Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

José Gildo Silva Pereira Borges

Desenvolvimento de Competências Geométricas por Meio de Sequências Didáticas: Uma Abordagem da geometria plana no Ensino Médio

Teresina - 2024

PROFMAT

José Gildo Silva Pereira Borges

Dissertação de Mestrado:

Desenvolvimento de Competências Geométricas por Meio de Sequências Didáticas: Uma Abordagem da geometria plana no Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientadora:
Prof.ª Dr.ª Lya Raquel Oliveira Dos Santos.

Teresina - 2024

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

B732d Borges, José Gilda Silva Pereira.
Desenvolviemnto de competências geométricas por meio de sequências didáticas: uma abordagem da geometria plana no ensino médio / José Gilda Silva Pereira Borges. -- 2024.
89 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientadora: Profa. Dra. Lya Raquel Oliveira dos Santos."

1. Geometria plana. 2. Sequencia didática. 3. Ensino médio. I. Santos, Lya Raquel Oliveira dos. II. Titulo.

CDD 516.22

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

PROFMAT

SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de mestre em matemática intitulada: ***Desenvolvimento de Competências Geométricas por Meio de Sequências Didáticas: Uma Abordagem da geometria plana no Ensino Médio,*** defendida pelo mestrando José Gildo Silva Pereira Borges, em 18 de julho de 2024 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Lya Raquel Oliveira dos Santos
Profª Dra. Lya Raquel Oliveira dos Santos
Presidente da Banca examinadora

Valmária Rocha da Silva Ferraz
Profª Dra. Valmaria Rocha da Silva Ferraz
Examinador Interno

Alan Kardec Carvalho Sarmento
Prof Dr. Alan Kardec Carvalho Sarmento
Examinador Externo

Dedico esse trabalho à minha mãe Maria Do Socorro Silva Borges, a minha grande inspiração e amiga Giovanna Rodrigues Carvalho, a minha aluna Luna Duarte Xavier pelo grande encorajamento na reta final e a minha avó paterna Maria Zelita Pereira dos Santos (in memorian), com muito amor e saudade.

Agradecimentos

À Deus, fonte criadora que me concedeu esta grande conquista.

A minha irmã Maria Gildália Borges, por toda ajuda necessária na compilação deste trabalho. Aos meus pais, José Gildo Pereira Borges e Maria do Socorro Silva Borges pelo grande apoio desde a graduação.

A grande inspiração e provavelmente a razão por eu ter entrado nessa empreitada, Giovanna Rodrigues.

A minha aluna e amiga Luna Duarte Xavier, que no final do curso esteve ao meu lado sendo a minha força motivadora no passo mais dificil, que é a elaboração da dissertação.

A minha avó Maria Zelita (in memorian), pela minha criação e por sempre acreditar no meu futuro. Muito obrigado dindinha!!

Aos meus amigos do mestrado, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que estivemos juntos, em especial, ao Ediney Laurindo pela dedicação a matemática e pela amizade.

À querida amiga e mentora, a Professora Dra. Lya Raquel Oliveira Dos Santos. Por ter sido minha professora na graduação, e uma verdadeira orientadora para a vida profissional. Agradeço por sua orientação inestimável e por ser uma fonte constante de inspiração.

Enfim, agradeço a todos que participaram dessa jornada, seja na torcida, ou mesmo, participando ativamente da minha carreira acadêmica durante esses mais de 10 anos de estudos initerruptos.

“*Se existe um Deus,*
Ele é um grande matemático.".

Paul Dirac

Resumo

Esta dissertação investiga a aplicação de sequências didáticas na recomposição de conteúdos de geometria plana para alunos do primeiro ano do ensino médio, visando recuperar e consolidar conhecimentos do ensino fundamental. Estruturada em três capítulos, a pesquisa aborda aspectos teóricos, metodológicos e práticos. O primeiro capítulo discute o pensamento geométrico de van Hiele e suas implicações pedagógicas, além de revisar estudos e explorar a relevância e impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) no ensino de matemática no Brasil. O segundo capítulo analisa estratégias de ensino com foco nas sequências didáticas, detalhando conceitos, objetivos, processos de ensino e as limitações na sua implementação, propondo estratégias para superá-las. O terceiro capítulo revisa conteúdos de geometria plana no currículo escolar, discute as competências específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e apresenta uma proposta prática de 12 aulas em sequência didática para a recomposição de conteúdos, utilizando questões da Obmep. A dissertação destaca a importância das sequências didáticas como ferramenta pedagógica eficaz para o ensino de geometria, promovendo a aprendizagem significativa e a consolidação dos conhecimentos prévios dos alunos.

Palavras-chave: Geometria Plana, Sequência Didática, Ensino Médio.

Abstract

This dissertation investigates the application of didactic sequences in the recomposition of plane geometry content for first-year high school students, aiming to recover and consolidate knowledge from elementary school. Structured in three main chapters, the research addresses theoretical, methodological, and practical aspects. The first chapter discusses van Hiele's geometric thinking and its pedagogical implications, reviews related studies, and explores the relevance and impact of the Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad (Obmep) on mathematics education in Brazil. The second chapter analyzes teaching strategies focused on didactic sequences, detailing concepts, objectives, teaching processes, and implementation limitations, while proposing strategies to overcome these challenges. The third chapter reviews plane geometry content in the school curriculum, discusses the specific competencies of the National Common Curricular Base (BNCC), and presents a practical proposal of 12 didactic sequence lessons for content recomposition, using Obmep questions. The dissertation highlights the importance of didactic sequences as an effective pedagogical tool for teaching geometry, promoting meaningful learning and consolidating students' prior knowledge.

Keywords: Plane Geometry, Didactic Sequence, High School.

Sumário

Introdução

A matemática, sendo fundamentada na lógica e aplicada em diversas áreas do conhecimento, destaca-se como uma oportunidade para estudantes em diferentes níveis de ensino. Os desafios encontrados na disciplina não são apenas uma questão isolada; ao contrário, representam uma jornada partilhada por muitos, independente de idade ou contexto sócio cultural. A abstração e formalidade presentes, nesta ciência, é uma das mais notáveis características apresentadas nos tópicos matemáticos como ferramentas que nos conectam a um entendimento mais profundo do mundo ao redor.

Faz-se míster considerar que a falta de uma base sólida em conceitos fundamentais de matemática pode levar a lacunas no aprendizado, dificultando a progressão para os tópicos mais avançados. A Matemática é uma disciplina que se constrói, de forma cumulativa, e qualquer falha na entendimento de conceitos básicos pode resultar em dificuldades subsequentes.

A metodologia de ensino, decerto, também desempenha um papel crucial nas dificuldades encontradas pelos estudantes, de Matemática. Abordagens tradicionais e métodos de ensino que enfatizam a memorização de fórmulas, sem promover o assimilação profundo dos conceitos podem levar a uma aprendizagem superficial e à falta de habilidades de resolução de problemas. Sanchez (2004, p.174-175,[30]) exibe alguns desses desafios:

> Dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidades para analisar o problema e raciocinar matematicamente. Dificuldade quanto às crenças, às atitudes, às expectativas e a fatores emocionais acerca da Matemática. Dificuldades relativas à própria complexidade da Matemática, como seu alto nível de abstração e generalizações, a complexidade dos conceitos e de alguns algoritmos; a natureza lógica exata de seus processos; a linguagem e a terminologia utilizada. Podem ocorrer dificuldades mais intrínsecas, como bases neurológicas alteradas. Atrasos cognitivos gerenciados ou específicos.

Além dessas dificuldades, a ansiedade dos alunos em relação à matemática é outra dificuldade comum no contexto escolar e fora dela. De acordo com Carmo e Simionato (2012) [6], muitos estudantes enfrentam uma inquietação paralisante ao se depararem com problemas matemáticos, o que pode prejudicar significativamente seu desempenho. Essa aflição, por sua vez, pode ser alimentada por uma cultura que muitas vezes associa o aprendizado matemático como uma habilidade inata, sem dar o devido reconhecimento a importância do esforço, da prática e da abordagem gradual na construção da proficiência matemática ao longo da vida.

O medo da matemática não é apenas um estigma cultural, mas muitas vezes reflete uma ansiedade profunda e paralisante que surge da crença errônea de que os problemas matemáticos só podem ser resolvidos por mentes "naturalmente talentosas"(Giraldo, 2018, [16]). Na verdade, a matemática é uma habilidade adquirida através da prática, paciência e abordagem positiva, e a ansiedade na hora de resolver problemas matemáticos muitas vezes deriva da falta de confiança, não da falta de capacidade.

A aprendizagem da geometria, por exemplo, pode ser desafiadora para muitos alunos, por não se limitar somente à memorização de fórmulas, exige uma compreensão profunda dos conceitos e a capacidade de visualizar e manipular formas tridimensionais no espaço. Algumas das dificuldades mais comuns encontradas pelos estudantes nesse contexto incluem a capacidade de visualizar objetos e lidar com conceitos abstratos, como pontos, linhas e planos, que podem ser difíceis de visualizar para alguns alunos (Utsumi e Lima, 2008,[34]).

Com a transição do mundo tangível para o conceitual, é valioso ainda ressaltar tanto os conhecimentos prévios de cada aluno quanto o histórico da geometria para compreender os passos que levaram os matemáticos a criarem as ideias e com isso obter os resultados que são usados em diversas outras áreas. Por isso mesmo, que essa sequência didática foi criada, pois como a definição dada por (Zabala, 2015, p.18, [38]) a sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos". Antes mesmo de nos aventurarmos nos intrincados cálculos e fórmulas, é essencial ter uma base sólida de conceitos fundamentais. Essa base não apenas facilita a assimilação de novos conteúdos, mas também promove um entendimento mais profundo e duradouro. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2001, p.52,[4]) abordam que:

> É importante levar em conta tais conhecimentos, no processo pedagógico, porque o efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões; o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto-elaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões.

Euclides, um dos maiores baluartes da Geometria, afinou o seu estudo através do livro "Os Elementos"; escrito em 13 obras, inúmeros postulados e proposições acerca da "Geometria Euclidiana", perpassando outrossim pela Teoria dos Números. Para nós, matemáticos, muitas vezes esta abordagem parece sutil, complexa, requerendo um exame mais cuidadoso, que nos faz, ao tempo, pensar estratégias: Como otimizar o ensino da Geometria, por exemplo, com sequências didáticas para revisar os conteúdos para alunos do Ensino Médio, das escolas públicas, acerca das estratégias e os conteúdos do ensino fundamental com foco nas questões de provas que desafiam as noções geométricas como as dá mais famosa, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep).

Traçar estes questionamentos e, ao tempo, tentar dirimir estas conjunturas, evidencia um condão de reminiscências. O interesse pela Geometria, que convergiu para a motivação desta dissertação, advém das memórias da infância deste redator, que possuía o desejo de seguir carreira, na Aeronáutica. Cabe salientar que seu pai disse, no tempo, que este deveria, para tanto, ser exímio, em Matemática. O caminho, desde o início, seria árduo, com uma educação, na escola pública, com greves constantes e, às vezes, a ausência de professores, que comprometem, dia a dia, um ensino e aprendizado na Matemática.

Mais tarde, eis que surgira um incentivo salutar; no que repassava os principais conhecimentos trigonométricos, pontuando que as razões entre lados de triângulos retângulos geramo seno, cosseno e tangente e, a posteriori, dissecando as funções trigonométricas, abordando outrossim,o teorema de Pitágoras e a questão de Áreas, que foram muito relevantes, apesar dos poucos e esparsos exercícios a que tínhamos acesso, a 1ª professora de Matemática subsidiou o interesse pela área, enquanto escolha acadêmica. No 3º ano, um outro professor,abordou tanto mais as noções de Geometria Analítica sobre Pontos e Retas. Em um pré-vestibular, n u m a escola particular, as dificuldades abundaram uma vez que os materiais ofereciam questões mais complexas, que não se resolveriam dispondo apenas de uma fórmula. Fez-se indispensável, neste tocante, um mergulho intensivo paralelo neste curso, haja vista que se resolvia várias vezes, uma mesma questão,procurando deste turno, alternativas mais viáveis de se chegar à resolução correta.

O adentrar na Universidade Federal do Piauí, no período 2015.1, tornou o contato com a Geometria, cada vez mais eminente, prazeroso e promissor. Através da disciplina “ Desenho Geométrico”, reviu-se as noções e construções envolvendo régua e compasso, desde as que englobavam a construção de polígonos, até as mais complexas, como a estruturação dos arcos capazes. No mesmo diapasão, aprendeu-se na Geometria Euclidiana, como elaborar as provas acerca dos fatos fundamentais, envolvendo os axiomas, compreendendo a ideia das demonstrações, em Matemática, algo que auxiliou bastante no entendimento dos padrões lógicos que contribuíram para o avanço, mormente, na graduação, e conclusão do curso, bem como na condução do Mestrado com louvor.

O ingresso nas salas de aula, no início de 2019, como professor substituto da Seduc-PI, auxilou o estudante de mestrado a priorizar os ensinamentos acerca da Geometria Espacial, compreendendo a relação de Euler e a contagem de diagonais, bem como a noção de ângulos e polígonos. Em relação à Trigonometria, vale dizer que os alunos assimilaram, é bem verdade, os conceitos, e resolveram algumas questões propostas pelo livro da disciplina.

No entanto, ao interpretarem uma questão, semelhante às de ENEM, titubeavam e fadavam o veredicto:— Professor, não sei montar esta questão! Poderia nos auxiliar, resolvendo-a? Então, concedia-se um auxílio. Mesma dificuldade fora vivenciada enquanto professor substituto, pela SEMEC; os alunos entendiam as noções de ângulos e áreas, mas frenavam e ameaçaram desistir de aprender, quando se abordava o Teorema de Pitágoras, uma vez que não aprenderam, com esmero, sobre os números com raízes. Desesperavam-se e o resultado eram as torrentes de notas negativas, e /ou a ideia de ser a Matemática algo complicado e difícil de aprender. Em 2023, ocorreu o ingresso, via concurso público do Estado do Ceará, como professor de Matemática, na EEMTI Raul Tavares Cavalcante (RTC), no município de Itaitinga/CE. Optou-se por ensinar as turmas de 1º e 2º anos, haja vista que se pode exercer uma tutela maior e mais eficaz, no ensino da Matemática.

Diante de todo o exposto, interessa pontuar que um dos maiores móveis desta redação é ofereceruma proposta de sequencia didática em torno da Geometria Plana, explorando os conceitosmatemáticos, de forma integrada, utilizando para isso as questões da Obmep no intuito de relacionar os conteúdos. Compreendendo, também, as práticas de ensino de geometria, examinando as teses que baseiam a criação dos materiais didáticos existentes, abordagens pedagógicas e estratégias de ensino, revisando teorias educacionais relacionadas ao ensino de geometria, do Tecnicismo ao Construtivismo. Nessa perspectiva, considera-se que:

> Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2001, p.528,[3]).

Conforme a problematização esplanada anteriormente, esse trabalho apresenta como objetivo geral a proposta de uma sequência didática, em Geometria Plana, para a recomposição de conhecimentos a alunos do primeiro ano do ensino médio, fazendo uso de questões da Obmep como base para desenvolver a teoria e a prática.

Para que o objetivo geral seja atingido, é indispensável que o trabalho alcance os respectivos objetivos específicos:

- Compreender os principais teóricos por trás das teorias educativas.
- Estudar o funcionamento das sequências didáticas e seus percursores.
- Propor a sequência proposta com base na teorias estudadas.
- Observar os desafios e perspectivas futuras no campo do pensamento geométrico.

Estrutura da Pesquisa

Esta dissertação explora a aplicação de sequências didáticas na recomposição de conteúdos de geometria plana para alunos do primeiro ano do ensino médio, visando recuperar e consolidar conhecimentos do ensino fundamental. A pesquisa é estruturada em três capítulos principais, cada um abordando diferentes aspectos teóricos, metodológicos e práticos.

O primeiro capítulo estabelece as bases teóricas e metodológicas da pesquisa. Inicialmente, é discutido o pensamento geométrico de van Hiele, um modelo que descreve a progressão dos níveis de compreensão geométrica dos alunos. As implicações pedagógicas deste modelo são analisadas, destacando seus benefícios e limitações para o ensino de geometria. Estudos e pesquisas que validam e expandem o modelo de van Hiele são revisados. A relevância da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) é explorada, evidenciando sua importância para a matemática no Brasil. O impacto da Obmep no ensino de matemática é analisado.

No segundo capítulo, são abordadas as estratégias de ensino com foco nas sequências didáticas. O conceito e os objetivos das sequências didáticas são definidos, destacando sua importância na organização e estruturação do ensino. Aspectos e processos de ensino mediados pelas sequências didáticas são detalhados, enfatizando como essas ferramentas pedagógicas facilitam a aprendizagem progressiva e contínua dos alunos. As limitações das sequências didáticas são discutidas, abordando os desafios na sua implementação, como o planejamento detalhado, a formação inadequada dos professores, a necessidade de adaptação ao contexto escolar e as dificuldades na avaliação contínua. São propostas estratégias para superar essas limitações, incluindo a gestão eficaz do tempo, a formação contínua dos professores, a adaptação flexível das atividades e o uso de ferramentas de avaliação formativa.

O terceiro capítulo foca no contexto curricular e na aplicação prática das sequências didáticas. Uma revisão dos conteúdos de geometria plana presentes no currículo escolar é realizada, identificando os principais tópicos e metodologias de ensino. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as competências específicas para a geometria são discutidas, analisando como integrar essas competências no planejamento das aulas.

Por fim, é apresentada uma proposta prática de 12 aulas em sequência didática para o ensino de geometria plana. Esta proposta visa a recomposição de conteúdos do ensino fundamental, adaptados para alunos do primeiro ano do ensino médio. As aulas, estruturadas de forma a promover a recuperação e a consolidação dos conhecimentos prévios dos alunos, utilizando para isso, as questões da Obmep, seguido das considerações finais. A dissertação destaca a importância das sequências didáticas como uma ferramenta pedagógica eficaz para o ensino de geometria.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos e Metodológicos

Neste primeiro capítulo, são apresentados os fundamentos teóricos e metodológicos que embasam esta dissertação. O objetivo é fornecer uma compreensão sólida das bases que sustentam as discussões subsequentes. Este capítulo está dividido em duas seções principais: o Pensamento Geométrico de van Hiele e a OBMEP e seu histórico e importância para a criatividade matemática.

A primeira seção aborda o modelo de pensamento geométrico proposto por Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof. Este modelo, desenvolvido na década de 1950, descreve cinco níveis de compreensão geométrica pelos quais os estudantes podem progredir. A discussão inclui uma introdução ao modelo, detalhando cada um dos níveis de pensamento geométrico e suas características. Além disso, serão exploradas as implicações pedagógicas deste modelo para o ensino de geometria, assim como estudos e pesquisas que validam e expandem o trabalho dos Van Hiele.

Na segunda seção, a atenção se volta para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Serão discutidos o histórico e a evolução desta competição, desde sua criação até os dias atuais, destacando seu impacto significativo no ensino da matemática no Brasil. A OBMEP é apresentada como um importante instrumento para a promoção da criatividade matemática entre os estudantes, incentivando o desenvolvimento de habilidades críticas e analíticas. Serão também analisados os benefícios e as transformações que a OBMEP trouxe para o cenário educacional brasileiro, especialmente no que se refere ao estímulo ao pensamento matemático criativo.

1.1 Pensamento Geométrico de van Hiele

Existem algumas explicações detalhadas a respeito da definição do pensamento geométrico, escolhi iniciar com a teoria chamada de pensamento geometrico de Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof que foram educadores e pesquisadores holandeses renomados, conhecidos por sua contribuição significativa para a teoria do pensamento geométrico. A sistemática por trás dos níveis de compreensão dos alunos reforça a ideia das questões usadas terem uma progressão na própria sequência didática.

Segundo Kaleff (1994 [23]), Pierre Van Hiele, tendo nascido em 1909 na Holanda, foi um matemático e educador notável. Estudando matemática na Universidade de Utrecht e mais tarde se tornou professor de matemática em uma escola secundária em Groningen, na Holanda. Durante sua carreira como professor, ele começou a desenvolver suas ideias sobre a natureza do pensamento geométrico.

Na mesma obra, encontramos um pouco do histórico de Dina Van Hiele-Geldof que nasceu em 1902 também na Holanda. Ela se formou em matemática e tornou-se uma professora primária. Dina desempenhou um papel fundamental ao lado de Pierre Van Hiele no desenvolvimento e refinamento da teoria dos níveis de pensamento geométrico. Juntos, eles conduziram pesquisas extensas sobre como os alunos aprendem geometria e formularam sua teoria com base nessas observações.

> O Modelo de Van Hiele do pensamento geométrico se coloca como guia para aprendizagem e para avaliação das habilidades dos alunos em geometria. O mesmo consiste de cinco níveis de compreensão, chamados visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor que descrevem as características do processo de pensamento. (Kaleff et al, 1994, p. 24,[23])

O trabalho do casal Van Hiele (1986) [35], resultou nas publicações acerca do pensamento geométrico, no qual eles apresentaram sua teoria dos níveis de pensamento geométrico que será visto nos próximos capítulos. Neste livro, eles descreveram como os alunos progridem através de cinco níveis distintos de compreensão geométrica, desde o reconhecimento básico de formas até a aplicação abstrata de princípios geométricos em problemas complexos.

O modelo em si consiste em 5 níveis que podemos, nesse trabalho, listar do primeiro ao quinto, que têm características próprias sobre o domínio e evolução das observações referentes ao aprendizado dos alunos. O primeiro nível é chamado de visualização ou reconhecimento, onde os alunos vivenciam apenas as características visuais dos objetos, podendo tirar conclusões precipitadas na maioria dos casos, como na questão de achar que um cubo é um quadrado por conta da forma quadrática de suas faces. Esse erro típico é chamado de aparência global e interfere nas compreensões de figuras posteriores. Ele é rapidamente resolvido quando o aluno entende o conceito de dimensões, ao perceber que o cubo é uma figura tridimensional e o quadrado, apenas um lado ou face do mesmo.

Na análise (segundo nível), há a experimentação envolvendo as formas geométricas, sendo associadas com os objetos conhecidos do dia a dia. Além disso, há uma observação das características dessas figuras para poder classificá-las, sendo os lados e ângulos as principais diferenças entre elas. Por exemplo, ao olhar para um retângulo, o aluno percebe que ele parece com um quadrado, mas como uma das dimensões parece ser maior que a outra, não é possível confirmar que o retângulo seja igual ao quadrado. Também é incompreensível para os alunos deste nível que o quadrado seja um retângulo por estar preso estritamente às formas e não às definições mais formais.

