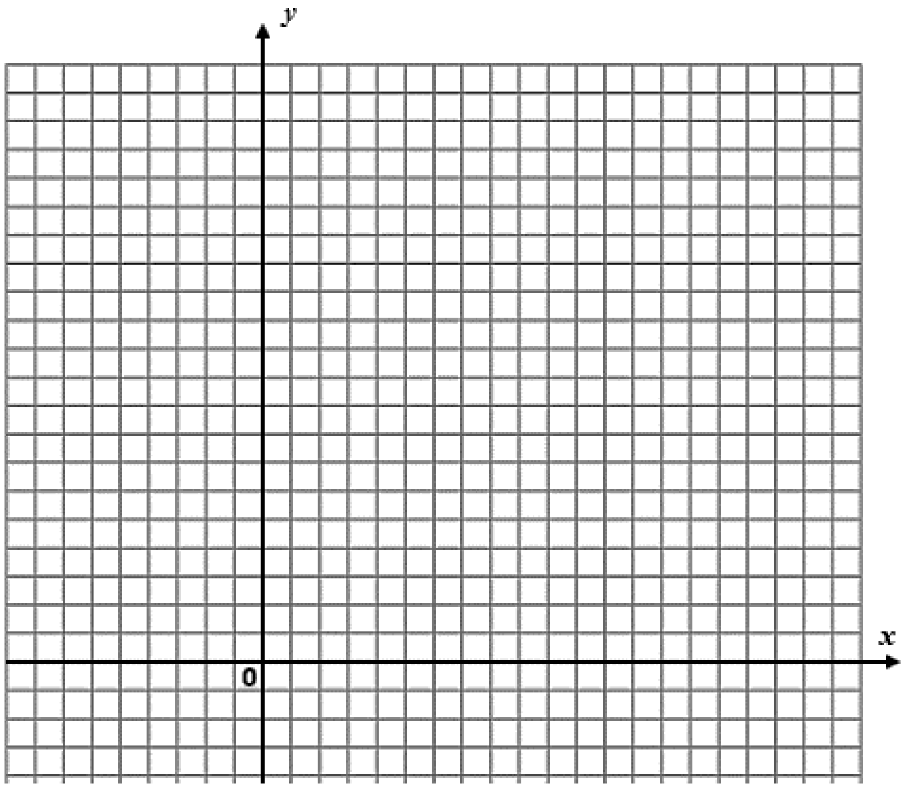
5ª) Aplicando as propriedades gerais das potências, reduza cada uma das expressões a seguir numa só potência:

a) $11^{7} \cdot 11 \cdot 11^{-3} =$ b) $z^{10} \div z^{12} =$

6ª) Na primeira coluna do quadro a seguir temos as funções afim e exponencial. Complete a tabela com as imagens correspondentes a cada domínio $\boldsymbol{x}$ representado na 1ª linha.

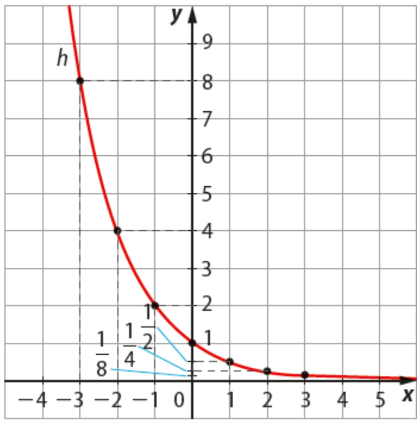
| $\boldsymbol{x}$ / **Lei da função** | **– 2** | **–1** | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2x + 1$ | | | | | | |
| $f(x) = 2^x$ | | | | | | |

7ª) Construa no mesmo plano cartesiano o gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 2x + 1$. Use a malha quadriculada.



8ª) Observe o gráfico da função $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ representado na imagem a seguir.

| $x$ | $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
|---|---|
| $-3$ | 8 |
| $-2$ | 4 |
| $-1$ | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ |




Fonte: Coleção Prisma FTD, 2020.

De acordo com as informações do gráfico acima, responda:

a) Qual o ponto de intersecção do gráfico da função $\boldsymbol{h}$ com o eixo y?

b) Quais os valores de y, ou seja, os valores da imagem para $x = -3$; $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$; e $x = 2$?

c) Analisando as características da curva que representa o gráfico da função $\boldsymbol{h}$, o que ocorre com os valores de $\boldsymbol{y}$ quando se aumenta os valores de $\boldsymbol{x}$?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

Boa prova!

