UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rejane Angela de Lima

Trigonometria Esférica e algumas de suas muitas aplicações

Campina Grande - PB
Agosto/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rejane Angela de Lima

Trigonometria Esférica e algumas de suas muitas aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande - PB
Agosto/2024

L732t Lima, Rejane Angela de.
Trigonometria esférica e algumas de suas muitas aplicações / Rejane Angela de Lima – Campina Grande, 2024.
130 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima".
Referências.

1. Trionometria Esférica. 2. Navegação Astonômica. 3. Educação Básica. I. Lima, Romildo Nascimento de. II. Título.

CDU 514.116.3(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MEIRE EMANUELA DA SILVA MELO CRB-15/568

Rejane Angela de Lima

Trigonometria Esférica e algumas de suas muitas aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 02 de Agosto de 2024:

Romildo N. de Lima

Dr. Romildo Nascimento de Lima
Orientador - UFCG

Jacqueline Félix de Brito Diniz

Dra. Jacqueline Félix de Brito Diniz
Convidado interno -UFCG

Luciana R. Freitas

Dra. Luciana Roze de Freitas
Convidado externo - UEPB

Campina Grande - PB
Agosto/2024

Dedico este trabalho à minha família, em especial a minha filha Rebeca Maria (meu maior e melhor milagre), a minha mãe Josefa (Dona Zefinha), ao meu pai Alvino Gomes (in memorian), ao meu companheiro Cláudio Ramos, aos meus irmãos Roselma, Roseli, Rosenir, Renan, Rêner, Romero, Ronaldo (in memorian), Remilson (in memorian), aos meus sobrinhos Ruan, Renatielly, Roberta, Rafaella, Ryan e Raphael, aos meus cunhados, Adenilson, Abenoan, Roberta e Elisangela. Cujo apoio totalmente incondicional foi a força motriz por trás desta tão sonhada e desejada conquista.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, a quem temo e reverencio, pois sem Ele nada disso seria possível.

A minha família, que de forma totalmente incondicional, estiveram sempre contribuindo de alguma forma para que eu conseguisse chegar até aqui, em especial a minha filha Rebeca Maria, a minha mãe Josefa (Dona Zefinha), aos meus irmãos que Roselma, Roseli, Rosenir, Renan, Rêner, aos meus sobrinhos Ruan, Renatielly, Roberta, Rafaella, Ryan e Raphael, aos meus cunhados, Adenilson, Abenoan, Roberta e Elisangela.

Ao meu companheiro Cláudio Ramos, que não me deixou desistir, mesmo quando eu dizia inúmeras vezes que não iria mais para a Universidade. No auge da depressão e da síndrome do pânico, sintomas que me fizeram adoecer e até mesmo chegar ao ponto de não conseguir dirigir, ele se tornou meu motorista por diversas vezes, deixando seus compromissos de lado para me levar à Universidade às sextas- feiras. Cláudio sempre enfatizava que não iria deixar eu desistir do meu sonho.

Ao meu amigo-irmão e agora compadre Raniere, que tanto me ajudou e me apoio.

À coordenadora do curso do PROFMAT, a professora Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida.

Agradeço especialmente aos ex-coordenadores do PROFMAT, professor Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros e ao professor Dr. Romildo Nascimento de Lima, meu orientador, por me acolherem de forma especial, ouvindo minhas angústias e sempre buscando uma solução.

Aos professores da Universidade Federal de Campina Grande, que são muito humanos e aos quais eu sou imensamente grata pelo acolhimento, fazendo-nos sentir sempre abraçados: Professor Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho (professor que tenho o maior carinho e admiração, sendo um dos professores “ que mais se comove”), Professores Drs. Jaime Alves Barbosa Sobrinho, José de Arimatéia Fernandes, José Fernando Leite Aires, Marcelo Carvalho Ferreira, Rodrigo Cohen Mota Nemer, Denílson da Silva Pereira e Leomaques Francisco Silva Bernardo pelo carinho com que nos acolheram.

Às minhas turmas do PROFMAT da Universidade de Campina Grande (UFCG), pelo companheirismo, pelas ajudas mútuas e pelos momentos significativos que compartilhamos juntos. Nossa convivência foi marcada por bons momentos, desafios superados e muitas gargalhadas, criando laços que serão lembrados com carinho:

- Turma 2016: Cláudio Teodista, Clebson Huan, Daniel Dantas, Dioneide Cristóvão, Emerson Suassuna, Jaldir, Joselito, Oséias, Luís Sales, Gilmar, em especial aos companheiros de viagem e também confidentes Márcia Walkiria, Priscila Cordeiro e Silmário.

- Turma de 2018: André Galdino, Daniel Costa, Lucielma Meyre, Márcio Santos, Renato, Marília Sales, Eduardo Lucena, Geraldo Júnior, Hydayane, Matheus Queiroz, Teófilo Vitorino, Wagner Albuquerque. Um agradecimento especial ao companheiro de viagem Bruno Lopes.

- Turma 2022: Antônia Fabrícia, Antônio Marcos, Flávia Shirley, Geovane Tavares, Lucivaldo José, Renan Rodrigues, Renato Machado, Ruth Micaely, Silvana Oliveira, Thiago dos Santos, Tiago Emanoel, Alexandre Nário, aos companheiros de viagem Pedro Valentim e Mozart William.

Aos meus amigos Priscila Cordeiro, Silmário e Márcia Walkiria, que me ajudaram nos momentos mais difíceis, principalmente emocionalmente. Um agradecimento especial à Márcia Walkiria, que dedicou parte de seu tempo para me acolher diversas vezes em sua residência, ajudando-me com os exercícios e estudando comigo para provas e exames nacionais.

Aos amigos Cleibson José e Geovane Tavares, que sempre me ajudaram de alguma forma durante o curso.

À todas as pessoas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) que contribuíram significativamente para minha jornada acadêmica. A Isabela da Silva Souza e Andrezza Freitas, secretária e ex-secretária do Programa de Pós-graduação da Unidade Acadêmica de Matemática da UFCG, respectivamente, pelo apoio incansável ao longo desta jornada. A “Aninha” dos serviços gerais, pelo trabalho e disposição em ajudar. A Jéssica e Gislane da biblioteca do Departamento de Matemática, esta última a quem tenho imenso carinho e gratidão. A todos vocês, meu muito obrigado por tornarem essa jornada acadêmica mais significativa e enriquecedora.

À equipe gestora e aos professores da Escola de Referência de Ensino Médio de Panelas, em especial a Nivalda Mércia, Elba Vilar, e a ex-gestora Cynira Lima, pela compreensão e apoio durante todos esses anos.

À gestora da Escola Municipal Abdias João Inácio, professora Alda Ramalho, pela compreensão.

Àqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que eu chegasse até este momento, e que não foram citados por nomes, saibam da minha eterna gratidão. Cada gesto, apoio e palavra de incentivo foram fundamentais para esta conquista. Que a vida nos permita seguir compartilhando aprendizados e sucessos juntos.

Muito obrigada!

"O sucesso não acontece por acaso. É trabalho duro, perseverança, aprendizado, estudo, sacrifício e, acima de tudo, amor pelo que você está fazendo ou aprendendo a fazer."

(Pelé)

Resumo

A leitura desta dissertação é recomendada para aqueles que necessitam dos pré-requisitos para o estudo da Trigonometria Esférica, oferecendo uma introdução acessível, destacando os conceitos e algumas aplicações da Trigonometria Esférica à luz das pesquisas conduzidas por astrônomos, matemáticos e estudiosos ao longo do tempo. A dissertação explora sua evolução histórica e suas aplicações significativas na astronomia, agrimensura e, principalmente, na navegação. Ao contrário da Trigonometria Plana, que se desenvolveu em conjunto com o avanço da Física e da Mecânica e agora está amplamente integrada aos currículos de Matemática no Ensino Básico, a Trigonometria Esférica é abordada predominantemente em cursos técnicos, graduação em Geodésia, Agrimensura, Astronomia e em programas de formação em Escolas Navais. Esta abordagem trata da resolução de triângulos em uma esfera, onde os "lados" são representados por geodésicas na superfície. O propósito deste estudo é o desenvolvimento de um minicurso no Ensino Médio, visando proporcionar aos alunos uma introdução acessível aos conceitos avançados da Trigonometria Esférica, com foco na Geometria da esfera, descrevendo uma experiência prática em sala de aula e demonstrando como esses conceitos podem ser ensinados de forma interativa e engajadora.

Palavras-chave: Trigonometria Esférica. Navegação Astronômica. Educação Básica.

Abstract

This dissertation is recommended reading for those who need the prerequisites for studying Spherical Trigonometry, offering an accessible introduction, highlighting the concepts and some applications of Spherical Trigonometry in light of the research conducted by astronomers, mathematicians, and scholars over time. The dissertation explores its historical evolution and significant applications in astronomy, surveying, and primarily, navigation. Unlike Plane Trigonometry, which developed alongside advancements in Physics and Mechanics and is now widely integrated into Mathematics curricula in Basic Education, Spherical Trigonometry is predominantly addressed in technical courses, undergraduate programs in Geodesy, Surveying, Astronomy, and training programs at Naval Schools. This approach deals with solving triangles on a sphere, where the "sides" are represented by geodesics on the surface. The purpose of this study is to develop a minicourse in High School, aiming to provide students with an accessible introduction to the advanced concepts of Spherical Trigonometry, focusing on the Geometry of the sphere, describing a practical classroom experience, and demonstrating how these concepts can be taught interactively and engagingly.

Keywords: Spherical Trigonometry, Astronomical Navigation, Basic Education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Triângulo Esférico. 18
Figura 2 – O escriba sentado - museu do Louvre em Paris. 24
Figura 3 – Fragmento do papiro de Rhind. Depositado no Museu Britânico Londres. 26
Figura 4 – Transcrição de fragmento do Papiro de Rhind. 27
Figura 5 – Relógio de sol, demonstrando as sombras projetadas pelo gnómon ao longo do dia. 28
Figura 6 – Relógio Solar descoberto por arqueólogos no alto Egito. 28
Figura 7 – Esticadores de cordas no antigo Egito. 29
Figura 8 – Representação artística da medição de terra às margens do rio Nilo pelos antigos egípcios. 29
Figura 9 – Esticadores de cordas com nó's no antigo Egito 30
Figura 10 – Plimpton 322. 32
Figura 11 – Transcrição da tabuleta Plimpton 322. 32
Figura 12 – Norte verdadeiro e Norte geográfico. 35
Figura 13 – Protótipo da bússula de antigamente. 36
Figura 14 – Busto de Shen Kuo. 37
Figura 15 – Medida da circunferência calculada por Eratóstenes 38
Figura 16 – Hiparco de Nicéia (180 a.C -125 a.C). 39
Figura 17 – Astrolábio náutico. 40
Figura 18 – Magnitudes aparentes: brilho aparente das estrelas. 41
Figura 19 – Ideia de como Hiparco teria feito o cálculo da distância entre a Terra e a Lua. 41
Figura 20 – Calculando o seno, conhecendo o comprimento da corda. 43
Figura 21 – Círculo de 360°. 44
Figura 22 – Tábua de Cordas de Ptolomeu. 46
Figura 23 – Corda com ângulo de 90°. 46
Figura 24 – Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. 49
Figura 25 – René Descartes. 50
Figura 26 – Esfera Celeste. 51
Figura 27 – Zênite. 53
Figura 28 – Sistema de coordenadas equatoriais celestes. 53
Figura 29 – Circunfência de centro O e raio r. 55
Figura 30 – Arco de circunferência 55
Figura 31 – Círculo trigonométrico. 57
Figura 32 – Triângulo ABC 58

Figura 33 – Triângulo ABC e altura relativa ao lado AC. 58
Figura 34 – Lei dos cossenos no triângulo ABC. 59
Figura 35 – Triângulo ABC. 60
Figura 36 – Círculo trigonométrico traçado a tangente. 61
Figura 37 – Triângulos DOC e BOF. 62
Figura 38 – Esfera. 63
Figura 39 – Superfície Esférica e seus elementos. 64
Figura 40 – Circunferência máxima. 65
Figura 41 – Cunha esférica. 65
Figura 42 – Fuso esférico. 66
Figura 43 – Geodésica. 66
Figura 44 – Esfera trigonométrica: Triângulo Esférico. 67
Figura 45 – Ângulo esférico. 68
Figura 46 – Triângulos esféricos ABC. 69
Figura 47 – Diedro. 71
Figura 48 – Área do Triângulo Esférico ABC. 72
Figura 49 – Lei dos cossenos esféricos. 74
Figura 50 – Triedro Polar. 76
Figura 51 – Triângulo Esférico. 78
Figura 52 – Área do triângulo esférico ABC. 82
Figura 53 – Octante da esfera. 84
Figura 54 – Distância esférica entre dois astros. 85
Figura 55 – Distância entre dois pontos quaisquer. 86
Figura 56 – Distância entre Recife (Brasil) e Lisboa (Portugal). 88
Figura 57 – Registro 01 fotográficos das aulas 111
Figura 58 – Registro 02 fotográficos das aulas. 112
Figura 59 – Registros 03 fotográficos das aulas. 113
Figura 60 – Confeccionando os instrumentos náuticos 01. 114
Figura 61 – Confeccionando os instrumentos náuticos 02. 115
Figura 62 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 01. 116
Figura 63 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 02. 117
Figura 64 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 03. 118
Figura 65 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 04. 119
Figura 66 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 05. 120
Figura 67 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 06. 121
Figura 68 – Instrumentos Náuticos construídos pelos Alunos. 122
Figura 69 – Aula expositiva sobre círculo máximo e menor na esfera 01. 123
Figura 70 – Aula expositiva sobre círculo máximo e menor na esfera 02. 124

Figura 71 – Aula apresentando Triângulo Esférico com Bolas de Isopor 01. 125
Figura 72 – Aula apresentando Triângulo Esférico com Bolas de Isopor 02. 126
Figura 73 – Aula de explanação sobre a distância esférica e em quilômetros entre duas cidades 01. 127
Figura 74 – Aula de explanação sobre a distância esférica e em quilômetros entre duas cidades 02. 128
Figura 75 – Alunos resolvendo exercícios de Trigonometria Esférica 01. 129
Figura 76 – Alunos resolvendo exercícios de Trigonometria Esférica 02. 130
Figura 77 – Alunos resolvendo exercícios de Trigonometria Esférica 03. 131

Lista de tabelas

Tabela 1 – Linha da tabuleta Plimpton 322 33
Tabela 2 – Conversão para o sistema decimal do numero de uma Linha da tabuleta Plimpton 322 33
Tabela 3 – Conversão da 6ª linha da tabuleta Plimpton 322 33
Tabela 4 – Interpretação (decimal) 34
Tabela 5 – Principais fórmulas para resolução de triângulos esféricos 80
Tabela 6 – Coordenadas geográficas de Recife e Lisboa. 89

Sumário

1 INTRODUÇÃO . . . 16
1.1 Objetivos . . . 19
1.1.1 Objetivo geral . . . 19
1.1.2 Objetivos específicos . . . 19
1.2 Motivação da pesquisa . . . 20
1.3 Organização . . . 20

2 UM POUCO DO HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA . . . 23
2.1 Fatos do Egito . . . 24
2.2 Fatos da Babilônia . . . 30
2.3 Fatos da China . . . 34
2.4 Fatos da Grécia . . . 37
2.4.1 Eratóstenes de Cirene . . . 38
2.4.2 Hiparco de Nicéia . . . 38
2.4.3 Claudio Ptolomeu . . . 45
2.4.4 Menelau de Alexandria . . . 47
2.5 Contribuições da Idade Média e Moderna . . . 48

3 CONCEITOS BÁSICOS . . . 51
3.1 Elementos geométricos do globo terrestre e da esfera celeste . . . 51
3.2 Geometria Plana . . . 54
3.2.1 Trigonometria Plana . . . 54
3.2.2 Lei dos senos . . . 57
3.2.3 Lei dos Cossenos . . . 59
3.2.4 Tangente . . . 61
3.3 Geometria Esférica . . . 62
3.3.1 Trigonometria Esférica . . . 66
3.3.2 Fórmulas gerais da Trigonometria Esférica . . . 73

4 ALGUMAS APLICAÇÕES E EXEMPLOS . . . 81

5 PLANEJAMENTO E EXECUÇÃO DO MINICURSO . . . 90
5.1 Planejamento do Minicurso . . . 91
5.2 PROPOSTA DE AULAS DO MINICURSO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . . 93

6 **RELATO DA EXPERIÊNCIA VIVENCIADA EM SALA DE AULA 104**

7 **CONSIDERAÇÕES FINAIS 106**

REFERÊNCIAS 108

APÊNDICES 110

APÊNDICE A – REGISTRO FOTOGRÁFICO DAS AULAS . . . 111

1 INTRODUÇÃO

A Matemática construiu-se progressivamente à medida que a humanidade se desenvolveu, demandando o domínio de novos conhecimentos. No caso da Trigonometria, esse processo não foi exceção. O conhecimento trigonométrico pode ter sido transmitido oralmente e registrado em manuscritos que, infelizmente, podem não ter sobrevivido até os tempos modernos. Sua origem remonta por volta do ano 300 a.C., entre os gregos, quando surgiu para solucionar questões relacionadas à Astronomia e Cartografia. Suas primeiras aplicações práticas foram realizadas por Ptolomeu, aproximadamente em 150 d.C., quando ele a empregou para calcular a latitude e a longitude de cidades e outros pontos geográficos em seus mapas.

Os primeiros estudos trigonométricos remontam aos gregos, que investigaram as relações entre o arco da circunferência e a corda correspondente, e desenvolveram as primeiras tábuas trigonométricas. Esse marco histórico foi notavelmente representado por Hipócrates (430 a.C.), um dos principais estudiosos do assunto na época. Embora demonstrassem certa limitação na observação, coleta e comparação de dados, assim como na formulação de leis indutivas, esses estudos trigonométricos gregos foram descritos como mais aritméticos do que geométricos (EVES, 2011, p.259). Além dos gregos, os hindus e os árabes também demonstraram interesse nesse campo. Entre os hindus, destaca-se Aryabhata (415 d.C.), cuja abordagem trigonométrica abarcava tanto problemas relacionados a triângulos planos quanto esféricos.

A Trigonometria começou a surgir de forma mais concreta com o desenvolvimento da linguagem algébrica moderna, o que possibilitou sua formalização. Os matemáticos a partir do século XVI e XVII foram os principais responsáveis por suas transformações. O lápis e o papel se tornaram ferramentas fundamentais para os avanços matemáticos, permitindo mudanças significativas na Trigonometria.

A palavra Trigonometria vem do grego, trigono+metria. A palavra trigono significa que tem três ângulos e metria é medida. Etimologicamente, significa medida de triângulos, (FILHO, 2018).

A Trigonometria Esférica representa uma área da Matemática dedicada à análise de triângulos e à medição de ângulos em uma superfície esférica. Embora comumente abordada em níveis mais avançados de Matemática e Astronomia devido à sua complexidade e natureza tridimensional, é viável introduzir algumas de suas aplicações no Ensino Básico, proporcionando uma compreensão inicial dos conceitos fundamentais.

Essa vertente da Trigonometria se baseia em razões trigonométricas, como seno, cosseno e tangente, associadas à comparação de comprimentos de lados de triângulos. A semelhança de triângulos, elemento crucial nesse contexto, possibilita a generalização dessas razões para triângulos não retângulos. Esses conceitos desempenharam um papel essencial na Matemática da antiguidade, sendo aplicados para calcular alturas de pirâmides, larguras de rios e elevações de montanhas. Além disso, tornaram-se fundamentais na resolução de desafios complexos em explorações astronômicas, levantamentos de terras e navegações marítimas, desempenhando um papel vital pois oferece ferramentas matemáticas cruciais para explorar e compreender as vastas extensões dos oceanos, sendo fundamental para determinar a posição de uma embarcação em alto mar e para traçar rotas eficientes e seguras. Ao empregar coordenadas esféricas, que consideram a curvatura da Terra, a Trigonometria Esférica permite calcular distâncias, direções e posições celestiais com alta precisão. Por exemplo, o uso de esferas celestes permite aos navegadores determinar a latitude e longitude com base nas posições aparentes das estrelas e outros corpos celestes.

De acordo com Lima (2010):

> Desde a antiguidade e até hoje, o homem sempre teve a necessidade de avaliar distâncias inacessíveis. Na verdade, são muito poucas as distâncias que podem ser medidas diretamente, com uma trena, por exemplo. Praticamente tudo que o desejamos saber sobre distâncias no mundo em que vivemos é calculado com o auxílio da Trigonometria. (LIMA et al., 2010, p.68).

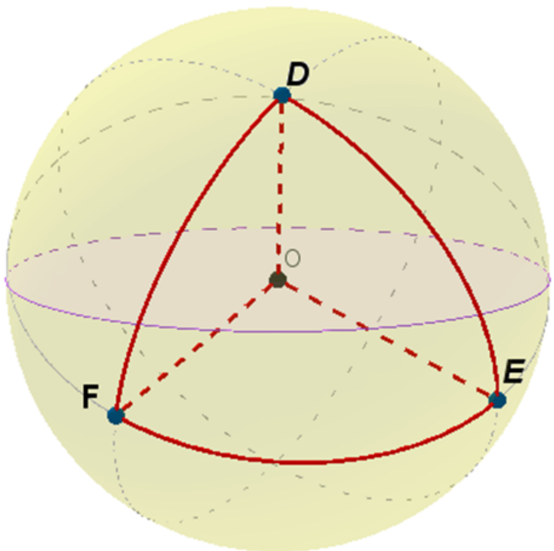
Essa conexão entre a Trigonometria Esférica e aplicações práticas históricas destaca sua relevância na compreensão tanto do desenvolvimento matemático quanto na solução de problemas do mundo real. Essa abordagem matemática é essencial para evitar desvios significativos e garantir uma navegação confiável. Além disso, ela é aplicada em cálculos relacionados à altura angular dos astros, que auxiliam na determinação da hora local e, por conseguinte, na navegação por meio da observação de instrumentos como sextantes, quadrantes náuticos e astrolábios. Esses dispositivos, combinados com os princípios trigonométricos esféricos, capacitam os navegadores a traçar rotas eficientes, evitando obstáculos e alcançando destinos desejados, proporcionando métodos precisos e eficazes para orientar embarcações em mares desconhecidos, contribuindo significativamente para o desenvolvimento das explorações marítimas e o comércio global.

Na escola, somos frequentemente ensinados que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta. No entanto, essa regra é aplicável apenas a referências Planas, e nem sempre nossas experiências se alinham a esse modelo. Um exemplo ilustrativo é o formato esférico da Terra. Na Geometria Esférica, o conceito de geodésica refere-se ao caminho mais curto ou mais longo entre dois pontos em um espaço tridimensional, ao contrário da Geometria Plana, onde o percurso mais curto entre dois pontos é uma linha reta, na Geometria Curva, como a esférica, a menor distância entre dois pontos se dá ao longo de um arco de circunferência máxima, resultando em diferenças notáveis em relação à Trigonometria Plana. Um exemplo é a soma dos ângulos internos de um Triângulo Esférico, que excede os 180 graus. Essa peculiaridade ressalta a complexidade e as nuances que surgem quando aplicamos conceitos trigonométricos a formas esféricas.

Este estudo direciona sua atenção ao ensino da Matemática, com especial enfoque na compreensão dos conceitos científicos. Nele, é apresentado um breve panorama histórico da Trigonometria Esférica e algumas de suas possíveis aplicações. Inicialmente, serão discutidos os aspectos conceituais fundamentais da Trigonometria Esférica. Em seguida, serão exploradas as aplicações práticas decorrentes das pesquisas históricas realizadas por estudiosos neste campo específico.

Para tanto utilizaremos alguns conceitos matemáticos que auxiliarão no entendimento e na resolução das atividades proposta como, por exemplo, o seno e o cosseno, contidas tanto num plano bidimensional, como num plano tridimensional, como é o caso do seno e do cosseno esférico, os quais serão demostrados no decorrer da dissertação, e que serão utilizados para fins de cálculos no Triângulo Esférico, como por exemplo, mostrado na ilustração a seguir.

Figura 1 – Triângulo Esférico.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

É possível introduzir conceitos simplificados de Geometria Esférica no Ensino Médio, sendo que a profundidade e complexidade desses conceitos podem ser adaptadas de acordo com o nível de maturidade matemática dos alunos.

