UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luís João da Costa Filho

O Uso do Software Educacional GeoGebra para Solucionar Problemas de Otimização Linear com duas variáveis no Ensino Médio

RECIFE
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luís João da Costa Filho

O Uso do Software Educacional GeoGebra para Solucionar Problemas de Otimização Linear com duas variáveis no Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente

RECIFE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

C838u Costa Filho, Luís João da.
O uso do software educacional GeoGebra para solucionar problemas de otimização linear com duas variáveis no ensino médio / Luís João da Costa Filho. – Recife, 2024.
83 f.

Orientador(a): Rodrigo Genuino Clemente.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2024.

Inclui referências.

1. GeoGebra (Software). 2. Programação linear. 3. Otimização matemática. 4. Matemática (Ensino médio) 5. Matemática aplicada. I. Clemente, Rodrigo Genuino, orient. II. Título

CDD 510

LUÍS JOÃO DA COSTA FILHO

"O USO DO SOFTWARE EDUCACIONAL GEOGEBRA PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO LINEAR COM DUAS VARIÁVEIS NO ENSINO MÉDIO. "

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 02/08/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente (Orientador) – UFRPE

Profa. Dra. Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira – UFPB

Prof. Dr. Fabiano Barbosa Mendes da Silva – PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho aos meus pais por todo amor e apoio incondicional

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me dado forças suficientes para seguir em busca desse sonho.

Aos meus pais pela compreensão, pelos conselhos, amor e atenção que foram fundamentais, dando-me sempre forças para não desanimar.

A meus irmãos que sempre me ajudaram e torceram por mim.

Aos meus sobrinhos que sempre me alegravam nos momentos de tristezas e desânimos.

Aos meus professores do PROFMAT pela paciência e disponibilidade para ajudar nos momentos de estudos, sendo muito importantes para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço a meu orientador, Profº Dr Rodrigo Genuino Clemente por suas intervenções seguras e pontuais, pela troca de ideias, por seu comportamento humano e compreensivo, por sua dedicação, e pelas valiosas colaborações para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também a coordenação do PROFMAT sempre presente e resolvendo de forma paciente e esclarecedora toda parte burocrática exigida nesses anos de curso. Aos companheiros de curso, que passaram esses dois anos e meio dando força uns aos outros, em especial a Sócrates Ildefonso, pelo incentivo, motivação e compartilhamento de experiências.

"Cada sonho que você deixa para trás
é um pedaço do seu futuro que deixa de existir.
(Steve Jobs)

Resumo

Este trabalho traz uma abordagem de como solucionar problemas de otimização (maximização e minimização) usando funções lineares do tipo $f(x, y) = ax + by$, ou seja, com duas variáveis e com o auxilio do software GeoGebra, evitando cálculos algébricos e cansativos, consequentemente, trazendo novas metodologias para os alunos do Ensino Médio e cumprindo as habilidades trazidas pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Quando identificada uma situação em que se deseja maximizar ou minimizar algum problema de otimização, o primeiro passo consiste em usar a modelagem matemática, ou seja, em um problema matemático com fórmulas e expressões que represente esta situação de forma detalhada, mas que seja simples o suficiente para ser resolvido por métodos matemáticos ou software matemático. O objetivo principal desse trabalho é introduzir problemas de Otimização Linear ou Programação Linear (PL) com duas variáveis no Ensino Médio como uma extensão natural dos temas tratados em modelagem e sistemas de equações lineares. Aproveitando o ensejo, apresentaremos outros assuntos do Ensino Médio como por exemplos, solução de sistemas lineares de equações formado por duas equações e duas incógnitas via GeoGebra. Destacaremos uma simplificação de uma aplicações de problemas de otimização na medicina, evidenciando a relevância da matemática em nosso cotidiano. Por fim, deixaremos como sugestão uma Sequência Didática para ser aplicada na 1º série do Ensino Médio, mas que pode também ser aplicada em qualquer série do Ensino Médio, uma vez que poucos livros trazem essa abordagem em seus conteúdos.

Palavras-chave: Software GeoGebra, Otimização Linear, Problemas de Maximização e Minimização, Ensino Médio.

Abstract

This work presents an approach on how to solve optimization problems (maximization and minimization) using linear functions of the type $f(x, y) = ax + by$, that is, with two variables and with the help of GeoGebra software, avoiding algebraic and tiring calculations, consequently, bringing new methodologies to high school students and fulfilling the skills brought by the BNCC (National Common Curricular Base). When a situation is identified in which one wants to maximize or minimize an optimization problem, the first step is to use mathematical modeling, that is, in a mathematical problem with formulas and expressions that represent this situation in detail, but that is simple enough to be solved by mathematical methods or mathematical software. The main objective of this work is to introduce Linear Optimization or Linear Programming (LP) problems with two variables in high school as a natural extension of the topics covered in modeling and systems of linear equations. Taking advantage of this opportunity, we will present other high school topics, such as solving linear systems of equations formed by two equations and two unknowns using GeoGebra. We will highlight a simplification of an optimization problem application in medicine, highlighting the relevance of mathematics in our daily lives. Finally, we will suggest a Didactic Sequence to be applied in the 1st year of high school, but which can also be applied in any year of high school, since few books bring this approach in their content.

Keywords: GeoGebra Software, Linear Optimization, Maximization and Minimization Problems, High School.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

A Educação é uma condição para que ocorra o processo de transformação das pessoas e da sociedade, objetivando ampliar e fortalecer o pleno desenvolvimento de todos os indivíduos no mundo. Dentro deste contexto a matemática faz parte na vida do ser humano de maneira direta ou indireta. Essa inserção da matemática ocorre praticamente em todas as áreas do conhecimento, onde o papel dos educadores e a qualidade das atividades pedagógicas propostas são elementos essenciais para a construção de aprendizagens significativas. Segundo (Kammi; Livingston, 1997):

> As crianças adquirem o conhecimento lógico-matemático por meio de um processo de construção (ação), de dentro para fora, em interação com o ambiente físico e social, e não por internalização de fora para dentro por meio da transmissão social. (Kammi; Livingston, 1997, p.17). (11)

Nesse contexto, cabe ao educador ser o agente mediador do processo de desenvolvimento da aprendizagem, utilizando metodologias que desenvolvam o processo de ensino da matemática, enfatizando situações- problemas contextualizados, constituindo assim a transformação do educando, tornando capaz de desenvolver relação entre o que se aprende e a realidade do seu cotidiano.

Sabemos que matemática é uma disciplina de grande importância na formação do humana. Porém, se formos comparar pesquisas sobre o aprendizado em matemática fica evidente a dificuldade dos alunos nessa disciplina. Podemos constatar que muitos educandos não têm o mínimo domínio das operações básicas da matemática e muitas vezes precisam de formas interativas e com aplicações cotidianas para se ter um gosto pelo assunto trabalhado e consequentemente pela matemática.

Diante dessa realidade, percebemos alunos cada vez mais desinteressados, surgindo assim a necessidade dos educadores buscarem novas metodologias de ensino, visando vincular a atenção dos alunos com os conteúdos propostos. Dessa forma a aplicação de tecnologias nas aulas de matemática, surge como uma oportunidade para melhorar o aprendizado dos educandos, além de contribuir na interação e socialização.

Contudo, devemos evidenciar que as estratégias utilizadas com ferramentas tecnológicas precisam estabelecer diversas trocas, de modo que apresentem sentidos e significados, que possam ampliar o conhecimento dos alunos de forma sistematizadas, considerando a escola como ponto de partida para que ocorra essa sistematização do conhecimento e a construção de novos saberes e conceitos.

Devemos ressaltar que o ensino da matemática deve tornar os educandos agentes participativos no processo ensino-aprendizagem e não somente em receptores de informações. Sendo importante o educador aprimorar as estratégias didáticas para realizar o ensino da matemática, enfatizando sua importância no desempenho do educando, para a construção de sua relevância social, assim como sua contribuição para o desenvolvimento intelectual em cada ciclo.

É importante salientar que conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (5), o ato de estudar matemática no ambiente escolar, não significa que as atividades devem ser prontas e acabadas, mas servirá como base na realização e construção de um conhecimento acerca da compreensão de seu cotidiano fora do ambiente escolar e o professor se apresenta como um incentivador, que estimula a cooperação entre os alunos, que se torna tão importante quanto à própria interação entre professor-aluno. Nessa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam que:

> Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. (BRASIL, 1998 , p.36)(5)

Neste contexto, percebemos a importância dos softwares matemáticos como recursos didáticos relevantes, através da potencialidade desenvolvida pelo professor que agirá como mediador e realizará interferências pedagógicas, como recurso gerador de situações desafiadoras para o aluno, como uso da tecnologia e motivação, de modo que o educando é envolvido de forma ativa, tornando-o capaz de ampliar sua autoconfiança, saindo da passividade que normalmente ocorre em aulas tradicionais, em que se prioriza apenas a transmissão do conteúdo. E é na escola que os alunos aprendem sobre o mundo a partir das disciplinas principais. Conforme os PCNs:

> É papel da escola desenvolver uma educação que não dissocie escola e sociedade, conhecimento e trabalho e que coloque o aluno ante desafios que lhe permitam desenvolver atitudes de responsabilidade, compromisso, crítica, satisfação e reconhecimento de seus direitos e deveres. (BRASIL, 1998 , p.27)(5)

Vale ressaltar que a escola enquanto formadora de cidadãos deve oferecer subsídios essenciais, como laboratório de informática e matemática equipados e com acesso à internet para os educandos. Propiciando ao professor o melhor planejamentos de intervenções pedagógicas voltadas à construção do conhecimento, através de situações problemas desafiadoras, e a partir delas os alunos em conjuntos com os professores serão capazes de ampliar seus conhecimentos, desenvolvendo tanto os aspectos emocionais, assim como o social e cognitivo, tornando-se um ser crítico conhecedor de suas responsabilidades.

A Otimização Linear ou Programação Linear, mesmo não sendo um conteúdo abordado no Ensino Médio, possui grande importância por permitir a aplicação da matemática em situações do cotidiano dos estudantes e despertando interesse dos educandos. Introduziremos problemas de Otimização Linear com duas variáveis no Ensino Médio como uma extensão natural dos temas tratados em modelagem e sistemas de equações lineares. Essa proposta é viável, uma vez que especialistas na área defendem o ensino da matemática de forma contextualizada e prática. A Otimização Linear abrange desde problemas complexos, com várias variáveis e restrições, até problemas mais simples, os quais daremos ênfase. É por meio de situações simples, que refletem aplicações reais, que os alunos têm o primeiro contato com essa poderosa técnica. Como a modelagem matemática e a resolução de sistemas lineares já fazem parte dos currículos atuais, essa proposta pode ser implementada em escolas que não têm flexibilidade para adicionar novos conteúdos. Além disso, o uso de software permite a resolução gráfica dos problemas, ampliando as possibilidades de ensino, incluindo o ensino de geometria plana, espacial e analítica.

No final das contas, apesar dos desafios encontrados no ensino da matemática na educação básica, acredita-se que essa abordagem possa ser aplicada em sala de aula como uma opção diferente dos métodos tradicionais. O objetivo do professor é, portanto, apresentar o conteúdo de uma maneira que o relacione com situações do dia a dia, com o intuito de facilitar a compreensão por parte dos estudantes. Combinado com o uso de um software matemático, espera-se que os alunos se interessem ainda mais.

Segundo (Macambira, *et al.* 2016)(16), problemas de otimização são problemas em que buscamos maximizar ou minimizar uma função objetivo sujeita a certas restrições. No caso em que as funções e as restrições são lineares, estamos abordando a área da otimização denominada Programação Linear.

No currículo da Rede Estatual de Pernambuco, a qual faço parte, a oferta de problemas de máximo e mínimo está voltado apenas para funções quadráticas na 1º série do Ensino Médio com a seguinte habilidade especifica:

> (EM13MAT503PE42) Investigar e reconhecer pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos, envolvendo superfícies, matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais. (PERNAMBUCO, 2020, p.6)(18)

Cumprindo os objetos de conhecimentos: Pontos de máximo e de mínimo de funções quadráticas. Não sugerindo que se trabalhem problemas de maximização e minimização em função afim. Porém, ainda no currículo de Pernambuco da 1º série do Ensino Médio, observando a habilidade especifica:

> (EM13MAT302PE18) Construir modelos matemáticos para resolver situações-problema em vários contextos, envolvendo funções polinomiais do 1º e 2º graus, ou seja,funções afim e quadrática, respectivamente, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais. (PERNAMBUCO, 2020, p.4)(18)

O professor pode usar a habilidade (EM13MAT302PE18) e trabalhar problemas de Otimização Linear mais simples com duas variáveis e sendo resolvidos via o software GeoGebra, que é o objetivo deste trabalho, além de revisões ou até mesmo novas abordagens de alguns conteúdos e que são pré-requisito para soluções de problemas de otimização.

Resolveremos problemas de Otimização Linear em função afim com o uso do software GeoGebra, usaremos a versão online de sua calculadora gráfica através do link: <www.geogebra.org/graphing?lang=pt> com enfoque no método gráfico, ou seja, por meio de construções gráficas, que é muito útil para exploração de muitos conteúdos no Ensino Médio.

Apresentaremos a importância do uso GeoGebra no processo de ensino aprendizagem, em resoluções de problemas envolvendo função afim, sistema de equações e sistema de inequações, resolveremos questões de edições anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) evitando cálculos e contas, apenas como o auxilio do softwre GeoGebra.

No Capítulo 2, abordaremos o conceito de função afim e casos particulatres, como função linear e sua representação gráfica, além de explorar o tema de sistemas de equações com duas incógnitas e sistemas de desigualdades. Vamos resolver esses sistemas utilizando o GeoGebra e aplicá-los na resolução de questões práticas.

No capítulo 3, discutiremos um pouco da Programação Linear (PL) e enunciaremos o Teorema da PL. Abordaremos soluções de problemas de Otimização Linear com duas variáveis via software GeoGebra e usaremos os conceitos estudados no Capítulo 2, usando exemplos diretos e contextualizados. Já no Capítulo 4, apresentaremos uma simplificação bem básica na área da medicina (tratamento oncológico) do modelo matemático trabalhado na literatura. Exemplificaremos o caso de uma dieta simples e básica com o objetivo de ter um custo mínimo e atendendo às necessidades nutricionais diárias que o corpo humano necessita.

Por fim, no Capítulo 5, sugerimos uma proposta de sequência didática matemática com o uso do GeoGebra, envolvendo conhecimentos prévios dos alunos e a apropriação de novos saberes, no caso, solucionar problemas de Otimização Linear com duas variáveis.

2 Função afim, Sistemas Lineares e Soluções através do GeoGebra

Nesse capítulo, discutiremos um pouco sobre função afim e seu gráfico, também abordaremos sobre sistemas de equações com duas equações e duas incógnitas e sistemas de inequações, solucionando esses sistemas por meio do software GeoGebra e fazendo a resolução de alguns problemas.

Segundo (LEONARDO, 2020)(13) considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma função de A em B se, e somente se, para cada elemento x pertencente ao conjunto A existe, uma correspondência única com um único elemento de B.

Podemos representar a definição acima da seguinte forma: $f : A \to B$ (que pode ser lido, função de A em B). Quando f é uma função de A em B, podemos também dizer que f leva A para B, ou que f é uma aplicação de A em B,(em outras palavras, f associa cada elemento do conjunto A e o leva ou aplica em um único elemento do conjunto B).

Para indicar o valor que a função f assume para cada elemento x do conjunto A escrevemos $f(x)$ (lemos: "f de x"). É comum usar a letra x para representar um elemento genérico do conjunto A e a letra y para designar o valor correspondente $f(x)$. Sendo x a variável independente e y a variável dependente.

2.1 Função afim

Esta seção se reporta a uma breve abordagem da função afim haja vista que resolveremos problemas de otimizações lineares voltado para os estudantes do Ensino Médio, especificamente os da 1ª série, portanto, trabalharemos com funções lineares de no máximo duas variáveis.

De acordo com (LEONARDO, 2020)(13) chama-se de função afim uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$, para todo x pertencente ao conjunto do números reais. Os números reais a e b são os coeficientes angulares e lineares, respectivamente, da função afim.

Exemplo 2.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 5$, em que $a = 2$ e $b = 5$.

Exemplo 2.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x + 3$, em que $a = -1$ e $b = 3$.

2.1.1 Casos particulares de função afim.

(LEONARDO, 2020)(13) define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **função constante** quando existe um número real b tal que $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ou seja, $a = 0$ e b é um número real.

Exemplo 2.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5$.

Exemplo 2.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2$.

De acordo com (LEONARDO, 2020)(13) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada função identidade quando é definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ainda segundo esse Autor as funções do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, são chamadas de funções lineares e uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$ é crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ e será decrescente quando quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Para todo x_1 e $x_2 \in X$.

2.1.2 Gráfico da função afim

O gráfico de uma função afim é uma reta. Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$.

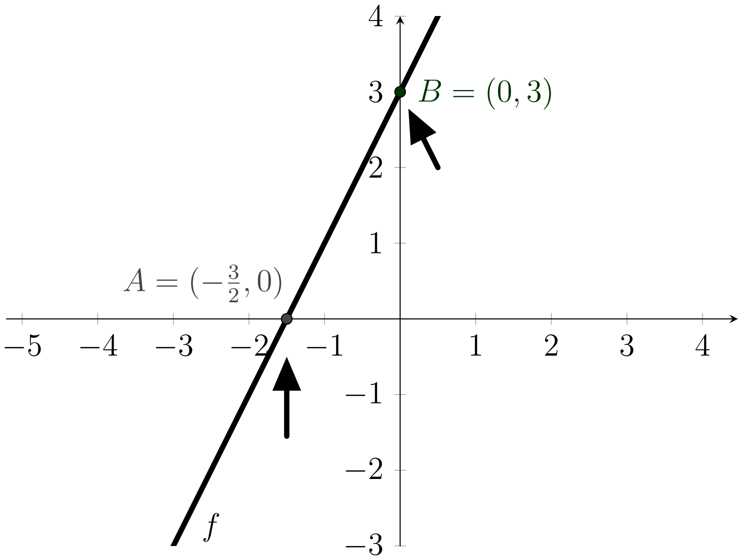
Exemplo 2.5. Construir o gráfico da função $y = 2x + 3$.

Sabendo que o gráfico da função $y = 2x + 3$ é uma reta, precisamos somente conhecer dois de seus pontos e traçar uma reta passando por eles. Esses dois pontos podem ser obtidos atribuindo-se dois valores arbitrários para x e determinando suas imagens y.

(i) Para $x = 0$ temos $y = 3$, par ordenado $(0; 3)$

(ii) Para $x = \frac{3}{2}$ temos $y = 0$, par ordenado $(\frac{3}{2}; 0)$

Colocamos esses pontos no plano cartesiano e traçamos uma reta passando por esses dois pontos. Observe o gráfico abaixo.



Um ponto importante é o ponto em que o gráfico de uma função afim $f(x) = ax+b$, intercepta o eixo y, ou seja, quando substituímos $x = 0$. Daí, teremos: $f(0) = a(0) + b \Rightarrow f(0) = b$ ou seja, para $x = 0, y = b$. Assim, $(0, b)$ é o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas (eixo y) e chamamos o valor de b que é a coordenada y do par ordenado (x, y) de coeficiente linear. Note que o coeficiente linear da função do Exemplo 2.5 é igual a 3, e podemos encontrar substituindo $x = 0$ ou pela analise gráfica do ponto de intersecção da reta com o eixo y.

2.1.3 Gráfico da função afim usando o software GeoGebra

Usaremos o software geogebra para desenharmos os gráficos de funções afim e daí não precisaremos atribuir valores para x pois, o próprio software fará a construção das retas. Também construiremos regiões definidas por inequações, intersecções de retas e regiões, tudo via o software GeoGebra e evitando cálculos extensos e cansativos.

GeoGebra é um software de geometria dinâmica muito popular. Esta palavra vem da combinação das palavras geometria e álgebra. O GeoGebra está disponível no site:<www.geogebra.org.>. Com acesso a essa página, o usuário observa as ferramentas presentes na plataforma e executa o que for de interesse para seu uso. Usaremos a calculadora gráfica do software GeoGebra, que pode ser acessa diretamente usando o link: <https://www.geogebra.org/graphing>. Também podemos baixar a versão de forma gratuita para computadores e dispositivos móveis (tablets e smartphones) sendo excelente para trabalhar em sala de aula.

Esse software GeoGebra fora desenvolvido por Markus Hohenwarter para uso em salas de aula de todos os níveis. Esse projeto teve início na Universidade de Salzburgo,

e continuou a se desenvolver na Florida Atlantic University, além de ser traduzido para diversos países, incluindo o Brasil em (Basniak e Estevam, 2014)(3).
O software possui uma interface amigável que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros.

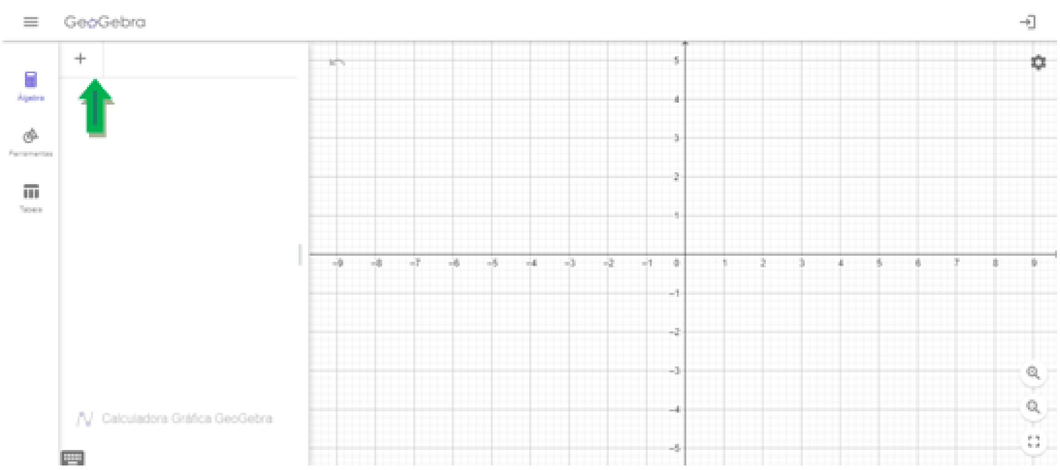
Manuseando o GeoGebra, é possível criar pontos, segmentos de reta, polígonos, círculos, trabalhar com coordenadas, equações e desigualdades expressas no plano cartesiano, dentre outras criações espaciais, cônicas, quádricas, de modo que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino.

