



**CARLOS ALBERTO SASSI JUNIOR**

**GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA**

**SANTO ANDRÉ**

**2013**



**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**CARLOS ALBERTO SASSI JUNIOR**

**GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA**

**Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título Mestre em Matemática.

**SANTO ANDRÉ**

**2013**

## AGRADECIMENTOS

---

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me capacitado a chegar aonde sempre quis chegar;

Aos excelentes professores que tive a oportunidade de ter durante minha vida acadêmica;

Aos colegas professores que me incentivaram e me desafiaram constantemente nessa missão árdua que é o caminho da docência;

Aos meus alunos e ex-alunos que me fizeram aprender, a cada dia, uma maneira ímpar de compreender a vida;

A minha esposa **Karina**, meu filho **Pedro Levi**, meus pais **Ana Maria** e **Carlos Alberto**, que sempre estiveram ao meu lado, dividindo comigo as angústias, decepções, incertezas e conquistas.

Colocar-lhe-ei entre os grandes para que sejas grande.

(Autor desconhecido)

## INTRODUÇÃO

---

O trabalho está dividido em 4 partes. Na primeira parte, apresentaremos o contexto histórico da Geometria Plana Euclidiana, seus axiomas, o método dedutivo, uma breve discussão sobre o V. Postulado de Euclides, algumas tentativas de demonstrações durante os séculos e finalmente o surgimento da Geometria Hiperbólica.

Na segunda parte, o estudo de algumas Geometrias não Euclidianas; apresentaremos também a geometria neutra e alguns teoremas e da geometria Euclidiana Plana dificilmente encontrados nos livros de ensino médio adotados pela Rede Estadual de Ensino, além de alguns teoremas da Geometria Hiperbólica.

Por fim, apresentaremos um modelo de Geometria Hiperbólica: O Modelo de Poincaré. Ainda, iremos propor uma atividade baseada no Modelo de Poincaré, factível ao Ensino Médio, com a utilização do software GEOGEBRA no laboratório de informática.

**Palavras-chave:** Geometria Hiperbólica, Geometria Plana, V Postulado de Euclides, Modelo de Poincaré.

## RESUMO

---

A intrigante procura pela demonstração do V. postulado de Euclides levou diversos matemático a conjecturarem se o V. postulado poderia ser demonstrado pelos quatro postulados anteriores. Por dezenas de séculos, diversas tentativas foram apresentadas ao meio acadêmico e, para “tristeza” de muitos, apenas no século XIX provou-se que ele não poderia ser demonstrado. A inquietude dos matemáticos durante este árduo trabalho culminou na descoberta de uma nova geometria, independente do V. postulado, chamada geometria hiperbólica.

**Palavras-chave:** Geometria Hiperbólica, Geometria Plana, V Postulado de Euclides, Modelo de Poincaré.

## ABSTRACT

---

The intriguing search for the demonstration of V. postulate of Euclid led to many mathematical conjectures the V. postulate could be demonstrated by the four previous postulates. For dozens of centuries, several attempts were made to academia and to "sadness" of many, only in the nineteenth century proved that it could not be demonstrated. The restlessness of mathematicians during this hard work culminated in the discovery of a new geometry, independent of V. postulate, called hyperbolic geometry.

## CONTEÚDO

---

I.	Contexto Histórico.....	8
A.	A Lógica Dedutiva e o Método Axiomático.....	8
B.	Os Elementos .....	10
C.	O Quinto Postulado.....	11
D.	Tentativas de Demonstrações do 5º Postulado .....	12
E.	O Nascimento da Geometria Hiperbólica .....	15
II.	Geometria não Euclidiana .....	18
A.	A Geometria Neutra.....	18
B.	Alguns Teoremas da Geometria Plana .....	18
□	Relação de Stewart.....	18
□	Fórmula de Herão.....	22
C.	Geometria Hiperbólica: Modelo e Consistência .....	24
D.	Alguns Teoremas da Geometria Hiperbólica: .....	25
III.	O Modelo de Poincaré .....	31
IV.	Atividade no Software Geogebra – Medida dos Ângulos Internos de um h-triângulo – Modelo de Poincaré.....	36
V.	Referência Bibliográfica.....	40

## **I. Contexto Histórico.**

### **A. A Lógica Dedutiva e o Método Axiomático**

O grande passo evolutivo que ocorreu com a matemática grega foi a mudança da própria concepção da matemática e do modo de estabelecer e justificar os fatos. Os fatos matemáticos agora deveriam ser estabelecidos, justificados por procedimentos não empíricos (de caráter indutivo) e sim por argumentos dedutivos.

A dedução como método de obtenção de conhecimento não exclui a indução e analogia do âmbito matemático, mas se sobrepõe a esse método exigindo que os fatos descobertos, conjecturados (pelo método indutivo, intuitivo) passem pelo crivo de uma justificação.

Assim, a indução/intuição continua a desempenhar um papel importante na descoberta de novos fatos matemáticos associando-se à conjectura ou à hipótese. A justificação corresponde à noção de demonstração (prova), métodos e critérios.

O nascimento do método dedutivo implicou num abandono dos métodos empíricos de estabelecer conhecimento e numa incisiva insistência em que toda conclusão ou fato matemático deve ser estabelecido por intermédio de um argumento (formal de raciocínio) de caráter conceitual e abstrato conforme um método.

Diversas razões podem ser conjecturadas para explicar o porquê do nascimento do método dedutivo entre os gregos, entre elas:

1. Inclinação dos gregos por questões filosóficas. Nas investigações filosóficas, o argumento utiliza-se e baseia-se em conceitos abstratos e generalizações, e entre seus traços distintos estão a preocupação com a clareza, a elaboração de argumentos sólidos e com a preocupação com a obtenção de conclusões inevitáveis a partir de proposições assumidas. Nas questões filosóficas, também é importante a distinção entre argumentos corretos e incorretos, bem como critérios e métodos válidos de inferência.
2. Estética. Os valores de âmbito estético são marcantes na cultura grega e no método dedutivo, a ordem, a clareza, a consistência, completude e convicção dos fatos matemáticos e de sua exposição são superiores ao receituário empírico.



3. Segregação senhores/escravos. No modo de existir e no cenário socioeconômico e cultural grego, ao qual os filósofos, matemáticos e artistas pertenciam geralmente a uma classe econômica que não reconhecia mérito intelectual na atividade prática e no trabalho.

Em síntese, o raciocínio lógico dedutivo consiste em provar a veracidade de uma declaração exclusivamente baseado na veracidade de outras declarações e o uso de regras de inferência bem delineadas.

Com isso, há (pelo menos) três exigências para o bom funcionamento desse método de raciocínio dedutivo:

- Exigência 1: Teremos a certeza da veracidade de certas declarações chamadas de premissas ou hipóteses (ou axiomas ou postulados).
- Exigência 2: Concordamos no que diz respeito a como e quando uma declaração segue logicamente de outra.
- Exigência 3: Para aplicar o raciocínio dedutivo temos que dominar bem a linguagem comum e escolher os termos primitivos.

Não se sabe se os gregos escreveram algum tratado específico sobre o método dedutivo utilizado na matemática, apesar disso a análise dos textos que dispomos e em especial dos Elementos de Euclides<sup>1</sup> permitem a construção de um quadro relativamente coeso do que os matemáticos gregos entendiam com demonstração, das regras válidas, de como uma estrutura dedutiva se constituía.

O método argumentativo/dedutivo grego era um discurso lógico-teórico racional a respeito de um objeto. E, formalmente, se organizava através de uma sequência de proposições obtidas por intermédio do argumento dedutivo – demonstração – a partir de uma coleção inicial de proposições aceitas.

Para o estudo da geometria plana Euclidiana, por meio da lógica dedutiva, é necessário escolher certas declarações que diremos ser verdadeiras (não precisaremos mostrar que seguem de outras), antes de poder começar a raciocinar. Estas declarações iniciais são chamadas axiomas ou postulados. Assim, um sistema axiomático e o raciocínio dedutivo estão intimamente relacionados um com outro.

---

<sup>1</sup> Euclides de Alexandria (300 AC) foi um professor, matemático platônico e escritor. Além de sua principal obra, Os Elementos, Euclides também escreveu sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor.

## **B. Os Elementos**

No Livro I da obra “Os Elementos” de Euclides, encontramos 23 (vinte e três) definições, 5 (cinco) postulados, 9 (nove) noções comuns e 48 (quarenta e oito) proposições.

Abaixo, apresentaremos as nove Noções comuns e os cinco postulados que aparecem no Livro I. Optamos por manter as transcrições tais quais aparecem no livro traduzido por Irineu Bicudo (Bicudo, 2009).

Noções comuns:

- I. *As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;*
- II. *E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais;*
- III. *E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais;*
- IV. *E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais;*
- V. *E os dobros da mesma coisa são iguais entre si;*
- VI. *E as metades da mesma coisa são iguais entre si;*
- VII. *E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si;*
- VIII. *E o todo [é] maior do que a parte;*
- IX. *E duas retas não contêm uma área.*

Postulados:

- I. *Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;*
- II. *Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;*
- III. *E, com todo centro e distância, descrever um círculo;*
- IV. *E serem iguais entre si todos os ângulos retos;*
- V. *E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.*

### C. O Quinto Postulado

Durante anos, matemáticos ficaram intrigados com o quinto postulado; seja pelo contraste deste enunciado com a clareza que foram enunciados os demais postulados ou ao fato de Euclides utilizá-lo pela primeira vez na proposição 29: *A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.*

Um enunciado equivalente, mas consideravelmente mais transparente, foi feito por John Fairplay<sup>2</sup>:

*Postulado das paralelas: Dada uma reta  $\ell$  e um ponto  $P$  não pertencente a  $\ell$ , existe uma e apenas uma reta passando por  $P$  e paralela a reta  $\ell$ .*

Em síntese, o quinto postulado não é um fato facilmente aceitável pela sua natureza; se assim o fosse, por que Euclides não o utilizou antes da proposição 29? Esse questionamento fez com que muitos estudiosos pesquisassem a possibilidade do quinto postulado ser demonstrado a partir dos outros quatro anteriores. Tal investigação culmina no aparecimento da axiomatização das Geometrias não euclidianas no século XIX.