Este trabalho não apenas apresenta os resultados de uma pesquisa bibliográfica sobre a história e os conceitos da Trigonometria Esférica, mas também analisa a evolução da Matemática, destacando as origens dos conceitos e ideias relacionados a essa disciplina. Seu conteúdo é fundamental para resolver problemas relacionados a posicionamentos.

Inicialmente, no nosso estudo, consideraremos a Terra como um modelo esférico para simplificar os cálculos envolvidos na resolução do Triângulo Esférico.

A relevância desse estudo inicial vai além da simples pesquisa histórica, pois os resultados serão integrados ao material destinado aos alunos do Ensino Médio. Ou seja, será incorporado de modo introdutório no curso, um pouco sobre a história da Trigonometria, visando estimular a curiosidade, aprofundar o conhecimento e enriquecer a compreensão dos alunos. Essa abordagem não apenas proporciona ao professor uma compreensão mais substancial, mas também amplia as oportunidades de introduzir a história da Trigonometria, estabelecendo uma conexão mais sólida entre teoria e prática.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Desenvolver um minicurso no Ensino Médio, com o intuito de oferecer aos alunos uma introdução acessível aos conceitos avançados da Trigonometria Esférica enfatizando Geometria da Esfera. O curso será focado em pelo menos um conteúdo específico, com o objetivo de promover a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos e capacitar os alunos a resolver problemas relacionados a esse tema. Além disso, busca-se enriquecer a compreensão matemática dos estudantes. O planejamento e a execução desse produto educacional são de extrema importância para sua integração no currículo escolar, preparando os alunos para os desafios do mundo real e proporcionando uma compreensão mais ampla da Matemática sendo aplicada a um contexto que chama atenção.

1.1.2 Objetivos específicos

- Explorar os aspectos históricos da trigonometria no contexto educacional, destacando sua evolução e importância ao longo dos séculos, oferecendo aos alunos uma perspectiva prática e crítica da disciplina, enfatizando suas aplicações em diversas áreas.

- Desenvolver habilidades essenciais para compreensão da navegação, geolocalização e coordenadas terrestres, visando aplicabilidade prática no mundo real;

- Explorar a ideia fundamental da Trigonometria Esférica, destacando a diferença em relação à Geometria Plana, especialmente na soma dos ângulos internos de um triângulo;

- Enriquecer a experiência educacional ao conectar conceitos matemáticos a aplicações práticas, fortalecendo habilidades matemáticas dos alunos;

- Verificar a aplicabilidade prática da Trigonometria Esférica na vida cotidiana e em diversas áreas profissionais, destacando exemplos tangíveis e relevantes para os estudantes;

- Investigar desafios enfrentados pelos alunos ao aprender Trigonometria Esférica, incluindo dificuldades com conceitos específicos, linguagem matemática ou visualização espacial;

- Explorar integrações da Trigonometria Esférica com outras disciplinas, enfatizando conexões com física, geografia, astronomia ou outras áreas do conhecimento.

Estes objetivos específicos orientam a pesquisa e oferecem uma estrutura para a investigação detalhada sobre como a Trigonometria Esférica contribui para a formação integral dos estudantes no Ensino Médio.

1.2 Motivação da pesquisa

Destacamos os principais motivos que levaram à pesquisa sobre o tema, como: a dificuldade que os alunos enfrentam na aprendizagem de Trigonometria, a abordagem limitada dos conteúdos de Trigonometria por parte dos professores e a escassez de dissertações com o conteúdo sugerido no banco de dissertações do PROFMAT.

Um dos principais desafios que os alunos enfrentam no aprendizado de Trigonometria é a dificuldade em assimilar esse conteúdo, o que também afeta alguns educadores. No entanto, é possível superar essa barreira por meio da implementação de estratégias eficazes, tornando o processo de aprendizagem mais acessível e instigante. Com o objetivo de potencializar o ensino, o planejamento das aulas inclui diversas situações que se mostraram úteis para garantir um aproveitamento mais significativo.

1.3 Organização

No segundo capítulo, exploramos o histórico da Trigonometria, com foco especial na Trigonometria Esférica. Enfatizamos matemáticos notáveis que se destacaram nesse campo, evidenciando suas realizações e contribuições significativas.

No terceiro capítulo deste estudo, apresentamos alguns conceitos básicos e demonstrações, destacando-se os elementos fundamentais da Trigonometria, onde alguns deles foram destinados à apresentação aos alunos. Na ocasião, foram abordadas algumas definições e demonstrações, de maneira objetiva, visando à clareza e compreensão do conteúdo. A ênfase na apresentação dessas definições é justificada pela importância do embasamento teórico, que proporciona uma base sólida para o desenvolvimento e a demonstração confiante dos conceitos em ambiente de sala de aula. Exploramos conceitos fundamentais e algumas demonstrações da Trigonometria Esférica. Destacamos elementos essenciais, como os ângulos esféricos, que mensuram aberturas entre arcos em esferas. As coordenadas esféricas, utilizando distância radial, latitude e longitude, são abordadas, assim como as leis dos senos e cossenos esféricos, equivalentes às da Trigonometria Plana, aplicáveis a Triângulos Esféricos. Polos e equador celeste foram discutidos como referenciais astronômicos cruciais, especialmente na navegação astronômica. Paralelos e meridianos celestes surgem como elementos facilitadores para localizações na esfera celeste. Estes conceitos não apenas enriquecem a teoria, mas também encontram aplicações práticas em campos como astronomia e navegação.

Consideramos que certos conceitos preliminares, como razão, proporção e semelhanças, foram pressupostos como conhecidos pelos alunos, no entanto partiu-se da premissa de que esses conceitos já foram abordados anteriormente, permitindo-nos concentrar na exploração mais aprofundada dos elementos centrais da Trigonometria. Essa abordagem buscou não apenas fornecer informações, mas também estimular uma compreensão mais profunda por parte dos alunos, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

O quarto capítulo foi dedicado à Trigonometria Esférica e suas aplicações na navegação, destacando o papel fundamental dessa disciplina na determinação precisa de posições em um ambiente tridimensional, como a superfície curva da Terra. Ao utilizar instrumentos como sextantes, quadrantes náuticos e astrolábios, a Trigonometria Esférica possibilita a medição precisa de ângulos celestes em relação ao horizonte, permitindo a localização exata de uma embarcação. Na navegação celestial, essa abordagem é essencial para calcular latitude e longitude com base em observações celestiais, contribuindo para a precisão e segurança da navegação. O funcionamento do sistema GPS também ilustra a aplicação prática da Trigonometria Esférica, onde a triangulação de sinais de satélites, utilizando princípios trigonométricos esféricos, determina com exatidão a posição de receptores na Terra. Essas aplicações evidenciam a importância da Trigonometria Esférica na otimização de rotas, prevenção de obstáculos e garantia de eficiência nas viagens marítimas.

No quinto capítulo, delineou-se a proposta central deste trabalho, concentrando-se no planejamento, execução e análise de um curso sobre um dos temas da Trigonometria Esférica. O objetivo foi desenvolver um produto educacional sólido, com ênfase na aplicabilidade e motivação para o ensino-aprendizagem no contexto matemático. Com a implementação de um minicurso na área de Matemática, destinado aos alunos do 2º ano da Escola de Referência em Ensino Médio de Panelas-PE, intitulado “Trigonometria Esférica e Suas Aplicações”.

O sexto capítulo, traz a análise dos resultados obtidos decorrentes da aplicação do minicurso, além da apresentação do produto final desenvolvido pelos alunos.

No sétimo capítulo, é apresentada as considerações finais e por fim as referências bibliográficas utilizadas para a realização desse trabalho.

No oitavo capítulo, apresenta-se o referencial bibliográfico completo.

2 UM POUCO DO HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Segundo (D'AMBROSIO, 1996), a História da Matemática, como uma vertente da Educação Matemática, tem como um de seus propósitos possibilitar ao professor de Matemática uma compreensão mais profunda de sua disciplina. Isso envolve uma abordagem das origens do conhecimento matemático, são portanto os fatores que contribuem para a construção e desenvolvimento dessa área, e as razões que justificam sua inclusão nos currículos escolares. (NACIONAIS, 1997)

A importância de incluir a História da Matemática na abordagem do conteúdo, também é contemplada nos documentos oficiais, conforme preconizado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, ..., é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. ... Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria História da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. (BRASIL, 2018, p.298-299)

Nesse capítulo, abordaremos eventos históricos de relevância para uma melhor compreensão da Trigonometria e Trigonometria Esférica. A análise histórica proposta contempla a evolução dessa disciplina ao longo das eras e em diversas civilizações, desde os tempos mais remotos. As bases essenciais da Trigonometria, incluindo a medição dos lados e ângulos dos triângulos, remontam à antiguidade, com os primeiros vestígios datando de aproximadamente 3000-2000 a.C.

Civilizações antigas, incluindo babilônios, egípcios, chineses e gregos, realizaram observações meticulosas do movimento planetário e estelar, catalisando o desenvolvimento de métodos para o registro e previsão de fenômenos celestiais. No entanto, desempenharam papéis distintos, contribuindo gradualmente para o desenvolvimento da Trigonometria.

> "A Trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma

> circunferência com o ângulo central por ela subtendido".(LIMA et al., 2016, p.217)

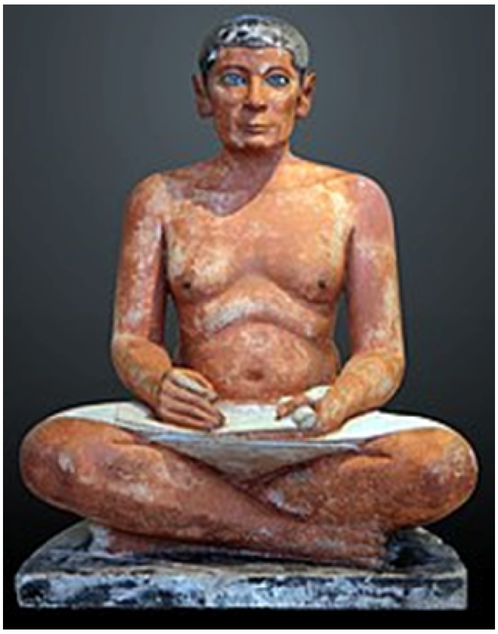
Dentro desse contexto, a Trigonometria emergiu inicialmente como uma ciência auxiliar da astronomia, desempenhando um papel crucial na facilitação dos cálculos astronômicos. Ressalta-se que a construção desse conhecimento não pode ser atribuída a um único indivíduo ou nação, mas sim a um processo evolutivo que se estendeu por milênios, abrangendo diversas culturas.

2.1 Fatos do Egito

A origem da Trigonometria remonta aos egípcios, especialmente durante um período marcado pelo estabelecimento de propriedades e práticas agrícolas, onde os povos passaram a utilizar a agricultura como principal fonte de cultivo do solo para plantação de alimentos. Nesse contexto, a necessidade de medir terras, calcular o número de trabalhadores e lidar com uma variedade de problemas matemáticos impulsionou o surgimento de especialistas nessa área, conhecidos como escribas.

Os escribas eram uma classe de profissionais altamente educados e especializados no antigo Egito. Eles desempenhavam um papel crucial na sociedade egípcia, sendo responsáveis por diversas tarefas relacionadas à escrita, leitura e registros administrativos. Eles eram especialistas em decifrar textos complexos e registros oficiais, incluindo inscrições em templos, túmulos e documentos legais. Esses profissionais desempenharam um papel crucial na formulação dos fundamentos iniciais da Trigonometria.

Figura 2 – O escriba sentado - museu do Louvre em Paris.



Fonte: Wikipedia, 2024.

De acordo com Roque e Carvalho (2012), a Matemática praticada no Egito antigo é conhecida através de um conjunto limitado de papiros, sendo um dos mais renomados o Papiro de Rhind. Este documento, também conhecido como Papiro de Ahmes, é atribuído a um escriba egípcio chamado Ahmes, embora sua autoria exata permaneça desconhecida. Nele, encontramos evidências da presença da Trigonometria, revelando as práticas matemáticas daquela civilização milenar.

Segundo Eves (2011), o Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahmes) data aproximadamente de 1650 a.C. e é um manual prático contendo 85 problemas matemáticos copiados em escrita hierática por Ahmes, baseados em trabalhos ainda mais antigos. Adquirido no Egito por volta de 1850 pelo egiptólogo escocês Alexander Henry Rhind, o papiro foi posteriormente adquirido pelo Museu Britânico, onde está preservado atualmente. Esta obra é uma das principais fontes de informação sobre a Matemática praticada pelos antigos egípcios.

Essa aquisição feita por Rhind, em Luxor, no Egito marca o início de sua jornada no mundo da egiptologia e preservação do conhecimento antigo sendo esse o mais antigo registro de algo semelhante às razões trigonométricas (1700 a.C.). Nele é evidenciada a preocupação dos egípcios em manter uma inclinação constante nas faces das pirâmides em relação à base. Essa maneira peculiar de calcular a inclinação de uma reta em relação à reta vertical é mencionada cerca de quatro vezes no papiro como “seqt”, segundo Boyer:

> A palavra egípcia seqt significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. O seqt correspondia assim, exceto quanto a unidades de medida, ao termo usado hoje pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede. A unidade de comprimento vertical era o cúbito; mas para medir a distância horizontal a unidade usada era a “mão”, das quais havia sete em um cúbito. Portanto, o seqt da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical, o primeiro medido em mãos, o segundo, em cúbitos. (BOYER; MERZBACH, 2012, p.36)

Essa medida, representada pelo “seqt”, é calculada pela razão do cateto adjacente sobre o cateto oposto, que, segundo estudos, corresponde ao que conhecemos hoje como cotangente, e no caso específico das pirâmides equivale a uma inclinação em torno de 52°. Essa precisão na inclinação das pirâmides reflete não apenas a habilidade Matemática dos antigos egípcios, mas também sua profunda compreensão das proporções e relações geométricas, destacando a importância da Trigonometria.

De acordo com Eves (2011), o Papiro de Rhind apresenta problemas que envolvem a cotangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide. No problema 56, é solicitado o cálculo do volume de uma pirâmide com 250 cúbitos de altura e cuja base tem lados medindo 360 cúbitos. Já no problema 57, pede-se a altura de uma pirâmide de base quadrada, cujo volume é de 5 mãos e 1 dedo por cúbito, e cujo lado da base mede 140 cúbitos.

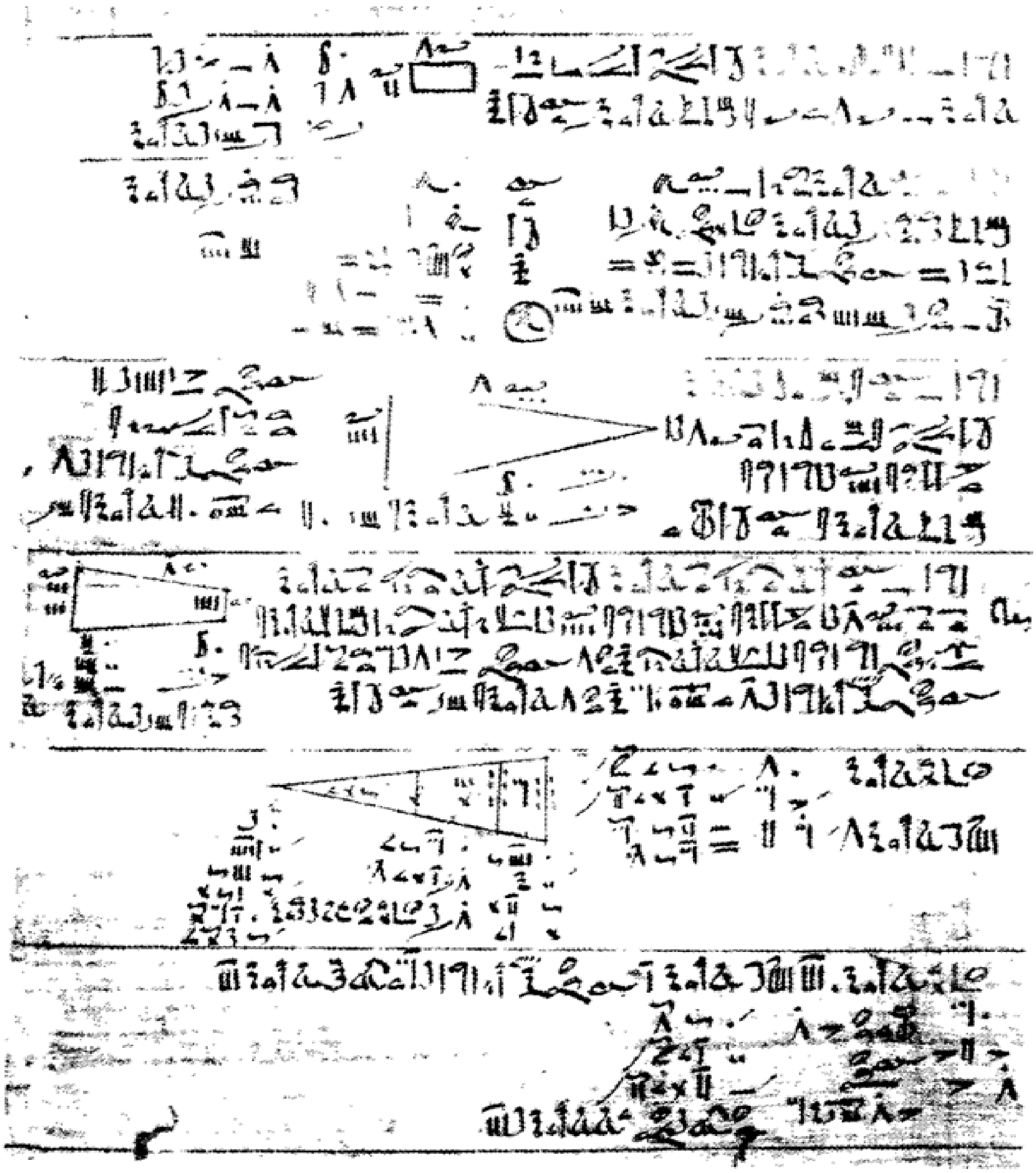
Embora não haja papiros específicos dedicados à Trigonometria Esférica, os papiros matemáticos egípcios, principalmente o Papiro de Rhind, contêm informações sobre geometria e cálculos que podem ter aplicações diretas nessa área, como foi visto problemas envolvendo a ideia de cotangente.

Figura 3 – Fragmento do papiro de Rhind. Depositado no Museu Britânico Londres.

Fonte: Ensinar história, 2024.

Esse documento é uma fonte importante para entender como os egípcios antigos lidavam com questões matemáticas, incluindo problemas de Aritmética, Geometria e Frações. Ele contém uma série de problemas e soluções matemáticas, oferecendo uma visão única das práticas matemáticas da época.

Figura 4 – Transcrição de fragmento do Papiro de Rhind.

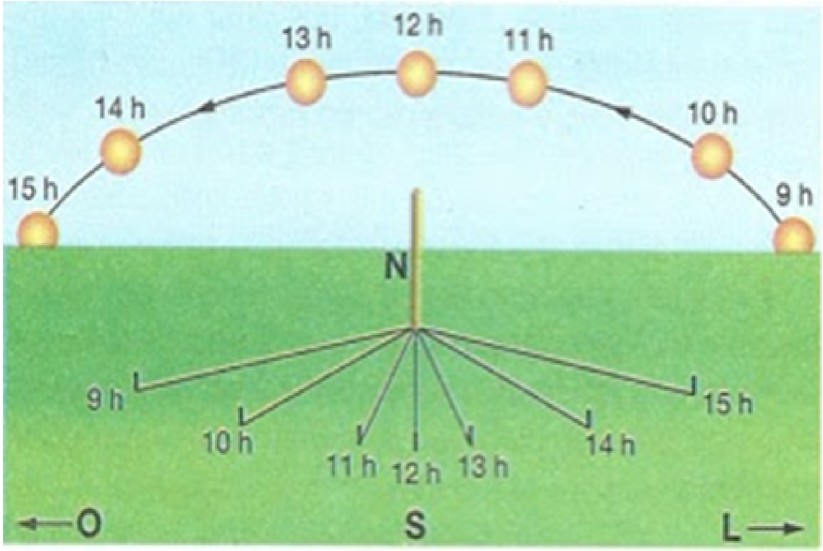


Fonte: Ensinar história, 2024.

Além disso, a partir de 1500 a.C., os egípcios associaram sombras projetadas por uma vara vertical (conhecida como gnómon) a sequências numéricas, criando um relógio de sol os quais começaram a ser utilizados no Egito e na Babilônia, seguidos pela Grécia, como instrumentos para medir o tempo com base na posição do sol e na sombra projetada.

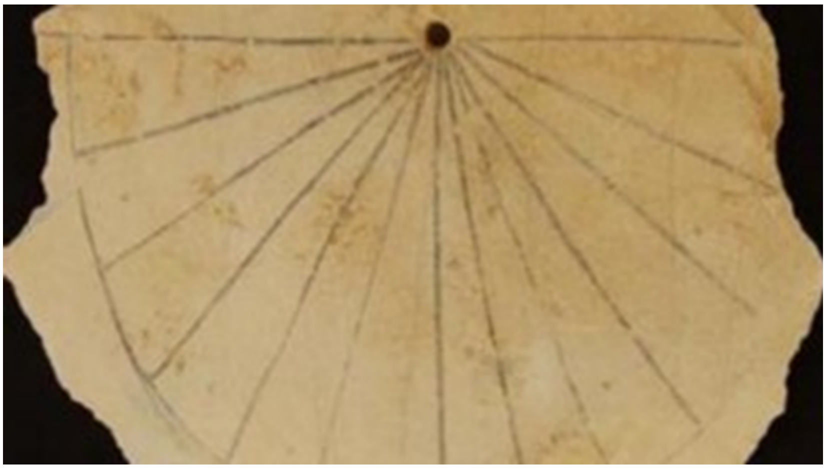
Segundo Eves (2011), o Museu de Berlim abriga um relógio de sol datado de aproximadamente 1500 a.C., tornando-o o relógio de sol mais antigo conhecido. Esses dispositivos, além de marcar as horas, evidenciam o avanço das civilizações antigas no entendimento das relações entre os movimentos celestes e as medidas terrestres, contribuindo indiretamente para o desenvolvimento inicial da Trigonometria.

Figura 5 – Relógio de sol, demonstrando as sombras projetadas pelo gnómon ao longo do dia.



Fonte: Parafísica, 2024.

Figura 6 – Relógio Solar descoberto por arqueólogos no alto Egito.



Fonte: Antigo egito, 2024.

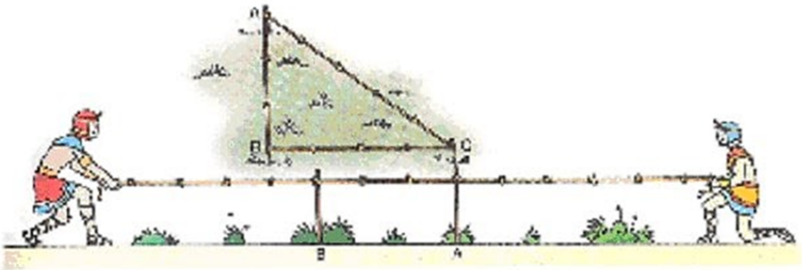
Dada a localização geográfica privilegiada do Egito e o acesso ao rio Nilo, é plausível que a Trigonometria Esférica tenha sido empregada para fins de navegação e geodésia, contribuindo para a determinação de distâncias e direções. A topografia e a geografia específicas do Egito, sobretudo em relação às enchentes anuais do Nilo, podem ter impulsionado o desenvolvimento de técnicas de medição, onde a Trigonometria Esférica desempenhava um papel crucial no cálculo de distâncias em terrenos variados.

Na antiga civilização egípcia, após as cheias do Nilo, a necessidade de realinhar as terras devido às erosões pós-inundação levou à convocação de agrimensores, conhecidos como "esticadores de corda", profissionais estes que demarcavam áreas ao longo das margens do rio empregando uma técnica peculiar para obter ângulos retos.

Boyer e Merzbach (2012) menciona que o processo de mensuração das terras consistia em estirar cordas e verificar o número de vezes que a unidade de medida estava contida no terreno. Havia uma unidade de medida assinada na própria corda. As pessoas encarregadas de medir esticavam a corda e verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno.