Essa liberdade é possível quando alcançado o (terceiro nível), chamado de Dedução Informal, onde os alunos podem, através das definições, fazer uma comparação ou inclusão de figuras e suas propriedades. A exemplo disso, temos as figuras Retângulo e Paralelogramo. Ambas figuras possuem formatos que podem ser fixos com desenhos, mas ao abstrair nas definições, é possível encontrar trapézios retângulos, uma figura que ainda é trapézio, mas com uma característica do retângulo que é de possuir dois dos ângulos retos e dois lados paralelos.

Nesse nível, ainda é necessário um desenho na maioria das vezes para compreender as relações entre os conceitos, sendo uma transição do concreto para o abstrato. Embora que na dedução formal (Quarto nível de compreensão na teoria de Van Hiele (1986) [35]), os alunos possuam um senso axiomático mais forte, decidindo sobre as afirmações de forma sequencial, ou seja, baseado fortemente nos axiomas e propriedades anteriores. Isso estimula o caráter dedutivo-abstrato que é um dos pilares na matemática, nas demonstrações que podem produzir ou reproduzir uma mesma prova de outras formas, mostrando que a matemática pode ser explorada de outros ângulos.

Normalmente, os alunos no ensino médio podem alcançar até mesmo o terceiro nível, sendo reservado o quarto nível a estudantes do ensino superior de matemática na graduação ou mesmo nos cursos de arquitetura para melhor exploração das formas e estruturas geométricas. Mas o último nível, que é o do Rigor, temos um caráter refinado dos sistemas analisados estudando outros tipos de geometrias, inclusive as não euclidianas, de forma totalmente dedutiva. A respeito disso, as ideias que basearam o ensino superior de matemática em nível de mestrado ou doutorado na área da geometria diferencial, têm uma grande contribuição da inserção dos conceitos de outras áreas da matemática para estudar retas tangentes, em casos bem generalizados e em curvas das mais diversas.

A teoria de Van Hiele (1986 [35]) teve um impacto significativo no campo da educação matemática, influenciando a forma como os professores ensinam geometria e como os currículos de matemática podem ser desenvolvidos em todo o mundo. Seu trabalho pioneiro continua a ser estudado e aplicado por muitos educadores e pesquisadores interessados no desenvolvimento do pensamento geométrico e no ensino eficaz da geometria.

> O Modelo de Van Hiele assume uma grande importância para o ensino e aprendizado em Geometria, pois, além de poder identificar o nível de conhecimento dos alunos em cada tema, propõe aos professores uma sequência de fases, por meio das quais ele poderá auxiliar os alunos no progresso de um nível para o outro. (Santos et al, 2023, p. 7,[31])

Essas teorias educacionais podem oferecer uma perspetiva diferenciada na qual os alunos aprendem geometria. Normalmente, um educador se vale dessas teorias para criar uma mescla de conhecimentos para compreender o aluno e a própria prática docente, sendo assim um ponto chave na produção das sequências didáticas. Nessa dissertação a integração entre geometria e álgebra será necessária para que as soluções dos problemas sejam simplificadas por meio das relações envolvendo as equações.

Em resumo, podemos ver que eles propõem que o conhecimento geométrico se desenvolva em cinco níveis hierárquicos, desde a identificação de figuras geométricas baseando-se em sua aparência global, perpassando pela análise das propriedades e componentes das figuras geométricas, até o reconhecimento das relações entre as propriedades e a capacidade de classificar figuras, donde, a capacidade de entender e construir provas formais se torna preponderante nos níveis finais compreendendo os sistemas axiomáticos e da inter-relação entre diferentes sistemas geométricos.

Uma das teorias mais famosas quando o assunto é educação, a teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget (1896–1980), o desenvolvimento ocorre em estágios caracterizados por formas diferentes de pensar, sendo assim, sequencial. Ou seja, o desenvolvimento cognitivo das ideias em geometria perpassa pelo amadurecimento do mesmo em idade e condições físico-biológicas saudáveis. Piaget focou nos estágios de desenvolvimento cognitivo das crianças, particularmente como elas constroem conceitos espaciais e geométricos. classificando em quatro estágios a saber:

No estágio Sensorimotor (0-2 anos), os pequenos ainda não desenvolvem a capacidade de raciocinar abstratamente ou de usar símbolos. para Piaget (1995), elas já podem explorar o mundo ao seu redor e aprender sobre formas, cores e tamanhos através da manipulação de objetos. Como exemplo na geometria, temos a atividade de encontrar e encaixar formas em um brinquedo de encaixe.

Este problema envolve a percepção visual, no qual o ser em constante formação precisa ser capaz de identificar as diferentes formas do brinquedo. A coordenação mão-olho é importante nessa fase pois ela precisa ser capaz de pegar as formas e colocá-las nos lugares corretos e a exploração espacial para que seja capaz de girar e virar as formas para encontrar o encaixe correto.

> A criança aprende através da experimentação ativa com o mundo. Ela manipula objetos, explora diferentes texturas e sons, e observa as consequências de suas ações. Essa exploração é fundamental para o desenvolvimento da inteligência. (Piaget, 1936, p. 16 [28])

Ao resolver este tipo de problema, a criança aprende sobre a identificação e diferenciação de diferentes formas, como círculos, quadrados e triângulos. Aprende que alguns objetos são maiores que outros e que alguns cabem dentro de outros. Por fim, aprende que os objetos podem ser movidos e posicionados de diferentes maneiras.

No Pré-operacional (2-7 anos), as crianças começam a desenvolver a capacidade de pensar simbolicamente e de usar a linguagem para representar o mundo ao seu redor. Isso permite que elas resolvam problemas geométricos mais complexos do que no estágio Sensorimotor. Segundo Piaget, "As operações do pensamento, depois dos sete anos, correspondem à intuição, que é a forma superior de equilíbrio que o pensamento atinge na primeira infância."Piaget (1995, p. 48, [29]).

Alguns exemplos de problemas geométricos que elas podem resolver seriam a respeito da classificação dos objetos por forma, onde elas podem observar objetos em diferentes grupos, como círculos, quadrados e triângulos. Além disso, a identificação e nomeação de diferentes formas em objetos do seu dia a dia, comparando e contrastar as diferentes formas, como em termos de tamanho, cor e número de lados.

Além disso, podem construir estruturas com diferentes formas, como blocos, legos ou materiais reciclados, seja desenhando diferentes formas com precisão crescente bem como resolvendo quebra-cabeças simples que envolvam formas, como os de encaixe. De modo que elas possam aprender sobre conceitos matemáticos importantes, como classificação, contagem, comparação e medida.

Outras habilidades associadas podem ser estimuladas como as que as crianças aprendem sobre relações espaciais, como cima e baixo, dentro e fora, perto e longe. podendo aprender a desenvolver estratégias para resolver problemas de forma sistemática. Favorecendo desse modo, as oportunidades para explorar a geometria no seu dia a dia. E isso pode ser feito através de brincadeiras, atividades e conversas.

Já na faixa de (7-11 anos) no Estágio Operacional Concreto os pré adolescentes experimentam um avanço significativo em suas habilidades cognitivas, abrindo caminho para o raciocínio lógico, a reversibilidade e a conservação de conceitos. Isso impacta diretamente na maneira como elas percebem e interagem com o mundo ao seu redor, incluindo a exploração de conceitos geométricos.

Segundo Sousa (2007, [9]), esse estágio é caracterizado pela abordagem das estruturas matemáticas para explicar a modelagem das estruturas cognitivas do pensamento com o entendimento de operações matemáticas bem como os sistemas de classes, as relações de quantidade, mensuração, tempo e espaço.

Quanto ao pensamento Lógico, os pré adolescentes vão desenvolvendo a capacidade de raciocinar logicamente, utilizando operações mentais como classificação, seriação, adição e subtração. Isso permite que elas compreendam relações complexas entre formas e espaços. Já na reversibilidade, eles compreendem que as ações podem ser revertidas, ou seja, que elas podem imaginar como um objeto era antes de ser transformado, sendo crucial para a compreensão de conceitos geométricos como rotação e reflexão.

Os jovens desenvolvem a capacidade de conservar propriedades como quantidade, área e volume, mesmo quando a aparência de um objeto muda, percebendo o principio de cavalieri na prática. Isso permite que eles compreendam que um objeto pode ter diferentes formas, mas ainda manter a mesma quantidade de material. Além disso, começam a considerar as diferentes perspectivas, o que permite a compreenção das formas geométricas podendo ser vistas de diferentes ângulos e ainda manterem suas propriedades.

> Em um terceiro estágio aparecem as primeiras operações, mas as chamo de operações concretas devido ao fato de que elas operam com objetos, e ainda não sobre hipóteses expressadas verbalmente. Por exemplo, há as operações de classificação, ordenamento, a construção da idéia de número, operações espaciais e temporais e todas as operações fundamentais da lógica elementar de classes e relações, da matemática elementar, da geometria elementar e até da física elementar (Piaget, 1995, p. 2 [29])

Na geometria, os alunos possuem um contato mais próximo dos conceitos apresentados, classificando e ordenando objetos com base em critérios geométricos mais complexos, como ângulos, simetria e área. Constroem figuras geométricas mais complexas com precisão e utilizando instrumentos como réguas e compassos, e disso resulta a resolução de problemas que envolvem cálculo de área, perímetro, volume e ângulos.

A respeito da visualização espacial, os jovens desenvolvem a capacidade de visualizar e manipular objetos mentalmente, o que permite que elas resolvam problemas geométricos sem a necessidade de manipulação física. Na Geografia por exemplo, a geometria aparece quando eles aprendem a ler e interpretar mapas, utilizando conceitos geométricos como escala, direção e localização.

Como atividades para Estimular o Pensamento Geométrico nessa faixa, temos os tradicionais Jogos de Tangram que estimulam a resolução de problemas, a percepção espacial e o reconhecimento de formas. Temos tambem a Geometria com Origami, que Combina matemática, arte e habilidades motoras finas na criação de figuras geométricas, permitindo a exploração de formas, tamanhos, proporções e simetria.

Alguns Jogos de Tabuleiro com Elementos Geomêtricos podem ser considerados onde desenvolvendo o raciocínio estratégico, a resolução de problemas e a coordenação motora. Nesse mesmo caminho, as atividades de Tesselation que no campo da geometria estimula a criatividade, a percepção espacial e o reconhecimento de padrões geométricos, inclusive identificando formas geométricas em folhas, flores, animais e outros elementos naturais.

Além dos jogos, podemos demonstrar a aplicação da geometria no dia adia, como na construção de casas, no design de objetos e na criação de obras de arte, sendo importante incentivar o trabalho colaborativo em atividades, promovendo a comunicação e a resolução de problemas em conjunto.

No ultimo Estágio Operacional Formal que começa a partir de 11 anos, Piaget (1995) nos conta que os adolescentes vivenciam um salto qualitativo em suas capacidades cognitivas, abrindo caminho para o raciocínio abstrato, o pensamento hipotético-dedutivo e a experimentação mental. Isso impacta a maneira como eles percebem e interagem com o mundo ao seu redor, incluindo a exploração de conceitos geométricos.

> Comparado a uma criança, o adolescente é um indivíduo que constrói sistemas e "teorias"... Ao contrário, o que surpreende o adolescente é o seu interesse por problemas inatuais, sem relação com as realidades vividas no dia-a-dia, ou por aqueles que antecipam, com uma ingenuidade desconcertante, as situações futuras do mundo, muitas vezes quiméricas (Piaget, 1995, p. 58 [29])

Algumas características que são notáveis para essa faixa em matemática como o desenvolvimento e a capacidade de pensar em conceitos abstratos e independentes de experiências concretas, permitindo que eles explorem a geometria em um nível mais profundo, compreendendo relações complexas entre formas, espaços e dimensões.

Os adolescentes conseguem formular hipóteses, deduzir consequências e testar suas ideias de forma sistemática. A manipulação mental de objetos e espaços, sem a necessidade de manipulação física. Isso os torna aptos a resolver problemas geométricos complexos que exigem análise e planejamento.

A compreensão de múltiplas perspectivas que permitem analisar a geometria de forma mais abrangente e crítica. Aplicando conceitos algébricos à geometria, resolvendo problemas que envolvem equações, funções e gráficos. Por exemplo, quando temos um gráfico de uma função polinomial do terceiro grau, percebemos que a sinuosidade da curva se assemelha como duas parábolas, embora a observação mais cuidadosa perceba que se trata de uma nova curva cúbica.

Sobre as atividades para estimular o pensamento geométrico, temos as que envolvem a apresentação de desafios que envolvam raciocínio lógico como obter novas demonstrações em teoremas conhecidos, análise espacial na resolução de puzzles e criatividade na criação dos mosaicos e origamis. Incentivando a exploração de teoremas famosos, como o Teorema de Pitágoras, e contemplando conjecturas ainda não comprovadas.

Procurando demonstrar a aplicação da geometria em áreas como física, química, engenharia, arte e arquitetura. Utilizando softwares e ferramentas digitais para visualizar e manipular objetos geométricos em diferentes dimensões, promovendo o diálogo e a troca de ideias sobre temas geométricos, incentivando o pensamento crítico e a argumentação.

Lembrando que o incentivo aos adolescentes a assumirem a responsabilidade pelo seu próprio aprendizado, guiando-os na busca por informações e soluções é importante para estimular a exploração de diferentes abordagens e soluções para problemas geométricos, valorizando a originalidade e o pensamento inovador.

Ao estimular o pensamento geométrico no Estágio Operacional Formal, você estará preparando os adolescentes para os desafios futuros na matemática, na ciência, na engenharia e em outras áreas que exigem raciocínio abstrato, pensamento crítico, bem como em habilidades de resolução de problemas e criatividade, incentivando sempre a colaboração em projetos e atividades em grupo, promovendo o trabalho em equipe e a resolução conjunta de problemas.

Para Zabala (1988, p.38,[38]), "Portanto, a situação de ensino e aprendizagem também pode ser considerada como um processo dirigido a superar desafios, desafios que possam ser enfrentados e que façam avançar um." A aplicação da sequência didática nesse caso se dá através da apresentação de desafios que possam corresponder ao estágio de desenvolvimento nos esquemas mentais, sem sobrecarregar ou adiantar etapas sendo uma forma segura de oferecer oportunidades para a descoberta e exploração dos alunos.

1.1.1 Implicações pedagógicas do modelo de van Hiele

As implicações pedagógicas do modelo de van Hiele têm sido amplamente discutidas na literatura, com autores clássicos e modernos destacando tanto os aspectos positivos quanto as limitações desse modelo. A seguir, apresento uma análise dessas implicações com citações relevantes.

Dentre as implicações pedagógicas positivas do modelo de Van Hiele, podemos citar a Estruturação do ensino de geometria onde o modelo oferece uma estrutura clara e progressiva para o ensino da geometria, permitindo que os professores organizem o conteúdo de forma lógica e sequencial. Segundo van Hiele (1986, [35]), os cinco níveis de pensamento geométrico (visualização, análise, ordenação, dedução formal e rigor) ajudam a identificar onde os alunos estão em sua compreensão e como avançá-los para o próximo nível.

Há no modelo, um foco no desenvolvimento cognitivo dos alunos, promovendo uma compreensão profunda dos conceitos geométricos. Battista (2007, [1]) argumenta que o uso do modelo de van Hiele em sala de aula pode facilitar a transição dos alunos de um nível de pensamento para outro, melhorando a compreensão e a retenção de conceitos geométricos.

O modelo fornece uma base para a avaliação diagnóstica, permitindo que os professores identifiquem os níveis de pensamento dos alunos e ajustem suas instruções de acordo. Burger e Shaughnessy (1986, [5]) destacam que a aplicação do modelo permite avaliações mais precisas das dificuldades dos alunos e facilita a adaptação das estratégias de ensino para atender às necessidades individuais.

Também enfatiza a importância da linguagem e da comunicação na aprendizagem da geometria. Clements e Battista (1992, [8]) sugerem que a utilização do modelo de van Hiele pode promover uma melhor comunicação entre alunos e professores, permitindo discussões mais significativas sobre conceitos geométricos.

Em oposição as implicações positivas, temos que uma das críticas ao modelo de van

Hiele é sua rigidez na progressão dos níveis. Alguns autores, como Gutierrez et al. (1991, [17]), argumentam que os alunos não necessariamente avançam de forma linear pelos níveis e que a aprendizagem pode ser mais fluida e menos estruturada do que o modelo sugere.

Implementar o modelo de van Hiele na prática pode ser complexo e desafiador para os professores, especialmente aqueles que não têm formação específica em educação matemática. Mason (1998, [24]) aponta que a formação e o desenvolvimento profissional dos professores são essenciais para a aplicação eficaz do modelo, mas que muitas vezes faltam recursos e suporte para isso.

Alguns estudos questionam a aplicabilidade universal do modelo de van Hiele, sugerindo que ele pode não ser adequado para todas as culturas e contextos educacionais. O estudo de Fuys, Geddes e Tischler (1988, [15]) ressalta que diferenças culturais podem influenciar como os alunos percebem e aprendem geometria, e que o modelo pode precisar de adaptações para ser eficaz em diferentes contextos.

1.1.2 Estudos e pesquisas relacionadas ao modelo de van Hiele

O modelo de van Hiele tem sido amplamente estudado e aplicado na educação matemática. Diversos estudos e pesquisas analisaram sua eficácia, validade e impacto no ensino e aprendizagem da geometria. A seguir, apresento uma revisão dos principais estudos e pesquisas relacionadas ao modelo de van Hiele.

Sobre os estudos clássicos, temos o trabalho de Fuys, Geddes e Tischler (1988, [15]). Este estudo seminal foi um dos primeiros a validar o modelo de van Hiele em um contexto norte-americano. Os pesquisadores conduziram uma série de entrevistas e avaliações com alunos de ensino fundamental e médio, identificando claramente os diferentes níveis de pensamento geométrico conforme descritos pelo modelo de van Hiele. O estudo também destacou a importância de uma instrução adequada para promover a progressão dos alunos através dos níveis.

Já Burger e Shaughnessy (1986, [5]), caracterizaram os níveis de desenvolvimento geométrico segundo o modelo de van Hiele através de uma série de experimentos e observações em sala de aula. Eles verificaram que os alunos progrediam através dos níveis conforme recebiam instrução apropriada e estruturada. O estudo também enfatizou a necessidade de treinamento específico para os professores a fim de implementar eficazmente o modelo.

Battista (2007, [1]) examinou o desenvolvimento do pensamento geométrico e espacial em crianças e jovens, com base no modelo de van Hiele. Destacando que o modelo continua a ser uma ferramenta valiosa para entender como os alunos aprendem geometria e como os professores podem facilitar essa aprendizagem. Além disso, ele discutiu como tecnologias educacionais, como softwares de geometria dinâmica, podem ser usadas para ajudar os alunos a progredirem através dos níveis de van Hiele.

Clements e Battista (1992, [8]), abordou a aplicação do modelo de van Hiele em contextos modernos de ensino, incluindo o uso de tecnologias educacionais. Os autores descobriram que ferramentas tecnológicas, como softwares de geometria interativa, podem apoiar significativamente a progressão dos alunos pelos níveis de van Hiele, proporcionando visualizações e manipulações que facilitam a compreensão dos conceitos geométricos.

Mason (1998, [24]) investigou as implicações do modelo de van Hiele para a formação de professores. Ele destacou que, apesar do valor do modelo, muitos professores precisam de mais formação e desenvolvimento profissional para aplicá-lo eficazmente. Mason sugeriu que programas de formação contínua podem ajudar os professores a compreender melhor os níveis de pensamento geométrico e a adaptar suas estratégias de ensino de acordo.

Perspectivas recentes com o tabalho de Gutierrez et al. (1991, [17]) num estudo que explorou alternativas para avaliar a aquisição dos níveis de van Hiele, destacando a importância de métodos de avaliação diversificados e contextualmente relevantes. Gutierrez e colegas sugeriram que avaliações tradicionais podem não capturar plenamente o desenvolvimento do pensamento geométrico e que abordagens mais flexíveis e adaptativas são necessárias.

Stahl e de Oliveira (2014, [33]) investigaram o impacto de intervenções pedagógicas baseadas no modelo de van Hiele em estudantes brasileiros. Eles encontraram que estratégias de ensino estruturadas e alinhadas com os níveis de van Hiele podem melhorar significativamente a compreensão geométrica dos alunos. O estudo também enfatizou a necessidade de adaptar as práticas pedagógicas para atender às necessidades específicas dos contextos locais.

1.2 A Relevância da Obmep para a Matemática

Nessta secção, daremos um enfoque na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) que é uma iniciativa de relevância no cenário educacional brasileiro. Criada em 2005 pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações (MCTI), a Obmep tem como principais objetivos estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área entre estudantes de escolas públicas de todo o país (IMPA, 2020, [19]).

Os objetivos da Obmep vão além da simples competição matemática. Ela visa "estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas brasileiras; contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica; identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas; incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; e promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento"(IMPA, 2020, [19]).

Segundo Rodrigues (2024, [36]), a Olimpíada tem se mostrado um poderoso instrumento para engajar estudantes com a matemática, criando um ambiente de incentivo e reconhecimento para aqueles que se destacam. Sendo realizada anualmente em duas fases. Na primeira fase, que consiste em uma prova objetiva aplicada em todas as escolas inscritas, e a segunda fase é composta por uma prova discursiva aplicada aos estudantes classificados na primeira fase. De acordo com Rodrigues (2024, [36]), essa estrutura permite uma ampla participação inicial, seguida de uma seleção mais rigorosa para identificar os estudantes com maior potencial.

Desde sua criação, a Obmep tem apresentado resultados impressionantes. Em 2023, por exemplo, a olimpíada contou com a participação de mais de 18 milhões de alunos, em mais de 55 mil escolas. Os estudantes que se destacam recebem medalhas de ouro, prata e bronze, além de menções honrosas. Além das premiações individuais, a OBMEP oferece programas de formação, como o Programa de Iniciação Científica (PIC) e o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC Jr.), que proporcionam oportunidades adicionais de desenvolvimento acadêmico para os medalhistas (Silva, 2015, [?]).

