UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Flávia Cristina Silva dos Santos Santana

A ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Recife - PE

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Flávia Cristina Silva dos Santos Santana

A ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Drª Elisângela Bastos de Melo Espíndola

Recife - PE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S232e Santana, Flávia Cristina Silva dos Santos
A elaboração e resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas por alunos do ensino médio / Flávia Cristina Silva dos Santos Santana. - 2024.
80 f. : il.

Orientadora: Elisangela Bastos de Melo Espindola.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2024.

1. Elaboração de problemas. 2. Resolução de problemas. 3. Ensino Médio. 4. Razões Trigonométricas. 5. Praxeologia Matemática. I. Espindola, Elisangela Bastos de Melo, orient. II. Título

CDD 510

FLÁVIA CRISTINA SILVA DOS SANTOS SANTANA

A ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 04/04/2024.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espíndola (Orientadora) - UFRPE

Prof. Dr. Anderson Douglas Pereira Rodrigues da Silva - UPE

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza - PROFMAT/UFRPE

AGRADECIMENTOS

Ao final de toda essa trajetória, iniciada em março/2021, venho agradecer primeiramente a Deus, que é minha força e alicerce. É a Ele que eu rendo todas as graças diariamente por tudo que tenho alcançado até hoje. Ao pensar muitas vezes em desistir, foi na intimidade com Ele que ergui minha cabeça e segui em frente.

Em toda minha trajetória de vida pude contar com o apoio e força dos meus pais, Everaldo e Fátima, que são um dos meus maiores tesouros aqui na terra. Meus Pais sempre acreditaram nas forças dos meus sonhos e nunca me deixaram desistir deles, mas sempre seguraram nas minhas mãos e me ajudaram a alcançá-los. Sou extremamente grata a Deus por tê-los em minha vida.

Ao meu Marido, Deyverson, que, desde que nos conhecemos, ainda muito jovens, tem sido meu alicerce e meu maior incentivador para alcançar meus objetivos. Divide diariamente comigo meus medos, minhas angústias e dificuldades, mas me mostra o quanto sou capaz de superar cada um deles. Muito obrigada por ser meu amor e me dar amor.

Ao iniciar o curso, meu filho, Otto, tinha apenas 3 anos. Então, em vários momentos, precisei me ausentar dele para dedicar-me ao curso e acabei precisando de sua compreensão, mesmo sem ele entender muita coisa, mas em todas as situações, com seu pequeno olhar, ele soube me acolher e me mostrar o quanto eu era importante para ele e que poderia seguir em frente. Tu és, meu filho, minha fonte de inspiração e energia para continuar a luta.

Enfim, obrigada a toda minha família, meu irmão querido, Everson, que sempre me apoiou em todos os momentos. Aos meus avós, tios e tias, primos e primas, que diariamente oram por mim, torcem para que eu consiga almejar meus objetivos e estão sempre disponíveis quando preciso.

Eu não poderia esquecer dos meus amigos conquistados no Profmat, a qual compartilhamos sempre nossas expectativas, nossos anseios, dificuldades e medos. Em especial aos amigos Brianne, Eduardo, Mayco e Fábio, que nesta reta final de-mo-nos às mãos e conseguimos enfrentar muitos desafios. Vocês foram essenciais para essa conquista.

À minha orientadora, Prof. Drª Elisângela Espíndola, por toda força e compreensão, por me dar o direcionamento em um caminho a qual me sentia muito

perdida sem saber por onde começar, mas me encorajou e me impulsionou a não desistir.

Enfim, à toda equipe do Profmat, professores e coordenadores, por me permitir crescer ainda mais como profissional, por transmitir-nos um pouco dos seus conhecimentos e por se fazerem sempre disponíveis para tirar todas as nossas dúvidas.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar a elaboração e resolução de problemas (ERP), a partir de imagens envolvendo razões trigonométricas, por alunos do 2º ano do Ensino Médio da rede pública. Tomamos como suporte teórico a noção de organização matemática, no sentido atribuído pela Teoria Antropológica do Didático. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública da rede estadual de Pernambuco, com 35 alunos de três turmas do 2º ano do Ensino Médio. Propomos a ERP a partir de duas imagens: Uma representando a decolagem de um avião que gerava com o solo um ângulo de 30° e uma distância percorrida de 5.000 m. E, outra, representando um homem medindo a altura de um prédio com um teodolito gerando um ângulo de 30° com o topo do prédio. Dentre os resultados, os alunos apresentaram maior dificuldade nas tarefas elaboradas por eles com a imagem referente ao prédio. Na resolução dos problemas elaborados, alguns não conseguiram aplicar as técnicas corretamente, por exemplo quanto ao uso da razão trigonométrica adequada e substituição das medidas. O que indica que a ERP pelos alunos revela aspectos interessantes sobre as dificuldades deles na compreensão de problemas matemáticos e carece ser melhor explorada nas escolas.

Palavras-chave: Elaboração de problemas; Resolução de problemas; Ensino Médio; Razões Trigonométricas; Praxeologia Matemática.

ABSTRACT

The aim of this research is to analyze the Problem Posing and Problem-Solving (ERP), based on images involving trigonometric ratios, by 2nd year public high school students. We took as theoretical support the notion of mathematical organization, in the sense attributed by the Anthropological Theory of the Didactic. The research was carried out in a public school in the state of Pernambuco, with 35 students from three 2nd year high school classes. We proposed the ERP based on two images: One representing the take-off of an airplane that generated an angle of 30° with the ground and a distance covered of 5,000 m. The other depicted a man measuring the height of a building with a theodolite, generating an angle of 30° with the top of the building. Among the results, the students had the most difficulty in the tasks they created with the image of the building. When solving the problems, some were unable to apply the techniques correctly, for example using the appropriate trigonometric ratio and substituting measurements. This indicates that students' ERP reveals interesting aspects of their difficulties in understanding mathematical problems and needs to be better explored in schools.

Keywords: Problem development; Problem solving; Secondary education; Trigonometric ratios; Mathematical Praxeology.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

ERP - Elaboração e Resolução de Problemas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

EM - Ensino Médio

EF - Ensino Fundamental

EP - Elaboração de Problemas

EMIP - Encontro de Matemática do IFPE *Campus* Pesqueira

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

TAD - Teoria Antropológica do Didático

LD - Livro Didático

PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático

SAEPE - Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há mais de 20 anos, a Elaboração e Resolução de Problemas (ERP) por alunos da educação básica tem sido proposta por pesquisadores nacionais. Isso se constata, por exemplo, nas considerações de Chica (2001):

> Dar oportunidade para que os alunos formulem problemas é uma forma de levá-los a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de uma dada situação; que relação há entre os dados apresentados, a pergunta a ser respondida e a resposta; como articular o texto, os dados e a operação a ser usada. Mais que isso, ao formularem problemas, os alunos sentem que têm controle sobre o fazer matemática e que podem participar desse fazer, desenvolvendo interesse e confiança diante de situações-problema (Chica, 2001, p.152).

A partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), especificamente, na área de Matemática e suas Tecnologias, a elaboração de problemas pelos alunos passou a ser associada à resolução de problemas como parte das atualizações curriculares das redes de ensino. Possamai e Allevato (2022) explicam que:

> A associação da elaboração/formulação de problemas com a resolução de problemas tem sido registrada nos documentos curriculares brasileiros, os quais contém orientações no sentido de que os problemas a serem resolvidos sejam criados não apenas pelos professores, mas, também, pelos estudantes (Possamai; Allevato, 2022, p.2).

Na BNCC, além da elaboração, chama-se a atenção também para a reelaboração de problemas. Como podemos verificar na orientação de que é necessário que os estudantes:

> Desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (Brasil, 2018, p. 295).

No que se refere ao Ensino Médio (EM), a BNCC orienta que se aproveite todo o potencial já adquirido pelos estudantes no Ensino Fundamental (EF), para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior:

> [...] isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e

> resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (Brasil, 2018, p. 528-529).

No EM, “Resolver e Elaborar Problemas” se situa na Competência 3, específica da área de Matemática e suas Tecnologias:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p.535).

Em consonância com a BNCC, no âmbito da rede estadual, o documento do Currículo do Ensino Médio de Pernambuco reforça a orientação para os alunos “resolverem e elaborarem” problemas. Como podemos verificar no Quadro 1, isto está presente em diversas habilidades do 1º ao 3º ano:

Quadro 1: Habilidades de Matemática no Currículo do Ensino Médio de Pernambuco

1º ano	
Habilidades específicas do componente	**Objeto de conhecimento**
(EM13MAT301PE17) Resolver e elaborar situações-problema do cotidiano, envolvendo a matemática e/ou outros domínios do conhecimento em torno das equações lineares simultâneas, por exemplo, sistemas de equações do 1o grau, utilizando técnicas algébricas (substituição, escalonamento etc.) e gráficas, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Equações lineares e Sistemas de equações do 1° grau.
(EM13MAT314PE30) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras, explorando a noção de grandezas como aceleração, densidade, energia elétrica, entre outras.	Grandezas: razão ou produto de outras grandezas
(EM13MAT316PE32) Resolver e elaborar situações-problema, em contextos diversos, que envolvam o cálculo e a interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão), com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Medidas de Tendência Central e de Dispersão .
2º ano	
(EM13MAT304PE20) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo funções exponenciais, interpretando a variação das grandezas envolvidas em diversos contextos como, por exemplo, no estudo da Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Funções Exponenciais: variação de grandezas
(EM13MAT305PE21) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo funções logarítmicas, interpretando a variação das grandezas em contextos diferentes como, por exemplo, o estudo da radioatividade, Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o	Funções Logarítmicas: variação de grandezas

uso de tecnologias digitais.	
(EM13MAT309PE25) Resolver e elaborar situações-problema de diferentes contextos, envolvendo o cálculo de áreas totais e volumes de sólidos geométricos (prismas, pirâmides e corpos redondos) como, por exemplo, o gasto de material para revestir uma superfície ou para preencher o interior de uma caixa, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Áreas e volumes de sólidos geométricos
(EM13MAT310PE26) Resolver e elaborar situações-problema de contagem, envolvendo agrupamentos que dependam da ordem dos elementos ou não (com ou sem repetição), por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, bem como da Análise Combinatória, utilizando estratégias diversas.	Agrupamentos de elementos que dependam da ordem ou não (com repetição ou não). Princípio multiplicativo e aditivo. Análise Combinatória: permutação, arranjo e combinação.
3º ano	
(EM13MAT306PE22) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo as funções seno e cosseno, comparando com contextos diversos de fenômenos cíclicos e periódicos como, por exemplo, o estudo de ondas sonoras, com e/ou sem uso de softwares de álgebra e geometria.	Funções seno e cosseno.
(EM13MAT312PE28) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam o cálculo de probabilidade (simples, da união, da interseção, condicional) de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	Probabilidade: cálculos simples, da união, da interseção, condicional.
(EM13MAT308PE24) Aplicar as relações métricas e as leis de seno e cosseno ou as noções de congruência e semelhança para resolver e elaborar situações-problema que envolvam triângulos em variados contextos, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Relações Métricas, Congruência e Semelhança de Triângulos. Leis do seno e cosseno.

Fonte: Pernambuco (2021).

Podemos perceber no Quadro 1 que as habilidades envolvendo resolver e elaborar problemas, aparecem em todos os anos do EM. Mas, convém destacar, que isto também ocorre no Ensino Fundamental (EF), sobretudo, em relação à unidade temática “Números”. E, isto começa a ser indicado já no 1º ano do Ensino Fundamental (Gama, 2023). Como podemos observar na Tabela 1.

Tabela 1: Quantitativo de vezes que o termo resolver e elaborar problemas é indicado nas habilidades da BNCC para o Ensino Fundamental

Unidades Temáticas	QUANTIDADE DE HABILIDADES COM INDICAÇÃO SOBRE RESOLVER E ELABORAR PROBLEMAS									Total
	ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL									
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	
Números	1	3	3	3	3	6	4	3	2	28
Grandezas e Medidas	0	0	1	1	1	1	2	3	1	10
Álgebra	0	0	0	0	1	1	2	4	2	10
Geometria	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Estatística e Probabilidade	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total										49

Fonte: Gama (2023, p. 33).

Na Tabela 1, pode-se perceber que ocorre uma ausência da habilidade de ERP na unidade temática Estatística e Probabilidade em todos os anos do Ensino Fundamental. Em relação à Geometria, a única habilidade envolvendo a ERP (Tabela 1), diz respeito à: (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Na presente pesquisa, ao escolhermos o tema Razões Trigonométricas consideramos que em Geometria também é possível os alunos desenvolverem habilidades de ERP, contrariamente à BNCC que indica estas habilidades, em maior parte, para outras unidades temáticas. Diante disso, reforçamos nosso interesse em desenvolver uma pesquisa com alunos do EM. Vale ressaltar que este é o campo de nossa atuação profissional docente na rede estadual de Pernambuco.

Ademais, no que diz respeito a área de Matemática e suas Tecnologias, na BNCC, levamos em conta que no EM, deve-se aproveitar todo o potencial já constituído pelos alunos no EF, para promover:

> Ações que ampliem o letramento matemático[1] iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos

[1] Na BNCC, o letramento matemático é definido como as competências e habilidades de "raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas" (Brasil, 2018, p. 262).

> mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes **formular e resolver problemas** em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (Brasil, 2018, p.528-529, grifo nosso).

Além disso, situamos a origem do interesse em investigar a ERP por alunos do EM em experiências de pesquisas realizadas no âmbito do PROFMAT da UFRPE que tivemos a oportunidade de desenvolver na disciplina de Avaliação Educacional em Matemática. Tendo em vista análises e discussões sobre critérios avaliativos de professores sobre os problemas elaborados pelos alunos e não mais apenas sobre os problemas resolvidos por eles (Sales; Santana; Espíndola, 2023; Santana; Sales; Espíndola, 2023). Vale ressaltar que no âmbito nacional do PROFMAT, identificamos apenas a dissertação de mestrado de Tavares (2023) sobre a ERP por alunos envolvendo logaritmos. De sorte que consideramos relevante nossa pesquisa diante de tal cenário de escassez de pesquisas sobre a ERP no PROFMAT.

Particularmente, identificamos diversas pesquisas sobre o tema Razões Trigonométricas, no âmbito da Educação Matemática, realizadas à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 2002) sobre: como este tema é proposto em Livros Didáticos (LD), como os professores o ensinam e como os alunos o aprendem (Espindola; Luberiaga; Trgalová, 2018; Oliveira, 2021; Ramalho, 2016). Diante disso, buscamos utilizar fundamentos dessa teoria em nosso trabalho, sobretudo em relação à noção de praxeologia matemática. Convém dizer que não encontramos pesquisas tratando sobre a elaboração de problemas, mas só apenas sobre a resolução de problemas com Razões Trigonométricas, usando a TAD.

O significado de Praxeologia, na TAD, diz respeito à junção das palavras: Prática (práxis) e saber (logos). Assim, uma praxeologia matemática é composto pelo bloco [T, τ] que é denominado de prático-técnico, ou bloco do saber-fazer; e o bloco [θ, Θ] que diz respeito ao bloco tecnológico-teórico ou bloco do saber matemático, no nosso caso, Razões Trigonométricas. Entendemos que a identificação do bloco do saber-fazer, demonstrado pelos alunos em relação à ERP sobre um dado saber matemático, abre-nos a possibilidade de melhor compreender os tipos de tarefas e técnicas utilizadas pelos alunos neste tipo de atividade. Assim, buscamos usar a noção de praxeologia matemática do aluno, como uma ferramenta teórica e metodológica para analisar os problemas elaborados e resolvidos por ele.

Posto isto, nesta pesquisa elencamos os seguintes objetivos:

- **Objetivo geral:** analisar a elaboração e resolução de problemas, a partir de imagens envolvendo razões trigonométricas, por alunos do 2º ano do Ensino Médio da rede pública, à luz da Teoria Antropológica do Didático.

  E, por **objetivos específicos:**

- Identificar os tipos de tarefas apresentadas pelos alunos na elaboração de problemas envolvendo seno, cosseno e tangente.
- Analisar as técnicas utilizadas na resolução dos problemas elaborados pelos alunos.

Em busca de atingir esses objetivos, os capítulos seguintes da pesquisa foram organizados em torno de responder a seguinte questão de pesquisa: De que forma alunos do 2º do ensino médio de uma escola pública elaboram e resolvem problemas a partir de imagens envolvendo possíveis cálculos com razões trigonométricas?

No segundo capítulo apresentamos algumas pesquisas sobre a ERP, definições sobre os termos proposição, formulação, reformulação, elaboração e reelaboração de problemas a fim de termos uma melhor compreensão sobre esses. Bem como, discussões sobre estratégias metodológicas para elaboração de problemas (termo utilizado na BNCC). Ademais, expomos algumas considerações e pesquisas sobre Razões Trigonométricas à luz da análise de praxeologias matemáticas desse tema no sentido atribuído pela Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 2002).

No terceiro capítulo, apresentamos o campo, os participantes e os procedimentos metodológicos que adotamos na pesquisa. No quarto capítulo analisamos e discutimos os problemas elaborados e resolvidos pelos alunos do 2º ano do EM sobre Razões Trigonométricas. No quinto capítulo, colocamos as considerações finais sobre os achados da pesquisa e perspectivas futuras de outras investigações.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Iniciamos este capítulo abordando especificamente, alguns exemplos de pesquisas sobre a elaboração articulada com a resolução de problemas desenvolvidas no âmbito nacional e local do PROFMAT.

No âmbito nacional do PROFMAT, Tavares (2023), buscou investigar em sua dissertação de mestrado como as estratégias de elaboração e de redefinição de problemas envolvendo logaritmos podem contribuir para o desenvolvimento da criatividade em matemática dos alunos da 2ª série do EM de escolas do Distrito Federal. A primeira etapa da pesquisa consistiu na elaboração de um problema cuja resolução envolve o uso de logaritmos, enquanto a segunda etapa constituiu-se da redefinição de atributos matemáticos por meio da identificação de elementos e propriedades comuns a dois logaritmos dados.

Tavares (2023) destaca nos resultados de sua pesquisa que o fato de os alunos, em sua maioria, nunca terem realizado atividade semelhante, seja de elaboração ou redefinição de elementos do problema, reforça a necessidade de implementação dessas práticas pedagógicas que estimulam a autonomia e criatividade em Matemática de forma mais usual, ou seja, defende-se que essas ferramentas devem ser incluídas no cotidiano das atividades escolares.