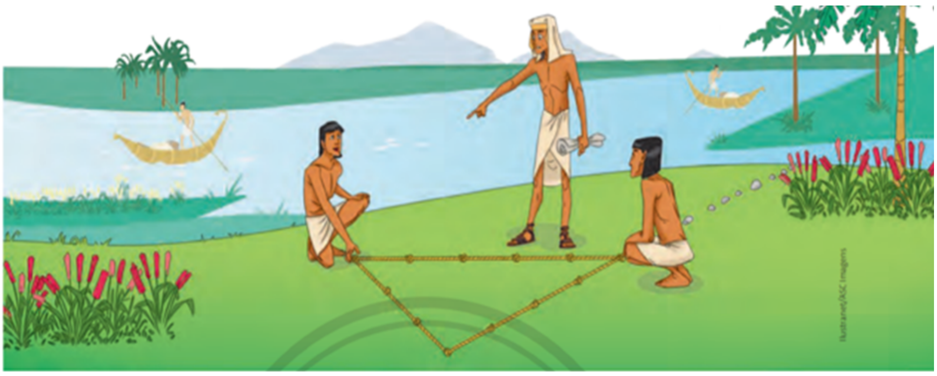
Utilizando uma corda com 13 nós equidistantes em um comprimento correspondente a 12 unidades, eles conectavam o 1º nó com o 13º. As estacas eram posicionadas nos 5º e 9º nós, conforme podemos observar nas Figuras a seguir.

Figura 7 – Esticadores de cordas no antigo Egito.



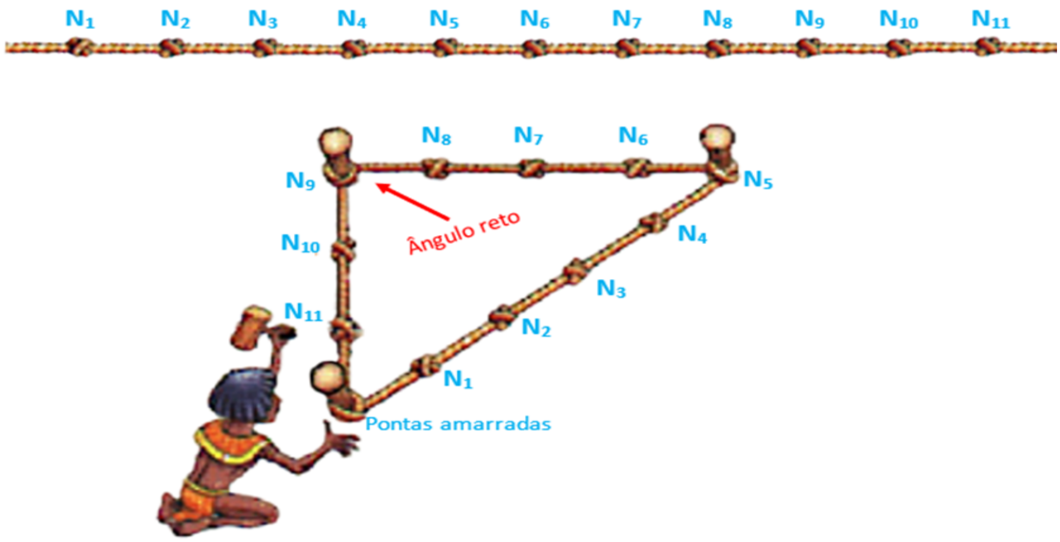
Fonte: Pitágoras, 2024.

Figura 8 – Representação artística da medição de terra às margens do rio Nilo pelos antigos egípcios.



Fonte: Nucleo do conhecimento, 2024.

Figura 9 – Esticadores de cordas com nó's no antigo Egito



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP, 2024.

O triângulo, formado por essa prática, exibia lados com medidas de 3, 4 e 5 unidades, conforme pode ser visto na Figura 9, formando o famoso "Triângulo Egípcio". Esse triângulo, conhecido por ter um ângulo reto, revelou-se um exemplo de um triângulo retângulo, demonstrando que a técnica de obtenção de cantos retos já era dominada pelos esticadores de corda há cerca de 5 mil anos. Essa prática era essencial para restaurar e preservar as terras agrícolas após as inundações.

Contudo, devido à escassez de registros específicos, muitos detalhes sobre a Trigonometria Esférica no Egito permanecem conjecturas baseadas em evidências arqueológicas e interpretações documentais. A proximidade do Egito a outras civilizações antigas, como os babilônios, sugere trocas de conhecimento, incluindo conceitos relacionados à Trigonometria Esférica.

2.2 Fatos da Babilônia

Os primeiros indícios da Trigonometria Plana não se limitam ao Egito, mas também incluem a Babilônia, onde os babilônios, através de cálculos de razão entre números e lados de triângulos semelhantes, demonstravam um profundo interesse em Matemática e Astronomia, motivado tanto por considerações religiosas quanto por sua relação com o calendário e os períodos de plantio estudando as fases da lua, pontos cardeais e estações do ano, sendo capazes de calcular eclipses solares e lunares.

Notavelmente, não há registros que indiquem o uso de medidas angulares nos cálculos dos babilônios e egípcios. Ambas as civilizações, datando desse período, inicialmente encaravam a Matemática como uma ciência prática, com instruções diretas em vez de demonstrações formais.

Os babilônios utilizavam tábuas de argila cozida para escrever, semelhantes aos papiros egípcios, proporcionando uma durabilidade crucial para a preservação do conhecimento matemático. Enquanto o Egito se manteve em relativo isolamento, a Babilônia, aberta a invasões e localizada em uma rota de caravanas, desenvolveu uma Matemática mais avançada. A necessidade de obras de engenharia e administração nos rios Tigre e Eufrates impulsionou o progresso matemático babilônico, em contraste com o Egito, que desfrutava da estabilidade do rio Nilo. Embora o Egito tenha sido considerado por muito tempo a civilização com mais fontes históricas, a complexidade das tábuas matemáticas babilônicas levou tempo para ser decifrada. Apesar disso, a preservação de documentos em templos egípcios facilitou as pesquisas sobre a Antiguidade.

Os astrônomos babilônios, por volta de 300 a.C., utilizaram medidas angulares na esfera celeste para registrar a ascensão e definição estelar, movimento planetário e eclipses. Introduziram coordenadas estelares na eclíptica, facilitando a localização de astros. Mediram longitude em graus a partir do ponto vernal e latitude em relação à eclíptica. Já os egípcios, no segundo milênio a.C., empregaram uma forma primitiva de Trigonometria na construção das pirâmides.

Entre as descobertas arqueológicas notáveis estão as chamadas “tábuas da Babilônia”. Segundo Roque (2012), um dos registros mais famosos dos tabletes utilizados no período babilônico é a placa de argila Plimpton 322. Esta placa, parte da coleção G.A. Plimpton da Universidade Columbia e catalogada como número 322, foi escrita durante o período babilônico antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.).

A Plimpton 322 foi descoberta na antiga cidade de Larsa, na Mesopotâmia, e é uma das mais antigas e significativas peças de evidência do conhecimento Matemático babilônico, utilizando o sistema sexagesimal (base 60), característico da Matemática da região. A placa é especialmente relevante devido aos seus conhecimentos trigonométricos, sendo escrita em cuneiforme e utilizando o sistema sexagesimal. O artefato contém um “manual prático de medidas de triângulos retângulos”, apresentando vários conjuntos pitagóricos que possibilitam a determinação dos lados desses triângulos.

Eves (2011) menciona que a Tábua Plimpton apresenta danos significativos, incluindo a perda de uma parte de seu lado esquerdo devido a uma rachadura, e danos adicionais como a perda de uma lasca profunda em seu lado direito, na metade da altura, e descamação no canto superior esquerdo. Exames revelaram a presença de cristais de uma cola moderna ao longo da rachadura do lado esquerdo, indicando que a tábua provavelmente estava intacta quando foi desenterrada e que posteriormente se quebrou, com uma tentativa de colar as partes que, eventualmente, se separaram novamente.

A Tábua Plimpton 322 apresenta uma série de ternos pitagóricos, conjunto de números inteiros positivos a, b e c que satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$. Esses ternos pitagóricos revelam uma compreensão avançada dos babilônios sobre relações numéricas e, em particular, sobre triângulos retângulos. A presença dessa tabela levanta questões intrigantes sobre o propósito original de seu uso. Alguns estudiosos sugerem que a Plimpton 322 pode ter sido utilizada para realizar cálculos relacionados a construções de templos, enquanto outros acreditam que poderia ter tido aplicações astronômicas. Independentemente de seu propósito exato, essa tábua testemunha a sofisticação Matemática alcançada pelos babilônios em uma era antiga.

Figura 10 – Plimpton 322.

Fonte: Researchgate, 2024.

Figura 11 – Transcrição da tabuleta Plimpton 322.

C1								C2			C3			C4
1	59	0	15						1	59		2	49	1
1	56	56	58	14	50	6	15		56	7	1	20	25	2
1	55	7	41	15	33	45		1	16	41	1	50	49	3
1	53	10	29	32	52	16		3	31	49	5	9	1	4
1	48	54	1	40					1	5		1	37	5
1	47	6	41	40					5	19		8	1	6
1	43	11	56	28	26	40			38	11		59	1	7
1	41	33	59	3	45				13	19		20	49	8
1	38	33	36	36					8	1		12	49	9
1	35	10	2	28	27	24	26	1	22	41	2	16	1	10
1	33	45								45		1	15	11
1	29	21	54	2	15				27	59		48	49	12
1	27	0	3	45					2	41		4	49	13
1	25	48	51	35	6	40			29	31		53	49	14
1	23	13	46	40						56		1	46	15

Fonte: Researchgate, 2024.

O que todos esses números significam? Vejamos a sexta linha, por exemplo:

Tabela 1 – Linha da tabuleta Plimpton 322

C1					C2		C3		C4
1	47	6	41	40	5	19	8	1	6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como estão escritos no sistema sexagesimal, devemos convertê-los para o sistema decimal levando em consideração a primeira coluna (C1), onde o primeiro número é 1, considerado como a parte inteira do número seguido de outros números considerados decimais. A conversão é feita da seguinte forma:

Tabela 2 – Conversão para o sistema decimal do numero de uma Linha da tabuleta Plimpton 322

Parte inteira (C1)	Parte decimal (C1)			
1	47	6	41	40
1×60^0	47×60^{-1}	6×60^{-2}	41×60^{-3}	40×60^{-4}

Fonte: Elaborada pelo autor.

Realizando a soma, obtem-se :

$$1 \times 60^0 + 47 \times 60^{-1} + 6 \times 60^{-2} + 41 \times 60^{-3} + 40 \times 60^{-4} = 1,785192901.$$

Utilizando o mesmo procedimentos para as demais colunas, ou seja, C2, C3 e C4, obtemos:

Tabela 3 – Conversão da 6ª linha da tabuleta Plimpton 322

	Parte inteira (C2)		Parte inteira (C3)		Parte Inteira (C4)
	5	19	8	1	6
	5×60^1	19×60^0	8×60^1	1×60^0	6×60^0
Valor	300	19	480	1	6
SOMA	319		481		6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Depois de converter para decimal obtemos:

1,785192901	319	481	6

Acontece que 481 é o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo e 319 é um dos catetos. O outro cateto, usando o teorema de Pitágoras, valeria 360, mas isso não aparece na tabela. Se fizermos o quociente entre a hipotenusa e este cateto dá $\frac{481}{360} = 1,33611111$, e seu quadrado vale $1,785192901$, que coincide exatamente com o valor escrito na tabela até a nona casa decimal.

A Tabela 4 apresenta a conversão de todos dos valores encontrados na Plimpton 322 para o sistema decimal, conforme a transcrição da Figura 11. Os cálculos foram realizados seguindo o procedimento demonstrado na sexta linha do exemplo discutido anteriormente.

Tabela 4 – Interpretação (decimal)

$\left(\frac{c}{b}\right)^2$ C1	a C2	c C3	$b = \frac{c}{\sqrt{C1}}$
1,98340278	119	169	120
1,94915855	3367	4825	3456
1,91880213	4601	6649	4800
1,88624791	12709	18541	13500
1,81500772	65	97	72
1,7851929	319	481	360
1,71998368	2291	3541	2700
1,69277344	799	1249	960
1,64266944	481	769	600
1,58612257	4961	8161	6480
1,5625	45	75	60
1,48941684	1679	2929	2400
1,45001736	161	289	240
1,43023882	1771	3229	2700
1,38716049	56	106	90

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3 Fatos da China

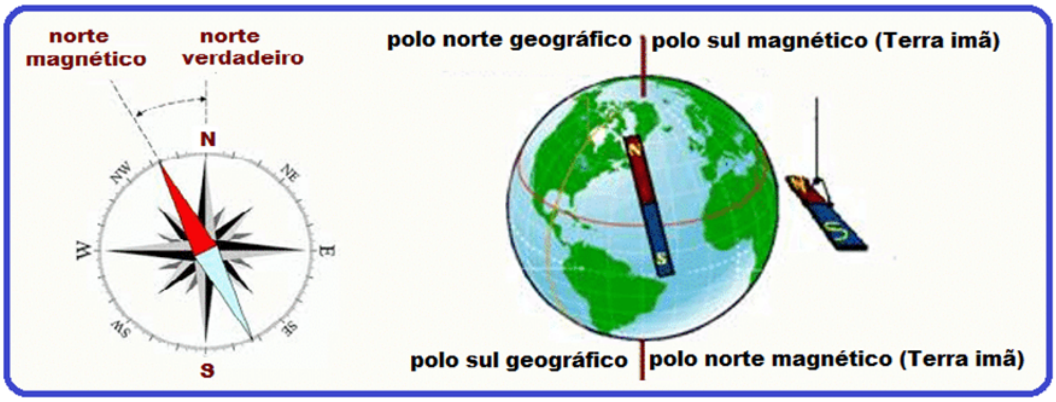
Na antiga China (cerca de 1110 a.C.), a Trigonometria era empregada para medir distâncias, comprimentos e profundidades, especialmente usando triângulos retângulos. A história da Trigonometria na China é marcada por avanços notáveis, especialmente durante o período entre 960 e 1279. Durante essa época, matemáticos chineses reconheceram a importância da Trigonometria Esférica, especialmente para a ciência dos calendários e cálculos astronômicos, possuindo uma história profundamente enraizada na astronomia e na navegação marítima ao longo dos séculos.

Matemáticos chineses, como por exemplo, Liu Hong da dinastia Han, interessado em astronomia desde jovem, foi nomeado para o Observatório Imperial em 160 e envolveu-se em observações astronômicas. Uma das maiores realizações de Liu foi seu trabalho que resultou em um novo calendário, publicado em 187, o qual descrevia o movimento da Lua com muito mais precisão do que qualquer calendário chinês anterior. Suas medições do comprimento da sombra de um pólo nos solstícios de verão e inverno foram precisas em até 1% do valor real.

Outros dois matemáticos chineses notáveis que contribuíram para o desenvolvimento da Trigonometria foram Shen Kuo (1031–1095) e Guo Shoujing (1231–1316).

Shen Kuo, renomado por suas contribuições em geologia, cartografia e astronomia, realizou investigações astronômicas que foram fundamentais para o desenvolvimento dessa área, incluindo a descrição pioneira da agulha magnética da bússola, introduzindo o conceito de norte verdadeiro com base na declinação magnética em relação ao polo Norte. Ele foi pioneiro ao medir a distância entre a Estrela Polar e o polo Norte, aprimorando a determinação desse meridiano astronômico.

Figura 12 – Norte verdadeiro e Norte geográfico.



Fonte: Conhecimento científico, 2024.

Naquela época, o protótipo da bússola era bastante diferente do modelo atual. Consistia em um prato quadrangular que simbolizava a Terra, sobre o qual era posicionada uma colher feita de magnetita. Já na bússola magnética nos primeiros modelos, os chineses usavam um pedaço de madeira ou rolha contendo uma agulha magnética que flutuava sobre a água, e esta indicava o norte magnético.

Figura 13 – Protótipo da bússula de antigamente.

Fonte: Brasil escola, 2024.

Além disso, ele propôs um modelo onde os planetas se moviam ao redor da Terra em um padrão de movimento composto, combinando movimento circular. Suas descobertas sobre o norte verdadeiro, a forma Esférica do sol e da lua, cálculos de calendários lunissolares, revisão de eclipses solares e lunares com precisão e sua reforma no calendário chinês baseada em observações precisas, destacam sua importância na Trigonometria e na ciência chinesa.

Já o matemático chinês Guo Shoujing, durante o século XIII, desempenhou um papel crucial na reforma do calendário chinês e na condução de observações astronômicas precisas. Seu trabalho incluiu o desenvolvimento de métodos trigonométricos para medir distâncias celestiais, bem como calcular a posição de estrelas e planetas, usando triangulação. Apesar desses esforços notáveis, é importante mencionar que o progresso significativo na Trigonometria chinesa foi interrompido, e não houve novas publicações substanciais sobre o assunto até 1607. A retomada do desenvolvimento trigonométrico na China posteriormente demonstrou a riqueza e a diversidade das contribuições chinesas para o campo matemático. Essas contribuições não apenas impulsionaram a astronomia e a navegação na China, mas também influenciaram o desenvolvimento da Matemática em todo o mundo, fornecendo bases sólidas para o estudo da Trigonometria Esférica moderna e da Geometria Diferencial.

Figura 14 – Busto de Shen Kuo.

Fonte: Wikipedia, 2024.

2.4 Fatos da Grécia

A Trigonometria, originada na Matemática grega, recebeu contribuições cruciais de diversas culturas. Seu surgimento, esteve diretamente ligado às necessidades da astronomia, visando prever acontecimentos celestes, calcular o tempo e aplicar-se à navegação e geografia.

Na Grécia Antiga, Eratóstenes, Hiparco e Ptolomeu foram figuras-chave no desenvolvimento trigonométrico. O conhecimento inicialmente usado por egípcios, babilônios e chineses foi transmitido aos gregos, que se tornaram precursores em Matemática, aprimorando suas conquistas. Os gregos foram os primeiros a estudar as relações entre ângulos (ou arcos) em um círculo e os comprimentos que eles subtendem.

Os gregos antigos desenvolveram técnicas para medir a posição dos astros, utilizando um modelo com duas esferas concêntricas. A Terra era considerada uma esfera fixa envolta por uma esfera maior, onde se encontravam os corpos celestes. Estrelas fixas estavam incrustadas na superfície interna da esfera celeste, movendo-se devido ao giro dessa esfera. Além dos corpos celestes fixos, havia os errantes, como o Sol e a Lua, chamados planetas, que para os gregos moviam-se uniformemente.

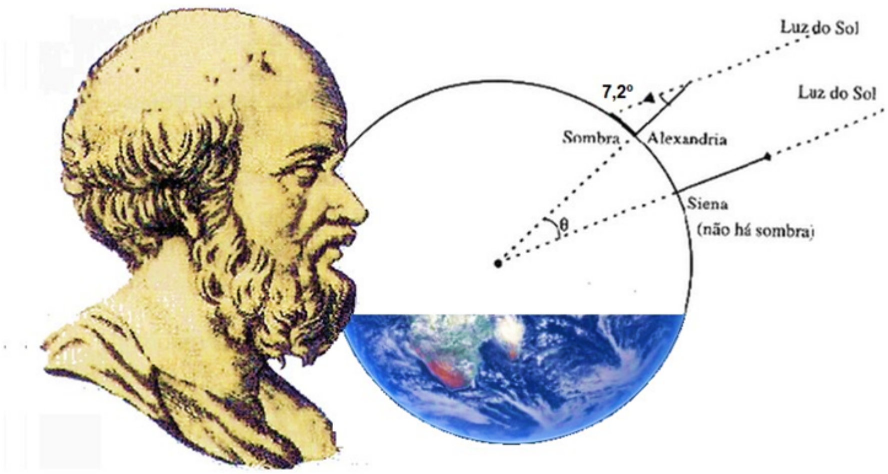
A Trigonometria tornou-se essencial para calcular posições de astros que se moviam sobre a superfície de uma esfera, envolvendo Triângulos Esféricos. No entanto, resolver problemas relacionados à determinação de elementos desconhecidos em triângulos exigia conhecimentos de Trigonometria Plana.

2.4.1 Eratóstenes de Cirene

Eratóstenes, matemático e geógrafo alexandrino do século III a.C., nasceu na cidade grega de Cirene (276 a.C.), atualmente Líbia, morreu em Alexandria (194 a.C.).

Eves (2011) relata que Eratóstenes, tinha conhecimento de que a Terra era Esférica e estimou sua circunferência aproximada. Provou por volta de 240 a.C. que a Terra era redonda, ficou famoso na antiguidade pelo seu método de determinar o tamanho da circunferência da Terra com uma boa precisão.

Figura 15 – Medida da circunferência calculada por Eratóstenes



Fonte: Jornal opção, 2024.

Eratóstenes fora diretor da Biblioteca de Alexandria, e nas leituras dos manuscritos da biblioteca teve conhecimento que um solstício de verão no Hemisfério Norte na cidade de Siena, era exatamente ao meio dia, onde o sol iluminava por completo o fundo de um poço lá localizado, porém o mesmo não acontecia em Alexandria. A partir daí, Eratóstenes fez a seguinte experiência: colocou uma haste de madeira enfincada no chão na cidade de Siena e outra na cidade de Alexandria, no entanto ele concluiu que, se a Terra fosse plana a sombra das hastes deveria ser igual não importando o local, nem a hora. Ele notou que enquanto em Siena não havia sombra ao meio dia, em Alexandria, havia a projeção de uma sombra com ângulo de $7,2°$, sendo assim o ângulo de curvatura entre essas duas cidades era de $7,2°$, porém sabendo que a distância entre elas é de 800km, e que uma circunferência mede $360°$, com alguns cálculos, chegou à conclusão que a circunferência da Terra era de 40.000km, chegando muito próximo do valor que hoje conhecemos que é de 40.075km.

2.4.2 Hiparco de Nicéia

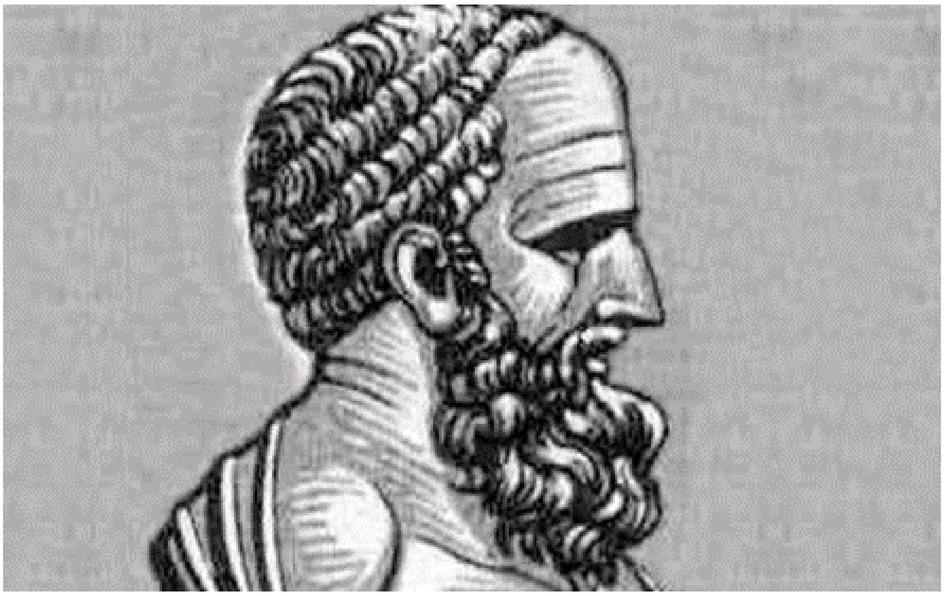
Pelo fato de escrever a primeira tabela trigonométrica, Hiparco ficou conhecido como “Pai da Trigonometria”, nasceu em Nicéia e viveu entre 180 e 125 a.C.. Hiparco foi um dos pioneiros da Trigonometria ocidental, sua contribuição foi extraordinária, deixando um legado que perdura até os dias atuais.