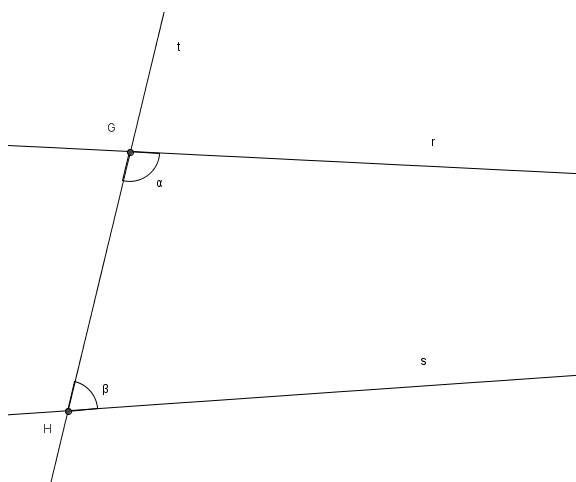


Figura 1: O Quinto Postulado de Euclides.

---

<sup>2</sup> John Playfair (10 de março de 1748 - 20 de julho de 1819) matemático e geólogo escocês. Foi o primeiro presidente do Instituto Astronômico de Edimburgo e professor de matemática e filosofia na Universidade de Edimburgo.

#### D. Tentativas de Demonstrações do 5º Postulado

Cláudio Ptolemeu<sup>3</sup> (306-283 a.C.) que viveu em Alexandria escreveu um livro que apresenta a prova do quinto postulado, mas essa demonstração tinha um erro: assumia que o paralelismo acarreta a congruência de duas figuras. A justificativa estava apoiada na ideia de que se uma reta intercepta uma outra reta então interceptará todas as retas paralelas a esta segunda.

O francês Adrien Marie Legendre<sup>4</sup> (1752-1833) foi um dos grandes matemáticos do seu tempo, contribuindo com importantes descobertas para diversos ramos da matemática. No entanto, ele estava tão obcecado em provar o postulado das paralelas que, durante um período de 29 anos, ele teria publicado diversas tentativas, uma atrás da outra, em diferentes edições de seu *Éléments de Géométrie*. A seguir, temos uma tentativa:

“Seja P um ponto do plano não pertencente à reta r. Traçamos, por P, uma reta s, perpendicular à reta r, tal que  $r \cap s = \{Q\}$ . Por fim, traçamos uma reta t, perpendicular à reta s, que contenha o ponto P. Então, a reta t é paralela à reta r”.

De uma maneira mais simples, a tentativa de Adrien provar o quinto postulado resumiu-se ao fato: Se duas retas têm uma perpendicular em comum, elas são paralelas.

Saccheri<sup>5</sup> (1667-1733) apresenta uma tentativa de demonstrar o quinto postulado que ficou registrada na história. Sua contribuição é considerada a mais importante. Começou por um tipo especial de quadriláteros (os quadriláteros de Saccheri), que se caracterizam por terem um par de lados opostos de mesma medida e perpendiculares a um terceiro lado. Os ângulos  $\gamma$  e  $\sigma$  são os ângulos de topo.

---

<sup>3</sup> Cláudio Ptolemeu ou Ptolomeu (90–168), foi um cientista grego que viveu em Alexandria. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical.

<sup>4</sup> Adrien Marie Legendre (Paris, 18 de Setembro de 1752 — Paris, 10 de Janeiro de 1833) foi um matemático francês. Fez importantes contribuições à estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática.

<sup>5</sup> Giovanni Girolamo Saccheri (Sanremo, 5 de setembro de 1667 — Milão, 25 de outubro de 1733) foi um padre jesuíta e matemático italiano. Ensinou Filosofia em Turim de 1694 a 1697, e filosofia, teologia e matemática em Pádua de 1697 até a sua morte. Publicou vários trabalhos incluindo *Quaesita geometrica* (1693), *Lógica demonstrativa* (1697) e *Neo-stática* (1708).

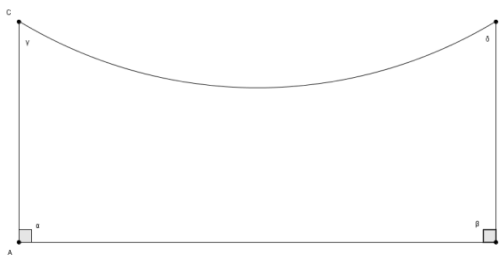


Figura 2: Quadrilátero de Saccheri.

As proposições de Saccheri são:

- Se nos extremos de um lado de um dado triângulo, forem levantadas perpendiculares a uma reta  $r$  que passa pelos pontos médios dos outros dois lados, formando um quadrilátero, então o quadrilátero formado é um quadrilátero de Saccheri, no qual o topo é o lado do triângulo de cujos extremos levantam-se as perpendiculares, ou seja, a base do triângulo;
- A soma dos dois ângulos do topo é a mesma que a dos três ângulos internos do triângulo

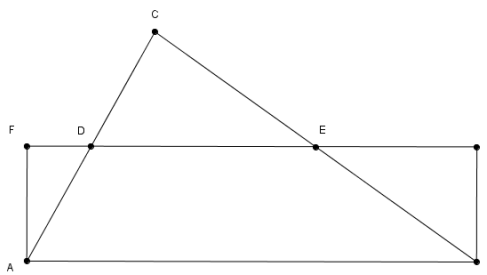


Figura 3: Ângulos de Topo do Quadrilátero ABGF.

Saccheri provou algumas equivalências ao quinto postulado:

- Todos os quadriláteros de Saccheri são retângulos;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$

Essas equivalências demonstradas por Saccheri permitem analisar que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser considerada de três maneiras excludentes:

- A soma ser igual a  $180^\circ$  (hipótese do ângulo reto);
- A soma ser maior que  $180^\circ$  (hipótese do ângulo obtuso);
- A soma ser menor que  $180^\circ$  (hipótese do ângulo agudo).

Saccheri também tentou provar que os quadriláteros por ele criados seriam retângulos mesmo que não se considerasse o quinto postulado. Desta forma, ambos os ângulos poderiam ser retos, agudos ou obtusos.

Saccheri tentou provar que os ângulos C e D só poderiam ser retos mediante demonstração por absurdo das possibilidades deles serem obtusos ou serem agudos. Ao tentar provar que os ângulos congruentes C e D não poderiam ser agudos, obteve vários resultados estranhos, mas que não chegavam a um absurdo.

Foi então que enunciou a proposição XXXIII: *“a hipótese de ambos os ângulos serem agudos é falsa, pois repugna a natureza da reta.”*(Saccheri apud Bonola 1911, p.43) Enunciou isso, pois nessa situação dos ângulos C e D serem agudos, as retas por CD e por AB deveriam ser “curvas”, o que era muito estranho para um observador que desejava manter-se num espaço euclidiano. Sem saber, Saccheri dava os primeiros passos em direção à Geometria Hiperbólica.

## E. O Nascimento da Geometria Hiperbólica

Encontrar uma demonstração do quinto postulado de Euclides sempre foi objetivo de muitos matemáticos. No entanto, todos os esforços para alcançá-lo foram frustrados. Essas tentativas não renderam o esperado, mas resultaram em caminhos na descoberta de novas geometrias por outros pesquisadores.

As tentativas de Gauss não demonstraram o postulado, mas serviram como base para outra geometria que o destacou dos demais matemáticos de sua época. No entanto, esse reconhecimento se deu postumamente, pois, durante sua vida, os resultados de sua pesquisa não tiveram grande repercussão visto que viveu durante a Inquisição, que adotava as teorias de Kant, cuja filosofia se opunha as suas. Kant defendia que a intuição se sobrepunha ao rigor das demonstrações, Gauss afirmava justamente o contrário. Por temer represálias, não discordava publicamente de Kant, cujas ideias eram tomadas como dogma pela igreja católica.

Nas discussões sobre o espaço euclidiano, Kant o denominou como “necessidade inevitável de pensamento” em seu livro “Crítica da razão pura”<sup>6</sup>. Contudo, as correspondências de Gauss com outros matemáticos mostraram que ele tentou provar o quinto postulado por redução ao absurdo, como fizeram Saccheri e Lambert. Mas, posteriormente, deduziu uma nova geometria formulando ideias e teoremas.

Num trecho de uma carta a F. A. Taurinus em 1824<sup>7</sup>, Gauss provou que a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado numa superfície de curvatura negativa constante é proporcional à área do triângulo. Ao mesmo tempo, os estudos de Lambert apontavam uma nova geometria que invalidava o postulado das paralelas.

---

<sup>6</sup> Citar o trabalho da professora que recorreu ao crítica da razão pura.

<sup>7</sup> “... A hipótese que a soma dos ângulos é menor que  $180^\circ$  leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori. ...

... Os teoremas dessa geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contêm nada de impossível. ...

... Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medi da linear (desconhecida por nós). ...”

Em outras correspondências com seu amigo Wolfgang Boylai, vê-se o empenho de ambos na demonstração do quinto postulado. Boylai enviou seu trabalho a Gauss, que contrariou suas expectativas encontrando um erro da prova. Mesmo diante da crítica, Wolfgang continuou estudando e, depois de quatro anos, encontrou uma prova que corroborava sua demonstração anterior. Gauss não comentou esse segundo estudo e Boylai publicou essas ideias num livro de dois volumes – “Tentamen”.

Posteriormente, o filho de Wolfgang Boylai - Johann Boylai – desde cedo se interessou por matemática e também se propôs a demonstrar o quinto postulado, mesmo diante dos apelos de desistência de seu pai. Depois de muito tempo nessa tentativa, em 1820, resolveu negar o quinto postulado e obteve resultados interessantes. Johann propunha a existência de uma geometria geral, em que a geometria euclidiana seria um caso particular.

Diante da negação do quinto postulado, surgiram duas possibilidades: (i) não existe qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora da reta, (ii) não existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto.