No âmbito de pesquisas sobre a ERP desenvolvidas no PROFMAT - UFRPE no artigo de Sales, Santana e Espíndola (2023), buscou-se contrastar as dificuldades apresentadas pelos alunos na ERP, por alunos do EM sobre Razões Trigonométricas por meio de uma imagem e por alunos do EF sobre Proporção Simples por meio de um início de texto dado para os alunos proporem uma pergunta e respondê-la.

Sobre a ERP a partir de uma imagem, Sales, Santana e Espíndola (2023), ponderam que diversas interpretações são possíveis e por consequência, a formulação de diversos tipos de problemas. No caso da ERP a partir de "um início dado, o aluno continuar o problema", ele tem que perceber que nem todos os dados estão disponíveis na parte inicial do texto. Assim, ele precisa colocar e relacionar os dados oferecidos com os criados e finalizar o problema com uma pergunta (Chica, 2001). Em ambos os casos, constatou-se na pesquisa que a maioria dos alunos não conseguiu elaborar um problema e outros que conseguiram, não o resolveram corretamente.

Em outro trabalho, Sales, Espíndola e Santana (2023), buscou-se analisar a ERP sobre proporção por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental (EF). Foi apresentado a 20 estudantes do 9º ano o início de uma situação de proporção inversa, envolvendo quantidade de impressoras e tempo de impressão, a fim de que eles apresentassem uma pergunta e respondessem o problema elaborado por eles. Na Tabela 2, temos os resultados desta pesquisa:

Tabela 2: Panorama da elaboração e resolução dos problemas pelos estudantes

Estudantes	Tipo de ERP	Quantidade
ADN, ABS, KEG, KGP, KMM, LCM, LHM, PHS, RAS	Elaborou o problema de forma incorreta	9
EPC, JA, LMV, LSC, MMS, RRF, RLP, PSR	Elaborou o problema de forma correta e resolveu com erro	8
MBS	Elaborou o problema de forma correta e resolveu com acerto	1
VMS	Elaborou o problema sem usar as ideias apresentadas e resolveu com acerto	1
VKL	Não elaborou o problema	1
TOTAL		20

Fonte: Sales, Espíndola e Santana (2023, p. 5).

Sobre os resultados apresentados na Tabela 2, Sales, Espíndola e Santana (2023), discutem que os alunos que elaboraram os problemas de forma incorreta apresentaram a dificuldade de não conseguirem formular uma pergunta condizente com o texto inicial: "*Para a confecção das provas de um concurso, uma gráfica dispunha de 15 impressoras, que demorariam 18 horas para imprimir todas as provas*". Isto reflete o quanto os alunos não estão habituados com este tipo de atividade e sentem dificuldade em compreender o que constitui o enunciado de um problema. Porém, mesmo quando aos alunos é apresentada uma pergunta para que eles elaborem um problema para esta, eles apresentam dificuldades, como demonstra a pesquisa de Gama (2023).

Ao propor aos alunos "*Crie um problema para a pergunta: Quantos copos de suco a jacubeira*[2] *moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?* ", Gama (2023, p. 145) constatou que dentre as dificuldades na formulação e resolução a partir de

[2] Recipiente onde é colocado o suco em uma escola de formação de marinheiros.

uma pergunta, o caso mais frequente foi aquele em que os alunos apresentaram perguntas diferentes em relação à atividade proposta”.

Nas referidas pesquisas, aponta-se a importância de melhor entendimento, por parte de professores e estudantes, sobre a elaboração de problemas. Diante disso, buscamos neste capítulo (no subtópico 2.1) termos uma visão mais ampla sobre isto, antes de discorrermos sobre algumas estratégias metodológicas para a ERP e refinarmos nossas considerações sobre o tema Razões Trigonométricas e praxeologias matemáticas deste.

2.1 PROPOSIÇÃO, (RE) FORMULAÇÃO, (RE) ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS

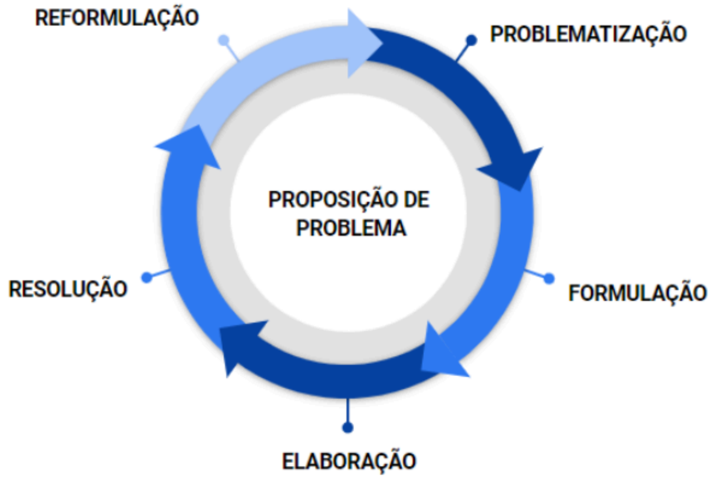
De acordo com Tortola et al. (2023, p. 417) “pesquisas recentes têm apresentado resultados significativos no que compete à construção de conhecimentos dos alunos com relação à proposição de problemas”.

Allevato e Possamai (2022) definem a “proposição de problemas” como:

> [...] todo o conjunto de ideias que constitui os processos envolvendo a criação de problemas, que inicia com a organização e construção das primeiras ideias matemáticas e da estrutura de constituição do problema – formulação; e avança para a sua expressão, na qual se estabelece o enunciado, associando as linguagens materna e matemática – elaboração. Então, a proposição segue para a apresentação do problema criado a um potencial resolvedor. (Allevato; Possamai, 2022, p. 156).

Teixeira e Moreira (2022) apresentam a proposição de problemas (Figura 1) no centro das estratégias didáticas de ensino referentes à formulação, reformulação, elaboração, resolução de problemas e problematização.

Figura 1: Metodologia de Ensino-Aprendizagem da Matemática por meio da Proposição de Problemas



Fonte: Teixeira e Moreira (2022, p.8).

Segundo Teixeira e Moreira (2022) a formulação de problemas diverge da elaboração de problemas, da seguinte forma:

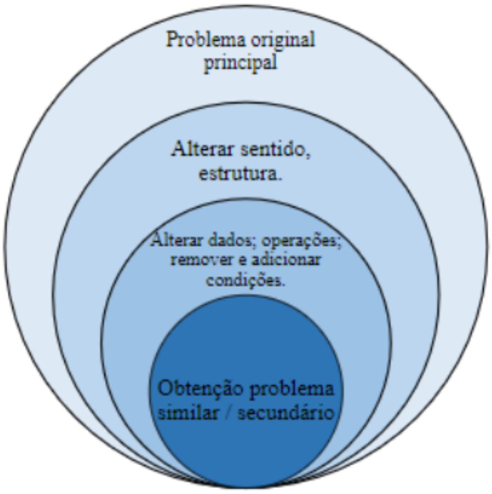
> A formulação de problema é orientada por um objetivo de aprendizagem associado a um objeto de conhecimento, pode ser proposta a partir de um estímulo, isto é, um disparador temático e/ou por meio de material concreto, manipulável ou de um organizador prévio (Teixeira; Moreira, 2022, p. 8-9).

> A elaboração de problemas é uma estratégia que possibilita a reescrita de um problema de outra maneira, mas conservando suas principais características. O problema pode ser formulado ou adaptado pelo professor, ser do livro didático ou formulado pelos pares (Teixeira; Moreira, 2022, p.11).

De acordo com Carneiro (2015, p. 189), "formular problemas possibilita que os alunos atentem para outras questões que não apenas a resolução, como, por exemplo, organização do seu pensamento para elaborar o enunciado e para apresentar os dados e a pergunta". Além disso, "quando o aluno cria seus próprios textos de problemas, ele precisa organizar tudo que sabe e elaborar o texto, dando-lhe sentido e estrutura adequados para que possa comunicar o que pretende" (Chica, 2001, p. 151).

Conforme Teixeira e Moreira (2023, p.12), "a prescrição de modificação/alteração, a ser realizada no problema, possibilita construir uma variedade de tarefas que contemplem reformulações de variados graus de demanda cognitiva, em conformidade com o objetivo de aprendizagem". Estes autores apresentam a reformulação de problemas a partir de quatro etapas, como podemos observar na figura a seguir:

Figura 2: Estratégia de reformulação de problemas



Fonte: Teixeira e Moreira (2022, p. 10).

Na Figura 2, é indicado por Teixeira e Moreira (2022) que a reformulação de problemas pode ser iniciada com um problema denominado de problema principal/original (formulado ou adaptado pelo professor, do livro didático ou formulado pelos pares). A reformulação de problemas consiste em:

> Propor modificações/alterações que podem ser estruturais e/ou conceituais. A alteração pode ser nos dados e nas informações, nas operações, pode haver remoção e/ou adição de condições, isto é, trabalha-se no processo de produção de um problema com base num modelo, obtendo um problema secundário, que pode ser similar ou diferente do principal (Teixeira; Moreira, 2022, p.10).

Sobre a problematização (Figura 1), ela ocorre “por meio do diálogo, da discussão, do questionamento, da interação entre estudantes e professor, da escuta atenta e da intervenção crítica” (Teixeira; Moreira, 2022, p.12). No que diz respeito à resolução de problemas, esses autores compreendem esta como “o processo, diferenciando-se da solução, o produto/resultado” (idem, p. 13).

Figueiredo e Groenwald (2023) explicam a opção por utilizar a expressão (re) formulação para referir-se ao processo de reformular o enunciado do(s) problema(s) e/ou de formular outros problemas, subsidiários, a partir da/de uma/um tarefa/problema(s) proposta(os), de modo que a resolução contribua para a solução. Atribui-se essa expressão a sua utilização na Língua Inglesa como *problem posing*.

Diante de todos os termos acima apresentados, na presente pesquisa, utilizamos Elaboração de Problemas (EP) como indicado na BNCC, por compreendermos que este se aproxima mais com o contexto escolar e as demandas curriculares da rede estadual de Pernambuco, como vimos no Quadro 1 (no Capítulo 1). Contudo, consideramos que a BNCC não explicita como podemos desenvolver atividades de ERP com os alunos. Sobre isto, recorremos a pesquisas que discutem diversas propostas e estratégias para isto.

2.2 PROPOSTAS E ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS PARA FORMULAÇÃO, REFORMULAÇÃO, ELABORAÇÃO E REELABORAÇÃO DE PROBLEMAS

Stoyanova e Ellerton (1996) sugerem as seguintes propostas de (re)formulação de problemas: de forma livre, que o aluno escolhe a situação que servirá de base para essa atividade; a partir de um problema semiestruturado, do tipo aberto, que o aluno explora ou conclui, a partir de imagens ou equações; e a partir de um problema ou de uma situação-problema estruturada, que o aluno apresenta um novo enunciado ou algo novo. Entende-se que a (re)formulação de problemas é um processo que pode favorecer a construção de interpretações pessoais acerca de situações concretas no processo de resolução. Ademais, esse processo pode proporcionar experiências mais significativas no ensino da Matemática, visto que os alunos têm a oportunidade de criar as suas próprias versões para os problemas, explicitar os principais passos executados e melhorar a escrita das soluções.

Figueiredo e Groenwald (2023, p. 105) discutem a (re)formulação e resolução de problemas com o uso de Tecnologias Digitais, o que elas denominam de d*esign de problemas*, considerando-o como: “uma atividade, que consiste na elaboração de enunciados de problemas, em que recursos tecnológicos são utilizados, para que esses problemas sejam propostos e resolvidos com o uso desses recursos”. Sendo assim, ao utilizarem a (re) formulação de problemas com base na ideia de d*esign de problemas,* utilizaram o tema “Orçamento Familiar”, considerando tanto os conteúdos matemáticos que poderiam ser trabalhados como as Tecnologias Digitais a serem utilizadas na produção dos problemas. Identifica-se neste trabalho, por exemplo, para Educação Financeira Escolar (Valores Monetários, Porcentagem, Juros Simples e Compostos, Taxas, entre outros) a produção de uma história em quadrinhos, em um book online, usando Toondoo (http://www.toondoo.com) e storyboard (https://www.storyboardthat.com/pt/).

Teixeira e Moreira (2022) discutem que o professor pode lançar mão de estratégias didáticas (reformulação, formulação, elaboração e resolução) juntas, combinadas ou separadas e dos diferentes recursos didáticos, como apresentamos no Quadro 2, abaixo.

Quadro 2: Trabalho pedagógico a partir da Metodologia de Ensino-Aprendizagem da Matemática por meio da Proposição de Problemas

	Etapas sequência didática	Estratégia didática	Recurso didático / organizador prévio
Objetivo de aprendizagem ↳ Objeto do conhecimento ↓	***Introdução*** (apresentar) ***Aprofundamento*** (desenvolver) ***Consolidação*** (sistematizar, incorporar)	***Reformulação*** A partir de problema qualquer; Adequar parte do texto para encaixar no enunciado; Problema sem solução para que passe a ter solução; A partir de partes texto fora de ordem ***Formulação*** A partir de partes texto fora de ordem; A partir de texto base; A partir do enunciado; A partir de resultado; A partir de uma operação; A partir de uma temática; A partir tirinha com/sem balões; A partir de uma história; A partir de um gráfico ***Elaboração*** Reescrever um enunciado e/ou um texto-base, sem alterar a solução do problema; Sintetizar, reescrever o mesmo problema, utilizando raciocínio proporcional; Reescrever o problema utilizando conceitos estipulados; Reescrever o problema reorganizando as frases, proposições, ideias; ***Resolução*** Problema dos pares; Problema aberto; Problema fechado; Resolver a partir de alguma condição; Resolver a partir de um esquema; Resolver problema sem solução	***Disparador temático*** Imagem; panfleto; história; filme; frase; texto; jornal; parte de um problema; música ***Material concreto*** Material dourado; tangram; ábaco; sólidos geométricos, geoplano; jogos de tabuleiro ***Material concreto manipulável*** Material reciclável (tampas, caixa de ovo, material pet, canudo); elástico; barbante; papéis diversos; objetos diversos passíveis de manipulação ***Material lúdico/jogo*** Lego; jogo de cartas; de tabuleiro; teatro de fantoche; minigincana; quebra-cabeça; jogo da velha; pega-varetas

Fonte: Teixeira e Moreira (2022, p. 15).

Sobre os recursos apresentados no Quadro 1, Teixeira e Moreira (2022, p. 1) explicam que a escolha destes vai depender de: “além do objetivo de aprendizagem, do objeto do conhecimento a ser trabalhado, da etapa da sequência didática, e do “lugar” no qual se encontra o estudante em relação ao uso de problemas”. Teixeira e Moreira (2022) afirmam que na formulação de problemas se intenta:

> Gerar a produção de uma estrutura textual(escrita-língua materna; linguagem matemática; pictórico; esquema), isto é, alguma forma de texto-base e enunciado não necessariamente escrito (que possa auxiliar a compreensão), que envolva objetos de conhecimento matemático (conteúdos, conceitos,processos), que comunique ideias, estabeleça relações e significados matemáticos com clareza, que não necessariamente sejam sistematizados. (Teixeira; Moreira, 2022, p. 9).

Teixeira e Moreira (2023) apresentada três sugestões de tarefas de reformulação de problemas estruturadas a partir de: (i) modificações/alterações em qualquer parte do problema; (ii) modificações/alterações em um ou mais dados/informações, de modo a preservar a solução do problema original; (iii) reorganização/estruturação de um problema decomposto em palavras ou frases.

De acordo com Chica (2001, p. 168), pode-se propor a ERP a **partir de uma sentença matemática**, de duas formas: “dando apenas o nome da operação ou a própria operação em si, com os números estabelecidos, que não precisa ser necessariamente uma só, mas várias ou até mesmo uma expressão numérica.”

Na presente pesquisa, propomos a ERP por meio de imagens que envolvam possíveis cálculos com razões trigonométricas. No tocante a isso, de acordo com Chica (2001, p. 155-156), neste tipo de atividade “o ideal é que a figura seja de natureza abrangente, interessante, de modo a propiciar a aparição de diversas ideias”. A fim de termos uma melhor visão sobre as características dos problemas elaborados e resolvidos pelos alunos, apresentamos no tópico 2.3, a seguir, mais detalhes sobre o conteúdo matemático em tela e aspectos sobre o ensino e aprendizagem deste.

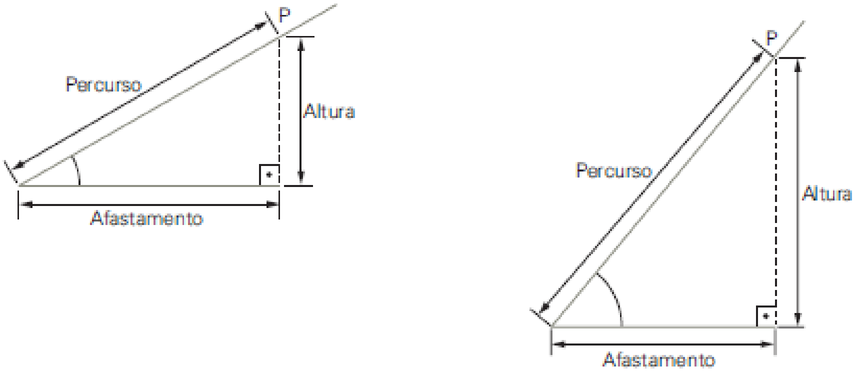
2.3 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS E PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA

2.3.1 As Razões Trigonométricas

Desde o princípio dos tempos, o homem tem a necessidade de medir. E medir envolve uma relação entre grandezas. Então, como poderíamos medir algo com uma dimensão inacessível? “É atribuída a Hiparco a construção da primeira tábua trigonométrica no século II a.C. Mais tarde, por volta do ano 100 d.C., Ptolomeu escreveu treze livros sobre Trigonometria tomando como base o trabalho de Hiparco" (Dante, 2014, p. 4).

As situações do dia a dia, que envolvem lados e ângulos, são facilmente resolvidas com o uso da Trigonometria. Sendo assim, para calcularmos a medida de determinado percurso gerado por uma subida até sua chegada a um ponto P, podemos observar que isso gerará um afastamento e uma altura.

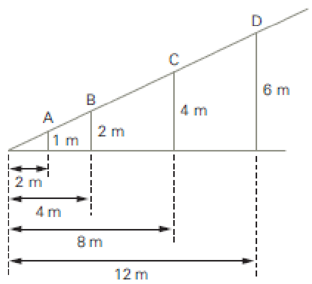
Figura 3: Índice de Subida



Fonte: Dante (2015, p. 5).

Diante das figuras, conseguimos perceber que esses índices dependem do ângulo de subida. Portanto, ao fixarmos a medida do ângulo de subida, podemos perceber que a razão entre o afastamento e a altura mantém-se a mesma independente do ponto P de parada, como vemos no exemplo abaixo.