Sabemos que o gráfico de uma função afim é uma reta, e pode ser determinado por dois pontos distintos. No entanto, criaremos esse gráfico via o GeoGebra, precisando apenas digitar a função e o próprio software se encarrega de desenhar essa reta. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.6. Esboce o gráfico da função: $y = 3x - 5$.

Solução: No campo entrada (onde fica o sinal de +) digite a função dada, veja a Figura 1.

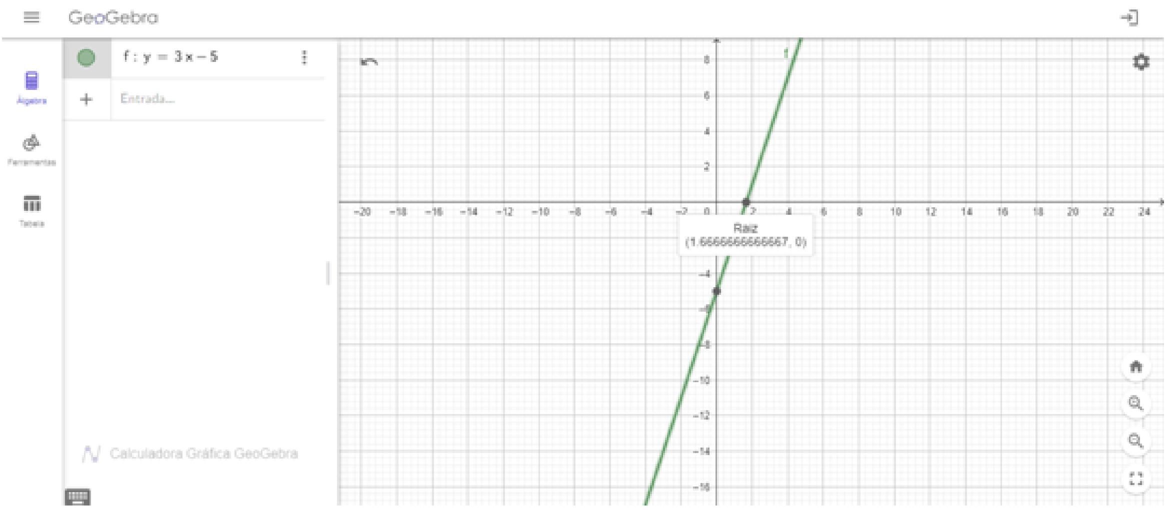
Figura 1 – Coordenadas do ponto de interseção



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que ao digitar a função, automaticamente o gráfico é desenhado, observe na Figura 2. Além disso, automaticamente vem mostrando os pontos de intersecção com o eixo x (eixo das abscissas) que também será a raiz da função e o eixo y (eixo das ordenadas).

Figura 2 – Coordenadas do ponto de interseção

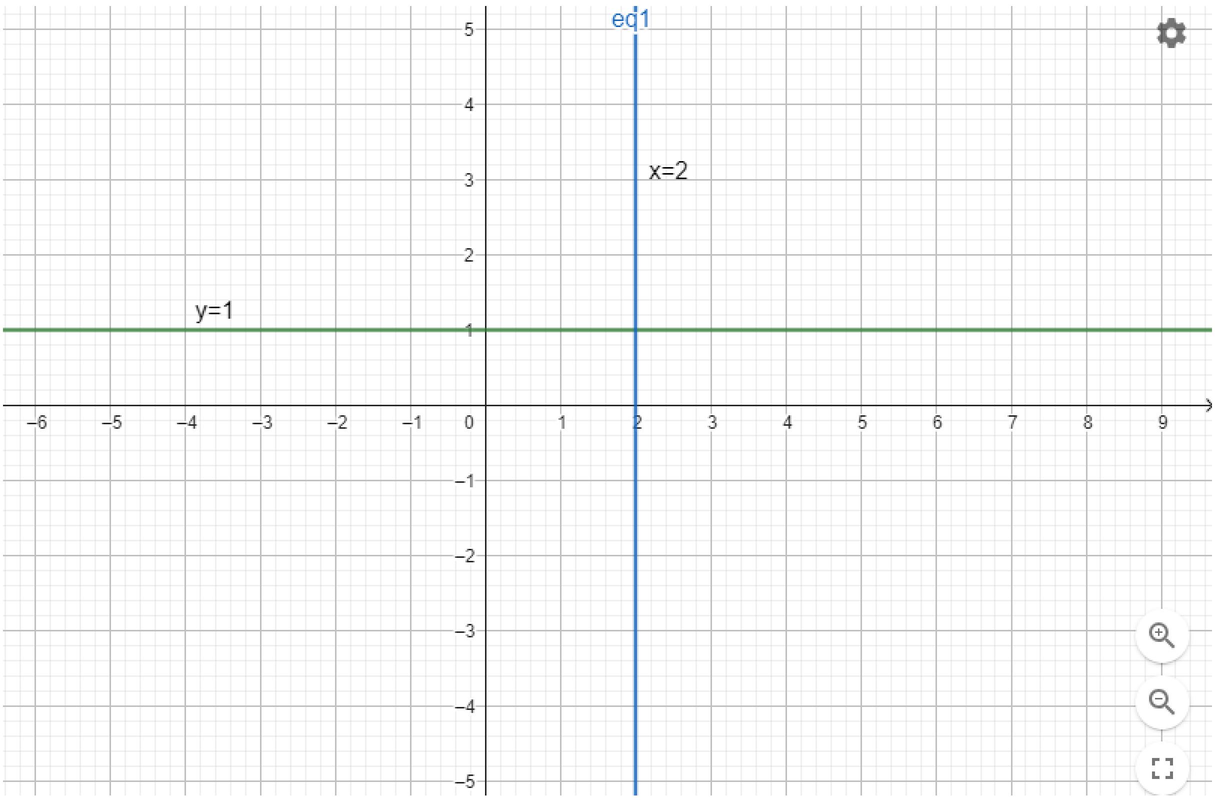


Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy.

Observação 2.7. Caso a função seja constante, seu gráfico será uma reta paralela ao eixo x ou y, como descrito na Figura 3, a seguir:

Figura 3 – Gráfico das funções constantes: $y = 1$ e $x = 2$



Fonte: Elaborado pelo autor

2.2 Sistema lineares e Solução de Sistemas lineares formado por duas equações e duas incógnitas via-GeoGebra

Como neste trabalho iremos solucionar questões de Otimização Linear com duas variáveis, ou seja, situações problemas que serão maximizados ou minimizados usando o softwrae GeoGebra, se faz necessário saber solucionar sistemas de equações formado por duas variáveis e duas equações, graficamente estamos falando em encontrar o ponto de interseção entre duas retas, porém usaremos o software GeoGebra, deixando a parte algébrica de lado.

Segundo (Fugita *et al.* 2015) (9) equação linear é toda equação que pode ser expressa na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, em que $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as incógnitas; $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são números reais denominados coeficientes e b é um número real chamado termo independente.

Observação 2.8. As incógnitas $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ geralmente aparecem como $x, y, z...$ nas equações lineares.

Exemplo 2.9. $2x + 3y = 8$ é uma equação linear com incógnitas x, y e coeficientes 2 e 3.

Dada uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, toda sequência de números reais$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ denominada ênupla ordenada, é solução de uma equação linear se, e somente se, $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$. Note que o par $(4, 0)$ é uma solução da equação do Exemplo 2.9, pois $2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$.

Um sistema linear é um conjunto formado por m equações lineares e n incógnitas. A relação que se pode ter entre o numero de incógnitas e o número de equações é qualquer uma dessas três hipóteses: $m > n$, $m < n$ e $m = n$.

De acordo com (Fugita *et al.* 2015)(9) Sistema linear é um conjunto L de m equações lineares com n incógnitas, expresso na forma:

$$\mathrm{L} = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n = c_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_1x_1 + z_2x_n + ... + z_nx_n = c_n \end{cases}$$

em que $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ são as incógnitas; $a_n, b_n, ...z_n$ são os coeficientes; e $c_1, c_2, ..., c_n$ são os termos independentes. E como um sistema linear é composto de equações lineares, as incógnitas $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ geralmente aparecem como $x, y, z...$ nos sistemas lineares.

Salientamos que nosso estudo está focado em sistemas de equações em que $m = 2$ e $n \leq 2$. ou seja, sendo um sistema da forma:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = c_2. \end{cases}$$

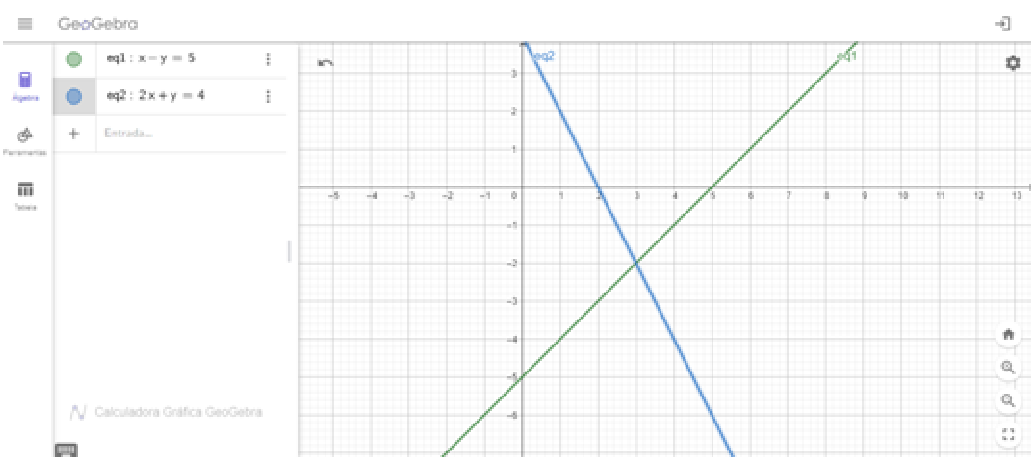
Podemos resolver esse sistema de algumas formas algébricas diferentes, usando o método da substituição, método da adição, dentre outros, porém, faremos a solução desses sistemas (duas equações e duas incógnitas) usando o software GeoGebra e o fato de que a solução de um sistema linear geometricamente desse tipo, se dá através da intersecção de duas retas, ou seja, o ponto de intersecção (par ordenado) será a solução do sistema.

Exemplo 2.10. Encontre a solução do sistema de equações

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

Solução: Usando o GeoGebra, iremos esboçar os gráficos dessas duas equações, *equação 1:* $x - y = 5$ e *equação 2:* $2x + y = 4$, que podem ser vistos na Figura 4, abaixo:

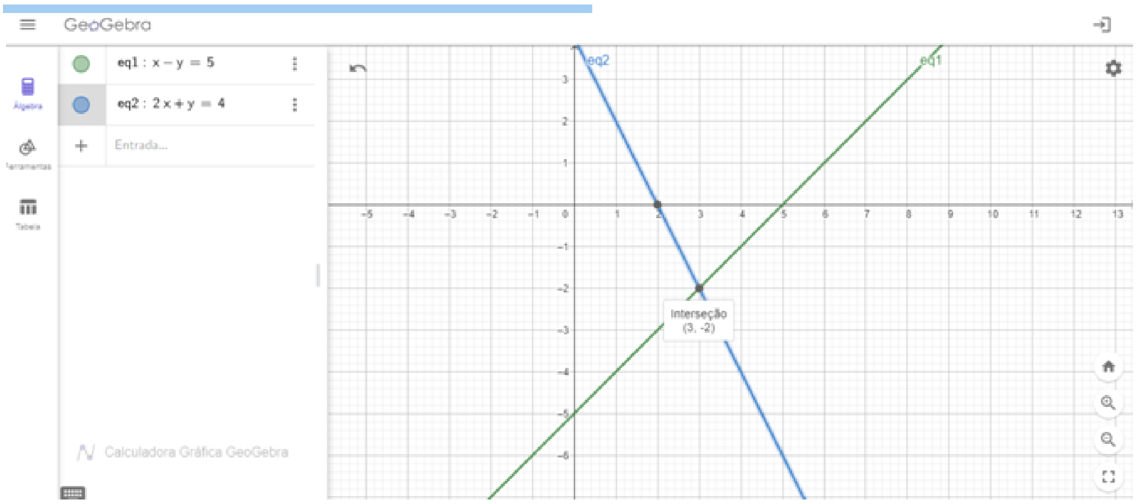
Figura 4 – Solução gráfica de um sistema de equações do 1º grau



Fonte: Elaborado pelo autor

Para encontrar a solução, podemos tocar na interseção dessas retas, ou seja, no ponto que pertence as duas retas, descrito na Figura 5.

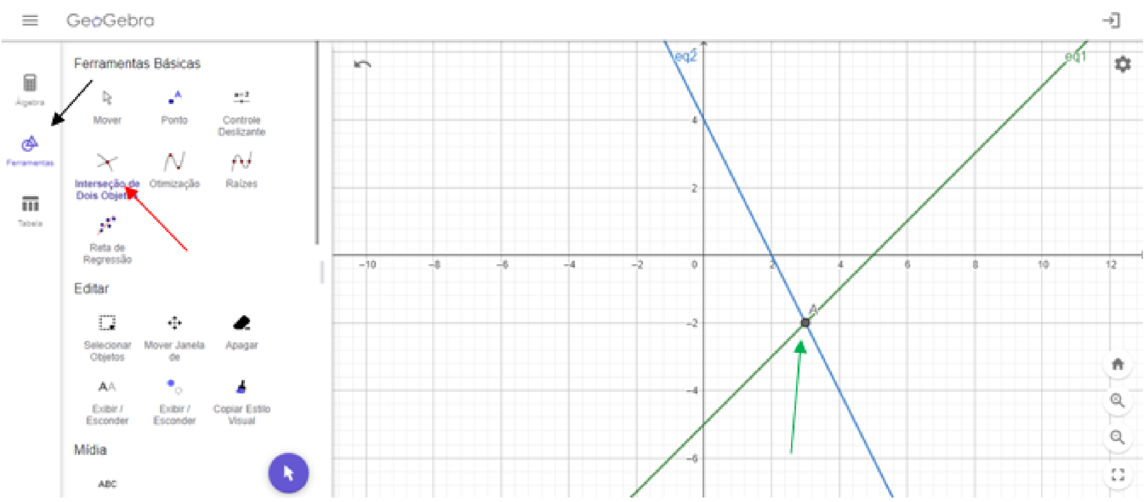
Figura 5 – Interseção entre retas



Fonte: Elaborado pelo autor

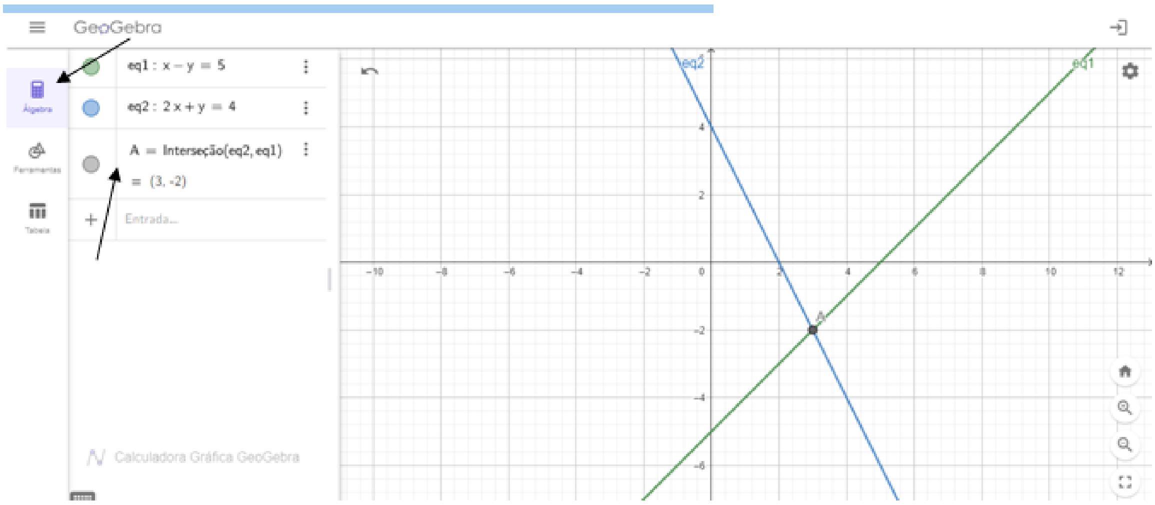
Ou então, uma forma que deixará com a notação já de um par ordenado, será a seguinte: clica em ferramentas, no lado esquerdo da pagina do GeoGebra, em seguida, clica em interseção de dois objetos, e por fim, clica nas duas retas, que estão se intersectando que aparecerá a interseção já com um ponto sobre a mesma. Em seguida, clicando em Álgebra, você saberá os valores exatos, das coordenadas do ponto de interseção, ou seja, justamente a solução do sistema. Observe nas Figura 6 e Figura 7.

Figura 6 – Ambiente Geogebra - Interseção de dois objetos



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 7 – Coordenadas do ponto de interseção



Fonte: Elaborado pelo autor

Como usamos as incógnitas x e y e o par ordenado é da forma (x, y) isso quer dizer que o valor de $x = 3$ e $y = -2$.

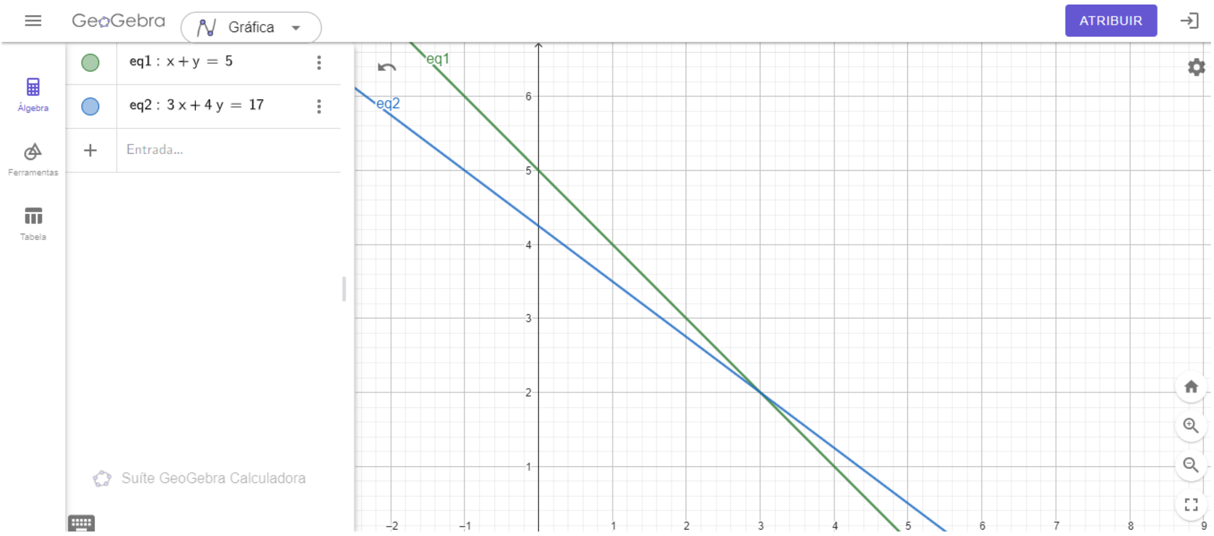
Exemplo 2.11 (ENEM 2020 Digital - Adaptado.)**.** Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos leves e médias acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação. Quantas infrações médias esse motorista cometeu?

Solução: Inicialmente devemos equacionar o problema e montar o sistema de equações. Chamaremos as infrações do tipo leve de x e as infrações do tipo média de y. Em relação a quantidade do numero de infrações, temos 5, logo temos $x + y = 5$. Esse motorista teve um total de 17 pontos acrescentados, como cada infração leve são 3 pontos e as infrações médias são 4 pontos. Daí, teremos $3x + 4y = 17$. Teremos agora que resolver o sistema de equação

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases}$$

e determinar o valor de y. Digitaremos essas duas equações no geogebra e observaremos o ponto de intersecção das duas equações (retas), formado pelo par do tipo (x, y), então o valor da nossa segunda coordenada (y), será a solução do problema.

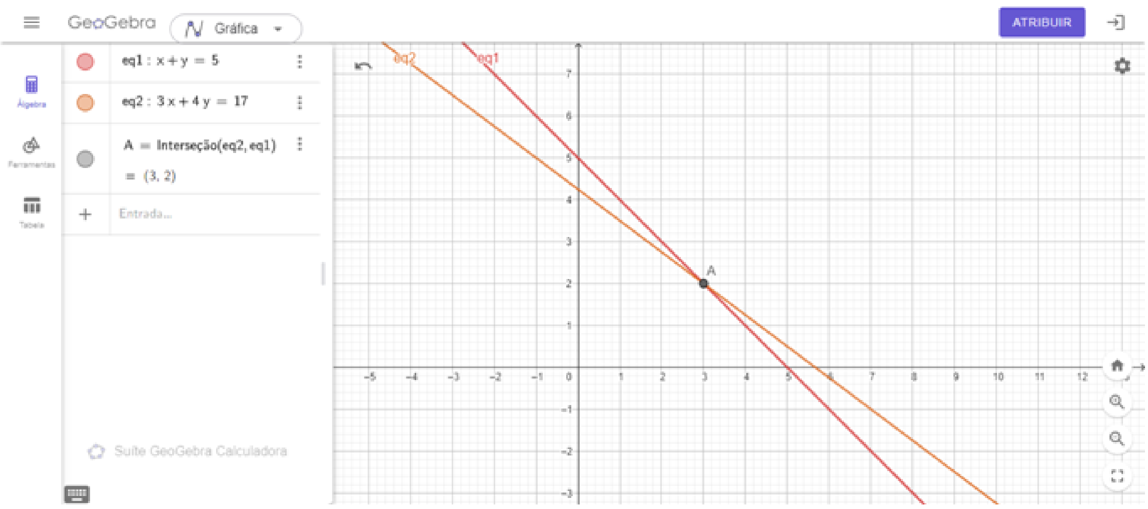
Figura 8 – Funções das infrações



Fonte: Elaborado pelo autor

Clicando na opção ferramenta da Figura 8, em seguida clicando em interseção de dois objetos e logo em seguida clicar nas duas retas que você quer saber o ponto de interseção, automaticamente o software mostra o ponto comum as duas retas. Então clicando em Álgebra (parte superior da barra de ferramenta) você já consegue ver o valor das coordenadas do ponto de interseção. A Figura 8 e Figura 9 ilustram esta situação.

Figura 9 – Número de infrações



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que nas coordenadas do ponto A(3, 2) temos $x = 3$ e $y = 2$. Portanto, esse motorista cometeu 2 infrações médias.