> Então, presumivelmente durante a segunda metade do segundo século a.C., foi compilada a que foi aparentemente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Niceia (por volta de 180-125 a.C.), que assim ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria". (BOYER; MERZBACH, 2012, p.124)

Algumas de suas principais contribuições incluem a observação e documentação da precessão dos equinócios, um fenômeno em que o ponto que o Sol cruza o equador celeste se desloca lentamente ao longo do tempo. Ele também trabalhou na criação de tabelas lunares precisas para prever a posição da Lua no céu em momentos específicos, as quais foram usadas por muitos séculos para navegação e cálculos astronômicos.

Boyer e Merzbach (2012) destaca que Hiparco desempenhou um papel crucial na evolução da astronomia, atuando como uma ponte entre a tradição babilônica e os desenvolvimentos posteriores de Ptolomeu.

Figura 16 – Hiparco de Nicéia (180 a.C -125 a.C).



Fonte: Unicentro Paraná, 2024.

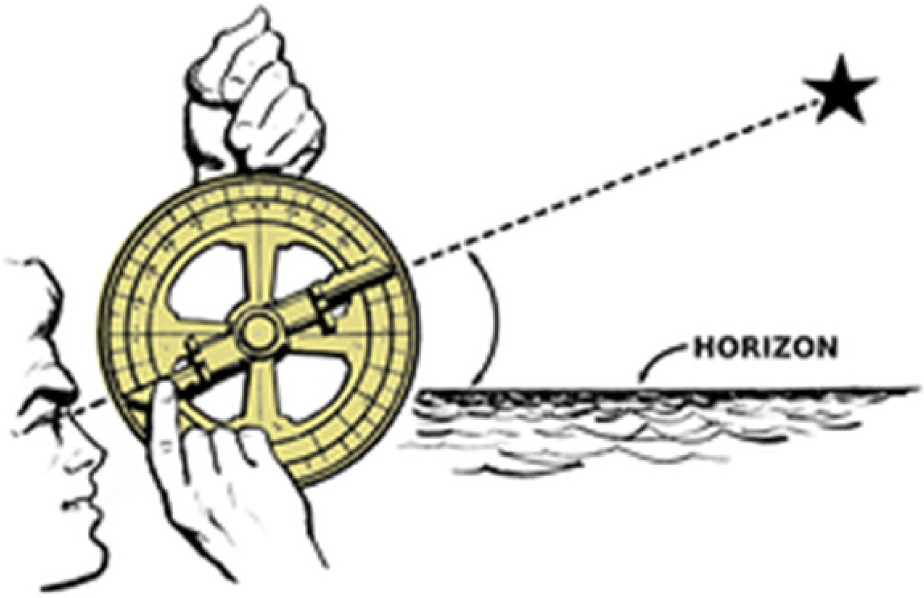
Seu legado inclui uma série de contribuições significativas, como a organização meticulosa de dados empíricos da astronomia babilônica, a criação de um catálogo estelar detalhado e o refinamento de constantes astronômicas essenciais, como a duração do mês e do ano, o tamanho da Lua e o ângulo de inclinação da eclíptica. Uma de suas descobertas mais importantes foi a identificação da precessão dos equinócios, um fenômeno fundamental para compreender o movimento aparente do eixo de rotação da Terra. Esses avanços fundamentais foram essenciais para o desenvolvimento posterior da astronomia.

Na Trigonometria, ele desenvolveu métodos para calcular distâncias e ângulos relacionados a corpos celestes, e estudou a paralaxe lunar, uma mudança aparente na posição da Lua no céu quando observada de diferentes pontos da Terra. Suas observações contribuíram para determinar a distância da Lua com uma precisão razoável para a época.

Desenvolveu um dioptro especial, conhecido como Bastão de Tiago, que consistia em uma régua graduada com guia e cursor, utilizado para medir ângulos. Empregou-o na medição do diâmetro aparente do Sol e da Lua, além de determinar as coordenadas celestes das estrelas.

Criou um sistema de localização baseado no cálculo de longitude e latitude, além de dividir o mundo habitado conhecido em zonas climáticas. Ele também desenvolveu um método de projeção estereográfica para a cartografia. Em relação às observações astronômicas, Hiparco foi pioneiro no desenvolvimento do astrolábio, um instrumento fundamental que revolucionou a astronomia da época.

Figura 17 – Astrolábio náutico.



Fonte: Wikipedia, 2024.

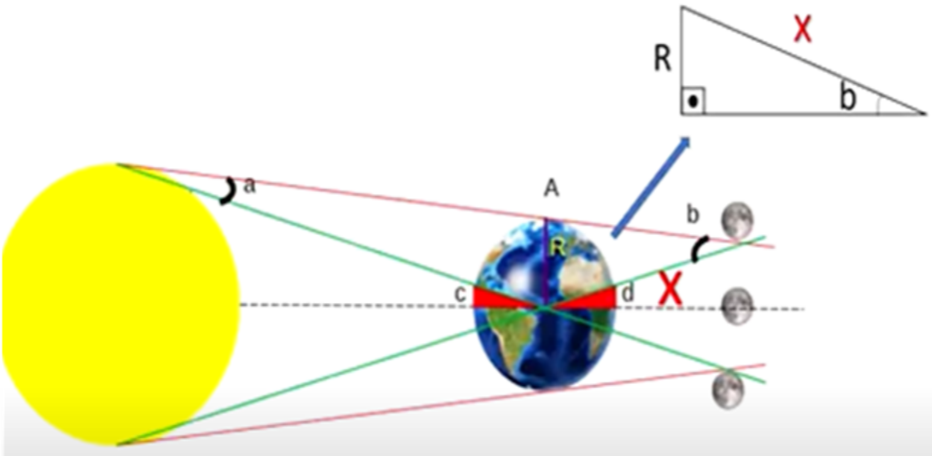
O astrolábio permitia medir distâncias angulares no céu, possibilitando o mapeamento das estrelas e a determinação do início das estações, além de facilitar o cálculo da duração do ano. Com esse instrumento, Hiparco compilou um catálogo estelar preciso, que é uma lista detalhada de estrelas registrando suas posições e longitudes. Ele catalogou cerca de 850 estrelas e estabeleceu a escala de magnitude aparentes a elas, com base em sua luminosidade relativa, o impacto do catálogo de estrelas de Hiparco foi imenso que ainda é utilizada na astronomia contemporânea.

Figura 18 – Magnitudes aparentes: brilho aparente das estrelas.

Fonte: Slideplayer, 2024.

Foi o primeiro a calcular a distância entre a Terra e a Lua, usando ideias trigonométricas elementares e observações de um eclipse lunar. Desenvolveu um método inovador baseado nas posições relativas do Sol, Terra e Lua durante esse evento, quando a Terra fica alinhada entre o Sol e a Lua. Para realizar esses cálculos, ele utilizou o esquema abaixo.

Figura 19 – Ideia de como Hiparco teria feito o cálculo da distância entre a Terra e a Lua.



Fonte: Astronomia no zênite, 2024.

Imaginou dois triângulos retângulos, cujas hipotenusas ligariam o centro da Terra às bordas do disco solar e lunar, por ocasião de um eclipse da Lua. Da Figura acima, tem-se:

$$\operatorname{sen} b = \frac{R}{X} \Rightarrow 62R \leq X \leq 74R.$$

Ele chegou à conclusão de que a distância até a Lua seria entre 62 e 74 vezes o raio da Terra. Esse valor é muito próximo ao conhecido hoje, que fica entre 57 e 64 vezes o raio da Terra. Ou seja, mesmo sem conhecimento aprofundado de Trigonometria, seria possível estimar a distância da Lua simplesmente fazendo um desenho esquemático, em escala, e medindo nele a distância.

Hiparco deduziu com precisão o valor de $8/3$ para a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua, bem como a distância da Lua à Terra, estimando-a em 59 vezes o raio terrestre, valor que se aproximava do correto, 60 vezes o raio terrestre. Além disso, ele determinou a duração do ano com uma margem de erro de apenas 6 minutos e, até o final de sua vida, dedicou-se ao estudo da Lua e elaborou a previsão dos eclipses futuros, por 600 anos.

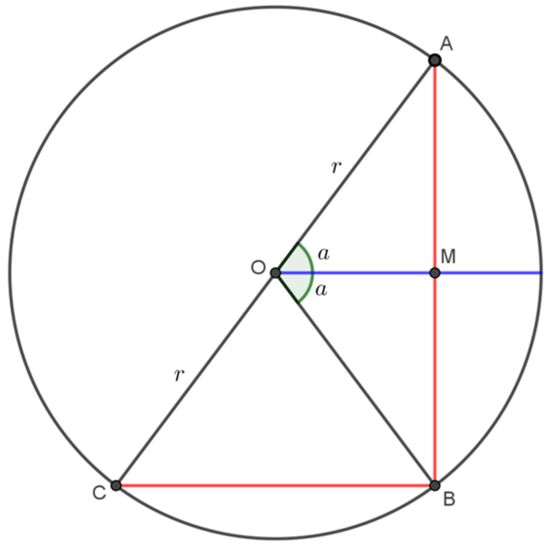
Na segunda metade do século II a.C., Hiparco produziu um tratado em doze volumes intitulado "Sinos", evidenciando seu profundo conhecimento sobre a construção daquela que possivelmente foi a primeira tabela trigonométrica, conhecida como "tábua de cordas". Esse tratado abordava as relações de cordas e tinha como base fundamental a Astronomia.

Na época, acreditava-se que o Sol, a Lua e os planetas se moviam em órbitas circulares com a Terra como centro, o que influenciou grandemente o trabalho de Hiparco. Essa obra representou um marco significativo no desenvolvimento da Trigonometria e teve um impacto duradouro nas ciências matemáticas e astronômicas.

Destacando-se por determinar com precisão o nascer e o pôr de várias estrelas, Hiparco utilizou sua tabela de cordas para esse fim. Essa tabela, a primeira da história da Matemática, continha valores das cordas de uma série de ângulos de $0°$ a $180°$, sendo uma ferramenta essencial para cálculos astronômicos. Baseada na relação entre o comprimento da corda e o raio do círculo, a tabela permitia cálculos aproximados dos arcos de circunferência, antecedendo o desenvolvimento moderno da Trigonometria. Além de sua aplicação astronômica, a Tabela de Cordas também foi utilizada em geometria e navegação, demonstrando a amplitude de seu impacto e importância para a Matemática e outras ciências.

Na antiguidade, a Trigonometria fundamentava-se na relação entre um arco arbitrário e sua corda. Hiparco contribuiu significativamente para esses estudos ao desenvolver métodos para calcular o comprimento das cordas, o que resultou na criação da primeira tabela trigonométrica. Embora a corda de um arco não seja diretamente relacionada ao seno, uma vez que se conheça o comprimento da corda, é possível calcular o seno da metade desse arco. Esse método pode ser visualizado na Figura abaixo:

Figura 20 – Calculando o seno, conhecendo o comprimento da corda.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Onde:

$$\operatorname{sen} a = \frac{AM}{AO} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{Corda de } 2 \cdot a}{2r} \Rightarrow \text{ Corda de } 2a = 2r \cdot \operatorname{sen} a.$$

Uma tábua de cordas posterior, atribuída ao matemático Claudio Ptolomeu que viveu aproximadamente entre 85 e 165 d.C., foi desenvolvida a partir da descoberta de Hiparco.

> O comentador Têon de Alexandria (sec. IV) atribui a Hiparco um tratado em 12 livros que se ocupa da construção de uma tábua de cordas. Acredita-se que uma tábua de cordas posterior, devida a Cláudio Ptolomeu, que fornece os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, de 1/2° a 180°, com incrementos de 1/2°, pode ter-se baseado na de Hiparco. Divide-se o raio do círculo em 60 partes e se expressam os comprimentos das cordas sexagesimalmente em termos dessas partes.(EVES, 2011, p.203)

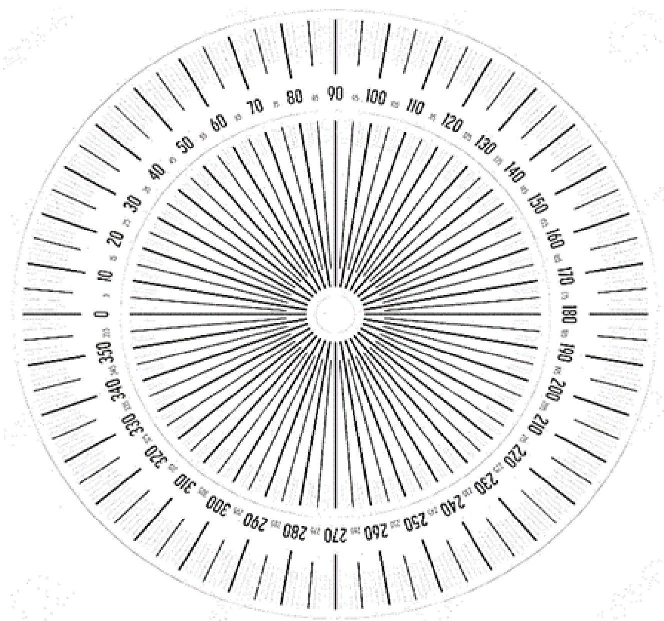
Embora a Trigonometria moderna tenha substituído amplamente a Tabela de Cordas para cálculos trigonométricos, a contribuição de Hiparco com essa tabela foi de suma importância, pois suas observações e métodos influenciaram gerações posteriores de astrônomos e matemáticos.

Acredita-se que o astrônomo grego Hipsicles, por volta de 180 a.C., tenha sido o primeiro a dividir o círculo em 360 partes, seguindo uma prática já estabelecida pelos caldeus.

Boyer e Merzbach (2012) destaca que não é claramente estabelecido quando o uso sistemático do círculo de 360° foi incorporado à Matemática, mas parece dever-se em grande parte a Hiparco, por meio de sua tabela de cordas. É possível que ele tenha retomado essa ideia de Hipsicles, que anteriormente havia dividido o dia em 360 partes, uma subdivisão que pode ter sido sugerida pela astronomia babilônica.

Cerca de 30 anos depois, por volta de 150 a.C., Hiparco introduziu na Grécia essa divisão do círculo em 360 partes iguais, generalizando o procedimento. Ele percebeu a necessidade de medir circunferências e seus arcos, e também propôs a localização de pontos sobre a superfície da Terra por meio de latitudes e longitudes. Hiparco foi influenciado pelos conhecimentos dos babilônios, que consideravam o ano como um período de 360 dias (12 meses de 30 dias cada). Os babilônios, para facilitar seus cálculos, desenvolveram um sistema numérico baseado em 60, conhecido como sistema sexagesimal. O número 60 é notável por ser um dos menores números abaixo de 100 com uma ampla variedade de divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60), o que justifica sua adoção nesse contexto.

Figura 21 – Círculo de 360°.



Fonte:123RF, 2024.

A possibilidade de ter usado o número 60 para representar 1/6 do total que se tornou 360 pode ter sido influenciada pela prática de dividir um círculo em 6 partes iguais, uma tarefa simples para os especialistas da época.

Essa influência é evidente nas frações sexagesimais babilônicas, usadas em traduções árabes de Ptolomeu, que eram descritas como "primeiras menores partes" (sexagésimos) e "segundas menores partes" (sexagésimos de sexagésimos). Esses termos foram traduzidos para o Latim como "partes minutae primae" e "partes minutae secundae", respectivamente, originando as palavras minuto e segundo.

Outro fator que pode ter influenciado a escolha do número 360 é o movimento de translação da Terra ao redor do Sol, aproximadamente em 360 dias, uma estimativa razoável naquela época. Hiparco, com precisão notável, mediu a duração do ano, obtendo 365,2467 dias, que atualmente corresponde a 365,2222 dias.

É importante destacar que muitas das obras e escritos originais de Hiparco foram perdidos ao longo do tempo, e nosso conhecimento de suas contribuições é baseado em grande parte em referências e citações em trabalhos de outros astrônomos e matemáticos. O seu feito ganhou mais notoriedade, durante a época romana, depois de ter sido citado várias vezes pelo astrônomo e matemático grego Cláudio Ptolomeu, o qual escreveu o "Almagesto".

2.4.3 Claudio Ptolomeu

Claudio Ptolomeu, um astrônomo, matemático e geógrafo greco-romano que viveu entre 85 e 165 d.C., é conhecido por sua influente obra "Almagesto" (Coleção Matemática). Este trabalho, composto por 12 livros, foi uma compilação crucial do conhecimento astronômico da época, descrevendo em detalhes o sistema geocêntrico do universo. O "Almagesto" incluiu extensas tabelas de coordenadas celestes, baseadas em cálculos trigonométricos esféricos, apresentando resultados de Hiparco sobre Trigonometria e Astronomia.

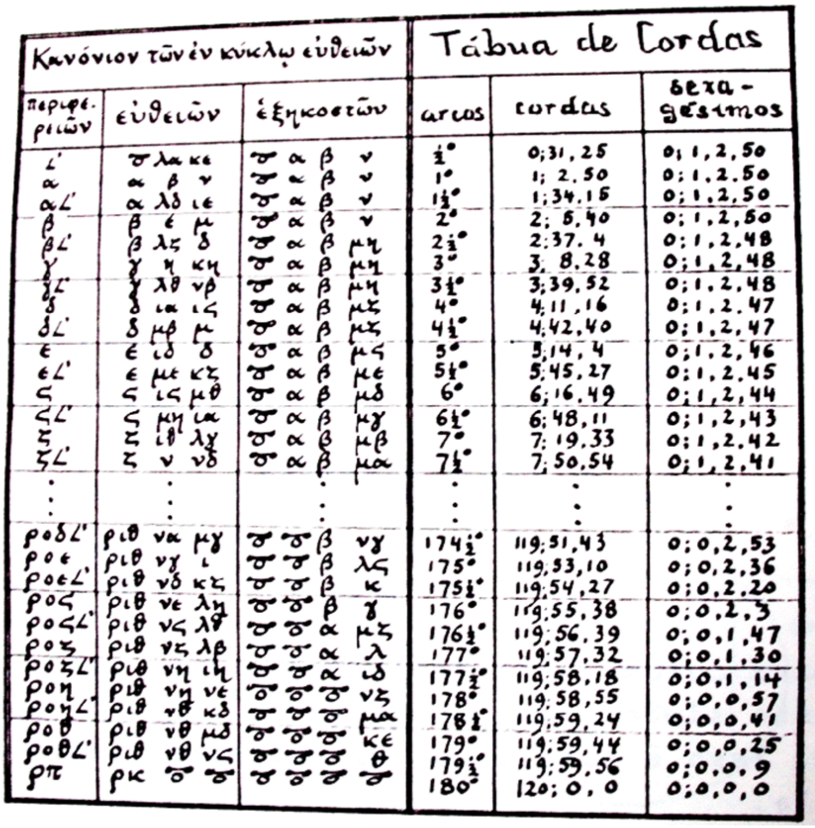
> O Almagesto de Ptolomeu, ao que se supõe, deve muito quanto a seus métodos ao Cordas em um círculo, de Hiparco. Ptolomeu fez uso do catálogo de posições estelares legado por Hiparco, mas se as tabelas trigonométricas de Ptolomeu derivavam, ou não, em grande parte, de seu ilustre predecessor não se pode saber. Felizmente, o Almagesto de Ptolomeu sobreviveu aos estragos do tempo; por isso temos não só suas tabelas trigonométricas, mas também uma exposição dos métodos usados em sua construção.(BOYER; MERZBACH, 2012, p.126)

Ptolomeu utilizou ferramentas matemáticas e de geometria elementar para descrever quantitativamente os fenômenos naturais, demonstrando como tais tabelas podem ser calculadas, inclusive a tabela de cordas, com números escritos em letras gregas usadas como algarismos.

Além disso, Ptolomeu fez contribuições significativas para a geografia, com seu trabalho "Geografia" servindo como uma importante fonte de informações sobre a Terra e seus continentes por muitos séculos. Ele também desempenhou um papel fundamental na preservação e ampliação da obra de Hiparco, destacando-se como um dos principais matemáticos de sua época.

No primeiro livro do Almagesto, Ptolomeu apresenta uma tábua de cordas, possivelmente um aprimoramento da tábua desenvolvida por Hiparco. Ele calcula as cordas de ângulos variando de 0 a 180°, de meio em meio grau, conforme mostra a Figura 22.

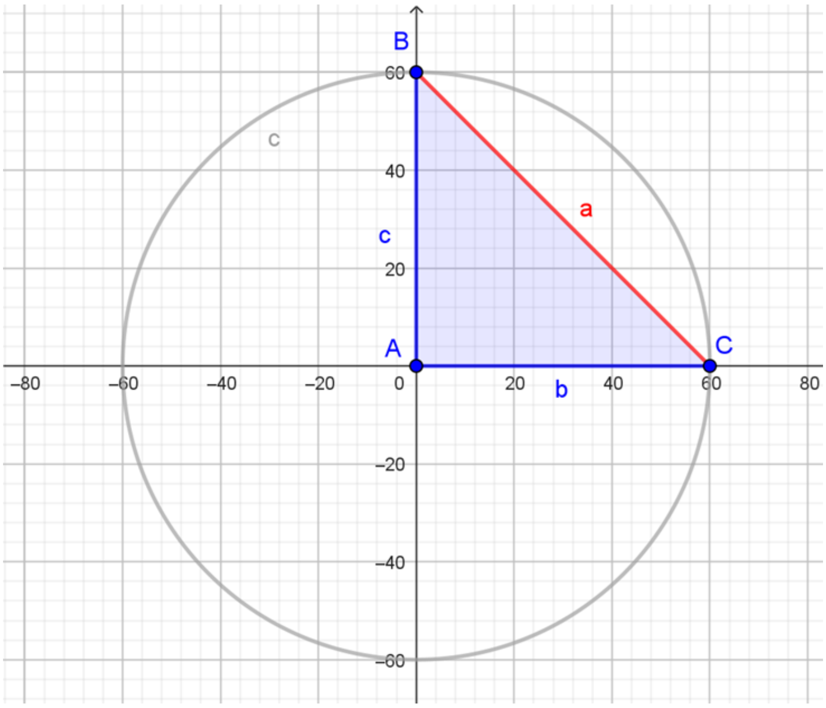
Figura 22 – Tábua de Cordas de Ptolomeu.



Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Tábua de Cordas		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcos	cordas	sexagesimos
∠'	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1; 2.50	0:1.2.50
α∠'	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34.15	0;1.2.50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2; 5.40	0;1,2,50
β∠'	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2:37. 4	0:1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3; 8.28	0;1,2,48
γ∠'	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39.52	0;1.2.48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0:1.2.47
δ∠'	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠'	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0:1.2.45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠'	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19.33	0;1,2.42
ζ∠'	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠'	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠'	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠'	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56.39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57.32	0;0,1.30
ροζ∠'	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58.18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠'	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠'	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59.56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120; 0, 0	0;0,0,0

Fonte: Researchgate, 2024.

Figura 23 – Corda com ângulo de 90°.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Por exemplo, ao estudar um ângulo de 90°, Hiparco utilizava um círculo com diâmetro de 120 unidades, resultando em um raio de 60 unidades. Os resultados eram apresentados na base 60, que era o sistema numérico utilizado pelos islâmicos, conhecido como sistema sexagesimal. Ao calcular a corda BC, ele chegou ao seguinte resultado:

$$\overline{BC}^2 = 84 + \left(\frac{51}{60}\right) + \left(\frac{10}{60^2}\right),$$

o que equivale hoje a calcularmos e termos que:

$$\overline{BC}^2 = 60^2 + 60^2.$$

Tempos depois o matemático indiano Aryabhata (476d.C – 550d.C), aprofunda o estudo de cordas do Ptolomeu, e vai calculando para outras cordas também.

Claudio Ptolomeu foi responsável também pela criação do referenciamento geográfico por meio da utilização de latitudes e longitudes. Além disso, ele resolveu um dos principais desafios da cartografia ao desenvolver a representação bidimensional da superfície Esférica terrestre.

Além de suas várias contribuições significativas tanto para a astronomia como a geografia, Ptolomeu teve influência marcante na matemática, especialmente na Trigonometria.

2.4.4 Menelau de Alexandria

Matemático e astrônomo grego nascido por volta de 100 d.C. em Alexandria, desempenhou um papel crucial na história da Trigonometria. Ele foi pioneiro ao definir triângulos esféricos e escreveu um tratado em seis livros sobre cordas em um círculo, embora parte desse trabalho tenha se perdido ao longo do tempo. Felizmente, seu tratado "Sphaerica", em três livros, foi preservado em uma versão árabe, sendo o mais antigo trabalho conhecido sobre Trigonometria Esférica.