Quadro 3: Razões entre altura e afastamento



Ponto	Afastamento	Altura
A	2 m	1 m
B	4 m	2 m
C	8 m	4 m
D	12 m	6 m

×2 ×4 ×6

ponto A: $\frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} = \frac{1\text{ m}}{2\text{ m}} = \frac{1}{2}$

ponto B: $\frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} = \frac{2\text{ m}}{4\text{ m}} = \frac{1}{2}$

ponto C: $\frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} = \frac{4\text{ m}}{8\text{ m}} = \frac{1}{2}$

ponto D: $\frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} = \frac{6\text{ m}}{12\text{ m}} = \frac{1}{2}$

Fonte: Dante (2015, p. 5-6).

A partir da ideia da medida do ângulo de subida, associaremos a noção da razão trigonométrica Tangente. Ou seja, a Tangente (tg) do ângulo de subida é igual ao índice de subida associado a ele. Sendo assim, dado um ângulo a:

$$\text{tg } a = \frac{altura}{afastamento}$$

Além da Tangente, existem outras razões que nos permitem calcular o percurso de uma subida. Ou seja, podemos determinar uma razão entre a altura e o percurso ou entre o afastamento e o percurso.

Portanto, dado um ângulo a, chamaremos de Seno (sen) a razão entre a altura e o percurso.

$$\text{sen } a = \frac{altura}{percurso}$$

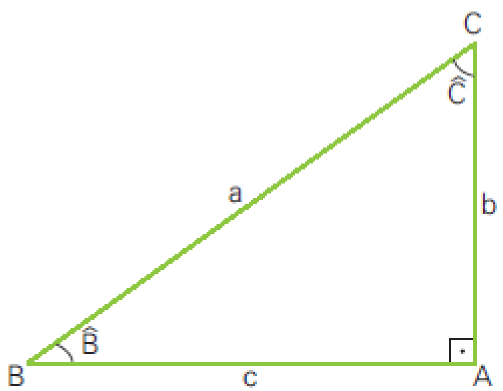
Já a razão entre o afastamento e o percurso daremos o nome de Cosseno (cos). Dado um ângulo a, temos que

$$\cos a = \frac{afastamento}{percurso}$$

A medida do valor da Tangente, do Seno e do Cosseno de um ângulo a nos indica o quanto uma subida é íngreme.

Também podemos definir Seno, Cosseno e Tangente por meio da semelhança de triângulos. Tomemos o triângulo ABC retângulo em A, temos que:

Figura 4: Triângulo retângulo



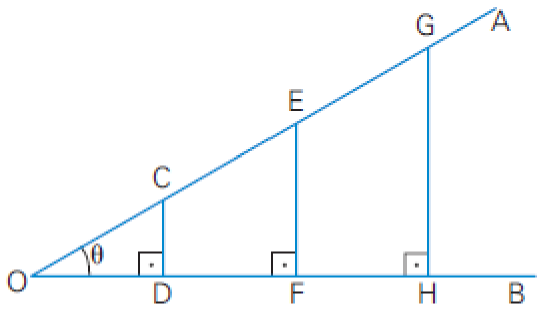
Fonte: Dante, (2015, p. 8).

- **a** é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- **b** e **c** são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são ângulos agudos (< 90º);

- $\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo $\widehat{B}$;
- $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\widehat{B}$;
- $\overline{AB}$ é o cateto oposto ao ângulo $\widehat{C}$;
- $\overline{AC}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\widehat{C}$;

Agora, consideremos o ângulo θ, tal que $\theta = A\widehat{O}B$ e $0 < \theta < 90°$, e a partir dos pontos C, E, G, etc. da semirreta OA, tracemos as perpendiculares CD, EF, GH, etc. à semirreta OB.

Figura 5: Construção dos segmentos perpendiculares



Fonte: Dante (2015, p. 9).

Os triângulos OCD, OEF, OGH, etc. são semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos internos. Portanto, temos que:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \ldots$$

Sendo assim, podemos perceber que essa relação depende apenas do ângulo θ e não do tamanho do triângulo retângulo a qual θ seja um de seus ângulos agudos. Essa razão é chamada se Seno de θ, e podemos escrevê-la:

$$\text{sen } \theta = \frac{CD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}, \ (0 < \theta < 90°)$$

Analogamente, a partir da semelhança de triângulos, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \ldots$$

$$\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \ldots$$

que podemos perceber que dependem apenas do ângulo θ. Sendo assim, definiremos, respectivamente, como Cosseno do ângulo θ e Tangente do ângulo θ. Ou seja,

$$\cos \theta = \frac{OD}{OC} = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa},\ (0 < \theta < 90°)$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{CD}{OD} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta},\ (0 < \theta < 90°)$$

As razões sen $\theta = \frac{CD}{OC}$, cos $\theta = \frac{OD}{OC}$ e tg $\theta = \frac{CD}{OD}$ são chamadas Razões Trigonométricas em relação ao ângulo θ. E toda Trigonometria tem como base a semelhança de triângulos.

2.3.2 A noção de praxeologia matemática

A noção de praxeologia matemática ou organização matemática, que adotamos neste trabalho, situa-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard e seus colaboradores. Esta teoria trata o saber matemático relacionado às atividades humanas e práticas institucionais.

> Um determinado saber matemático é considerado um objeto se o consideramos como fruto de uma ação humana. Dessa maneira, a relação institucional (RI) associada a um objeto (O) do saber pode ser compreendida por um conjunto de tarefas que devem ser executadas por técnicas que são determinadas pelos sujeitos que pertencem à instituição I. Por exemplo, se a instituição for os livros didáticos, os sujeitos os professores e, o objeto for o ensino de trigonometria, a RI (O) pode ser definida pelo conjunto de tarefas associadas ao ensino de trigonometria, as quais são executáveis por meio de técnicas determinadas pelos sujeitos (professores) das relações institucionais (Ramalho, 2016, p. 29).

Na TAD, a organização praxeológica ou praxeologia é o que permite "compreender, descrever, analisar e modelar as atividades humanas" (Ramalho, 2016, p. 28). Como vimos no Capítulo 1, o significado de Praxeologia diz respeito à junção das palavras: Prática (práxis) e saber (logos).

O modelo praxeológico, proposto na TAD, para descrever qualquer atividade, matemática é composto por:

- tipo de tarefas (T);
- técnicas (τ) que resolvem as tarefas desse tipo;
- tecnologia (θ) que justificam a técnicas e garantem sua validade, e, finalmente,
- a teoria (Θ) que justifica a tecnologia.

O quarteto praxeológico [T, τ, θ, Θ] é assim composto pelo bloco [T, τ] denominado de prático-técnico, ou bloco do saber-fazer; e o bloco [θ, Θ] que diz respeito ao bloco tecnológico-teórico ou bloco do saber.

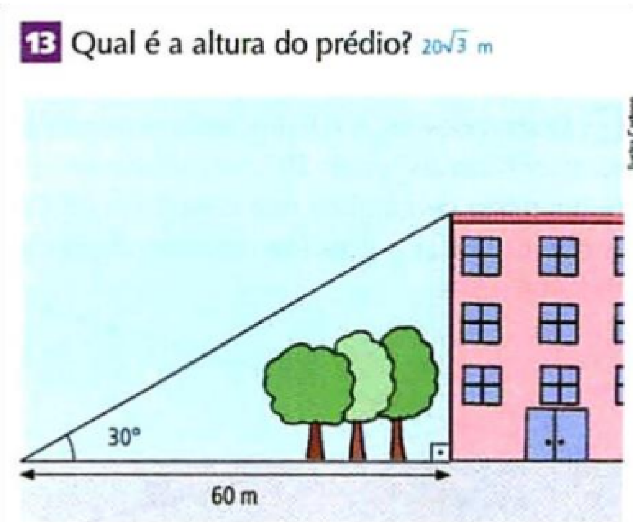
Para melhor compreensão da aplicação da TAD, algumas pesquisas que tratam especificamente sobre a análise de praxeologias matemáticas acerca do tema Razões Trigonométricas são apresentadas, no tópico 2.3.3, abaixo.

2.3.3 Praxeologias matemáticas identificadas em pesquisas sobre Razões Trigonométricas

Na dissertação de Ramalho (2016), tomou-se por objetivo caracterizar a proposta de ensino de trigonometria em livros do 9º ano do EF aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2014. Baseando-se na TAD, ela buscou analisar os tipos de tarefas mais frequentes nos LD.

Na TAD, destaca-se que para se responder um tipo de tarefa (T) supõe-se ao menos uma maneira particular de resolvê-la; essa maneira de fazer ou realizar a tarefa é designada por técnica (τ). Na Figura 6, exemplificamos a análise de uma tarefa e a técnica para respondê-la, apresentada no LD do 9º ano analisado por Ramalho (2016).

Figura 6: Calcular a altura de um prédio



$$tg\ 30° = \frac{x}{60} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

Fonte: Praticando Matemática –Matemática - 9° ano, 2012, p. 215 apud Ramalho (2016, p. 31-32).

Na Figura 6, podemos dizer que a tarefa proposta foi calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 30º dada a medida do cateto adjacente. A técnica utilizada foi substituir o valor da tangente de 30º e a medida do cateto adjacente a esse ângulo na razão que define tangente e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto.

Espíndola, Luberiaga e Trgalová (2018) analisaram as aulas de uma professora sobre o bloco prático-técnico, ou seja, as tarefas (T) e técnicas (τ) que ela propôs para o estudo de Razões Trigonométricas em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, em uma escola pública. Este tipo de análise leva em conta, o que se identifica por praxeologia do professor, pois ele é que determina quais os tipos de tarefa em cena no processo de 'aquisição' dos saberes escolhidos, com os demais componentes praxeológicos (técnica, tecnologia e teoria). Neste trabalho, o ensino do tema Razões Trigonométricas, pela professora, conteve cinco tipos de tarefas T do gênero "calcular" (Quadro 4). Essas tarefas estão subdivididas em subtipos de tarefas, como mostramos no Quadro 4, abaixo.

Quadro 4: Tipos de tarefas sobre Razões trigonométricas

T_1. Calcular o seno de um ângulo do triângulo retângulo.
T_2. Calcular o cosseno de um ângulo do triângulo retângulo.
T_3. Calcular a tangente de um ângulo do triângulo retângulo.
T_4. Calcular a medida de um lado do triângulo retângulo.
$T_{4.1}$. Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e do cateto oposto.
$T_{4.2}$. Calcular a medida da hipotenusa conhecendo a medida de um ângulo e do cateto adjacente.
$T_{4.3}$. Calcular a medida do cateto oposto conhecendo a medida de um ângulo e do cateto adjacente.
$T_{4.4}$. Calcular a medida do cateto oposto conhecendo a medida de um ângulo e da hipotenusa.
$T_{4.5}$. Calcular a medida do cateto adjacente conhecendo a medida de um ângulo e do cateto oposto.
$T_{4.6}$. Calcular a medida do cateto adjacente conhecendo a medida de um ângulo e da hipotenusa.
T_5. Calcular a medida de um ângulo do triângulo retângulo.
$T_{5.1}$. Calcular a medida de um ângulo conhecendo a medida da hipotenusa e do cateto oposto.
$T_{5.2}$. Calcular a medida de um ângulo conhecendo a medida da hipotenusa e do cateto adjacente.

$T_{5.3}$. Calcular a medida de um ângulo conhecendo a medida do cateto oposto e do cateto adjacente.

Fonte: Espíndola, Luberiaga e Trgalová (2018).

Na pesquisa de Espíndola, Luberiaga e Trgalová (2018) as tarefas identificadas na praxeologia da professora foram trabalhadas a partir de quinze tipos de técnicas, como podemos ver no Quadro 5, abaixo.

Quadro 5: Tipos de técnicas associadas às tarefas do Quadro 4

τ_1. Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.
τ_2. Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.
τ_3. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo.
τ_4. Aplicar t1. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
τ_5. Aplicar t2. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
τ_6. Aplicar t3. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
τ_7. Fazer um desenho que represente o problema, depois t4.
τ_8. Fazer um desenho que represente o problema, depois t5.
τ_9. Fazer um desenho que represente o problema, depois t6.
τ_{10}. Aplicar t4 e depois consultar na tabela trigonométrica um valor aproximado em graus do ângulo concernente.
τ_{11}. Aplicar t5 e depois identificar na tabela trigonométrica um valor em graus aproximado do ângulo concernente.
τ_{12}. Aplicar t6 e depois identificar na tabela trigonométrica um valor em graus aproximado do ângulo concernente.
τ_{13}. Aplicar t1 e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus do ângulo notável concernente.
τ_{14}. Aplicar t2 e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus do ângulo notável concernente.

τ_{15}. Aplicar t3 e depois identificar na tabela trigonométrica o valor em graus do ângulo notável concernente.

Fonte: Espíndola, Luberiaga e Trgalová (2018).

Os dados do Quadro 4 e do Quadro 5, fornecem uma visão de como foi executado o ensino de Razões Trigonométricas, especificamente, por uma professora de uma dada instituição (escola pública). Como este saber é executado por outros professores? Que condições e restrições entram em jogo no ensino deste tema que determinam práticas diferentes de professores? Tais questões são assim plausíveis de serem estudadas pela TAD.

Na dissertação de Oliveira (2021), tomou-se como objetivo analisar as relações entre a praxeologia matemática presente em uma coleção Livro Didático (LD) e as técnicas utilizadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio, quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Na Figura 4 apresentamos como Oliveira (2021) analisou a praxeologia matemática de um problema proposto no Livro Didático (Dante, 2016, p. 257). O referido problema foi identificado pela autora pela tarefa do tipo **TS: Calcular o valor do seno de um ângulo**. Na Figura 5, temos a resposta apresentada pelo autor do LD.

Figura 7: Exemplo de tarefa do tipo TS no LD

7. Uma rampa lisa de 10 metros de comprimento faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se quantos metros verticalmente?

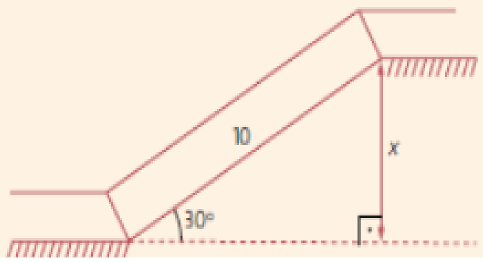


Figura 8: Resolução da tarefa do tipo T_S no LD

Resolução:

Pelo desenho, temos:

$$\begin{cases} 10 \rightarrow \text{medida da hipotenusa} \\ x \rightarrow \text{medida do cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ \end{cases}$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

Logo, a pessoa eleva-se 5 metros verticalmente.

Fonte: Dante (2016, p. 257).

Com base no tipo de Tarefa “Calcular o valor do seno de um ângulo” e na técnica apresentada pelo autor do LD, Oliveira (2021) apresenta a seguinte análise da organização matemática [T, τ, θ, Θ].

Quadro 6: Análise praxeológica relativa ao tipo de tarefa T_S

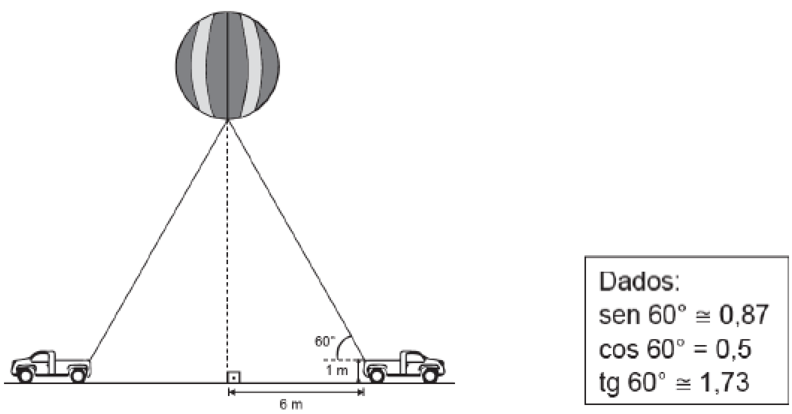
Tipo de tarefa (T_S)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor do seno de um ângulo	Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e hipotenusa). Depois, identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo.Identificar a razão trigonométrica seno, e substituir os valores na razão trigonométrica correspondente. Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida desejada.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Oliveira (2021, p. 80).

Na pesquisa de Oliveira (2021), ela propôs aos estudantes do 3º ano que respondessem problemas propostos em provas do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), buscando analisar as técnicas **(τ)** empregadas pelos alunos nas tarefas (T). Neste caso, busca-se identificar elementos que indiquem as técnicas utilizadas pelos alunos diante das tarefas que lhes são propostas. Por exemplo, apresentamos a Figura 6, abaixo, que se trata de uma tarefa identificada por Oliveira (2021) como **T_T - Calcular o valor da tangente de um ângulo.**

Figura 9: Exemplo de questão do SAEPE - questão do teste do tipo T_T

4) (SAEPE - 2018) Em um balão de propaganda cheio com gás hélio, foram fixadas duas cordas que estavam amarradas em veículos distintos, conforme representado no desenho abaixo.

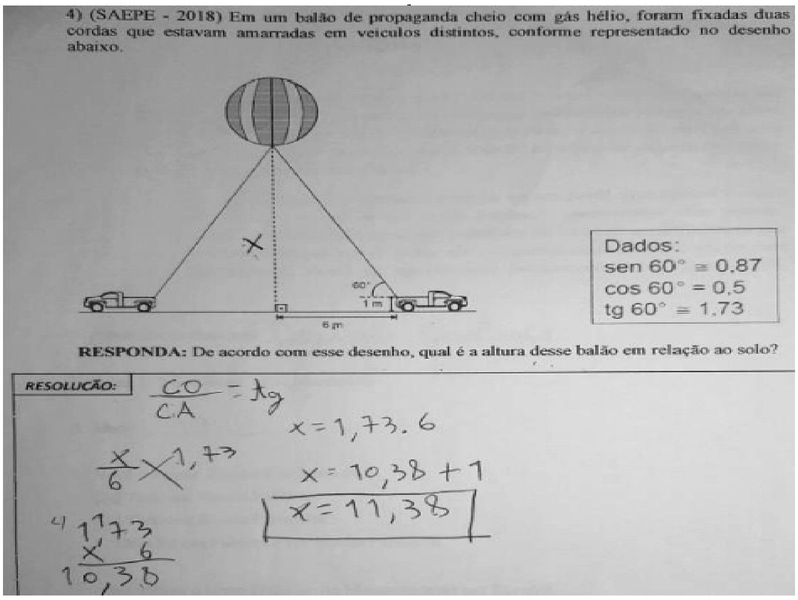


RESPONDA: De acordo com esse desenho, qual é a altura desse balão em relação ao solo?