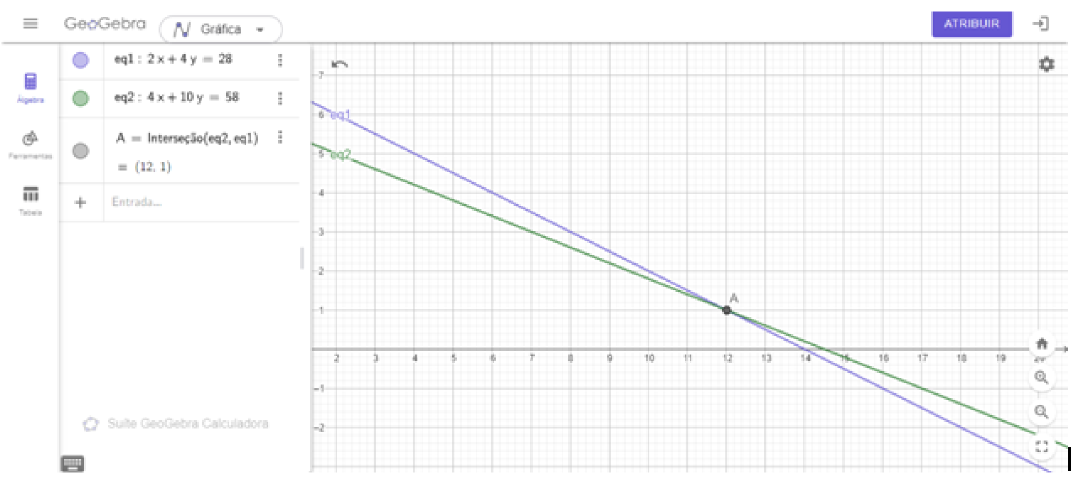
Exemplo 2.12. (Souza, 2012)(20) (Adaptado). A combinação de dois ou mais átomos forma uma molécula .Assim, a massa de uma molécula pode ser determinada adicionando-se as massas de seus átomos componentes. Para determinar por exemplo, a massa de uma molécula de SO_2 (dióxido de enxofre) que é composto por um átomo de enxofre e dois átomos de oxigênio, deve adicionar a massa atômica do enxofre que corresponde a 32,1 u(massa atômica) a duas vezes a massa atômica do oxigênio que corresponde a 16u, ou seja, 1 x 32,1u + 2 x 16u = 64,1u. Sabendo que a massa de uma molécula C_2H_4 (etileno) corresponde a 28u, e a massa de uma molécula de C_4H_{10} (butano) corresponde a 58u, determine a massa atômica do carbono e do hidrogênio.

Solução: Para solucionarmos esse problema chamaremos a massa de carbono (C) de x e a de hidrogênio (H) de y. Montando o nosso sistema de equações, temos

$$\begin{cases} 2x + 4y = 28 \\ 4x + 10y = 58. \end{cases}$$

Digitando essas equações no geogebra e seguindo os mesmos passos do exemplo 2.11 encontramos o ponto de interseção dessas retas (equações). Veja a solução gráfica na Figura 10.

Figura 10 – Interseção das massas atômicas



Fonte: Elaborado pelo autor

Daí, temos que $x = 12$ e $y = 1$. Portanto, a massa atômica do carbono é igual a 12u e a massa atômica do hidrogênio é igual a 1u.

Exemplo 2.13. (ENEM-2010) Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta é de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco. Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos. Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão.

a)58 g e 456 g

b)200 g e 200 g

c)350 g e 100 g

d)375 g e 500 g

e)400 g e 89 g

Solução: Separamos os dados para cada 100g de arroz, 1,5 mg de ferro e 2mg de zinco. Já o feijão em cada 100 g contém 7 mg de ferro e 3mg de zinco. A pessoa adulta necessita de 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.

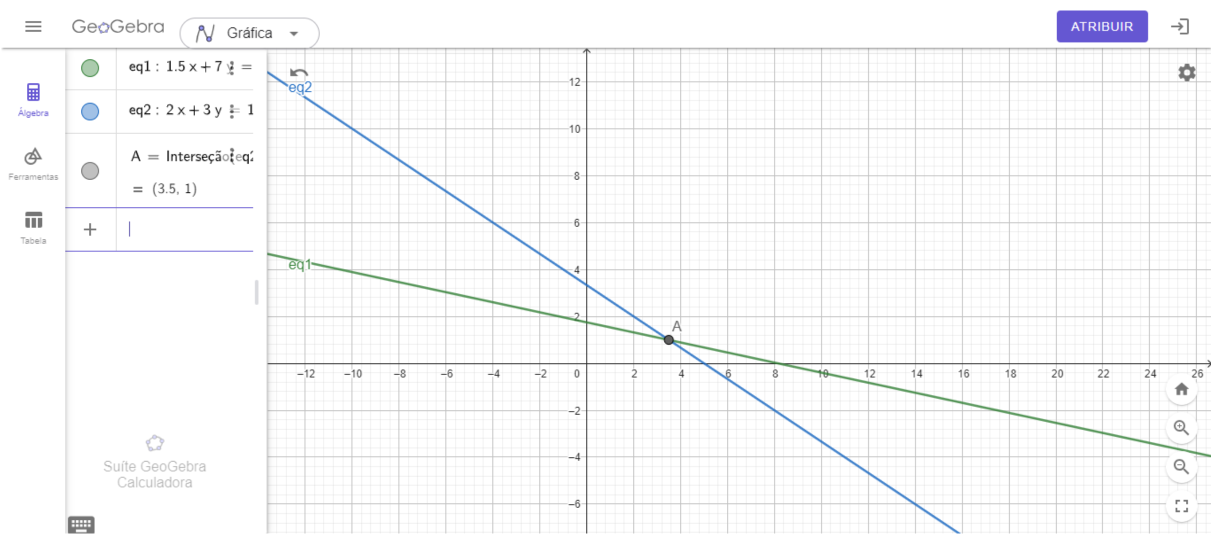
Arroz (100g)	**Feijão (100g)**	**Necessidade**
1,5 mg de Ferro	7mg de ferro	12,25 mg de Ferro
2,0 mg de Zinco	3,0mg de zinco	10,0 mg de Zinco

Seja $x =$ quantidade de Arroz e $y =$ quantidade de Zinco. Teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1,5x + 7y = 12,25 \\ 2x + 3y = 10. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações usando o software GeoGebra teremos que a solução gráfica fica como a Figura 11.

Figura 11 – Gráfico das quantidades necessárias de feijão e arroz



Fonte: Elaborado pelo autor

Ou seja, como o ponto $A(3.5, 1)$ é o ponto de interseção das duas retas, logo é a solução do sistema acima. Então como solução teremos $x = 3,5$ e $y = 1$. Porém, lembre-se que é para cada $100g$ então devemos multiplicar $3,5 \times 100g = 350g$ de Arroz e $1 \times 100g = 100g$ de Feijão. Portanto, a solução é a alternativa D.

2.2.1 Inequação e Desigualdade no Plano

Nesta seção mostraremos como criar o semiplano de uma inequação linear, uma vez que esta identificação é importante na resolução gráfica de problemas envolvendo a Otimização Linear. Pois a solução deste tipo de situação está na região correspondente a chamada de região viável representada pela interseção dos semiplanos e representados pelas desigualdades lineares que modelam o problema.

Considere uma reta contida no plano cartesiano, essa reta divide o plano em duas regiões, e cada uma dessas regiões denomina-se semiplano, ressaltando que, representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas variáveis é uma reta.

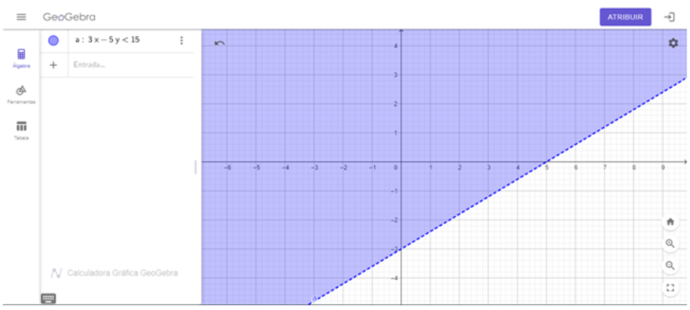
Segundo (Lima, 2014)(15), toda reta decompõe o plano em duas regiões, chamadas de semiplanos. Se a reta for representada por $ax + by + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, os semiplanos por ela determinados são definidos pelas desigualdades: $ax + by + c \leq 0$ e $ax + by + c \geq 0$.

Solucionaremos os problemas com o auxilio do software GeoGebra, digitando as desigualdades no mesmo campo que inserimos as funções, e automaticamente o software desenhará a região (semiplano), ou seja, conjunto de todos os pontos que satisfazem a inequação. Uma ilustração pode ser vista no exemplo a seguir:

Exemplo 2.14. Determine a região gerada a partir da inequação $3x - 5y > 15$.

Faremos essa solução gráfica e com o auxilio do GeoGebra. No campo entrada digite a inequação dada, $3x - 5y > 15$ e automaticamente a região é esboçada, como mostrado na Figura 12, a seguir:

Figura 12 – Região gerada por uma inequação



Fonte: Elaborado pelo autor

Observando a região acima temos que qualquer ponto $P(x, y)$ pertencente a essa região é solução da inequação $3x - 5y > 15$. Outra observação é que a equação da reta $3x - 5y = 15$ fica tracejada, uma vez que são os valores maiores que essa reta, caso fossem os valores maiores ou iguais, ou seja, $3x - 5y \geq 15$ a reta ficaria toda pintada, no caso, o gráfico da equação da reta $3x - 5y = 15$.

Nossos problemas de Otimização Linear com duas variáveis, serão solucionados mediante a solução de sistemas de inequações, para isso, iremos encontrar de forma gráfica a solução de um sistema de inequações usando o software GeoGebra. O processo é bem semelhante ao de sistema de equações visto anteriormente, porém, como as inequações geram regiões, temos que a interseções dessas regiões quando existirem formaram um polígono (região limitada), ou uma região ilimitada, sendo justamente os vértices desses polígonos gerado pela interseção dessas regiões, imprescindíveis para aplicarmos o Teorema da Programação Linear, que abordaremos no Capítulo 4.

2.3 Solução de sistemas lineares formados por inequações com no máximo duas incógnitas via GeoGebra

A forma de solucionar sistemas lineares de inequações graficamente no GeoGebra é bem semelhante à forma que fizemos na resolução de sistemas de equações, que já fora explicado na Seção 2.2. Em um sistema com m desigualdades lineares, da forma

$$\begin{cases} a_1x - b_1y + c_1 \leq 0 \\ a_2x + b_2y - c_2 \leq 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_mx + b_my + c_m \leq 0, \end{cases}$$

o conjunto de soluções é a interseção dos m semiplanos correspondentes às m inequações, podendo formar regiões limitadas ou ilimitadas.

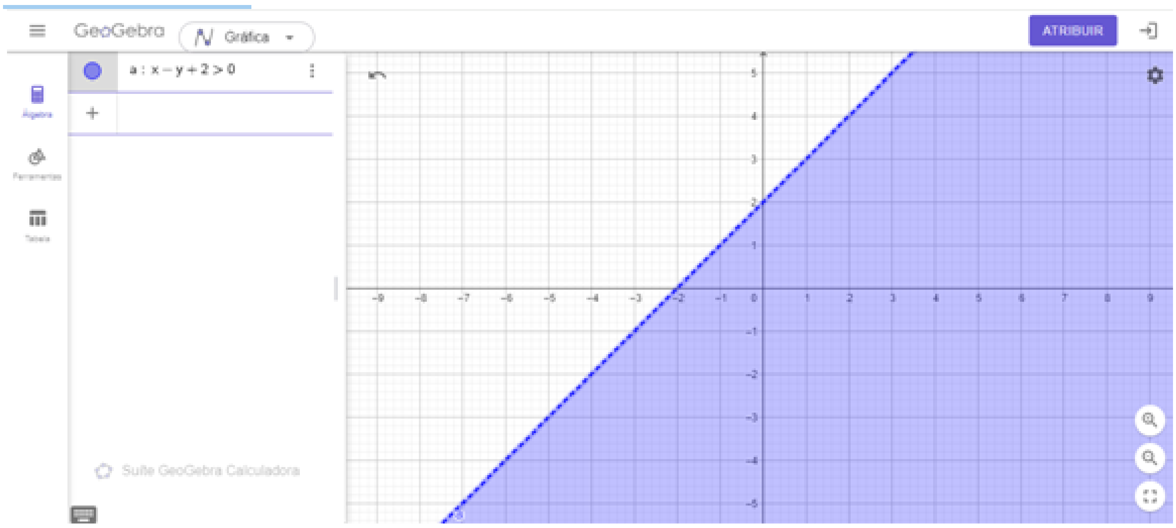
Exemplo 2.15. Represente graficamente o sistema de inequações

$$\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y - 6 < 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Solução: Ao digitarmos essas inequações no campo entrada do software GeoGebra, automaticamente, encontraremos as regiões de cada uma dessas desigualdades (inequações).

Essas regiões depois de criadas no software, se existirem intersecções surgirá uma região com uma nova cor, representando a intersecção do sistema de inequações. Mostraremos região por região e no fim a intersecção dessas regiões, porém digitando todas as inequações o software se encarrega de mostrar as soluções e também a intersecção de uma única vez. Observe as figuras abaixo: Ao digitarmos a inequação $x - y + 2 > 0$ no campo entrada teremos a região mostrada na Figura 13.

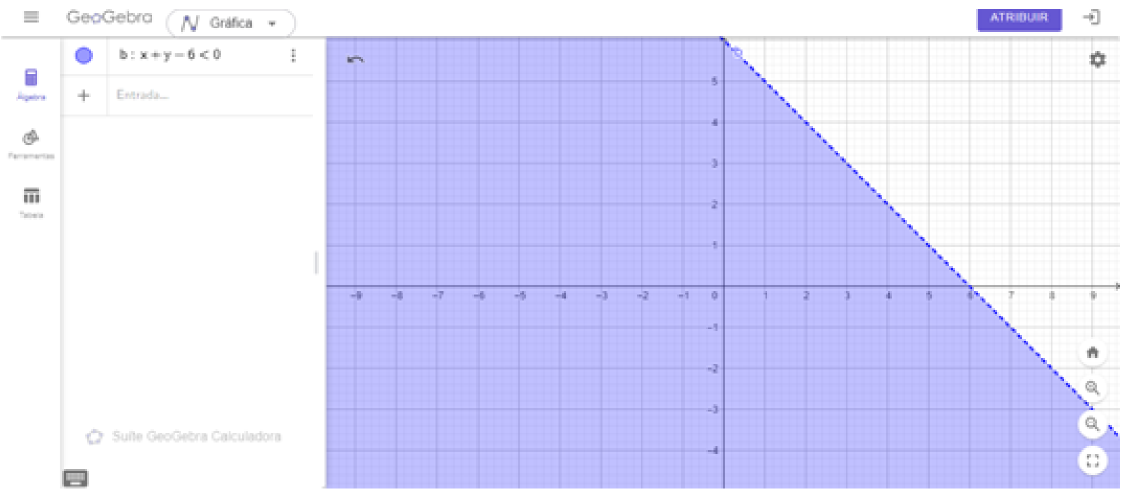
Figura 13 – Região da inequação $x - y + 2 > 0$



Fonte: Elaborado pelo autor

A solução gráfica da inequação $x + y - 6 < 0$ é dada pela Figura 14.

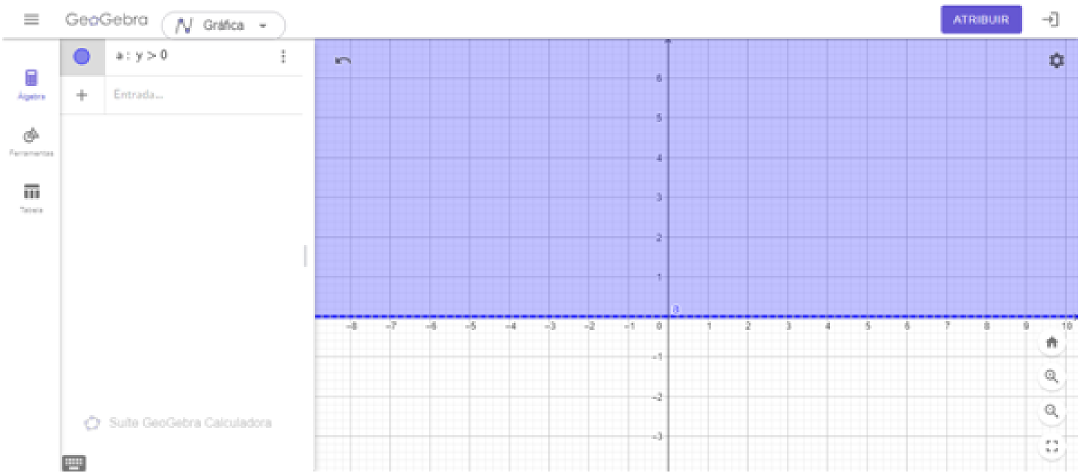
Figura 14 – Região da inequação $x + y - 6 < 0$



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 15 ilustra a solução gráfica da inequação $y \geq 0$.

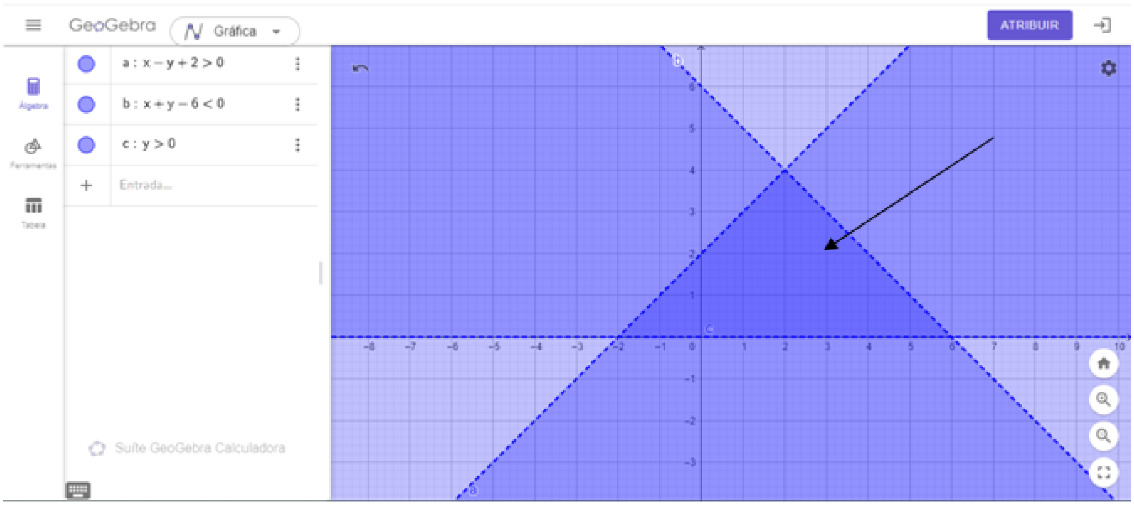
Figura 15 – solução gráfica da inequação $y \geq 0$



Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, juntaremos agora as três regiões de uma única vez e se criará uma região mais escura, que é justamente a solução do sistema de inequações, logo, precisamos digitar as três inequações no campo entrada do GeoGebra, e a solução gráfica do sistema será gerada, descrito na Figura 16, observe a seta que está indicando para a região que é solução gráfica do sistema.

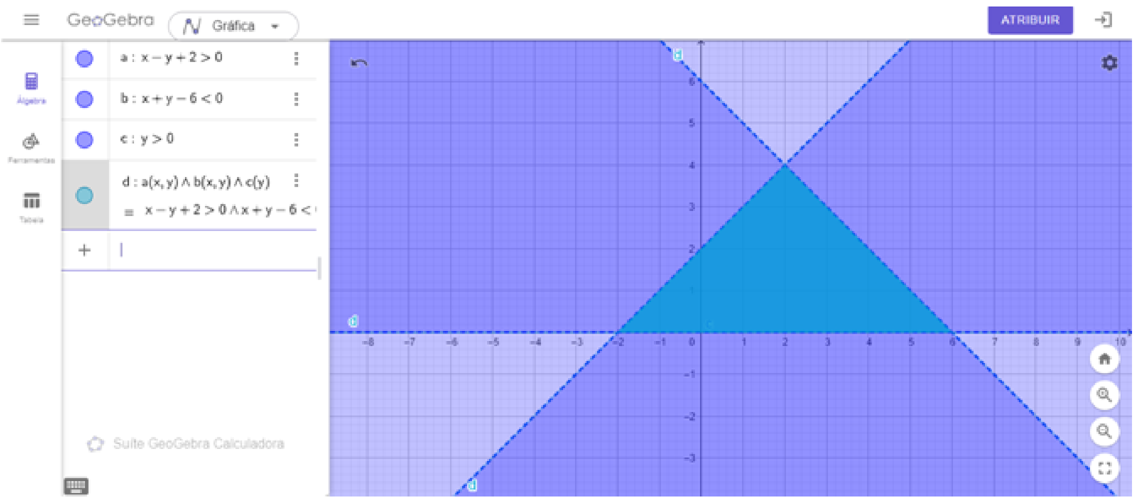
Figura 16 – Interseção entre regiões



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos melhorar essa região mudando sua cor, quando digitando as letras que estão representando cada inequação, veja que na primeira inequação tem uma letra **a**: antes da inequação $x - y + 2 > 0$, na segunda inequação $x + y - 6 < 0$ a letra **b**: e a letra **c** antes da inequação $y \geq 0$. Abaixo da última inequação, digitaremos a interseção dessas inequações usando essas letras e entre as letras o símbolo $\wedge$. No exemplo acima teremos que digitar $a \wedge b \wedge c$ e obteremos a seguinte região na cor azul mais claro, como podemos observar na Figura 17.