A primeira possibilidade é facilmente eliminada porque os quatro primeiros postulados afirmam a existência de retas paralelas. Então, aconselhado por seu pai, Johann publica um apêndice no Tentamen e envia suas ideias para Gauss, que se surpreende com a inteligência do filho de seu amigo e responde com uma carta.<sup>8</sup>

Outro estudioso que colaborou foi o russo Lobachewsky. Formou-se na Universidade de Kasan em 1813, tornou-se instrutor e, aos 21 anos, professor de sua universidade. Foi nomeado reitor aos 35 anos e é considerado o maior matemático russo de seu tempo. Dois anos antes da publicação de Johann, Lobachewsky já havia publicado suas conclusões sobre a geometria não euclidiana. E, em 1826, durante uma

---

<sup>8</sup> “Se eu começasse com a afirmação de que não ousou louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria; mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados dos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta e cinco anos. Por isto mesmo encontro-me surpreso ao extremo.” (v.[5] p. 49)”

Johann ficou desapontado por saber que outro fizera, antes dele, as mesmas descobertas. Durante sua vida não publicou mais nada, porém dedicou-se ao estudo de extensões de suas ideias em espaços tridimensionais e também na comparação de sua geometria não euclidiana com a trigonometria esférica conhecida na época. (v.[5] p.50)



conferência, negou o quinto postulado e afirmou que por um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela. Escreveu um artigo com essas ideias, mas foi rejeitado pela Academia de Ciências de S. Petersburgo.

Em 1829, publicou toda sua teoria das paralelas, que também não teve repercussão nem em seu país, nem fora dele, uma vez que o russo não era uma língua popular no meio acadêmico. Sua última publicação foi em francês, quando já estava cego.

O reconhecimento de seu esforço é importante, pois foi o primeiro a publicar sobre o assunto, não temendo os possíveis impactos à teoria Kantiana, apesar de Boylai e Gauss também estudarem o mesmo assunto durante o mesmo período. Em 1871, Klain batizou essas descobertas de “Geometria Hiperbólica”.

Outros nomes também se destacaram por trabalharem com a Geometria não Euclidiana, como Poincaré, Beltrami, Klein e Riemann, estes desenvolveram os temas aplicando a outras áreas da matemática. Beltrami, em 1826, provou que não era possível demonstrar o quinto postulado alegando que a geometria hiperbólica é tão consistente quanto à geometria euclidiana. Sendo assim, não haveria contrárias.

Essa nova visão da geometria, resultante da independência do postulado das paralelas, não seria mesmo facilmente aceita. Mas isso, Gauss já havia previsto.

## II. Geometria não Euclidiana

### A. A Geometria Neutra

Apresentaremos um conjunto de axiomas para a geometria plana equivalente ao sistema proposto por Hilbert. Assumimos que o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é um corpo completo ordenado. As geometrias euclidiana e hiperbólica diferem apenas quanto ao Postulado das Paralelas (e resultados que decorrem deste). Se considerarmos apenas os resultados que independem deste postulado, temos o que costumamos chamar de geometria neutra. As propriedades e resultados da geometria neutra são exatamente aqueles que são válidos tanto para o plano euclidiano quanto para o hiperbólico. Denotaremos o plano euclidiano por  $\mathbb{E}^2$  e o hiperbólico por  $\mathbb{H}^2$ . Quando não for importante distinguí-los, ou seja, quando estivermos tratando de resultados da geometria neutra, adotaremos a notação  $\mathbb{P}$ . Os elementos de  $\mathbb{P}$  são chamados de pontos e denotados por  $A; B; C; \dots$ . Certos subconjuntos de  $\mathbb{P}$  são chamados de retas, denotadas por  $a; b; c; \dots$ . Diremos que  $a$  passa por  $A$  se  $A \in a$ . A seguir, apresentaremos os cinco axiomas que são comuns às duas geometrias:

- Dados dois pontos distintos  $A; B \in \mathbb{P}$ , existe uma e apenas uma reta, denotada por  $\overleftrightarrow{AB}$ , passando por ambos os pontos.
- Toda reta possui ao menos dois pontos.
- Existem pelo menos três pontos não colineares.
- Existe uma função  $\mathbb{F}: \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|AB| = |(A; B)| \geq 0$  e  $|AB| = 0$  se, e somente se,  $A = B$ .
- Dada uma reta  $a$ , existe uma bijeção  $x: a \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|AB| = |x(A) - x(B)|; \forall A, B \in a$ . Assim, podemos identificar cada reta com o conjunto  $\mathbb{R}$  de modo que a distância de  $\mathbb{P}$  restrita a reta seja compatível com a estrutura da reta real. Chamamos a bijeção  $A \rightarrow x(A)$  de um sistema de coordenadas em  $a$ .

### B. Alguns Teoremas da Geometria Plana

- **Relação de Stewart**<sup>9</sup>

*Ceviana* é um segmento com uma extremidade em um vértice de um triângulo e a outra extremidade no lado oposto ou ao prolongamento deste. Assim, se a extremidade no lado oposto for o ponto médio, esta será a mediana; se a *ceviana* dividir o ângulo em

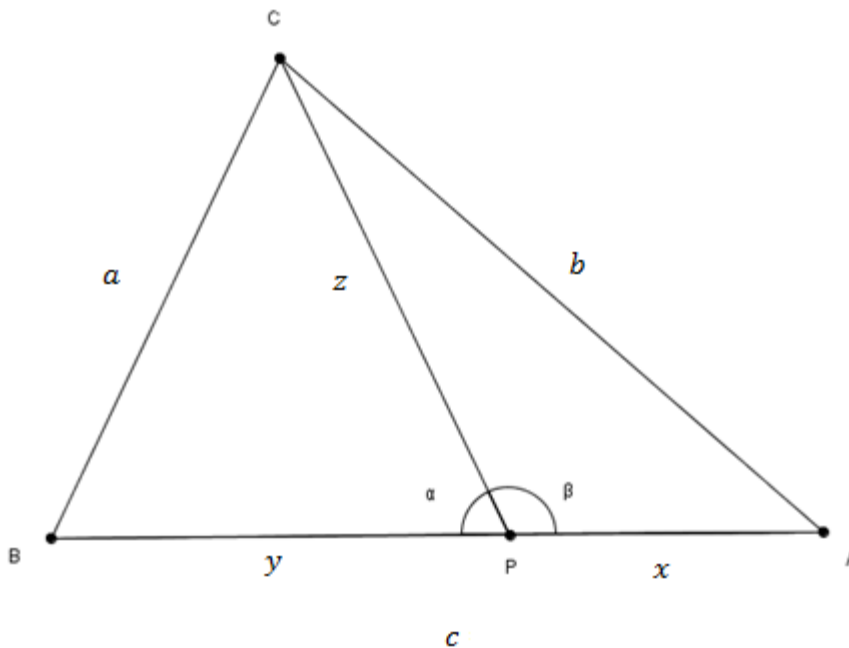
---

<sup>9</sup> Matthew Stewart nasceu no ano de 1717 em Rothesay, na parte inferior do Firth of Clyde, na Escócia, numa pequena ilha chamada Ilha Bute.

outros dois ângulos congruentes, esta será a bissetriz interna e se a *ceviana* for perpendicular ao lado oposto ou ao prolongamento deste, esta será a altura.

Teorema: Considere uma ceviana qualquer  $\overline{AP}$  de um triângulo  $ABC$ . Considerando as medidas indicadas na figura abaixo, chamamos de *Relação de Stewart* a seguinte igualdade:

$$a^2x + b^2y - z^2c = xyc$$



Demonstração: Como  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos suplementares,  $\cos(\beta) = -\cos(\alpha)$ . Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $ABD$  e  $ACD$ , temos o sistema:

$$\begin{cases} a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(\alpha) \\ b^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(\alpha) \\ b^2 = x^2 + z^2 - 2xz[-\cos(\alpha)] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2x = y^2x + z^2x - 2xyz\cos(\alpha) \\ b^2y = x^2y + z^2y + 2xyz\cos(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow$$

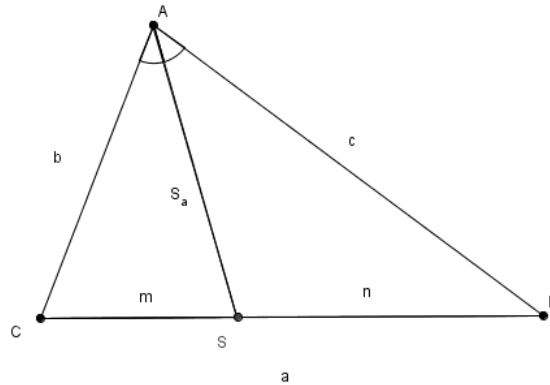
$$a^2x + b^2y = y^2x + x^2y + z^2x + z^2y \Leftrightarrow$$

$$a^2x + b^2y = xy(y + x) + z^2(x + y) \Leftrightarrow a^2x + b^2y = xyc + z^2c \Leftrightarrow$$

$$a^2x + b^2y - z^2c = xyc$$

■

**Teorema:** A bissetriz interna ( $s_a$ ) relativa ao lado  $a$  de um triângulo  $ABC$  pode ser dada pela fórmula  $s_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)}$  em que  $p = \frac{a+b+c}{2}$  é o semi-perímetro.



**Demonstração:** Pelo teorema da bissetriz interna (TBI), temos:

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{c} = \frac{a-n}{n} \\ \frac{b}{c} = \frac{m}{a-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{a \cdot c}{b+c} (*) \\ m = \frac{a \cdot b}{b+c} \end{cases}$$

Aplicando a relação de Stewart, temos:

$$b^2 n + c^2 m - (s_a)^2 a = amn \Leftrightarrow$$

$$b^2 \frac{ac}{b+c} + c^2 \frac{ab}{b+c} - (s_a)^2 a = a \frac{ab}{b+c} \frac{ac}{b+c} \Leftrightarrow$$

$$(s_a)^2 = \frac{b^2 c}{b+c} + \frac{c^2 b}{b+c} - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \Leftrightarrow$$

$$(s_a)^2 = \frac{bc[b(b+c) + c(b+c) - a^2]}{(b+c)^2} \Leftrightarrow$$

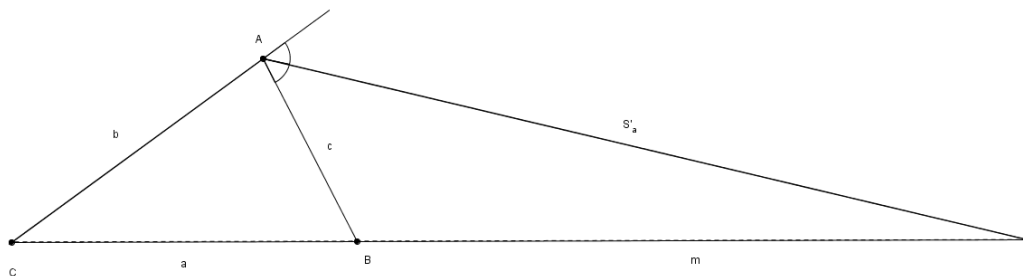
$$(s_a)^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2] \Leftrightarrow (s_a)^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} (b+c-a)(b+c+a) \Leftrightarrow$$

$$(s_a)^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} 2(p-a)2p \Leftrightarrow (s_a)^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} \Leftrightarrow$$

$$s_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)}$$

■

**Teorema:** A bissetriz externa ( $S_a$ ) relativa ao lado  $a$ , se  $b > c$ , de um triângulo  $ABC$  pode ser dada pela fórmula  $S_a = \frac{2}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$  em que  $p = \frac{a+b+c}{2}$  é o semi-perímetro.