# ANEXOS

**ANEXO A:** TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA HUMANA
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.

**TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)**
**Para crianças e adolescentes (maiores de 6 anos e menores de 18 anos) e para legalmente incapaz**

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a) de uma pesquisa denominada "**Aplicações Matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói no Ensino Médio: um estudo de caso**". Coordenada por Irismar da Silva Carvalho, pesquisador responsável estudante de mestrado UFPI/ Programa de Pós-graduação em Matemática – Mestrado Profissional em Matemática e, pela Profa. Dra. Valmária Rocha da Silva Ferraz, orientadora professora da UFPI/Programa de Pós-Graduação em Matemática e tem como objetivo geral: Analisar as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com o uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio. Objetivos específicos: 1) Identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre a Torre de Hanói e o Tangram; 2) explorar as possibilidades de aplicação dos conceitos matemáticos com o uso dos jogos em estudo; 3) descrever os processos vivenciados com a experiência a partir da oficina aplicada; 4) verificar as relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.

Os adolescentes que irão participar dessa pesquisa têm de 13 a 18 anos de idade. A pesquisa será realizada apenas com estudantes do CETI "Acrísio Veras" em Ato Longá – Piauí, eles responderão a um questionário semiestruturado com perguntas abertas e fechadas a respeito do tema. Você foi escolhido(a) para participar dessa pesquisa por ser um estudante devidamente matriculado na escola CETI "Acrísio Veras".

Este documento, chamado Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), visa assegurar seus direitos como participante. O TALE é redigido em duas vias, ficando uma com você participante da pesquisa e outra com o pesquisador. Após seu consentimento, todas as páginas deverão ser rubricadas por você (participante da pesquisa), pelo pesquisador responsável e pela orientadora, e com todas as assinaturas apostas na última página. Este Termo possui 02 (duas) páginas, todas numeradas, sendo que cada página indica o número total de páginas do documento (1-2 e 2-2) possibilitando a integridade das informações contidas no documento. Por favor, leia com atenção e calma, aproveite para esclarecer todas as suas dúvidas.

Se houver duvidas antes ou mesmo depois de indicar sua concordância, você poderá esclarecê-las com o pesquisador Responsável Irismar da Silva Carvalho, através do seguinte telefone (86) 98121-0799, Email: yriscarv@gmail.com ou no telefone (86) 99961-5037 (Orientadora). Se mesmo assim, as dúvidas ainda persistirem você pode entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFPI, que acompanha e analisa as pesquisas científicas que envolvem seres humanos, no Campus Universitário Ministro Petrônio Portella, Bairro Ininga, CEP: 64049 – 550 Teresina –PI, telefone (86) 3237-2332, e-mail: cep.ufpi@ufpi.edu.br; no horário de atendimento ao público, de segunda a sexta, manhã: 08h00 às 12h00 e a tarde: 14h00 às 18h00. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Esclarecemos mais uma vez que sua participação é voluntária, caso decida não participar ou retirar seu consentimento a qualquer momento da pesquisa, não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo e o (os) pesquisador estará a sua disposição para qualquer esclarecimento. Seus pais e ou responsáveis permitiram que você participe.

Sua participação é voluntária e se por algum motivo decidir não mais participar, você automaticamente será desvinculado da pesquisa sem penalidades. O pesquisador garante que sua identidade e as informações fornecidas permanecerão sobre sigilo absoluto.

Este estudo apresenta como risco constrangimento ou insegurança, natural em pesquisa com levantamento de dados. Para minimizar o desconforto, será realizado a leitura prévia dos objetivos e esclarecimentos acerca do tema. Além disso, será garantido pelo pesquisador total sigilo e confidencialidade dos dados pessoais coletados, e tem como benefício evidenciar as contribuições das "**Aplicações Matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói no Ensino Médio: um estudo de caso**", em práticas pedagógicas voltadas ao ensino e aprendizagem de potência na base 2 com expoente inteiro negativo e função exponencial e por fim fazer um levantamento de dados acerca da aproximação dos estudantes com os jogos.

Os resultados estarão à sua disposição quando a pesquisa for finalizada. Seu nome ou qualquer material que indique sua participação não serão liberados sem a permissão de seu responsável. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de cinco anos, e depois desse período, serão destruídos.