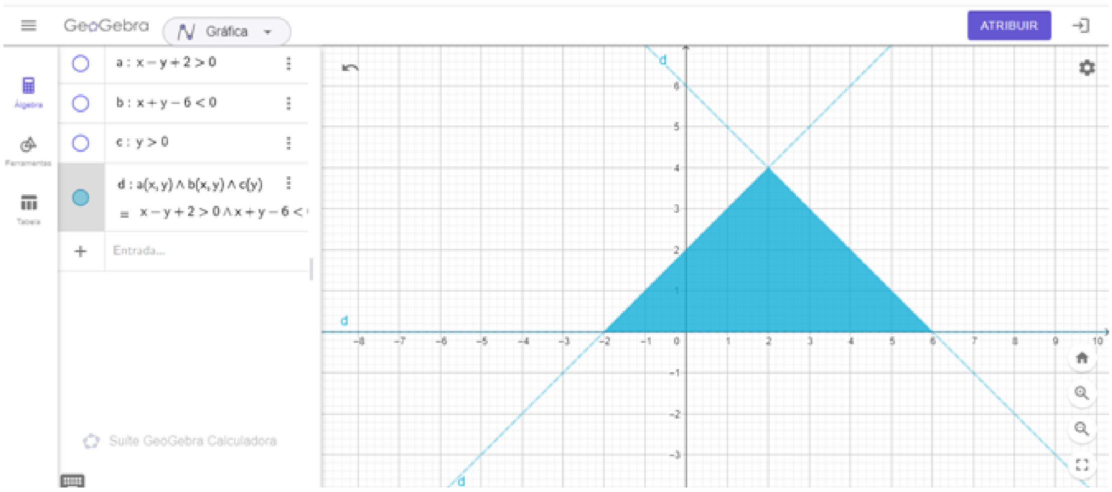
Figura 17 – Solução gráfica de um sitema de inequações



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos deixar apenas essa região que é a intersecção do sistema de inequações, no exemplo acima (azul clara) no GeoGebra, desmarcando as outras regiões clicando no circulo pintado com a cor da região antes da letra, conforme Figura 18.

Figura 18 – Enfatizando a solução gráfica de um sistema de inequações



Fonte: Elaborado pelo autor

Essa região que iremos obter mediante a solução de um sistema de inequações, será chamada de região viável. (conjunto de soluções ótimas, isso quer dizer que qualquer ponto que pertença a região é solução do sistema). Discutiremos sobre ela no próximo capítulo. Vejamos um exemplo envolvendo sistemas de inequações e que será solucionado usando o software GeoGebra.

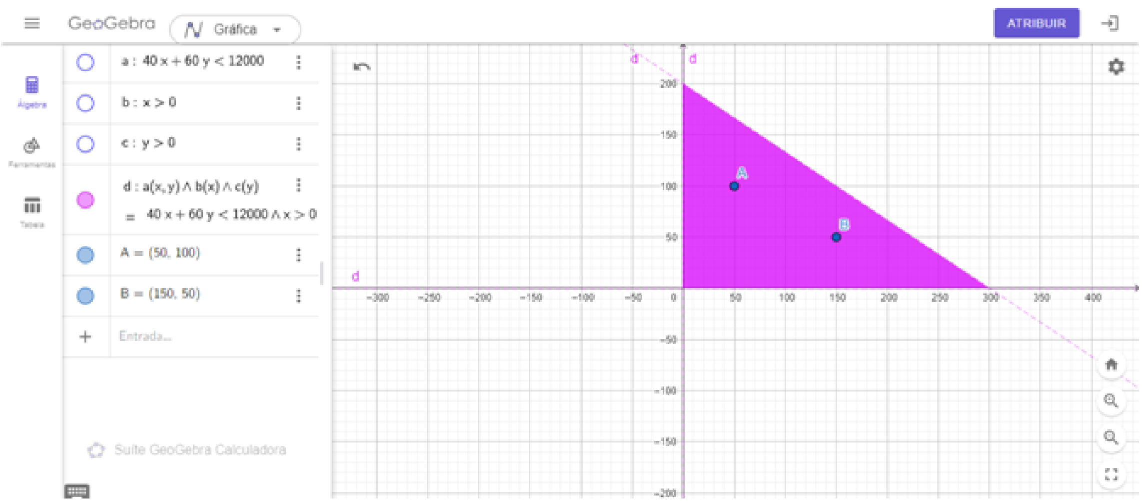
Exemplo 2.16. - (Leonardo, 2016)(12) (Adaptado) Uma fábrica produz dois tipos de calça, A e B, sendo x a quantidade diária produzida da calça A e y, a da calça B. Cada unidade produzida de A custa $R\$40,00$ e cada unidade produzida de B custam $R\$60,00$ sendo, portanto, o custo total diário da produção conjunta de A e B igual a $C = 40x + 60y$. Sendo o custo total diário igual a $R\$12.000,00$ determine dois pares de valores possíveis para x e y.

Solução: Usaremos o GeoGebra para solucionar o problema digitando o sistema de inequação

$$\begin{cases} 40x + 60y < 12000 \\ \qquad y > 0 \\ \qquad x > 0. \end{cases}$$

Lembre-se que x e y não são números negativos, e devem ser números naturais, uma vez que não existe unidades produzidas fracionadas e muito menos negativas. No campo entrada da janela do software digitaremos as inequações acima e seguindo os passos do exemplo anterior, encontramos a região que representa todos os pontos que são soluções da inequação. E nessa região, pegando qualquer par ordenado que pertença a essa região encontramos uma solução da inequação. Segue a solução gráfica, descrita na Figura 19.

Figura 19 – Solução em forma de uma região



Fonte: Elaborado pelo autor

Localizamos dois pontos nessa região, $A(50, 100)$ e $B(150, 50)$, ou seja, no ponto A temos $x = 50$ e $y = 100$ e no ponto B temos $x = 150$ e $y = 50$. Sendo duas soluções aceitáveis para o problema proposto.

3 Otimização Linear

Neste capítulo, abordaremos soluções de problemas de otimizações lineares via software GeoGebra, usaremos os conceitos estudados no Capítulo 2, junto com o Teorema da Programação Linear(PL), citado na Seção 2.1.

Durante a II Guerra Mundial, a Pesquisa Operacional - PO que segundo (Silva, *et al.* 1998) (19) é um método cientifico de tomada de decisões, sendo resultado de estudos realizados por equipes interdisciplinares de cientistas contratados para resolver problemas militares de ordem estratégica e tática. Diante dessa necessidade de planejamento e coordenação de diversas atividades logísticas, como, por exemplo, o transporte de alimentos, armas, vestuário, medicamentos e equipamentos de transporte de pessoas e também da importância do uso eficiente dos recursos disponíveis, que eram escassos (por exemplo, quantidade de água).

A quantidade de soldados e o tipo de armamento deveriam ser bem variados. Foram projetados e selecionados para cada batalha, devido à sua dimensão, pois havia diversas batalhas diferentes acontecendo e cada uma delas era diferente. Cada uma delas com suas particularidades. Então vários cientistas se reuniram-se. Daí, foram estabelecidos acordos para criar um método científico para lidar com esses problemas operacionais militares, o que resultou na denominação Pesquisa Operacional-PO, que deriva do termo em inglês Operational Research.

De acordo com (Macambira, *et al.* 2016)(16), na Pesquisa Operacional lidamos com problemas de Otimização, que são problemas onde buscamos maximizar ou minimizar uma função objetivo sujeita a certas restrições. Abordaremos problemas de Otimização Linear ou Programação Linear com duas variáveis, que é uma das várias áreas da PO.

Com o êxito da utilização dos métodos empregados durante o período após a guerra, a Indústria logo demonstrou interesse em aplicá-los. No entanto, durante o período pós-guerra, houve uma grande expansão populacional e trabalho, problemas bem complexos em relação ao planejamento, coordenação e uso eficiente de máquinas e materiais, dentre outras coisas como resultado dessa expansão.

A Pesquisa Operacional é encarregada das atividades para as organizações civis, na saúde teve um grande progresso, sobretudo nos Estados Unidos. Com o êxito e o progresso das aplicações, houve também uma evolução. Além disso, houve um progresso na teoria, já que os cientistas desejavam apresentar de forma matematicamente o sucesso alcançado na prática.

Em conformidade com (Hillier ; Lieberman, 2015)(10) a programação Linear hoje, é uma ferramenta padrão que economizou milhões de dólares para a maioria das empresas ou negócios de tamanho moderado nos vários países industrializados do mundo; e seu uso em outros setores da sociedade vem se espalhando rapidamente. Sendo muito utilizada na economia, negócios e engenharia.

3.1 Modelando Um problema de Otimização Linear

Quando lidamos com problemas de otimização, precisamos fazer a modelagem da situação, ou seja, converter cenários do mundo real em problemas matemáticos. Segundo (Macambira, *et al.* 2016):

> No modelo matemático, representamos um problema usando variáveis, ou seja, as variáveis vão representar as informações que desejamos encontrar como solução de um problema. Aprendemos desde as séries iniciais a modelar situações matematicamente.(Macambira, *et al.* 2016)(16)

Neste sentido, como a Otimização Linear é utilizada em estudos de investimentos financeiros, produção, indústrias, medicina, etc. ou seja, situações do mundo real, em que buscamos a melhor solução para determinadas situações, devemos fazer a modelagem desses problemas, em busca da melhor solução.

(Macambira, *et al.* 2016)(16) afirma que a resolução de um problemas de Programação Linear envolve duas etapas, a primeira é a modelagem do problema, ou seja, modelos formados por equações e inequações. Já a segunda corresponde a resolução propriamente dita desses problemas. Conforme (Macambira, *et al.* 2016)(16) para elucidar problemas de modelagem na Otimização basicamente precisaremos desenvolver alguns passos:

(i) encontrar as variáveis de decisão do modelo;

(ii) identificar a função objetivo que deve ser maximizada ou minimizada.

(iii) identificar as restrições do modelo;

Vejamos um exemplo de problema de Otimização Linear modelado:

Exemplo 3.1. Maximizar $L = 5x + 3y$

Sujeito a :

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 15 \\ x - 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- x e y são denominadas variáveis de decisão;

- $4x + 3y \leq 15$; $x - 2y \leq 10$ são denominadas restrições técnicas do problema;
- $x \geq 0$; $y \geq 0$ são denominadas restrições de não negatividade;
- $L = 5x + 3y$ é denominada função objetivo do problema;

Uma representação algébrica da formulação genérica de um modelo de Otimização Linear pode ser representado como segue: Maximizar ou minimizar a função objetivo:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \text{ (a)}$$

sujeito às restrições:

$$\begin{gathered} a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq r_1 \text{ (b)} \\ b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n \geq r_1 \text{ (c)} \\ . \\ . \\ . \\ z_1x_1 + z_2x_2 + ... + z_nx_n \geq r_1 \text{ (d)} \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \text{ (e)} \end{gathered}$$

em que:

(a) representa a função matemática que codifica o objetivo do problema, denominada função objetivo.

(b) - (d) representam as funções matemáticas lineares que sistematizam as principais restrições do problema.

(e) restrição de não-negatividade , equivalente a dizer que as variáveis de decisões podem assumir qualquer valor positivo e até mesmo zero.

Portanto, um modelo linear deve ser representado expressões (funções, equações e inequações) lineares.

3.2 Solucionando um problema de Otimização Linear com duas variáveis

Segundo (Silva, *et al.* 1998)(19) a construção do modelo matemático, no caso um modelo linear, é a parte mais chata para solucionar um problema de Otimização Linear. Não tendo uma regra fixa, mas pode-se criar um roteiro que ajuda a ordenar o raciocino e chegar a solução do problema seguindo os seguintes passos:

(i) Determinar as variáveis de decisão: Representam os aspectos numéricos do problema real, intrinsecamente relacionados à decisão a ser tomada ao final da resolução do modelo linear.

(ii) Determinar a função objetivo: A expressão/função que calcula o valor que pretende maximizar ou minimizar, em função das variáveis de decisão.

(iii) Determinar as restrições: Expressar as restrições como uma relação linear(igualdade ou desigualdade) usando as variáveis de decisões.

Enunciaremos o Teorema Fundamental da programação Linear que é o último passo para concluirmos a solução de um problema de Otimização Linear, ou seja encontrar a solução ótima, que é a aquela que satisfaz todas as restrições do problema e entregue a entrega a melhor solução.

Teorema 3.2. ***(Teorema Fundamental da Programação Linear)***

Seja $f(x_1, ..., x_n) = ax_1 + ... + ax_n + b$ definida uma região poliedral convexa A do $\mathbb{R}^n$. Suponha que f assuma um valor máximo(mínimo) nesta região. Então, se A possui vértice(s), este valor máximo(mínimo) será assumido num vértice.

A demonstração desse teorema não será apresentada, no entanto, pode ser econtrada em (Boldrini *et al.* 1980)(6).

Portanto, definido corretamente o modelo matemático da contextualização do problema, executando de forma correta os passos explicados acima e aplicando o Teorema Fundamental da Programação Linear, nessa ordem, chegaremos a solução dos problemas de Otimização Linear de duas variáveis apresentados neste trabalho. Para problemas com maior número de variáveis utilizaremos o Método Simplex para a resolução dos mesmos.

Como nossos problemas de Otimizações Lineares estão sendo limitados a duas variáveis, uma vez que se trata de uma sugestão de abordar problemas de Otimização Linear usando o GeoGebra no Ensino Médio por meio do método gráfico, podemos então concluir que o Teorema 3.2 também está válido para esses problemas, pois qualquer região poligonal convexa A do $\mathbb{R}^2$ é subconjunto de alguma região poliedral convexa A do $\mathbb{R}^n$.

No entanto, em regiões limitadas, (Boldrini *et al.* 1980)(6) afirma que para qualquer função objetivo, tem necessariamente máximo e mínimo e sendo assim ele reescreve o Teorema Fundamental da PL para este caso da seguinte forma:

Teorema 3.3. *Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$ definida numa região poliedral convexa limitada A.Então f assume seus valores máximo e mínimo nos vértices de A.*

Observação 3.4. Vale ressaltar que toda região poligonal convexa limitada A se encaixa perfeitamente no Teorema 3.3.

Assim, podemos dizer que .os modelos de problemas de Otimização Linear ou Programação Linear podem ser formulados seguindo-se três passos. Uma vez definida as variáveis de decisões, determinar a função objetivo que será maximizada ou minimizada, dependendo do problema e medindo assim o desempenho dessa função. Explicitar as restrições técnicas a fim de garantir que as soluções estejam de acordo com as limitações técnicas impostas pelo sistema. E por fim, aplicar o Teorema Fundamental da PL ou sua reescrita.

Resolveremos o Exemplo abaixo, de forma direta, que fora apresentado na seção 3.1 de forma gráfica e com o auxilio do GeoGebra, colocando em prática esse roteiro, ou seja, já definida explicitamente as variáveis de decisões, a função objetivo e as restrições técnicas.

Exemplo 3.5. Seja a função objetivo lucro (L) e variáveis de decisões: x e y. Maximize a função objetivo: $L = 5x + 3y$ sobre as seguintes restrições

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 15 \\ x - 2y \leq 10 \end{cases}$$

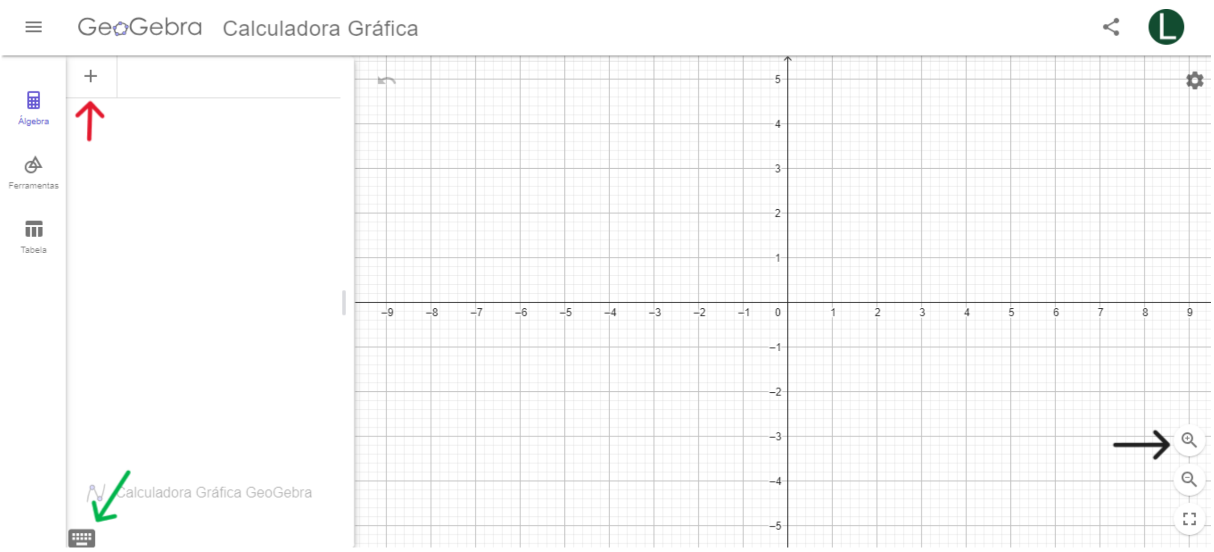
e lembrando das restrições de não negatividade, pois as variáveis de decisão x, y não podem ser negativas, ou seja, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Solução: Usaremos o software GeoGebra (método gráfico) com essas duas variáveis (x, y) e maximizando a função lucro (L). Faremos uma sequência de passos no GeoGebra para concluirmos a solução ótima do exemplo, ou seja, o valor do maior lucro e quando esse lucro acontece. Maximizar a função $L = 5x + 3y$ sobre as restrições

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 15 \\ x - 2y \leq 10 \end{cases}$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Alguns passos de como construir gráficos, regiões, interseções e outras informações usando o software GeoGebra fora explicado no Capítulo 2, mas para esse primeiro exemplo faremos bem detalhado a fim de que o leitor possa se familiarizar mais com o ambiente e a partir dos próximos exemplos, mostraremos novas sugestões que podem ser usadas para solucionar os problemas de otimização de duas variáveis de forma mais simples. E caso os passos já explicados no Capítulo 2 não tenham ficado claros para o leitor, abordaremos de uma forma bem detalhada e esclarecedora. Abrindo a calculadora gráfica do GeoGebra aparecerá a seguinte janela, observe na Figura 20.

Figura 20 – Ferramentas do software geogebra

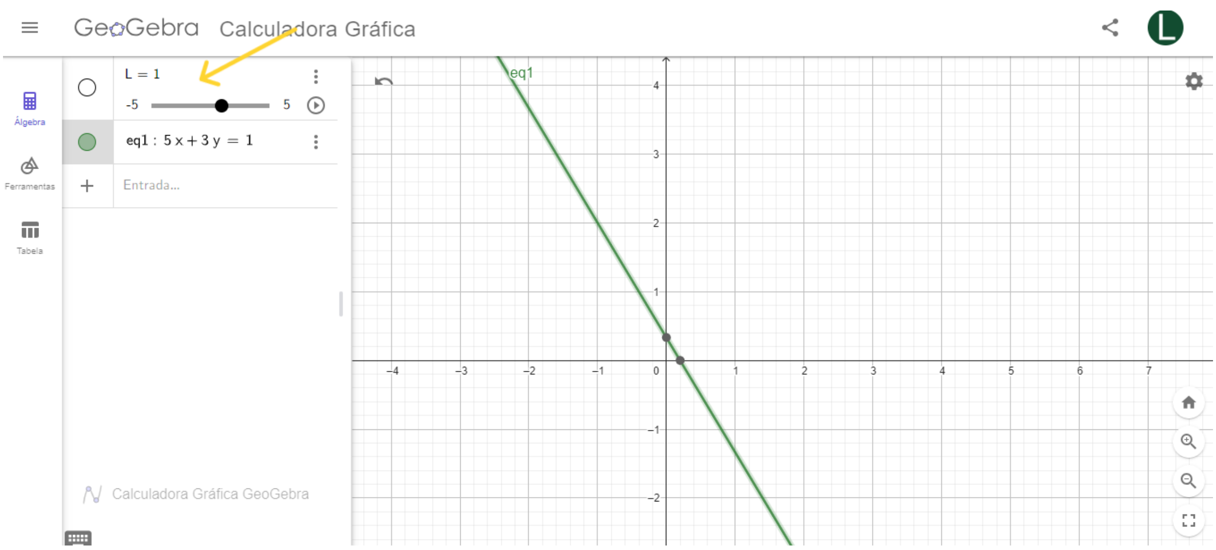


Fonte: Elaborado pelo autor

O campo do lado esquerdo do sinal de + (indicado pela seta vermelha), será onde digitaremos as funções e restrições do exemplo. A seta verde está indicando o teclado virtual e os sinais de + e − dentro da lupa (observe a seta preta) servirão para alterar a escala. Usando essas informações, digitando as restrições do exemplo e fazendo todo o processo em passos, teremos:

Passo 1. Digite no campo entrada (+) a função $5x + 3y = L$, logo em seguida, o próprio GeoGebra gera o que é chamado de controle deslizante (seta amarela) da função objetivo, conforme descrita na Figura 21:

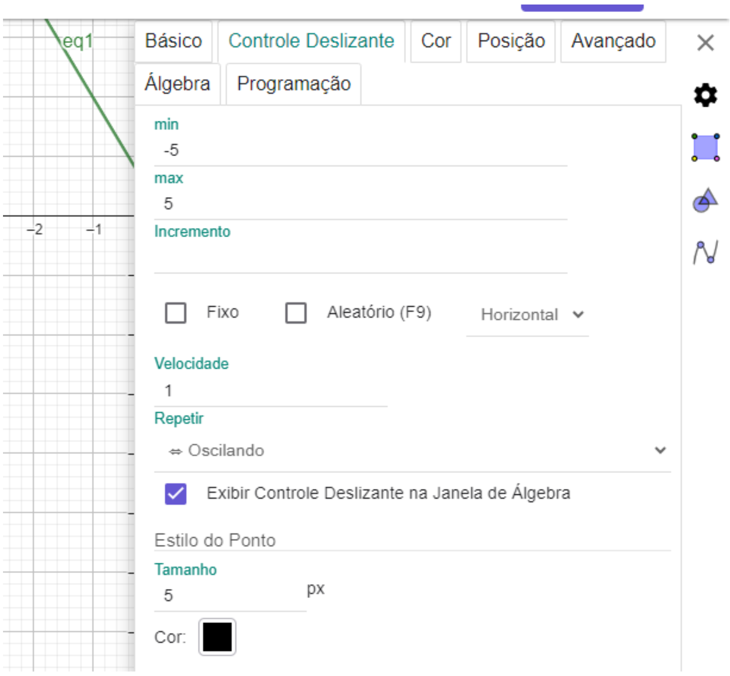
Figura 21 – Controle deslizante



Fonte: Elaborado pelo autor

A função desse controle deslizante é percorrer todo o plano cartesiano dentro do intervalo de mínimo e máximo escolhido pela função objetivo. Porém você pode alterar esses valores quando quiser, clicando nesses três pontos da linha do controle deslizante, depois em configuração, uma nova janela abrirá, em seguida clica em controle deslizante e digita os valores desejado em min (menor valor) e max (maior valor), depois é só fechar a janela que já fica salvo automaticamente, que pode ser visto na Figura 22.