A importância da Obmep transcende o âmbito educacional, alcançando dimensões sociais significativas. De acordo com Rodrigues (2024, [36]), a olimpíada contribui para a valorização da educação pública e para a inclusão social, ao proporcionar a estudantes de diferentes contextos socioeconômicos a oportunidade de competir em igualdade de condições. Além disso, ela tem incentivado a formação de professores e a melhoria do ensino de matemática nas escolas públicas, promovendo um efeito positivo em cadeia no sistema educacional brasileiro.

Apesar dos muitos sucessos, a olímpiada enfrenta desafios, como a necessidade de maior divulgação e a inclusão de mais escolas e estudantes em regiões remotas. Além disso, há uma constante busca por aprimorar a formação continuada dos professores para que possam melhor preparar seus alunos para a competição. (Rodrigues, 2024, [36]).

Em termos de perspectivas futuras, a Obmep continua a se expandir e a buscar novas formas de engajar estudantes e professores. A digitalização de provas e a implementação de novas tecnologias educativas são algumas das estratégias previstas para ampliar o alcance e a eficácia da olimpíada (IMPA, 2020, [19]).

1.2.1 Impacto da Obmep no ensino de matemática no Brasil

Desde sua criação em 2005, a Obmep não só tem promovido a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática, como também tem influenciado positivamente a formação de professores, a motivação dos alunos e a valorização da educação pública. Ela tem contribuído para a melhoria do ensino de matemática ao incentivar práticas pedagógicas mais inovadoras e eficazes.

Estudos mostram que a preparação para a Obmep estimula os professores a adotarem metodologias de ensino que promovem uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Segundo Leão (2020, [20]), a olimpíada leva os professores a buscarem novas estratégias didáticas e a aprofundarem seu conhecimento em matemática, o que, por sua vez, melhora a qualidade do ensino.

A Obmep também tem um papel crucial na formação continuada dos professores. Programas como o Programa de Iniciação Científica (PIC) e o Programa de Aperfeiçoamento de Professores (PAPMEM) oferecem oportunidades de desenvolvimento profissional para os docentes, capacitando-os para melhor preparar seus alunos para a competição. De acordo com Rodrigues (2024, [36]), esses programas têm resultado em um maior engajamento dos professores com o ensino da matemática e uma valorização da profissão docente.

A participação na Obmep tem um efeito motivacional significativo nos alunos. O desafio e o prestígio associados à olimpíada incentivam os estudantes a se dedicarem mais ao estudo da matemática. No estudo de Leão (2020, [20]) mostrou que os alunos que participam da Obmep tendem a desenvolver uma atitude mais positiva em relação à matemática, o que se reflete em melhores desempenhos acadêmicos e maior interesse em seguir carreiras nas áreas de ciências e tecnologias.

A Obmep promove a inclusão e a igualdade de oportunidades ao proporcionar a estudantes de escolas públicas, muitas vezes localizadas em regiões menos favorecidas, a chance de competir em pé de igualdade com seus pares de todo o país. Rodrigues (2024, [36]) destaca que a olimpíada tem ajudado a revelar talentos ocultos em comunidades carentes, oferecendo a esses alunos oportunidades de crescimento acadêmico e pessoal que de outra forma poderiam não ter.

Os impactos da Obmep se estendem a longo prazo, com muitos ex-participantes seguindo carreiras de sucesso em áreas relacionadas à matemática e ciências. Segundo o IMPA (2020, [19]), muitos medalhistas da OBMEP prosseguiram para universidades de prestígio, tanto no Brasil quanto no exterior, e alguns retornaram ao sistema educacional como professores ou pesquisadores, contribuindo para um ciclo contínuo de melhoria do ensino de matemática no país.

Capítulo 2

Estratégias de Ensino e Sequências Didáticas

Neste ensejo, explora-se as estratégias de ensino, com foco nas Sequências Didáticas (SD's). O objetivo é apresentar um panorama abrangente sobre o que são sequências di- dáticas, seus objetivos, aspectos práticos e limitações. Desta feita, o capítulo está dividido em três seções principais: conceitos e objetivos das SD's, aspectos e processo de ensino mediados por elas, e as limitações das mesmas.

A primeira seção introduz o conceito de Sequência Didática, destacando sua importância no contexto educacional. Serão discutidas as definições e os princípios que norteiam a elaboração delas, além de seus objetivos pedagógicos. Esta seção busca esclarecer como as SD's podem contribuir para um ensino mais estruturado e eficaz, facilitando a aprendizagem dos alunos.

Na segunda seção, são analisados os aspectos práticos das SD's e como elas medeiam o processo de ensino e aprendizagem. Serão apresentados os componentes essenciais de uma Sequência Didática e exemplos de sua aplicação, no ensino da geometria. Esta parte do capítulo destaca a importância de uma estrutura bem planejada e os benefícios que elas trazem para a organização do ensino, proporcionando um ambiente de aprendizagem mais coeso e eficiente.

A terceira seção aborda as limitações e desafios encontrados, na implementação das SD's. Serão discutidas as dificuldades teóricas e práticas que podem surgir, bem como as estratégias para superar estas barreiras. Esta seção é fundamental por fornecer uma visão equilibrada, reconhecendo que, embora as Sequências Didáticas sejam uma ferramenta poderosa, elas também apresentam desafios que precisam ser considerado pelos educadores.

2.1 Sequência Didática: Conceitos e Objetivos

2.1.1 Definição de sequência didática

A Sequência Didática (SD), é válido salientar, apresenta-se como uma ferramenta pedagógica amplamente utilizada no planejamento e execução de atividades de ensino. Sua definição e aplicação são essenciais para a organização eficaz do processo de ensino- aprendizagem. Ela pode ser definida como um conjunto articulado de atividades, organizadas de maneira sistemática para promover a aprendizagem de determinados conteúdos ou habilidades.

Segundo Zabala (1998, [38]), "uma sequência didática é um encadeamento de atividades, cuja ordem e estrutura são pensadas para facilitar a aquisição progressiva de conhecimentos por parte dos alunos". O esboço desta estrutura permite que os alunos construam conhecimentos, de maneira gradual e contínua, consolidando suas aprendizagens ao longo do tempo, sendo composta por vários elementos que se articulam para garantir a efetividade do ensino. De acordo com Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, [10]), os principais componentes de uma Sequência Didática são:

- **Objetivos de Aprendizagem**: Definição clara do que se espera que os alunos aprendam ao final da sequência.
- **Conteúdos**: Seleção e organização dos conteúdos a serem ensinados.
- **Atividades**: Planejamento de atividades didáticas que promovam a aprendizagem dos conteúdos propostos.
- **Avaliação**: Métodos e critérios para avaliar o progresso e a aprendizagem dos alunos ao longo da sequência.

A utilização de SD's traz diversos benefícios para o processo de ensino-aprendizagem. De acordo com Franco (2018, [13]), a sequência didática ajuda a organizar o ensino, na medida em que proporciona uma estrutura clara e sequencial para a abordagem dos conteúdos, facilitando o planejamento do professor. Ao promover a continuidade da aprendizagem, garante que os alunos construam conhecimento de forma progressiva, haja vista que cada atividade serve como pressuposto para a próxima.

Aliada intrínseca da Avaliação, a sequência permite a continuidade e o progresso dos alunos, identificando dificuldades e ajustando as estratégias de ensino, conforme necessário. Movimento que corrobora e proporciona a elaboração de atividades variadas e desafiadoras, mantendo os alunos engajados e motivados nos meandros da disciplina.

2.1.2 Objetivos e importância das sequências didáticas no ensino

As sequências didáticas são ferramentas essenciais no planejamento pedagógico, proporcionando uma estrutura organizada para o ensino e a aprendizagem. Elas desempenham um papel crucial no desenvolvimento de competências e conhecimentos dos alunos, facilitando um processo de ensino mais eficaz e coeso.

Elas permitem uma organização lógica e progressiva dos conteúdos, facilitando a construção do conhecimento de forma estruturada. Segundo Zabala (1998, [38]), uma sequência didática "organiza os conteúdos, de maneira que cada etapa sirva de base para aseguinte, promovendo uma aprendizagem cumulativa e contínua". Ao dividir o conteúdo em etapas, as sequências didáticas ajudam os alunos a compreenderem e assimilar melhor os conceitos.Franco (2018, [13]), nos estudos que arquitetou sobre as sequências, ressalta que "por meio da sequência didática, o docente que tenha fragilidade em algum conhecimento pode ter a oportunidade de adquiri-lo enquantose prepara para lecionar tal tema. A sequência didática vem como uma sugestão da ação pedagógica".

As sequências, neste sentido, possuem o metier e dão o tônus, a reflexividade para o professor seguir avante ou demorar-se, em algum conteúdo. De acordo com Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, [10]), "a variedade de atividades dentro de uma sequência didática estimula o interesse dos alunos e promove uma aprendizagem mais dinâmica e interativa". Neste prisma, as SD's incluem mecanismos de avaliação contínua, permitindo que os professores monitorem o progresso dos alunos e ajustem suas estratégias de ensino, conforme necessário. Zabala (1998, [38]) ratifica que as sequências requerem uma avaliação cotidiana, pois esta sinalizará as dificuldades, permitindo ao docente verificar e/ ou alterar os planos de ensino, tornando a sua didática mais clarificada e /ou mais proximal ao entendimento dos estudantes.

Franco (2018, [13]), neste contexto, dedilha a mesma tese ao dizer que as sequências permitem a seleção dos conteúdos mais relevantes e o planejamento de atividades mais coerentes, que tornarão o ensino mais coeso. Derivam, daí, a urgência de atividades adaptadas às necessidades dos alunos, onde permitem uma maior personalização e acompanhamento do ritmo de aprendizagem dos alunos. Segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, [10]), "a flexibilidade dessas sequências facilita a adaptação do ensino às características específicas de cada turma, promovendo uma aprendizagem mais inclusiva"

Ao conectar os conteúdos, de maneira lógica e contextualizada, as SD's promovem, em suma, uma aprendizagem por excelência, uma vez que os alunos encontram a semântica dos conhecimentos adquiridos recentemente, articulando-os aos seus conhecimentos prévios. No que esboçam um senso interpretativo acerca da finalidade e aplicabilidade destes assuntos, nas mais diversas conjunturas.

2.2 Aspectos e Processo de Ensino Mediados pelas SD's

2.2.1 Componentes e estrutura das sequências didáticas

As sequências didáticas são ferramentas pedagógicas complexas, que consistem em vá- rias partes inter-relacionadas. Observa-se que sua estrutura detalhada e componentes bem definidos são essenciais para garantir um processo de ensino-aprendizagem eficaz e coerente. Dos componentes das sequências didáticas, os objetivos de aprendizagem são declarações claras e específicas sobre o que se espera que os alunos aprendam e sejam capazes de fazer ao final da sequência didática. Segundo Zabala (1998, [38]), "os objetivos devem ser definidos de maneira clara e acessível, orientando todo o planejamento e execução da sequência". Eles servem como guia para a seleção de conteúdos, atividades e métodos de avaliação.

Sobre os conteúdos, ou seja, os conhecimentos, habilidades e atitudes que serão ensinados e aprendidos durante a sequência didática, Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, [10]) afirmam que "a escolha dos conteúdos deve ser relevante e apropriada para os objetivos de aprendizagem estabelecidos, garantindo que sejam abordados de maneira contextualizada e significativa".

As atividades didáticas são as tarefas e exercícios planejados para promover a aprendizagem dos conteúdos. Estas atividades devem ser variadas e progressivas, proporcionando diferentes oportunidades de aprendizagem. De acordo com Franco (2018, [13], "as atividades devem ser sequenciadas de maneira lógica, começando com tarefas mais simples e avançando para atividades mais complexas, facilitando a construção gradual do conhecimento". Os recursos didáticos incluem materiais e ferramentas utilizados para apoiar o ensino e a aprendizagem, como livros, vídeos, softwares educativos, manipulativos e outros. Zabala (1998, [38]) destaca que "a escolha adequada dos recursos é crucial para tornar as atividades mais envolventes e facilitar a compreensão dos conteúdos pelos alunos".

A avaliação, como já fora frisado, é um componente fundamental das sequências didáticas, permitindo medir o progresso dos alunos e a eficácia das atividades propostas. Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, [10]) denotam que a avaliação é munida deste feedback acerca do desempenho dos alunos; é o aparar de arestas, sempre que urgente. Independente se são diagnósticas, de alcance de sondagem, priorizando um viés mais qualitativo, como as Formativas. Ou as que configuram uma notação imediata, como as Somativas.

A estrutura de uma sequência didática é organizada de forma a garantir a progressão lógica e coerente das atividades e conteúdos. Esta estrutura geralmente inclui as seguintes etapas:

A **introdução** é o momento de contextualizar os alunos, apresentando os objetivos da sequência e despertando o interesse pelo tema. Zabala (1998, [38]) sugere que "a introdução deve estabelecer uma conexão com os conhecimentos prévios dos alunos, preparando-os para os novos conteúdos".

Já o **desenvolvimento** por sua vez, é a fase central da sequência didática, onde são realizadas as atividades principais de ensino e aprendizagem. Esta fase é subdividida em várias etapas, cada uma abordando diferentes aspectos dos conteúdos.

E na **conclusão** é a fase de síntese e reflexão, onde os alunos têm a oportunidade de consolidar os conhecimentos adquiridos e refletir sobre o que aprenderam. Segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, [10]),"a conclusão deve incluir atividades de revisão e aplicação prática, ajudando os alunos a integrar e aplicar os novos conhecimentos".

A **avaliação final** é a etapa em que se mede o nível de aprendizagem alcançado pelos alunos ao final da sequência didática. Esta avaliação pode incluir testes, projetos, apresentações e outras formas de avaliação que permitam verificar se os objetivos de aprendizagem foram atingidos. Zabala (1998, [38]) enfatiza que "a avaliação final deve ser alinhada aos objetivos estabelecidos no início da sequência, garantindo a coerência e a relevância dos resultados".

Vários trabalhos baseados nos aportes da Geometria e da Obmep têm surgido, nos últimos anos, corroborando com a ideia de fortalecer o ensino de Matemática. A respeito disso, trabalhos como a recente dissertação intitulada "Geometria Plana na OBMEP: Um Estudo das Questões de Geometria na Segunda Fase da OBMEP nos Níveis 1 e 2", do professor Valdério Oliveira Rodrigues, que se propõe a investigar as questões de Geometria, buscando compreender a natureza dessas questões, analisando sua complexidade, estrutura e os tópicos geométricos abordados.

2.3 Limitações das Sequências Didáticas

As Sequências Didáticas, resguardada a valiosa contribuição para a dinâmica ensino-aprendizagem, em se tratando de sua abordagem, podem impactar a eficácia do ensino e, consequentemente, sua qualidade, se não esmeradas a partir da arquitetura de estratégias pelos educadores.O planejamento detalhado e a execução de sequências didáticas requerem um esmero significativo de tempo, por parte dos professores. Estes têm como detrimento, seja lotações com caragas horárias elevadas, seja múltiplas responsabilidades, o que dificulta a dedicação necessária para a elaboração, seja de aulas, seja de sequências bem estruturadas.

Segundo Zabala (1998, [38]), "o planejamento de sequências didáticas requer um tempo considerável para a definição de objetivos, seleção de conteúdos, elaboração de atividades e preparação de recursos, o que pode ser um obstáculo para professores com horários sobrecarregados"Zabala (1998, p.45 [38]).

Segundo Zabala (1998, [38]), "o planejamento de sequências didáticas requer um tempo considerável para a definição de objetivos, seleção de conteúdos, elaboração de atividades e preparação de recursos, o que pode ser um obstáculo para professores com horários sobrecarregados"Zabala (1998, p. 45, [38]).

De acordo com Freitas (2021, [14]), a falta de formação adequada é um dos principais obstáculos à implementação eficaz de sequências didáticas, pois muitos professores não recebem o treinamento necessário para planejar e executar essas atividades de forma eficaz. As SD's precisam ser adaptadas ao contexto específico de cada escola e turma, considerando fatores como o nível de conhecimento dos alunos, os recursos disponíveis e o tempo de aula. Essa adaptação pode ser desafiadora, especialmente em escolas com poucos recursos ou turmas heterogêneas.

Conforme Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, [10]), "a adaptação das sequências didáticas às realidades específicas das escolas e dos alunos é essencial para seu sucesso, mas muitas vezes os professores encontram dificuldades em ajustar as atividades às condições locais"Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, p. 123, [10]).

Implementar uma avaliação contínua e formativa, que acompanhe o progresso dos alunos ao longo das sequências didáticas, pode ser desafiador. Esse tipo de avaliação exige ferramentas e técnicas que nem sempre estão disponíveis ou são conhecidas pelos professores.

Segundo Freitas (2021, [14]), "a avaliação contínua é fundamental para o sucesso das sequências didáticas, mas muitos professores enfrentam dificuldades em realizar esse tipo de avaliação de maneira eficaz devido à falta de recursos e de formação específica"Freitas (2021, [14]).

2.3.1 Estratégias para superar as limitações

Embora as sequências didáticas apresentem diversos desafios, existem estratégias eficazes que podem ser implementadas para superá-los. Essas estratégias incluem melhor planejamento, formação contínua de professores, adaptação ao contexto escolar e uso de avaliação contínua e formativa.

Para enfrentar o desafio do tempo e do planejamento por exemplo, é essencial que os professores adotem estratégias de gestão de tempo e planejem com antecedência. Ferramentas como planejadores semanais e mensais podem ajudar os professores a distribuir suas tarefas de planejamento ao longo do tempo. De acordo com Zabala (1998, [38])), "o uso de planejadores e cronogramas detalhados pode auxiliar os professores a organizar melhor suas atividades, reservando tempo específico para o desenvolvimento de sequências didáticas"Zabala (1998, p. 67, [38])). Além disso, a colaboração entre professores para compartilhar recursos e ideias pode reduzir a carga de trabalho individual.

Na formação contínua e o desenvolvimento profissional, sendo cruciais para capacitar os professores a implementar sequências didáticas de forma eficaz, programas de desenvolvimento profissional, workshops e cursos específicos sobre sequências didáticas podem proporcionar aos professores as habilidades e conhecimentos necessários.

A adaptção das SD's ao contexto específico de cada escola e turma é essencial. Isso pode incluir a modificação de atividades para se adequar ao nível de conhecimento dos alunos, a disponibilidade de recursos e o tempo disponível. Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, [10]) sugerem que "os professores devem ser flexíveis e criativos ao adaptar as sequências didáticas às realidades locais, envolvendo os alunos no processo de aprendizagem de maneira significativa e relevante"Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, p. 136, [10]).

Para superar as dificuldades na avaliação contínua, os professores podem utilizar diversas estratégias de avaliação formativa, como feedback contínuo, autoavaliação e avaliação por pares. Ferramentas digitais também podem ser utilizadas para facilitar a avaliação contínua e o acompanhamento do progresso dos alunos. Freitas (2021, [14]) afirma que "o uso de avaliações formativas e contínuas, com feedback regular, permite que os professores monitorem o progresso dos alunos e ajustem suas estratégias de ensino conforme necessário"Freitas (2021, [14]).

Capítulo 3

Contexto Curricular e Aplicação Prática

Este capítulo assenta-se no contexto curricular e na aplicação prática dos conceitos discutidos nos capítulos anteriores. O objetivo é analisar os conteúdos de Geometria Plana dentro do currículo escolar, a integração das competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a proposta de uma sequência didática aplicada à geometria. Este capítuloestá dividido em três seções principais: revisão dos conteúdos de geometria plana,uma analítica acerca da BNCC e suas competências e a aplicação prática de uma sequência didática.

Na primeira seção, será feita uma revisão dos conteúdos de geometria plana que são ensinados, no currículo escolar, visando fornecer uma base sólida para a aplicação prática discutida posteriormente. A segunda seção aborda a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as competências que ela estabelece para o ensino de Matemática. Será apresentada uma introdução à BNCC, seguida pela descrição das competências gerais e específicas relacionadas ao ensino de Geometria. A discussão concentra-se na integração dessas competências no planejamento das aulas e nas práticas pedagógicas, além de uma análise crítica das competências propostas pela BNCC, destacando seus pontos fortes e desafios. A discussão se concentra na integração dessas competências no planejamento das aulas e nas práticas pedagógicas, além de uma análise crítica das competências propostas pela BNCC, destacando seus pontos fortes e desafios.

Na terceira e última seção, será apresentada uma proposta de sequência didática aplicada ao ensino de geometria plana. Esta proposta será baseada nos princípios discutidos nas seções anteriores e será desenvolvida com o objetivo de ser implementada em sala de aula. Serão detalhados o desenvolvimento da sequência didática, os objetivos específicos, as atividades propostas e os métodos de avaliação. A seção conclui com uma análise dos resultados esperados e reflexões sobre a aplicação prática da sequência didática.

3.1 Revisão dos Conteúdos de Geometria Plana

Vamos apresentar os referenciais teóricos utilizados para a sequência didática, abordando as definições e propriedades geométricas, presentes nas atividades, tendo o clássico livro de Iezzi e Murakami (1985,[18]), como principal referência. É importante compreender que o estudo na Geometria Plana se faz de forma dedutiva, os axiomas ou postulados dão vida as demais proposições e teoremas.

Além disso, há o pensar geométrico, que norteia o nosso trabalho juntamente com as contribuições do casal Van Hiele na proposta didática. Ao pensar geométricamente, estamos saindo do padrão aritmética-Algébrica que é imposto nos livros didáticos, de forma que estaremos desenvolvendo um raciocínio visual conforme nos conta Lorenzato. [21]

> [...] sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (Lorenzato, 1995, p. 5,[21])

Podemos começar pelo livro de Euclides (2009, p.50),[12] a ideia de um ente geométrico chamado de plano onde é composto de Pontos: “Ponto, é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma”; e Retas: “Linha é o, que tem comprimento sem largura” onde a relação entre ambos seria “As extremidades da linha são pontos”.

Para Iezzi e Murakami (1985,[18]), polígono é uma sequência de n pontos An de um plano com n>2, todos distintos onde três pontos consecutivos não são co-lineares. Através dessa noção podemos estabelecer as definições das principais figuras geométricas como o Triângulo: “Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos AB, BC e AC chama-se triângulo ABC ” Iezzi e Murakami (1985,[18]), e Quadriláteros “ Sejam A, B, C, e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos AB, BC, CD e DA interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero ” Iezzi e Murakami (1985, p.99, [18])

No caso dos triângulos, temos algumas informações importantes que é sobre o fato de que ele não possui diagonal, a soma dos ângulos internos é 180°e os externos 360°. A soma de dois lados quaisquer ser sempre menor que o terceiro lado sendo assim denominada a desigualdade triângular e que ele possui Altura, Mediana, Mediatriz e Bissetriz, isto é, ele possui pontos notáveis a saber: baricentro (encontro das três medianas), circuncentro (encontro das três mediatrizes), incentro (encontro das três bissetrizes) e ortocentro (encontro das três alturas).