Menelau também contribuiu significativamente para a Trigonometria ao desenvolver o teorema que leva seu nome. Além disso, ele continuou os trabalhos de Hiparco em Trigonometria. Sua dedicação à geometria clássica resultou em várias obras sobre Trigonometria e Geometria. Menelau deixou um legado importante na matemática, especialmente na Trigonometria Esférica, com suas contribuições para o estudo das relações angulares em esferas.

Boyer e Merzbach (2012) relata que Menelau de Alexandria escreveu um tratado em seis livros sobre Cordas em um círculo por volta de 100 d.C. Embora outras obras de matemática e astronomia de Menelau tenham sido citadas por comentadores posteriores, a única que sobreviveu, em tradução árabe, foi sua Sphaerica. No Livro I de Sphaerica, Menelau estabeleceu a base para triângulos esféricos, de forma semelhante à abordagem de

Euclides para triângulos planos. Ele apresentou um teorema único, não encontrado na geometria euclidiana, afirmando que dois triângulos esféricos são congruentes se seus ângulos correspondentes forem iguais. Além disso, demonstrou o teorema de que a soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior que 180°. O segundo livro de Sphaerica descreve a aplicação da Geometria Esférica à astronomia, com pouco interesse matemático. Já o livro III, o último, contém o famoso "Teorema de Menelau", essencial para a Trigonometria Esférica. Nessa forma grega típica, Menelau e seus sucessores referiam-se às cordas de um círculo simplesmente como a corda correspondente ao arco. Menelau também dominava identidades trigonométricas, usando duas delas como lemas para demonstrar seu teorema sobre transversais.

I) **Teorema de Menelau:** Em um triângulo esférico ABC, cortado por uma linha reta (ou transversal) DE, as seguintes proporções são válidas:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$$

ii) **Teorema dos ângulos externos:** Em um triângulo esférico ABC, os ângulos externos $\angle A', \angle B', \angle C'$ são relacionados aos ângulos internos $\angle A, \angle B, \angle C$ pelas seguintes equações:

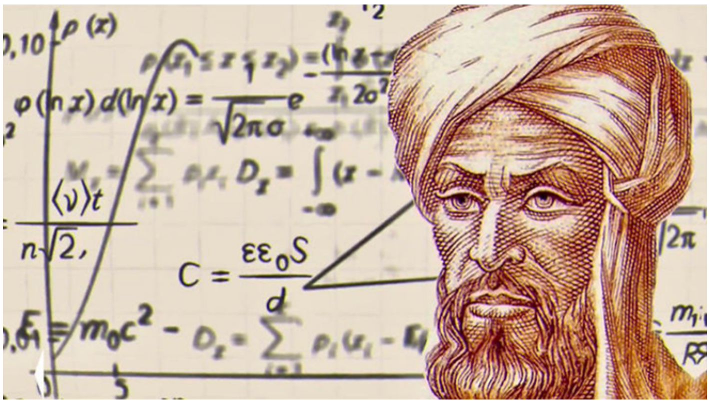
- $\cos \angle A' = -\cos \angle A$
- $\cos \angle B' = -\cos \angle B$
- $\cos \angle C' = -\cos \angle C$

Esses Teoremas são fundamentais na Trigonometria Esférica e têm aplicações importantes em várias áreas, incluindo astronomia e geodésia. Sua obra foi fundamental para o desenvolvimento da Trigonometria Esférica, deixando um legado duradouro na Matemática antiga.

2.5 Contribuições da Idade Média e Moderna

Durante a Idade Média (Século V-XV), os matemáticos árabes desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento da Trigonometria, no entanto destaca-se o matemático árabe Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, conhecido por criar o termo "Trigonometria".

Figura 24 – Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.



Fonte: Bayt Al Fann, 2024.

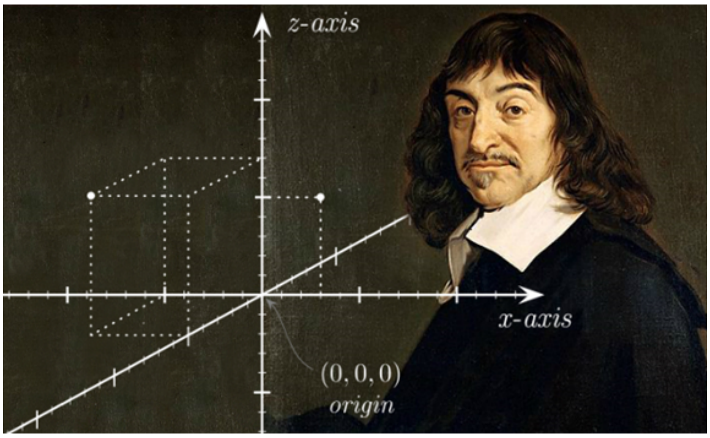
Johan Müller, matemático e astrônomo do século XV, desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da Trigonometria. Sua obra, intitulada "De Triangulis Omnimodis Libri Quinque", escrita por volta de 1464 e publicada posteriormente em 1533, representa a primeira exposição sistemática da Trigonometria Plana e Esférica na Europa, sendo um tratado independente da Astronomia.

Boyer e Merzbach (2012) descreve que o primeiro livro de "De Triangulis", escrito por volta de 1464, inicia-se com conceitos fundamentais, em grande parte derivados de Euclides, sobre grandezas e razões. Em seguida, apresenta mais de cinquenta proposições sobre a resolução de triângulos, utilizando as propriedades dos triângulos retângulos. O segundo livro começa com uma declaração clara e uma demonstração da lei dos senos, abordando problemas de determinação de lados, ângulos e áreas de triângulos planos, dadas certas condições específicas. O terceiro livro contém teoremas semelhantes aos encontrados em antigos textos gregos sobre "Esféricos", anteriores ao uso da Trigonometria. Por fim, o quarto livro aborda a Trigonometria Esférica, incluindo a lei Esférica dos senos.

Já na Europa Renascentista (entre os séculos XIV e XVI), a Trigonometria continuou a ser desenvolvida, com os matemáticos explorando aplicações em óptica, mecânica e astronomia. Nesse período, foram feitos esforços para utilizar os cálculos trigonométricos na resolução de problemas práticos.

No século XVII, o matemático francês René Descartes introduziu o sistema de coordenadas cartesianas, permitindo representar problemas matemáticos de forma mais precisa e facilitando o estudo da Trigonometria Esférica.

Figura 25 – René Descartes.



Fonte: Blogspot - Matemática, 2024.

Um dos marcos mais significativos na Trigonometria Esférica foi o trabalho de François Viète (1540-1603), matemático francês que iniciou o desenvolvimento sistemático do cálculo de medidas de lados e ângulos em triângulos planos e esféricos. Viète contribuiu para o avanço da Trigonometria Esférica ao utilizar as seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) e desenvolver métodos precisos de cálculo.

Durante a Idade Moderna (séculos XV ao XVIII), a Trigonometria Esférica continuou a evoluir, com importantes contribuições de matemáticos como Tycho Brahe, Johannes Kepler e Isaac Newton. Newton, em particular, apresentou a lei da gravitação universal em sua obra "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (1687), utilizando métodos trigonométricos para calcular órbitas planetárias e posições celestes, impulsionando ainda mais o estudo da Trigonometria Esférica.

Outro matemático importante desse período foi Johann Bernoulli, que trabalhou com séries trigonométricas e funções elípticas, essenciais para o estudo de superfícies Esféricas. Bernoulli contribuiu com a teoria das integrais elípticas, ampliando as aplicações da Trigonometria Esférica na resolução de problemas complexos.

Em síntese, a trajetória histórica da Trigonometria Esférica evidencia sua relevância contínua, adaptando-se às necessidades das sociedades ao longo do tempo e influenciando o desenvolvimento da Matemática e da ciência moderna.

3 CONCEITOS BÁSICOS

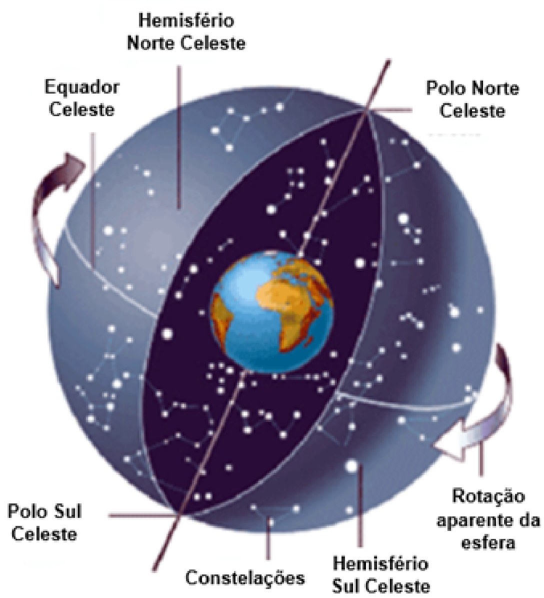
Neste capítulo, abordamos os conceitos básicos e algumas demonstrações de forma detalhada, alguns pontos importantes da Geometria Esférica que a diferenciam da Geometria Plana (Euclidiana) são: uma superfície pode ser finita, mas ilimitada; a reta (ou círculo máximo) tem comprimento finito, mas é ilimitada, pois ao percorrer uma circunferência máxima retornamos ao ponto de partida, mas podemos percorrê-la indefinidamente.

No entanto, para o entendimento dos triângulos esféricos, se faz necessários conhecer os conceitos de alguns elementos presentes tanto na linguagem como nos cálculos. O capítulo apresenta-se dividido em três partes: primeiro os principais conceitos fundamentais e definições dos elementos geométricos do globo e da esfera celeste, depois os principais conceitos e demonstrações da Geometria Plana enfatizando a Trigonometria Plana, e por fim os principais conceitos e demonstrações da Geometria Esférica enfatizando a Trigonometria Esférica.

3.1 Elementos geométricos do globo terrestre e da esfera celeste

A seguir apresentamos alguns conceitos para melhor entendimento do globo terrestre e da esfera celeste.

Figura 26 – Esfera Celeste.



Fonte: Instituto Virtual UFC, 2024.

Esfera Celeste: A esfera celeste, Figura 26, é uma representação visual dos astros que vemos no céu. Devido à grande distância desses corpos celestes, perdemos a percepção de profundidade, fazendo com que pareçam estar dispostos em uma única esfera gigante, que chamamos de esfera celeste.

Latitude e Longitude: Latitude é medida a partir do equador e varia de $-90°$ a $90°$. Longitude é medida a partir do meridiano de Greenwich e varia de $-180°$ a $180°$.

Polo: Cada um dos dois pontos mais extremos do eixo de rotação da Terra, conhecidos como Polo Norte e Polo Sul.

Polar: É o diâmetro de um círculo máximo na esfera. Além disso, também se refere à linha imaginária que conecta todos os pontos na superfície da esfera que estão a 90 graus de distância dos polos.

Polo Celeste Norte: É o ponto na esfera celeste onde o prolongamento do eixo de rotação da Terra intersecta a esfera celeste, no hemisfério norte. Este ponto é diretamente acima do polo norte terrestre.

Polo Celeste Sul: é o ponto na esfera celeste onde o prolongamento do eixo de rotação da Terra intersecta a esfera celeste, no hemisfério sul. Este ponto é diretamente acima do polo sul terrestre.

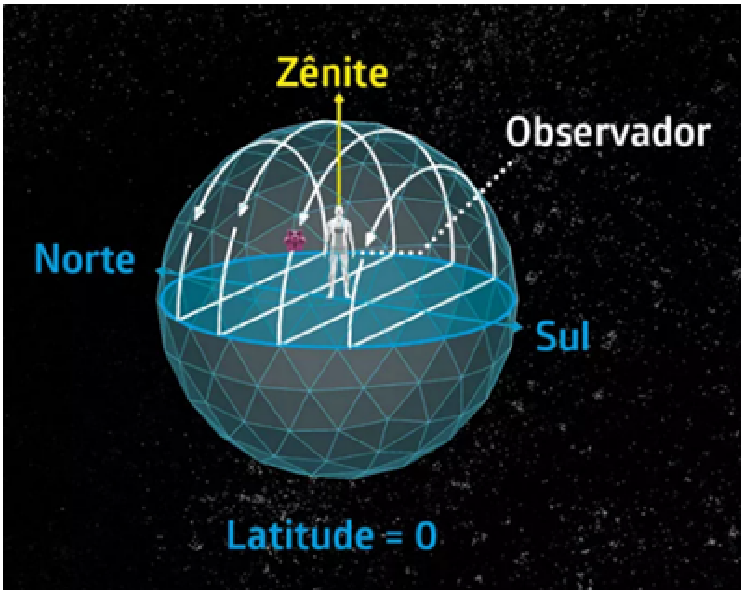
Paralelo: Um paralelo é qualquer círculo da esfera celeste que é paralelo ao equador celeste. Eles são também chamados de círculos diurnos porque são aqueles pelos quais os astros parecem mover-se horizontalmente durante o dia.

Meridiano: também conhecido como círculo horário é qualquer círculo máximo da esfera celeste que passa pelos dois polos celestes , ou seja, polos norte e sul de um planeta. Na Terra, os meridianos são usados para determinar longitudes, sendo o meridiano de Greenwich o principal ponto de referência. Esses círculos são fundamentais na navegação e na criação de mapas, além de serem utilizados na organização dos fusos horários. O meridiano que passa pelo zênite de um observador é chamado de meridiano local.

Horizonte: É um plano tangente à Terra no ponto em que um observador está localizado. Devido ao tamanho muito maior da esfera celeste em comparação com o raio da Terra, o horizonte é considerado um círculo máximo da esfera celeste. Isso significa que ele passa pelo centro da esfera, dividindo-a em dois hemisférios: o hemisfério das estrelas visíveis e o hemisfério das estrelas invisíveis, para aquele momento e local específicos.

Zênite: É o ponto na esfera celeste onde a linha vertical do lugar, perpendicular ao horizonte, intersecta a esfera celeste diretamente acima da cabeça do observador. Essa linha vertical é determinada por um fio de prumo, que aponta diretamente para baixo a partir do observador.

Figura 27 – Zênite.

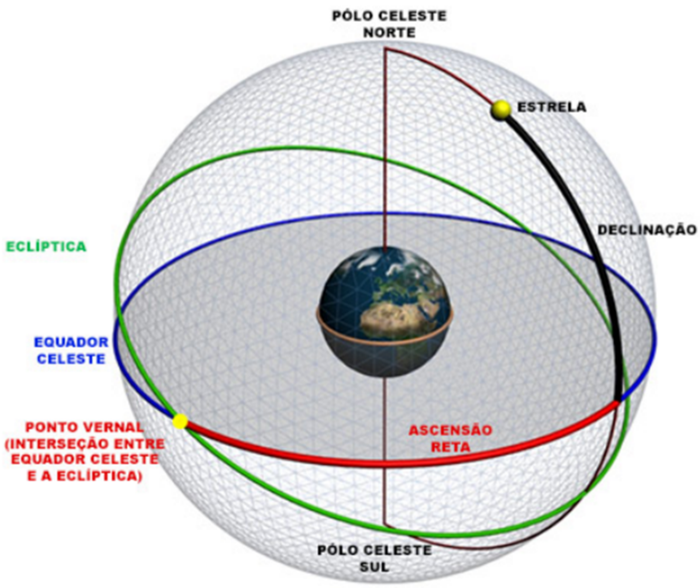


Fonte: Revista Galileu, 2024.

Nadir: O nadir é o ponto diametralmente oposto ao zênite na esfera celeste. Enquanto o zênite está diretamente acima do observador, o nadir está diretamente abaixo, na direção oposta.

Sistema de coordenadas equatoriais celestes: é análogo ao sistema de coordenadas geográficas que utilizamos na Terra, baseando-se em duas medidas principais: declinação e ascensão reta.

Figura 28 – Sistema de coordenadas equatoriais celestes.



Fonte:Parque da ciência, 2024.

Declinação: é uma das coordenadas do sistema de coordenadas equatoriais, usado na astronomia para localizar objetos no céu. Ela é análoga à latitude na Terra, medindo o ângulo de um objeto celeste ao norte ou ao sul do plano do equador celeste. A declinação é expressa em graus, minutos e segundos de arco, com valores variando de +90° no polo norte celeste a -90° no polo sul celeste.

Ascensão Reta: é outra coordenada no sistema de coordenadas equatoriais e é análoga à longitude na Terra. Ela mede o ângulo ao longo do equador celeste, a partir do ponto vernal em direção leste. A ascensão reta é geralmente expressa em horas, minutos e segundos, com 24 horas correspondendo a 360 graus, o que reflete a rotação da Terra.

Ponto Vernal: É o ponto na esfera celeste onde o Sol cruza o equador celeste de sul para norte, durante o equinócio de março. Este ponto serve como a referência de origem para medir a ascensão reta. A ascensão reta é medida ao longo do equador celeste, a partir do ponto vernal, variando de 0h a 24h no sentido leste.

Equador celeste: É um círculo máximo na esfera celeste onde o plano do equador terrestre intersecta a esfera celeste. É uma projeção imaginária do equador terrestre no céu.

3.2 Geometria Plana

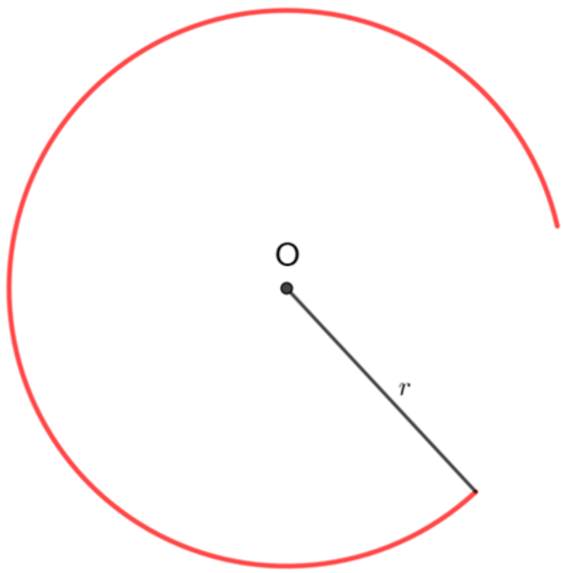
Também conhecida como Geometria Euclidiana em homenagem ao geômetra Euclides de Alexandria, é a parte da Geometria que estuda as propriedades e as medidas das figuras geométricas que estão contidas em um plano, ou seja, em duas dimensões. Ela é baseada nos postulados e axiomas estabelecidos pelo matemático grego Euclides, em sua obra "Os Elementos". Na Geometria Plana, são estudadas figuras como pontos, retas, segmentos de reta, planos, polígonos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.), círculos, entre outras.

3.2.1 Trigonometria Plana

A Trigonometria Plana concentra-se na análise dos triângulos em uma superfície plana, considerando-os como triângulos que estão contidos em um plano infinito. Para tanto iniciamos com alguns conceitos básicos a seguir.

Circunferência: Dados um ponto O de um plano e uma distância r, chamamos de circunferência de centro O e raio r o conjunto dos pontos do plano que distam r e O.

Figura 29 – Circunferência de centro O e raio r.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Arco geométrico: O arco de uma circunferência é uma parte do comprimento da circunferência, limitada por dois pontos quaisquer pertencentes à circunferência. Esse arco é uma porção da circunferência compreendida entre dois pontos específicos, e é usualmente medido em radianos, podendo variar de 0 a 2π radianos (360 graus), que seria a própria circunferência completa, inclusive se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta, conforme podemos observar na Figura 30. Em um círculo trigonométrico com raio unitário, um arco de medida θ corresponde a um ângulo central de θ radianos. Esses arcos são fundamentais na Trigonometria, pois estão diretamente relacionados às funções trigonométricas.

Figura 30 – Arco de circunferência

Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

O comprimento da circunferência de raio r é dado pela fórmula $C = 2\pi r$, onde π(pi) é uma constante aproximadamente igual a 3,14. A medida de um arco é a medida do ângulo central que ele subtende, independente do raio da circunferência que contém o arco, e as unidades comuns para medir arcos são graus e radianos. Já o comprimento do arco é a medida linear do arco ao longo da circunferência, sendo as unidades comuns metros, centímetros, etc.

As principais unidades de medidas de arcos e ângulos, são: grau, grado, radiano e hora.

- **Grau:** é o arco que mede $\frac{1}{360}$ de uma circunferência. As subunidades do grau são o minuto de arco (') , que corresponde a $\frac{1}{60}$ do grau; e o segundo de arco (") que corresponde a $\frac{1}{60}$ do minuto, os segundos são subdivididos em decimais.

  Exemplo: 19° 30' 13,07" (Dezenove graus, trinta minutos, treze segundos e sete centésimos de segundo.)

- **Grado:** é o arco que mede $\frac{1}{400}$ da circunferência (gr), seus submúltiplos são decimais.

  Exemplo: 30,36 gr (trinta grados, trinta e seis centigrados).

- **Radiano:** é o arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência (rad). O radiano subdivide-se em submúltiplos decimais.

  Exemplo: 0,296 rad (duzentos e noventa e seis miliradianos).

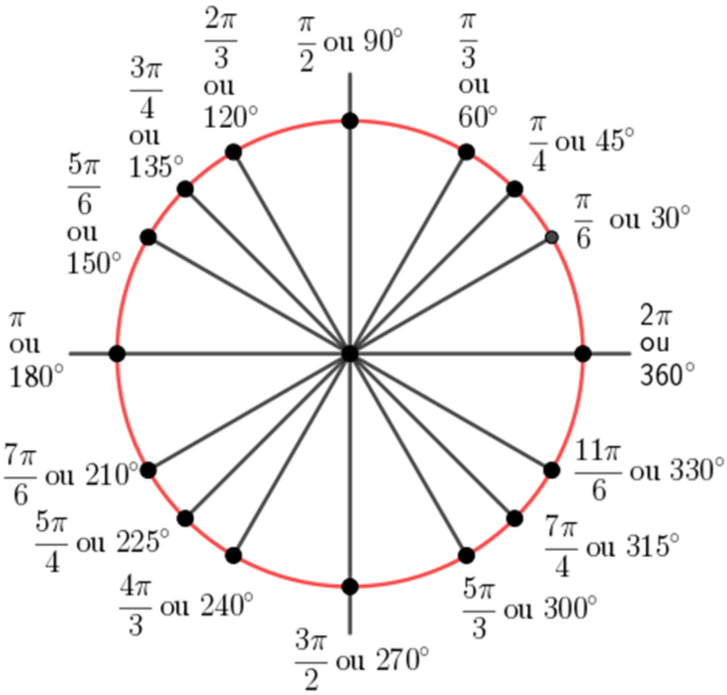
- **Hora:** é o arco correspondente à $\frac{1}{24}$ da circunferência (h). As subunidades da hora são o minuto de arco (min) que corresponde à $\frac{1}{60}$ da hora e o segundo de arco de hora (s) é $\frac{1}{60}$ do minuto de arco de hora, este são subdivididos em submúltiplos decimais.

  Exemplo: 3,186 (três horas, cento e oitenta e seis milésimos).

Circunferência Trigonométrica: também conhecida como Circunferência Orientada, Ciclo Trigonométrico ou Círculo Trigonométrico, tem raio unitário ($r = 1$) e está centrada na origem de um plano cartesiano. Nela, convencionou-se que o sentido de percurso seja o anti-horário, denominado de sentido positivo, o que é amplamente utilizado em trigonometria e Geometria, facilitando a padronização e compreensão dos conceitos relacionados.

Essa circunferência desempenha um papel fundamental na Trigonometria, pois permite associar arcos a pontos do plano de forma sistemática, o que facilita a análise das funções trigonométricas. Cada ponto na circunferência está associado a um ângulo em relação ao eixo x positivo, medido no sentido anti-horário, conforme podemos observar na Figura 31. Essa associação é essencial para o estudo das relações trigonométricas e das propriedades das funções seno, cosseno e tangente.

Figura 31 – Círculo trigonométrico.



Fonte: Elabora pelo autor via software GeoGebra.