Figura 22 – Alterando intervalo do controle deslizante



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2. Inserir campo entrada (+) o sistema de equações

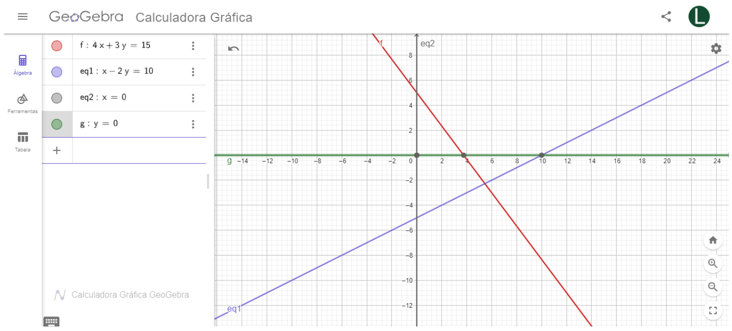
$$\begin{cases} 4x + 3y = 15 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$$

assim como as equações

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Observe que o geogebra desenhou todas as retas, que são os gráficos das funções inseridas. Reta verde representa a função $y = 0$, reta vermelha a função $4x + 3y = 15$, reta azul mostra o gráfico de $x - 2y = 10$ e reta cinza a função $x = 0$. A Figura 23 ilustra esta situação.

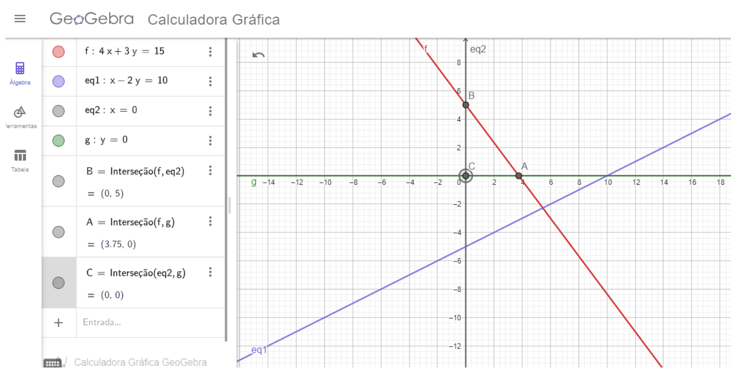
Figura 23 – Criando gráficos



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3. Marcar as intersecções entre essas retas. Vimos a explicação dessa função no exemplo 2.10. Uma das formas de descobrir a intersecção entre essas retas é digitar no campo entrada a palavra interseção e no primeiro exemplo onde tem (objeto, objeto) digitar quais equações/funções você quer saber a interseção, conforme a Figura 24. Fazendo isso teremos os seguintes pontos **(A, B, e C)** poderíamos determinar outras interseções, porém esses que são os pontos de interesse para solução do problema. Os pontos **(A, B, e C)** formam vértices de um triângulo e qualquer ponto que pertença à região interna desse triângulo chamada de região viável, satisfaz a solução do sistema inicial do problema e obedecem as restrições dadas. Ilustra A Figura 24 ilustra esta situação.

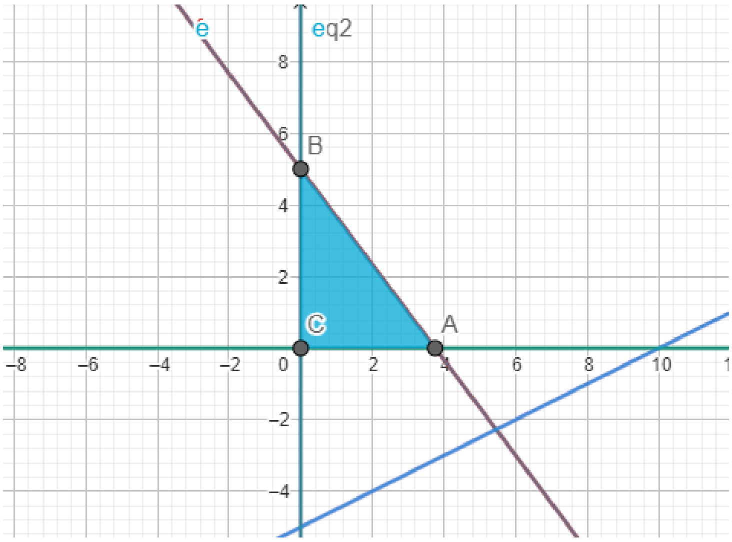
Figura 24 – Pontos de interseções



Fonte: Elaborado pelo autor

Porém, queremos determinar a solução ótima, ou seja, a solução que determina o maior valor para o lucro. (Maximização). Nesse exemplo, a região viável está compreendida nesses três pontos, **A, B e C**, ou seja, a área do triângulo formado pela região abaixo da reta 4x+3y = 15, e $x >= 0$ e $y >= 0$, ou seja que esteja no 1º quadrante do plano cartesiano, levando em consideração assim como os segmentos de retas compreendido por esses três pontos e os próprios três pontos, sendo justamente em um desses vértices(pontos) que acontecerá a solução ótima. Conforme está mostrado na Figura 25.

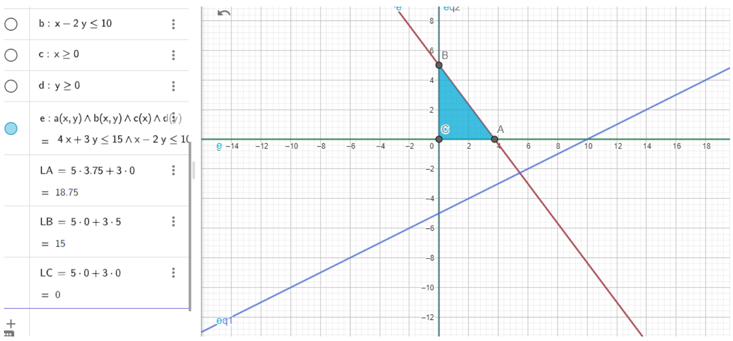
Figura 25 – Região Viável



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 4. Aplicar o Teorema Fundamental da Programação Linear, que diz que o valor ótimo (solução ótima) da função objetivo deve ocorrer em um dos vértices da região viável. Dessa forma, para determinar a solução ótima do exemplo, no campo entrada digita-se a função objetivo com os valores das coordenadas dos pontos dados, lembrado que as coordenadas dos pontos são: $A(3.75, 0)$, $B(0, 5)$ e $C(0, 0)$. Por exemplo, $L(A) = 5(3.75) + 3(0)$, ou seja, substituiremos os valores das coordenadas do ponto A na função L. O que resulta em $L(A) = 18,75$. Note que na Figura 26 aparece no lado esquerdo do gráfico LA = 18.75 ou seja, L(A) = LA.

Figura 26 – Solução Ótima



Fonte: Elaborado pelo autor

Como $L(A) = 18,75$, $L(B) = 15$ e $L(C) = 0$, veja Figura 26. Concluímos que no ponto A é onde teremos o maior lucro possível, no caso $LA = 18,75$ é a solução ótima do sistema. Outra forma de encontrar o valor da função objetivo em cada ponto é substituindo nas variáveis x e y o ponto em estudo com letra maiúscula, por exemplo: $LB = 5x(B) + 3y(B)$, donde teremos $L(B) = 15$. E o mesmo com o ponto C: $LC = 5x(C) + 3y(C)$, e teremos $LC = 0$, conforme vimos na Figura 26.

Resolveremos o próximo exemplo usando os conceitos de regiões e intersecções de regiões, aprendido no Capítulo 2 . O problema trata-se de uma marcenaria sobre certas restrições em que o objetivo principal é maximizar os custos de produções desse produto. Usaremos mais alguns passos e novas ferramentas além dos usados no exemplo anterior e admitindo já um pouco de uso no software GeoGebra, deixando a solução mais dinâmica.

Exemplo 3.6. (Almeida, 2022)(1) Uma marcenaria produz dois tipos de cadeiras escolares: Um modelo básico e um modelo executivo. As cadeiras básicas necessitam de 2 horas para montagem e acabamento, enquanto a montagem das executivas necessitam de 3 horas. Para a tapeçaria são necessárias 1 e 2 horas para as cadeiras básicas e executivas, respectivamente. Para a montagem e acabamento das cadeiras existe uma disponibilidade semanal de 260 horas por semana e para a tapeçaria existe uma disponibilidade de 150 horas por semana. Se o lucro das cadeiras básicas for de $R\$80,00$ por unidade e de cadeiras de modelo executivo for de $R\$130,00$ reais, quantas unidades de cada tipo devem ser produzidas por semana para maximizar o lucro da marcenaria?

Solução: Para a solução do problema montaremos todas as descrições do exemplo em formato de tabela e de acordo essas informações poderemos ver a função lucro que precisar ser maximizada.

	Básica (horas)	Executiva (horas)	Horas por semana
Montagem/acabamento	2	3	260
Tapeçaria	1	2	150
Valor R$	80,00	130,00	

Seja x o número de cadeiras básicas e seja y o numero de cadeiras executivas. Daí, a função que queremos maximizar (função lucro/objetivo) será: $L = 80x + 130y$. De acordo com a informação do problema a quantidade de horas semanais não poderá ultrapassar 260 horas na montagem e acabamento e 150 horas na tapeçaria. Então teremos as seguintes restrições

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 260 \\ x + 2y \leq 150 \end{cases}$$

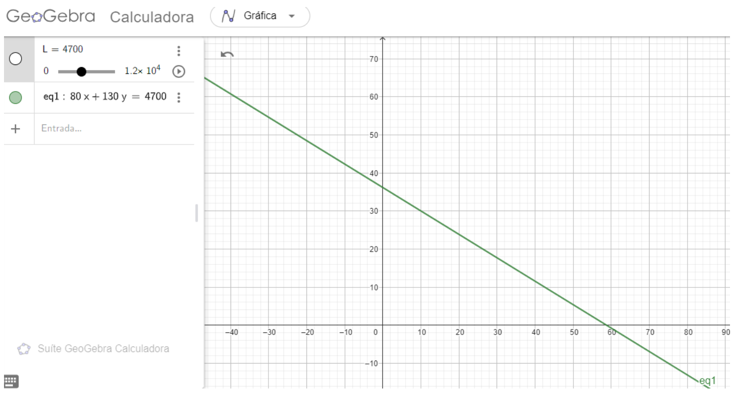
além disso, sabemos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ pois não faz sentido a quantidade de cadeiras ser negativo. Portanto, teremos o seguinte sistema de inequações

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 260 \\ x + 2y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

E com o auxilio do software GeoGebra, dividiremos em passos até concluirmos a solução.

Passo 1. Inicialmente, inserir a função lucro: digitando no campo entrada $80x + 130y = L$ e logo em seguida, o próprio geogebra gera o controle deslizante da função objetivo. A Figura 27 ilustra o Passo 1.

Figura 27 – Função Lucro



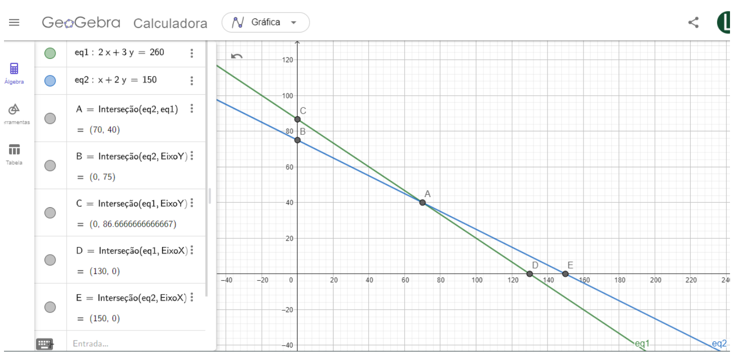
Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2. Inserir o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + 3y = 260 \\ x + 2y = 150 \end{cases}$$

e por meio dos gráficos dessas equações, concluir a solução do sistema, caso ele seja possível determinado, ou seja, admita solução. Observe que a imagem abaixo (Figura 28) mostra a solução do sistema de equações dada pelo ponto $A(70, 40)$. Os pontos B e C, são as interseções das retas com os eixos das ordenadas e D e E com os eixos das abscissas, como observamos na Figura 28.

Figura 28 – Solução do sistema de equações/intersecção entre as retas



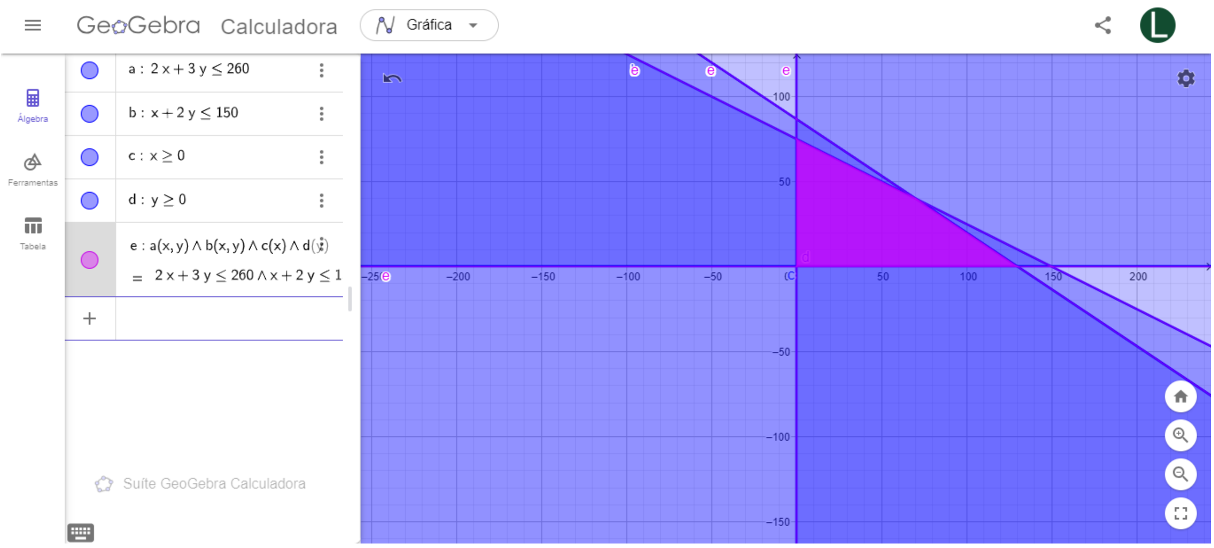
Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3. Esboçar as regiões do sistema de inequação

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 260 \\ x + 2y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

e destacar a interseção entre essas regiões. (Veja Figura 29). Observe que a região rosa é a solução gráfica do sistema, chamada de região viável, pois escolhendo qualquer ponto que pertença à região é uma solução que satisfaz o problema, porém queremos determinar a solução ótima, aquela que maximiza ou minimiza o problema, nesse caso é a que maximizará e de acordo com o Teorema da Fundamental da PL, o valor ótimo da funções objetivo deve ocorrer em um dos vértices do polígono formado por essa região viável.

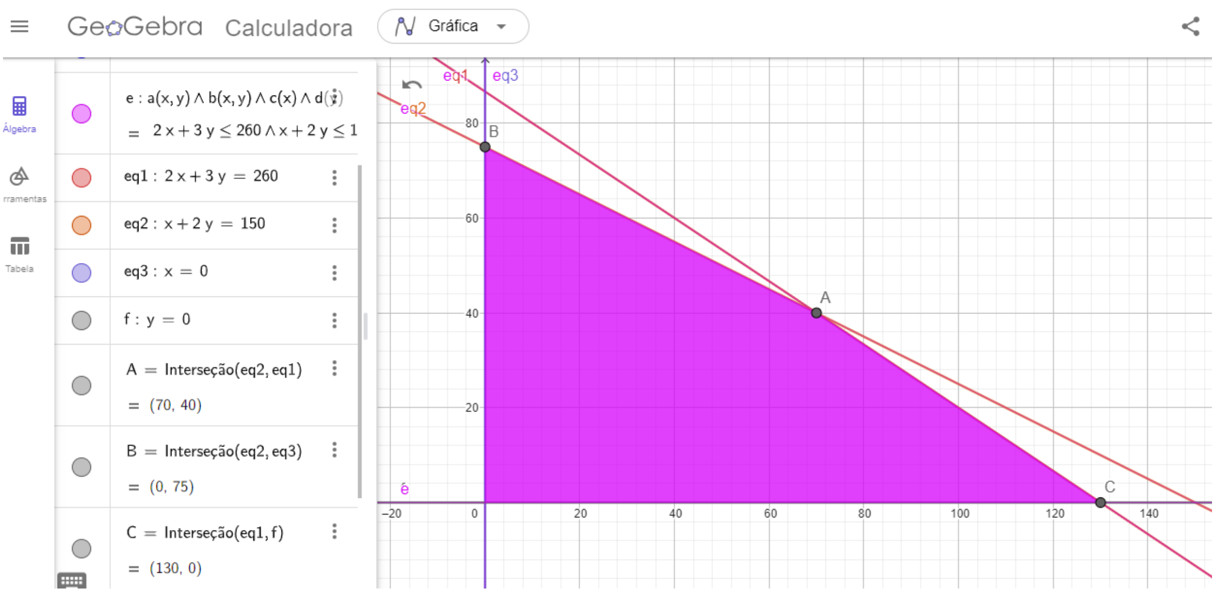
Figura 29 – Intersecção entre regiões/inequações



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 4. Destacar a região viável com os pontos extremos das interseções das equações do sistema criado. É possível fazer isso desmarcando cada região gerada por cada inequação, clicando no circulo azul antes de cada letra que descreve a inequação e deixando apenas a região que representa a interseção dessas inequações, conforme está representado na Figura 30.

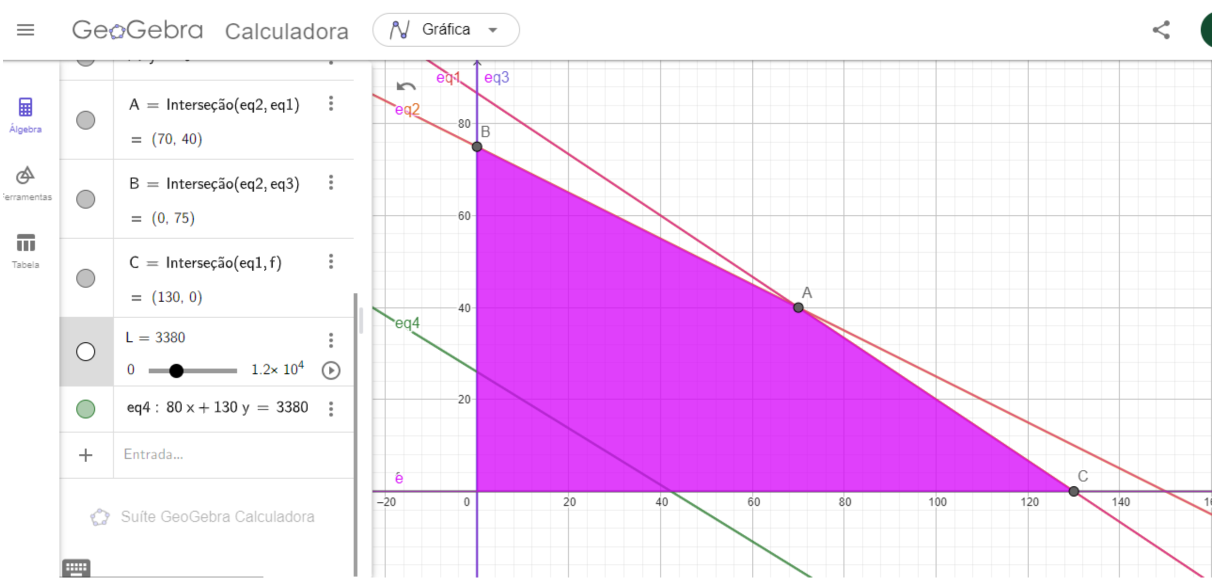
Figura 30 – Região viável - pontos extremos



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 5. Analisar o gráfico da função objetivo,(reta verde) junto com a região destacada feita no passo 4, fazendo essa reta que representa a função objetivo percorrer toda região viável, percebemos qual o último ponto que ela "toca"na área viável do problema e então substituiremos as coordenadas desse ponto na função objetivo, uma vez que o Teorema Fundamental da Programação Linear garante solução ótima nesse vértice (ponto), evitando assim, fazer substituições dos demais pontos. Veja a Figura 31.

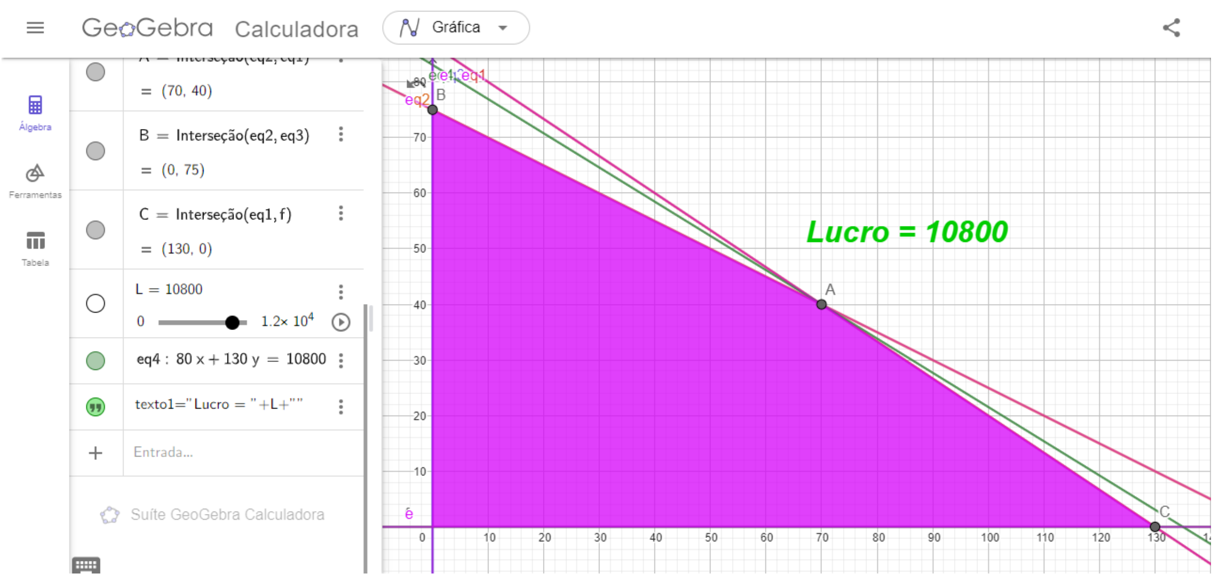
Figura 31 – Região viável- controle deslizante



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6 (Solução Ótima). Fazendo a reta gerada pela função objetivo percorrer toda região viável e aplicando o Teorema da Programação Linear, nos vértices da região viável, ou então ganhando tempo e já aplicando o que aprendemos no passo 5, percebe-se que o valor ótimo acontecerá no ponto $A(70; 40)$. Podemos substituir ($x = 70$ e $y = 40$) na função $L = 80x + 130y$, teremos como lucro: $LA = 80(70) + 130(40) = 5600 + 5200 = 10.800$. Ou então usando 4º Passo aplicado no exemplo 3.2, fazendo as substituições nos outros vértices do polígono formado na região viável, conforme fizemos no exemplo,encontraremos a melhor solução que maximiza o problema. Porém, se programarmos o controlo deslizante a própria reta gerada da função lucro quando passar pelo ponto já dará o valor do Lucro, sendo um pouco complicado parar no ponto com precisão. A Figura 32 ilustra esta situação.