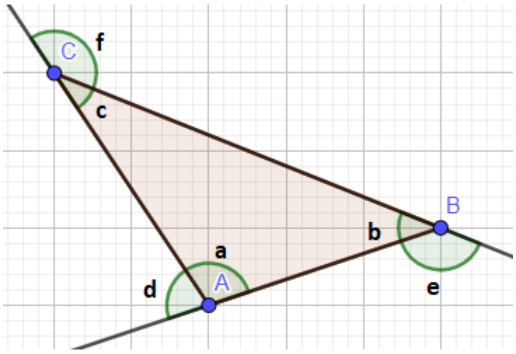

Figura 3.1: Ângulos Internos e externos.
Fonte: Produzido pelo autor

Atrelado a noção de lado existe à de ângulo que é importante por ser uma ferramenta bastante útil não só na trigonometria mas em vários aspectos bidimensionais. Para compreender a definição de ângulos, voltamos a Iezzi e Murakami (1985, p.20, [18]) "Chama-se ângulo a reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contida numa mesma reta, isto é, os três pontos devem ser não colineares ", pois se eles forem, nesse caso o ângulo é nulo 0º.

Há inclusive vários tipos de triângulos que usamos durante a exploração das figuras geométricas e são classificados conforme os lados e os ângulos.

Classificação quanto aos lados, Iezzi e Murakami (1985, p.37, [18])

- O mais simples deles é o Triângulo equilátero que possui os três lados iguais e por consequencia, os três ângulos iguais a 60° sendo considerado um triângulo perfeito pelas caracteristicas peculiares como o fato das retas Mediatriz, Incentro e Ortocentro se encontrarem no Baricentro.

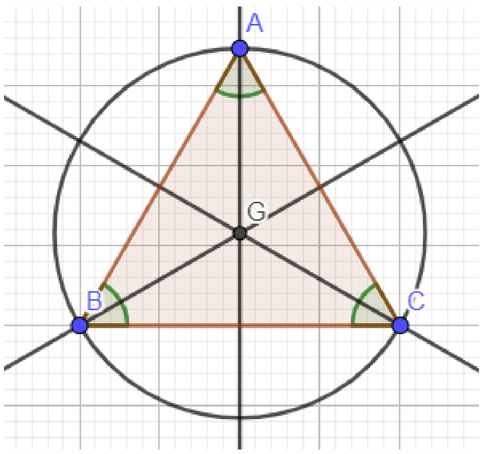

Figura 3.2: Triângulo Equilátero ABC e seus elementos.
Fonte: Produzido pelo autor

- Em seguida, há o triângulo isósceles que possuem dois lados congruentes, nesse caso, indicamos o terceiro lado que é diferente dos outros dois como sendo a base. Esse conceito de base é importante pois os ângulos atrelados a base são identicos.

- A maioria dos triângulos possuem lados diferentes e nesse caso abrangem os mais diversos e complexos casos de triângulos escalenos, sendo assim pouco estudado nos livros didáticos e explorados pelas olimpíadas.

Classificação quanto aos Ângulos, segundo Iezzi e Murakami (1985, p.38, [18])

- O mais estudado por conta do Teorema de Pitágoras, o Triângulo retângulo ganha destaque por ter um ângulo reto 90°. Esse tipo de figura é explorada principalmente na trigonometria onde praticamente as relações métricas e os ângulos são usados a exaustão para fins de cálculos envolvendo aplicações práticas pois que 90º é o ângulo ideal para erguer construções na Arquitetura e Engenharia.

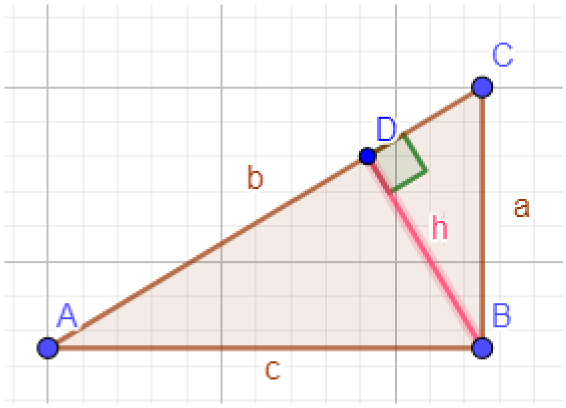

Figura 3.3: Triângulo Retângulo ABC e seus elementos.
Fonte: Produzido pelo autor

- Abordado diversas vezes em problemas em que envolve triângulos equiláteros, os triângulos acutângulos são aqueles que não possuem ângulos maiores ou iguais do que 90°, referidos na obra como os triângulos que possuem os três ângulos agudos.

- Os Triângulos Obtusângulo são aqueles que possuem um ângulo Obtuso, são estudados sob a ótica do teorema do ângulo externo e no caso da lei dos cossenos onde o seu uso em construções de rampas e em distâncias inascessíveis na trigonometria é bastante comum.

Já nos Quadriláteros, a presença de um lado a mais no polígono cria novas possíbilidades sendo elas a convexidade e a concavidade, além da presença de duas diagonais que é um elemento a mais. Nesse trabalho, estaremos analisando apenas os casos convexos, tratados na obra como quadriláteros notáveis Iezzi e Murakami, (1985, p.100, [18]).

- Começando pela figura mais simples, o Quadrado é sem dúvida um dos mais importantes por ser a forma de unidade na primeira definição de área, sendo um quadrilátero com lados e ângulos iguais. Como em um quadrilátero, a soma dos ângulos é 360°, temos que os quatro ângulos são retos e assim uma diagonal cria uma figura que é a combinação entre um triângulo retângulo e isósceles. Entre outras aplicações, temos a demonstração do cálculo do $\text{sen}45°$ e $\cos 45°$.

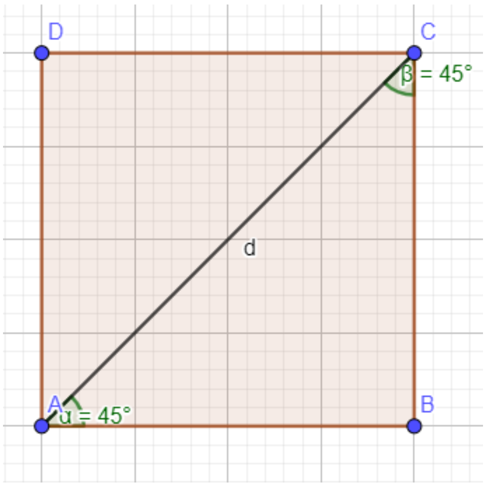

Figura 3.4: Diagonal hipotenusa AC.
Fonte: Produzido pelo autor

- No retângulo, os ângulos ainda são retos e os lados opostos iguais, mas as semelhanças com o quadrado param por ai, pois ele pode ter lados adjacentes diferentes abrangendo um conjunto maior de figuras, sendo o quadrado apenas um subconjunto delas.

- Paralelogramo como o nome diz, se refere ao quadrilátero que possui todos os lados opostos paralelos, nem sempre com ângulos de 90° sendo uma classe superior de figuras onde o retangulo é um subconjunto.

- Losângo é uma figura que destoa das demais. Assim como o trapézio que veremos adiante, possui a mesma propriedade do quadrado com relação aos lados serem congruentes, mas que possui dois ângulos obtusos. Podemos ainda definir um obtuângulo, como sendo um triângulo formado pela diagonal de um losango e dois lados adjacentes.

- Um trapézio é uma figura mais geral que o Paralelogramo por possui apenas dois lados paralelos, chamados tambem de bases, geralmente com uma distinção no seu tamanho, sendo assim a base maior B e a base menor b. É uma figura bastante versátil podendo ser isósceles quando os dois lados não-base são congruentes e mesmo trapézio retângulo se houver dois ângulos retos em sua estrutura.

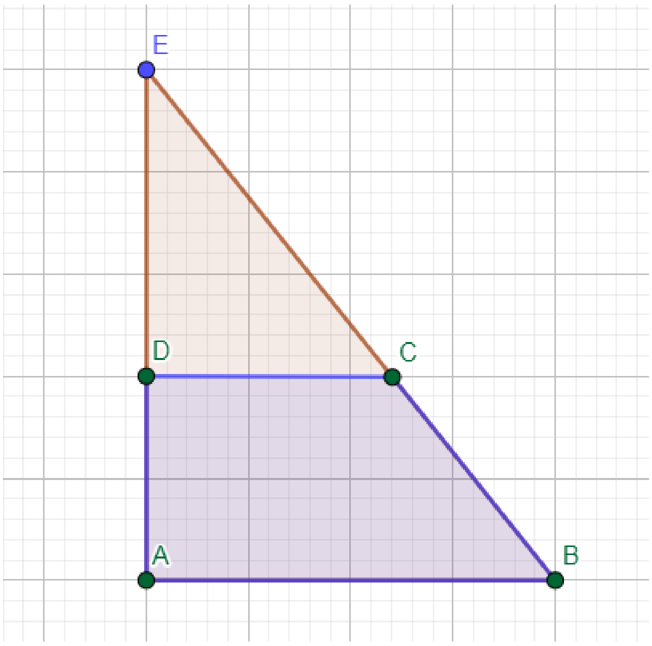

Figura 3.5: Trápezio ABCD obtido por um triângulo ABE.
Fonte: Produzido pelo autor

Além do conceito de congruência que nada mais é o de igualdade entre figuras que não estão sobrepostas, temos a sua atualização chamada de semelhança que normalmente sendo atrelada aos triângulos, haja visto que todo polígono pode ser decomposto em figuras triangulares. De acordo com Iezzi e Murakami (1985), "Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais", o que simplifica o entendimento a cerca da diferença entre congruência e semelhança.

Essa ideia de proporcionalidade permeia a matemática como um todo, por exemplo, na geometria, o Teorema de Tales dá uma abordagem importante para o conceito de equações fracíonárias que na álgebra, aparecem sem nenhum contexto além da expansão dos números de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Q}$.

Claro que verificar como diz a definição, os seis pares de informações é muitas vezes dificil, e por tanto, a geometria da grecia antiga já desenvolveu parametros mais suaves em decidir se dois triângulos são ou não semelhantes sendo chamados de casos de congruência (ALA, LAL, LLL) onde L significa lados homologos e A, os ângulos congruentes.

Ao integrar os conteúdos com as metodologias ativas da BNCC, os professores podem proporcionar aos seus alunos uma aprendizagem significativa e prazerosa, contribuindo para o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas.

3.2 BNCC e as Competências para a Geometria

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017, [3]) é um documento norteador que estabelece diretrizes e padrões mínimos para a educação básica no Brasil, contemplando ensino fundamental e médio. Tem como objetivo garantir a todos os estudantes o acesso a uma formação sólida, que contemple conhecimentos, habilidades e atitudes essenciais para a vida cidadã e o exercício da cidadania. Neste contexto, as competências matemáticas e geométricas são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento crítico, lógico e analítico dos estudantes.

A matemática, na BNCC, é abordada como uma disciplina que desenvolve a capacidade de resolver problemas, modelar situações do mundo real, comunicar e justificar raciocínios e resultados. As competências matemáticas são transversais e aplicáveis em diversas áreas do conhecimento, além de serem essenciais para a compreensão do mundo contemporâneo (BRASIL, 2017, [3]).

Este documento enfatiza a importância do desenvolvimento de competências como o Raciocínio Numérico e Álgebraico na capacidade de compreender, representar e operar com quantidades e relações entre elas, utilizando linguagem algébrica. Raciocínio Espacial e Geométrico no qual as habilidades para interpretar, representar e operar com formas e espaços, reconhecendo padrões e transformações.

Probabilidade e Estatística que se estrutura como a competência para coletar, organizar, representar e interpretar dados, bem como para compreender e aplicar conceitos de probabilidade. A Modelagem e Resolução de Problemas na capacidade de formular e resolver problemas do mundo real, utilizando estratégias matemáticas e ferramentas de modelagem.

Na BNCC, unidades temáticas são conjuntos de conteúdos e habilidades organizados em torno de temas centrais, que servem como eixos norteadores para o desenvolvimento do currículo em cada área do conhecimento. Essas unidades são projetadas para integrar diferentes disciplinas e promover uma aprendizagem mais significativa e contextualizada, permitindo que os estudantes vejam as conexões entre os vários assuntos que estão estudando. As unidades temáticas são uma estratégia pedagógica que busca superar a fragmentação do conhecimento e favorecer a compreensão de conceitos complexos de forma interdisciplinar (BRASIL, 2017, [3]).

As unidades temáticas na matemática, particularmente na geometria plana, são aplicadas através da organização de conteúdos e habilidades em torno de temas específicos que permitem explorar os conceitos geométricos de forma integrada e contextualizada. Por exemplo, uma unidade temática poderia ser "Espaço e Forma", onde os estudantes aprendem sobre diferentes figuras geométricas, suas propriedades, como medir áreas e perímetros, e como essas figuras se relacionam com o mundo ao seu redor. Isso pode incluir atividades práticas, como a construção de modelos, a resolução de problemas reais que envolvem geometria, e a exploração de como a geometria plana se conecta com outros campos do conhecimento, como a arte, a arquitetura e a ciência. Esse abordagem temática ajuda os estudantes a ver a matemática como uma ferramenta poderosa para compreender e interagir com o mundo, em vez de uma série de fórmulas e procedimentos desconectados.

Dentro das competências matemáticas, a geometria ocupa um lugar especial, pois permite aos estudantes explorar o espaço e as formas, desenvolvendo uma compreensão mais profunda do mundo que os cerca. A BNCC (BRASIL, 2017, [3]) destaca as seguintes competências geométricas:

- **Reconhecimento e Classificação de Figuras Geométricas**: Capacidade de identificar e descrever propriedades de figuras geométricas, como pontos, linhas, polígonos e círculos.
- **Medida e Transformação**: Habilidade para compreender e aplicar conceitos de medida, bem como para realizar e descrever transformações geométricas.
- **Raciocínio Espacial**: Competência para visualizar, representar e interpretar relações espaciais, incluindo a capacidade de imaginar e manipular objetos mentalmente.

A geometria plana, em particular, é um subconjunto da mesma que se concentra em figuras bidimensionais, como triângulos, quadriláteros, círculos e suas respectivas propriedades. Na BNCC (BRASIL, 2017, [3]), a geometria plana é explorada através de competências como:

- **Construção e Análise de Figuras Planas**: Habilidade para construir figuras geométricas usando régua, compasso e outros instrumentos, e para analisar suas propriedades.
- **Cálculo de Áreas e Perímetros**: Competência para calcular e compreender o significado de medidas como área e perímetro de figuras planas.
- **Aplicação de Teoremas e Propriedades**: Capacidade de aplicar conhecimentos teóricos, como teoremas e propriedades geométricas, para resolver problemas práticos.

A BNCC oferece uma estrutura sólida para o desenvolvimento de competências matemáticas e geométricas, essenciais para a formação integral dos estudantes. Ao focar na geometria plana, a BNCC contribui para que os estudantes adquiram uma compreensão mais profunda do espaço e das formas, preparando-os para enfrentar desafios matemáticos e para aplicar esses conhecimentos na vida cotidiana.

3.2.1 Uma análise das competências propostas pela BNCC

Segundo Pertile (2021, [27]), "A BNCC (BRASIL, 2017, [3]) é o documento de referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares". Essa base foi idealizada como um marco regulatório para nortear a educação básica no Brasil, estabelecendo diretrizes e competências a serem desenvolvidas pelos estudantes ao longo de sua trajetória escolar. No entanto, a implementação e o alcance das competências propostas pela BNCC têm sido alvo de debates e análises críticas por parte da comunidade educacional.

Ainda de acordo com Pertile (2021, [27]), "O documento prevê que, ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento".

A BNCC emerge como nova proposta curricular frente aos PCN, possuindo pontos positivos e negativos conforme indica Morais e Pereira (2021, [11]). onde no trabalho, analisar por exemplo as questões relacionadas ao ensino fundaamental. "Com a pesquisa, percebemos que a ausência de perspectivas metodológicas na BNCC pode ser um impedimento para fomentar modos de fazer matemática junto aos professores do Ensino Fundamental"Morais e Pereira (2021, [11]).

Os autores argumentam que, embora a BNCC proponha uma série de competências valiosas, como o raciocínio numérico e algebraico, o raciocínio espacial e geométrico, e a modelagem e resolução de problemas, a prática educativa muitas vezes se distancia desses ideais, enfatizando a memorização de conteúdos em detrimento do desenvolvimento de pensamento crítico.

É importante considerar a perspectiva de Vygotsky (1978, [37]), que destaca a importância do contexto social e cultural na construção do conhecimento. Nesse sentido, a crítica à BNCC pode ser ampliada para incluir a discussão sobre como as competências propostas dialogam com as realidades socioculturais dos estudantes e como a educação pode ser um instrumento de transformação social.

A análise crítica das competências propostas pela BNCC revela a necessidade de uma reflexão mais profunda sobre a prática educativa, a integração entre diferentes áreas do conhecimento e a relevância das competências para o contexto sociocultural dos estudantes. É fundamental que a comunidade educacional continue a dialogar sobre esses temas, buscando aprimorar a qualidade da educação oferecida aos jovens brasileiros.

3.3 Proposta de uma SD em Geometria Plana

Nessa proposta educacional, temos uma sequência de atividades elaboradas para professores da disciplina de Matemática com foco no primeiro ano do ensino médio no âmbito de recomposição em geometria plana, podendo ser aplicada em outros anos. Para tanto, vamos usar algumas atividades, baseadas nas questões da Obmep conforme a divisão de aulas de 50 minutos mostrada no Quadro 1.

Quadro 1 - Cronograma de Aulas da Sequência Didática

Ordem	**Descrição**
Aula	**Conteúdo**
01	Introdução ao Histórico da geometria plana.
02	Trabalhando com Triângulos e Quadrados.
03	Explorando a Semelhança de Triângulos.
04	Perímetro de Figuras Planas.
05	Areas de Figuras Planas.
06	Decomposição de Polígonos.
07	Medidas de Lados e Perímetros.
08	Decomposição e Sobreposição.
09	Demonstrações em Quadriláteros.
10	Demonstrações em Triângulos.
11	Análise Geométrica na Obmep.
12	Avaliação Proposta.

Fonte: Elaborado pelo autor

Em cada aula ultilizaremos os seguintes materiais:

- Quadro branco ou flipchart.
- Marcadores coloridos.
- Régua, transferidor e compasso.
- Papel e lápis para os alunos.
- Na primeira aula, Data show para a exibição de um vídeo

3.4 Aula 01: Introdução ao Histórico da geometria plana

A geometria, desde os primórdios da civilização humana, desempenhou um papel fundamental na compreensão e na organização do mundo que nos rodeia. Por isso, apresentamos nessa primeira aula, um breve histórico das contribuições mais importantes compreendendo, desde a determinação de áreas para cultivo até a construção de monumentos grandiosos, ou seja, a necessidade da geometria desde tempos remotos e entender o conceito de figuras geométricas usando o Código EF06MA18.

Introdução (5 minutos)

Inicie a aula fazendo uma provocação sobre a importância das formas geométricas em nosso cotidiano. O professor pode apresentar questões como "Por que as figuras geométricas são tão presentes em nosso mundo?"para identificar os conhecimentos prévios dos alunos.

A Necessidade da Geometria na Antiguidade (10 minutos)

Explore a história da geometria desde os tempos antigos, destacando civilizações como os egípcios, babilônios e gregos. Discuta como as necessidades práticas (medidas de terra, construções etc.) levaram ao desenvolvimento da geometria. Se tiver datashow nessa aula, pode se apresentar o vídeo "A origem da Geometria (...dos primórdios a Euclides)." [1] Este ajuda a introduzir de forma lúdica com várias imagens a necessidade da geometria para fazer as medições na parte da agricultura, assim como o surgimento da demonstração na matemática dedutiva através das ideias geométricas.

Grandes Contribuições ao Longo do Tempo (15 minutos)

Cabe apresentar, antes de tudo, os baluartes da história da geometria, como Euclides, Pitágoras, Arquimedes e outros.

Euclides (300 a.C.): Conhecido como o "Pai da Geometria", Euclides escreveu os "Elementos", uma das obras mais influentes na história da matemática. Ele desenvolveu os princípios básicos da geometria euclidiana, incluindo os cinco postulados que serviram como base para muitos séculos de estudo geométrico Boyer, Merzbach, (2019, p. 410,[2]).

Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.): Embora seja mais conhecido por seus trabalhos em física e engenharia, Arquimedes também contribuiu para a geometria. Ele foi um dos primeiros a calcular a área de formas curvas e sólidas, além de desenvolver métodos para encontrar o volume de sólidos, como a esfera e o cilindro Boyer, Merzbach, (2019, p. 105,[2]).

René Descartes (1596-1650): A sua contribuição para o surgimento da geometria analítica, uma fusão entre a geometria e a álgebra, foi necessária para a introdução do sistema de coordenadas cartesianas, permitindo que pontos no plano fossem descritos por

[1]Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=zb49FN1z-3U. Acesso em 03 abr. 2024.

pares de números (coordenadas), o que revolucionou a maneira como a geometria era estudada e aplicada Coneglian, Santos, (2010, p. 8,[7]).

Leonhard Euler (1707-1783): Euler é conhecido por suas contribuições em muitas áreas da matemática, e na geometria ele fez avanços significativos na teoria dos poliedros, na topologia e na geometria analítica. Ele também foi fundamental para a formulação da fórmula de Euler, que relaciona as faces, arestas e vértices de um sólido convexo Boyer, Merzbach, (2019, p. 303, [2]).

O Conceito de Figuras Geométricas (10 minutos)

Introduza o conceito de figuras geométricas, destacando a ideia de formas com propriedades específicas, Explorando as diferentes categorias de figuras geométricas (pontos, linhas, polígonos etc.) nas nomenclaturas e suas características.

Atividade Prática (15 minutos)

Proporcione aos alunos a oportunidade de criar suas próprias figuras geométricas em grupos. Eles podem usar lápis, régua e compasso para desenhar ou até mesmo construir modelos tridimensionais simples.