Demonstração: Pelo teorema da bissetriz interna (TBI), temos:

$$\frac{b}{c} = \frac{a+m}{m} \Leftrightarrow m = \frac{ac}{b-c} (*)$$

Aplicando a relação de Stewart, temos:

$$b^2m + (S_a)^2a - c^2(a+m) = am(a+m) \Leftrightarrow$$

$$b^2 \frac{ac}{b-c} + (S_a)^2a - c^2 \left( a + \frac{ac}{b-c} \right) = a \frac{ac}{b-c} \left( a + \frac{ac}{b-c} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{ab^2c}{b-c} + (S_a)^2a - c^2 \left( \frac{ab}{b-c} \right) = \frac{a^2c}{b-c} \left( \frac{ab}{b-c} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{b^2c}{b-c} + (S_a)^2 - \left( \frac{bc^2}{b-c} \right) = \frac{a^2bc}{(b-c)^2} \Leftrightarrow (S_a)^2 = \frac{a^2bc + bc^2(b-c) - b^2c(b-c)}{(b-c)^2} \Leftrightarrow$$

$$(S_a)^2 = \frac{bc}{(b-c)^2} [a^2 + c(b-c) - b(b-c)] \Leftrightarrow (S_a)^2 = \frac{bc}{(b-c)^2} [a^2 - (b-c)^2]$$

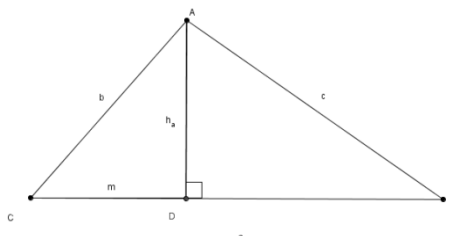
$$(S_a)^2 = \frac{bc}{(b-c)^2} [a+b-c][a-b+c] \Leftrightarrow (S_a)^2 = \frac{bc}{(b-c)^2} 2(p-c)2(p-b) \Leftrightarrow$$

$$S_a = \frac{2}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

■

• **Fórmula de Herão (Heron)**

Teorema: A altura relativa ao lado  $a$  ( $h_a$ ) de um triângulo  $ABC$  de lados  $a, b$  e  $c$  pode ser dada pela fórmula  $h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  em que  $p = \frac{a+b+c}{2}$  é o semi-perímetro.



Demonstração: Sendo  $2p = a + b + c$  o perímetro do triângulo, podemos escrever:

$$* \begin{cases} a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c) \\ a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b) \\ b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a) \end{cases}$$

Por Pitágoras nos triângulos  $ABH$  e  $ACH$ , temos o sistema:

$$\begin{cases} b^2 = m^2 + (h_a)^2 \\ c^2 = a^2 \pm 2am + m^2 + (h_a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}$$

Substituindo o valor de  $m$  na primeira equação do sistema, temos:

$$\frac{(c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2} + (h_a)^2 = b^2 \Leftrightarrow 4a^2(h_a)^2 = 4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$4a^2(h_a)^2 = (2ab + c^2 - a^2 - b^2)(2ab - c^2 + a^2 + b^2) \Leftrightarrow$$

$$4a^2(h_a)^2 = [c^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - c^2] \Leftrightarrow$$

$$4a^2(h_a)^2 = (c + a - b)(c - a + b)(a + b + c)(a + b - c) \Leftrightarrow^*$$

$$4a^2(h_a)^2 = 2(p - b)2(p - a)2p \cdot 2(p - c) \Leftrightarrow$$

$$a^2(h_a)^2 = 4p(p - a)(p - b)(p - c) \Leftrightarrow h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

■

Teorema: A área de um triângulo  $ABC$  de lados  $a, b$  e  $c$  pode ser expressa por  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  em que  $p = \frac{a+b+c}{2}$  é o semi-perímetro.

Demonstração: Como  $A = \frac{b \cdot h}{2}$  e, do teorema anterior, temos:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

■

### C. Geometria Hiperbólica: Modelo e Consistência

Para construirmos um modelo para a geometria hiperbólica, lançaremos mão dos recursos de geometria diferencial, que por sua vez, do ponto de vista axiomático, estão baseados na construção dos números reais  $\mathbb{R}$  e em resultados de geometria euclidiana plana. Assim, se assumirmos a consistência dos números reais e da geometria euclidiana, ou seja, que a partir dos axiomas de um corpo ordenado completo e a partir dos axiomas da geometria euclidiana não podemos demonstrar resultados contraditórios (inexistência de paradoxos), então podemos assumir que a axiomática do plano hiperbólico também é consistente.

Existem diversos modelos interessantes para a geometria hiperbólica, cada qual com suas propriedades. Assim como ocorre com mapas distintos, dependendo da circunstância e dos objetos que queiramos estudar, podemos facilitar enormemente o nosso trabalho escolhendo o modelo mais adequado. Contudo, neste texto exploraremos com um mínimo de detalhes apenas o modelo conhecido como semi-plano de Poincaré ou Modelo de Poincaré. Realçamos ainda que a palavra modelo é empregada aqui no sentido pleno do termo, ou seja: qualquer afirmação que seja provada a partir de algum modelo pode ser demonstrada a partir do corpo de axiomas da teoria. Em outras palavras, sob o ponto de vista de conteúdos, nada perdemos ao trabalharmos diretamente com os modelos, sem fazermos menção à estrutura axiomática.



**D. Alguns Teoremas da Geometria Hiperbólica:**

- **Lema:** *Na geometria hiperbólica, existe triângulo com defeito positivo.*

Demonstração: Seja  $\ell$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $\ell$  tal que por  $P$  existam ao menos duas paralelas a  $\ell$ . Seja  $\overline{PQ}$  a altura da reta  $\ell$  com  $Q$  pertencente a  $\ell$  e  $m$  a reta passando por  $P$  e perpendicular a  $\overline{PQ}$ . Como  $m$  é paralela a  $\ell$ , seja  $n$  outra paralela à  $\ell$  passando por  $P$ . Escolhemos um ponto  $Y$  pertencente à reta  $m$  e  $X$  pertencente à reta  $n$  tais que  $X$  esteja contido no interior do ângulo  $YPQ$ . Seja  $Z$  um ponto pertencente à reta  $\ell$  no mesmo lado de  $\overline{PQ}$  que os pontos  $X$  e  $Y$ . Escolhemos um ponto  $R$  pertencente à reta  $\overline{QZ}$  tal que  $m(\widehat{Q\hat{R}P}) = m(\widehat{X\hat{P}Y})$ . Se mostrarmos que  $m(\widehat{R\hat{P}Q}) < m(\widehat{Q\hat{P}X})$ , concluiremos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\triangle RPQ) &= \pi - m(\widehat{R\hat{P}Q}) - m(\widehat{P\hat{Q}R}) - m(\widehat{Q\hat{R}P}) > \pi - m(\widehat{Q\hat{P}X}) - \frac{\pi}{2} - m(\widehat{X\hat{P}Y}) \\ &= \frac{\pi}{2} - m(\widehat{Q\hat{P}Y}) = 0 \end{aligned}$$

Mas dizer que  $m(\widehat{R\hat{P}Q}) < m(\widehat{Q\hat{P}X})$  é equivalente a termos  $R$  pertencente ao interior do ângulo  $QPX$  e se isto não acontecesse, teríamos  $\overline{PR}$  e  $\ell$  de lados opostos da reta  $n$ , implicando em termos as retas  $\overline{PR}$  e  $n$  se interceptando, por absurdo, em um segundo ponto distinto de  $P$ . Assim, segue que  $R$  pertence ao interior do ângulo  $QPX$  e, conseqüentemente,  $m(\widehat{R\hat{P}Q}) < m(\widehat{Q\hat{P}X})$ .

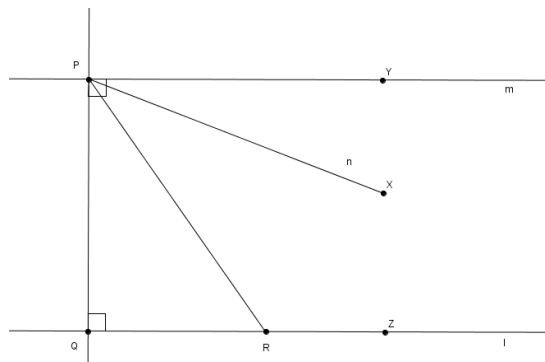


Figura 4: Ilustração Lema 1.

■

- Definição: Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n; n \geq 3$  uma seqüência de pontos distintos em  $\mathbb{P}$  tais que:

$$\overline{A_i A_{i+1}} \cap \overline{A_j A_{j+1}} = \begin{cases} A_{i+1}, & \text{se } i + 1 = j \\ A_{j+1}, & \text{se } j + 1 = i \\ \emptyset, & \text{se } |i - j| \neq 1 \end{cases}$$

Onde entendemos que se  $i = n$  então  $i + 1 = 0$ . Então, a união dos segmentos:

$\mathcal{P}_n = \cup_{i=1}^n \overline{A_i A_{i+1}}$  é dito um polígono de  $n$  lados, com vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . O polígono é dito estritamente convexo se para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  todos os vértices  $A_j$ , com  $j = i, i + 1$  estiverem contidos em um único semi-plano  $H_{\overline{A_i A_{i+1}}}$  definido pela reta  $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$ . Diremos que o polígono é convexo se admitirmos o caso limite em que  $A_{i+2}$  ou  $A_{i-1}$  não estejam contidos no semi-plano  $H_{\overline{A_i A_{i+1}}}$  que contém os outros vértices, mas na reta  $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$ . Em qualquer um destes casos, chamamos  $\cap_{i=1}^n H_{\overline{A_i A_{i+1}}}$  de interior de  $\mathcal{P}_n$ .