Figura 32 – Solução ótima



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, a solução do problema é um lucro máximo de $R\$10.800,00$.

Exemplo 3.7. (Silva, *et al.* 1998)(19) Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: Foi descoberto que o programa A com 20 minutos de musica e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa B, com 10 minutos de musica e 1 minuto de propaganda chama atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de uma semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo, 5 minutos para sua propaganda e que não há verba para mais de 80 minutos de musica. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar para obter o numero máximo de telespectadores?

Solução: Seguindo o roteiro visto nos Exemplos 3.5 e 3.6, o primeiro passo está ligado à definição das variáveis de decisão. O objetivo do problema é maximizar o número de telespectadores e quantas vezes por semana devem ir ao ar para obter essa quantidade de telespectadores.

- As variáveis de decisão:

x = frequência semanal do programa A

y= frequência semanal do programa B

Escolhida as variáveis de decisão, devemos agora definir a lei da função objetivo em função dessas variáveis de decisões escolhida.

- Função objetivo:

$f(x, y) = N = 30000x + 10000y$

Quantidade de telespectadores em função da quantidade de frequência semanal dos programas A e B. Sempre nos problemas de otimizações lineares as variáveis de decisões, necessariamente estão sujeitas a algumas limitações impostas.

- Restrições Técnicas com as seguintes restrições:

Restrições associadas ao tempo de propaganda das duas frequências, não podendo ser inferior a 5 minutos.

$$x + y \geq 5$$

Restrições associadas ao tempo de musica dos dois programas juntos, não podendo ultrapassar de 80 minutos.

$$20x + 10y \leq 80$$

Restrições de não negatividade.

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Por fim, aplicar o Teorema Fundamental da Programação Linear. Portanto, temos o seguinte modelo a ser resolvido: Maximizar a função

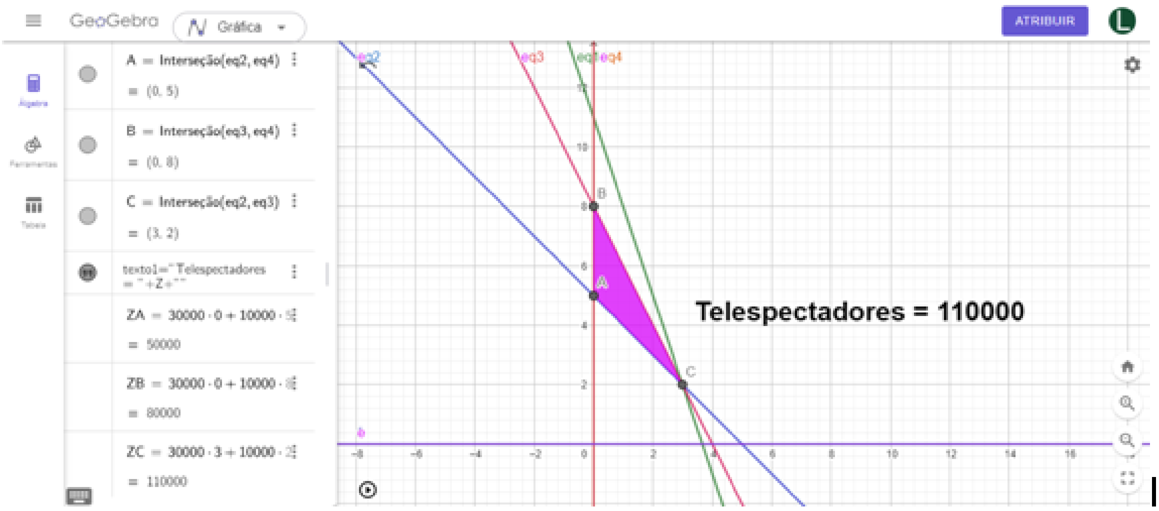
$$f(x, y) = N = 30000x + 10000y,$$

sujeito a

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 20x + 10y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Usando o software GeoGebra e seguindo os passos já vistos, temos a seguinte solução gráfica mostrada na figura, a seguir:

Figura 33 – Solução ótima - número de telespectadores



Fonte: Elaborado pelo autor

Aplicando o Teorema Fundamental da Programação Linear e substituindo os três vértices A, B e C na função Z, obtemos os seguintes valores: $Z(A) = 50000, Z(B) = 80000$ e $Z(C) = 110000$. Portanto, a maior quantidade de telespectadores acontece quando $x = 3$ e $y = 2$. Note também que na solução gráfica do problema, a reta verde (gráfico da função objetivo) passa por último no ponto C (sentido crescente). E como tudo ficou programado para mostrar o valor automaticamente usando funções do controle deslizante, o valor máximo da função acontece nesse vértice C, e automaticamente, o controle deslizante mostra a solução: Telespectadores = 110.000.

4 Aplicações da Otimização Linear

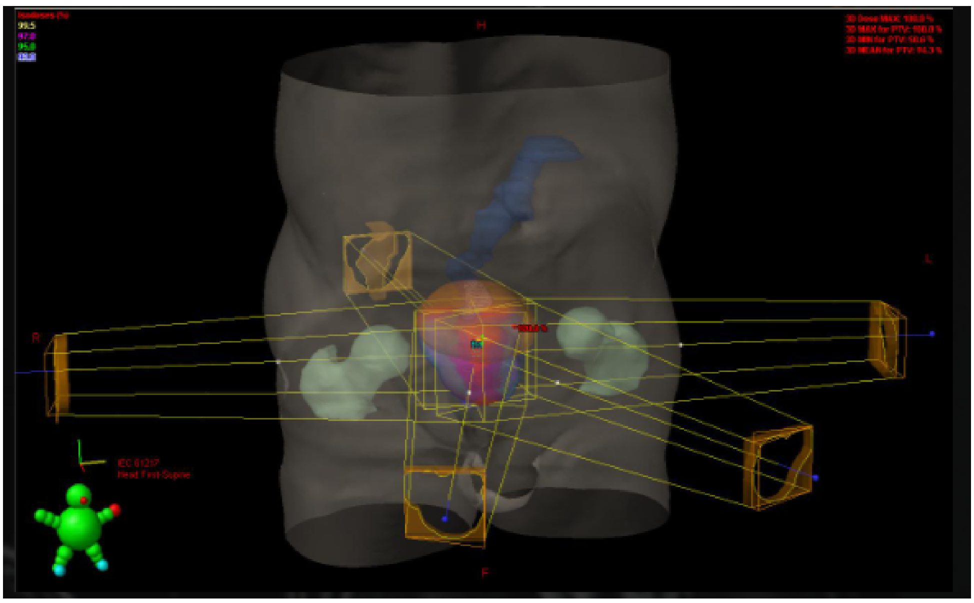
A aplicabilidade da Programação Linear é muito mais ampla do que imaginamos. Neste capitulo começaremos a ampliar nossos horizontes. Ao estudar os exemplos a seguir, concluiremos que a matemática é algo muito importante não só para a formação do estudante, mas também para seu desenvolvimento como cidadão, sua autonomia, economia e seu bem estar . Além de perceber que os modelos matemáticos são utilizados praticamente em muitas áreas de nossa vida, como, por exemplo, na saúde.

4.1 Otimização aplicada na Medicina

O problema a seguir é um resumo elaborado a partir de um tópico abordado no livro de Introduction to operations Research (Hillier ; Lieberman, 2015)(10). Trata-se de uma aplicação da otimização linear na área medicina. Sendo uma simplificação bem básica do modelo matemático trabalhado na literatura, e principalmente por ser um modelo de otimização não linear e bastante difícil. Trata-se de uma paciente oncológica que iria se submeter ao tratamento de radioterapia.

Sabemos que a radioterapia envolve o uso de uma máquina de tratamento de feixe externo para passar ionizantes radiação através do corpo do paciente, danificando tecidos cancerosos e saudáveis. Normalmente, vários feixes são administrados com precisão de diferentes ângulos, ilustrado na figura 4.1.

Figura 34 – Sessão de radioterapia



Fonte: (Lima, 2024)(14)

É necessário localizar corretamente o campo de irradiação na região a ser tratada, usando os dispositivos de localização de feixe e fazer as marcações estilo tatuagens no paciente. Como as células tumorais são tipicamente microscopicamente intercaladas entre células saudáveis, à dosagem de radiação ao longo a região do tumor deve ser grande o suficiente para matar as células malignas, que são um pouco mais radiossensível, mas pequeno o suficiente para poupar as células saudáveis.

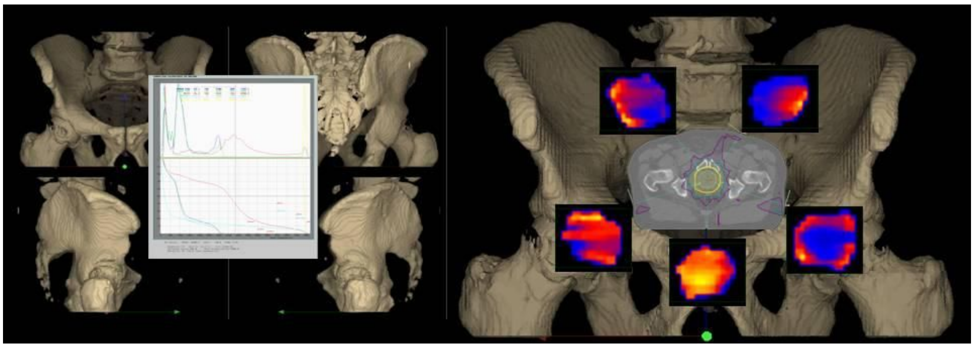
Ao mesmo tempo, a agressão da dosagem que passa para tecidos críticos não deve exceder os níveis de tolerância estabelecidos, a fim de prevenir complicações de ventilação que podem ser mais graves do que a própria doença. Pela mesma razão, a dosagem total para toda a anatomia saudável deve ser minimizada.

A quantidade de radiação liberada para destruir o tumor é frequentemente limitada pelos riscos de danos aos tecidos sadios vizinhos e requer um processo complicado. A força da dose em qualquer ponto do corpo é medida em unidades chamadas **kilorad** (usado para quantificar o número de radiação depositado em um alvo quando está exposto à radiação).

Em resumo, o trabalho envolve uma equipe multidisciplinar, formada por médicos, físicos, dosimetrista, técnicos e com base em análise anatômica cuidadosa. A máquina precisa disparar os feixes de radiação no ponto onde está localizado o centro do tumor. O exemplo está bem simplificado, porque normalmente dezenas de feixes possíveis deve ser considerado e isso requer muitas variáveis para modelar o problema.

Somando a radiação absorvida nos quadrados contendo cada tipo de tecido, a dose média que é absorvida pelo tumor, anatomia saudável e tecidos críticos podem ser calculados com o auxilio de ferramentas computacionais, veja na Figura 36.

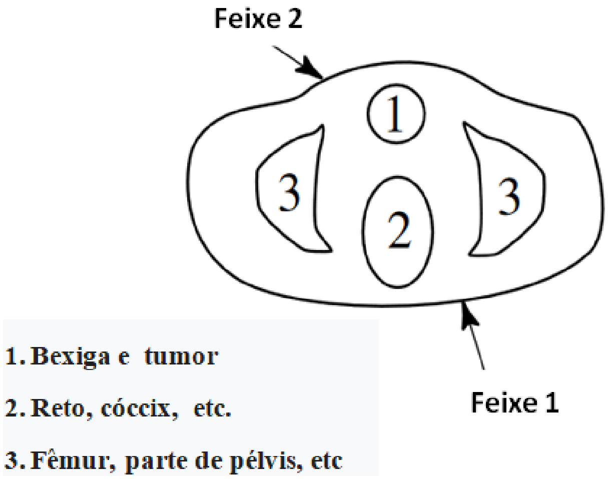
Figura 35 – Algoritmos computacionais avançados para determinar a melhor distribuição de dose de radiação



Fonte: (Barreto, 2023)(2)

Com mais de um feixe (administrado sequencialmente), a absorção da radiação é aditiva. A figura 36 representa a seção transversal da região doente desse paciente, tumor (visto de cima), tecidos críticos próximos, e sendo os feixes de radiação usado. Figura 36.

Figura 36 – Seção transversal do tumor



Fonte: (Hillier ; Lieberman, 2015)(10)

Após uma análise minuciosa desse tipo, a equipe médica estimou cuidadosamente os dados necessários para projetar o tratamento da paciente, conforme resumido na tabela abaixo.

Área Considerada	Fração de Entrada	
	Feixe 1 | Feixe 2	Restrição na dosagem média
Anatomia saudável	0.4 | 0.5	Função a ser minimizada
Tecido crítico	0.3 | 0.1	≤ 2.7
Região do tumor	0.5 | 0.5	$= 6$
Centro do Tumor	0.6 | 0.4	≥ 6

A primeira coluna lista as áreas que devem ser consideradas, e então as próximas duas colunas dão a fração da dose de radiação no ponto de entrada para cada feixe que é absorvido pelas áreas específicas em média. Por exemplo, se o nível de dose no ponto de entrada do feixe 1 for 1 kilorad, então uma média de $0,4$ kilorad será absorvida por toda a anatomia saudável no plano bidimensional, uma média de $0,3$ kilorad será absorvida por tecidos críticos próximos, uma média de $0,5$ kilorad será absorvido pelas várias partes do tumor, e $0,6$ kilorad serão absorvidos pelo centro do tumor.

No segundo feixe temos também os dados que serão absorvidos conforme dados da tabela, baseado nos cálculos e determinado pela equipe multidisciplinar. A última coluna dá restrições na dosagem total de ambos os feixes que é absorvida em média pela áreas específicas do corpo. Em particular, a absorção média da dosagem para o tecido saudável na anatomia deve ser a menor possível, os tecidos críticos não devem exceder $2,7$ kilorads, a média de todo o tumor deve ser igual a 6 kilorads, e o centro do tumor deve ser de pelo menos 6 kilorads.

As duas variáveis de decisão x e y representam a dose (em kilorads) no ponto de entrada para o feixe 1 e feixe 2, respectivamente, e positivamente. Como a dosagem total que atinge a anatomia saudável deve ser minimizada, denotaremos por Z esta quantidade. E assim, iremos minimizar essa função Z. Os dados da tabela podem então ser usados diretamente para formular o seguinte modelo de programação linear.

Usando os dados da tabela acima e seguindo o roteiro temos que o primeiro passo está ligado à definição das variáveis de decisão.

- As Variáveis de decisão: x = feixe 1 e y= feixe 2

Escolhidas as variáveis de decisão, devemos agora definir a lei da função objetivo em função dessas variáveis de decisão.

- Função objetivo: $f(x, y) = Z = 0.4x + 0.5y$

- Restrições Técnicas:

Restrições associadas a anatomia saudável não pode ultrapassar 2,7 Kilorads

$$0,3x + 0,1y \leq 2,7$$

A média da região de todo o tumor deve ser igual a 6 kilorads

$$0,5x + 0,5y = 6$$

O centro do tumor deve ser maior ou igual a 6 kilorads

$$0,6x + 0,4y \geq 6$$

Restrições de não negatividade: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Por fim, aplicar o Teorema Fundamental da Programação Linear. Portanto, temos o seguinte modelo a ser resolvido: minimizar a função

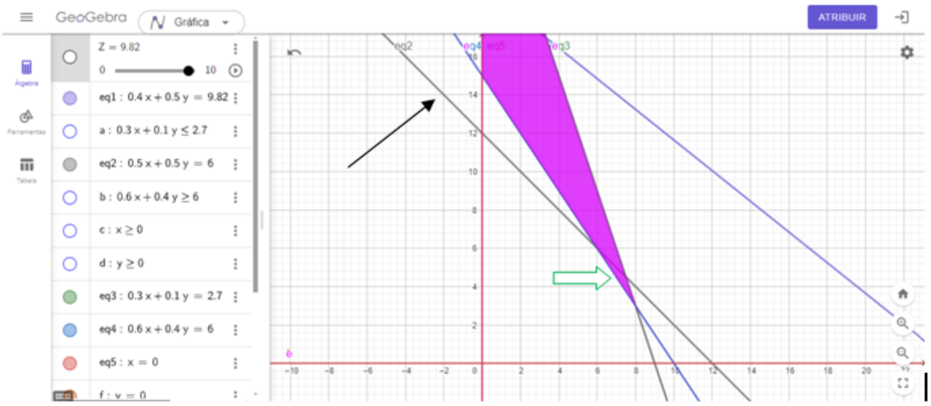
$$f(x, y) = Z = 0.4x + 0.5y$$

sujeito a

$$\begin{cases} 0,3x + 0,1y \leq 2,7 \\ 0,5x + 0,5y = 6 \\ 0,6x + 0,4y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Já vimos todo o passo a passo que deve ser feito no software GeoGebra e assim o faremos. Digitando todas as inequações e equação no software encontraremos a região viável, porém devemos ter bastante cautela nessa região, porque temos a equação $0,5x + 0,5y = 6$ que é representado por uma reta e não uma região, logo a região viável tem que usar parte dessa reta, como descrito na Figura 37.

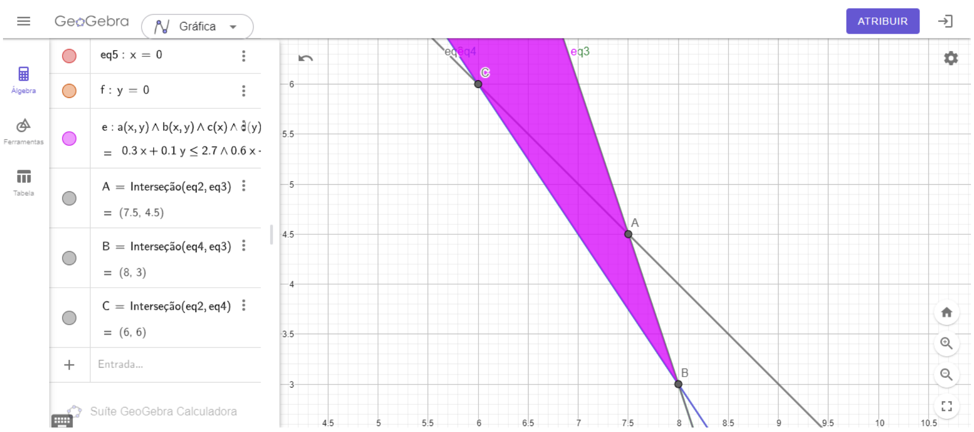
Figura 37 – Região receptível de radiação



Fonte: Elaborado pelo autor

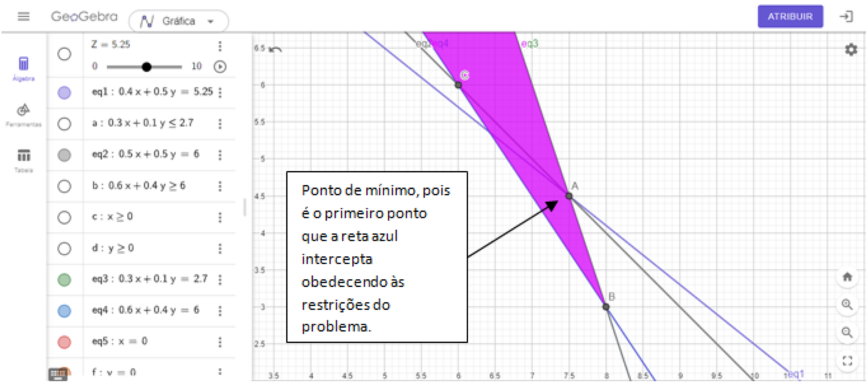
Essa reta cinza que está sendo indicada pela seta preta é justamente o gráfico da restrição $0,5x + 0,5y = 6$. Portanto, a região viável tem que conter essa reta, então essa região não será toda área roxa representada na figura 38 e sim apenas a região que esta sendo indicado pela seta verde. Iremos ampliar essa região e encontrar as interseções das retas e assim descobrir os vértices do polígono e em seguida aplicar o Teorema da Programação Linear, que pode ser visto nas Figuras 38 e Figura 39.

Figura 38 – Pontos notáveis da região de radiação



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 39 – Melhor ponto para radiação



Fonte: Elaborado pelo autor

A região viável é a área do triângulo de vértices $A(7.5, 4.5)$, $B(8, 3)$ e $C(6, 6)$. Porém, como uma das restrições é que os vértices pertença a equação $0,5x + 0,5y = 6$, ou seja, tem que pertencer a essa reta, logo, o ponto B será excluído das analises.

Aplicando o Teorema da Programação Linear sabemos que o valor mínimo se dá em um desses vértices. Substituindo esses valores na função objetivo Z $= 0.4x + 0.5y$ temos $ZA = 5.25$ e $ZC = 5.4$. Então o ponto da região viável que dá a solução ótima para o modelo é o ponto C, cujas coordenadas são x $= 7.5$ e y $= 4.5$, sendo estes os valores ótimos das variáveis e, portanto, para as intensidades dos feixes 1 e 2 respectivamente.

4.2 Uma aplicação na dieta

A importância de fazer o certo na alimentação visa a escolha de um grupo alimentar que atenda às necessidades nutricionais diárias que o corpo humano necessita e que tenha como objetivo ter custos mínimos. Escolhas alimentares inadequadas colocam as pessoas em risco, especialmente o consumo de alimentos ricos em gordura acelerará o processo de envelhecimento e dará origem a doenças crônicas degenerativas.

Criar uma dieta balanceada, adequada ao gosto do paciente e que atenda às necessidades nutricionais diárias é um problema difícil de resolver sem uma estratégia de planejamento adequada. Claro que é preciso levar em consideração idade, peso, altura, problemas de saúde que limitam as necessidades individuais e a ingestão máxima diária de nutrientes.

Mostraremos uma aplicação de uma dieta usando apenas dois tipos de alimentos, uma vez que estamos trabalhando problemas de Otimização Linear com duas variáveis apenas.