Avaliação e Discussão (5 minutos)

Faça perguntas reflexivas para avaliar a compreensão dos alunos sobre a importância histórica da geometria e o conceito de figuras geométricas. Incentive uma discussão sobre como as formas geométricas estão presentes em várias disciplinas e aplicações práticas.

Segundo a Teoria de Van Hiele (1986, [35]), temos essa aula se enquadrando no nível Zero por ser da parte de reconhecimento. Os alunos estão simplesmente reconhecendo a existência da geometria plana e sua relevância histórica, sem compreender profundamente suas propriedades ou relações apesar de possuírem um contato tímido com as formas retilíneas.

Esta aula visa conectar os alunos à história da geometria, demonstrando a relevância das formas geométricas desde os tempos remotos até os dias atuais. Ao explorar grandes contribuições e conceitos fundamentais, os alunos ganham uma apreciação mais profunda da importância da geometria em suas vidas. É importante encorajar a criatividade na atividade prática, mostrando como a geometria está ligada à nossa experiência diária.

3.5 Aula 02: Trabalhando com Triângulos e Quadrados

Nessa parte, desenvolveremos sob o Código EF06MA20 com uma aula cujos objetivos são descrever um polígono por suas definições como figura plana, identificar lados e ângulos em polígonos, e trabalhar com a interposição de figuras. A compreensão dos polígonos como elementos fundamentais da geometria plana é essencial para a construção de conhecimento sólido nessa área.

Ao explorar as definições e propriedades dos polígonos, os alunos serão capacitados a considerar e analisar padrões nos lados e nos ângulos, desenvolvendo assim habilidades de observação e cálculo geométrico. Além disso, ao trabalhar com a interposição de figuras, os estudantes serão desafiados a aplicar seus conhecimentos geométricos de forma prática e criativa, promovendo uma compreensão mais profunda e uma apreciação pela geometria em contextos do cotidiano.

Introdução (10 minutos)

É interessante abordar os principais tipos de polígonos, aqueles com até 5 pontos por suas definições, com uma revisão rápida sobre o que são Polígonos, a identificação dos conhecimentos prévios dos alunos sobre a nomenclatura baseada, na quantidade de lados, ângulos e classificação em regulares e não regulares. Esta aula possibilita , é válido pontuar, uma conexão entre o primeiro e segundo nível na escala de Van Hiele (1986, [35]).

Descrição de Polígonos (15 minutos)

Logo após de introduzir os conceitos, vamos colocá-los em prática com uma questão envolvendo quadrados e as posssíbilidades envolvendo uma mescla entre a geometria e a contagem simples.

[Obmep 2021 - 2ª Fase - Nível 1 Questão 3]

Janaína desenha quadrados formados por quadrados menores, cujos lados têm medidas inteiras. Por exemplo, a figura mostra como Janaína desenhou um quadrado de lado 4 formado por dez quadrados, sendo dois de lado 2 e oito de lado 1.

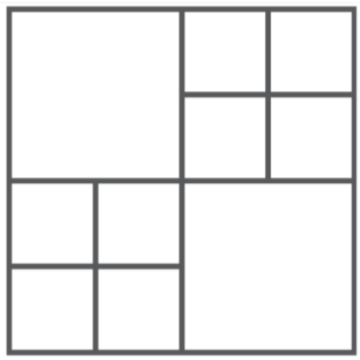

Figura 3.6: Questão 3, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2021

Mostre como Janaína pode desenhar um quadrado de lado 3 formado com a menor quantidade possível de quadrados menores com lados de medidas inteiras.

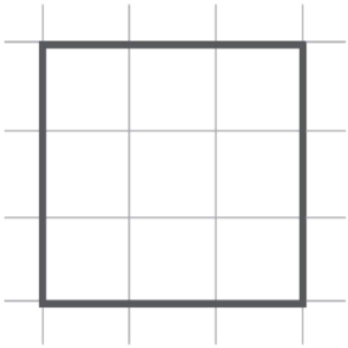

Figura 3.7: Questão 3, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2021

Nessa questão, os alunos poderão visualizar várias maneiras diferentes de fazer a mesma resolução por meio de figuras em rotações diferentes, mas chegarão a mesma ideia de traçar um quadrado de lado 2 para atender o fato de que seja a menor quantidade inteira possível.

Identificação de Lados e Ângulos (15 minutos)

Para essa parte, é importante que façamos uma pequena pausa para definir os conceitos de triângulos equiláteros como um triângulo com lados e ângulos iguais e que as figuras podem estar sobrepostas formando novos arranjos como no caso da seguinte questão:

[Obmep 2022 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 12]

Na figura, ABCD é um quadrado e AGD, BEC e CDF são triângulos equiláteros. Quanto mede o ângulo GFE?

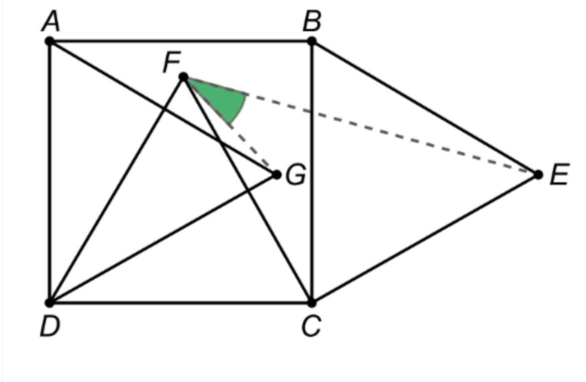

Figura 3.8: Questão 12, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2022

(A) 15º (B) 22,5º (C) 30º (D) 36º (E) 45º

Através dela, os alunos compreenderão o reconhecimento de padrões como a congruência sendo um bom início ao segundo nível (Análise) nos estudos geométricos.

Avaliação e Discussão (10 minutos)

Faça perguntas para avaliar a compreensão dos alunos sobre o que foi abordado. Por exemplo, na primeira questão, perguntar aos alunos como poderiam ser construções análogas só que com quadrados de lados maiores que 3 para gerar as ideias de abstração presentes no segundo nível da teoria de Van Hiele. Os alunos podem em grupos fazer a criação de alguns desenhos explorando outras composições envolvendo quadrados dentro de outros.

No segundo problema, observaremos com a turma, outros aspectos não relacionados com a resolução como os ângulos faltantes e a descoberta de lados e igualdades que seriam incompreendíveis caso não soubéssemos as definições como AG=BE e conjecturar qual o maior lado entre FC e CE.

Os alunos ao formularem perguntas, estão criando a análise geométrica necessária para aprenderem os tópicos relacionados a composição de figuras e as relações entre elas, sendo importante a abertura de espaço para dúvidas e revisão de conceitos. Ao final da aula, os alunos devem estar aptos a aplicar esses conceitos na análise de diferentes polígonos.

3.6 Aula 03: Explorando a Semelhança de Triângulos

Para uma aula de 60 minutos sobre semelhança de triângulos, é fundamental estabelecer uma sequência didática clara e dinâmica. Começaremos com uma breve introdução sobre o conceito de semelhança de triângulos e sua importância na geometria. Em seguida, dedicaremos cerca de 20 minutos para a identificação de lados e ângulos correspondentes entre dois triângulos, utilizando exemplos visuais e exercícios práticos para reforçar o entendimento.

Na segunda parte da aula, reservaremos 10 minutos para explorar as relações de proporcionalidade entre os lados correspondentes de dois triângulos. Utilizaremos exemplos numéricos para demonstrar como essas relações podem ser aplicadas na prática.

Os próximos 15 minutos serão dedicados à discussão das condições mínimas para que dois triângulos sejam considerados semelhantes. Exploraremos os critérios de semelhança, enfatizando as condições possíveis para cada caso específico: AA (ângulo, ângulo), LAL (lado, ângulo, lado) e LLL (lado, lado, lado). Faremos uso de exemplos ilustrativos e atividades interativas para consolidar o entendimento dos alunos sobre esses conceitos. Por fim, reservaremos os últimos 15 minutos para revisão e aplicação dos conhecimentos adquiridos.

Introdução (10 minutos)

Observando que os alunos estão em níveis diferentes de aprendizagem, podemos tecer algumas perguntas preliminares para identificar o nível em que a turma ou a parte mais crítica se encontra. Na Fase do reconhecimento, podemos traçar a seguinte pergunta: "Carlos está olhando para duas formas geométricas desenhadas no quadro: um triângulo e um quadrado. Ele pergunta ao professor se essas duas formas são iguais. Como podemos explicar para Carlos a diferença entre formas iguais e figuras semelhantes?"

Ao deixar os alunos pensando sobre como poderiam elaborar uma explicação, o professor poderá indentificar aqueles cuja a compreensão do enunciado não foi bem aceita e explicar a eles usando as formas geométricas e se a turma toda ou 90% dela, tiver dificuldade nessa parte, então ela estará enquadrada no nível do reconhecimento, o mais básico de todos da teoria de Van Hiele [35]

Em seguida, caso a turma tenha compreendido e dado uma resposta satisfatória, podemos continuar com outras perguntas diagnósticas como a do nível 2 do pensamento geométrico (Análise): "Mariana está estudando semelhança de triângulos e percebe que dois triângulos têm todos os seus ângulos congruentes. Ela conclui que esses triângulos são semelhantes. Mariana está correta? Explique sua resposta"

Nesse caso, a relação entre conceitos de congruência e semelhança é testada e dessa forma, o professor pode avaliar de forma sutil se os alunos compreendem esses conceitos para avaliar se deve ou não prosseguir com as próximas perguntas.

No Nível da dedução formal, temos o seguinte questionamento: "João está investigando a semelhança de quadriláteros e descobre que os ângulos correspondentes de dois quadriláteros são congruentes, e os lados correspondentes são proporcionais. Com base nessas observações, explique por que os quadriláteros são semelhantes". Nesse caso, estamos explorando com mais propriedade a compreensão que os alunos possuem acerca do conceito de congruência e semelhança. Antes de abordar os conceitos, perguntas como essas podem fomentar o interesse pelo conhecimento facilitando a transmissão do conteúdo.

Para nossos estudos, usaremos o nível da compreenção dedutivo-formal para podermos abstrair nos problemas da prova da Obmep e dessa forma, podemos questionar a turma da seguinte forma: "Ana precisa demonstrar que dois triângulos são semelhantes. Ela sabe que dois pares de ângulos correspondentes são congruentes. Como Ana pode usar essa informação para formalmente provar que os triângulos são semelhantes?". Nessa faixa de compreenção, os alunos já possuem um dominio dos conceitos e das principais aplicações, podendo abstrair nas questões da próxima parte da aula.

Se possível, revise os conceitos de ângulos e lados em triângulos para introduzir o conceito de semelhança de triângulos. Dessa forma, podemos relembrar os conceitos e deixa-los registrados no quadro para posteriores observações.

Identificação de Lados e Ângulos Correspondentes (10 minutos)

Nessa parte da aula, explicaremos sobre como identificar lados e ângulos correspondentes entre dois triângulos. Além disso, exemplos envolvendo áreas no quadro podem ser feitos com o auxilio da seguinte questão:

[Obmep 2018 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 7] Na Figura 1 a área pintada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?

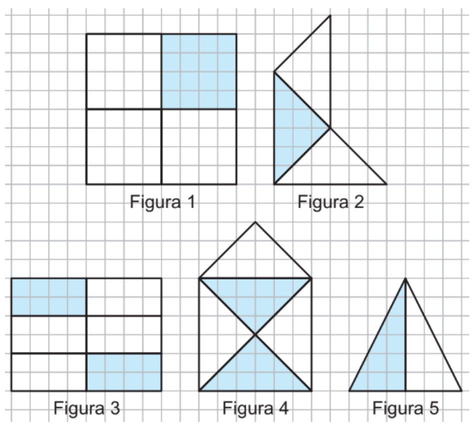

Figura 3.9: Questão 7, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2018

(A) Figura 1 (B) Figura 2 (C) Figura 3 (D) Figura 4 (E) Figura 5

Colocar em prática os conceitos vistos de forma que integre também as competências relacionadas as frações nas figuras é imprescindível para uma melhor dedução prática desses conceitos, além de mostrar que às frações do ponto de vista geométrico independe do formato da figura, bastando que as partes sejam congruentes.

Relações de Proporcionalidade (10 minutos)

Aqui, as demonstrações de como estabelecer relações de proporcionalidade entre lados correspondentes de dois triângulos semelhantes se tornam evidentes com a apresentação da proxima questão problema. Observaremos as condições mínimas para que dois triângulos sejam semelhantes (AA, LAL, LLL), e a explicação detalhada de cada caso.

Atividade Prática (15 minutos)

Podemos usar as noções aprendidas para elaborar a resolução da seguinte questão:

[Obmep 2011 - 1ª Fase - Nível 3 Questão 13]

Na figura, AEFD é um retângulo, ABCD é um quadrado cujo lado mede 1 cm e os segmentos BF e DE são perpendiculares. Qual é a medida, em centímetros, do segmento AE?

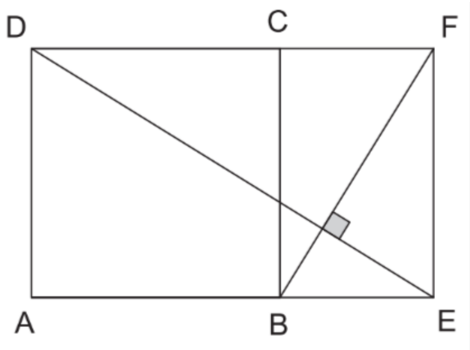

Figura 3.10: Questão 13, nível 3 da primeira fase da Obmep, 2011

1. (A) $\sqrt{2}$
2. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. (C) 2
4. (D) $\frac{8}{5}$
5. (E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Nesse problema, é importante que o professor possa fazer os desenhos em separado dos triângulos envolvidos, para que os alunos percebam que mesmo em situações complexas, a separação de figuras se torna um poderoso aliado na observação das mesmas.

Avaliação e Discussão (15 minutos) Nesse momento, pode ser aberto um espaço para dúvidas e revisão de conceitos. Destaque a importância da semelhança de triângulos em contextos práticos e na resolução de problemas geométricos.

Esta aula busca desenvolver a compreensão dos alunos sobre a semelhança de triângulos, identificação de lados e ângulos correspondentes, relações de proporcionalidade e condições mínimas para semelhança.

3.7 Aula 04: Perímetro de Figuras Planas

Nesta aula, nosso objetivo principal será explorar a noção de perímetro, utilizando-o como uma ferramenta fundamental para resolver problemas solicitados, especialmente aqueles que podem ser encontrados na Obmep. Reconhecemos a importância de desenvolver habilidades sólidas em perímetro não apenas para o sucesso em competições matemáticas, mas também para a aplicação prática em situações do cotidiano.

Vamos mergulhar neste tema preparando-nos para enfrentar os desafios que possam surgir em nosso caminho de aprendizado matemático. Lembrando que esta é uma sugestão e você pode ajustá-la conforme a necessidade de sua turma.

Introdução (10 minutos)

Conforme vimos na aula anterior, vamos começar com as perguntas diagnósticas sobre o perímetro para análisar o nível de compreensão na geometria de nossos alunos. Comece com uma breve revisão do conceito de perímetro, destacando que ele representa a soma dos comprimentos dos lados de uma figura. Apresentando exemplos no calculo do perímetro de um retângulo ou quadrado. Na fase do reconhecimento, podemos perguntar: "Lucas está observando um retângulo e um triângulo desenhados no quadro. Ele pergunta ao professor qual figura tem o maior perímetro. Como podemos explicar a Lucas calcular, o perímetro de cada figura e determinar qual é maior?"

Como aplicação prática, temos os exemplos onde o cálculo do perímetro é útil, como cercas de jardins, fitas para medir áreas, etc.

Atividade Interativa (20 minutos)

Divida a turma em grupos pequenos. Distribua figuras geométricas diferentes (retângulos, quadrados, triângulos) em cartões para cada grupo como na questão

[Obmep 2015 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 10]

Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?

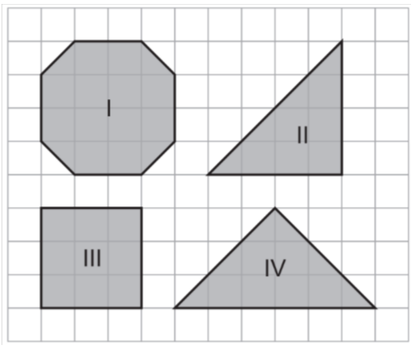

Figura 3.11: Questão 10, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2015

A) IV e III (B) IV e II (C) IV e I (D) III e II (E) II e I

Peça que calculem o perímetro de cada figura se possível e que indiquem as suas respostas justificando-as. Os grupos podem apresentar suas soluções ao restante da turma. Dessa forma será atingido o segundo nível de compreensão para esse tópico.

Resolução de Problemas da Obmep (25 minutos)

Nessa parte, vamos apresentar problemas da Obmep que envolvam o cálculo de perímetro e áreas. Notar que o perímetro pode ser igual mesmo com a figura em formato diferente, é um passo para o segundo nível, o da (Análise). Onde podemos problematizar do seguinte modo: "Mariana está estudando figuras planas e observa um quadrado e um retângulo justapostos. Ela quer saber se a soma dos perímetros dessas duas figuras é igual ao perímetro de um quadrado maior formado pela justaposição. Ajude Mariana a entender essa relação.". O conceito de Justaposição é explorado novamente só que levando em conta figuras que juntadas podem formar polígonos não conhecidos, mas tão relevantes quanto. É importante encorajar os alunos a trabalharem nos grupos ou individualmente para resolver os problemas.

[Obmep 2016 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 4]

A figura foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é o perímetro da figura?

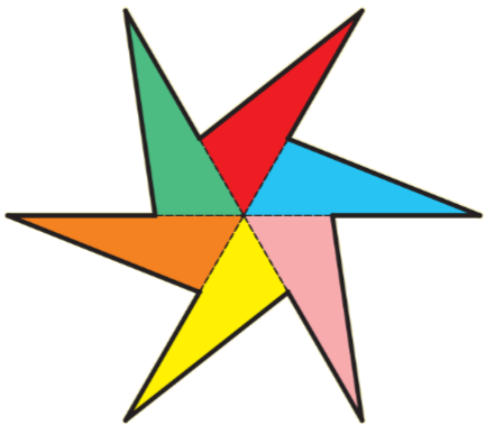

Figura 3.12: Questão 4, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2016

(A) 60 cm (B) 66 cm (C) 72 cm (D) 90 cm (E) 108 cm

Problemas de Justaposição mais complexos integram o terceiro nível (Dedução Informal) do qual podemos ver um exemplo: "Pedro está investigando as propriedades dos perímetros de figuras justapostas. Ele percebe que, ao justapor um quadrado e um triângulo, o perímetro resultante parece ser a soma dos perímetros individuais das figuras. Explique por que isso acontece".

Nesse caso, a ideia da demonstração fica implicita no exemplo usado, mas que pode ser provada posteriormente. O intuito desse trabalho não é necessáriamente se aprofundar nas diversas possibilidades dentro dos temas apresentados, mas dar algumas opções para que as questões sejam trabalhadas de forma suave nas aulas de preparação.

[Obmep 2023 - 2ª Fase - Nível 1 Questão 2]

Em um tabuleiro, formado por sete hexágonos de lado 1 cm, podemos fazer figuras diferentes pintando de cinza um ou mais desses hexágonos. Dizemos que o perímetro de uma dessas figuras é o comprimento total de seu contorno. Por exemplo, as duas figuras ao lado possuem perímetros iguais a 16 cm.

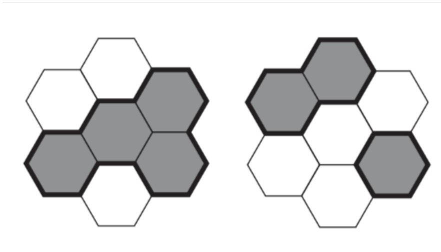

Figura 3.13: Questão 2, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2023

a) Em cada um dos tabuleiros abaixo, pinte três hexágonos formando figuras com os perímetros indicados.

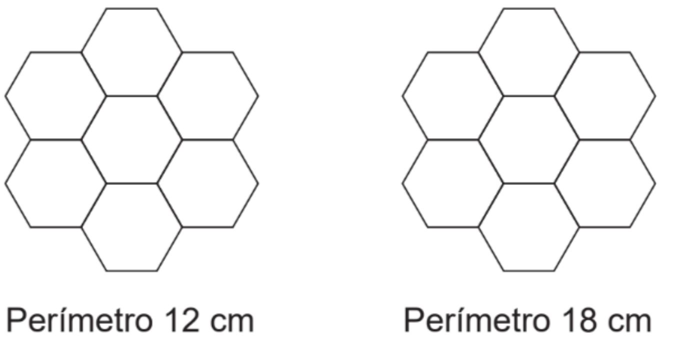

Figura 3.14: Questão 2, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2023

b) Pinte quatro hexágonos no tabuleiro abaixo formando uma figura que tenha o maior perímetro possível.

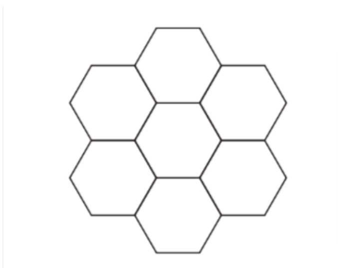

Figura 3.15: Questão 2, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2023

Discuta as estratégias utilizadas e resolva os problemas coletivamente, destacando as melhores abordagens. Assim culminando a aula com as perguntas de revisão.

Avaliação e Discussão (5 minutos)

Faça perguntas de revisão para verificar a compreensão dos alunos sobre o cálculo do perímetro. Reforçando a importância de praticar resolvendo os problemas semelhantes da Obmep.

Sabemos que outras perguntas acerca dos outros dois níveis não mencionados podem ser feitas conforme o tempo de aula permitir, vale a sensibilidade do professor em questão usar ou não elas. No nivel (Dedução Formal) temos o seguinte questionamento: "Ana precisa formalmente provar que, ao justapor um quadrado e um pentágono, o perímetro resultante é igual à soma dos perímetros individuais das figuras. Como Ana pode usar propriedades geométricas e argumentos formais para demonstrar essa relação?".