Fonte: Oliveira (2021, p. 121).

Na Figura 10, apresentamos como um aluno mobilizou técnicas de acordo com a esperada pela instituição para **T_T - Calcular o valor da tangente de um ângulo.**

Figura 10: Técnica desenvolvida pelo estudante E23 na questão do SAEPE



Fonte: Oliveira (2021, p. 121).

Na Figura 10, o aluno mobilizou corretamente as técnicas de:

> Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo correspondentes aos seus lados; identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo; identificar a razão trigonométrica tangente; substituir os valores na razão trigonométrica correspondente; resolver a equação do 1º grau para determinar a medida da altura do balão em relação à caminhonete, e, por fim, somar a medida encontrada à outra medida dada (1m), para encontrar a medida total, referente à altura do balão em relação ao solo (Oliveira, 2021, p. 121).

Diferentemente, em relação à questão do SAEPE (Figura 9), por exemplo, houve um grupo de estudantes que cometeram erros (Quadro 7) ao buscar resolver a **T_T - Calcular o valor da tangente de um ângulo.**

Quadro 7: Técnicas mobilizadas com erro pelos estudantes na questão 04

Tipo de tarefa (T_T)	Técnicas
Calcular o valor da tangente de um ângulo.	- Identificar a razão trigonométrica cosseno, ao invés da razão trigonométrica tangente; - Resolver os cálculos numéricos incorretamente, substituindo o valor do cosseno de um ângulo no numerador da razão que define cosseno.

Fonte: Oliveira (2021, p. 121).

Quanto aos erros (Quadro 7), na análise de Oliveira (2021), observa-se que a maioria dos alunos que erraram as questões do SAEPE, apresentou dificuldade em identificar corretamente uma razão trigonométrica.

As pesquisas que identificamos sobre Razões Trigonométricas tratam da resolução de problemas propostas em livros didáticos, por professores ou pelos alunos. Particularmente, não encontramos dissertações sobre este tema relacionadas à elaboração de problemas pelos alunos.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos o caminho metodológico que desenvolvemos para analisar a elaboração e resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas por alunos do Ensino Médio.

Expomos o cenário da pesquisa e o perfil dos participantes. Na sequência, os procedimentos adotados na construção e análise dos problemas elaborados e resolvidos pelos alunos, baseados em uma perspectiva quali-quantitativa, baseando-se no fato de "as abordagens qualitativas e quantitativas são necessárias, mas segmentadas podem ser insuficientes para compreender toda a realidade investigada. Em tais circunstâncias, devem ser utilizadas como complementares" (Souza; Kerbauy, 2017, p.40).

3.1 CENÁRIO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em uma escola pública da rede estadual de Pernambuco, situada no município de São Lourenço da Mata - PE. Essa escola atende alunos no ensino regular, ou seja, não se trata de uma escola com ensino integral.

Na escola, local da pesquisa, o ensino de Razões Trigonométricas para os alunos do 2º ano do Ensino Médio, ocorreu no terceiro bimestre do ano letivo de 2022 no contexto da habilidade da BNCC: (EM13MAT308) - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para **resolver e elaborar problemas** que envolvem triângulos, em variados contextos" (Brasil, 2018, p. 536).

A habilidade (EM13MAT308) da BNCC, no Currículo de Pernambuco do EM corresponde à: (EM13MAT308PE24) - Aplicar as relações métricas e as leis de seno e cosseno ou as noções de congruência e semelhança para **resolver e elaborar situações-problema** que envolvam triângulos em variados contextos, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais (Pernambuco, 2020, p. 200).

Participaram da pesquisa 35 alunos de três turmas do 2º ano do EM, todas do turno matutino. Na Tabela 3, detalhamos a participação dos alunos[3].

---

[3] Ressaltamos que a Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018, que atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, estava sendo implementada na escola paulatinamente,

Tabela 3: Número de participantes da pesquisa por turma do 2° ano do Ensino Médio

TURMA	QUANTIDADE DE PARTICIPANTES
A	11
B	12
C	12
total	35

Fonte: Autoria própria.

Ressaltamos que os alunos das três turmas (Tabela 3) são oriundos de diferentes escolas, pois a escola em que foi aplicada a pesquisa não oferta o Ensino Fundamental. Esses alunos apresentavam um grande déficit de aprendizagem em diversos conteúdos matemáticos, visto que finalizaram o Ensino Fundamental e o 1º ano do Ensino Médio em um contexto de aulas remotas devido à pandemia de Covid-19.

A aplicação da atividade de elaboração de problemas aconteceu de forma individual. Sendo assim, cada aluno foi convidado a elaborar e resolver o próprio problema elaborado por ele. No próximo tópico (3.2) detalhamos as imagens que foram propostas aos alunos e análise a priori que realizamos, quanto aos tipos de tarefas e técnicas possíveis a serem utilizadas pelos alunos.

3.2 IMAGENS PROPOSTAS PARA ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

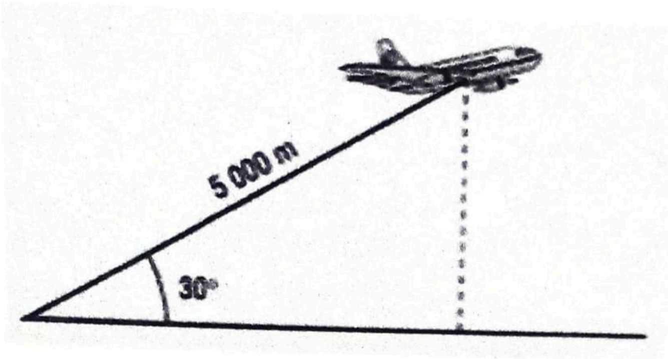
Na elaboração de um problema a partir de uma imagem, de acordo com Chica (2001), espera-se que os alunos observem e retirem dela alguma ideia que pode gerar uma pergunta. Essa pergunta pode tanto ser respondida através do que se vê na figura quanto através das suposições que o aluno pode fazer a partir do que a cena sugere.

A proposta para a Elaboração e Resolução de Problemas (ERP) ocorreu a partir de duas imagens. A primeira imagem (Figura 11) representa a decolagem de

iniciando com as turmas do 1º ano. Sendo assim, no ano letivo de 2022, as turmas do 2º ano não tinham sido enquadradas nesta reforma.

um avião que gera com o solo um ângulo de 30° e uma distância percorrida de 5.000 metros.

Figura 11: Primeira imagem proposta para a ERP de problema



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 11, podemos constatar a possibilidade do aluno elaborar e resolver um problema, utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, com base em dois tipos de tarefas (T) com suas respectivas técnicas (τ).

- T_1 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).
- T_2 : Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).

No tipo de tarefa "T_1", supomos que o aluno pode desenvolver a elaboração de um problema a fim de determinar a altura do avião em relação ao solo. Neste caso ele deve aplicar na resolução do problema a seguinte técnica:

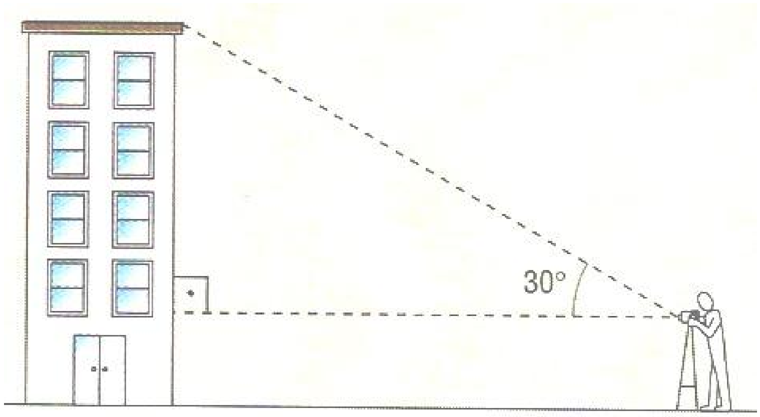
- (τ_1): Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

No tipo de tarefa "T_2", o aluno pode desenvolver a elaboração de um problema a fim de determinar a medida da distância entre o ponto de decolagem do avião e o pé da altura do momento que percorreu 5.000 m. Neste caso, ele pode aplicar na resolução do problema a técnica:

- (τ_2): Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

A segunda imagem (Figura 12) representa um homem medindo a altura de um prédio com um teodolito que gera um ângulo de 30° com o topo do prédio.

Figura 12: Segunda imagem proposta para a ERP de problema



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 12, consideramos que o aluno pode elaborar e resolver um problema utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo com base em quatro tipos de tarefas : T_3, T_4, T_5 e T_6.

- T_3 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.

Neste tipo de tarefa "T_3", ocorre a possibilidade do aluno desenvolver a elaboração de um problema a fim de determinar a altura do prédio. Sendo assim, ele pode aplicar na resolução do problema a técnica (τ_3) : Atribuir uma medida à hipotenusa e depois aplicar τ_1. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.

- T_4 : Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.

Na tarefa "T_4", o aluno pode desenvolver a elaboração de um problema a fim de determinar a medida da distância entre o teodolito e o prédio. Neste caso, ele pode aplicar na resolução do problema a técnica (τ_4) : Atribuir uma medida à hipotenusa e depois aplicar τ_2.

- T_5 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto adjacente.

No tipo de tarefa "T_5", supomos que o aluno pode desenvolver a elaboração de um problema a fim de determinar a medida da altura do prédio. Neste caso, ele pode aplicar na resolução do problema a técnica (τ_5) : Atribuir uma medida para o cateto adjacente. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.

- T_6 : Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo $(30°)$ e do cateto oposto.

Quanto à tarefa “T_6”, é possível que o aluno elabore um problema a fim de determinar a medida da distância entre o teodolito e o prédio. Neste caso, ele pode aplicar na resolução do problema a técnica (τ_6): Atribuir uma medida para o cateto oposto. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

Os critérios de análise dos problemas formulados pelos alunos foram:

- Identificar os alunos que conseguiram elaborar ou não um problema que envolvesse um texto para a figura apresentada;
- Identificar os alunos que apenas elaboraram uma pergunta para a figura apresentada;
- Verificar os alunos que conseguiram ou não responder corretamente os seus problemas;
- Verificar quais as tarefas elaboradas e técnicas utilizadas pelos alunos para resolverem seus problemas.

Após a finalização da fase de ERP pelos alunos, aplicamos um questionário para obter informações sobre o que eles acharam desta experiência em sala de aula.

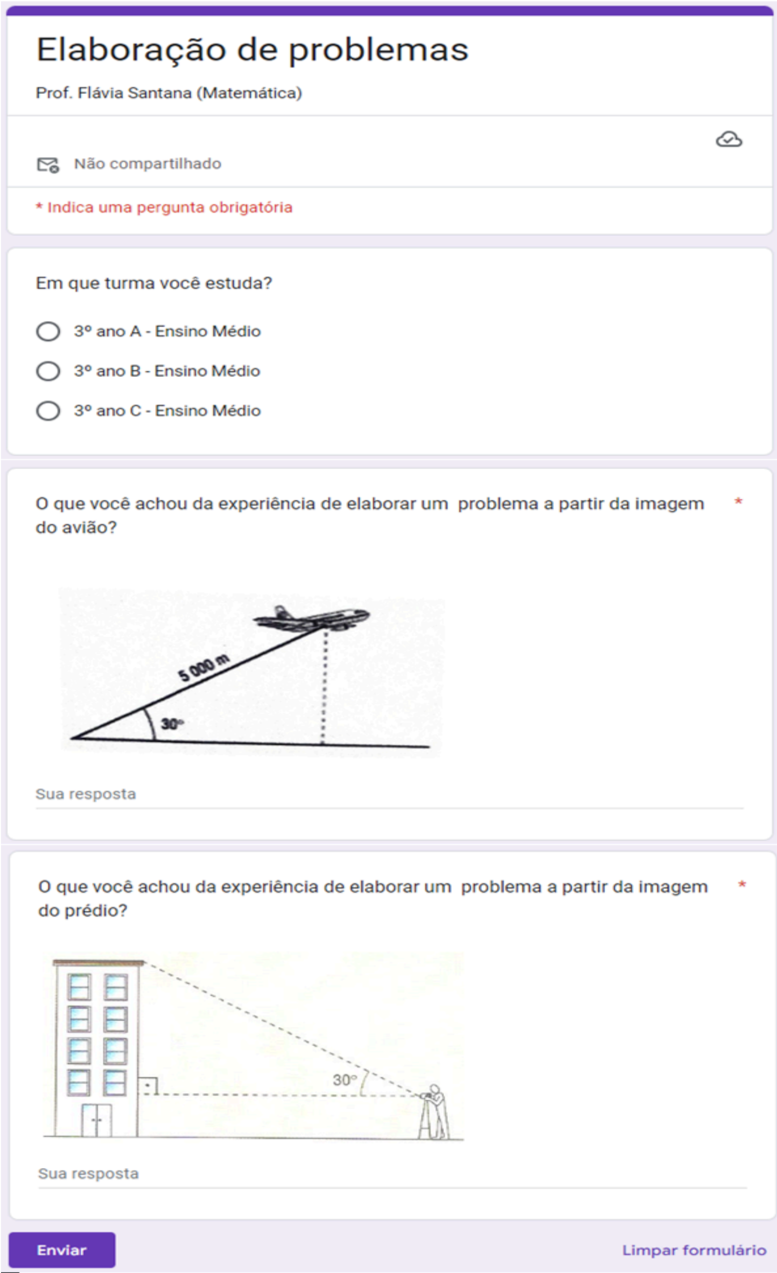
3.3 APLICAÇÃO DE QUESTIONÁRIO

O questionário foi elaborado no formulário do Google (Figura 13) e socializado por um link via whatsApp. Vale salientar, que na aplicação do questionário, os alunos já cursavam o 3º ano do ensino médio. Propomos duas questões em que os estudantes deveriam respondê-las de forma discursiva. As perguntas foram:

1) O que você achou da experiência de elaborar um problema a partir da imagem do avião?
2) O que você achou da experiência de elaborar um problema a partir da imagem do prédio?

Afim dos alunos lembrarem das imagens que foram empregadas nas atividades, anexamos essas ao questionário, conforme figura abaixo.

Figura 13: Questionário sobre a experiência da elaboração de problemas pelos alunos


Elaboração de problemas

Prof. Flávia Santana (Matemática)

Não compartilhado

* Indica uma pergunta obrigatória

Em que turma você estuda?

- 3º ano A - Ensino Médio
- 3º ano B - Ensino Médio
- 3º ano C - Ensino Médio

O que você achou da experiência de elaborar um problema a partir da imagem do avião? *

Sua resposta

O que você achou da experiência de elaborar um problema a partir da imagem do prédio? *

Sua resposta

Enviar

Limpar formulário

Fonte: Autoria própria.

Como procedimento de análise do resultado do questionário, realizamos uma leitura de cada resposta dos alunos e elaboramos um gráfico organizado em três categorias: bom; razoável e difícil. Definimos na categoria “bom”, os alunos que alegaram ter gostado da experiência e definiram ter tido facilidade para elaborar seus problemas; na categoria “razoável”, aqueles alunos que mesmo gostando da experiência, definiram ter tido alguma dificuldade na elaboração dos seus problemas; e por fim, na categoria “difícil”, os alunos que alegaram ter tido muita dificuldade na elaboração dos seus problemas ou não conseguiram elaborá-los. Além disso, selecionamos algumas respostas para exemplificar essas categorias.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS ELABORADOS E RESOLVIDOS PELOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentamos a análise e discussão sobre a elaboração e resolução dos problemas pelos alunos a partir das duas imagens apresentadas a eles e posteriormente, os resultados do questionário sobre esta atividade.

Relembramos que a primeira imagem (do avião) envolve a ERP em torno de duas tarefas: T_1 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m) e T_2: Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).

No caso da segunda imagem (do prédio), essa envolve a ERP acerca das tarefas: T_3 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa, T_4 : Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa. T_5 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto adjacente. T_6 : Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto oposto.

4.1 ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DA PRIMEIRA IMAGEM

Dentre os 35 alunos que participaram da ERP a partir da imagem representando a decolagem de um avião, podemos observar na Tabela 4 que apenas três alunos não conseguiram elaborar um enunciado e/ou propor uma pergunta diante de tal contexto.

Tabela 4: Resultados sobre o tipo de tarefa na ERP (avião)

Tipo de tarefa utilizada na ERP	Qt. de alunos
T_1 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).	23
T_2 : Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).	02
T_1 e T_2	07
Não conseguiu elaborar uma pergunta e/ou escrever o enunciado do problema	03
Total	35

Fonte: autoria própria.

A propósito dos resultados expostos na Tabela 4, detalhamos a seguir a análise e discussão da ERP por tipo de tarefa e técnica apresentada pelo aluno.

4.1.1 ERP com base na T_1

Sobre a ERP - **T_1**: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m), constatamos os seguintes resultados:

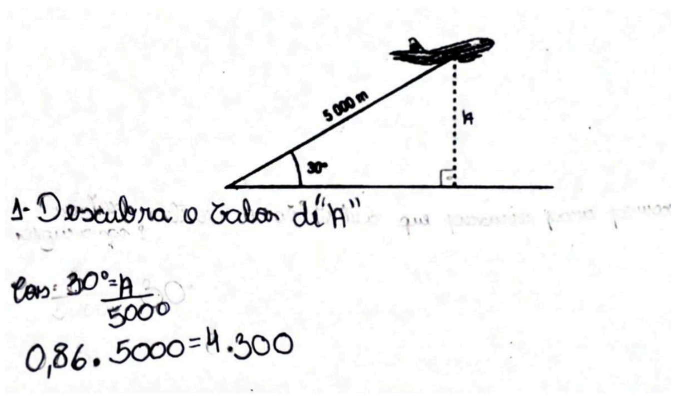
- 10 alunos elaboraram a pergunta do problema "qual a altura do avião em relação ao solo?" sem escrever um enunciado contendo os dados apresentados no contexto da imagem.
- 13 alunos elaboraram um enunciado com os dados e pergunta do problema: qual a altura do avião em relação ao solo?

No caso dos 10 alunos que elaboraram apenas a pergunta para o problema a partir da imagem, todos cometeram erros na resolução de seus problemas. Dentre esses, 6 cometeram o erro de usar o cosseno ao invés do seno para determinar a altura do avião em relação ao solo.

No Quadro 8, apresentamos o exemplo do A01 que utilizou o cosseno obtendo a resposta "4.300m". Ou seja, ele acertou nos cálculos numéricos referente à relação escolhida, embora esta não seja a resposta adequada à pergunta elaborada por ele no problema.