Este termo de assentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Após os devidos esclarecimentos e estando ciente de acordo com o que me foi exposto, Eu ____________________________________________________________- declaro que fui informado(a) sobre o projeto e seus objetivos de maneira clara e detalhada, esclarecendo minhas dúvidas. Sabendo que poderei solicitar novas informações a qualquer momento, assim como o meu responsável poderá modificar a decisão se assim desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo de Assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Teresina – PI, ____ de _______________ de 2024.

_______________________________________________

Assinatura do(a) Participante

_______________________________________________

Assinatura do Pesquisador Responsável

_______________________________________________

Assinatura do Pesquisador Responsável

**ANEXO B:** TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA HUMANA
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

**Prezado(a) Senhor (a)**

Você está sendo convidado(a) a conhecer e autorizar, caso concorde, a participação do estudante da 1ª série do Ensino Médio, menor de idade a participar como voluntário(a) de uma pesquisa denominada “**Aplicações Matemáticas com uso do Tangram e da Torre de Hanói no Ensino Médio: um estudo de caso**”. Esta pesquisa está sob a responsabilidade do pesquisador Irismar da Silva Carvalho, estudante de mestrado UFPI/ Programa de Pós-graduação em Matemática – Mestrado Profissional em Matemática e, pela Profa. Dra. Valmária Rocha da Silva Ferraz, orientadora professora da UFPI/Programa de Pós-Graduação em Matemática e tem como objetivo geral: Analisar as contribuições da utilização de aplicações matemáticas com o uso do Tangram e da Torre de Hanói para a aprendizagem matemática dos alunos da 1ª série do Ensino Médio. Objetivos específicos: 1) Identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre a Torre de Hanói e o Tangram; 2) explorar as possibilidades de aplicação dos conceitos matemáticos com o uso dos jogos em estudo; 3) descrever os processos vivenciados com a experiência a partir da oficina aplicada; 4) verificar as relações entre o ensino e a aprendizagem matemática a partir dos jogos aplicados.

Neste sentido, solicitamos sua colaboração mediante a assinatura desse termo. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), visa assegurar seus direitos como participante. Após seu consentimento, assine todas as páginas e ao final desse documento que está em duas vias. O mesmo, também será assinado pelo pesquisador em todas as páginas, ficando uma via com você participante da pesquisa e outra com o pesquisador. Após seu consentimento, todas as páginas deverão ser rubricadas por você (participante da pesquisa), pelo pesquisador responsável e pela orientadora, e com todas as assinaturas apostas na última página. Este Termo possui 04 (quatro) páginas, todas numeradas, sendo que cada página indica o número total de páginas do documento (1-4, 2-4, 3-4 e 4-4) possibilitando a integridade das informações contidas no documento. Por favor, leia com atenção e calma, aproveite para esclarecer todas as suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de indicar sua concordância, você poderá esclarecê-las com o pesquisador responsável Irismar da Silva Carvalho, através do seguinte telefone (86) 98121-0799, Email: yriscarv@gmail.com ou no telefone (86) 99961-5037 (Orientadora). Se mesmo assim, as dúvidas ainda persistirem você pode entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da– UFPI, que acompanha e analisa as pesquisas científicas que envolvem seres humanos, no Campus Universitário Ministro Petrônio Portella, Bairro Ininga, Teresina –PI, telefone (86) 3237-2332, e-mail: cep.ufpi@ufpi.edu.br; no horário de atendimento ao público, segunda a sexta, manhã: 08h00 às 12h00 e a tarde: 14h00 às 18h00. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Esclarecemos mais uma vez que sua participação é voluntaria, caso decida não participar ou retirar seu consentimento a qualquer momento da pesquisa, não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo e o (os) pesquisador estará a sua disposição para qualquer esclarecimento.

A pesquisa tem como justificativa os avanços no campo da educação que têm exigido permanentemente dos professores o desenvolvimento de novas competências e habilidades, atitudes, fundamentadas em saberes e conhecimentos. Essa realidade impõe aos processos formativos de professores uma responsabilidade cada vez maior, uma vez que é, por meio desses processos, que esse profissional constrói habilidades e competências para agir profissionalmente. Essa realidade impõe aos processos formativos de professore(a)s uma responsabilidade cada vez maior, uma vez que é, por meio desses processos, que esse profissional constrói sua prática educativa. Para sua realização serão utilizados os seguintes procedimentos para a coleta de dados: questionário, a entrevista narrativa. Esse procedimento de coleta acontecerá de maneira presencial respeitando todos os protocolos de segurança e garantindo os materiais de segurança individual que serão entregues no ato da aceitação desse termo.