Apresentaremos a elaboração de uma dieta de baixo custo com base em apenas duas restrições nutricionais, com o objetivo principal de familiarizar o leitor com aplicações na área da saúde, mais especificamente área da nutrição e também para os pesquisadores da área da saúde com as possibilidades de fazerem uso do método abordado neste trabalho.

Considere o problema de um certo tipo de dieta, encontrado no artigo de (Moreira, 2003)(17) que resolveremos usando o software GeoGebra com a seguinte descrição:

Para ilustrar a aplicação da programação linear na formulação de dietas, suponha que, por motivos justificáveis, uma dieta alimentar esteja restrita a leite desnatado e uma salada de composição bem conhecida. Sabendo-se ainda que os requisitos nutricionais serão expressos em termos de vitamina A e cálcio, controlados por suas quantidades mínimas (em miligramas). A tabela abaixo resume a quantidade de cada nutriente em disponibilidade nos alimentos e sua necessidade diária para a boa saúde de uma pessoa, bem como o custo unitário dos alimentos. O objetivo é minimizar o custo total da dieta de forma a satisfazer as restrições nutricionais.

Nutriente	Leite (copo)	Salada (500mg)	Requisito mínimo
Vitamina A	2 mg	50 mg	11 mg
Cálcio	50 mg	10 mg	70 mg
Custo/Unidade	R$1,50	R$3,00	

Inicialmente definiremos as variáveis de decisão, seja: x = quantidade de leite (em copos) por dia. y = quantidade de salada (em porções de 500 g) por dia.
Escolhida as variáveis de decisão definiremos a função objetivo, ou seja o que se deseja alcançar com a solução desse problema que nesse caso é o custo mínimo total para a dieta atendendo as restrições nutricionais. Vale ressaltar que a função objetivo deve sempre estar em dependência das variáveis de decisão escolhidas inicialmente. Logo, definiremos pela combinação dos alimentos x quantidade de copos de leite e y quantidade de porções de salada, levando em consideração seus custos unitários, R$1,50 e R$3,00, respectivamente. Portanto, a função objetivo que no caso será a função custo nas variáveis x e y é dada pro
Z=1.5x + 3.0 y
Devemos então observar as restrições que são impostas pelo problemas e fazer a modelagem matemática dessas restrições. Observando a tabela, percebemos que a quantidade mínima de vitamina A é 11 mg e a quantidade mínima de cálcio é de 70 mg e não esquecendo das restrições de não negatividade, uma vez que não podemos considerar quantidades negativas de alimentos. Daí, fazendo a modelagem matemática do problema, teremos:
Minimizar a função Z=1.5x + 3.0 y. Sujeito ao conjunto de restrições:

$$\begin{cases} 2x + 50y \geq 11 \\ 50x + 10y \geq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

No software matemático GeoGebra, fazendo todos os passos estudados no Capítulo 3, teremos a seguinte solução gráfica, descrita na figura 38.

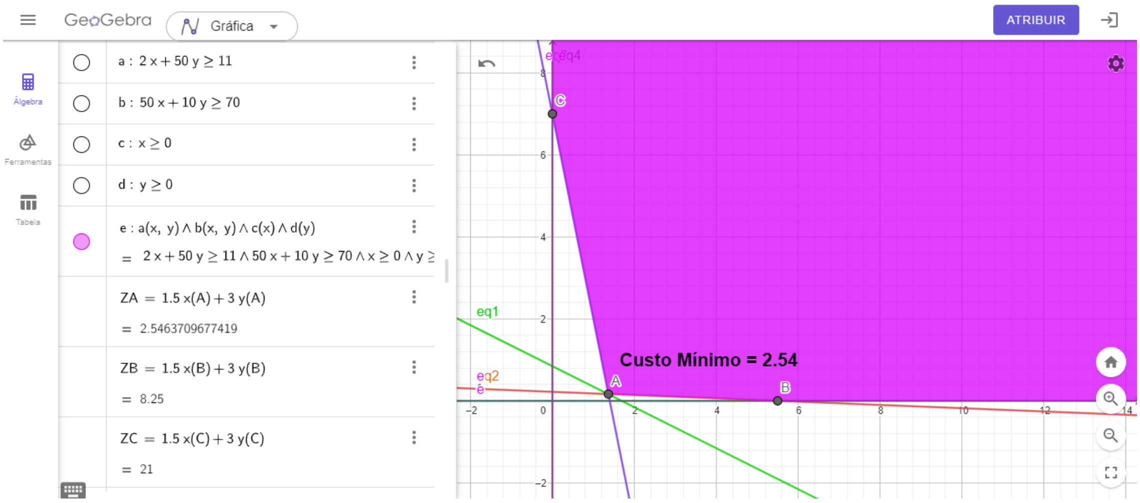


Figura 40 – Custo mínimo - Dieta

Fonte: Elaborado pelo autor

O valor exato do custo mínimo corresponde nas coordenadas do ponto que gera o gasto mínimo é no ponto A(1.366, 0.165).

Que se dá pela solução do sistema de equações: $\begin{cases} 2x + 50y = 11 \\ 50x + 10y = 70 \end{cases}$

Como esses valores não foram números naturais, podemos melhorar essa solução afirmando que a solução ótima corresponde a uma dieta de 1.37 copos de leite desnatado/dia e de 82,5 gramas de salada/dia (165/1000 de porção de 500g) a um custo mínimo de R$ 2.55.

5 Otimização Linear aplicada em uma Sequência Didática

Os alunos estão cada dia mais ligados e motivados pela tecnologia, diante dessa perspectiva entra a pedagogia ativa que é uma metodologia de ensino que está se destacando na sala de aula, especialmente quando combinada com recursos tecnológicos. Ao oferecer aulas dinâmicas e interativas, os alunos se envolvem mais no processo de aprendizagem, o que facilita o alcance dos objetivos educacionais pelos professores.

Enquanto alguns estudantes adquirem o conhecimento de forma mais eficaz por meio de aulas expositivas, outros têm melhor compreensão através de exemplos práticos, outros se beneficiam de uma abordagem mais interativa e participativa, como é o caso do uso das tecnologias na sala de aula. Isso ressalta a importância de variar os estímulos em sala de aula, a fim de ampliar a abrangência do conhecimento adquirido.

Para proporcionarmos maior engajamento e motivação dos estudantes, é essencial compreender as necessidades individuais de cada aluno e desenvolver estratégias que promovam a exploração de suas habilidades e pontos fortes.

Ao motivar no estudante a prática de aprendizagem com autonomia com o conteúdo que está sendo estudado, obtém-se resultados mais impactantes no processo de aprendizagem, uma vez que é necessário que os alunos se sintam motivados e incentivados a buscar o conhecimento. Nesse sentido, o professor deve criar novas abordagens no trabalho pedagógico, por exemplo, sequência didática.

5.1 Sequência Didática

Para (Zabala, 1998)(21), sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos.” Sendo assim, o educador pode realizar um trabalho articulado em vários eixos de ensino, por exemplo, modelagem e uso de tecnologias, de acordo com os objetivos didáticos dos educandos, possibilitando aprendizagens diferentes.

A importância da sequência didática está em permitir aos professores planejar suas aulas de maneira aprimorada para favorecer a aprendizagem dos alunos. Esse método oferece ao educador a chance de organizar suas aulas de acordo com as necessidades reais de seus estudantes, visto que somente o professor é capaz de compreender seus alunos e identificar como estimular ainda mais o processo de aprendizagem na sala de aula. Com a evolução do uso da tecnologia, a escola se viu diante da urgência de inovar e incorporar novas abordagens educacionais.

> Ter uma sequência didática como prática implica, como ponto de partida, estabelecer objetivos bem definidos e problemas que estimulem os alunos a trazer seus conhecimentos prévios e, ao mesmo tempo, perceber a necessidade de se apropriarem de novos saberes. (CASTELLAR, S. M. V.; MACHADO, J. C. 2016)(7).

Neste sentido, é essencial que esteja contextualizada as sequências didáticas, propostas através de situações didáticas, buscando estabelecer uma relação entre teoria/prática, ressaltando sempre a importância de propor aos discentes um ensino articulado, enfatizando a importância de planejar, para executar e alcançar os objetivos propostos. Nesta perspectiva com o olhar voltado para o processo de construção de conceitos matemáticos e à formação do cidadão os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam que:

> A Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (BRASIL, 1997)(5)

Nessa situação, cabe ao professor associar os conteúdos curriculares que irão ser trabalhados com as metodologias que terão resultados mais eficazes, visando o desenvolvimento e a capacidade de interação e confiança no processo de ensino-aprendizagem dos educandos, para enfrentar e resolver situações-problemas, no ambiente escolar e no convívio como a sociedade ao qual está inserido.

Os alunos, como seres humanos, são naturalmente curiosos e se mostram interessados em aprender quando são expostos a práticas pedagógicas diferentes das habituais, principalmente em assuntos matemáticos que muitos dizem que não fazem sentido e não terão utilidades durante sua vida. Segundo a BNCC:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no ensino médio o foco é a construção de uma visão integrada da matemática, aplicada à realidade. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do ensino médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.(BRASIL, 2018)(4)

Ao ensinar conteúdos matemáticos, os professores cumprem a responsabilidade de comunicar o assunto da aula no plano de ensinamento. Muitos alunos memorizam a matéria, e não dão relevância à disciplina e, logo após fazerem a prova, não se lembram das fórmulas utilizadas na questão e muito menos como resolver questões de alguns assuntos estudados.

Os docentes precisam usar um estilo no qual os discentes possam se sentir engajados, ou seja, tentando nas aulas ministradas aplicar exemplos simples e práticos à realidade atual, abordando em linguagem clara e envolvente, que possa atrair a atenção dos alunos e despertar a sua curiosidade.

A matemática é aplicada no dia a dia para facilitar a vida humana, pois tudo o que acontece ao nosso redor está diretamente relacionado a esse assunto. Podem ser compras de supermercado, como calcular quanto você vai gastar, fazer de trocos, calcular possíveis descontos e muitas outras situações.

Muitos pesquisadores têm solucionado muitos problemas matemáticos complexos utilizando métodos computacionais. Dessa forma, o uso da computação no processo de ensino de muitos assuntos matemáticos, além de construir um conhecimento de base adequado, com aplicações do dia a dia, traz novas ideias, proporciona aos discentes autonomia para aprofundar seus estudos e quem sabe o gosto por pesquisas matemáticas. Conforme o Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio,

> As experiências escolares com o computador também têm mostrado que seu uso efetivo pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Isso define uma nova visão do professor, que longe de considerar-se um profissional pronto, ao final de sua formação acadêmica, tem de continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional.(BRASIL, 1998)(5)

Nessa perspectiva, o professor deve proporcionar meios, para inserir os alunos através de uma participação ativa na construção de novos conhecimentos e na resolução de situações problemas que lhes serão apresentados, por meio de aulas atrativas e dinâmicas, promovendo desta forma o aprimoramento de novos conhecimentos, propiciando desta forma mais interação entre os (alunos/ conteúdos), tornando a aprendizagem significativa.

Estamos propondo uma sequência didática voltada para o ensino e aprofundamento de problemas de maximização e minimização do Ensino Médio.

5.2 Uma sequência didática com o uso de ferramentas tecnológicas.

Sugerimos uma proposta de sequencia didática matemática com o uso de ferramentas tecnológicas, para ser trabalhado com alunos do 1º ano do Ensino Médio e revisão de alguns assuntos já estudados, para alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> É preciso desenvolver o trabalho matemático ancorado em relações de confiança entre o aluno e o professor e entre os próprios alunos, fazendo com que a aprendizagem seja vivenciada como uma experiência progressiva, interessante e formativa, apoiada na ação, na descoberta, na reflexão, na comunicação. É preciso ainda que essa aprendizagem esteja conectada à realidade, tanto para extrair dela as situações-problema para desenvolver os conteúdos como para voltar a ela para aplicar os conhecimentos construídos. (BRASIL, 1998)(5)

Baseado neste contexto, vale ressaltar que compete ao professor escolher minuciosamente os conteúdos e as metodologias que serão utilizadas para proporcionar um ensino-aprendizagem de qualidade, buscando sempre priorizar o desenvolvimento dos educandos, através de um relacionamento de confiança entre ambos(professor-aluno), na perspectiva de construção de cidadãos críticos e reflexivos, ancorados por uma aprendizagem que esteja conectada à seu cotidiano, vislumbrando ampliar os conhecimentos de todos que os envolvidos, visando uma ação educativa comprometida com o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

As aulas dessa sequência didática, foram estabelecidas nas Competências e Habilidades apresentadas na BNCC.

Competência Especifica 1 da BNCC

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, seja atividades cotidianas, seja fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

Habilidades

(EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolve a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Competência Especifica 4 da BNCC

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Habilidades

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(Sugerida pelo autor) Converter representações algébricas para representações gráficas à procura de solução de um problema.

Objetivo Geral

Solucionar problemas de Otimização Linear com duas variáveis por meio do software GeoGebra.

Objetivos específicos:

(i) Utilizar algumas ferramentas do software matemático GeoGebra

(ii) Construir e analisar gráficos de função afim e regiões geradas por inequações usando o software GeoGebra.

(iii) Solucionar problemas de sistemas de equações e inequações de forma gráfica mediante o software GeoGebra.

(iv) Apresentar a Programação Linear e sua relevância na sociedade.

(v) Maximizar e minimizar problemas envolvendo funções lineares sobre certas condições dadas

A construção dessa sequência didática foi realizada pensando em mostrar que existem problemas de otimização também no estudo de função afim e não apenas em funções quadráticas como grande parte dos livros trazem.
Além disso, todos esses problemas serão solucionado com o uso do software GeoGebra e enfoque no método gráfico, que é uma ferramenta muito útil e fundamental para exploração no Ensino Médio. Por meio dessa sequencia didática é possível trabalhar os conteúdos :

1. Função afim e inequações de 1º grau;
2. Sistema de equações e inequações com duas equações e duas incógnitas;
3. Usar o software GeoGebra e resolver graficamente os itens acima
4. Inserir Otimização Linear (Programação Linear) no Ensino Médio;
5. Modelar um problema simples matemático de Otimização Linear;
6. Solucionar problemas Otimização Linear com duas variáveis, usando o software GeoGebra.

Tempo utilizado através das horas/aulas:

- Apresentação do software GeoGebra e como usar algumas ferramentas, construir gráfico da Função afim e regiões (inequações): 1 aula;
- Solução gráfica de um sistema linear do tipo 2x2(duas equações e duas incógnitas), resolução de alguns problemas sobre o tema da aula: 1 aula;
- Representação gráfica de inequações e solução gráfica de um sistema de inequação: 1 aula;
- Enunciar o Teorema Fundamental da Programação Linear e exemplificar com um problema. 1 aula;

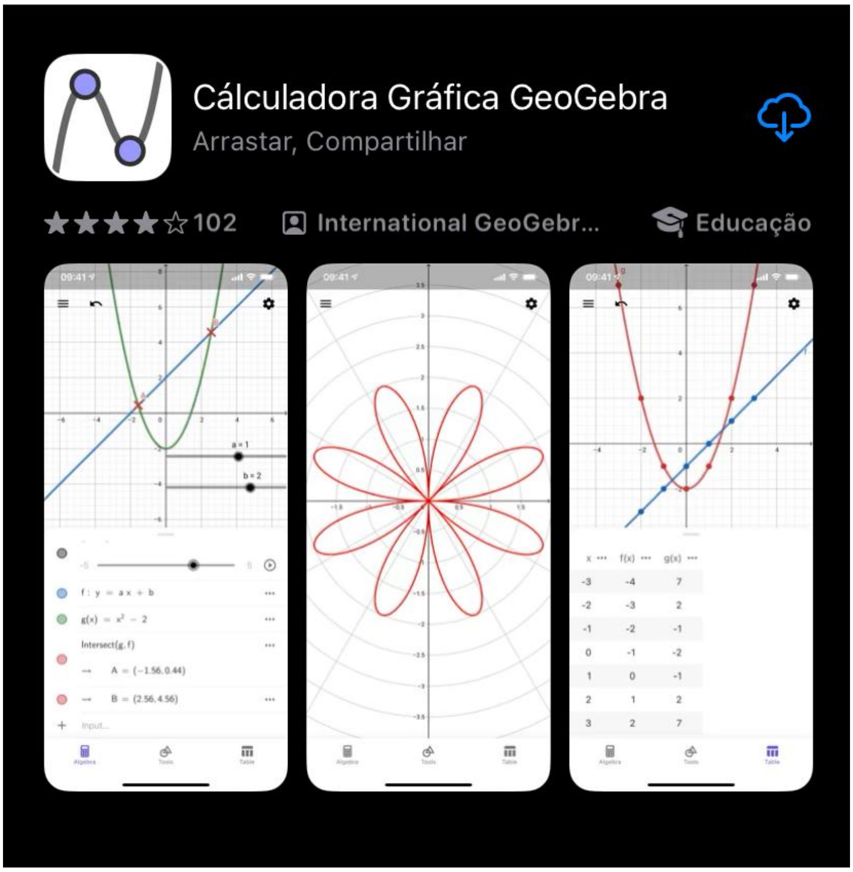
- Aplicar a atividade proposta de problemas de maximização e minimização de função afim. 1 aula;

- Debates e resolução dos problemas propostos: 1 aula.

5.2.1 1º aula: Apresentação do software GeoGebra

O professor depois de ter explicado aos estudantes função afim e inequações do 1º grau na 1ª série do Ensino Médio e caso for em outra série ter feite uma breve revisão sobre função afim e inequações do 1º grau. Em seguida, levará os discentes para o laboratório de informática, caso a escola possua esse ambiente. E caso não tenha laboratório pede para que os alunos baixem o aplicativo calculadora gráfica GeoGebra que pode ser usado sem internet, mostrado na Figura 41.

Figura 41 – Aplicativo geogebra



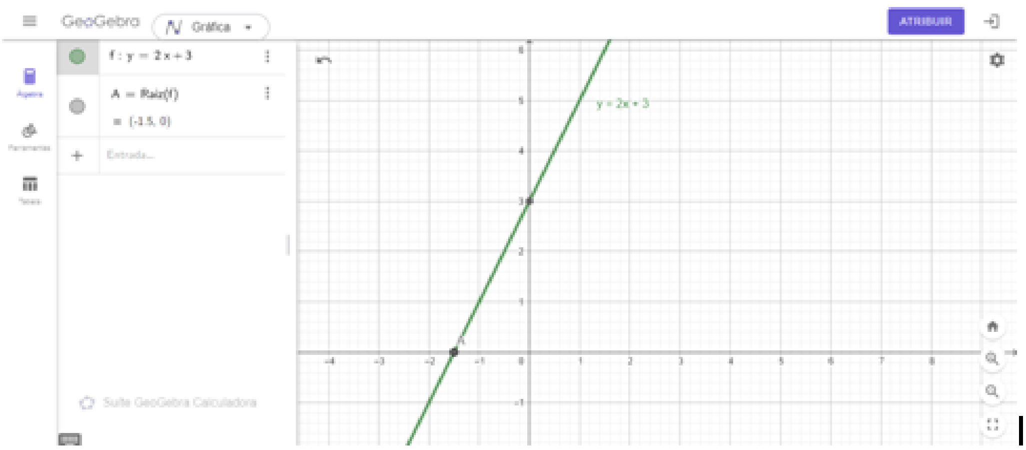
Fonte: Elaborado pelo autor

Com acesso a internet no computador, pede para que os discentes entrem no link: <https://www.geogebra.org/calculator?lang=pt> e caso não tenha internet no laboratório o professor pode deixar instalado o software nos computadores.

Acessado o software por todos alunos, o professor mostrará o ambiente geogebra e prossegue explicando como se usa algumas ferramentas que são indispensáveis na solução problemas de Otimização Linear com duas variáveis.

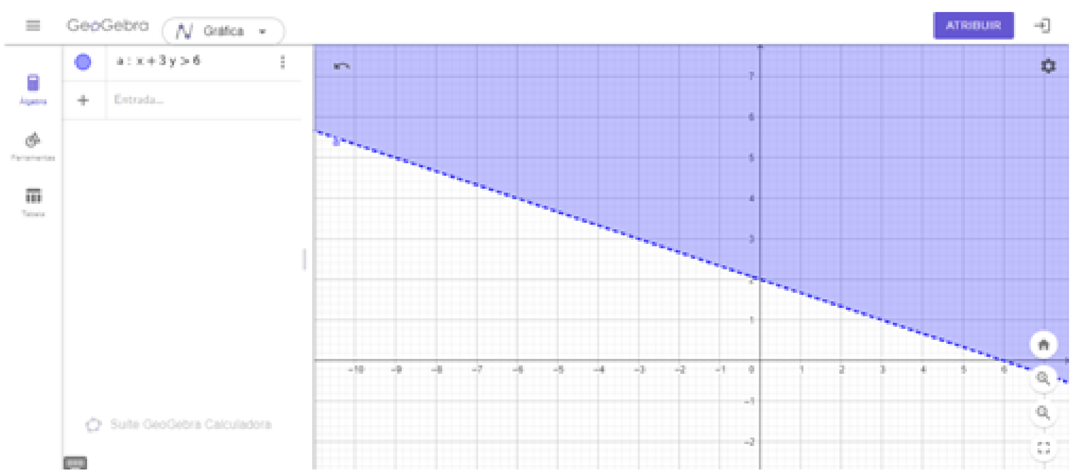
Mostrar como inserir uma função no software, destacar o gráfico gerado por essa função, e a partir daí pode-se fazer uma revisão de alguns assuntos estudados, como: trabalhar zero(s) ou raiz da função, revisar coeficiente linear (ponto de intersecção da reta com o eixo y) caso for uma função afim, trabalhar também o controle deslizante, crescimento e decrescimento de uma função afim, além de mostrar a representação gráfica de uma inequação dos tipos: $ax + by \leq c$ ou $ax + by \geq c$, que pode ser visto nas Figuras 42 e 43.

Figura 42 – Ensinando a usar o ambiente geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 43 – Região infinita

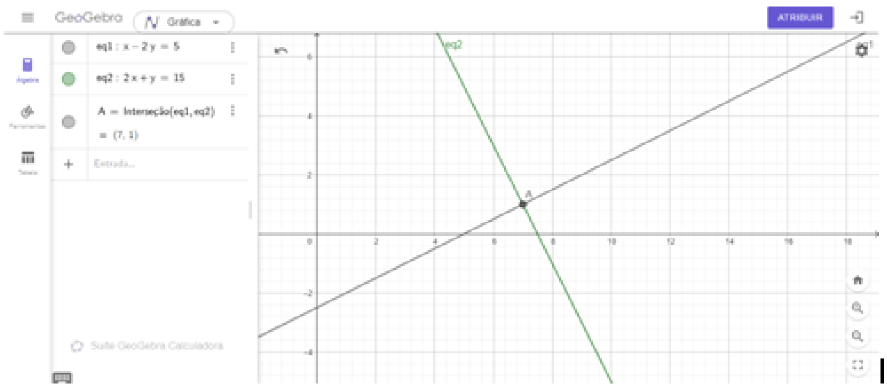


Fonte: Elaborado pelo autor

5.2.2 2º aula: Solução gráfica de um sistema linear do tipo 2x2

Mostrar usando o software GeoGebra que a solução única de um sistema linear do tipo 2x2 (duas equações e duas incógnitas) quando existe é dada pela interseção de duas retas, ou seja, um ponto (veja Figura 44) e como podemos obter as coordenadas desse ponto usando o software.