Quadro 8: Exemplo de ERP-T_1 com erro na aplicação da técnica - A01

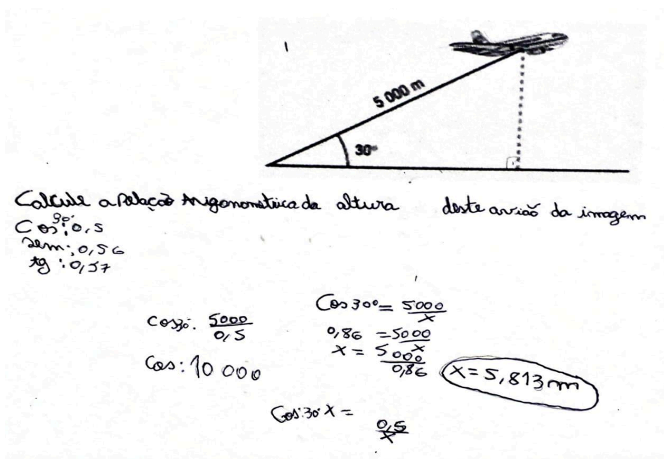
<table>
<tr><td colspan="2">T_1: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora : τ_1
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP: τ_2
(τ_2) Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td></tr>
</table>



Fonte: Protocolo do A01.

Podemos constatar que 4 dentre os 10 alunos acima mencionados, 2 deles além de errarem na escolha do cosseno, confundiram hipotenusa e cateto adjacente e outros 2 chegaram a indicar o cosseno, mas não apresentaram a resposta. No exemplo da ERP do A02 (Quadro 9), podemos perceber como ele além de errar na escolha inadequada do cosseno, errou ao colocar a medida da hipotenusa sobre o cateto adjacente.

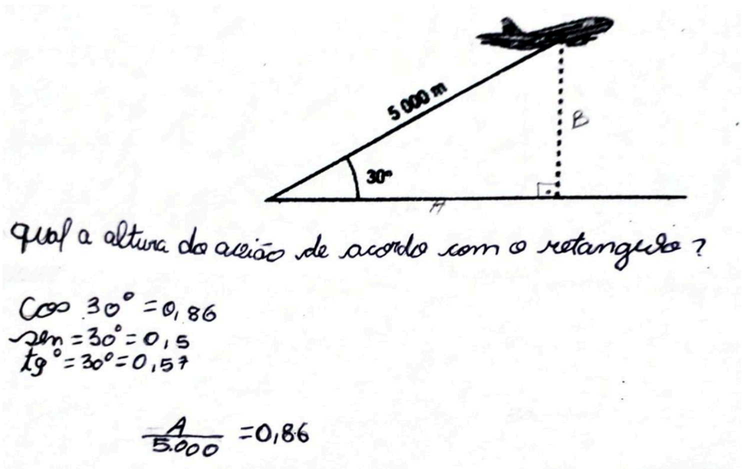
Quadro 9: Exemplo de ERP-T_1 com erro na aplicação da técnica - A02

T_1: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).	
Técnica esperada pela pesquisadora: τ_1 (τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.	**Técnica apresentada pelo aluno na ERP** ● Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. ● Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. ● ***Substituir a medida da hipotenusa e a medida do cateto adjacente nas posições erradas***. ● Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
	

Fonte: Protocolo do A02.

Diferentemente, o A03 (Quadro 10) não chegou a concluir a resposta do problema elaborado por ele, ou seja, só escreveu os valores de cosseno, seno e tangente referentes ao ângulo de 30º, desenvolvendo a substituição dos valores referente ao cosseno. Assim, aplicou uma técnica incorreta e não conseguiu concluir os cálculos.

Quadro 10: Exemplo de ERP-T_1 com erro na aplicação da técnica - A03

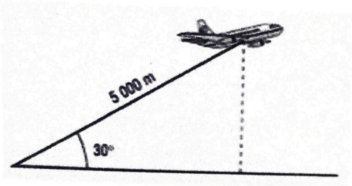
<table>
<tr><td colspan="2">T_1: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_1
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
● Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.
● Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Fonte: Protocolo do A03.

Dos 13 alunos que elaboraram um enunciado com os dados e pergunta do problema: “qual a altura do avião em relação ao solo?”, 8 deles acertaram na escolha do seno para a resolução, mas 3 deles cometeram erros nos cálculos numéricos. Enquanto, 5 deles erraram ao escolher o cosseno e ainda erraram nos cálculos numéricos na resolução do problema.

No exemplo (Quadro 11), a A04 conseguiu elaborar um problema dentro do contexto da figura e aplicou a técnica correta em sua resolução. No caso desta aluna, ela buscou calcular a altura em que o avião se encontrava naquele momento. Para isso, utilizou a relação trigonométrica do seno. Mas, podemos ainda perceber que mesmo acertando os cálculos, a A04 não coloca a unidade de medida referente ao seu resultado.

Quadro 11: Exemplo de ERP-T_1 com acerto na aplicação da técnica - A04

<table>
<tr><td colspan="2">T_1: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_1
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP: τ_1
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td></tr>
<tr><td colspan="2">


Um avião decolou a um ângulo de 30° percorrendo uma distância de 5000 m, uma passageira que se encontrava perto da janela, olhando para baixo se perguntou em que altura o avião se encontrava. Vamos ajuda-la, em que altura o avião se encontra?
$sen\ 30 = \frac{x}{5000}$
$\frac{1}{2} = \frac{x}{5000}$
$2x = 5000$
$x = \frac{5000}{2}$
$x = 2500$
2500
2
5000
</td></tr>
</table>

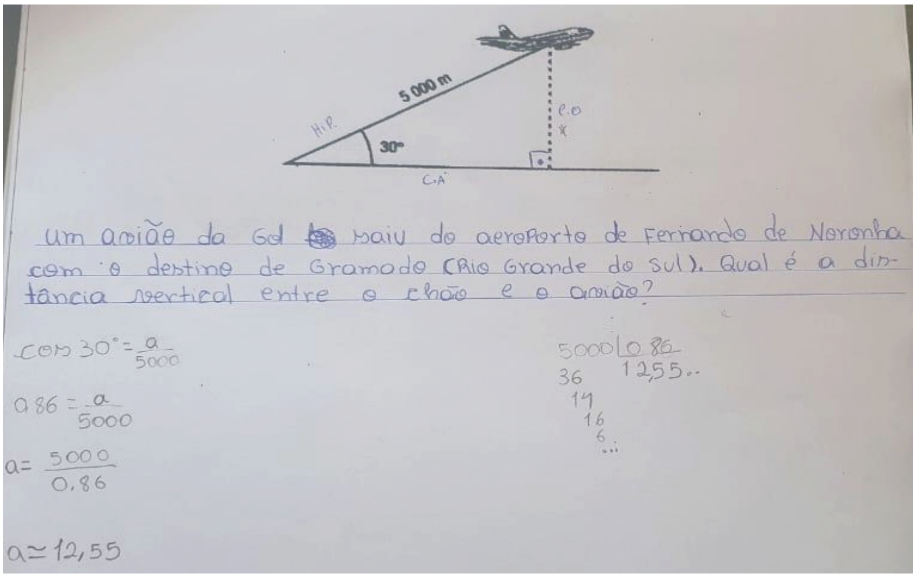
Fonte: Protocolo do A04.

Já o aluno A05 (Quadro 12) conseguiu elaborar a situação-problema, gerando um contexto para imagem, além de fazer a associação correta dos elementos do triângulo na figura. Mas, ao resolver seu problema, ele não aplicou a técnica esperada, além de não conseguir executar os cálculos de forma correta.

Quadro 12: Exemplo de ERP-T_1 com erro na aplicação da técnica - A05

<table>
<tr><td colspan="2">T_1: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_1

(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.
Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente.
Calcular erroneamente a proporção.</td></tr>
</table>

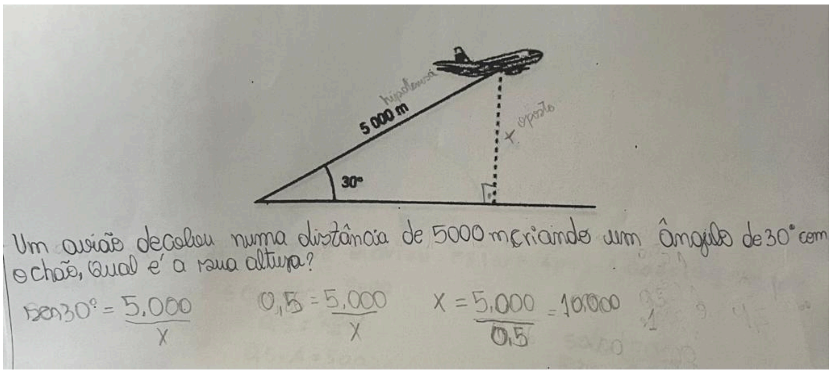


Fonte: Protocolo do aluno A05.

Um outro caso foi o do aluno A06 (Quadro 13) que elaborou seu problema, apresentou a técnica corretamente, mas errou nos cálculos para a busca do resultado final.

Quadro 13: Exemplo de ERP-T_1 com erro na aplicação da técnica- A06

T_1: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).	
Técnica esperada pela pesquisadora: τ_1 (τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.	**Técnica apresentada pelo aluno na ERP:** ● Aplicar a definição do seno em um triângulo retângulo. ● Substituir o valor do seno do ângulo concernente. ● Substituir a medida da hipotenusa e a medida do cateto oposto nas posições erradas. ● Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.



Fonte: Protocolo do aluno A06.

Ao final da análise dos resultados sobre a ERP- T_1, podemos constatar que apenas cinco dos vinte e três alunos conseguiram formular e resolver o problema corretamente. O que demonstra que os alunos do Ensino Médio ainda portam dificuldades de compreensão de conceitos relacionados às Razões Trigonométricas e de contextualizar a aplicação dessas razões em situações como a que foi proposta, bem comum nos livros didáticos.

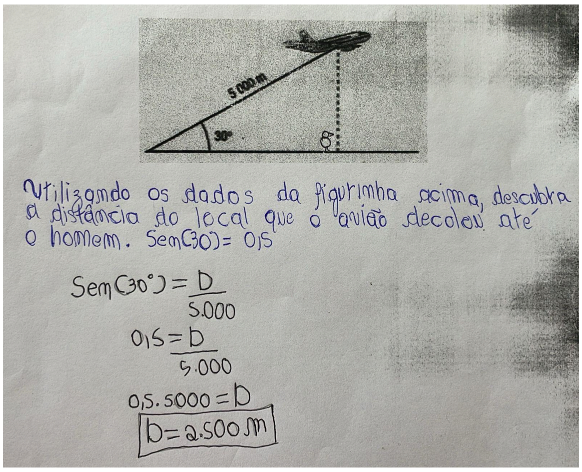
4.1.2 ERP com base na T_2

Como já expomos, apenas 02 (A07 e A08) dentre 35 alunos apresentaram a ERP - T_2: Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m). A propósito disto, percebemos que os dois alunos aproveitaram a indicação da imagem para formular a pergunta do problema: Qual a distância entre o ponto de decolagem e o pé da altura a qual o avião encontrava-se no momento?

No exemplo do Quadro 14, podemos perceber como o aluno A07 elaborou o seu problema perguntando a distância (D) entre o ponto de decolagem do avião e um homem que encontrava-se no pé da altura que o avião encontrava-se naquele momento, mas, na resolução do problema, não utilizou a técnica esperada, ou seja, utilizou o seno ao invés do cosseno.

Quadro 14: Exemplo de ERP-T2 com erro na aplicação da técnica - A07

T_2: Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).	
Técnica esperada pela pesquisadora: τ_2 (τ_2): Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.	**Técnica apresentada pelo aluno na ERP:** ● **Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.** ● Substituir o valor do seno do ângulo concernente. ● Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

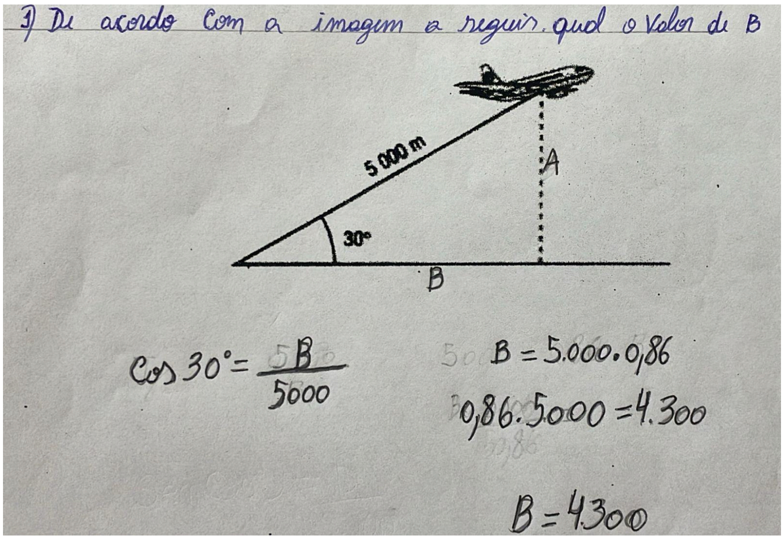


Fonte: Protocolo do aluno A07.

Já no Quadro 15, podemos observar que o aluno A08 apenas fez um questionamento referente à qual seria a medida de B que ele havia determinado na imagem, sem trazer um enunciado para pergunta. Mas conseguiu aplicar a técnica esperada corretamente. Vale salientar que o aluno não menciona a unidade de medida em seu resultado.

Quadro 15: Exemplo de ERP-T_2 com acerto na aplicação da técnica - A08

T_2: Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).	
Técnica esperada pela pesquisadora: τ_2 (τ_2): Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.	**Técnica apresentada pelo aluno na ERP**: τ_2 (τ_2): Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.



Fonte: Protocolo do aluno A08.

Podemos observar que a maioria dos alunos apresentados possuem dificuldades com a aplicação da unidade de medida em seus resultados finais. Ou seja, apenas apresentam um número sem acrescentar sua unidade de medida. A seguir apresentamos a análise e discussão sobre a ERP baseada simultaneamente nas tarefas T_1 e T_2.

4.1.3 ERP com base na T_1 e T_2

Dos 35 alunos, vimos que 07 deles apresentaram a ERP - T_1 e T_2, ou seja, em seus problemas pediram para calcular a medida do cateto oposto e do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m). Dentre eles pudemos perceber que:

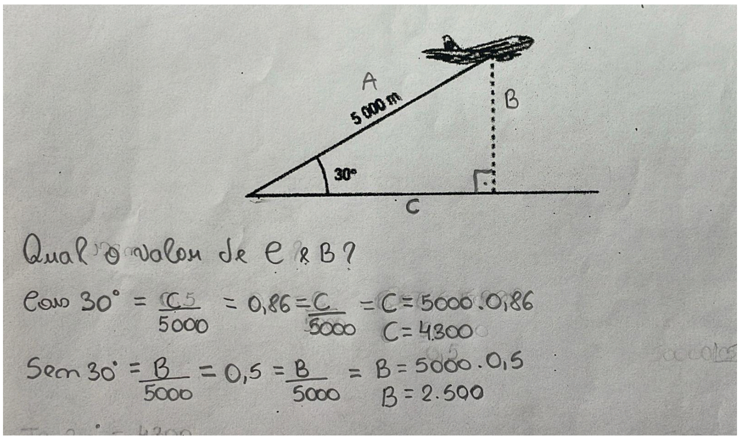
- 4 alunos elaboraram a pergunta do problema “qual as medidas do cateto oposto e cateto adjacente?” sem escrever um enunciado contendo os dados apresentados no contexto da figura.
- 3 alunos elaboraram um enunciado com os dados e pergunta do problema: “qual as medidas do cateto oposto e cateto adjacente?”

A aluna A09 (Quadro 16) fez a identificação na imagem do cateto oposto ao ângulo de 30º por B, do cateto adjacente por C e da hipotenusa por A, e fez simplesmente a pergunta “Qual o valor de C e B?”. Em sua resolução conseguiu aplicar as técnicas esperadas, fazendo as substituições das medidas corretamente.

Quadro 16: Exemplo de ERP-T_1 e T_2 com acerto na aplicação da técnica - A09

<table>
<tr><td colspan="2">T_1 e T_2: calcular a medida do cateto oposto e do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_1 e τ_2
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

(τ_2) Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP: τ_1 e τ_2
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

(τ_2) Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Fonte: Protocolo da aluna A09.

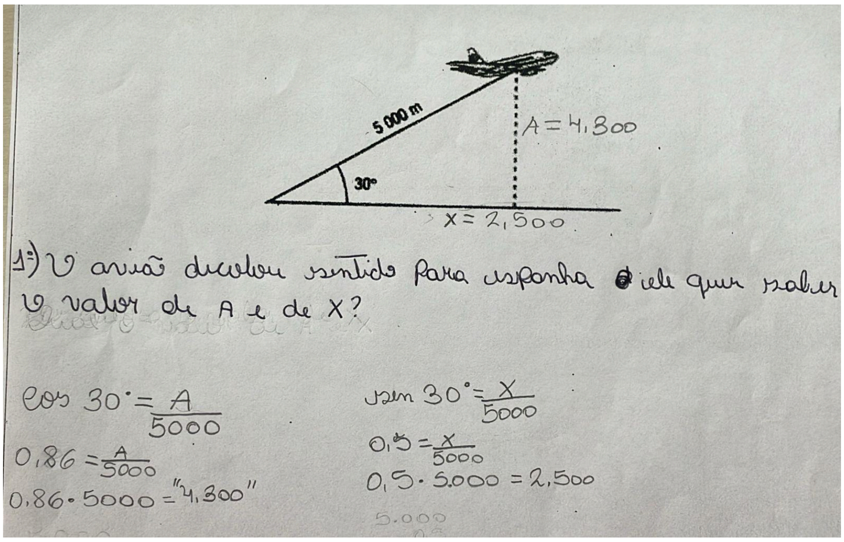
Destacamos, ainda, o aluno A10 (Quadro 17) que criou um destino (sentido para a Espanha) para a decolagem do avião e em seguida perguntou apenas as medidas dos catetos que ele havia indicado na imagem, como mostra a figura abaixo.

Quadro 17: Exemplo de ERP-T_1 e T_2 com erro na aplicação da técnica - A10

T_1 e T_2: calcular a medida do cateto oposto e do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).