- Definição: O defeito  $\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n)$  de um polígono convexo  $\mathcal{P}_n$  é o número  $(n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n m(\theta_i)$ , onde  $\theta_i$  é o ângulo formado pelas semi-retas  $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$  e  $\overleftrightarrow{A_i A_{i-1}}$ .

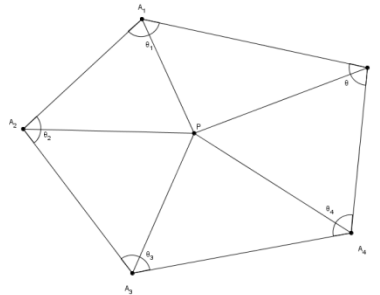


Figura 5: Decomposição de um polígono com defeito positivo.

- Teorema: *Sejam  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  dois polígonos convexos tais que  $\mathcal{P} \subset \text{int}(\mathcal{P}')$ . Então  $\mathfrak{D}(\mathcal{P}) \leq \mathfrak{D}(\mathcal{P}')$ .*

Demonstração: Seja  $P \in \text{int}(\mathcal{P}) \subset \text{int}(\mathcal{P}')$ . Sejam  $n$  e  $m$  os números de lados de  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  respectivamente. Unimos  $P$  com cada um dos vértices de  $\mathcal{P}'$ , de modo que decomposemos  $\mathcal{P}'$  em triângulos. Considere dois vértices consecutivos  $A'_i, A'_{i+1}$  de  $\mathcal{P}'$  e o triângulo correspondente  $PA'_iA'_{i+1}$ . O lado  $\overline{PA'_i}$  desse triângulo intercepta o lado  $\overline{A_{j_i}A_{j_i+1}}$  de  $\mathcal{P}$  em um ponto  $E_i$ , para algum  $j$  e  $i$ , e o lado  $\overline{PA'_{i+1}}$  algum outro lado  $\overline{A_{j_i+k_i}A_{j_i+k_i+1}}$  em um ponto  $D_{i+1}$ . Para cada  $A_{l,i}$ , com  $j_i < l < j_i + k_i + 1$ , consideremos a semirreta  $\overrightarrow{PA_{l,i}}$  e sua intersecção  $B_{l,i} = \overrightarrow{PA_{l,i}} \cap \mathcal{P}'$ . Temos então que o triângulo  $PB_{l,i}B_{l,i+1}$  pode ser decomposto como a união  $\Delta PA_{l,i}A_{l+1,i} \cup \Delta A_{l,i}A_{l+1,i}B_{l,i} \cup \Delta A_{l+1,i}B_{l,i}B_{l+1,i}$ . Similarmente, o triângulo  $PB_{j_i+1,i}A_i$  pode ser decomposto nos triângulos  $B_{l,i}B_{l+1,i}$  e o triângulo  $PB_{j_i+k_i,i}A'_{i+1}$  pode ser decomposto nos triângulos  $PA_{j_i+k_i,i}D_{i+1} \cup A_{j_i+k_i,i}D_{i+1}A_{i+1} \cup A_{j_i+k_i,i}A'_{i+1}B_{j_i+k_i,i}$ . Mas os triângulos:

$$PA_{l,i}A_{l+1,i}; A_{l,i}A_{l+1,i}B_{l,i}; PB_{l,i}B_{l+1,i}, i = 1, 2, \dots, m,$$

$$j_i < l < j_i + k_i + 1;$$

$$PA_{j_i+1,i}E_i; A_{j_i+1,i}E_iA'_i; A_{j_i+1,i}A'_iB_{j_i+1,i}, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$PA_{j_i+k_i,i}D_{i+1}; A_{j_i+k_i,i}D_{i+1}A'_{i+1}; A_{j_i+k_i,i}A'_{i+1}B_{j_i+k_i,i}, i = 1, 2, \dots, m;$$

decompõem  $\mathcal{P}'$ . Enquanto os triângulos:

$$PA_{l,i}A_{l+1,i}; PA_{j_i+1,i}E_i; PA_{j_i+k_i,i}D_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m$$

decompõem o polígono  $\mathcal{P}$ . Enfim, encontramos uma decomposição em triângulos de  $\mathcal{P}'$  que contém uma decomposição de  $\mathcal{P}$ . Como o defeito de um polígono é a soma dos defeitos dos triângulos que o compõem, segue que  $\mathfrak{D}(\mathcal{P}') \geq \mathfrak{D}(\mathcal{P})$ .



- Teorema: *Todo h-triângulo possui defeito positivo ou, equivalentemente, todo h-triângulo possui a soma dos ângulos internos menores que  $180^\circ$ .*

Demonstração: Consideraremos que um  $\Delta ABC$  tenha defeito nulo. A partir de  $A$ , traçamos a semirreta  $\overrightarrow{AD}$  com  $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{CBA})$ ,  $D$  e  $C$  de lados opostos da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $m(\overline{AD}) = m(\overline{BC})$ . Segue que o triângulo  $ABD$  é congruente ao triângulo original  $ABC$ , portanto este também tem defeito nulo. Colocando lado a lado cópias do polígono  $ADBC$ , obtemos polígonos tão grandes como queiramos, sempre com defeito nulo. Podemos nesse processo aumentar o polígono até que este contenha em seu interior um triângulo  $\mathcal{T}$  dado qualquer. Mas pelo teorema anterior, o defeito de  $\mathcal{T}$  deve ser menor que o do polígono que o contém, ou seja, defeito nulo, um absurdo, pois sabemos que existe ao menos um triângulo com defeito positivo.

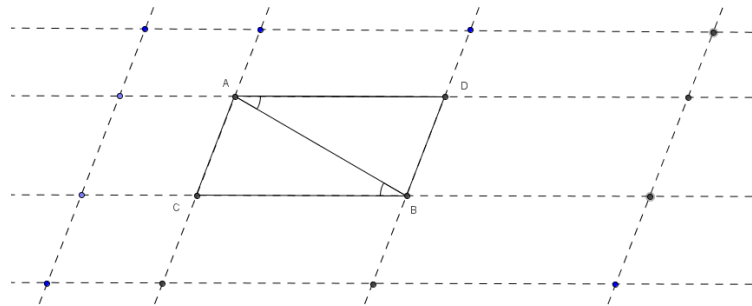


Figura 6: h-triângulo com defeito positivo.

■

- Teorema: *Em geometria hiperbólica, dois triângulos semelhantes são congruentes (caso AAA).*

Demonstração: Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos semelhantes. Vamos supor por absurdo que estes não sejam congruentes. Então nenhum lado é congruente aos seus correspondentes, pois, do contrário, o segundo critério de congruência nos garantiria a congruência dos triângulos (caso LLL). Segue, então, que um deles tem dois lados maiores que os seus correspondentes no outro triângulo. Sem perda de generalidade, vamos supor que  $m(\overline{AB}) > m(\overline{A'B'})$  e  $m(\overline{AC}) > m(\overline{A'C'})$ .

Tomamos então um ponto  $B'' \in \overline{AB}$  e  $C'' \in \overline{AC}$  tais que  $m(\overline{A'B'}) = m(\overline{A''B''})$  e  $m(\overline{A'C'}) = m(\overline{A''C''})$ . Pelo primeiro critério de congruência, os triângulos  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  são congruentes, donde segue que:

$$m(\widehat{A''B''C''}) = m(\widehat{A'B'C'}) = m(\widehat{ABC}) \text{ e } m(\widehat{A''C''B''}) = m(\widehat{A'C'B'}) = m(\widehat{ACB}).$$

Agora, se considerarmos o quadrilátero  $BB''C''C$ , temos que seu defeito é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(BB''C''C) &= 2\pi - m(\widehat{BB''C''}) - m(\widehat{B''C''C}) - m(\widehat{C''CB}) - m(\widehat{CBB''}) \\ &= 2\pi - m(\widehat{CBA}) - (\pi - m(\widehat{A''B''C''})) - (\pi - m(\widehat{A''C''B''})) \\ &\quad - m(\widehat{ACB}) = 0 \end{aligned}$$

Um absurdo, pois todo polígono hiperbólico tem defeito positivo. ■

### III. O Modelo de Poincaré

Neste modelo, o plano é mapeado num disco limitado denominado círculo dos infinitos. As retas euclidianas são transformadas em circunferências (círculos) ortogonais (circunferências que possuem retas tangentes no ponto de intersecção perpendiculares entre si) ao círculo dos infinitos.

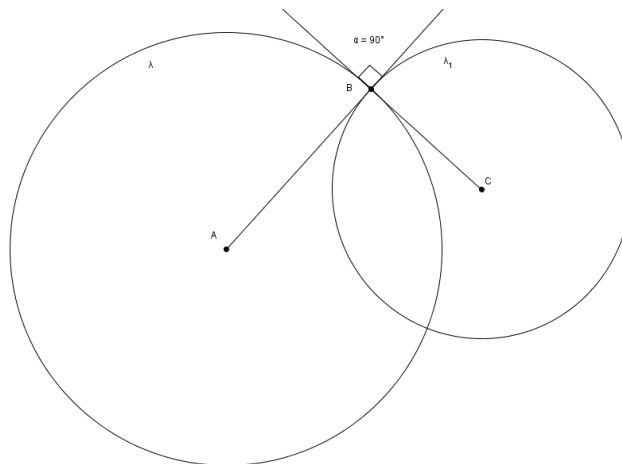


Figura 7: As circunferências  $\lambda$  e  $\lambda_1$  são ortogonais

Abaixo ilustramos o postulado de determinação de uma reta no modelo de Poincaré.