Este nível enfatiza a necessidade de uma abordagem rigorosa e formal para a geometria. Ele capacita os alunos a justificarem suas conclusões com base em provas matemáticas sólidas, utilizando definições, teoremas e propriedades geométricas. Promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos, ajudando os alunos a desenvolverem habilidades de raciocínio lógico e argumentação matemática que serão imprescindiveis na segunda fase da prova.

E no ultimo nível (Rigor) poderiamos deixar como questionamento aos alunos a seguinte indagação: "Carlos está resolvendo um problema que envolve a justaposição de várias figuras geométricas diferentes. Ele precisa demonstrar que o perímetro resultante é igual à soma dos perímetros individuais das figuras. Utilizando princípios geométricos e demonstrações formais, explique como Carlos pode resolver o problema de maneira rigorosa".

Este é o nível mais elevado da teoria de van Hiele e envolve a capacidade de refletir criticamente sobre os princípios geométricos e sua aplicação em diferentes contextos. Os alunos neste nível são capazes de fazer conexões entre diferentes áreas da matemática e aplicar princípios geométricos de forma criativa e inovadora. Isso não apenas aprimora sua compreensão da geometria, mas também fortalece suas habilidades de resolução de problemas e pensamento abstrato, preparando-os para desafios mais avançados na matemática e em outras olimpíadas.

Essa aula visa não apenas ensinar o conceito de perímetro, mas também desenvolver as habilidades necessárias para a resolução de problemas mais desafiadores, como os propostos na Obmep. A participação ativa dos alunos, a discussão em grupo e o pensamento crítico são os pontos fundamentais. Essas últimas perguntas consegue aprofundar o pós aula com os alunos pensando sobre elas em outros momentos.

3.8 Aula 05: Áreas de Figuras Planas

Na aula expositiva e dialogada que realizamos, nosso foco será a compreensão do conceito de área em triângulos e quadriláteros, com ênfase na aplicação de fórmulas específicas para o cálculo da área em diferentes tipos de quadriláteros. O objetivo central é desenvolver habilidades de resolução de problemas relacionados a áreas em quadriláteros, capacitando os alunos a aplicar o conhecimento de maneira prática e eficaz.

Para iniciar esta jornada, é essencial que o professor reforce o conceito de área, inicialmente aplicado a quadrados, expandindo-o para retângulos e triângulos. A partir dessa base, estabeleceremos expressões de cálculo de área para triângulos e quadriláteros, além de explorar a expansão de figuras a partir das áreas conhecidas. Por exemplo, ao compreender o cálculo da área do retângulo e do triângulo, os alunos poderão deduzir o método para encontrar a área de um trapézio.

Este processo de construção do conhecimento será guiado por exemplos práticos e exercícios que desafiarão os alunos a aplicar seus conhecimentos de forma criativa e analítica. Ao final da aula, espera-se que os alunos não tenham apenas dominado as fórmulas de cálculo de área, mas também desenvolveram uma compreensão profunda dos conceitos subjacentes, apresentando-os para enfrentar questões na resolução de problemas geométricos.

Introdução (10 minutos)

Revisão rápida do conceito de área. E apresentação do termo "quadrilátero"com exemplos, explicando as diferentes categorias de quadriláteros (paralelogramos, trapézios, quadrados, retângulos, etc.). Mostrando as características e propriedades únicas de cada tipo.

Para ilustrar o conceito podemos usar o seguinte exemplo: "Maria está olhando para um quadrado e um retângulo desenhados no quadro. Ela pergunta ao professor qual figura tem a maior área. De que forma podemos explicar para Maria como calcular a área de cada figura e determinar qual delas é maior?"

Ou no caso do segundo nível que apenas dá um maior embassamento ao questionamento: "João está estudando áreas de figuras planas e observa um quadrado e um retângulo com as mesmas medidas de base e altura. Ele quer saber se a área das duas figuras é a mesma. Ajude João a entender essa relação". Os alunos que concluirem que o quadrado é um tipo de retângulo para associar a igualdade, vai conseguir completar o nível com perfeição.

Fórmulas de Área (25 minutos)

Introduza as fórmulas específicas de área para diferentes tipos de quadriláteros. Lembrar tambem das formas dde decomposição do trapézio como sendo a soma de áreas de triângulos e retângulos é importante para que não haja muito conceitos decorados e estratégias de resolução aprendidas. Mostre as seguintes questões como exemplos de aplicação das fórmulas.

[Obmep 2023 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 9]

A área do polígono amarelo com vértices em pontos do quadriculado é 30cm^2. Qual é a área, em cm^2, de cada quadradinho do quadriculado?

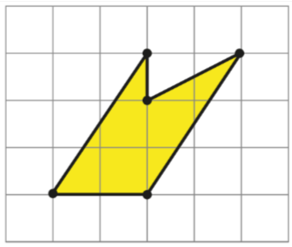

Figura 3.16: Questão 9, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2023

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

O plano cartesiano é um importante aliado quando se trata de figuras côncavas, raramente exploradas no ensino regular pela dificuldade de calcular em fórmulas mais simples os conceitos de perímetro e área.

[Obmep 2023 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 7]

Os segmentos horizontais dividem o retângulo da figura em quatro faixas de mesma largura. A área da região amarela corresponde a qual fração da área do retângulo?

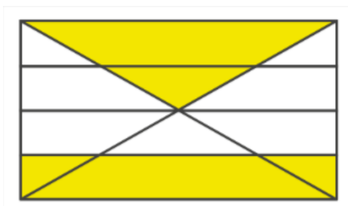

Figura 3.17: Questão 7, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2023

1. (A) $\frac{1}{3}$
2. (B) $\frac{5}{12}$
3. (C) $\frac{1}{2}$
4. (D) $\frac{7}{12}$
5. (E) $\frac{2}{3}$

Resolução de Problemas (25 minutos)

Os alunos devem trabalhar individualmente ou em duplas para resolver esses problemas. Algumas perguntar podem abrir as discussões antes de discutirmos as questões e soluções coletivamente, destacando as diferentes abordagens.

Como exemplo, citaremos esse: "Carla está investigando as propriedades das áreas de figuras planas não curvas. Ela percebe que, ao dobrar a base de um retângulo, a área resultante parece ser o dobro da área original. Explique por que isso acontece".

Analisando as dimensões e os multiplos entre elas, podemos tirar conclusões sobre áreas e perímetros com as constantes de proporcionalidade.

[Obmep 2018 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 5]

A área da figura destacada em rosa é 28 cm², e seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Qual é a área do quadrado?

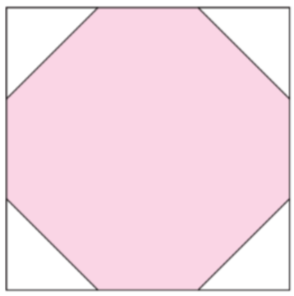

Figura 3.18: Questão 5, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2018

(A) 34 cm² (B) 36 cm² (C) 38 cm² (D) 40 cm² (E) 42 cm²

Problemas envolvendo cores são importantes para figuras especiais como na próxima questão, onde não há um nome especifico nem para a figura em vermelho, muito menos para a de cor azul.

[Obmep 2019 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 4]

O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm². Quanto mede a área pintada de azul?

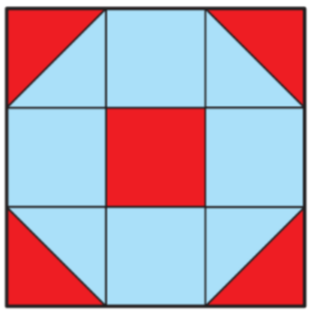

Figura 3.19: Questão 4, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2019

(A) 10 cm² (B) 12 cm² (C) 14 cm² (D) 16 cm² (E) 18 cm²

Essa aula visa fornecer uma compreensão mais profunda do cálculo de áreas em quadriláteros, usando diferentes estratégias e fórmulas específicas para cada tipo. Encoraje a participação ativa dos alunos na resolução de problemas práticos e na discussão em sala de aula. Isso preparará os alunos para enfrentar desafios relacionados a áreas em quadriláteros em contextos ainda mais complexos.

3.9 Aula 06: Decomposição de Polígonos

Nesta aula, nosso foco será a elaboração de figuras em quadriláteros e triângulos, explorando o cálculo de perímetros e áreas. Sendo o objetivo principal, desenvolver a habilidade dos alunos em dividir figuras complexas em partes mais simples, facilitando assim o cálculo de parâmetros e áreas. Para isso, é crucial compreender a importância da descrição de figuras complexas e aplicar essa técnica em quadriláteros e triângulos.

Ao desmembrar figuras em formas geométricas mais simples, os alunos serão capazes de calcular com maior precisão e eficiência os perímetros e áreas envolvidas. Esta abordagem não apenas simplifica os cálculos, mas também ajuda os alunos a desenvolverem uma compreensão mais profunda das propriedades e relações entre diferentes formas coordenadas.

Ao final da aula, espera-se que os alunos estejam aptos a aplicar a disposição de figuras em quadriláteros e triângulos como uma estratégia eficaz para resolver problemas de parâmetros e áreas de maneira mais eficiente e precisa.

Introdução (10 minutos)

Vamos começar com a inserção da seguinte figura côncava.

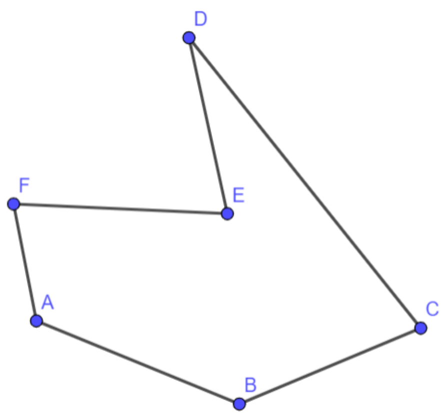

Figura 3.20: Figura criada pelo autor pelo site geogebra.org

Nela, os alunos vão observar que há várias maneiras de dividir em polígonos conhecidos, como quadriláteros e triângulos. Uma das possibilidades é ilustrada abaixo

As ideias de Diagonal de um polígono e Polígonos Côncavos Podem ser exploradas, inclusive para compreender outras maneiras de fazer tal divisão.

Além disso, uma pequena revisão rápida dos conceitos de perímetro e área, com a introdução da ideia de decomposição de figuras para facilitar cálculos é um ponto a ser considerado na introdução da aula mesmo que os alunos já possuam familiariedade com as mesmas.

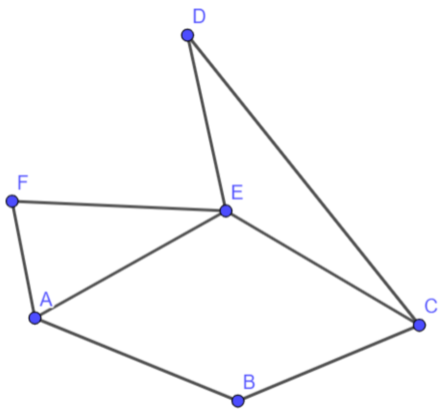

Figura 3.21: Figura criada pelo autor pelo site geogebra.org

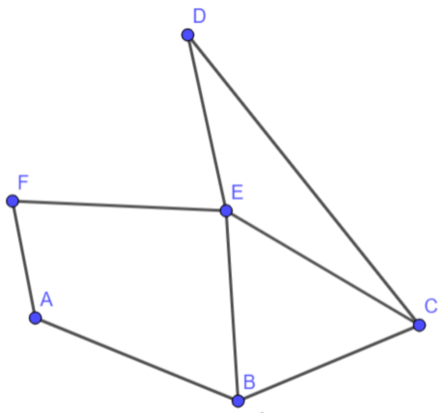

Figura 3.22: Figura criada pelo autor pelo site geogebra.org

Decomposição em Quadriláteros e Triângulos e Exercicios (30 minutos)

Nessa parte da aula, vamos concentrar os esforços nas questões da Obmep baseado nas ideias vistas na introdução e aulas anteriores

[Obmep 2016 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 19]

O retângulo ABCD foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo ABCD é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?

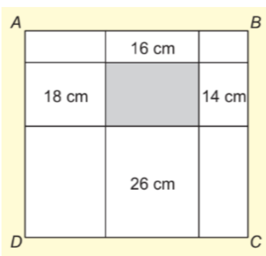

Figura 3.23: Questão 19, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2016

(A) 15 cm (B) 19 cm (C) 20 cm (D) 22 cm (E) 24 cm

A intenção dessa questão é associar os conceitos de perímetro e áreas usando da algébra para decifrar os lados corespondentes dos retângulos em questão. Os alunos que conseguirem sem muita ajuda compreender isso, já estão no segundo nível (Análise) de compreenção da habilidade EF07MA12 vista nessa aula.

[Obmep 2023 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 7]

Qual é a razão entre as áreas dos quadrados XYZW e ABCD da figura?

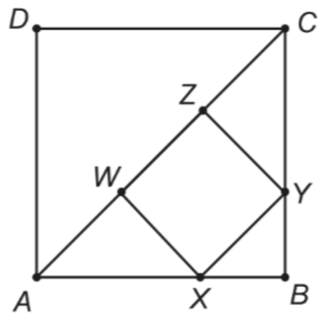

Figura 3.24: Questão 7, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2023

1. (A) $\frac{2}{9}$
2. (B) $\frac{1}{8}$
3. (C) $\frac{3}{4}$
4. (D) $\frac{5}{9}$
5. (E) $\frac{2}{3}$

Essa questão visa estabelecer forte conexão entre as razões e áreas, sendo que do ponto de vista geométrico, as frações costumam aparecer como sendo partes de um todo, nesse caso, partes de uma figura, e como estamos falando sobre decomposição, nada mais válido que explorar esses dois conceitos juntos.

[Obmep 2022 - 2ª Fase - Nível 1 Questão 4]

Janaína cortou uma cartolina retangular de 16 cm de comprimento e 6 cm de largura em quatro triângulos retângulos iguais, conforme mostra a figura.

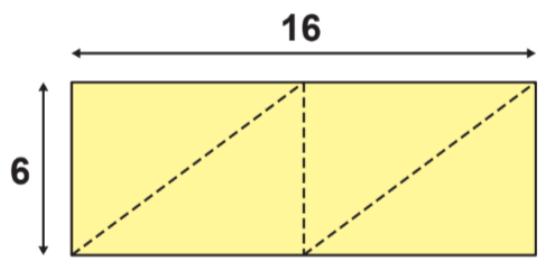

Figura 3.25: Questão 4, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2022

a) Qual é a área de cada um desses triângulos?

b) Em seguida, Janaína usou os quatro triângulos para montar um quadrado com um buraco no seu interior, conforme mostrado na figura. Qual é a área do buraco?

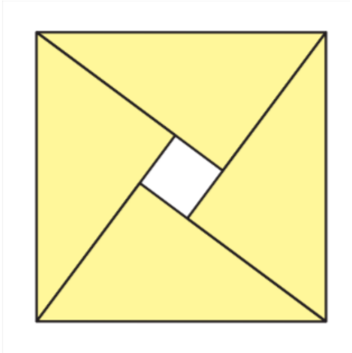

Figura 3.26: Questão 4, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2022

Avaliação e Discussão (5 minutos)

Durante a aula, é importante fazer perguntas diagnósticas em cada um dos níveis para avaliar a compreensão dos alunos sobre a decomposição de figuras. Abrindo espaço para dúvidas e revisão de conceitos e Destacando como a decomposição pode ser útil em situações práticas.

No primeiro nível, indagar como calcular áreas de quadriláteros côncavos de forma simplicada separando áreas. Logo em seguida, propor o desafio de dividir o paralelogramo em dois triângulos. Onde precisamos compreender como a área do paralelogramo pode ser calculada a partir das áreas dos triângulos.

A área de figuras planas não fica de fora, por exemplo, podemos indagar sobre a área de um trapézio, em que os alunos podem dividir a figura em um triângulo e um paralelogramo. No caso do Trapézio retângulo, uma das figuras mais conhecidas, o paralelogramo pode virar um retângulo ou mesmo um quadrado.

Já para diagnosticar em níveis mais formais, podemos obter a área aproximada de um círculo de forma bem rústica usando a decoposição em figuras poligonais a partir de um quadrado que possui lado igual ao diâmetro.

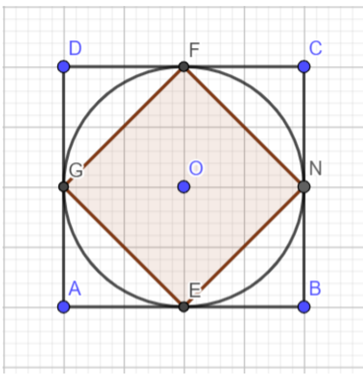

Figura 3.27: Figura criada pelo autor pelo site geogebra.org

3.10 Aula 07: Medidas de Lados e Perímetros

Nessa aula, vamos começar a identificar o conceito de análise geométrica na medição de lados e angulares em quadriláteros, um passo fundamental para compreender as propriedades dessas figuras. Abordaremos a técnica de medir lados e ângulos em quadriláteros, permitindo-nos classificá-los de acordo com as medidas de seus lados e ângulos. A partir dessa classificação, aprenderemos a nomear quadriláteros com base em suas características específicas, seja em relação aos lados ou aos ângulos. Além disso, exploraremos o reconhecimento da inclusão e intersecção de classes de quadriláteros, utilizando suas propriedades relativas aos lados e ângulos como critérios distintivos. Esta abordagem é especialmente adequada para alunos que já avançaram além dos níveis 1 e 2 de compreensão geométrica da teoria de van Hiele, fornecendo-lhes um desafio estimulante e aprofundando sua compreensão dos conceitos geométricos fundamentais. Ao final desta aula, os alunos terão mais aptidões para analisar e classificar quadriláteros com base em suas características estruturais, preparando-os para explorar conceitos mais avançados de geometria.

Introdução (10 minutos)

primeiramente, o professor deve deixar claro a associação de propriedades relativas a medidas, paralelismo e perpendicularidade dos lados a determinadas características dos quadriláteros, valendo igualmente para medidas dos ângulos, em especial os ângulos retos para caracterizar os retângulos para que os alunos possam reconhecer as principais características de cada quadrilátero, definidos por sua essência como o caso do trapézio que tem menos um par de lados paralelos.

Do paralelogramo, que possui dois pares de lados paralelos (sendo portanto, um tipo particular de trapézio), retângulo tem dois pares de lados paralelos e quatro ângulos retos (sendo um tipo de paralelogramo); losango tem dois pares de lados paralelos e de mesma medida (sendo portanto um tipo particular de paralelogramo) e que o quadrado tem dois pares de lados paralelos e de mesma medida e quatro ângulos retos.

Reconhecimento de Inclusão e Intersecção (10 minutos)

Introduza o conceito de inclusão e intersecção de classes de quadriláteros. Mostrando exemplos de como as propriedades de lados e ângulos determinam essas relações.

De outro modo, podemos colocar as seguintes afirmações no quadro e ai deixar os alunos refletindo sobre a veracidade delas, com o claro auxilio do professor que estara como mediador na aprendizagem:

1. Considere dois quadrados. Como todos os lados são congruentes e os ângulos internos são retos, ambos os quadrados são paralelogramos.

2. Todo quadrilátero é um retângulo? E de que maneira, poderiamos provar que

um quadrilátero possui essas propriedades?"

Sabemos que um retângulo possui quatro ângulos retos. Portanto, se você pode mostrar que todos os ângulos de um quadrilátero são retos, então você pode provar que o quadrilátero é um retângulo.

3. Se um quadrilátero é um retângulo, então todos os lados opostos são congruentes e paralelos. Além disso, os diagonais são congruentes e se cruzam perpendicularmente?

Medição de Lados (20 minutos)

Podemos perceber novas ideias sobre posições de quadriláteros para criar uma exploração em figuras mais complexas. Primeiro coloque essa questão e deixe os alunos manipulando-a no caderno ou folha de papel. (1º Fase N1 2014) [26]

[Obmep 2014 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 3]

Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta vermelha ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?

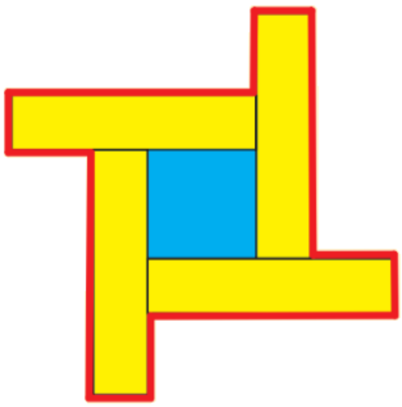

Figura 3.28: Questão 3, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2014

(A) 180 cm (B) 200 cm (C) 220 cm (D) 280 cm (E) 300 cm

Embora pareça simples que a figura possa ter seu perímetro calculado sem necessáriamente saber toda a teoria por se tratar de uma questão de nível 1 na primeira fase, temos que atentar que a disposição das formas, podem formar uma figura nova, e sem contexto aparente com as demais conhecidas. Prova disso que não sabemos o seu nome na atual classificação de polígonos.

Figura 3.29: Adaptação da figura da questão: Qual o nome dessa figura?

Na próxima questão que fecha essa parte da aula, estaremos interessados em figuras congruentes que forma um mosaico.

[Obmep 2012 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 8]

A fígura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?

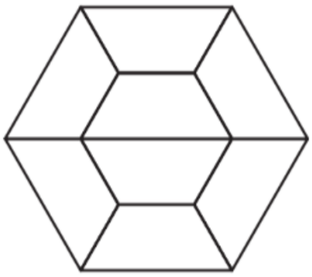

Figura 3.30: Questão 8, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2012

(A) 4 (B) 4,5 (C) 5 (D) 5,5 (E) 6

Atividade Prática (15 minutos)

Nesta fase da aula, os alunos devem usar o conceito de medição de lados e ângulos em quadriláteros, bem como à classificação dessas figuras com base nessas medidas. A questão proposta visa aprofundar a compreensão dos alunos sobre as propriedades dos quadriláteros e sua aplicação prática na identificação e análise de diferentes tipos de figuras geométricas.

Ao medir os lados e ângulos dos quadriláteros, os alunos estão desenvolvendo habilidades de observação e análise, enquanto a classificação os desafia a identificar padrões e relações entre as medidas e as características das figuras.

[Obmep 2015 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 9]

O trapézio ABCD foi dobrado ao longo do segmento CE, paralelo ao lado AD, como na figura. Os triângulos EFG e BFH são equiláteros, ambos com lados de 4 cm de comprimento. Qual é o perímetro do trapézio?