<table>
<tr>
<td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_1 e τ_2
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

(τ_2) Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td>
<td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP: τ_1 e τ_2
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

(τ_2) Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
</table>

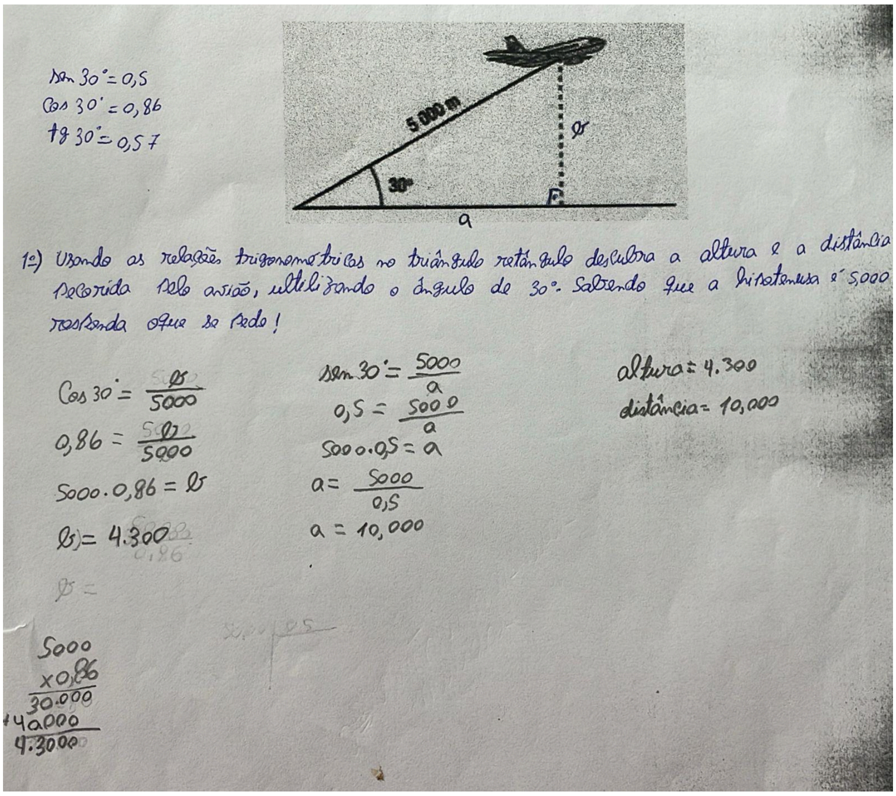
Fonte: Protocolo do aluno A10.

Podemos observar que no momento da resolução, o aluno A10 aplicou as técnicas esperadas, mas equivocou-se no momento das substituições das medidas indicadas por ele, ou seja, utilizou o cateto oposto, que ele chamou de A, na razão do cosseno e o cateto adjacente, que ele chamou de X, na razão do seno, fazendo com que ele obtivesse os resultados trocados.

Ao observar o Quadro 18 percebe-se que o aluno A11 identificou todas as suas características como sendo um triângulo retângulo e o que poderia ser utilizado na resolução do seu problema, como os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo de 30º. Mas, ao buscar o valor das medidas determinadas por ele, utilizou o cosseno para determinar o valor do cateto oposto (b), erroneamente, e o seno para determinar o cateto adjacente (a). Além disso, no cálculo do seno, fez a substituição da hipotenusa no numerador da fração.

Quadro 18: Exemplo de ERP-T_1 e T_2 como erro na aplicação da técnica - A11

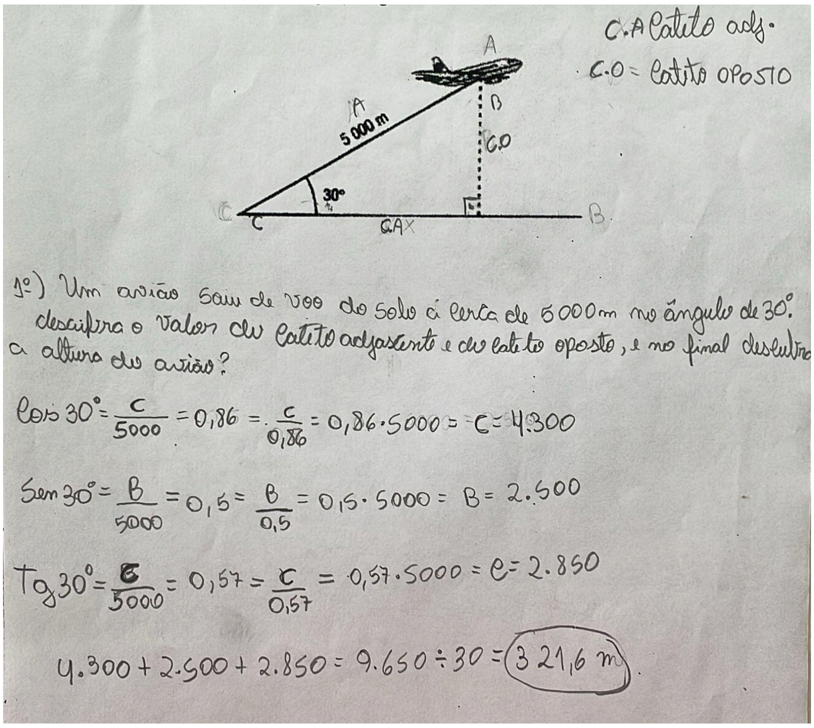
<table>
<tr><td colspan="2">T_1 e T_2: calcular a medida do cateto oposto e do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora:
τ_1 e τ_2
(τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.

(τ_2) Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td>
<td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
1)
● Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.
● Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente.
● Substituir a medida do cateto oposto, ao invés da medida do cateto adjacente.
● Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.
2)
● Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.
● Substituir o valor do seno do ângulo concernente.
● Substituir a medida da hipotenusa e a medida do cateto oposto inversamente.
● Calcular a proporção erroneamente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Fonte: Protocolo do aluno A11.

O aluno A12, como mostra o Quadro 19, elaborou seu problema dentro do contexto da decolagem do avião, pedindo para encontrar as medidas do cateto oposto e adjacente para assim poder determinar a altura do avião.

Quadro 19: Exemplo de ERP-T_1 e T_2 com erro na aplicação da técnica - A12

T_1 e T_2: calcular a medida do cateto oposto e do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).	
Técnica esperada pela pesquisadora: τ_1 e τ_2 (τ_1) Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do seno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção. (τ_2) Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo. Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.	**Técnica apresentada pelo aluno na ERP:** **1)** (τ_1) **2)** (τ_2) **3)** ● Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. ● Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. ● Substituir os valores das medidas dos catetos erroneamente. ● Efetuar os cálculos de forma equivocada. **4)** Somar os três valores encontrados.
	

Fonte: Protocolo do aluno A12.

Em sua resolução conseguimos perceber sua dificuldade em definir o que ele gostaria de descobrir, pois conseguiu determinar as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente corretamente, mas em seguida aplicou a razão da tangente erroneamente e sem necessidade, e ao fim de tudo soma todos os valores encontrados por ele e ainda divide essa soma por 30, que é a medida do ângulo gerado pelo avião em sua decolagem. Determinando, assim, esse valor como seu resultado final. Então, percebemos a insegurança do aluno para identificar os valores que ele encontrou inicialmente e determiná-los como solução para sua pergunta.

4.2 ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DA SEGUNDA IMAGEM

Dentre os 35 alunos que participaram da ERP a partir da segunda imagem representando a observação da altura de um prédio, podemos observar na Tabela 5 que onze alunos não conseguiram elaborar um enunciado e/ou propor uma pergunta diante de tal contexto. Enquanto isso, 10 conseguiram desenvolver um enunciado envolvendo um contexto para a imagem apresentada, e os outros 16 apenas escreveram uma pergunta revelando uma tendência de que os alunos não possuem o hábito de lidar com problemas com enunciados no dia-a-dia do ensino da Matemática.

Tabela 5: Resultados sobre o tipo de tarefa na ERP (altura do prédio)

Tipo de tarefa utilizada na ERP	Qt. de alunos
T_3 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.	05
T_4 : Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.	05
T_5 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto adjacente.	11
T_6 : Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto oposto.	03
Não conseguiu elaborar uma pergunta e/ou escrever o enunciado do problema dentro das tarefas esperadas	11
Total	35

Fonte: autoria própria.

Podemos destacar que dos 16 alunos que optaram por desenvolver a elaboração de um problema a fim de determinar a altura do prédio, cuja resolução envolveria o cálculo do seno e/ou da tangente do ângulo de 30º, 09 deles conseguiram resolver a partir da técnica esperada. Entretanto, dos 08 que optaram por desenvolver a elaboração de um problema a fim de determinar a distância do teodolito ao prédio, cuja resolução envolveria o cálculo do cosseno e/ou da tangente, apenas 02 deles resolveram corretamente a partir da técnica esperada.

A propósito dos resultados expostos na Tabela 5, detalhamos a seguir a análise e discussão da ERP por tipo de tarefa e técnica apresentada pelo aluno.

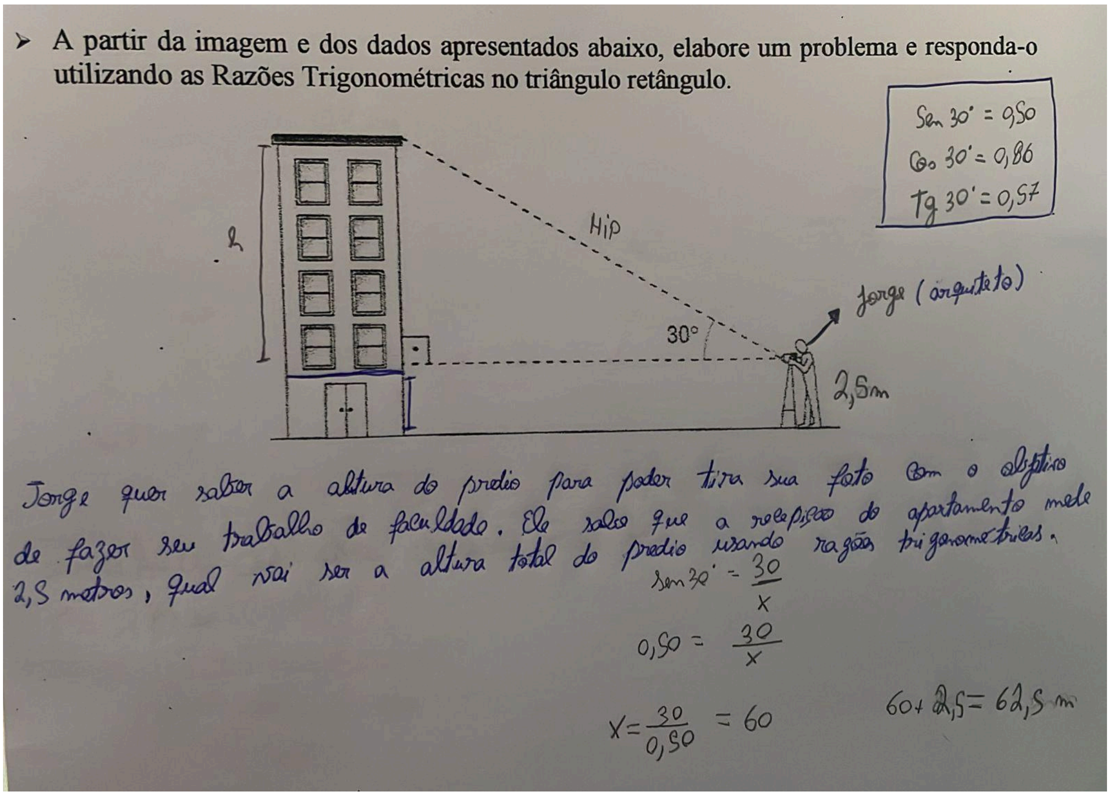
4.2.1 ERP com base na T_3

Diante dos dados apresentados na Tabela 5, podemos perceber que apenas 05 alunos utilizaram a tarefa T_3 na sua ERP, onde apenas um deles criou um enunciado para o seu problema e os outros quatro apenas estabeleceram uma pergunta. Iremos explanar a análise de dois deles.

No exemplo do aluno A13 (Quadro 20), na elaboração do seu problema, ele conseguiu trazer um enunciado com um contexto para a imagem.

Quadro 20: Exemplo de ERP-T_3 com erro na aplicação da técnica - A13

T_3 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.	
Técnica esperada pela pesquisadora: τ_3 (τ_3) : Atribuir uma medida à hipotenusa e depois aplicar τ_1. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.	**Técnica apresentada pelo aluno na ERP:** ● Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo. ● Atribuir uma medida à hipotenusa, mas a substituiu na posição errada. ● Calcular o resultado pelo produto dos termos da proporção. ● Atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.



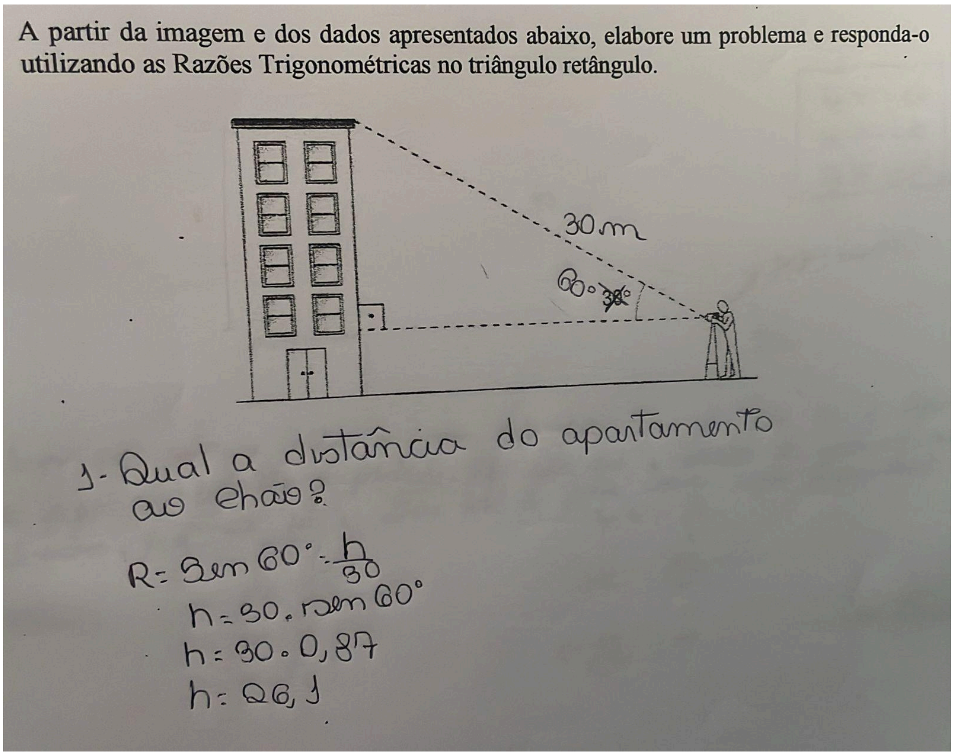
Fonte: Protocolo do aluno A13.

No momento da sua resolução, o aluno A13 aplicou a razão trigonométrica esperada, mas equivocou-se no momento da substituição dos valores, ou seja, ele deveria supor em seu problema um valor para a hipotenusa, tendo em vista que seu desejo era determinar a altura do prédio. O que ocasionou que, pelo cálculo apresentado por ele, acabou determinando a medida da hipotenusa.

Já o aluno A14 (Quadro 21) não criou um enunciado na elaboração do seu problema, apenas fez a pergunta “qual a distância do apartamento ao chão?”, e ainda sem especificar de qual apartamento estava se tratando.

Quadro 21: Exemplo de ERP-T_3 com erro na aplicação da técnica - A14

<table>
<tr><td colspan="2">T_3 : Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_3 (τ_3) : Atribuir uma medida à hipotenusa e depois aplicar τ_1. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
Alterar a medida do ângulo.
Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.
Atribuir uma medida à hipotenusa.
Substituir o valor do seno do ângulo concernente.
Calcular o resultado pelo produto dos termos da proporção.</td></tr>
</table>



Fonte: Protocolo do aluno A14.

A partir do protocolo do aluno A14, conseguimos observar que ele alterou a medida do ângulo gerado pelo teodolito, de 30° para 60°, além disso definiu a medida da hipotenusa igual a 30 m. Desta maneira, na sua resolução, aplicou corretamente a razão trigonométrica esperada encontrando um valor para a medida que ele chamou de “h”. Para finalizar, só restava definir uma medida para a altura do teodolito e somar à “h” e assim determinar uma possível altura para o prédio.

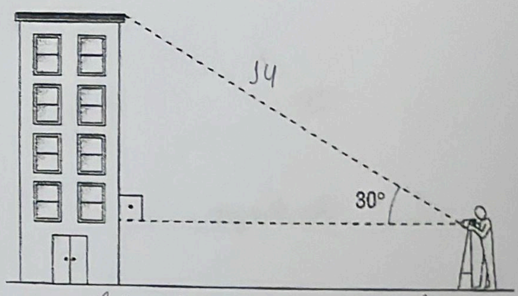
4.2.2 ERP com base na T_4

Acerca da tarefa T_4, os alunos elaboraram seus problemas buscando definir a distância que o homem estava do prédio tendo conhecimento da medida da hipotenusa do triângulo retângulo gerado. Dos 05 alunos que apresentaram essa tarefa, 03 deles elaboraram um enunciado para a imagem, já os outros dois apenas fizeram a pergunta: “Qual a distância do homem ao prédio?”.

No Quadro 22, podemos observar que o aluno A15 elaborou um enunciado para o seu problema dentro do contexto, determinando na imagem uma medida para a hipotenusa do triângulo gerado.

Quadro 22: Exemplo de ERP-T_4 com acerto na aplicação da técnica - A15

T_4: Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.	
Técnica esperada pela pesquisadora: τ_4 (τ_4) Atribuir uma medida à hipotenusa e depois aplicar τ_2.	**Técnica apresentada pelo aluno na ERP:** τ_4 (τ_4) Atribuir uma medida à hipotenusa e depois aplicar τ_2.



A partir da imagem e dos dados apresentados abaixo, elabore um problema e responda-o utilizando as Razões Trigonométricas no triângulo retângulo.