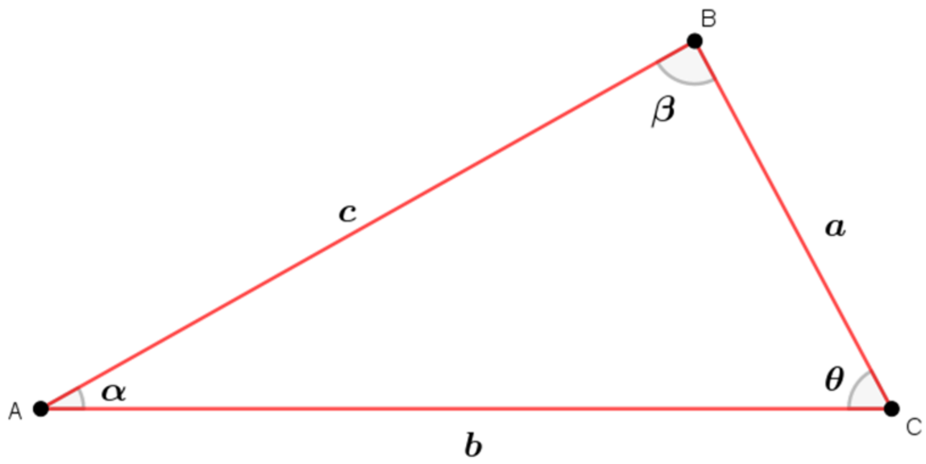
3.2.2 Lei dos senos

A Lei dos Senos estabelece a seguinte proporção em um triângulo de lados medindo a, b e c e ângulos internos α, β e θ, respectivamente:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

Demonstração. Considere um triângulo ABC, onde os lados são a, b, c e os ângulos internos são α, β e θ, respectivamente, como ilustrado na Figura a seguir:

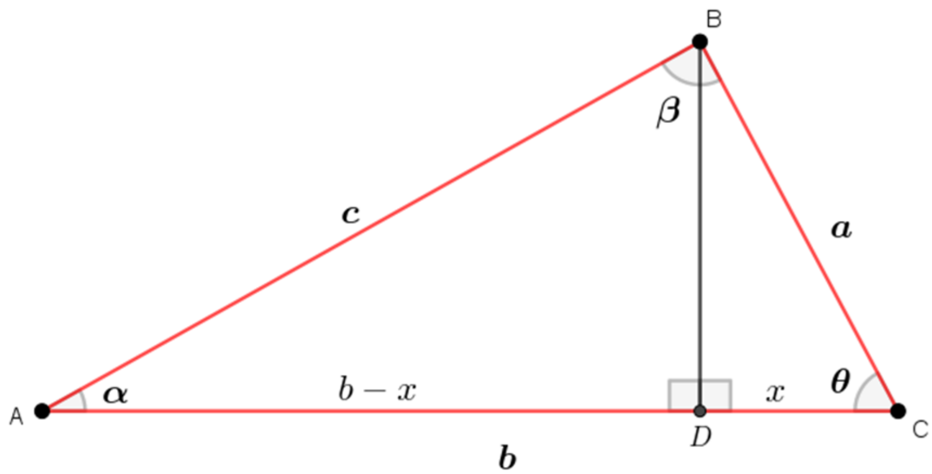
Figura 32 – Triângulo ABC



Fonte: Elabora pelo autor via software GeoGebra.

Usaremos a altura relativa ao lado b como uma linha auxiliar, que dividirá o lado b em duas partes, x e $b - x$.

Figura 33 – Triângulo ABC e altura relativa ao lado AC.



Fonte: Elabora pelo autor via GeoGebra.

Calculando o seno do ângulo α, relativo ao triângulo ABD, teremos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{c}.$$

Assim, o lado BD mede:

$$BD = c \operatorname{sen}\alpha. \tag{3.1}$$

Calculando o seno do ângulo θ, relativo ao triângulo BCD, teremos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{a} \Rightarrow BD = a \operatorname{sen}\theta. \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) concluímos que:

$$c \operatorname{sen}\alpha = a \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}.$$

De modo análogo, ao construir a altura em relação aos outros lados do mesmo triângulo e seguir os mesmos cálculos apresentados, é possível encontrar as seguintes igualdades:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \quad \text{e} \quad \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Logo, a proporção da Lei dos Senos está demonstrada:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}.$$

■

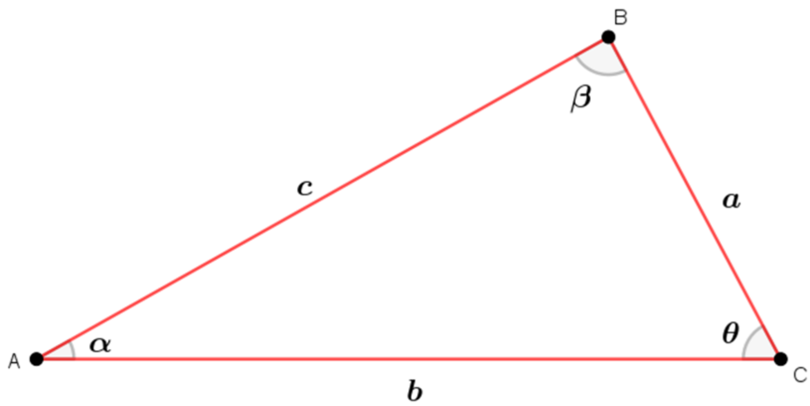
A aplicação da Lei dos Senos requer a escolha adequada da proporção com base nos elementos conhecidos do triângulo, como lados e ângulos. Para determinar o comprimento de um lado desconhecido, é fundamental ter conhecimento dos comprimentos do lado oposto e do ângulo correspondente. Cada ângulo do triângulo está relacionado ao lado oposto por meio da mesma proporção.

3.2.3 Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos é uma expressão matemática que relaciona os três lados de um triângulo qualquer. Ao contrário do Teorema de Pitágoras, que é restrito a triângulos retângulos, a lei dos cossenos pode ser aplicada a qualquer triângulo, seja ele retângulo ou não. Essa lei é especialmente útil para encontrar o comprimento de um lado do triângulo quando os comprimentos dos outros dois lados e o ângulo entre eles são conhecidos, ou para encontrar um ângulo quando os comprimentos dos três lados são conhecidos.

Observe o triângulo ABC:

Figura 34 – Lei dos cossenos no triângulo ABC.



Fonte: Elabora pelo autor via software GeoGebra.

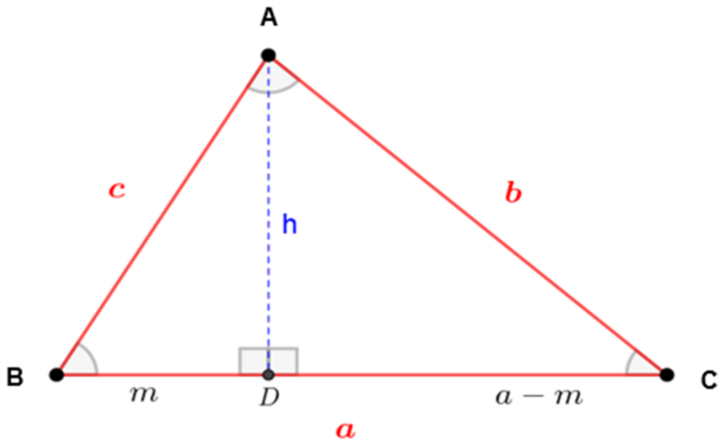
A lei afirma que, em um triângulo com lados de comprimento a, b e c, e ângulos opostos a esses lados α, β e θ, respectivamente, as seguintes relações são verdadeiras:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$;
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$;
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta$.

Demonstração. Dado um triângulo ABC ilustrado na Figura a seguir, onde os lados opostos aos ângulos são a, b e c, e os ângulos opostos aos lados são α, β e θ, respectivamente.

Traçando a altura (h) relativa ao seguimento BC, tem-se dois triângulos retângulos ABD e ACD, e tem-se ainda que o segmento DC mede a–m, e o seguimento BD mede m.

Figura 35 – Triângulo ABC.



Fonte: Elabora pelo autor via GeoGebra.

Analisando o triângulo ABD, temos que:

$$\cos\beta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BD}{AB} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos\beta. \tag{3.3}$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos que:

$$c^2 = m^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = c^2 - m^2 \tag{3.4}$$

Novamente, aplicando o Teorema de Pitágoras, agora no triângulo ACD, temos:

$$b^2 = h^2 + (a-m)^2 = h^2 + a^2 - 2am + m^2. \tag{3.5}$$

Empregando (3.4) em (3.5) obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2 \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2am. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por outro lado, substituindo (3.3) em (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2a(c \cdot \cos\beta) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta. \end{aligned}$$

As demais equações se demonstram de forma totalmente análoga. Assim, obteremos:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$;
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$;
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta$.

Logo, fica demonstrada, assim, a lei dos cossenos para triângulos acutângulos . ■

3.2.4 Tangente

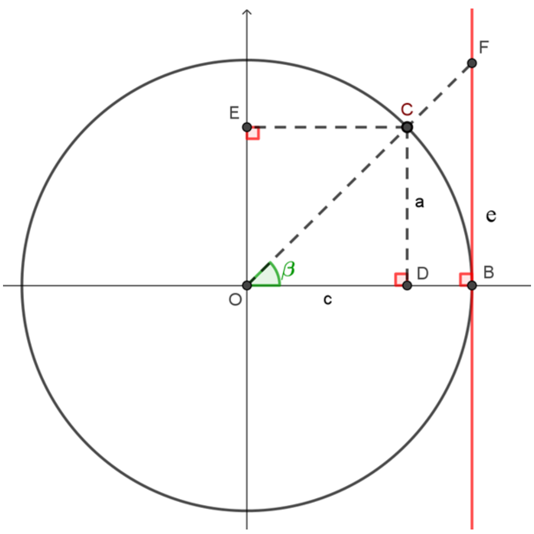
A tangente de um ângulo em um triângulo retângulo pode ser expressa como a razão entre o seno e o cosseno desse ângulo. Isso ocorre porque, em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo é o comprimento do cateto oposto dividido pelo comprimento do cateto adjacente. Assim, temos a relação:

$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}, \text{ com } \cos\beta \neq 0.$$

Essa é uma das identidades fundamentais da trigonometria e mostra a relação entre as três principais funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Considerando a circunferência com centro em O e de raio unitário, traçamos a reta BF como tangente a essa circunferência, conforme Figura abaixo, nesse contexto, observa-se que a extensão do segmento OC intersecta a reta BF no ponto F.

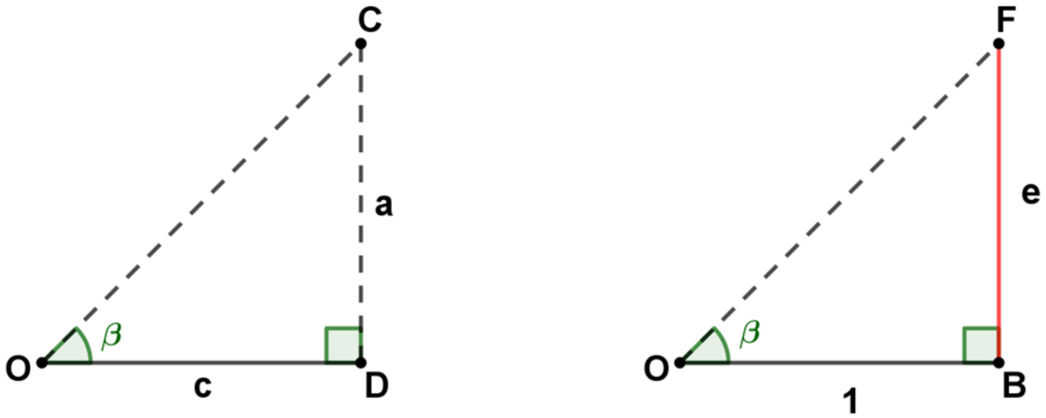
Figura 36 – Círculo trigonométrico traçado a tangente.



Fonte: Elabora pelo autor via software GeoGebra.

Sendo a reta BF tangente à circunferência no ponto B pretende-se identificar qual a relação do segmento BF com as relações seno e cosseno de um ângulo β qualquer. Note que $\beta = F\hat{O}B$ é comum aos triângulos FOB e COD. Assim como FB é paralelo a CD tem-se que os ângulos $O\hat{C}D$ e $O\hat{F}B$ são congruentes. Logo, estes triângulos são semelhantes. Daí, obtém-se:

Figura 37 – Triângulos DOC e BOF.



Fonte: Elabora pelo autor via GeoGebra.

Pela semelhança de triângulos acima obtém- se a relação de proporção:

$$\frac{a}{e} = \frac{c}{1} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{a}{c}.$$

Ora, como $e = BF$, $a = sen\beta$ e $c = \cos\beta$, segue que:

$$e = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad BF = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}.$$

Como $BF = \tan\beta$ por definição, logo, $\tan\beta = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$.

3.3 Geometria Esférica

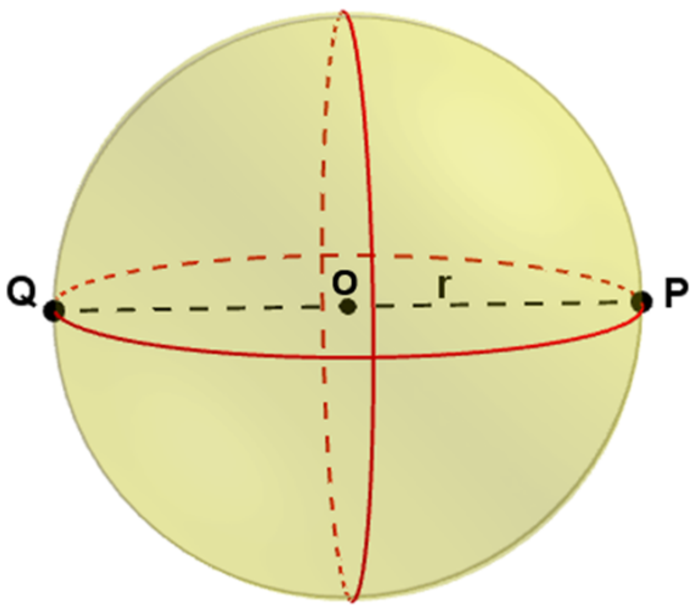
Diferentemente da Geometria Plana, que se baseia em figuras planas, a Geometria Esférica lida com figuras que estão em uma superfície esférica (curva e fechada), como a superfície da Terra.

A Geometria Esférica, desenvolvida por Georg Bernhard Riemann, matemático alemão, surgiu da contestação ao V Postulado de Euclides, conhecido também como Postulado das Paralelas, é uma afirmação fundamental na Geometria Euclidiana. Ele estabelece que, dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta paralela à reta dada que passa pelo ponto. Esse postulado difere dos outros quatro postulados de Euclides, que são mais intuitivos e amplamente aceitos. Riemann argumentou que não há paralelas a uma reta dada e propôs considerar o plano como a superfície de uma esfera, onde as retas são círculos máximos dessa esfera. Esse conceito inovador resultou no desenvolvimento de uma nova Geometria. A questão da aceitação desse postulado ao longo da história levou ao surgimento das Geometrias não euclidianas.

Os conceitos de pontos, retas e ângulos são adaptados para se aplicarem à superfície de uma esfera. Por exemplo, a “reta” na Geometria Esférica é substituída por um “círculo máximo”, que é um círculo cujo centro é o centro da esfera e cujo raio é o raio da esfera. Os “ângulos” são medidos ao longo desses círculos máximos, e a soma dos ângulos internos de um Triângulo Esférico é sempre maior do que 180 graus, ao contrário do que acontece na Geometria Plana.

Esfera: Consideremos um ponto O e um número real positivo r qualquer. A esfera de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto O. Onde, O é o centro da esfera, OP é um raio da esfera, PQ é um diâmetro da esfera e r é a medida do raio da esfera, conforme a Figura 38.

Figura 38 – Esfera.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Superfície Esférica: Uma superfície esférica é uma superfície geométrica que representa uma esfera, ou seja, é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma certa distância fixa (raio) de um ponto dado (centro). Em outras palavras, é a superfície de uma esfera tridimensional. Os Elementos Notáveis da Superfície Esférica são:

i) **Eixo:** Qualquer reta que passe pelo centro O da esfera.

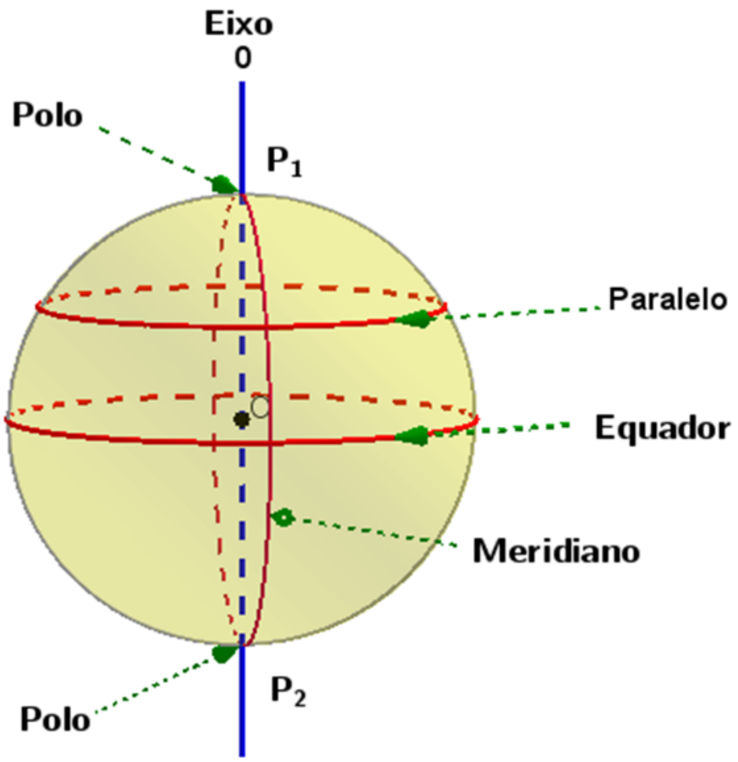
ii) **Polos:** São os pontos de interseção do eixo com a superfície esférica.

iii) **Meridiano:** É uma semicircunferência de maior comprimento cujo plano contém o eixo e conecta os polos.

iv) **Equador:** É uma circunferência de maior diâmetro cujo plano é perpendicular ao eixo.

v) **Paralelo:** É uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo e é paralelo ao equador.

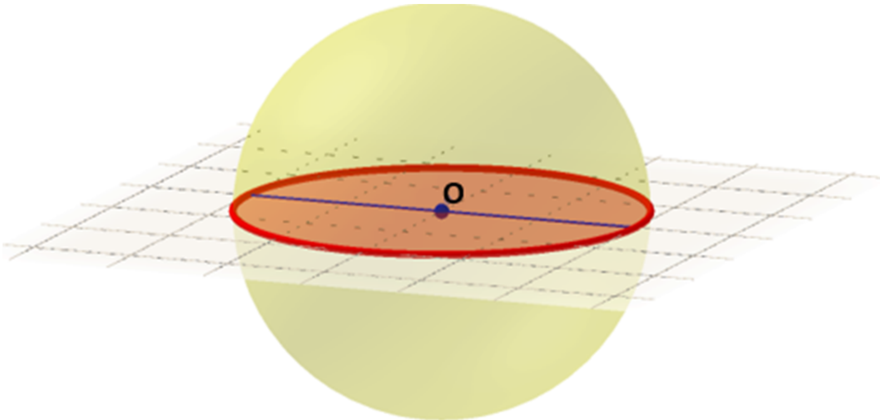
Figura 39 – Superfície Esférica e seus elementos.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Círculo Máximo: são os maiores círculos que podem ser traçados em uma esfera, eles são fundamentais na esfera celeste e na geografia esférica. Meridianos e paralelos são exemplos desses círculos, destacando-se por terem seus raios iguais ao da esfera em que estão contidos, o que os torna os maiores em termos de diâmetro e perímetro. A grande circunferência divide a esfera em dois hemisférios iguais. Já as pequenas circunferências, não concêntricas à esfera, têm raios menores.

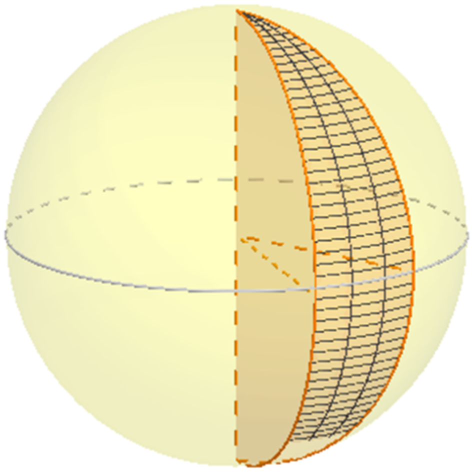
Figura 40 – Circunferência máxima.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra .

Cunha esférica: Sólido resultante da intersecção do diedro com a esfera trigonométrica.

Figura 41 – Cunha esférica.



Fonte: Elaborada pelo autor via GeoGebra.

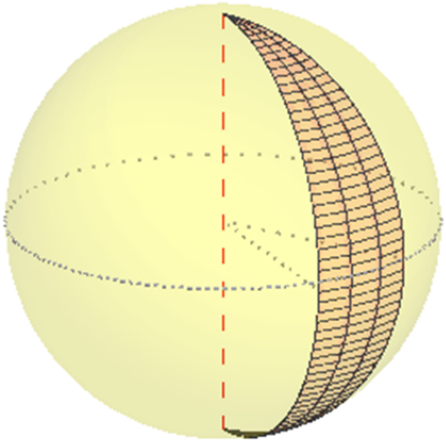
Fuso esférico: superfície resultante da intersecção entre o diedro e a superfície esférica, ou seja, é a parte da superfície da esfera. A sua área pode ser obtida através do seguinte cálculo - em que A_F : Área do fuso esférico, r : raio da esfera e α : ângulo dado em radianos ou em graus.

$$A_F = \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} = 2r^2\alpha, \text{ com } \alpha \text{ em radianos.}$$

ou,

$$A_F = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360°} = \frac{2r^2\alpha}{90°}, \text{ com } \alpha \text{ em graus.}$$

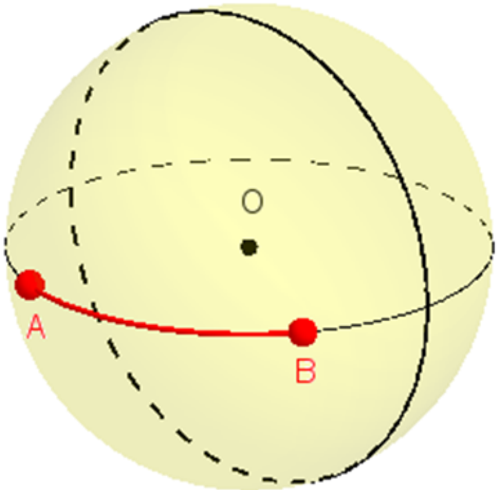
Figura 42 – Fuso esférico.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Geodésica: é uma curva contida na superfície esférica que representa o caminho mais curto entre dois pontos distintos nessa superfície.

Figura 43 – Geodésica.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Em outras palavras, geodésica é o menor arco de círculo máximo que conecta esses dois pontos. Enquanto na Geometria Plana a distância entre dois pontos é representada por um segmento de reta, na Geometria Esférica a distância é medida ao longo de um arco de círculo máximo devido à natureza esférica da superfície.

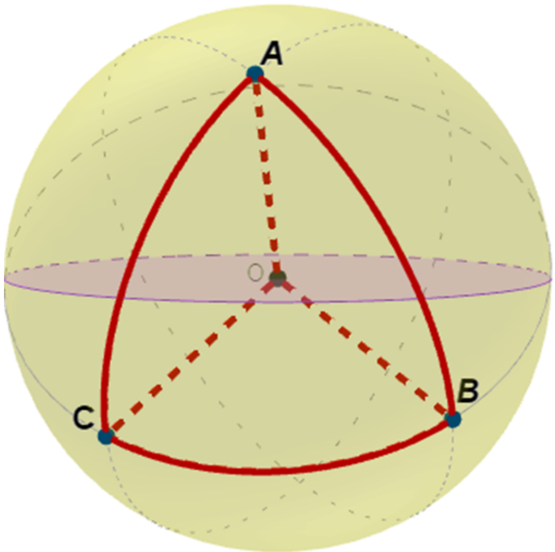
3.3.1 Trigonometria Esférica

Os principais conceitos sobre Trigonometria Esférica aqui mostrados são em quase sua totalidade extraídos do livro Conceitos de Astronomia de (BOCZKO, 1984).