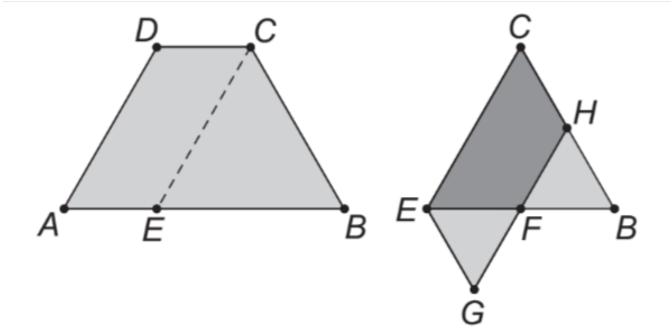

Figura 3.31: Questão 9, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2015

A) 16 cm B) 18 cm C) 20 cm D) 24 cm E) 32 cm

Avaliação e Discussão (5 minutos)

Faça perguntas para avaliar a compreensão dos alunos sobre a medição de lados e áreas em quadriláteros abrindo espaço para dúvidas e revisão de conceitos. Por exemplo, Se um quadrilátero tem lados de medidas 5 cm, 7 cm, 6 cm e 8 cm, como você classificaria esse quadrilátero? ou Se um quadrilátero tem ângulos medindo 90°, 80°, 110° e 80°, como você classificaria esse quadrilátero?. Reforçando a importância de entender as propriedades para identificar e classificar quadriláteros.

Esta aula procura desenvolver a compreensão dos alunos sobre a medição de lados e ângulos em quadriláteros, a classificação dessas figuras e a nomenclatura associada. Estimule a participação ativa dos alunos na atividade prática e na discussão em sala de aula. Esses conceitos são fundamentais para aprofundar a compreensão da geometria dos quadriláteros.

3.11 Aula 08: Decomposição e Sobreposição

Nessa aula, daremos início à exploração das decomposições de polígonos em triângulos e quadriláteros, uma estratégia fundamental para o bom entendimento dessa parte importante da análise geométrica. Vamos aprender a reconhecer e aplicar essas decomposições, relacionando a área de polígonos às áreas dos triângulos ou quadriláteros que os compõem.

Além disso, nos dedicaremos a resolver problemas que envolvem o cálculo de área de polígonos em contextos reais, preparando os alunos para aplicar esses conceitos em outros contextos. Para tornar a aprendizagem mais significativa, os alunos também serão desafiados a elaborar problemas que exijam o design de área de polígonos em projetos significativos que exigem precisão e aplicação prática do conhecimento adquirido.

Essa abordagem prática e contextualizada não apenas fortalecerá a compreensão dos conceitos de área, mas também promoverá o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico, preparando os alunos para enfrentar desafios matemáticos mais complexos no futuro.

Introdução (15 minutos)

Uma pequena revisão sobre cálculo de áreas de polígonos simples pode ser dada após uma acolhida falando da importância de estudar geometria de forma criativa. Logo depois, Introduza a ideia de decompor polígonos em triângulos e quadriláteros.

Decomposição de Polígonos (15 minutos)

Explique sobre como reconhecer e realizar a decomposição e sobreposição de polígonos com essa questão.

[Obmep 2022 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 19]

A figura abaixo é formada por dois quadrados parcialmente sobrepostos. A interseção desses quadrados, com contorno preto, tem área 18 cm² e perímetro 20 cm. A união desses quadrados, com contorno vermelho, tem área 163 cm² e perímetro 56 cm. Qual é, em cm², a diferença entre as áreas dos dois quadrados?

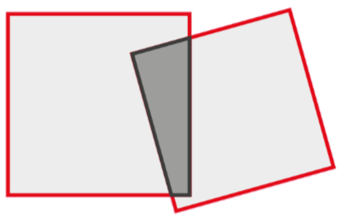

Figura 3.32: Questão 19, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2022

(A) 1 (B) 4 (C) 10 (D) 15 (E) 19

Ao tratar de figuras parcialmente sobrepostas, temos que atentar para as mais diversas nuances e dificuldades que os alunos possam apresentar. Calcular áreas e perímetros de figuras parcialmente sobrepostas pode ser complicado. Os alunos podem ter dificuldade em decidir quais partes das figuras devem ser incluídas nos cálculos e como lidar com as sobreposições, mas ao análisar cada informação com calma, eles logo percebrerão que na verdade se trata de uma nova perspectiva ou maneira de ver as coisas em geometria. A intercessão abre margem para que ao ver o assunto de conjuntos, o estudante possa compreender de forma facilitada.

Agora temos duas maneiras de dar prosseguimento a aula.

Primeira maneira: Ideias com Dobraduras (20 minutos)

Vamos aqui usar o conceito de sobreposição na mesma figura o que caracteriza a dobradura, um pequeno detalhe, mas que fará total diferença ao análisar os lados e as distâncias entre os pontos.

[Obmep 2022 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 7]

Uma folha de papel retângular ABCD, de 10 cm por 20 cm, tem uma face colorida e o verso branco. Foram feitas duas dobras nessa folha, levando-se os pontos A e C sobre a diagonal BD, de modo que as dobras ficaram paralelas a essa diagonal, como mostrado na figura abaixo.

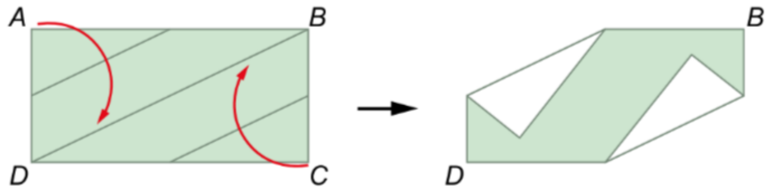

Figura 3.33: Questão 7, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2022

Qual é a área da região colorida que fica visível após as dobras?

(A) 25 cm² (B) 50 cm² (C) 75 cm² (D) 100 cm² (E) 125 cm²

Essa é a única questão em que pela complexidade natural, deveremos tecer comentários sobre a resolução: Como MN é paralela a BD, concluimos que os triângulos AMN e ADB são semelhante de alturas homólogas AS e AA' Conforme a figura asseguir.

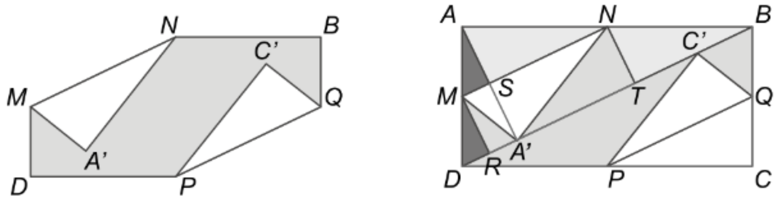

Figura 3.34: Questão 7, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2022

Pela dobra temos, $AA' = 2AS$ e assim a área de ABD é 4 vezes a área do triângulo AMN. Do fato de que a área do triângulo ADB é metade da área da folha, isto é,

$100\,\text{cm}^2$, a área de AMN é $25\,\text{cm}^2$, donde a área da região colorida visível é igual a área da folha menos quatro vezes a área do triângulo AMN, ou seja, igual a $100\,\text{cm}^2$ pois $10 \times 20 - 4 \times 25 = 200 - 100 = 100\,\text{cm}^2$.

Segunda maneira: Resolução de Problemas (20 minutos)

Aqui, os alunos vão estar divididos em grupos (Trios ou Quartetos) para observarem e resolverem a seguinte questão proposta que é da segunda fase.

[Obmep 2023 - 2ª Fase - Nível 2 Questão 3]

Marco ganhou dois tapetes retangulares medindo 2 metros de largura por 7 metros de comprimento cada um. Inicialmente, Marco colocou os dois tapetes de modo a encaixá-los exatamente sobre o piso de uma sala quadrada, conforme mostrado na figura.

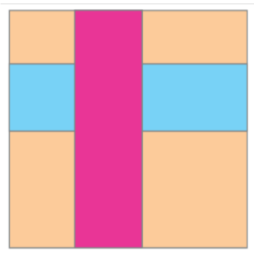

Figura 3.35: Questão 3, nível 2 da segunda fase da Obmep, 2023

a) Qual é a área do piso da sala não coberta pelos tapetes?

Depois, Marco resolveu tirar os tapetes dessa sala e colocá-los em um quarto retangular, conforme indicado na figura. A linha tracejada é uma diagonal comum a ambos os tapetes. Todos os vértices dos tapetes estão sobre o contorno do piso.

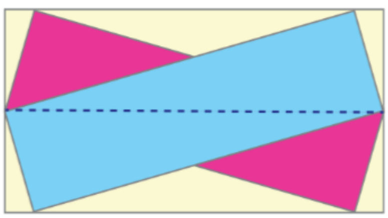

Figura 3.36: Questão 3, nível 2 da segunda fase da Obmep, 2023

b) Qual é a área do piso do quarto?

Solicite depois que os grupos possam elaborar problemas atrelados a figura da questão motivando-os a pensar de forma criativa. Esta aula busca desenvolver a habilidade dos alunos em reconhecer e aplicar a decomposição e dobradura em polígonos como triângulos e quadriláteros, relacionando essas áreas e resolvendo problemas práticos.

3.12 Aula 09: Demonstrações em Quadriláteros

Agora, daremos um passo adiante ao adentrar nos níveis de Dedução Formal e Rigor, apresentando aos alunos justificativas e projeções para as propriedades de lados e ângulos em triângulos, bem como os casos de congruência entre eles. Além disso, exploraremos a localização de quadriláteros em triângulos e utilizaremos as propriedades dos triângulos para deduzir propriedades geométricas em quadriláteros básicos, como quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos.

Ela será conduzida de forma expositiva e dialogada, desafiando o raciocínio dos alunos ao colocar em prova as ideias discutidas nas últimas aulas. Por meio de projeções e deduções em quadriláteros, utilizando a congruência de triângulos como base, apresentaremos algumas propriedades fundamentais. Para iniciar essa jornada, vamos explorar a primeira definição norteadora do estudo.

Definição: Se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes (de mesma medida), então ele é um paralelogramo.

De forma bem geral, sem mencionar ângulos, para que possamos verificar durante as seguintes propriedade

Propriedade 1. se os ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

Demonstração:

Considere um paralelogramo $ABCD$ como na figura.

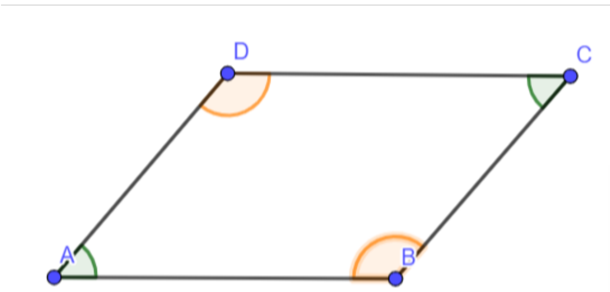

Figura 3.37: Uso do Geogebra
Fonte: Autoria Própria

Com a e c sendo ângulos colaterais internos, temos:

$a + c = 180°$ (I)

De mesma forma, ao observar a diagonal BD, temos:

$a + b = 180°$ (II)

$b + d = 180°$ (III)

$c + d = 180°$ (IV)

Agora, de (I) e (II), temos $a + c = 180° = a + b$, implicando que $b = c$.

E de (II) e (IV), $a + b = 180° = b + d$, implicando que $a = d$.

Propriedade 2.
Nos paralelogramos, os lados opostos são congruentes.

Demonstração:

Seja $ABCD$ um paralelogramo com os ângulos

$x = \angle BDC$, $y = \angle BDA$, $z = \angle DBC$ e $w = \angle ABD$.

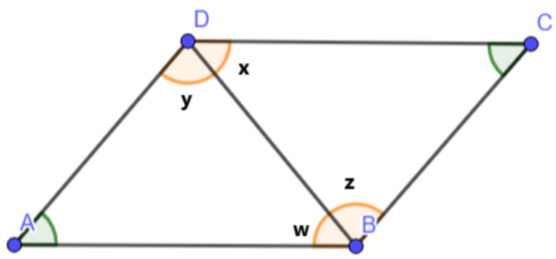

Figura 3.38: Uso do Geogebra
Fonte: Autoria Própria

Como x e w são ângulos alternos internos, temos $x = w$.

De maneira similar, podemos obter $y = z$.

Como BD é comum aos triângulos ABD e BDC, pelo caso LAL (Lado-Angulo-Lado), temos que o triângulo DAB é congruente ao triângulo BCD, o que implica em $AB = CD$ e $DA = BC$.

Propriedade 3 Se em um quadrilátero as diagonais se cortam mutuamente ao meio, então ele é um paralelogramo.

Demonstração:

Seja $ABCD$ um paralelogramo onde as diagonais DB e AC se interceptam no ponto P, com ângulos $x = \angle BDC$ e $y = \angle DBA$.

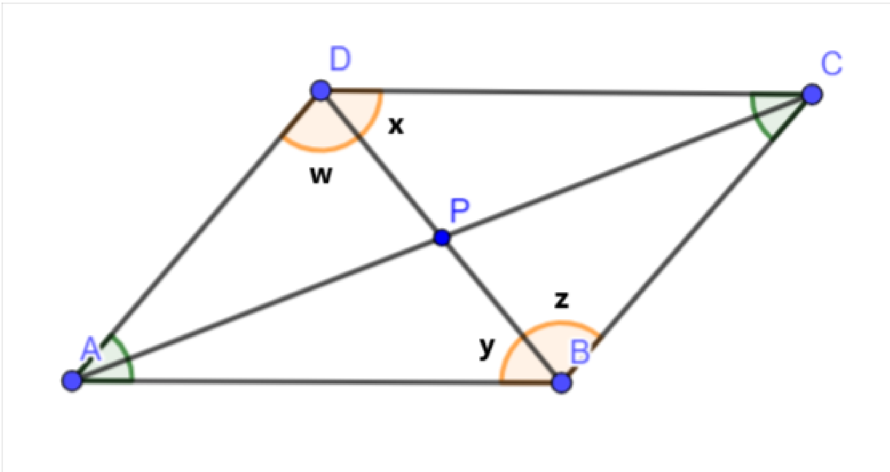

Figura 3.39: Uso do Geogebra
Fonte: Autoria Própria

Devido ao fato de que x e y são ângulos alternos internos, segue-se que $x = y$, o mesmo acontecendo com w e z.

Pela Propriedade 2, temos que $AB = DC$.

Pelo caso LAL (Lado-Angulo-Lado), o triângulo APB é congruente ao triângulo CPD, de onde decorre que $AP = CP$ e $BP = DP$.

As demonstrações desempenham um papel essencial na geometria, fornecendo um embasamento teórico sólido baseado em definições e axiomas. Através delas, podemos abstrair conceitos com uma amplitude e profundidade significativas. Por séculos, a geometria euclidiana tem sido uma pedra angular no ensino, oferecendo aos estudantes uma abordagem rigorosa para pensar sobre formas, medidas e relações espaciais.

Esse método não apenas promove uma compreensão precisa dos princípios geométricos, mas também estimula o desenvolvimento do pensamento lógico e analítico. Ao estudar e compreender as demonstrações na geometria, os alunos não apenas dominam os conceitos básicos, mas também são capacitados a resolver problemas complexos e aplicar princípios geométricos em diversas situações do mundo real.

3.13 Aula 10: Demonstrações em Triângulos

Vamos explorar as propriedades dos triângulos retângulos e suas relações métricas fundamentais, começando pela identificação de triângulos semelhantes formados pela altura em relação à hipotenusa. A partir dessa identificação, aplicaremos as relações entre os lados dos triângulos semelhantes, destacando a distinção entre as relações do triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras.

Além disso, revisaremos as propriedades de lados e ângulos em triângulos e os casos de congruência entre eles, preparando o terreno para decompor quadriláteros em triângulos. Utilizando as propriedades dos triângulos, deduziremos propriedades geométricas em quadriláteros básicos, como quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos.

Ao longo da aula, por meio de exemplos e projeções, destacaremos as relações análises importantes dos triângulos encontrados, fortalecendo a compreensão dos alunos e fornecendo-lhes ferramentas sólidas para resolver problemas geométricos complexos. Vamos mergulhar nesse estudo com paixão e determinação, explorando as relações entre as diversas propriedades geométricas com rigor e profundidade.

Propriedade 1: Em todo triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em A, onde D é um ponto em BC tal que BC é perpendicular a AD, como mostrado na figura abaixo.

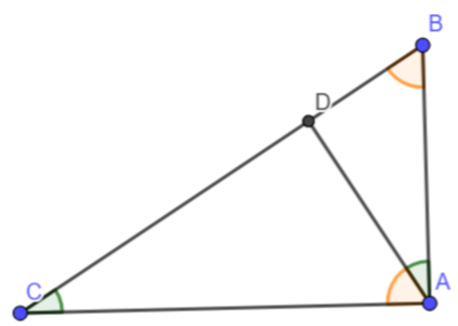

Figura 3.40: Uso do Geogebra
Fonte: Autoria Própria

Note que pelo caso AA de Congruência de triângulos, temos que

$\triangle ABC \sim \triangle DAC \sim \triangle DBA$,

isto é, $\angle ACD = \angle BAD$ e $\angle CAD = \angle ABD = \angle ACB$.

Logo, de $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, temos

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AD}$$

Portanto, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa.

Propriedade 2: Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração:

Sejam $ABCD$ e $MNOP$ quadrados, onde M pertence ao lado AB, N ao lado BC, O pertence a DC, e P ao lado AD tal que $AD = b + c$, como mostrado na figura abaixo.

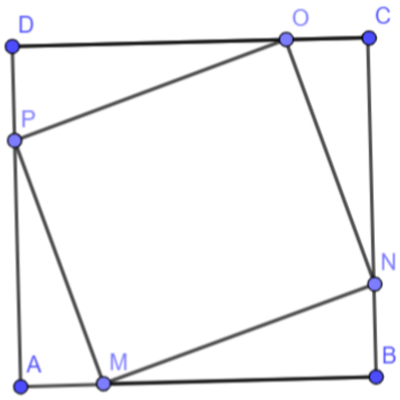

Figura 3.41: Uso do Geogebra
Fonte: Autoria Própria

Observe que $AM = BN = OC = DP = b$ e $MB = NC = OD = PA = c$. Sendo a o lado do quadrado $MNOP$, segue que AMP, MBN, NCO, ODP são triângulos retângulos com mesma área, isto é,

$A(AMP) = \frac{bc}{2}$.

Logo, $A(ABCD) = 4 \cdot A(AMP) + A(MNOP)$, resultando em

$(b + c)^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2$.

Simplificando, obtemos:

$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$,

o que leva a: $b^2 + c^2 = a^2$,

provando assim a propriedade conhecida como Teorema de Pitágoras.

3.14 Aula 11: Análise Geometrica na Obmep

Essa aula tem como objetivo principal preparar os alunos para a avaliação, sendo uma oportunidade de aprofundamento nos temas estratégicos ao longo desta sequência didática. Revisitaremos conceitos fundamentais relacionados aos polígonos, como a descrição de um polígono por suas propriedades como figura plana, a identificação de seus lados e ângulos, a nomeação dos polígonos em função de sua quantidade de lados e a classificação entre polígonos regulares e não regulares.

Para atingir esse objetivo, abordaremos os tópicos de perímetros e áreas de figuras planas, que foram vistos nas aulas anteriores, permitindo aos alunos relembrar e consolidar os conceitos aprendidos. Criaremos uma ligação rápida entre os polígonos mais comuns e suas propriedades, facilitando a compreensão e aplicação dos conceitos de perímetro e área em diferentes contextos geométricos.

Com essa abordagem, os alunos terão a oportunidade não apenas de revisar os conceitos de perímetros e áreas, mas também de aprofundar sua compreensão sobre as propriedades dos polígonos e sua relação com esses conceitos, apresentando-os de forma abrangente e sólida para a avaliação que será a proxima e última aula .

[Obmep 2018 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 11]

No trapézio ABCD da figura, os lados AB e CD são paralelos e o comprimento de CD é o dobro do comprimento de AB. O ponto P está sobre o lado CD e determina um triângulo ABP com área igual a 17. Qual é a área do trapézio ABCD?

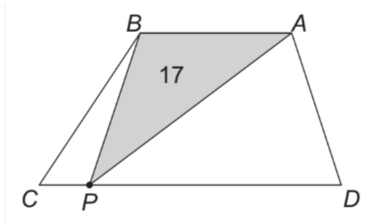

Figura 3.42: Questão 11, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2018

A) 32 B) 34 C) 45 D) 51 E) 68

Note que como AB e CD são paralelos, ABP tem mesma altura e base de ABC.

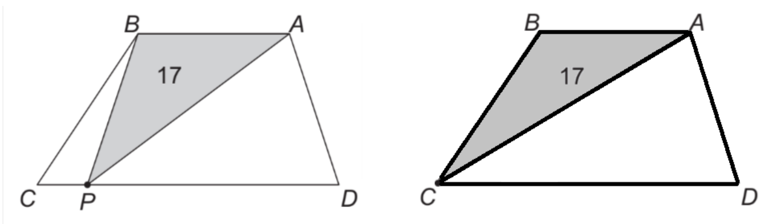

Figura 3.43: Fonte: Autoria Própria

Logo a questão das áreas nesse caso se resume a saber um pouco de semelhança para traçar a ideia de que na verdade o ponto P pode ser qualquer ponto entre C e D. Inclusive ao tomar P como sendo o um ponto do qual P' seja o prolongamento de BC e AD simetrico a P sendo ilustrada na seguinte figura:

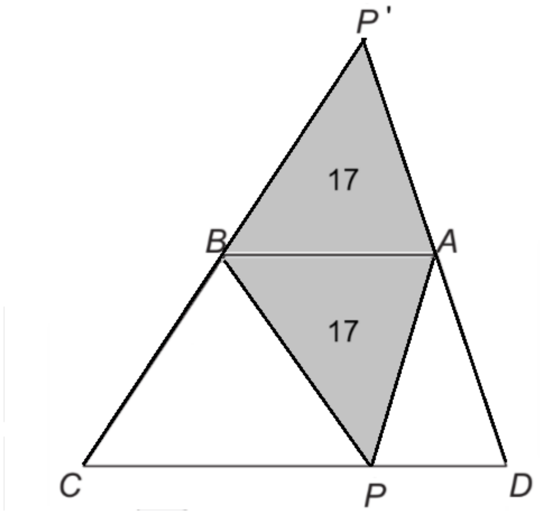

Figura 3.44: Fonte: Autoria Própria

[Obmep 2019 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 3]

O quadrado abaixo está dividido em dois triângulos e um quadrilátero. O triângulo amarelo tem o dobro da área do triângulo azul. Qual é a área do quadrilátero rosa?