Um homem estar fotografando o predio no qual mora. Só que ele quer saber a qual distância ele estar do condomínio, para o ajudar usa as razões trigonométricas ao qual melhor se encaixa. Assim, achando a quantidade em cm

Sen 30° = 0,5
Cos 30° = 0,86
Tang 30° = 0,57

12,04 cm

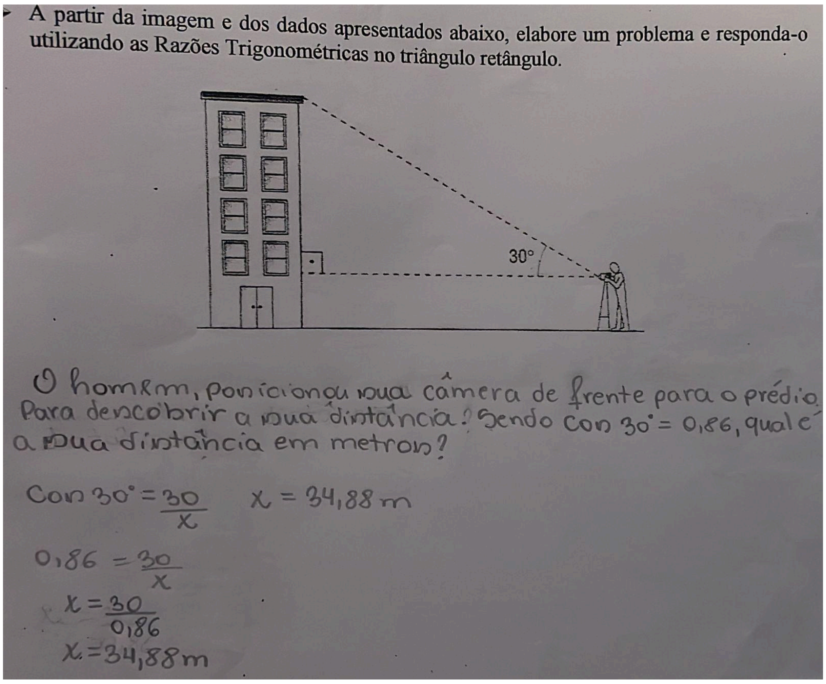
R: Cos 30° = 0,86
$0,86 = \frac{C.A}{14}$
$0,86 \cdot 14 = C.A$
12,04

Fonte: Protocolo do aluno A15.

O aluno A15 consegue aplicar a razão trigonométrica correta em sua resolução e a executa de maneira correta encontrando a medida de 12,04 para a distância do homem ao prédio. Mas, em seu problema, ele solicita que a resposta seja dada em centímetros, o que acaba saindo da realidade da imagem.

Já o aluno A16 (Quadro 23) conseguiu elaborar um enunciado para a imagem. Ao resolver seu problema aplicou a razão trigonométrica correta, mas ao executar sua resolução fez a substituição de um valor para a medida do cateto adjacente que já seria a distância do homem ao prédio, ou seja, o que ele determinou em seus cálculos foi a medida da hipotenusa do triângulo gerado. Ou seja, ele aplicou a técnica esperada, mas substituiu os valores erroneamente.

Quadro 23: Exemplo de ERP-T_4 com erro na aplicação da técnica - A16

<table>
<tr><td colspan="2">T_4: Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_4
(τ_4) Atribuir uma medida à hipotenusa e depois aplicar τ_2.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
● Aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.
● Atribuir uma medida ao cateto adjacente.
● Substituir o valor do cosseno do ângulo concernente.
● Calcular o resultado pelo produto dos termos da proporção.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

A partir da imagem e dos dados apresentados abaixo, elabore um problema e responda-o utilizando as Razões Trigonométricas no triângulo retângulo.

O homem, posiciona sua câmera de frente para o prédio Para descobrir a sua distância? Sendo Cos 30° = 0,86, qual é a sua distância em metros?

$\cos 30° = \frac{30}{x}$ $x = 34,88\ m$

$0,86 = \frac{30}{x}$

$x = \frac{30}{0,86}$

$x = 34,88m$

Fonte: Protocolo do aluno A16.

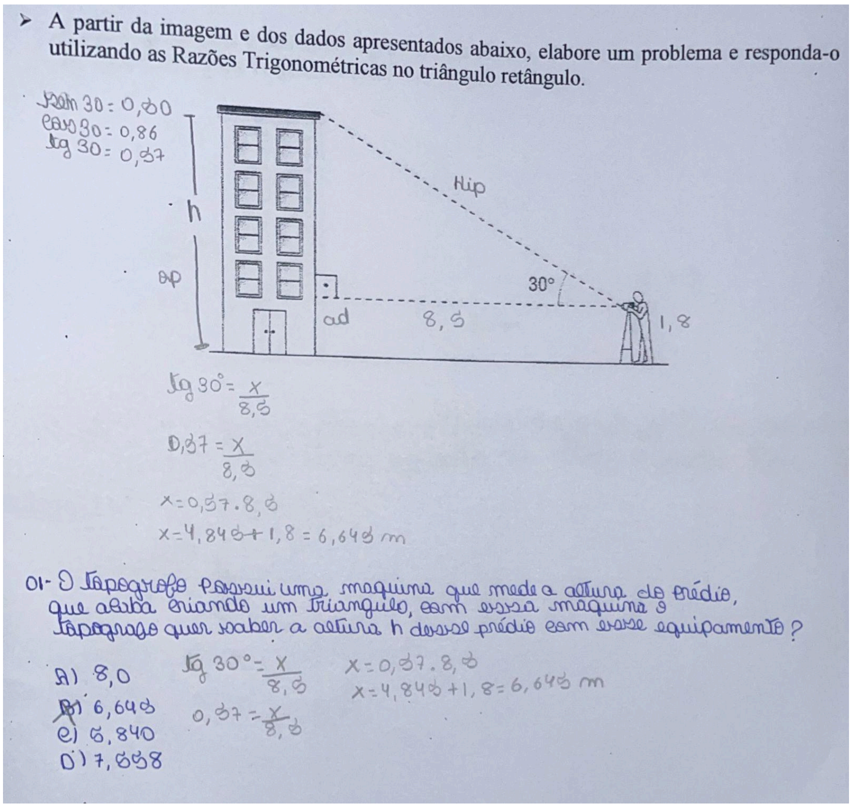
4.2.3 ERP com base na T_5

Foi na tarefa T_5 que obtivemos um maior número de produções, ou seja, 11 alunos elaboraram seus problemas utilizando esta tarefa que tem como objetivo calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto adjacente. Ou seja, supomos que o aluno pode desenvolver a elaboração de um problema a fim de determinar a medida da altura do prédio.

Dentre eles, 05 elaboraram um enunciado dentro do contexto da imagem, enquanto os outros 06 apenas apresentaram a pergunta: “Qual a altura do prédio?”.

O aluno A17 (Quadro 24) conseguiu elaborar um enunciado conseguindo caracterizar bem os elementos da imagem colocando os valores das medidas do cateto oposto e da altura do teodolito.

Quadro 24: Exemplo de ERP-T5 com acerto na aplicação da técnica - A17

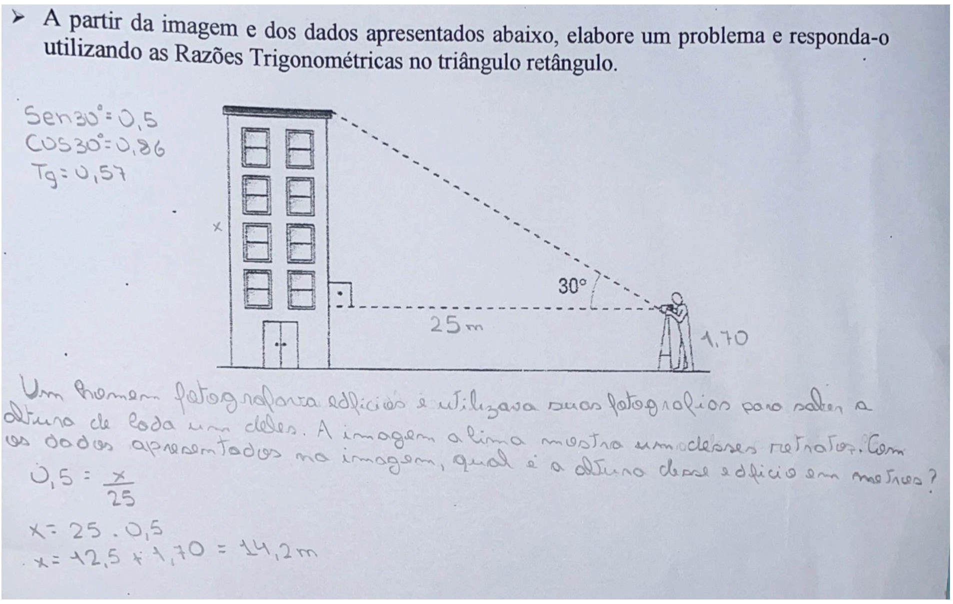
<table>
<tr><td colspan="2">T_5: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto adjacente.</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_5
(τ_5) Atribuir uma medida para o cateto adjacente. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
(τ_5) Atribuir uma medida para o cateto adjacente. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Fonte: Protocolo do aluno A17.

Em sua resolução aplicou a razão trigonometria esperada e executou-a corretamente. E, ao final, ainda somou a medida da altura do teodolito para encontrar a altura do prédio. Interessantemente, o aluno colocou alternativas para o seu enunciado e ao resolver encontrou sua resposta desejada.

Já o aluno A18 também conseguiu elaborar um enunciado dentro do contexto da imagem, mas podemos observar no Quadro 25 que ele não conseguiu executar sua resolução de maneira correta.

Quadro 25: Exemplo de ERP-T_5 com erro na aplicação da técnica - A18

<table>
<tr><td colspan="2">T_5: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto adjacente.</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_5
(τ_5) Atribuir uma medida para o cateto adjacente. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
(τ_3) : Atribuir uma medida à hipotenusa e depois aplicar τ_1. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Fonte: Protocolo do aluno A18.

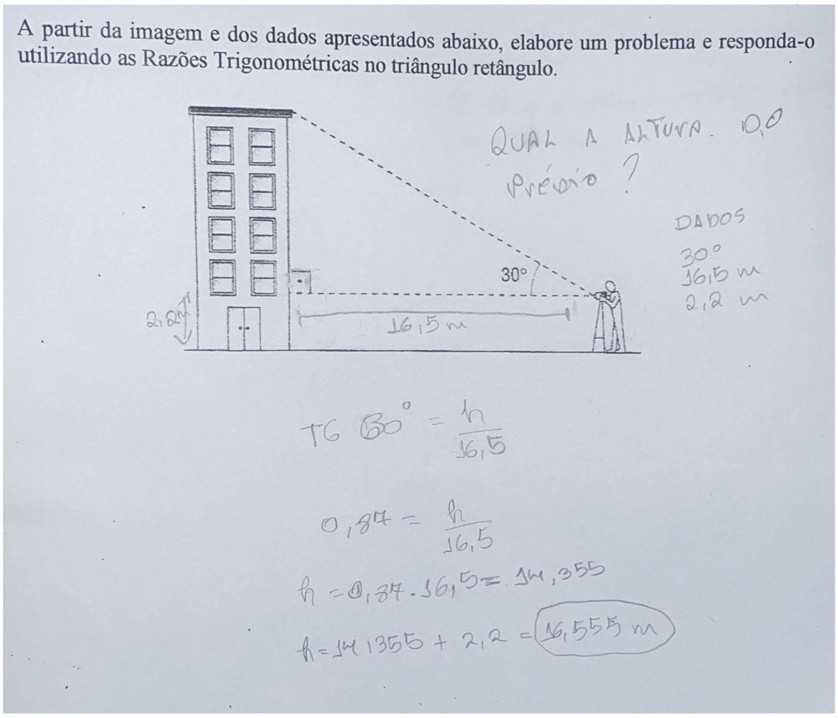
Ou seja, na imagem ele determinou uma medida para a distância do homem ao prédio (cateto adjacente), sendo assim, ele deveria escolher a razão trigonométrica da tangente para executar sua resolução. Mas, acabou escolhendo o seno, obtendo um valor errado para a medida da altura do prédio.

Conseguimos perceber que essa escolha errada levou-o ao erro, pois ele ainda determinou na imagem uma medida para a altura do teodolito e somou a resposta final.

No Quadro 26, identificamos o aluno A19 que simplesmente perguntou “qual a altura do prédio?” e na própria imagem determinou uma medida para a distância do teodolito ao prédio e uma altura para ele. O aluno conseguiu encontrar a resposta para a sua pergunta corretamente utilizando a técnica esperada, ou seja, utilizou a tangente para resolver seu problema e, ao final, somou a medida da altura do teodolito ao seu resultado, obtendo a medida da altura do prédio esperado por ele.

Quadro 26: Exemplo de ERP-T_5 com acerto na aplicação da técnica - A19

T_5: Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto adjacente.	
Técnica esperada pela pesquisadora: τ_5 (τ_5) Atribuir uma medida para o cateto adjacente. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.	**Técnica apresentada pelo aluno na ERP:** (τ_5) Atribuir uma medida para o cateto adjacente. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção. Em seguida, atribuir uma medida para a altura do teodolito e somar ao resultado obtido.



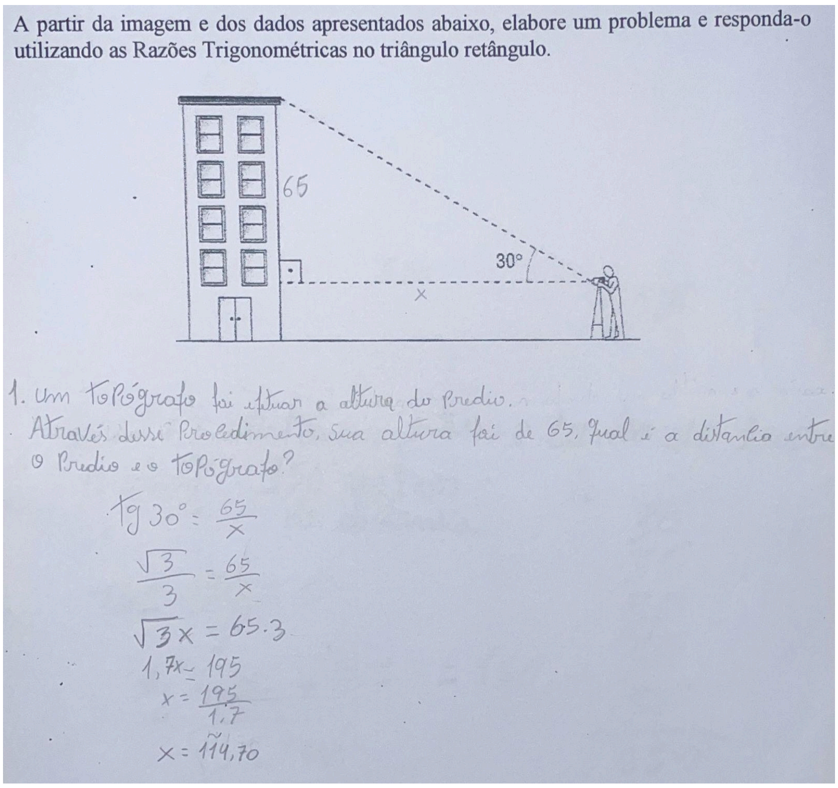
Fonte: Protocolo do aluno A19.

Podemos perceber que os alunos possuem certas dificuldades quanto à noção de espaço e medidas de comprimento, pois pela imagem tratar-se da altura de um prédio, aparentemente de quatro andares, os valores encontrados por eles não correspondem a essa realidade.

4.2.4 ERP com base na T_6

Três alunos utilizaram a tarefa T_6 para elaborarem seus problemas, mas apenas um deles elaborou um enunciado com o contexto da imagem, como podemos ver no exemplo do Quadro 27. Os outros dois apenas perguntaram “qual a distância do homem ao prédio?” apresentando na imagem uma medida para o cateto oposto do triângulo gerado pelo teodolito.

Quadro 27: Exemplo de ERP-T_6 com acerto na aplicação da técnica - A20

<table>
<tr><td colspan="2">T_6: Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto oposto.</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_6
(τ_6) Atribuir uma medida para o cateto oposto. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
(τ_6) Atribuir uma medida para o cateto oposto. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

A partir da imagem e dos dados apresentados abaixo, elabore um problema e responda-o utilizando as Razões Trigonométricas no triângulo retângulo.

1. Um topógrafo foi efetuar a altura do predio.
Através desse procedimento, sua altura foi de 65, qual é a distancia entre o predio e o topógrafo?

$$tg\,30° = \frac{65}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{65}{x}$$

$$\sqrt{3}x = 65 \cdot 3$$

$$1,7x = 195$$

$$x = \frac{195}{1,7}$$

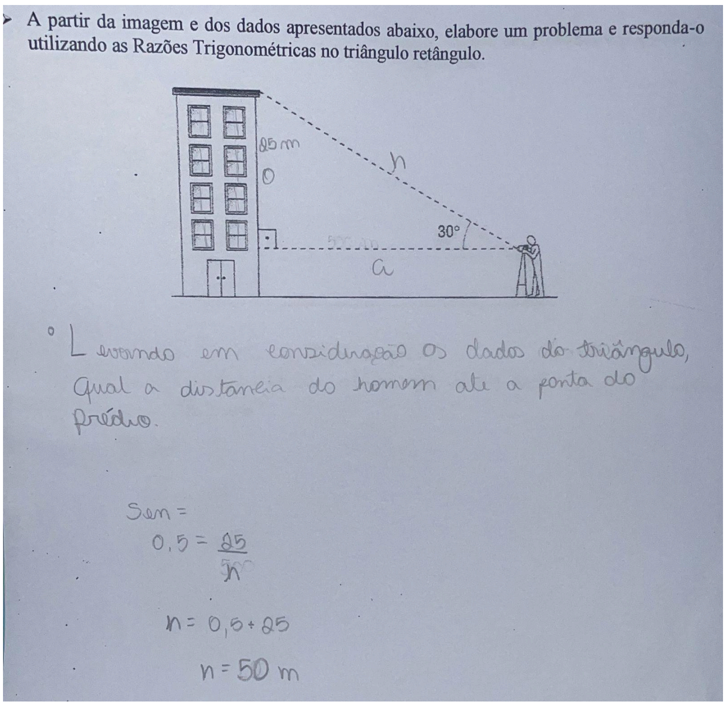
$$x \cong 114,70$$

Fonte: Protocolo do aluno A20.

Conseguimos perceber que o aluno A20 (Quadro 27) elaborou um enunciado dentro do contexto da imagem e conseguiu resolvê-lo aplicando e resolvendo a razão trigonométrica corretamente. Só podemos observar que ele não determinou uma unidade de medida para sua resposta que seria determinada a partir da altura do prédio.

Já o aluno A21 (Quadro 28), perguntou a medida da distância do homem à ponta do prédio, ou seja, ele quer determinar a medida da hipotenusa do triângulo gerado pelo teodolito, levando em consideração que a medida do cateto oposto é de 25 metros. Levando isso em consideração, percebemos que ele aplicou a razão trigonométrica corretamente e obteve a resposta correta, mas no passo a passo da resolução vemos que ele escreveu “0,5 : 25” que fez ele obter a resposta errada.