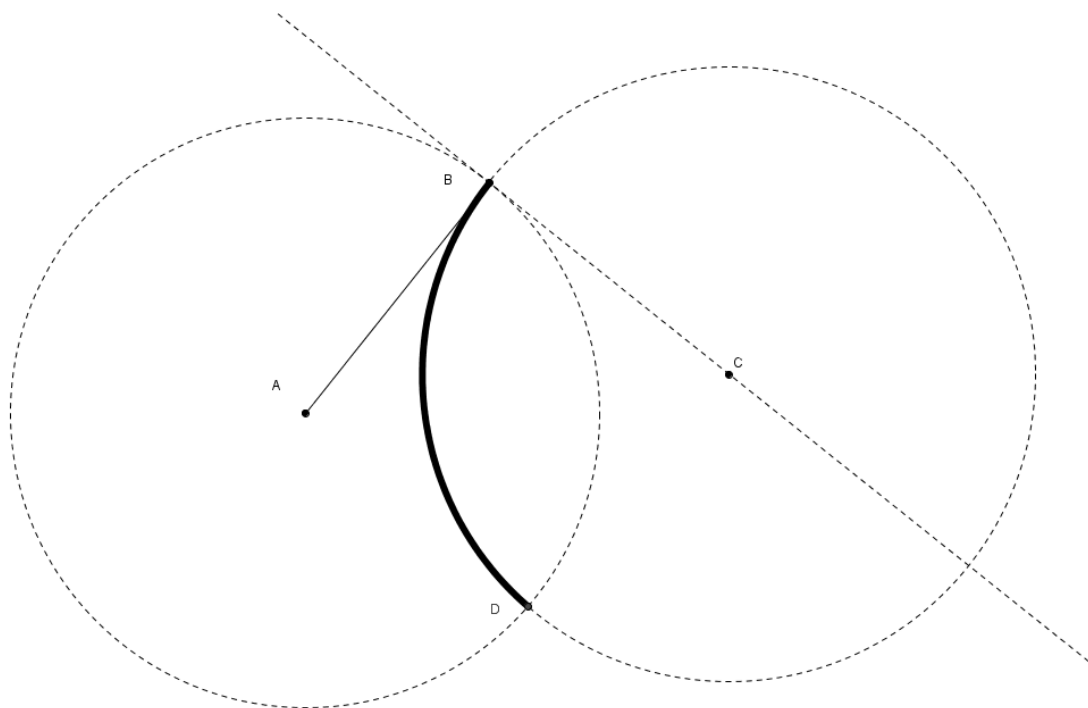


Figura 8: As retas no modelo de Poincaré são arcos de circunferências ortogonais ao círculo dos infinitos

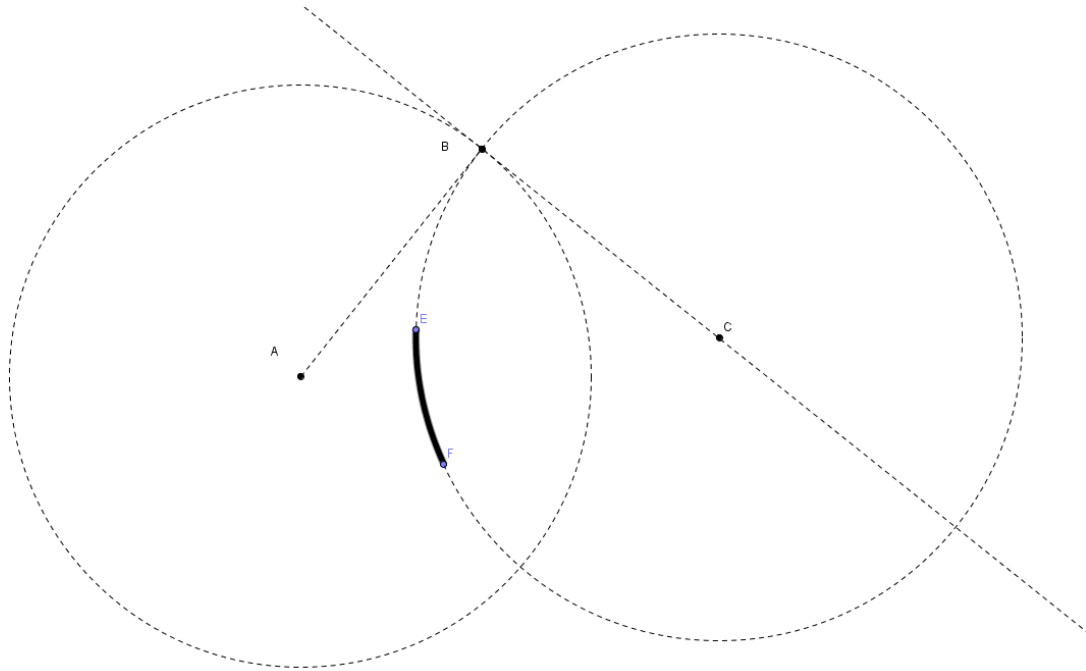


Figura 9: Segmentos de reta no modelo de Poincaré.

Neste modelo, temos uma infinidade de paralelas a uma dada reta, passando por um ponto fora desta, contrariando assim, neste modelo, o V postulado de Euclides.

Abaixo ilustramos (pelos menos) duas retas paralelas (t e s) à reta r passando por um único ponto (C).

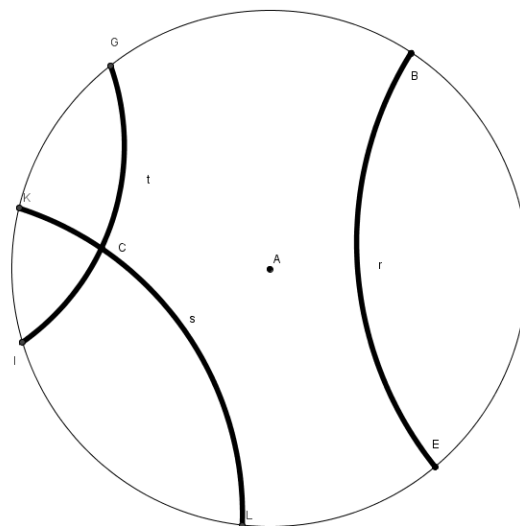


Figura 10: retas r e s, paralelas à reta r, passando por C.

Ao considerarmos duas retas no modelo de Poincaré que se interceptam num ponto P, conforme figura abaixo, a medida do ângulo  $E\hat{C}D$  é definida como sendo a



menor medida do ângulo euclidiano formado pelas retas tangentes aos arcos que se cruzam em C.

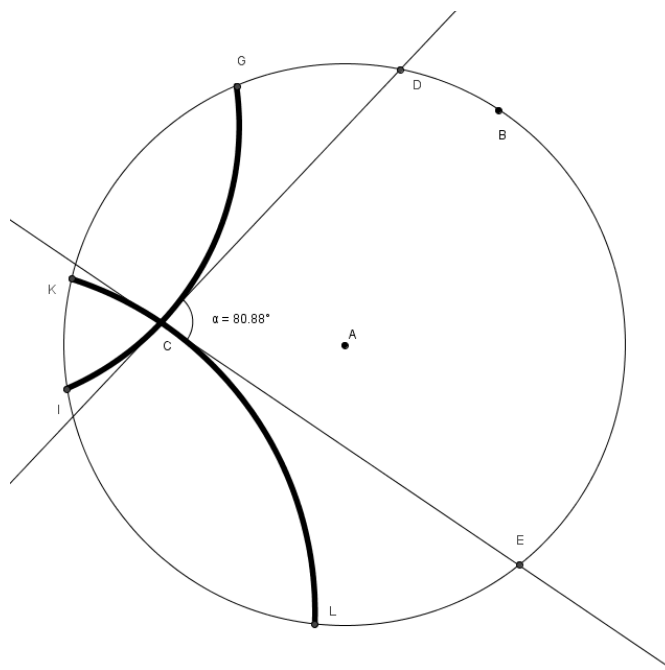


Figura 11: O ângulo entre duas retas no modelo de Poincaré é definido como o ângulo euclidiano formado pelas duas retas tangentes às circunferências em seu ponto de intersecção.

Constataremos na atividade proposta no laboratório de informática que no modelo de Poincaré a soma dos ângulos internos é *sempre menor* do que  $180^\circ$ . Este é apenas um dos primeiros resultados surpreendentes que nos reserva este novo mundo.

Chamamos de *Defeito* de um triângulo ao que falta à soma dos seus ângulos internos para chegar a  $180^\circ$ . Na geometria hiperbólica, o defeito de um triângulo será sempre positivo e menor do que  $180^\circ$ , no caso de igualdade, o triângulo terá todos os ângulos iguais à zero, mas área diferente de zero; ainda assim será um triângulo e não um triângulo degenerado num segmento de reta, como na geometria euclidiana.

Na geometria euclidiana, dois triângulos que têm os mesmos ângulos são chamados semelhantes. Podem ser de vários "tamanhos" e terão a razão entre suas áreas proporcionais ao quadrado da razão entre seus lados. Na geometria hiperbólica, um triângulo fica perfeitamente determinado pelo valor de seus ângulos. *Não existem triângulos semelhantes*, ou melhor, dois triângulos semelhantes são congruentes, isto é, iguais. É interessante lembrar que Wallis, famoso matemático inglês do século XVII,

tentou provar o quinto postulado de Euclides postulando a existência de dois triângulos semelhantes. Infelizmente, os dois resultados são equivalentes: *quinto postulado se e somente se existem triângulos semelhantes*. Mais uma vez a sonhada prova foi adiada e o raciocínio circular e vicioso prevaleceu. Ora, se dois triângulos com os mesmos ângulos são congruentes, terão a mesma área. Podemos então deduzir que a área de um triângulo na geometria hiperbólica depende apenas dos seus ângulos. De fato isto é verdade, e esta relação é dada pela fórmula:

$$A = \frac{\pi \cdot k^2 \cdot D}{180}$$

Onde  $A$  representa a área do triângulo,  $D$  o seu defeito e  $k$  é uma constante de proporcionalidade que depende da unidade de medida no modelo. Observe que nas geometrias hiperbólicas existe uma área máxima possível para todos os triângulos. Esta área se dá quando o defeito  $D = 180^\circ$ , o que equivale a um triângulo com todos os ângulos iguais a zero.

Distâncias entre dois pontos, independente do modelo utilizado, sempre serão distorcidas, pois as distâncias devem crescer à medida que os pontos se aproximam do círculo dos infinitos. Temos que criar uma fórmula para distância que reproduza esta característica destes modelos, isto é, que transformam o plano todo em um disco limitado, além disso, será preciso que a nossa nova fórmula para distância satisfaça as propriedades tradicionais de uma distância:

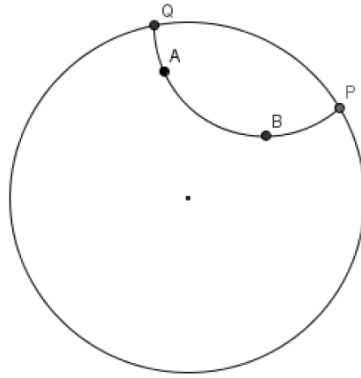
- Seja sempre positiva;
- Seja igual a zero apenas quando os dois pontos são coincidentes e;
- Seja também simétrica, pois a distância de um ponto  $A$  a um ponto  $B$  tem que ser igual à distância de  $B$  a  $A$ .