Segundo Boczko (1984) a Trigonometria Esférica mostra que podemos compreender um triangulo esférico (conhecer seus seis elementos: três lados e três ângulos) conhecendo-se três quaisquer de seus elementos, no entanto sempre supondo que o raio da esfera seja unitário.

Esfera trigonométrica: Ela é uma esfera de raio unitário com um sistema de coordenadas esféricas. Na esfera trigonométrica, os pontos são representados por coordenadas de latitude e longitude, onde a latitude é medida a partir do equador (0° a 90° para o hemisfério norte e 0° a −90° para o hemisfério sul) e a longitude é medida a partir de um meridiano de referência (geralmente o meridiano de Greenwich, 0° a 180° para leste e oeste).

Figura 44 – Esfera trigonométrica: Triângulo Esférico.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Distância esférica: é a distância entre dois pontos em uma superfície esférica, é o menor arco de circunferência máxima que os liga. Se os pontos não forem diametralmente opostos, por eles passará sempre um único arco de círculo máximo, sendo a distância esférica entre eles o arco de menor comprimento desse círculo máximo. A distância esférica é dada pela fórmula:

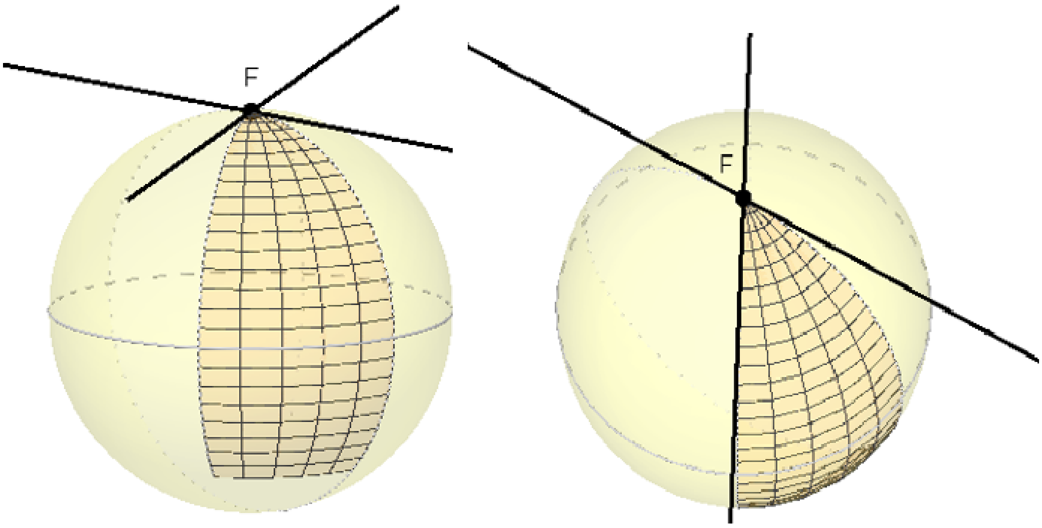
$$d = r \cdot \alpha_{(Rad)}$$

onde d é a distância esférica, r é o raio da esfera e α é o ângulo em radianos que subtende o arco de circunferência máximo.

Coordenadas esféricas: São usadas para especificar a localização de um ponto em uma esfera, incluindo a distância a partir do centro (raio), a latitude e a longitude. As fórmulas matemáticas da Trigonometria Esférica são derivadas usando os princípios da Geometria esférica.

Ângulo esférico: é definido como a medida do ângulo formado por dois arcos de círculos máximos em uma esfera. Essa medida é equivalente ao ângulo plano formado pelas semirretas tangentes a esses arcos e no ponto de interseção.

Figura 45 – Ângulo esférico.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Triângulo Esférico: Triângulo desenhado em uma esfera, onde os lados são arcos de círculos máximos. Eles têm três ângulos e três lados, mas as regras tradicionais da Trigonometria Plana não se aplicam nele. Nos triângulos esféricos, não consideramos apenas as dimensões absolutas dos lados, mas sim a medida dos ângulos que eles abarcam. Podemos demonstrar alguns resultados práticos desses triângulos na Astronomia ao relacionar suas propriedades com funções dos ângulos e dos lados do triângulo.

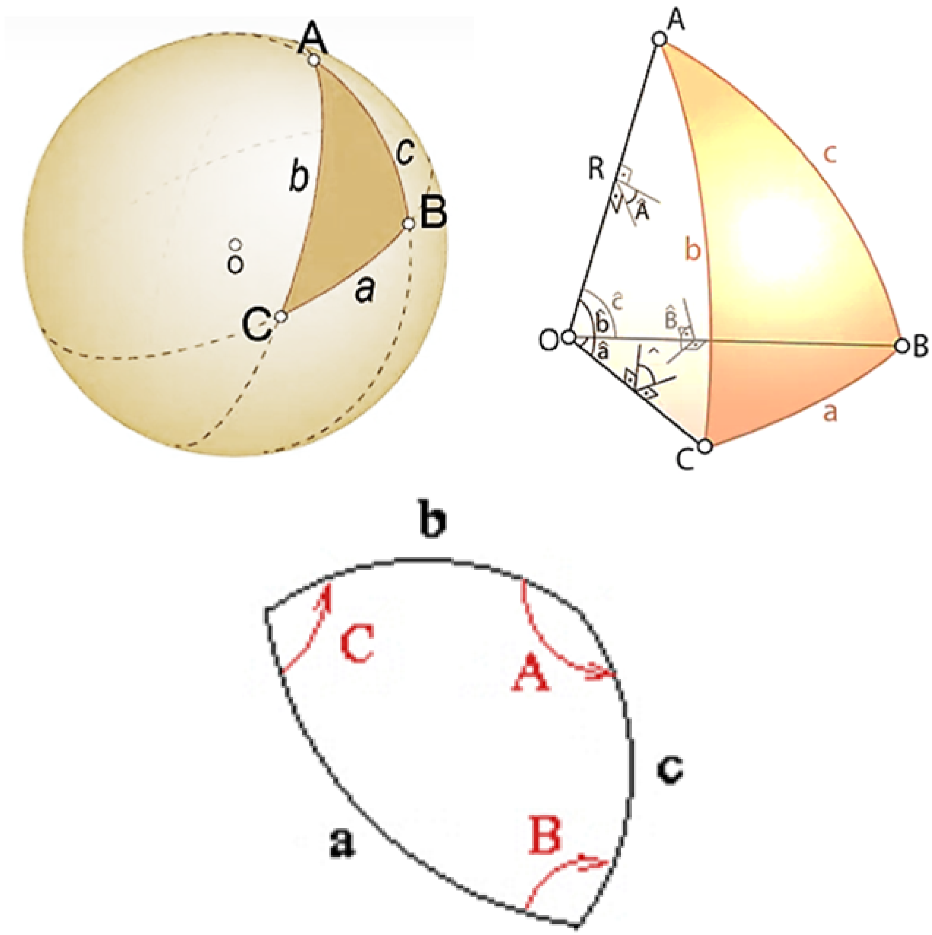
Para solucionar questões envolvendo triângulos esféricos, são necessário conhecer no mínimo três elementos (três ângulos, três lados, dois lados e um ângulo, ou um ângulo e dois lados), ao contrário da Trigonometria Plana, onde são necessários apenas dois elementos.

Denotamos os ângulos de um Triângulo Esférico por letras maiúsculas (A, B, C), e os seus lados por letras minúsculas (a, b, c).

Os lados a, b e c são dados pelos arcos e ângulos:

$$\begin{aligned} a &= \widehat{BC} = \widehat{a} \\ b &= \widehat{AC} = \widehat{b} \\ c &= \widehat{AB} = \widehat{c}. \end{aligned}$$

Figura 46 – Triângulos esféricos ABC.



Fonte: (BOCZKO, 1984)

Propriedades dos triângulos esféricos: As propriedades dos triângulos esféricos, conforme descritas por Rocha (2010), são as seguintes:

a) Em um Triângulo Esférico, a soma dos ângulos é sempre maior que 180° e menor que 540°, variando de acordo com o triângulo.

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ.$$

b) A soma dos lados de um Triângulo Esférico é sempre menor que 360°.

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ.$$

c) Um lado sempre é menor que a soma dos outros dois lados e maior que a diferença dos mesmos.

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|c - a| < b < c + a$$

$$|a - b| < c < a + b.$$

d) Ao lado maior de um triângulo esférico se opõe o maior ângulo e vice-versa;

e) A lados iguais se opões ângulos iguais;

f) A soma de dois ângulos é menor que o terceiro acrescido de 180° e a diferença é menor que o suplemento do terceiro.

- $A + B < C + 180°$.
- $A - B < 180° - C$.

g) Todo triângulo esférico tri-retângulo é tri-retilátero e vice-versa $A = B = C = 90°$, implica dizer que $a = b = c = 90°$;

h) O excesso em relação a 180° é proporcional à área do triângulo;

i) Os lados do triângulo são maiores que zero e menores que 180°.

- $0 < a < 180°$;
- $0 < b < 180°$;
- $0 < c < 180°$.

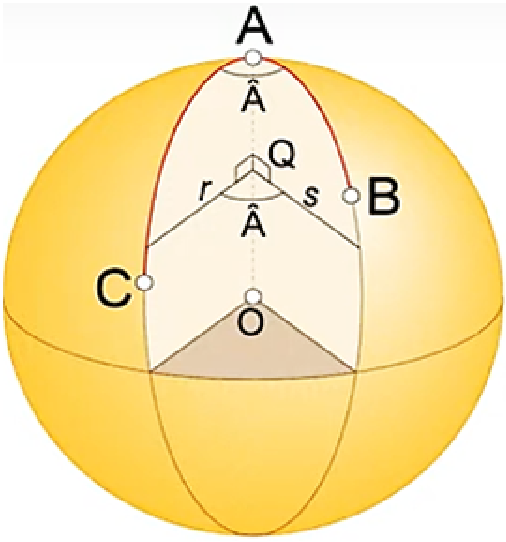
j) Os ângulos do triângulo são maiores que zero e menores que 180°.

- $0 < A < 180°$;
- $0 < B < 180°$;
- $0 < C < 180°$.

Diedro: região do espaço compreendida entre os 2 planos que contém as 2 grandes circunferências cuja intersecção é o raio da esfera trigonométrica que passa pelo vértice considerado.

Ângulo Diedro: medida angular entre as retas r e s ou medida do arco $\widehat{A}$. O Ângulo entre as retas tangentes aos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ passando pelo vértice A também representam o ângulo diedro A, conforme Figura 47

Figura 47 – Diedro.



Fonte: (BOCZKO, 1984)

Os ângulos diedros são dados por:

- $A = \widehat{A} = (OAC)^\wedge(OAB)$;
- $B = \widehat{B} = (OBA)^\wedge(OBC)$;
- $C = \widehat{C} = (OCA)^\wedge(OCB)$.

Medida dos lados de um Triângulo Esférico: Nos triângulos esféricos, os lados são medidos pelos arcos de círculo que eles contêm, sendo equivalentes às medidas das faces do triedro formado ao conectar seus vértices ao centro da esfera. Por exemplo, o ângulo $A\widehat{O}C$ mede o lado b por meio dos ângulos planos das faces do diedro.

Medida dos ângulos de um Triângulo Esférico: A medida dos ângulos em um triângulo esférico é determinada pelas medidas dos respectivos diedros do triedro que ele forma quando seus vértices são conectados ao centro da esfera. Por exemplo, o ângulo $C\widehat{A}B$ mede o vértice A.

Excesso esférico: A soma dos ângulos de um Triângulo Esférico de Euler é sempre maior que 180°, e a quantidade além de 180° é denominada excesso esférico. Essa medida é representada pela fórmula:

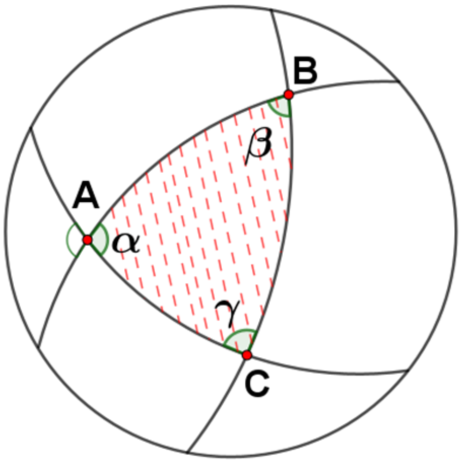
$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

onde ε representa o excesso esférico e A, B e C são os ângulos do triângulo. Este excesso está diretamente relacionado à área do Triângulo Esférico.

Área de um triangulo esférico: A área de um triângulo esférico pode ser determinada utilizando a área dos seus ângulos esféricos. Existem dois casos distintos a serem considerados: o caso em que o triângulo é pequeno (ou seja, o seu interior está contido em uma semiesfera) e o caso em que o triângulo não está contido em uma semiesfera.

Proposição 3.1. *Sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC, então $\alpha+\beta+\gamma = \pi + \dfrac{A_T}{r^2}$, onde A_T é a área desse triângulo esférico e r é o raio da superfície esférica.*

Figura 48 – Área do Triângulo Esférico ABC.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Demonstração. Prolongando os lados do triângulo esférico, construímos três fusos completos, com os mesmos ângulos internos desse triângulo. As áreas de cada um desses fusos completos são $4\alpha r^2$, $4\beta r^2$ e $4\gamma r^2$. A área de um triângulo esférico ABC é igual à área do triângulo $A'B'C'$ formado pelos pontos antípodas do triângulo esférico ABC, pois esses triângulos são congruentes, pelo caso LLL, por exemplo, o lado AB e $A'B'$ são arcos subtendidos por ângulos congruentes, caso opostos pelo vértice.

Ao somarmos estas áreas, teremos a área da superfície esférica acrescida de quatro vezes a área do triângulo esférico ABC. Isso ocorre porque a área do triângulo esférico ABC foi contada duas vezes a mais, assim como a área do triângulo esférico $A'B'C'$.

$$\begin{aligned}
4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 &= 4\alpha r^2 + 4A_T \\
4r^2(\alpha+\beta+\gamma) &= 4r^2\left(\pi + \frac{A_T}{r^2}\right) \\
\alpha+\beta+\gamma &= \pi + \frac{A_T}{r^2} \\
A_T &= (\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2,
\end{aligned}$$

em que α, β e γ são as amplitudes dos ângulos internos do triângulo em radianos. Esta fórmula é conhecida por Teorema de Girard.

Se as amplitudes α, β e γ forem dadas em graus, temos a fórmula:

$$A_T = (\alpha + \beta + \gamma - 180°)\frac{\pi}{180°} r^2.$$

∎

3.3.2 Fórmulas gerais da Trigonometria Esférica

A Trigonometria Esférica estabelece relações úteis entre os seis elementos de um Triângulo Esférico (três lados e três ângulos), permitindo o cálculo de três desses elementos quando os outros três são conhecidos. Isso significa que cada elemento desconhecido pode ser calculado em termos de outros três elementos, resultando em uma combinação de quatro elementos em cada caso.

Como existem seis elementos em um Triângulo Esférico, podemos calcular quantas combinações podemos fazer com esses seis elementos, considerando-os quatro a quatro.

Para calcular o número de combinações de seis elementos tomados quatro a quatro, podemos usar a fórmula de combinação:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

onde: n é o número total de elementos (no nosso caso, 6), k é o número de elementos em cada combinação (no nosso caso, 4) e $n!$ é o fatorial de n, que representa o produto de todos os inteiros de 1 a n.

Assim,

$$C(6,4) = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!(2)!} = 15.$$

Portanto, há 15 combinações possíveis de quatro elementos escolhidos a partir dos seis elementos de um Triângulo Esférico. Essas 15 fórmulas cobrem todos os casos de resolução de Triângulos Esféricos.

1º caso: Combinação de 3 lados a cada um dos ângulos

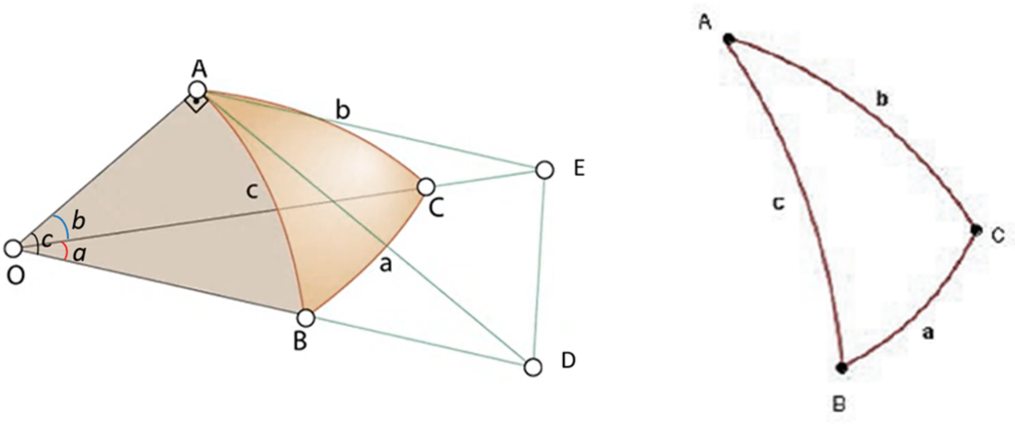
Lei dos cossenos esféricos para os lados

Deduziremos uma fórmula que nos permita calcular o valor de um lado em função dos demais e do ângulo diedro oposto a esse lado. Os quais os lados podem ser obtidos por:

- $\cos(a) = \cos(b)\cdot\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(A)$
- $\cos(b) = \cos(a)\cdot\cos(c) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(B)$
- $\cos(c) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(C)$

Demonstração. Seja ABC um Triângulo Esférico sobre uma esfera de centro O e raios $OA \equiv OB \equiv OC \equiv 1$.

Figura 49 – Lei dos cossenos esféricos.



Fonte: (BOCZKO, 1984)

Pelo ponto A, por exemplo, tracemos AD, tangente o arco AB e AE tangente a AC; nesse caso:

$$O\widehat{A}D = O\widehat{A}E = 90°.$$

Para os cálculos seguintes, lembremos que:

- $\operatorname{sen}(a) = \dfrac{DE}{AD}$.
- $\operatorname{sen}(b) = \dfrac{AE}{OE}$.
- $\operatorname{sen}(c) = \dfrac{AD}{OD}$.
- $\cos(a) = \dfrac{AE}{AD}$.
- $\cos(b) = \dfrac{AO}{OE}$.
- $\cos(c) = \dfrac{AO}{OD}$.

Ao aplicarmos a lei dos cossenos da Trigonometria Plana aos triângulos ADE e ODE, onde a medida do arco $DAE = A$ e a medida do arco $DOE = a$, temos:

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \cos a. \tag{3.7}$$

e,

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \cos A. \tag{3.8}$$

Igualando (3.7) e (3.8), obtemos:

$$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \cos a = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \cos A. \tag{3.9}$$

Observemos que como $\overline{OD} = \overline{OE}$ e que $\overline{AD} = \overline{AE}$, obtemos:

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2.$$

Logo, podemos reescrever (3.9) da seguinte maneira:

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{OE}^2 - 2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\cos A + 2\cdot\overline{OD}\cdot\overline{OE}\cdot\cos a.$$

Por Pitágoras como $\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{OA}^2 &= -\overline{OA}^2 - 2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\cos A + 2\cdot\overline{OD}\cdot\overline{OE}\cdot\cos a \\ \Rightarrow\quad 2\overline{OA}^2 &- 2\cdot\overline{OD}\cdot\overline{OE}\cdot\cos a + 2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\cos A = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Temos ainda que $\operatorname{sen} c = \dfrac{AD}{OD}$ e que $\operatorname{sen} b = \dfrac{AE}{OE}$, assim, implica em $AD = OD\cdot\operatorname{sen} c$ e $AE = OE\cdot\operatorname{sen} b$.

Assim, substituindo esses valores em (3.10), obtemos:

$$\begin{aligned} &2\overline{OA}^2 - 2\cdot\overline{OD}\cdot\overline{OE}\cdot\cos a + 2\cdot\left(\overline{OD}\cdot\operatorname{sen} c\right)\cdot\left(\overline{OE}\cdot\operatorname{sen} b\right)\cdot\cos A = 0 \\ \Rightarrow\quad &2\overline{OA}^2 + 2\cdot\overline{OD}\cdot\overline{OE}\,(-\cos a + \operatorname{sen} c\cdot\operatorname{sen} b\cdot\cos A) = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sabendo que $\cos c = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OD}}$ e que $\cos b = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OE}}$, e dividindo (3.11) por $\left(2\cdot\overline{OD}\cdot\overline{OE}\right)$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OA}}{\overline{OD}\cdot\overline{OE}} + (-\cos a + \operatorname{sen} c\cdot\operatorname{sen} b\cdot\cos A) = 0 \\ \Rightarrow\quad &\cos c\cdot\cos b - \cos a + \operatorname{sen} c\cdot\operatorname{sen} b\cdot\cos A = 0. \\ \Rightarrow\quad &\cos a = \cos b\cdot\cos c + \operatorname{sen} b\cdot\operatorname{sen} c\cdot\cos A. \end{aligned}$$

E de modo análogo podemos demonstrar para os arcos b e c, completando assim o grupo de fórmulas que validam a lei dos cossenos esféricos, as quais são dadas por:

- $\cos a = \cos b\cdot\cos c + \operatorname{sen} b\cdot\operatorname{sen} c\cdot\cos A$;
- $\cos b = \cos a\cdot\cos c + \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} c\cdot\cos B$;
- $\cos c = \cos a\cdot\cos b + \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b\cdot\cos C$.

■

2º caso: Combinação de 3 ângulos a cada um dos lados

Lei dos cossenos esféricos para os ângulos

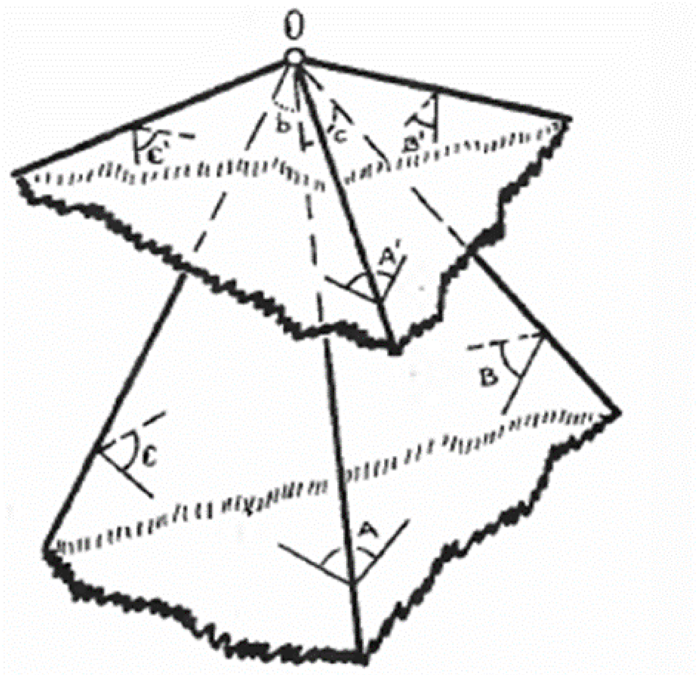
A lei dos cossenos para os ângulos é dada pelas seguintes expressões:

- $\cos A = -\cos B\cdot\cos C + \operatorname{sen} B\cdot\operatorname{sen} C\cdot\cos a$
- $\cos B = -\cos A\cdot\cos C + \operatorname{sen} A\cdot\operatorname{sen} C\cdot\cos b$

- $\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos c$

Segundo (BOCZKO, 1984) essas fórmulas permitem a obtenção do valor de um ângulo diedro em função dos outros e do lado oposto a esse diedro. No entanto poderíamos conseguir chegar a essas expressões, para isso precisamos da definição de triedro polar: O triedro polar de um dado triedro é formado pelas semirretas perpendiculares a cada uma das faces do triedro dado, passando pelo vértice do mesmo.

Figura 50 – Triedro Polar.