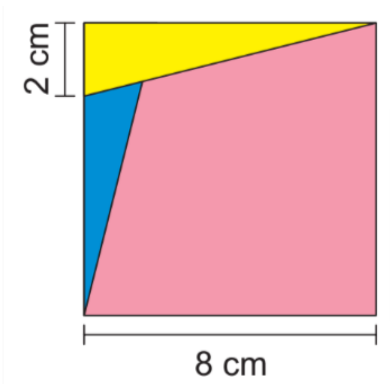

Figura 3.45: Questão 3, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2019

A) 36 cm² B) 48 cm² C) 52 cm² D) 56 cm² E) 60 cm²

Essa é uma questão que a primeira vista parece tão dificil quanto a anterior, mas os alunos que estão motivados visualmente, perceberão que a área em amarelo pode ser facilmente obtida pois a figura é um quadrado. Do enunciado da questão, vai logo traçar a área azul e, por meio de uma soma e de uma subtração, encontrar a área rosa, sendo essa uma questão da qual, o professor pode intervir na resolução se for realmente necessário.

[Obmep 2021 - 2ª Fase - Nível 2 Questão 5]

A figura abaixo mostra um hexágono regular ABCDEF e os pontos médios P, Q, R, S e T dos lados AB, CD, DE, EF e FA, respectivamente.

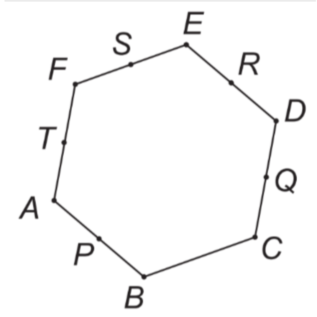

Figura 3.46: Questão 5, nível 2 da segunda fase da Obmep, 2021

(A) Se a área do triângulo AST for igual a 1 cm², qual será a área do triângulo FTS?

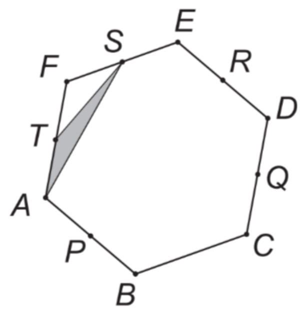

Figura 3.47: Questão 5, nível 2 da segunda fase da Obmep, 2021

(B) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos APR e PBQ?

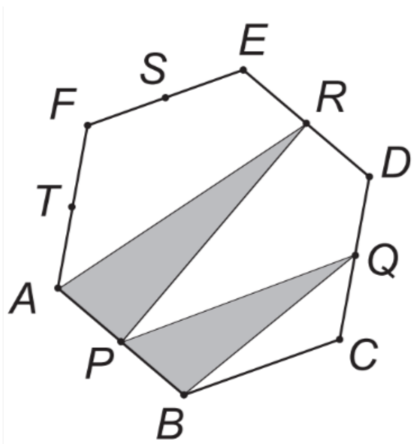

Figura 3.48: Questão 5, nível 2 da segunda fase da Obmep, 2021

Ao final da aula, os alunos devem estar aptos a aplicar esses conceitos na avaliação.

3.15 Aula 12: Avaliação Proposta.

Objetivos:

Como objetivo final desta sequência didática centrada na geometria, esta avaliação composta por apenas quatro questões visa proporcionar espaço para a criatividade e exploração dos conceitos envolvidos ao longo das aulas. Reconhecendo a importância de permitir que os alunos demonstrem a sua compreensão de forma abrangente e profunda, esta avaliação será disponibilizada com um tempo que pode exceder uma hora, garantindo um período adequado para o amadurecimento das respostas e a reflexão sobre os problemas apresentados.

Técnica e Recursos

Após a entrega da avaliação aos alunos, é imprescindível iniciar o processo destacando os pontos positivos das aulas anteriores. Essa etapa visa não apenas motivá-los, mas também reconhecer o progresso alcançado até o momento, incentivando-os a persistir em seus esforços. Ao ressaltar os pontos positivos, os alunos são inspirados a manter seu desempenho e comprometimento.

Além disso, é essencial enfatizar que essa avaliação servirá como uma validação concreta do esforço dedicado ao longo do período de estudo, garantindo que cada aluno seja devidamente reconhecido e recompensado pelo seu empenho.

Essa abordagem não só promove um ambiente de aprendizado positivo e encorajador, mas também reforça a importância do reconhecimento do trabalho árduo e do progresso pessoal de cada aluno. Ao reconhecer e valorizar os esforços dos alunos, cria-se uma atmosfera de motivação e autoconfiança, que são fundamentais para o desenvolvimento contínuo e o sucesso acadêmico.

3.15.1 Avaliação

Questão 01 [Obmep 2013 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 3]

A figura representa um polígono em que todos os lados são horizontais ou verticais e têm o mesmo comprimento. O perímetro desse polígono é 56 cm. Qual é sua área?

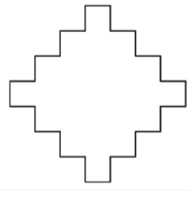

Figura 3.49: Questão 3, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2013

A) 25 cm² B) 50 cm² C) 75 cm2 D) 100 cm² E) 125 cm²

Essa questão tem como propósito, relembrar da conexão entre os conceitos de perímetro e área vistos na aula 4 e 7. Normalmente os alunos podem levar até 5min para completa-la.

Questão 02 [Obmep 2015 - 2ª Fase - Nível 1 Questão 3]

Lucinha tem três folhas retangulares iguais, cujos lados medem 20 cm e 30 cm.

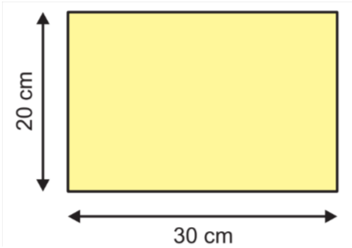

Figura 3.50: Questão 3, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2015

a) Lucinha fez dois traços retos na primeira folha, um a 4 cm da margem esquerda e outro a 7 cm da margem superior, dividindo-a em quatro retângulos. Um desses retângulos tem a maior área. Qual é o valor dessa área?

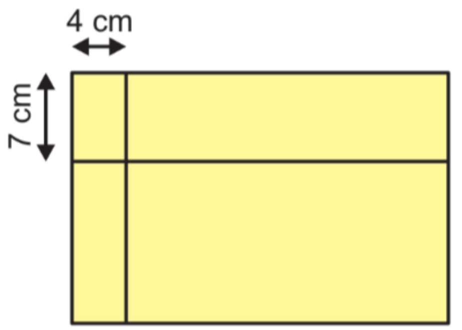

Figura 3.51: Questão 3, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2015

b) Ajude Lucinha a dividir a segunda folha em quadrados iguais, desenhando traços paralelos às margens, de modo que esses quadrados tenham a maior área possível.

Figura 3.52: Questão 3, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2015

c) Lucinha pegou a terceira folha, amarela na frente e verde no verso, e fez duas dobras: a primeira a 8 cm da margem esquerda e a segunda a uma certa distância da margem inferior, de forma que o perímetro da região não coberta da folha (contorno da região amarela da última fi gura) fosse de 54 cm. Qual é a distância da segunda dobra à margem inferior?

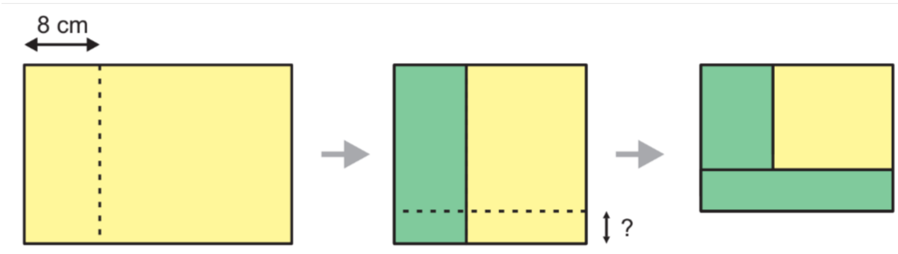

Figura 3.53: Questão 3, nível 1 da segunda fase da Obmep, 2015

Questão 03 [OBMEP 2014 - 1ª Fase - Nível 1 Questão 7]

A figura é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região cinza?

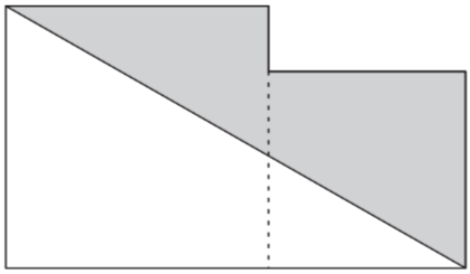

Figura 3.54: Questão 7, nível 1 da primeira fase da Obmep, 2014

A) 44 cm² B) 46 cm² C) 48 cm² D) 50 cm² E) 56 cm²

Essa é uma questão importante pela quantidade de técnicas que podem ser envolvidas na sua resolução. Alguns alunos vão tecer uma subtração da área total pela área em branco com o seu cálculo baseado nas medidas dos quadrados. Outros, podem usar semelhanças para descobrir se o ponto que está na intercessão da reta que liga os quadrados com a reta que os divide é mesmo médio do menor quadrado.

Inclusive a mesma importância aos lados e áreas será dado aos ângulos, O professor pode esperar que o aluno mais dedicado, não vai deixar de notar que com a semelhança, muitos ângulos são descobertos usando as mais diversas propriedades sobre paralelismo, ou mesmo, ortogonalidade e mesmo Ângulos opostos pelo vértice, sendo esta uma das mais ricas figuras dessas aulas.

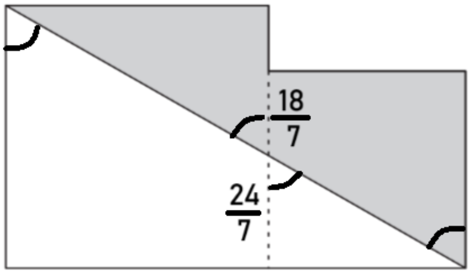

Figura 3.55: Figura produzida pelo Autor

Para a última questão, devemos traçar paralelos sobre os chamados pontos médios de um segmento. Pode ser que algum aluno esteja em dúvida sobre esse conceito, o que pode ser explicado pelo professor de forma superficial com exemplos em retas para que os alunos possam identificar o conceito na prova e assim a questão ter mais probabilidade de ser resolvida.

Questão 04 [Obmep 2015 - 1ª Fase - Nível 2 Questão 7]

A figura abaixo é formada por dois quadrados de lado 6 cm e dois triângulos. Se M é o ponto médio de AB, qual é a área total da figura?

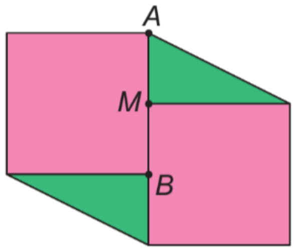

Figura 3.56: Questão 7, nível 2 da primeira fase da Obmep, 2015

A) 90 cm² B) 96 cm² C) 100 cm² D) 108 cm² E) 120 cm²

Com esse problema, estamos avaliando novamente as capacidades criativas e as descobertas feitas pelos alunos a cerca de perímetros (usando o teorema de pitágoras) e áreas (usando a semelhança entre os triângulos e a noção de ponto médio).

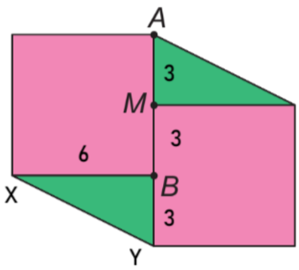

Figura 3.57: Figura produzida pelo Autor

Na figura, pela trigonometria, o ângulo $\angle BXY = 30°$ e $\angle BYX = 60°$.

Capítulo 4

Considerações Finais

A presente pesquisa teve como objetivo investigar o desenvolvimento de competências geométricas em estudantes do ensino médio por meio da implementação de sequências didáticas, com enfoque na geometria plana, e considerando o papel da Obmep nesse processo. Ao longo deste estudo, foram analisadas as contribuições da teoria dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, o impacto da Obmep no ensino de matemática no Brasil e a potencialidade das sequências didáticas para promover a aprendizagem significativa.

A teoria de van Hiele se mostrou fundamental para compreender os diferentes níveis, de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Ao identificar o nível de desenvolvimento de cada aluno, é possível planejar atividades mais adequadas e desafiadoras, promovendo assim o avanço para níveis mais complexos. As sequências didáticas propostas nesta pesquisa foram elaboradas com base nos níveis de van Hiele, buscando proporcionar atividades que estimulassem a transição entre os níveis e o desenvolvimento de um pensamento geométrico mais elaborado.

A Obmep desempenha um papel crucial na identificação e desenvolvimento de talentos matemáticos no Brasil. A participação em olimpíadas como a OBMEP pode motivar os estudantes, estimular o estudo aprofundado da matemática e contribuir para o desenvolvimento de habilidades como a resolução de problemas e o raciocínio lógico. Ao incorporar problemas da OBMEP nas sequências didáticas, foi possível desafiar os estudantes e promover o desenvolvimento de um pensamento mais crítico e criativo.

As sequências didáticas se mostraram como uma ferramenta eficaz para o ensino de geometria plana. Ao organizar as atividades de forma sequencial e articulada, é possível garantir a progressão do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades específicas. As sequências didáticas propostas nesta pesquisa foram elaboradas com base em uma variedade de metodologias ativas, como a resolução de problemas, a investigação e a descoberta, buscando promover a participação ativa dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa.

A BNCC estabelecendo diretrizes importantes para o ensino de matemática, enfatiza a importância do desenvolvimento de competências como a resolução de problemas, a comunicação matemática e o raciocínio lógico. As sequências didáticas propostas nesta pesquisa estão alinhadas com as competências gerais da BNCC, contribuindo para a formação de cidadãos críticos e criativos.

Os resultados desta pesquisa indicam que a implementação de sequências didáticas baseadas na teoria de van Hiele e com a utilização de problemas da OBMEP pode ser uma estratégia eficaz para o desenvolvimento de competências geométricas em estudantes do ensino médio. É importante ressaltar que esta pesquisa possui algumas limitações, principalmente ao fato de que a SD não foi aplicada num contexto escolar. Sugere-se que futuras pesquisas investiguem o impacto a longo prazo das sequência didática proposta, acompanhando o desenvolvimento dos alunos em outras áreas da matemática no ensino de geometria.

O ensino de geometria plana desempenha um papel fundamental na formação integral do estudante, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades essenciais para a vida. A presente pesquisa demonstra que é possível promover uma aprendizagem significativa e prazerosa em geometria por meio da utilização de sequências didáticas que integram diferentes recursos e metodologias.

A estrutura da sequência didática, composta por 12 aulas e baseada em questões da OBMEP, permitiu uma progressão gradual na complexidade dos problemas, alinhada com os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele. A seleção cuidadosa das questões da OBMEP garante que os estudantes fossem desafiados a aplicar os conhecimentos adquiridos em situações diversas, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e de pensamento crítico. Os resultados obtidos indicam que a metodologia utilizada foi eficaz em promover a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de competências geométricas, conforme previsto na BNCC.

A flexibilidade da sequência didática proposta permitiu sua adaptação às diferentes realidades das salas de aula. A utilização de questões da OBMEP como ponto de partida possibilitou a personalização das atividades, considerando as necessidades e os interesses dos alunos. Além disso, a articulação entre os níveis de van Hiele e as competências da BNCC garantiu que a sequência didática fosse alinhada com as diretrizes curriculares nacionais. É importante ressaltar que a sequência didática pode ser adaptada e ampliada, de acordo com as características de cada turma e os objetivos do professor.

Referências

[1] BATTISTA, Michael T. The development of geometric and spatial thinking. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 2, p. 843-908, 2007.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C **História da matemática**. Georgetown, Texas: Editora Blucher, 2019.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/CNE, 2017.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: MEC 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso: 14 nov. 2023.

[5] BURGER, William F.; SHAUGHNESSY, J. Michael. Caracterizando os níveis de desenvolvimento de van Hiele em geometria. **Journal for research in mathematics education** , v. 17, n. 1, p. 31-48, 1986.

[6] CARMO, João dos Santos; SIMIONATO, Aline Morales. Reversão de ansiedade à matemática: alguns dados da literatura. **Psicologia em Estudo**. v. 17, p. 317-327, 2012.

[7] CONEGLIAN, Stella Maris Gesualdo Grenier; SANTOS, Christina Aparecida dos Santos; MELO, José Joaquim Pereira. Reflexões sobre a vida de Descartes e o plano cartesiano. **Simpósio Nacional de Educação**; Semana de pedagogia, Cascavel, p. 1-13, 2010.

[8] CLEMENTS, Douglas H.; BATTISTA, Michael T. Geometria e raciocínio espacial. **Manual de pesquisa sobre ensino e aprendizagem de matemática: Um projeto do National Council of Teachers of Mathematics**, p. 420-464, 1992.

[9] DE SOUZA, Kênia Bomtempo. Piaget e a construção de conceitos geométricos. **Revista Temporis [ação]**, v. 1, n. 9, Anápolis 2007.

[10] DOLZ, Joaquim et al. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. **Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras**, p. 95-128, 2004.

[11] DE MORAES, João Carlos Pereira; PEREIRA, Ana Lúcia. Análise de competências específicas na BNCC de matemática, indícios para abordagem metodológica e afastamentos dos PCN. **Revista Valore**, v. 6, p. 955-967, 2021.

[12] EUCLIDES, **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, São Paulo, 2009.

[13] FRANCO, D. L. A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de Física moderna no Ensino Médio. **Revista Triângulo**, Uberaba - MG, v. 11, n. 1, p. 151–162, 2018. DOI: 10.18554/rt.v0i0.2664. Disponível em: https://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2664. Acesso em: 25 jul. 2024.

[14] FREITAS, Jose Renato Alves De. **O ensino de matemática à luz da bncc: uma construção afetiva, pedagógica e prática para o professor de matemática do ensino fundamental II**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT). Instituto de Engenharia e Desenvolvimento Sustentável – IEDS, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

[15] FUYS, David; GEDDES, Dorothy; TISCHLER, Rosamond. O modelo van Hiele de pensamento em geometria entre adolescentes. **Journal for Research in Mathematics Education. Monografia** , v. 3, p. i-196, 1988.

[16] GIRALDO, V.; QUINTANEIRO, W.; MOUSTAPHA, B.; MATOS, D.; MELO, L.; MENEZES, F.; DIAS, U.; COSTA NETO, C.; RANGEL, R.; CAVALCANTE, A.; ANDRADE, F.; MANO, V.; CAETANO, M. Laboratório de práticas matemáticas para o ensino. In: OLIVEIRA, A. M. O; ORTIGÃO, M. I. R. (Eds.), **Abordagens Teóricas e Metodológicas na Pesquisa em Educação Matemática.** Brasília: SBEM, 2018,p. 186-209.

[17] GUTIÉRREZ, Angel; JAIME, Adela; FORTUNY, José M. Um paradigma alternativo para avaliar a aquisição dos níveis de van Hiele. **Journal for Research in Mathematics education** , v. 22, n. 3, p. 237-251, 1991.

[18] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 1985

[19] IMPA. (2020). Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Disponível em: https://impa.br/noticias/obmep-2020-bate-recorde-de-municipios-inscritos/.

[20] Leão, Francisco Araújo de Almeida. **A metodologia contextualizada da OBMEP no processo de ensino-aprendizado** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat). Universidade Federal do Piauí, Teresina. Disponível em https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5767id2=171053076 Acesso em 25 jul. 2024.

[21] LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista.** Blumenau, ano III, n. 4, 1995.

[22] Lima, R. M., Silva, R. T. O ensino de ciências e matemática à luz da BNCC: desafios e perspectivas. **Investigações em Ensino de Ciências**, 24(1), 5-20. 2019.

[23] KALEFF, Ana Maria Martensen Roland et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico–o modelo de van Hiele. **Bolema**-Boletim de Educação Matemática, v. 9, n. 10, p. 21-30, 1994.

[24] MASON, Marguerite. The van Hiele levels of geometric understanding. **Coleccion Digital Eudoxus**, v. 1, n. 2, 2009.

[25] Moran, J. A BNCC e o desafio da aprendizagem significativa. **Educação e Sociedade**, 39(144), 817-834. 2018.

[26] OBMEP. **Provas**.2020.
Disponível em: https://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em 06 de Abr. 2024.

[27] PERTILE, Karine; JUSTO, Jutta Cornelia Reuwsaat. Competências específicas da matemática na BNCC na perspectiva de supervisoras dos anos iniciais. **NAVARRO, ER; SOUSA, M. do C. de (Org.). Educação matemática em pesquisa: perspectivas e tendências**, v. 1, p. 193-208, 2021.

[28] PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. Lisboa: Mental, 1936.

[29] PIAGET, Jean. **Seis estudos de psicologia**. Trad. Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sergio Lima Silva. 21. ed., Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1995.

[30] SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica. Porto Alegre: **Artmed**, 2004.

[31] SANTOS, Daniel Matias et al. TEORIA DE VAN HIELE: SEUS DESDOBRAMENTOS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA. **RECIMA21-Revista Científica Multidisciplinar**-ISSN 2675-6218, v. 4, n. 9, p. e493837-e493837, 2023.

[32] Souza, A. L., Silva, M. C., Santos, J. C. Competências matemáticas na BNCC: entre a teoria e a prática. **Revista Brasileira de Educação Matemática**, 10(2), 1-14. 2020.

[33] Stahl, R. J., de Oliveira, C. C. Geometric thinking in Brazilian students: Examining the impact of instructional interventions. **International Journal of Mathematics Education**, 45(3), 245-259. 2014.

[34] LIMA, R. DE C. P.; UTSUMI, M. C. Um estudo sobre as atitudes de alunas de pedagogia em relação à Matemática. **Educação Matemática em Revista**, n. 24, p. p. 46-54, 2017.

[35] VAN HIELE, P. **Structure and Insight**: a Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press, 1986.

[36] Rodrigues, Valdério Oliveira. **Geometria Plana na OBMEP : um estudo das questões de Geometria na segunda fase da OBMEP nos níveis 1 e 2**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat). Universidade Federal do Piauí, Teresina. Disponível em https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7575id2=171057523 Acesso em 25 jul. 2024.

[37] Vygotsky, L. S. Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. **Harvard University Press**, 1978.

[38] ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.