O estudo se apoia nos princípios da pesquisa qualitativa do tipo descritiva. Para sua realização serão utilizados os seguintes procedimentos para a coleta de dados: o questionário, aplicação de uma prova e oficinas práticas com o uso dos jogos em estudo. Sua participação nesta pesquisa consistirá no preenchimento do questionário, que objetiva traçar o perfil do grupo e colher as primeiras impressões sobre a temática abordada, seguida da realização da prova sobre os objetos do conhecimento em estudo que terá função diagnóstica em relação ao que já sabem sobre a temática, e aplicação das oficinas práticas como intervenção a partir dos resultados das provas aplicadas, para consolidação das informações iniciais. Em relação ao tempo estas atividades terão em média duração de duas semanas, sendo organizada de acordo com as possibilidades da turma e do professor de matemática que estará acompanhando e participando da pesquisa. Todas as informações coletadas poderão ser gravadas em imagem/vídeo para serem transcritas posteriormente. Serão registradas mediante o uso de gravador de voz (celular e/ou computador). Os dados produzidos serão organizados em categorias e interpretados a luz da técnica de análise de conteúdo.

Este estudo envolve riscos mínimos, você pode experimentar algum tipo de constrangimento, desconforto ou ansiedade, durante a oficina prática, se isso acontecer, será contornado a partir do diálogo com o pesquisador responsável pela coleta das informações, que suspenderá imediatamente a atividade para tomar as providências cabíveis e só será reiniciada quando não existir mais nenhuma dúvida e caso necessite será encaminhado(a) para um serviço médico ou psicológico especializado, adotando procedimentos éticos conforme a Resolução 510/16 e a Resolução 466/12. Essa pesquisa não trará danos psicológicos aos participantes envolvidos, não apresenta situações invasivas, discriminatórias. Contudo, se o participante após os esclarecimentos não se sentir à vontade para continuar poderá a qualquer momento se desvincular da pesquisa sem nenhum prejuízo.

No que se refere aos benefícios trará maior conhecimento sobre o tema abordado, sem benefício material direto para o participante. Os benefícios são de ordem pessoal e coletiva. Desse modo, este estudo estará aumentando o conjunto de pesquisas sobre as aplicações matemáticas a partir do uso de jogos no Ensino Médio. Espera-se também contribuir para gerar conhecimento sobre a temática no exercício da docência neste âmbito de atuação, a partir de publicações e apresentações em seminários, congressos e similares, mas sempre garantindo a confidencialidade dos dados coletados. Nessas premissas, buscar-se-á possibilitar aos estudantes participantes que percebam as construções dos conceitos e da teoria a partir da manipulação de jogos, ou seja, da gamificação para aprenderem matemática significativamente. Contribuir para a ressignificação de propostas de ensino e de intervenções pedagógicas no contexto da sala de aula. Portanto, acredita-se que os benefícios superam os prováveis riscos que poderão vi a ocorrer no desenvolvimento da pesquisa.

Os resultados obtidos nesta pesquisa serão utilizados para fins acadêmico-científicos (divulgação em revistas e em eventos científicos) e os pesquisadores se comprometem a manter o sigilo e identidade anônima, como estabelecem as Resoluções do Conselho Nacional de Saúde nº. 466/2012 e 510/2016 e a Norma Operacional 01 de 2013 do Conselho Nacional de Saúde, que tratam de normas regulamentadoras de pesquisas que envolvem seres humanos. E você terá livre acesso as todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo, bem como lhe é garantido acesso a seus resultados.

Esclareço ainda que você não terá nenhum custo com a pesquisa, e caso haja por qualquer motivo, asseguramos que você será devidamente ressarcido. Não haverá nenhum tipo de pagamento por sua participação, ela é voluntária. Caso ocorra algum dano comprovadamente decorrente de sua participação neste estudo você poderá ser indenizado conforme determina a Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde, bem como lhe será garantido a assistência integral.

Após os devidos esclarecimentos e estando ciente de acordo com os que me foi exposto, Eu_______________________________________________________ ciente dos objetivos e benefícios da pesquisa, autorizo o estudante sob minha responsabilidade a participar voluntariamente, dando pleno consentimento para uso das informações por ele prestadas. Para tanto, assino este consentimento em duas vias, rubrico todas as páginas e fico com a posse de uma delas.

Preencher quando necessário
(    ) Autorizo a  captação de imagem e voz por meio de gravação, filmagem e/ou fotos;
(    ) Não autorizo a captação de imagem e voz por meio de gravação e/ou filmagem.
(    ) Autorizo apenas  a captação de voz por meio da gravação;

Teresina – PI, ____ de ________________ de 2024.