Chamamos de **razão cruzada** entre dois pontos do Disco de Poincaré, ao produto:

$$R(AB) = \left| \frac{AQ}{BQ} \times \frac{BP}{AP} \right|$$

Porém, ainda não podemos utilizar essa fórmula para a distância de dois pontos no modelo de Poincaré, pois  $R(AA)=1$  e não a "0" como desejaríamos. Finalmente, podemos encontrar uma fórmula apropriada para a distância entre dois pontos no disco de Poincaré, se tomarmos o logaritmo natural da Razão Cruzada, isto é,

$$R(AB) = \ln \left| \frac{AQ}{BQ} \times \frac{BP}{AP} \right|$$





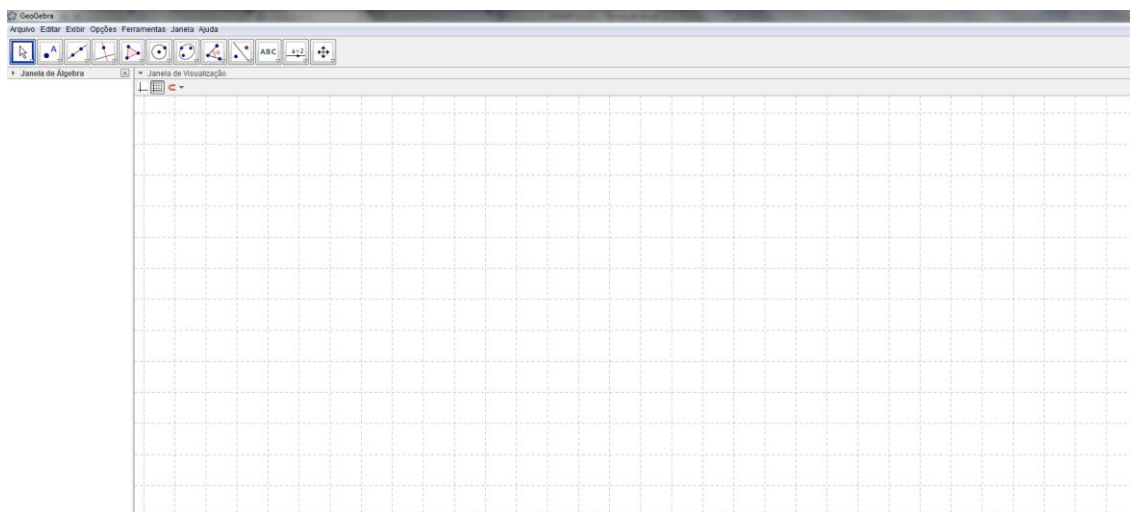
#### IV. Atividade no Software Geogebra – Medida dos Ângulos Internos de um h-triângulo – Modelo de Poincaré

Objetivos: Constatar graficamente que a soma dos ângulos internos de um h-triângulo é menor que  $180^\circ$  ou, equivalentemente, que um h-triângulo possui defeito positivo.

Laboratório de informática: Uso do software livre Geogebra


Conhecimentos básicos: propriedades das retas tangentes na geometria euclidiana, familiaridade com o software.

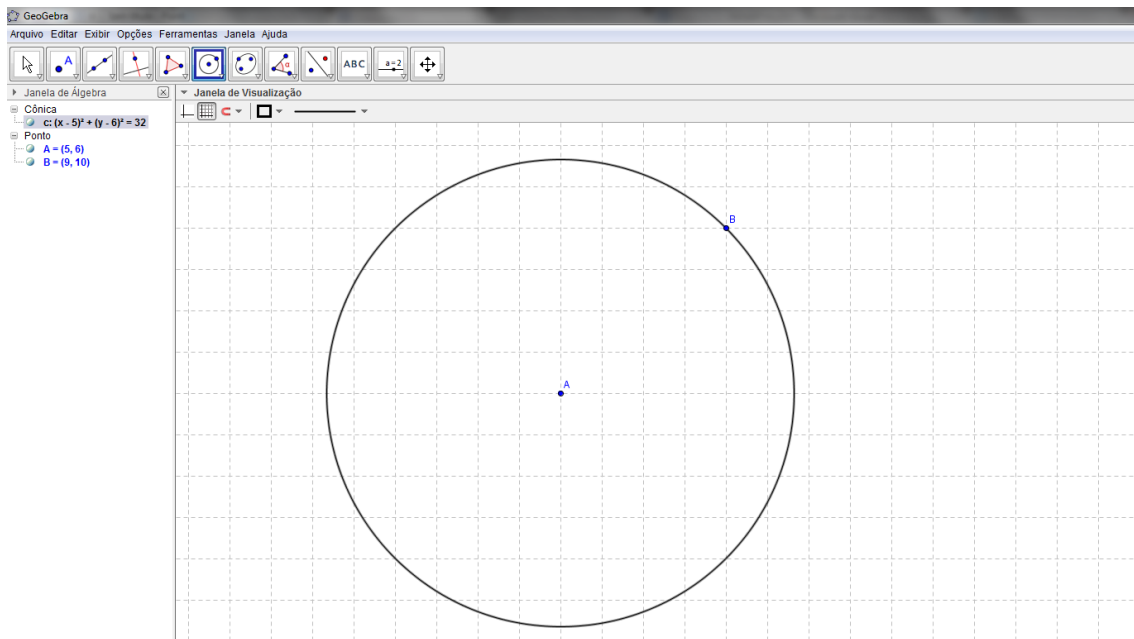
Inicialmente, sugerimos desabilitar os eixos coordenados clicando no ícone  e habilitar a malha no ícone . Com isso, nossa tala inicial será:



Construção 1: Círculo dos infinitos.


No menu principal, selecionar a construção de uma circunferência dado seu centro e a

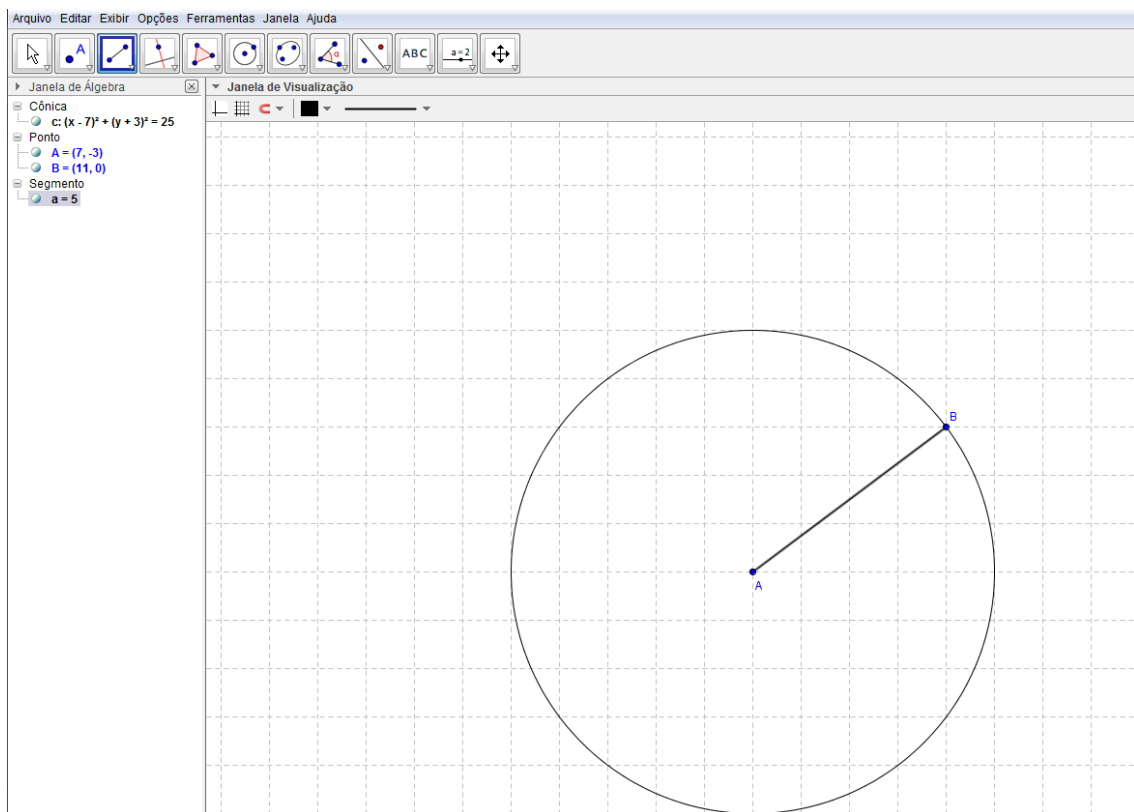
medida do seu raio no ícone .




Construção 2: Três círculos ortogonais aos círculos dos infinitos. Explicitaremos apenas a construção de um deles. Os outros dois, seguem de maneira análoga.