Quadro 28: Exemplo de ERP-T_6 com acerto na aplicação da técnica - A21

<table>
<tr><td colspan="2">T_6: Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto oposto.</td></tr>
<tr><td>Técnica esperada pela pesquisadora: τ_6
(τ_6) Atribuir uma medida para o cateto oposto. Aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo. Substituir o valor da tangente do ângulo concernente. Calcular a medida solicitada pelo produto dos termos da proporção.</td><td>Técnica apresentada pelo aluno na ERP:
● Aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.
● Atribuir uma medida ao cateto oposto.
● Substituir o valor do seno do ângulo conce
● Calcular o resultado pelo produto dos termos da proporção erroneamente.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

➢ A partir da imagem e dos dados apresentados abaixo, elabore um problema e responda-o utilizando as Razões Trigonométricas no triângulo retângulo.

° Levando em consideração os dados do triângulo, Qual a distância do homem até a ponta do prédio.

Sen =
0,5 = 25/h

h = 0,5 ÷ 25
h = 50 m

Fonte: Protocolo do aluno A21.

Como parte final da discussão e análise dos resultados, no tópico 4.3, apresentamos uma síntese dos achados da pesquisa.

4.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS

A título de um panorama dos resultados obtidos na pesquisa, podemos constatar, o seguinte.

Tabela 6: Panorama dos resultados de ERP

Imagem do avião		
Tipos de T	**Qt de alunos**	**Técnica apresentada pelo aluno com erro**
T_1 - Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m)	23	23
T_2 - Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa (5.000 m).	02	01
T_1 e T_2	07	03
Não elaborou o problema	03	-
Imagem do prédio		
Tipos de T	**Qt de alunos**	**Técnica apresentada pelo aluno com erro**
T_3 - Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.	05	04
T_4 - Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e da hipotenusa.	05	04
T_5 - Calcular a medida do cateto oposto, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto adjacente.	11	08
T_6 - Calcular a medida do cateto adjacente, conhecendo a medida do ângulo (30°) e do cateto oposto.	03	02
Não elaborou o problema	11	-

Fonte: Autoria própria.

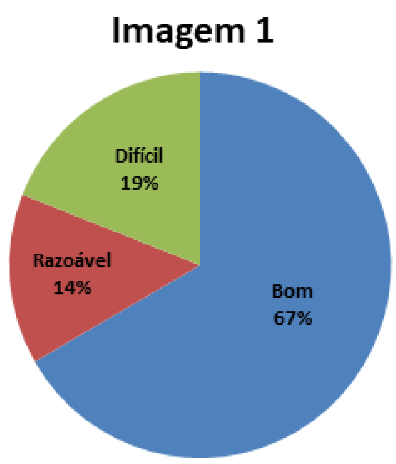
Podemos perceber na Tabela 6 que 11 dos 35 alunos não conseguiram elaborar o problema em relação à imagem do prédio. Porém, o tipo de tarefa T_1 - embora eles tenham tentado ERP em torno da imagem do avião, cometeram mais equívocos na aplicação da técnica correta para resolver o problema. Em relação a maior dificuldade apresentada para a imagem do prédio, esta ocorreu quando tentaram ERP em torno da tarefa T_5.

4.4 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO

Dos 35 alunos que participaram da pesquisa, apenas 21 responderam ao questionário, que foi-lhes solicitado de forma online a partir da plataforma do Google Forms.

Com relação à elaboração do problema a partir da imagem do avião, 67% dos alunos que responderam o questionário, relataram que gostaram muito da experiência, principalmente pelo fato de ter sido algo novo, nunca vivenciado por eles. Já os outros 33% relataram ter tido dificuldades para elaborar o problema ou não terem conseguido. A Figura 10, abaixo, demonstra esses resultados, em termos do nível de dificuldade dos alunos.

Figura 14: Percentual de respostas sobre a ERP - imagem (avião)



Fonte: Autoria Própria.

Abaixo podemos ver alguns exemplos de respostas dos alunos (Quadro 29) referente a experiência que tiveram ao ERP referente a imagem do avião.

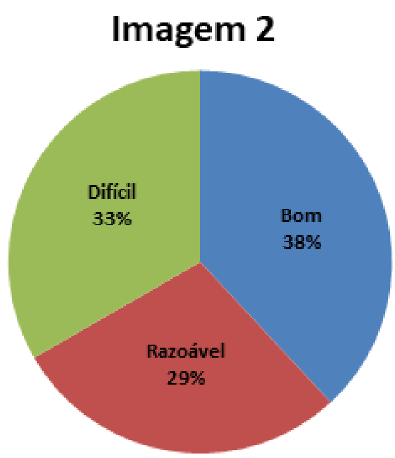
Quadro 29: Respostas de alunos referente à ERP - imagem (avião)

Aluno A	boa, já que sai da rotina de sempre e nos proporciona uma experiência nova.
Aluno B	Razoável porém fiquei um pouco confusa
Aluno C	Uma experiência boa, mas um pouco complicada.

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Já com relação a imagem (prédio), 62% dos alunos relataram que tiveram um pouco mais de dificuldades para elaborarem seus problemas, ou seja, responderam que acharam razoável ou difícil.

Figura 15: Percentual de respostas sobre a ERP - imagem (prédio)



Fonte: Autoria Própria.

Abaixo podemos ver alguns exemplos de respostas dos alunos (Quadro 30) referente a experiência que tiveram ao elaborarem seus problemas referente à ERP com a imagem (prédio).

Quadro 30: Respostas de alunos referente à ERP - imagem (prédio)

Aluno D	Essa foi um pouco mais difícil que a primeira
Aluno E	Achei um pouco difícil, mas foi bom de ser elaborado.

Aluno F	Foi uma experiência incrível, de criar e resolver um problema que eu mesmo criei. Através de uma imagem.

Fonte: Protocolo da pesquisa.

De modo geral, a experiência nas duas atividades apresentadas para a ERP foi considerada boa pela maioria dos alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo da presente pesquisa foi analisar a elaboração e resolução de problemas, a partir de imagens envolvendo razões trigonométricas, por alunos do 2º ano do Ensino Médio da rede pública, à luz da Teoria Antropológica do Didático.

Tendo em vista as orientações curriculares da Base Nacional Comum Curricular acerca do desenvolvimento de habilidades dos alunos na Educação Básica, no componente curricular de Matemática e suas Tecnologias sobre a elaboração de problemas pelos alunos, consideramos que isto se apresenta como um desafio aos professores em busca de metodologias para o desenvolvimento deste tipo de atividade em sala de aula.

Até antes da BNCC, consideramos que não havia uma divulgação ampla sobre a elaboração de problemas pelos alunos no cenário das aulas de Matemática. Particularmente, como professora da rede pública, nunca tivemos a oportunidade de participar de alguma formação promovida pela rede de ensino sobre isto.

Especialmente, foi no âmbito do PROFMAT que começamos a nos interessar por essa temática a partir da disciplina de Avaliação Educacional, onde foi proposto escolher uma temática dentro do que vínhamos trabalhando em sala de aula para aplicar a ERP com os alunos. Então, foi possível compartilhar com os colegas nossas experiências e perceber o quanto era necessário e importante vivenciar essa prática da ERP. Daí, surgiu a inquietação de buscar investigar ainda mais sobre o quanto a ERP auxiliaria na aprendizagem dos alunos.

Do ponto de vista da fundamentação teórica adotada, pensamos que tem ocorrido, ultimamente, uma difusão de artigos que tratam da elaboração de problemas, como se fosse formulação, proposição, criação. A princípio isto nos gerou certa incerteza sobre o termo mais adequado e buscamos nos aprofundar sobre as diferenças colocadas pelos autores. Assumimos assim, o termo elaboração de problemas, como proposto na BNCC e levando em conta o significado de elaboração como similar aos demais aqui colocados.

A propósito da noção de praxeologia matemática da Teoria Antropológica do Didático, consideramos pertinente sua utilização para identificarmos não apenas o texto elaborado pelos alunos na elaboração dos problemas, mas também, a essência das tarefas que estavam sendo propostas por eles. Bem como, as técnicas que eles apresentaram para os problemas elaborados por eles mesmos. Assim nos limitamos à análise do bloco do saber-fazer. Ou seja, o bloco [T, τ] que é denominado de prático-técnico.

Na metodologia desenvolvida na pesquisa, destacamos que a escolha da proposta de elaboração de problemas por meio de imagens (decolagem do avião e da altura do prédio), pareceu-nos mais propícia para uma primeira experiência dos alunos com este tipo de atividade, pois nos remete a situações-problema bem presentes em livros didáticos. Além disso, os alunos participantes da pesquisa já haviam tido a experiência de resolver problemas envolvendo essas situações. O que resta em aberto é a pergunta: Diante de um mesmo contexto de uma imagem, como foi o caso da decolagem do avião e da altura do prédio, por que os alunos conseguem resolver corretamente certos problemas e não conseguem elaborá-los.

É fato, que os alunos nunca haviam tido a oportunidade de elaborar seus próprios problemas. Além disso, por terem o costume de resolver problemas sem envolver um contexto ou um enunciado, isto pode ter reflexo em suas elaborações, levando-os, em sua maioria, a não conseguirem elaborar um enunciado para seus problemas.

Podemos perceber as dificuldades que eles apresentaram nas resoluções dos problemas elaborados por eles, pois, alguns não conseguiram aplicar a razão trigonométrica corretamente ou executar a substituição das medidas corretamente, além de não usar a unidade de medida ou aplicá-la de forma equivocada.

Outro fato que nos chamou a atenção é que os alunos podem ter procurado elaborar problemas “mais fáceis” já que eles mesmos teriam que apresentar a sua resposta para o que elaborou. Mas, aparentemente, isto não aconteceu, devido ao número de erros percebidos na ERP.

Consideramos que ao utilizarmos a ERP como estratégia de ensino-aprendizagem, os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver habilidades valiosas de resolução de problemas. Eles desenvolveram a habilidade de analisar situações, refletir sobre as informações relevantes em um enunciado, aplicar os conceitos trigonométricos adequados para chegar à solução da questão proposta no problema. Essas habilidades são essenciais não apenas para a Matemática, mas também para outras disciplinas e para a vida cotidiana.

Essa abordagem também pode aumentar o engajamento e a motivação dos alunos. Problemas desafiadores e contextualizados despertam o interesse dos alunos, pois eles podem perceber a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em situações reais. Isso torna o aprendizado mais significativo e estimulante, resultando em um melhor desempenho e participação dos alunos.

Vale destacar que ao utilizar a ERP, os alunos se envolvem em um aprendizado ativo, onde se tornam protagonistas do processo de aprendizagem. Eles exploram, experimentam e constroem seu próprio conhecimento, em vez de receber informações passivamente. Essa abordagem pode promover uma compreensão mais profunda e duradoura dos conceitos trigonométricos e de outros conteúdos matemáticos.

Diante dos resultados obtidos na pesquisa, sentimos a necessidade de avaliar por meio de um questionário o que eles acharam sobre a ERP. Ficamos satisfeitos com os resultados, pois a maioria dos estudantes gostaram da experiência e isso nos encoraja a investir em novas possibilidades de inserção da ERP no dia a dia da sala de aula.

Como continuidade deste trabalho resta em aberto outras possibilidades de pesquisa sobre a ERP, tais como:

- Utilizar outros tipos de ferramentas para elaboração dos problemas :
  -a partir de um texto;
  -a partir de um resultado;
  -a partir de outro problema;
  -a partir de uma temática;
  -a partir de um gráfico,
  dentre outros.
- Aplicação de uma metodologia diferente. Por exemplo: levar os alunos a responderem problemas elaborados pelos colegas de turma.
- Analisar as sugestões nos livros didáticos para a elaboração de problemas.
- Investigar a prática de professores sobre a ERP, bem como, a formação inicial e continuada docente para este tipo de atividade.

No limite do que conseguimos investigar sobre a ERP esperamos que esta pesquisa sirva de inspiração para investigações futuras.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; POSSAMAI, J. P. Proposição de Problemas: possibilidades e relações com o trabalho através da Resolução de Problemas. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v. 7, n. 18, maio-ago., p. 153-172, 2022. Disponível em : https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7331/5386. Acesso em 19 fev 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018**. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: Conselho Nacional de Educação - Câmara de Educação Básica, 2018a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=102481-rceb003-18&category_slug=novembro-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em 02 out. 2021.

CARNEIRO, R. F. Formulação e resolução de problemas em aulas de matemática de um 6º ano do Ensino Fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 4, n. 7, p. 1880-205, jul.-dez. 2015.

CAMPOS, M. S. ; SILVA, L. S. F. ; ALTOÉ, R. O. Formulação de Problemas no ensino de Função Afim: preferências, saberes e vivências dos estudantes do Ensino Médio. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 18, p. 1-18, 2021.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S. ; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender Matemática. 1. ed. reimp. São Paulo: Artmed, 2001, p. 151-173.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, n. 19, v. 2. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1999. p. 221-266.

DANTE, L. R. **Sistema de Ensino SER** : ensino médio, caderno 1: geometria : PR / Luiz Roberto Dante. 2. ed. São Paulo : Ática, 2015.

DANTE, L. R. **Matemática – Contexto & Aplicações.** 1° ano. Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016.

ESPINDOLA, E. B. M.; LUBERIAGA, E.; TRGALOVÁ, J. Decisões didáticas e fatores que as influenciam no ensino de razões trigonométricas. **EMP- Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20 n. 3, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/39192/pdf . Acesso em: 09 mar. 2024.

ESPINDOLA, E. B. M.; SANTANA, F. C. S. S.; SALES, M. D. L. Formulação e resolução de problemas por alunos do ensino médio sobre razões trigonométricas. In: ENCONTRO DE MATEMÁTICA DO IFPE DE PESQUEIRA, 4., 2023, Pesqueira.

Anais. Pesqueira: IFPE, 2023, p. 1-9. Disponível em: https://sites.google.com/pesqueira.ifpe.edu.br/anaisemip/edi%C3%A7%C3%B5es-anteriores/anais-do-emip-2023-vol-3-2023?authuser=2. Acesso em: 14 mar. 2024.

FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O. (Re)formulando e resolvendo problemas com o uso de tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.12, n.27, p.100-119, jan.- abr. 2023. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7242/5372. Acesso em: 12 mai. 2023.

FIGUEIREDO, F. F.; DALLA VECCHIA, R. O design de problemas com as Tecnologias Digitais no ensino da Matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez. **Anais eletrônicos**...Tuxtla Gutiérrez: CIAEM-IACME, 2015. Disponível em:http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1298/509. Acesso em: 12 mai. 2023.

GAMA, M. S. S. **Formulação e resolução de problemas sobre volume e capacidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais.** 2023. 215 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

OLIVEIRA, C. D. S. **Relações entre a praxeologia matemática em uma coleção de livros didáticos e as técnicas utilizadas pelos estudantes ao resolver tarefas envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo**. 2021. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/48046/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20Claudia%20Danielle%20da%20Silva%20Oliveira.pdf. Acesso em: 11 mar. 2024.

PERNAMBUCO. **Currículo do Ensino Médio**. Recife: SE, 2021.

RAMALHO, L. V. **Trigonometria em livros didáticos do 9º do ensino fundamental**. 2016. 88 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. Disponível em: https://grupoddmat.pro.br/wp-content/uploads/2017/03/Disserta%C3%A7%C3%A3o.-2016.-RAMALHO-L.-V.-88f.pdf. Acesso em: 11 mar 2024.

SALES, M.D.L.; ESPINDOLA, E.B.M.; SANTANA, F.C.S.S. Elaboração e resolução de problemas por estudantes do 9º ano do ensino fundamental sobre proporção. In: ENCONTRO DE MATEMÁTICA DO IFPE DE PESQUEIRA, 4., 2023, Pesqueira. **Anais**. Pesqueira: IFPE, 2023, p. 1 - 9.Disponível em: https://sites.google.com/pesqueira.ifpe.edu.br/anaisemip/edi%C3%A7%C3%B5es-anteriores/anais-do-emip-2023-vol-3-2023?authuser=2. Acesso em: 14 mar. 2024.

SALES, M.D.L.; ESPINDOLA, E.B.M.; SANTANA, F.C.S.S. Elaboração de problemas por estudantes da educação básica. **Workshop Nacional Online do Profmat.** Goiás: Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.

SILVER, E. A. Fostering creativity trough instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. **International Reviews on Mathematical Education**, 29, p. 75-80. Pittsburg, CA, 1997.

SPINILLO, A. G. et al. Formulação de Problemas Matemáticos de Estrutura Multiplicativa por Professores do Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 928-946, dez. 2017.

SOUZA, S. A. **A formulação e resolução de problemas geométricos com base em sólidos geométricos.** 2016. 155 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) -Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba. Disponível em: https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2440/2/PDF%20-%20Samilly%20Alexandre%20de%20Souza.pdf. Acesso em 18 mar 2024.

SOUZA, K. R.; KERBAUY, M. T. M. Abordagem quanti-qualitativa: superação da dicotomia quantitativa-qualitativa na pesquisa em educação. **Educação e Filosofia**, Uberlândia, v. 31, n. 61, p. 21-44, jan./abr. 2017. Disponível em: file:///C:/Users/Lenovo/Downloads/admin,+Educacao-e-Filosofia-61(31)-Artigo1-21-44+(4)%20(1).pdf. Acesso em: 18 mar. 2024.

STOYANOVA, E.; Ellerton, NF. **Uma estrutura para pesquisa sobre a formulação de problemas pelos alunos**. In: CLARKSON, P. (Ed.). **Tecnologia na educação matemática** (p. 518-525). Melbourne: Grupo de Pesquisa em Educação Matemática da Australásia, 1996.

TAVARES, J. A. **Avaliação da criatividade em matemática na elaboração de problemas e redefinição de elementos matemáticos: uma aplicação no ensino de logaritmos**. 2023. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Departamento de matemática, Brasília. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7400&id2=171056722. Acesso em: 14 mar. 2024.

TEIXEIRA, C. J.; MOREIRA, G. E. Ensino-Aprendizagem da Matemática por meio da Proposição de Problemas: uma proposta metodológica. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, Juiz de Fora, v. 6, n. 1, 2022. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/38476/25002 . Acesso em: 19 mai. 2023.

TEIXEIRA, C. J.; MOREIRA, G. E. A reformulação de problemas na perspectiva da proposição de problemas nas aulas de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 12, n. 17, 2023. Disponível em : https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7310/5380. Acesso em:19 mai. 2023.

TORTOLA, E. et al. Conhecimentos de alunos do ensino médio na proposição e resolução de problemas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.12, n.27, p.415-440, jan.-abr. 2023. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7331/5386. Acesso em: 19 fev. 2024.