_______________________________________________________

Assinatura do(a) Participante

_______________________________________________________

Assinatura do Pesquisador Responsável

_______________________________________________________

Assinatura do Pesquisador Responsável

**ANEXO C:** TABELA DE FREQUÊNCIA, NUVEM DE PALAVRAS E SIMILITUDE (Categoria 3.6.1 - Os jogos na sala de aula: o jogo como ferramenta de construção do conhecimento)

TABELA DE FREQUÊNCIA/COOCORRÊNCIAS

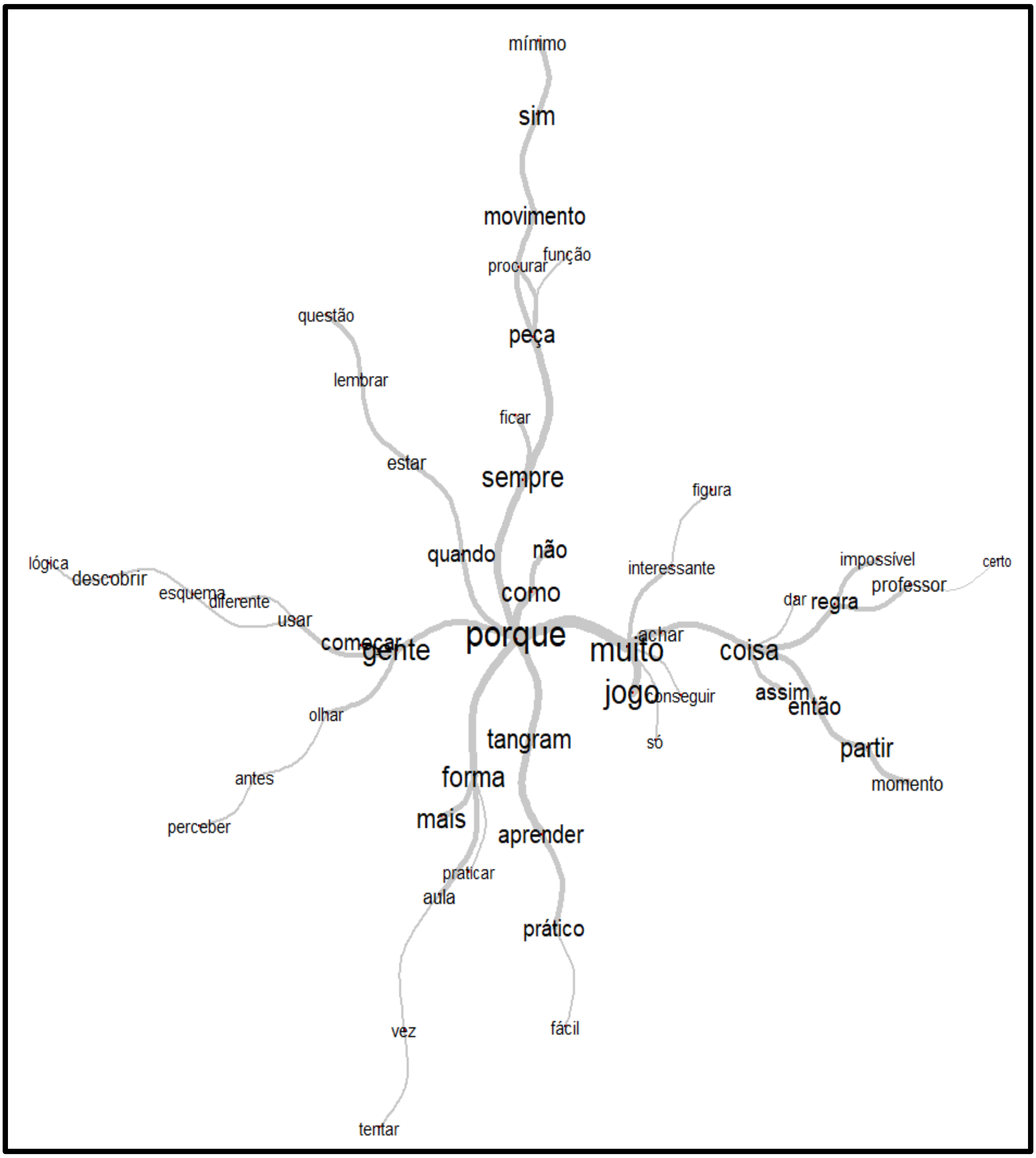
| formes | eff | formes | eff |
|---|---|---|---|
| coisa | 13 | começar | 6 |
| jogo | 13 | achar | 5 |
| muito | 12 | aula | 5 |
| porque | 12 | fácil | 4 |
| gente | 12 | lembrar | 4 |
| forma | 12 | perceber | 4 |
| mais | 11 | professor | 4 |
| aprender | 10 | conseguir | 4 |
| sempre | 9 | mínimo | 4 |
| não | 8 | usar | 4 |
| sim | 7 | estar | 4 |
| movimento | 7 | descobrir | 4 |
| tangram | 7 | momento | 4 |
| como | 7 | dar | 4 |
| peça | 7 | esquema | 3 |
| prático | 7 | tentar | 3 |
| partir | 7 | figura | 3 |
| assim | 7 | impossível | 3 |
| então | 6 | só | 3 |
| regra | 6 | função | 3 |
| quando | 6 | antes | 3 |

Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)

NUVEM DE PALAVRAS


Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)

GRAFO DE SIMILITUDE




Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)

**ANEXO D:** TABELA DE FREQUÊNCIA, NUVEM DE PALAVRAS E SIMILITUDE (Categoria 3.6.2 – Práticas educativas com materiais manipulativos: relações dos jogos com objeto do conhecimento)

TABELA DE FREQUÊNCIA/COOCORRÊNCIAS

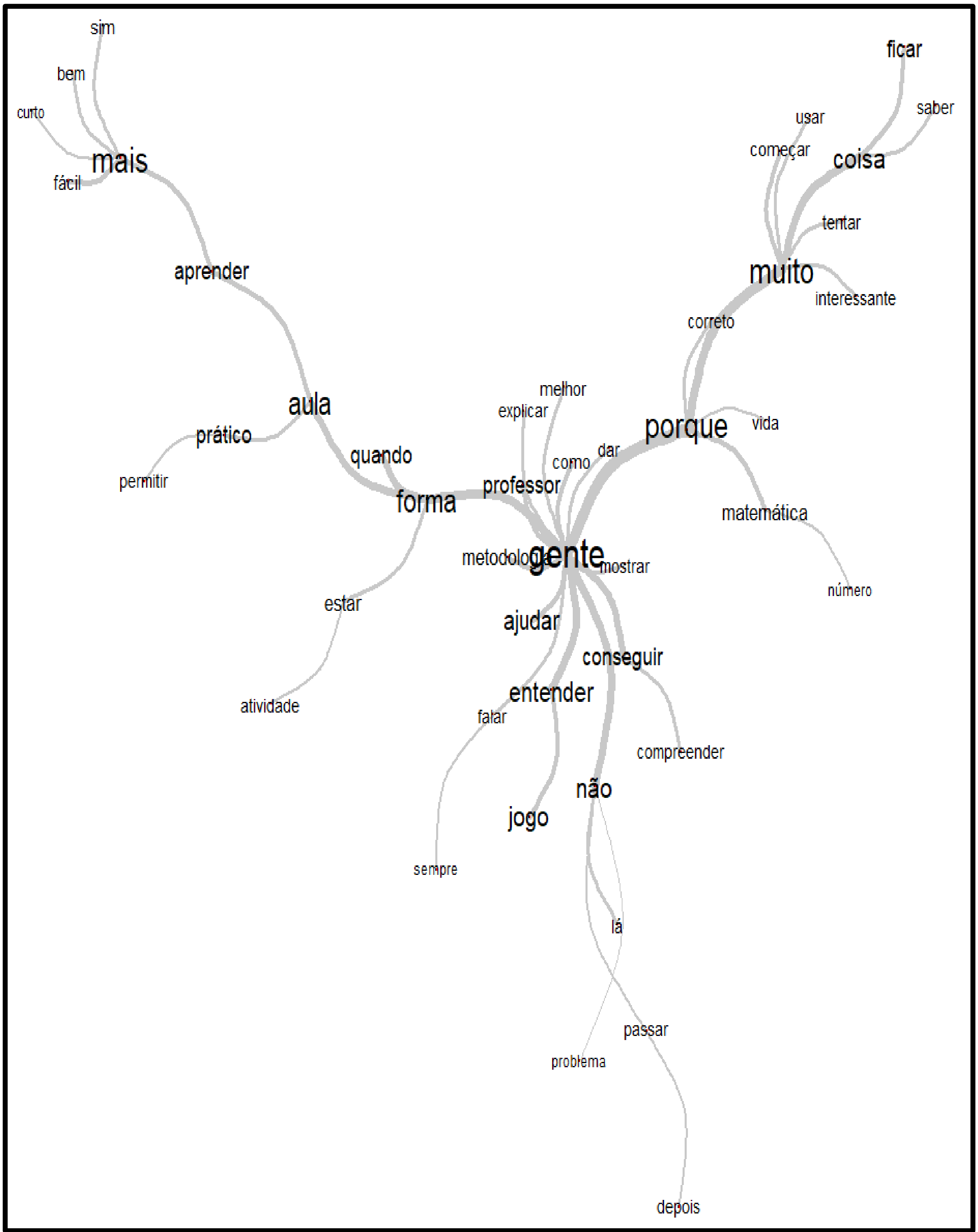
| formes | eff | formes | eff |
|---|---|---|---|
| muito | 17 | tentar | 5 |
| mais | 16 | começar | 5 |
| gente | 15 | matemática | 5 |
| aula | 12 | sempre | 5 |
| porque | 12 | sim | 4 |
| não | 10 | compreender | 4 |
| entender | 10 | como | 4 |
| coisa | 9 | melhor | 4 |
| jogo | 9 | problema | 3 |
| ajudar | 9 | depois | 3 |
| forma | 9 | explicar | 3 |
| prático | 8 | bem | 3 |
| fácil | 7 | número | 3 |
| quando | 7 | saber | 3 |
| conseguir | 7 | correto | 3 |
| estar | 7 | interessante | 3 |
| professor | 6 | vida | 3 |
| aprender | 6 | falar | 3 |
| ficar | 6 | usar | 3 |
| metodologia | 5 | lá | 3 |
| atividade | 5 | permitir | 3 |

Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)

NUVEM DE PALAVRAS


Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)

GRAFO DE SIMILITUDE




Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)

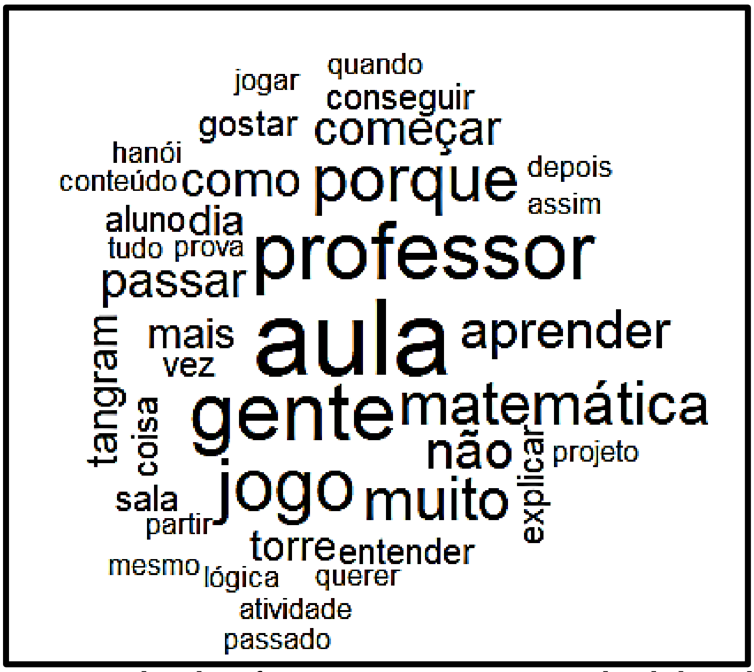
**ANEXO D:** TABELA DE FREQUÊNCIA, NUVEM DE PALAVRAS E SIMILITUDE (Categoria 3.6.3 – Na ação pelo contexto do participante: um relato das experiências vivenciadas durante a pesquisa e a expectativa em torno do ensino e aprendizagem matemática no Ensino Médio)

TABELA DE FREQUÊNCIA/COOCORRÊNCIAS

| formes | eff | formes | eff |
|---|---|---|---|
| aula | 15 | coisa | 4 |
| professor | 11 | aluno | 4 |
| gente | 11 | conseguir | 4 |
| jogo | 10 | entender | 4 |
| porque | 9 | gostar | 4 |
| matemática | 8 | vez | 4 |
| muito | 8 | passado | 3 |
| não | 7 | atividade | 3 |
| aprender | 7 | mesmo | 3 |
| começar | 6 | hanói | 3 |
| como | 6 | conteúdo | 3 |
| passar | 6 | quando | 3 |
| torre | 5 | depois | 3 |
| tangram | 5 | prova | 3 |
| dia | 5 | projeto | 3 |
| mais | 5 | jogar | 3 |
| sala | 4 | querer | 3 |
| explicar | 4 | lógica | 3 |
| coisa | 4 | partir | 3 |
| aluno | 4 | assim | 3 |
| conseguir | 4 | tudo | 3 |