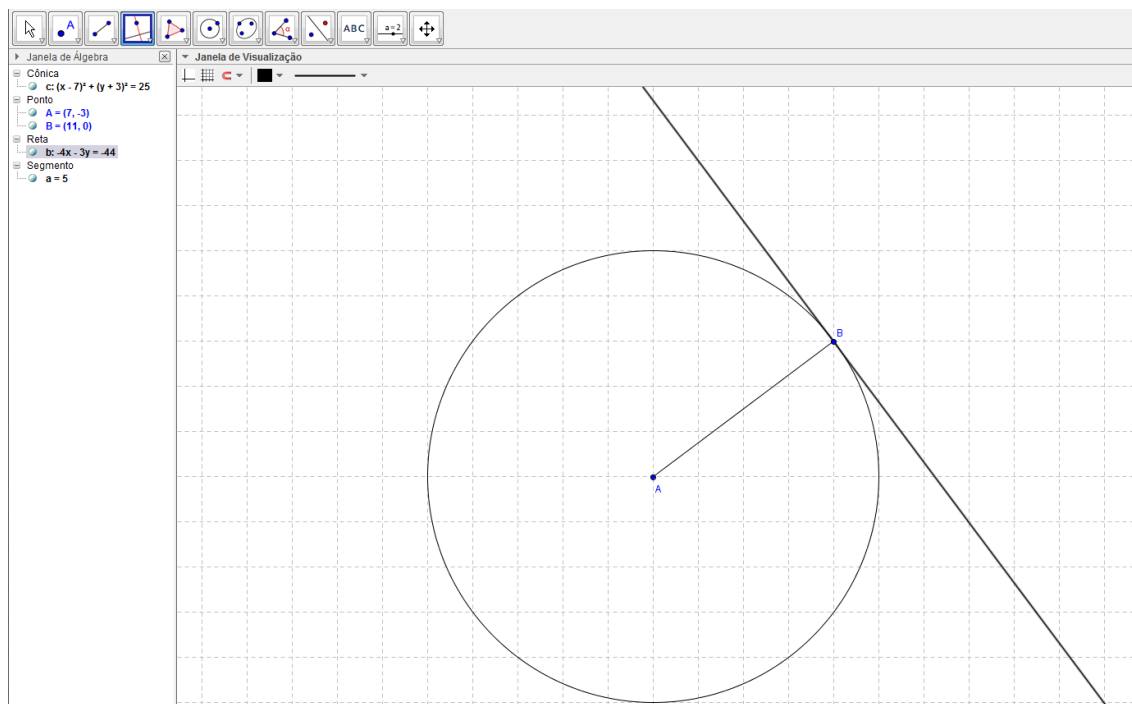
No menu principal, selecionar a construção de um segmento de reta dado dois pontos, A

e B, no ícone 



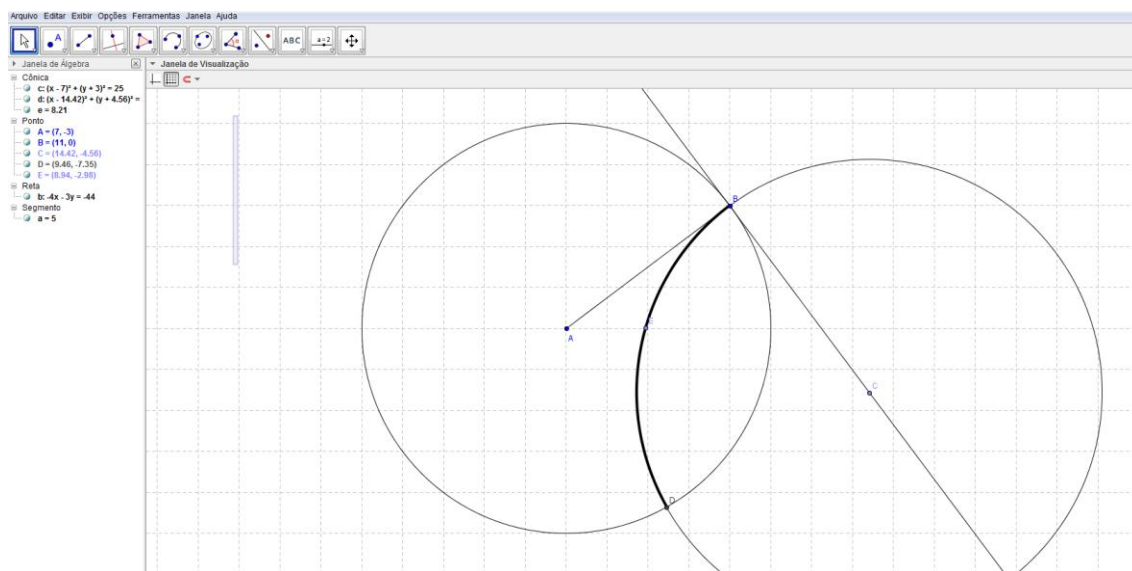
Pelo ponto B, construir uma reta tangente à circunferência. No menu principal

selecionar o ícone .

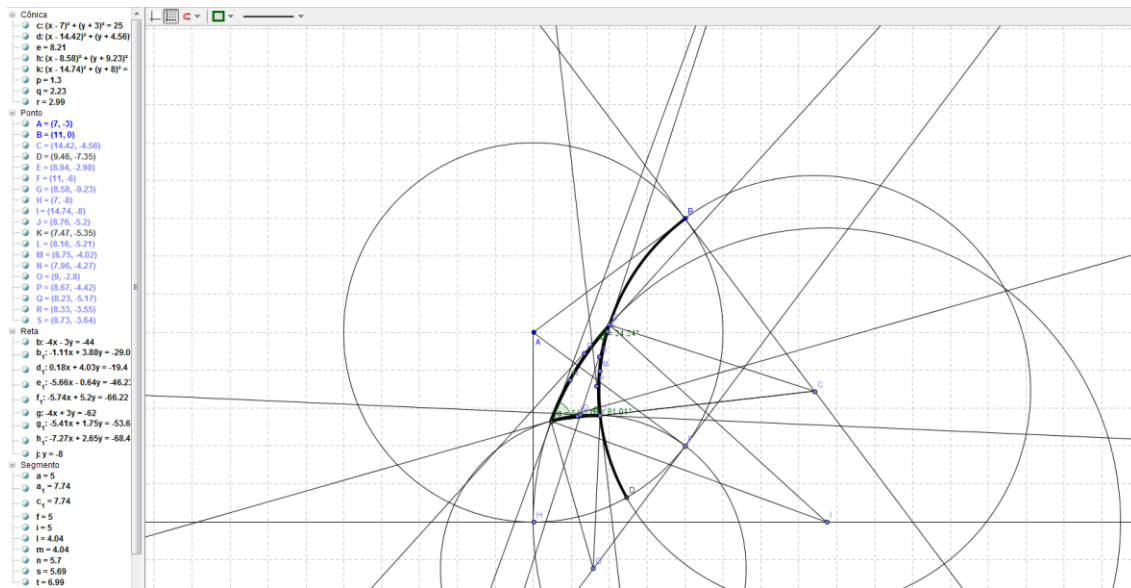
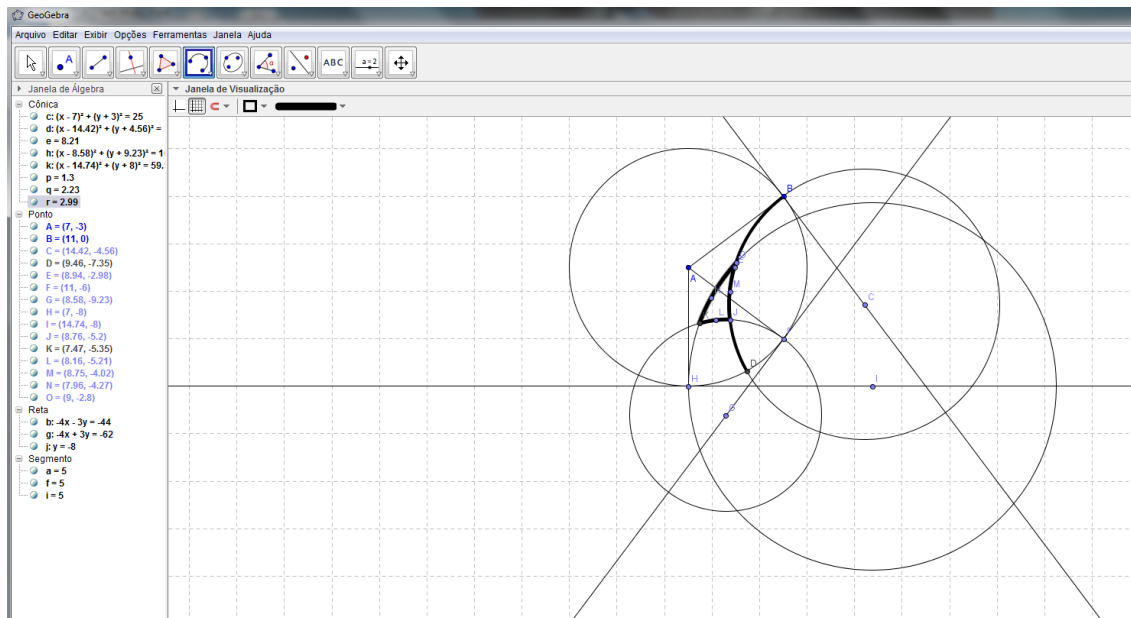


A seguir, construir um círculo ortogonal ao círculo dos infinitos passando por B. No

menu principal, selecionar o ícone .



Construção 3: Após os três círculos ortogonais ao círculo dos infinitos, os ângulos internos de um h-triângulo é definido como o ângulo euclidiano formado pelas retas tangentes aos vértices do h-triângulo formado.



## V. Referência Bibliográfica

**A.C. Morgado, E. Wagner, M. Jorge. 1990.** *Geometria I*. Rio de Janeiro : Francisco Alves Editora S/A, 1990.

**Aranha, Álvaro Zimmermann e Rodrigues, Manoel Benedito. 1997.** *Exercícios de Matemática volume 6 - Geometria Plana*. São Paulo : Policarpo, 1997. 372.7076.

**Araújo, Paulo Ventura. 1999.** *Curso de Geometria*. Lisboa : Gradiva Publicações Ltda., 1999.

**Bicudo, Irineu. 2009.** *Os Elementos*. São Paulo : Fundação Editora da UNESP, 2009.

**Braz, Fernanda Martins. 2009.** *História da Geometria Hiperbólica*. Belo Horizonte : s.n., 2009.

**Eves, Howard. 1997.** *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Boston : Dover Publications, 1997. 978-0-486-69609-6.

—. **2008.** *introdução à História da Matemática*. Campinas : Unicamp, 2008. 85-268-0657-2.

**Ferreira, Luciano. 2011.** Uma Proposta de Ensino de Geometria Hiperbólica. Maringá : s.n., 2011.

—. **2011.** *UMA PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA*. Maringá : s.n., 2011.

**Firer, Marcelo. 2007.** Geometria Neutra e uma Pitada de Geometria Hiperbólica. Campinas : s.n., 2007.

—. **2007.** *Geometria Neutra e uma Pitada de Hiperbólica*. Campinas : s.n., 2007.

**Greenberg, Marvin Jay. 1994.** *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: developpment and history*. Santa Cruz : W.H. Freeman and Company, 1994. 0-7167-2446-4.

**Kubrusly, Ricardo S.** <http://www.im.ufrj.br/~risk/diversos/gne.html#distan>. *GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS*. [Online] [Citado em: 10 de julho de 2013.]

**Shariguin, I. 1989.** *Problemas de Geometria: planimetría*. Moscou : Mir, 1989. 5-03-000657-5.

**Sharygin, I.F. 1986.** *Problems in Solid Geometry*. Moscou : Mir, 1986.