Figura 44 – Interseção de retas

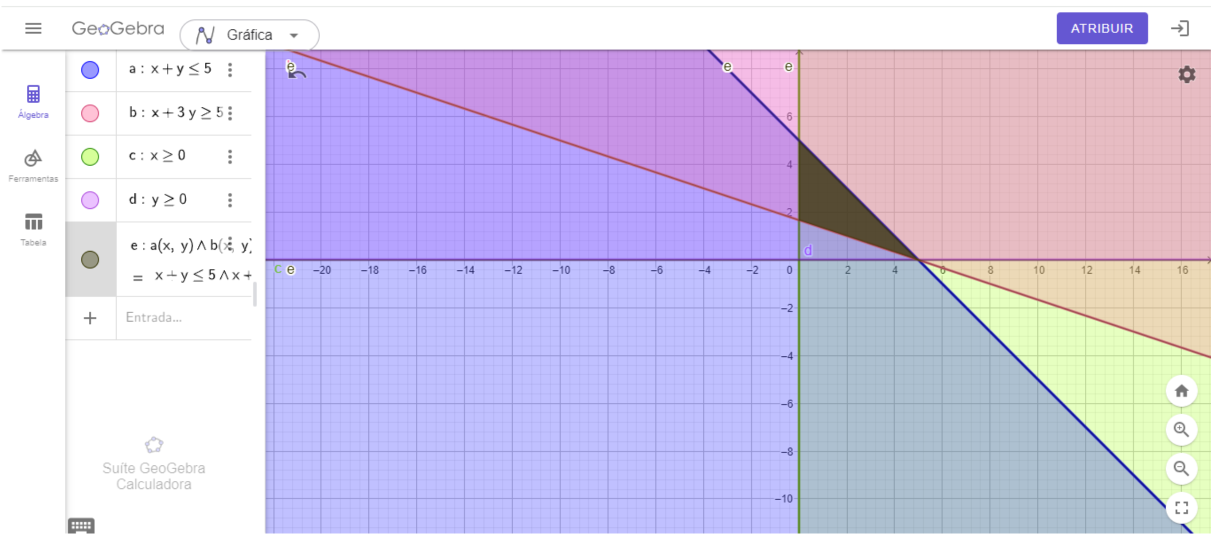


Fonte: Elaborado pelo autor

5.2.3 3º aula: Sistema de inequações - soluções gráficas

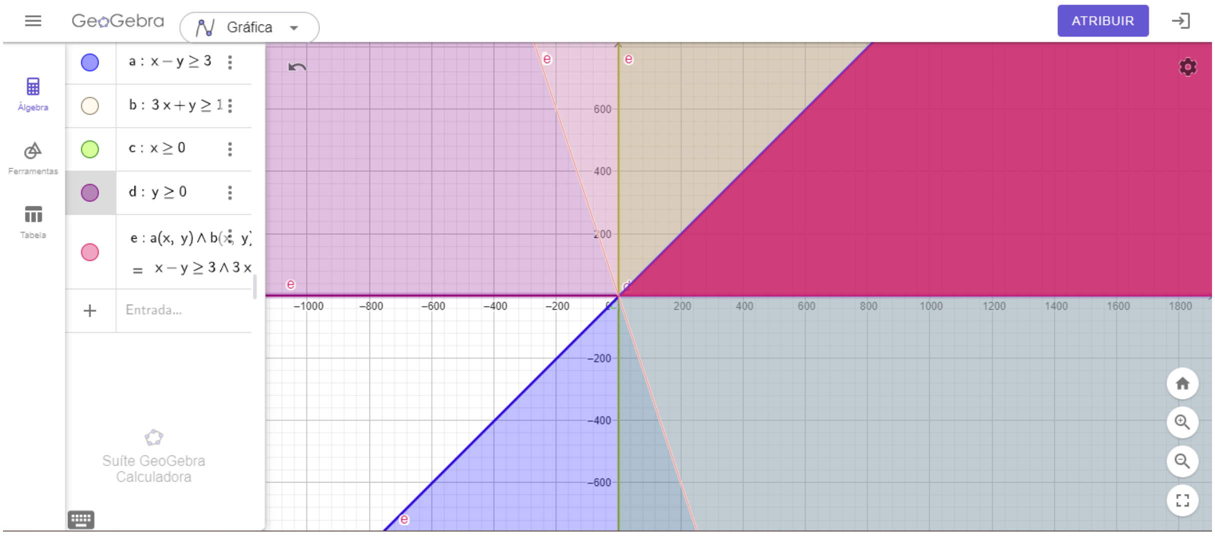
Mostrar a solução de um sistema de inequações lineares do tipo (2x2) que pode ser um polígono (figura plana, região fechada) ou uma região infinita, ilustrado nas Figuras 45 e 46.

Figura 45 – Interseção entre inequações (região poligonal limitada)



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 46 – Interseção entre inequações (região poligonal ilimitada)



Fonte: Elaborado pelo autor

5.2.4 4º aula Teorema Fundamental da Programação Linear

Enunciar o Teorema Fundamental da Programação Linear, fazer uma aplicação de forma direta usando os exemplos das aulas anteriores e trazer um problema contextualizado sobre otimização linear.

Resolver alguns problemas de sistemas de equações e inequações de forma direta (sistema já pronto) e alguns contextualizados como por exemplo, considere os seguintes sistemas abaixo:

Sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 16 \end{cases}$$

e o sistema de inequações;

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 20x + 10y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

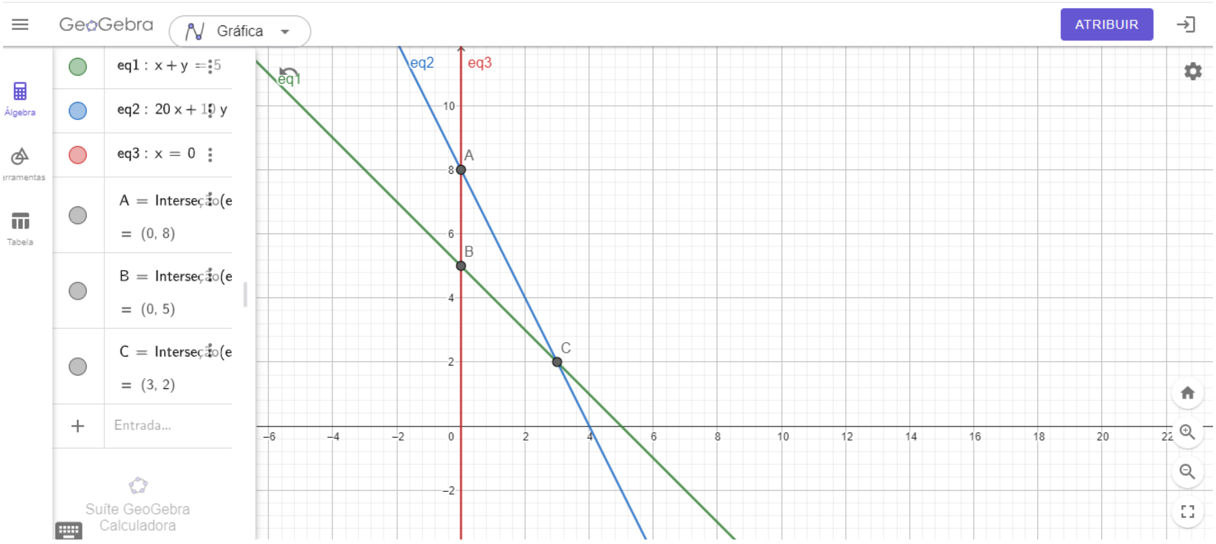
O professor deve mostrar com detalhes os pontos de interseções gerados pelas retas: $x + y = 5$, $20x + 10y = 80$, $x = 0$ e $y = 0$ presentes no sistema de inequações 5.2.4. Assim como visualizar os pares ordenados desses pontos.

As Figuras 47 e 48 ilustram as soluções gráficas das retas geradas pelo sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 20x + 10y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

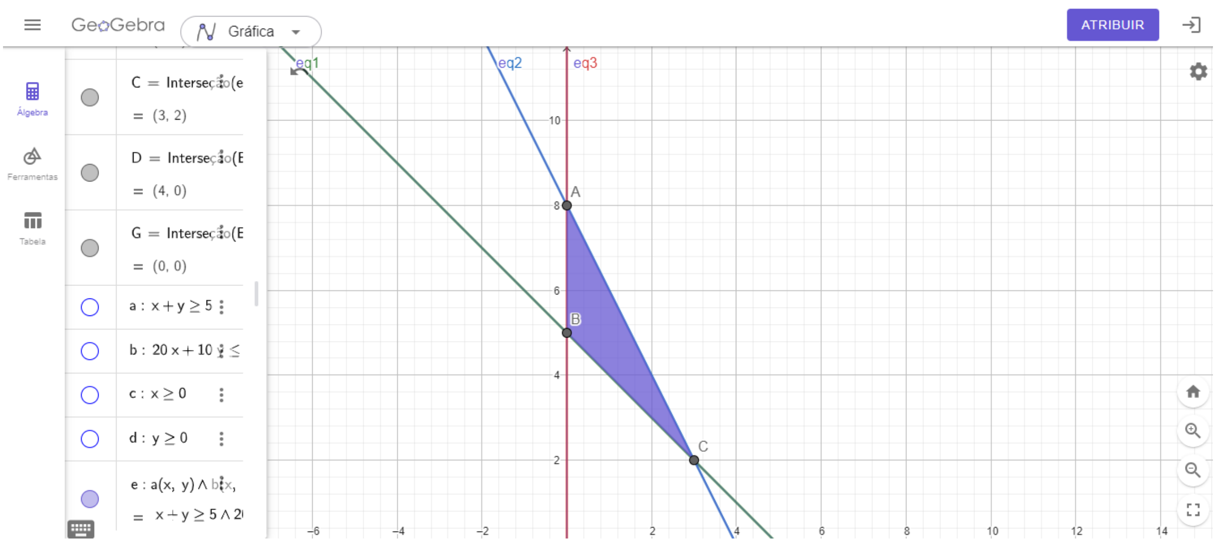
e sua região poligonal formada.

Figura 47 – Interseção entre retas(pontos notáveis)



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 48 – Solução gráfica do sistema de inequações



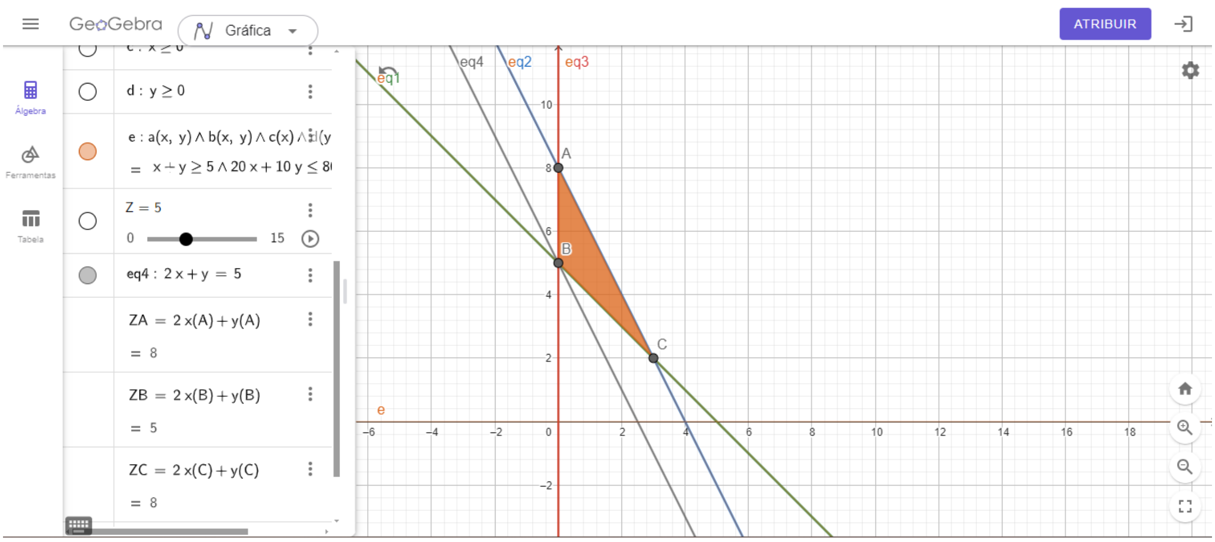
Fonte: Elaborado pelo autor

Assim que os estudantes conseguirem executar corretamente os passos das aulas anteriores, o docente deve criar uma função aleatória dependente das variáveis x e y

(para fazer o papel da função objetivo a ser maximizada ou minimizada), por exemplo, $z = f(x, y) = 2x + y$ e fazer a substituição dos valores do vértices (x, y) na função objetivo e assim determinar o valor de $f(x, y)$ para esses valores (vértices).

O próprio geogebra mostrará o valor quando fizer a substituição das coordenadas x e y ou então basta escrever $ZA = 2x(A) + y(A)$ e automaticamente, a calculadora geogebra entenderá que na função Z deve-se substituir $x = 0$ e $y = 8$. E daí, $ZA = 8$. O que quer dizer que no ponto A, a função $z = f(x, y) = 2x + y$ é igual a 8. De maneira análoga teremos $ZB = 5$ e $ZC = 8$. Ilustramos a situação com a Figura 49.

Figura 49 – Valores dos pontos notáveis



Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, aplicando o Teorema da PL garante que a solução ótima (máxima ou mínima) está em um desses vértices, e como já fizemos as substituições desses vértices encontramos todos os valores em cada um deles, chegando na conclusão do melhor resultado e quando acontece a fim de solucionar os problemas propostos.

5.2.5 5º aula e 6º aula: Aplicação da atividade proposta

Uma vantagem dos recursos tecnológicos é mostrar o mesmo assunto matemático com uma abordagem diferente das aulas expositivas e de forma que melhore a compreensão e o entendimento do aluno. Fazendo esses passo a passo e observando o desenvolvimento dos discentes é possível observar quais conceitos estão mais consolidados nos alunos e quais precisam ser reforçados, sugerimos a aplicação da seguinte atividade:

Atividade proposta

Usando esses passo a passo trabalhados nas aulas anteriores, os discentes solucionarão problemas de Otimização Linear com duas variáveis de forma correta, com o auxilio de recursos tecnológicos, no caso o software GeoGebra. Vale salientar que é necessário executar a modelagem de forma correta do problemas proposto. Fica como sugestão três problemas a serem trabalhados nas turmas que está sendo aplicada a sequência didática. No entanto, o educador deve buscar novos problemas e situações presentes no cotidiano dos discentes.

Problema 1(DANTE, 2016)(8) Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas na tabela abaixo.

	P	**Q**	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade.

a) Qual é o custo de consumir 4 unidades do produto P e 5 unidades do produto Q?

b) Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

Problema 2 (Silva, *et al. 1998)*(19) (Adaptado) Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo - se que o total disponível de couro é de 6 unidade e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades monetárias e o do cinto é de 2 unidades monetárias. Quantos sapatos e quantos cintos deverão ser fabricados para se obter o lucro máximo por hora? E qual esse lucro?

Problema 3 (Elaborado pelo autor) Um produtor rural dispõe de 7 hectares de terra para o plantio apenas de feijão e milho. A plantação de milho necessita de 5000 litros de água durante todo o processo até a colheita, enquanto a plantação de feijão precisa de 4000 litros de água até sua colheita. O investimento para cada hectare plantado com adubação e mão de obra é de R\$ $700,00$ e R\$ $800,00$ para o feijão e milho, respectivamente. Para essa plantação ele se dispõe a gastar até 50.000 litros de água e um investimento de R\$$5.000,00$ em adubação e mão de obra. Sabendo que o lucro no plantio de feijão e milho, são respectivamente, R\$ $3000,00$ e R\$ $2000,00$ em cada hectare plantado. Com base nessa situação, responda:

a) Quantos hectares de feijão e milho devem ser plantados para maximizar o lucro desse

plantio?
b) Qual o valor desse lucro?
c) É necessário plantar os 7 hectares de terra com feijão e milho para se obter o maior lucro ? Justifique sua resposta!

5.2.6 7º aula: Resolução e Debates dos problemas

Aplicada a atividade proposta com a turma, é imprescindível que o educador escute as dificuldades e as formas que os educandos pensaram para solucionar os problemas, fazendo o levantamento por discussões e debates. Mostre também a solução algébrica e proporcione um debate entre eles sobre a qual solução foi mais rápida e de fácil entendimento.

Vale salientar que se faz necessária uma boa interpretação por parte dos discentes para ser feita a modelagem matemática corretamente, e depois que o problema estiver modelado, aplicar os passos ensinados nessas aulas chegando então na solução do problema proposto.

Por fim, uma outra sugestão interessante para os alunos seria que o professor criasse um modelo de dieta simples conforme apresentamos na seção 4.2,solicitando aos alunos as quantidades de alimentos que deverão consumirem obtendo um custo mínimo e atendendo às necessidades propostas.

6 Conclusão

O uso de recursos tecnológicos nas aulas, proporciona aos educandos um ambiente enriquecedor e motivador, desde que o professor crie estratégias didáticas bem elaboradas, tornado-se assim mediador desse ensino aprendizagem, contribuindo para um aprendizado mais significativo para os discentes, tornado-o capaz de assimilar os conceitos já existentes com os adquiridos após a realização de novas ferramentas no processo de ensino-aprendizagem.

Apesar das grandes dificuldades no Ensino Básico e principalmente no ensino-aprendizagem da Matemática, acredita-se que esta atividade possa ser utilizada em sala de aula como alternativa aos métodos convencionais e uma nova visão para o futuro desses alunos quanto ao uso de ferramentas tecnológicas e matemática em prol a benefícios para humanidade. Quando os professores se concentram em novas metodologias e explanando o conteúdo com interações e novas informações ajuda os alunos a compreender melhor a disciplina. Consequentemente, os alunos estarão mais envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, ao abordar recursos tecnológicos como elementos essenciais para a construção e desenvolvimento das aprendizagens dos educandos, é possível vislumbrar a construção e ampliação de muitos conhecimentos propostos aos educandos, ancorada através de uma modelagem matemática flexível, por meio de práticas vigentes, tornando as aulas mais prazerosas e significativas.

Este trabalho, introduziu um pouco sobre Programação Linear no Ensino Médio, trazendo alguns problemas de Otimização Linear com aplicação em muitas áreas de conhecimento, mas que não é apresentado em muitos livros didáticos. Apresentou como solucionar sistemas de equações de duas variáveis e duas incógnitas de forma gráfica, esclareceu como localizar os semiplanos definidos por desigualdade linear de duas incógnitas, por meio do software GeoGebra. Por fim, apresentou uma Sequência Didática para ser trabalhada no Ensino Médio elencando todos os pontos citado nesse parágrafo e resolvendo problemas de Otimização Linear com duas variáveis utilizando as ferramentas do software GeoGebra.

A partir deste estudo, pretendemos aplicá-lo desenvolver novas competências e habilidades na prática pedagógica, despertando nos discentes motivação pelo conteúdo, aulas mais prazerosas e significativas, consequentemente, melhorando a participação e o envolvimento dos alunos.

Referências

1 ALMEIDA, G. B. Resolução de problemas de Otimização Linear utilizando o GeoGebra. **Matemática CEFET-MG**, 2022. Disponível em:<https://youtu.be/gSUJsFUv5oI?si=7tsosffg1I7vfQGk.> Acesso em: 15 jun. 2024.

2 BARRETO, C. R. **Radioterapia com Modulação da Intensidade do Feixe (IMRT)**, 3 set. 2023. Disponível em: <https://pt.linkedin.com/pulse/radioterapia-com-modula%C3%A7%C3%A3o-da-intensidade-do-feixe-imrt-barreto?trk=public_profile_article_view>. Acesso em: 5 jun. 2024.

3 BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica: frações, estatística, círculo e circunferência.** Curitiba: Editora Ithala, 2014.

4 BRASIL, M. d. E. **Base Nacional Curricular Comum.** Brasil: MEC, 2018.

5 BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática.** Brasília: MEC, v.3, 1997.

6 BOLDRINI, J. L. *et al* . **Álgebra Linear.** 3 ed. São Paulo: Editora Harbra ltda, 1980.

7 CASTELLAR, S. M. V.; MACHADO, J. C. **Metodologias ativas: Sequências didáticas**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016, p. 1-144

8 DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações** 3 ed. São Paulo-SP: Editora ática, 2016.

9 FUGITA, F. *et al* . **Ser Protagonista Box - Matemática**. Edições SM, volume único (parte II), p. 258-528, 2015.

10 HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introduction to operations research.** McGraw-Hill, 2015.

11 KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a aritmética: implicações da teoria de Piaget.** Campinas: Papirus, 1995.

12 LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática.** 3 ed. São Paulo-SP: Editora Moderna, 2016.

13 LEONARDO, M. **Conexões: Matemática e suas tecnologias.** 1 ed. São Paulo-SP: Editora Moderna, 2020.

14 LIMA, C. G. Novas Descobertas sobre como age a radioterapia. **Radioterapia São Sebastião**, 2024. Disponível em: Acesso em: <https://radioterapiass.com.br/site/especialidades/>

15 LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**, 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

16 MACAMBIRA, A. F. U.S. *et al.* **Programação Linear**. 1ª ed. João Pessoa: Editora da UFPB, 2016.

17 MOREIRA, F. R. Programação linear aplicada a problemas da área de saúde. **Einstein**, v.1, p. 107-111, 2003.

18 PERNAMBUCO, C. Estado. **Parâmetros para a educação básica do estado de Pernambuco.** Recife-PE: Governo de Pernambuco, 2020.

19 SILVA, E. M. *et al.* **Pesquisa Operacional**. 3 ed. São Paulo: Editora Atlas S.A, 1998.

20 SOUZA, joamir. **Novo Olhar**: Matemática - volume 2. 1 ed. São Paulo: Editora FTD, 2010. [PNLD 2012]

21 ZABALA, A. **A Prática Educativa**: como ensinar, Porto Alegre: Artmed, 1998.