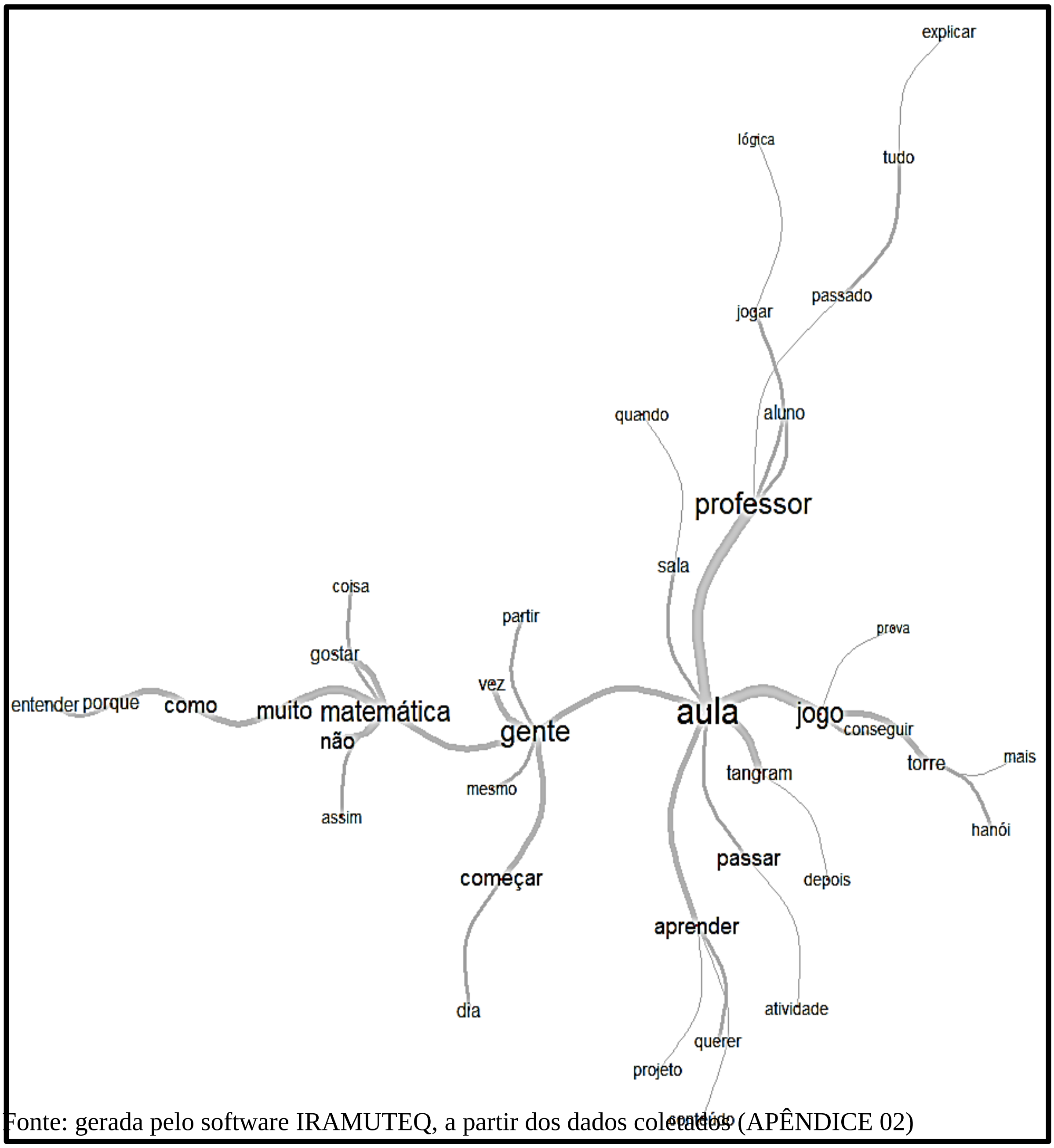
Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)

NUVEM DE PALAVRAS




Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)

GRAFO DE SIMILITUDE




Fonte: gerada pelo software IRAMUTEQ, a partir dos dados coletados (APÊNDICE 02)