Fonte: (BOCZKO, 1984)

O ângulo formado pelas faces de um diedro é o suplemento do ângulo diedro dado. Por outro lado, as faces de um triedro são suplementares aos diedros correspondentes em seu triedro polar, isto é:

- $A' = 180° - a$.
- $B' = 180° - b$.
- $C' = 180° - c$.
- $a' = 180° - A$.
- $b' = 180° - B$.
- $c' = 180° - C$.

Substituindo esses valores nas expressões da Lei do Cossenos para lados de Triângulo Esféricos, obtemos:

- $\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos a$.
- $\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos b$.
- $\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos c$.

3º caso: Combinação de 2 ângulos a 2 lados opostos (analogia dos senos ou lei dos senos)

Lei dos Senos Esféricos

É uma relação matemática que descreve a relação entre os lados de um Triângulo Esférico e os senos dos ângulos opostos a esses lados. Em um Triângulo Esférico, essa lei afirma que a razão entre o seno de um lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é constante para todos os lados do triângulo. Em termos matemáticos, a Lei dos Senos Esféricos pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}.$$

Demonstração. Sendo a lei dos cossenos esféricos vistos anteriormente e dados por:

- $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A.$
- $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos B.$
- $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C.$

Podemos reescrever cada equação e elevarmos ambos os membros ao quadrado, daí obteremos:

$$\begin{aligned}
(\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2 &= (\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A)^2 \\
(\cos b - \cos a \cdot \cos c)^2 &= (\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos B)^2 \\
(\cos c - \cos a \cdot \cos b)^2 &= (\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C)^2.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o binômio e substituindo todos os $\cos^2\theta$ por $1 - \operatorname{sen}^2\theta$, oriundos da relação fundamental da trigonometria $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obteremos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c \operatorname{sen}^2 A &= 2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right) \\
\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 c \operatorname{sen}^2 B &= 2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right) \\
\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 C &= 2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right)
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros das equações anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A &= \sqrt{2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right)} \\
\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B &= \sqrt{2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right)} \\
\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C &= \sqrt{2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right)}
\end{aligned}$$

Agora, dividindo todos os membros das equações anteriores por $(\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c)$, obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right)}}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

$$\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right)}}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

$$\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos a \cos b \cos c - \left(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c\right)}}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

Das igualdades chegamos na relação desejada:

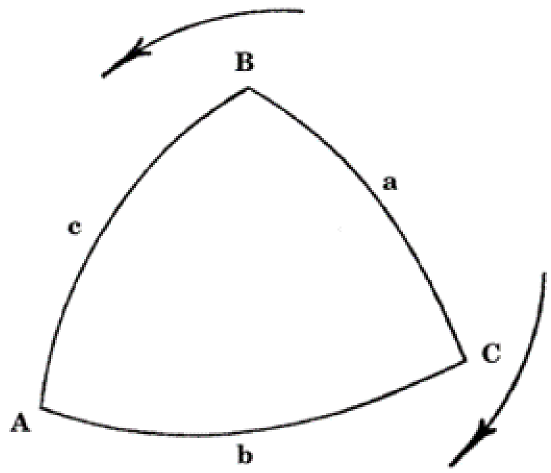
$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}.$$

■

4º caso: Combinação de 4 elementos consecutivos (fórmula das cotangentes)

No sentido mostrado na Figura a seguir:

Figura 51 – Triângulo Esférico.



Fonte: (BOCZKO, 1984)

Ao partirmos das fórmulas fundamentais da Trigonometria Esférica, lembrando ainda que a $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, chegaremos às últimas 6 fórmulas abaixo relacionadas, e assim atingindo o total das 15 combinações procuradas.

- $\cot a \cdot \operatorname{sen} c = \cot A \cdot \operatorname{sen} B + \cos c \cdot \cos B$
- $\cot a \cdot \operatorname{sen} b = \cot A \cdot \operatorname{sen} C + \cos b \cdot \cos C$
- $\cot b \cdot \operatorname{sen} a = \cot B \cdot \operatorname{sen} C + \cos a \cdot \cos C$

- $\cot b \cdot \operatorname{sen} c = \cot B \cdot \operatorname{sen} A + \cos c \cdot \cos A$
- $\cot c \cdot \operatorname{sen} a = \cot C \cdot \operatorname{sen} B + \cos a \cdot \cos B$
- $\cot c \cdot \operatorname{sen} b = \cot C \cdot \operatorname{sen} A + \cos b \cdot \cos A$

Uma vez que as quinze fórmulas gerais da Trigonometria Esférica tenham sido demonstradas, o restante do trabalho consiste principalmente em simplificar essas fórmulas para resolver casos específicos que possam surgir na prática da navegação astronômica ou em outras áreas que envolvam triângulos esféricos. Simplificar essas fórmulas gerais pode envolver diversas técnicas, como substituição de expressões trigonométricas por outras mais simples, uso de identidades trigonométricas, manipulação algébrica e aplicação de propriedades das funções trigonométricas. O objetivo é tornar as fórmulas mais fáceis de usar e mais adaptadas aos problemas específicos que precisam ser resolvidos, sem comprometer sua precisão ou validade. Uma vez que as fórmulas estejam simplificadas, elas podem ser aplicadas de forma eficiente para resolver uma variedade de problemas de Trigonometria Esférica.

Quando um dos elementos de um Triângulo Esférico é um ângulo de $90°$ (Triângulo Esférico retângulo) ou um lado de $90°$ (Triângulo Esférico retilátero), isso simplifica as fórmulas trigonométricas envolvidas na resolução do triângulo. Por exemplo, em um Triângulo Esférico retângulo, onde um dos ângulos é $90°$, as fórmulas trigonométricas podem ser simplificadas devido à medida fixa desse ângulo. Da mesma forma, em um Triângulo Esférico retilátero, onde um dos lados é $90°$, as fórmulas também podem ser simplificadas, conforme podemos observar na Tabela a seguir.

Tabela 5 – Principais fórmulas para resolução de triângulos esféricos

FÓRMULAS GERAIS	**FÓRMULAS SIMPLIFICADAS**	
	ÂNGULO $A = 90°$	**LADO** $a = 90°$
$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$ $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos B$ $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C$	$\cos a = \cos b \cdot \cos c$	$\cos A = -\cot b \cdot \cot c$ $\cos b = \operatorname{sen} c \cdot \cos B$ $\cos c = \operatorname{sen} b \cdot \cos C$
$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$ $\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos a$ $\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$	$\cos a = \cot B \cdot \cot C$ $\cos B = \operatorname{sen} C \cdot \cos b$ $\cos C = \operatorname{sen} B \cdot \cos c$	$\cos A = -\cos B \cos C$
$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}$ $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$ $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$	$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} B$ $\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} C$	$\operatorname{sen} B = -\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$ $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} A$
$\cot a \cdot \operatorname{sen} c = \cot A \operatorname{sen} B + \cos c \cos B$ $\cot a \cdot \operatorname{sen} b = \cot A \operatorname{sen} C + \cos b \cos C$ $\cot b \cdot \operatorname{sen} a = \cot B \operatorname{sen} C + \cos a \cos C$ $\cot b \cdot \operatorname{sen} c = \cot B \operatorname{sen} A + \cos c \cos A$ $\cot c \cdot \operatorname{sen} a = \cot C \operatorname{sen} B + \cos a \cos B$ $\cot c \cdot \operatorname{sen} b = \cot C \operatorname{sen} A + \cos b \cos A$	$\cot a = \cot c \cdot \cos B$ $\cot a = \cot b \cdot \cos C$ $\cot B = \cot b \cdot \operatorname{sen} c$ $\cot C = \cot c \cdot \operatorname{sen} b$	$\cot A = -\cos c \cdot \cot B$ $\cot A = -\cos b \cdot \cot C$ $\cot b = \cot B \cdot \operatorname{sen} C$ $\cot c = \cot C \cdot \operatorname{sen} B$

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 ALGUMAS APLICAÇÕES E EXEMPLOS

Na Matemática, as aplicações e os exercícios desempenham papéis cruciais no processo de aprendizado e na compreensão dos conceitos matemáticos. A contextualização da Matemática é um princípio fundamental defendido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental, que ressalta a importância de tornar esse conhecimento acessível a todos os alunos.

> A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. (...) No ensino de Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações; outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos (BRASIL, 1997, p.19).

Nesse contexto, a democratização do ensino de Matemática é destacada como uma meta prioritária para os professores. Para alcançar essa meta, é essencial relacionar as teorias Matemáticas com a realidade vivenciada pelos estudantes, por meio da conexão entre observações do mundo real e suas representações matemáticas. Além disso, é crucial estabelecer uma ligação entre essas representações e os princípios e conceitos matemáticos subjacentes, proporcionando aos alunos uma compreensão mais profunda e significativa da disciplina. Essa abordagem não apenas torna a Matemática mais acessível, mas também mais relevante e envolvente, promovendo um ensino mais eficaz e inclusivo.

Ao contextualizar os conceitos matemáticos para o ensino, busca-se articular vivências concretas e diversificadas, o que pode proporcionar um aprendizado mais significativo. Segundo Azambuja (2013, p.20), essa abordagem permite perceber e interpretar os conceitos matemáticos presentes na vida do estudante, preparando-o para lidar com situações futuras que exijam a aplicação do que foi aprendido.

> Contextualizar os conceitos matemáticos, para o ensino, significa articular vivências concretas e diversificadas, que podem oportunizar um aprendizado significativo. No caso da Matemática, pode-se a partir das vivências, perceber e interpretar os conceitos matemáticos presentes na vida do estudante, para que futuramente ele saiba lidar com situações que lhes remetem ao que foi aprendido (AZAMBUJA, 2013, p.20).

As aplicações da Matemática são vastas e se estendem por diversas áreas do conhecimento e da vida cotidiana. Sendo a base para resolver problemas complexos e desenvolver novas tecnologias. Por exemplo, a Trigonometria Esférica é fundamental para a navegação e a astronomia, permitindo que navegantes e cientistas determinem posições e trajetórias com precisão. Ao mostrar aos alunos como os conceitos matemáticos são utilizados no mundo real, eles conseguem ver a importância e a relevância do que estão aprendendo, o que aumenta seu interesse e engajamento.

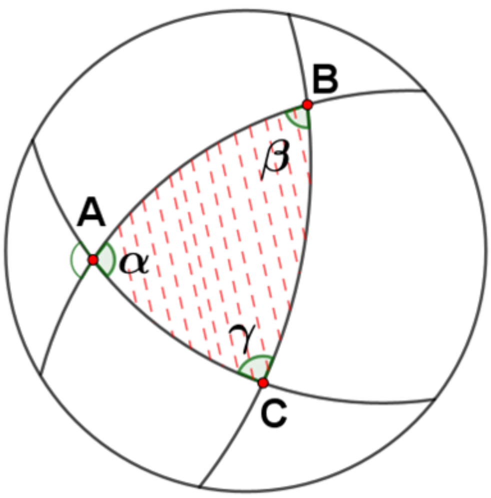
Os exercícios são fundamentais para o aprendizado efetivo. Eles permitem que os alunos pratiquem e apliquem os conceitos que aprenderam, solidificando seu entendimento e desenvolvendo suas habilidades de resolução de problemas. A prática regular através de exercícios variados e desafiadores ajuda os alunos a identificar áreas que precisam de mais atenção e a desenvolver uma abordagem sistemática para resolver problemas. Além disso, os exercícios promovem o pensamento crítico e a persistência, habilidades essenciais tanto na academia quanto na vida profissional.

Em suma, as aplicações e os exercícios sustentam o aprendizado eficaz. Nesse sentido, a contextualização dos conceitos matemáticos no ensino é crucial para promover um aprendizado significativo e prático. Um exemplo claro dessa aplicação é a Trigonometria Esférica na navegação astronômica, que se beneficia do entendimento da Terra como esférica e dos astros como projetados na Esfera Celeste, uma esfera imaginária infinita centrada na Terra. Esse enfoque simplifica os cálculos necessários para resolver problemas de navegação astronômica, facilitando a determinação da posição dos navegantes com base na observação dos astros.

A seguir, serão apresentados exemplos concretos de como a Matemática pode ser aplicada em diferentes situações, destacando sua relevância na resolução de problemas no contexto da esfera.

Exemplo 1 (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – adaptado)**.** *Determine a área de um triângulo esférico, sabendo que seus ângulos internos medem:* $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 90°$ *e o raio da esfera mede 10 unidades.*

Figura 52 – Área do triângulo esférico ABC.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Solução. *Para resolver podemos usar a fórmula da Preposição 3.1 a seguir:*

$$A_T = \left(\alpha + \beta + \gamma - \pi\right) r^2,$$

onde:

- A_T : *é a área do triângulo esférico.*
- $\alpha,\ \beta,\ \gamma$: *são os ângulos do triângulo esférico.*
- π : *é o valor de pi (aproximadamente 3,14159)*
- r : *é o raio da superfície esférica.*

i) *Primeiro, convertemos os ângulos internos de graus para radianos. Para isso, multiplicamos cada ângulo por* $\frac{\pi}{180^\circ}$. *Portanto, teremos:*

- *Ângulo* $\alpha = 50^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$ *radianos.*
- *Ângulo* $\beta = 70^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}$ *radianos.*
- *Ângulo* $\gamma = 90^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$ *radianos.*

ii) *Em seguida, somamos os ângulos internos em radianos: Soma dos ângulos internos.*

$$Soma\left(\alpha + \beta + \gamma\right) = \frac{5\pi}{18} + \frac{7\pi}{18} + \frac{9\pi}{18} = \frac{7\pi}{6} \text{ radianos.}$$

iii) *Substituímos os valores na fórmula da área:*

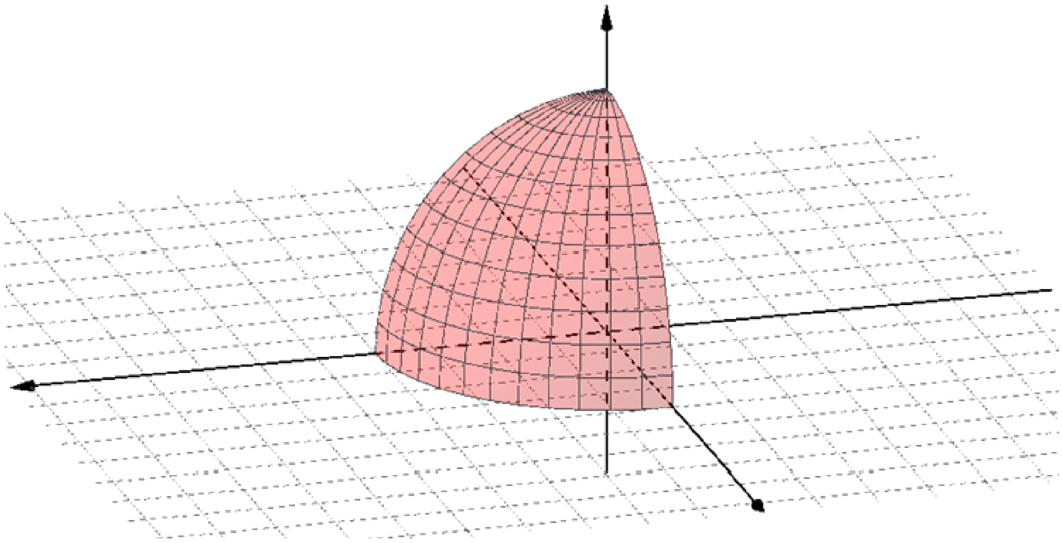
$$A_T = \left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) \cdot 10^2 = \frac{50\pi}{3} \text{ unidades quadradas.}$$

Portanto, a área do triângulo esférico é aproximadamente $\frac{50\pi}{3}$ *unidades quadradas.*

Exemplo 2 (Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS - adaptado)**.** *Mostre que se um triângulo esférico tem todos os ângulos iguais a 90 graus então esse triângulo é um octante da esfera.*

(Quando se refere ao espaço tridimensional, especialmente em termos das coordenadas x, y e z, os "octantes" são as 8 regiões em que o espaço é dividido quando você o corta usando o plano xy*, o plano* xz *e o plano* yz*).*

Figura 53 – Octante da esfera.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

Solução. *Para mostrar que um triângulo esférico com todos os ângulos iguais a 90 graus é um octante da esfera, podemos utilizar algumas propriedades da geometria esférica.*

i) Primeiro, vamos considerar que um triângulo esférico é formado por três arcos de círculo máximo em uma esfera.

ii) Se todos os ângulos internos do triângulo são iguais a 90 graus, isso significa que cada ângulo é um ângulo reto.

iii) Em uma esfera, um ângulo reto é formado pela interseção de dois meridianos (círculos máximos) em ângulo reto. Isso implica que cada lado do triângulo é um meridiano.

iv) Como estamos considerando um triângulo com ângulos retos, isso implica que cada lado do triângulo é perpendicular a outro.

v) Se cada lado do triângulo é perpendicular aos outros dois, então os três lados se interceptam formando um octante da esfera.

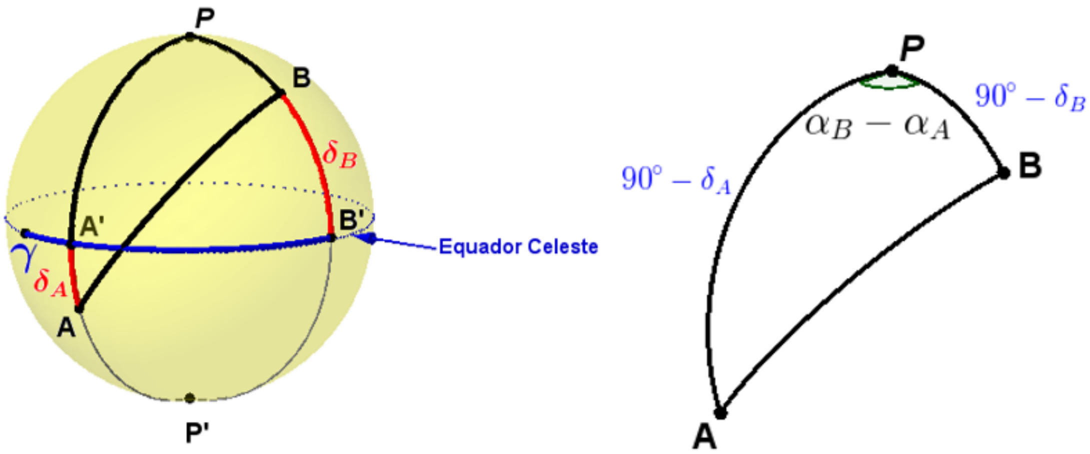
vi) Consequentemente, um triângulo esférico com todos os ângulos internos iguais a 90 graus é um octante da esfera.

Assim, demonstramos que um triângulo esférico com todos os ângulos iguais a 90 graus é de fato um octante da esfera.

Exemplo 3 (USUI, Tetsuo. O globo terrestre e a esfera celeste: uma abordagem interdisciplinar de Matemática, Geografia e Astronomia. Dissertação de Mestrado, PROFMAT,

2014. – Adaptado)**.** *Seja a **distância esférica entre dois astros** a menor distância ao longo do círculo máximo que passa por esses astros como esquematizada na Figura abaixo:*

Figura 54 – Distância esférica entre dois astros.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

onde:

- $\widehat{AB}$ *é a distância esférica entre os astros* A *e* B*;*
- δ_A *e* δ_B *são as declinações dos astros* A *e* B*, respectivamente;*
- α_A *e* α_B *são as ascensões retas dos astros* A *e* B*, respectivamente.*
- γ *é origem das coordenadas celestes, definida pelo equador celeste e o ponto vernal.*

Mostre que a distância esférica entre esses astros pode ser calculada usando a seguinte relação:

$$\cos(\widehat{AB}) = \operatorname{sen}\delta_A \cdot \operatorname{sen}\delta_B + \cos\delta_A \cdot \cos\delta_B \cdot \cos(\alpha_A - \alpha_B).$$

Solução. *Sejam* A *e* B *dois astros com suas coordenadas equatoriais universais,* $\alpha_A, \delta_A, \alpha_B, \delta_B$.

Com base na Figura 54, tem-se que $\widehat{PA} = 90° - \delta_A$ *e* $\widehat{PB} = 90° - \delta_B$ *respectivamente, as distâncias polares dos astros* A *e* B*, enquanto que* AB*, a distância esférica entre esses astros. Além disso,*

$$A\widehat{P}B = \widehat{A'B'} = \widehat{\delta B'} - \widehat{\delta A'} = \alpha_B - \alpha_A.$$

Substituindo esses valores na equação da Lei dos Cossenos Esféricos para os lados:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(A),$$

obtemos:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(90° - \delta_A) \cdot \cos(90° - \delta_B) + \operatorname{sen}(90° - \delta_A) \cdot \operatorname{sen}(90° - \delta_B) \cdot \cos(A\widehat{P}B),$$

onde:

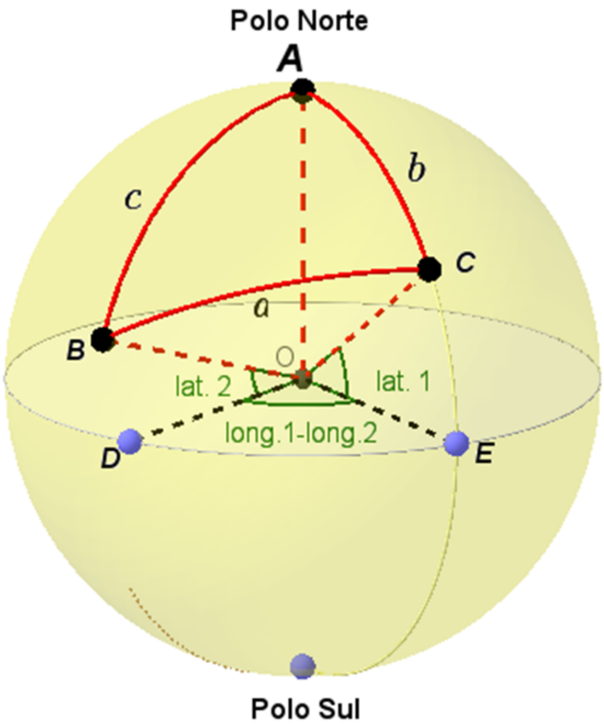
- $\cos(90° - \delta_A) = \operatorname{sen}\delta_A$;
- $\cos(90° - \delta_B) = \operatorname{sen}\delta_B$;
- $\operatorname{sen}(90° - \delta_A) = \cos\delta_A$;
- $\operatorname{sen}(90° - \delta_B) = \cos\delta_B$;
- $\cos(A\widehat{P}B) = \cos(\alpha_B - \alpha_A)$.

Fazendo as devidas substituições, obtemos:

$$\cos(\widehat{AB}) = \operatorname{sen}(\delta_A) \cdot \operatorname{sen}(\delta_B) + \cos(\delta_A) \cdot \cos(\delta_B) \cdot \cos(\alpha_B - \alpha_A)$$

Exemplo 4. *Baseando-se no exemplo 3, que discute a distância esférica entre dois astros, podemos aplicar o conceito ao globo terrestre. A distância esférica entre duas cidades é a menor distância ao longo da superfície da Terra, considerando-a como uma esfera. Essa distância é medida ao longo de um círculo máximo, que passa pelos dois pontos. É importante destacar que essa distância pode diferir da distância real percorrida ao longo da superfície terrestre devido à curvatura da Terra.*

Figura 55 – Distância entre dois pontos quaisquer.



Fonte: Elaborada pelo autor via software GeoGebra.

No entanto, utilizando a lei dos cossenos para triângulos esféricos, é possível derivar uma fórmula para calcular a distância entre dois pontos, B e C, em qualquer lugar da

Terra, baseando-se apenas nas suas coordenadas geográficas. Para isso, considera-se que o vértice A do triângulo ABC coincide sempre com o Polo Norte da Terra. Como podemos realizar esses cálculos, realizando a analogia da Figura 54 com a Figura55?

Solução. *Observando a Figura 55, depreendemos que:*

- *Ponto B = Latitude* $2(lat_2)$*;*
- *Ponto C = Latitude* $1(lat_1)$*;*
- *Ângulo a = Longetude* 1– *Longetude* $2 = (long_1 – long_2)$.

Na Figura 55, a latitude do ponto B é dada por lat_2 *e a latitude do ponto C é dada por* lat_1*. A medida do ângulo é dada pela diferença entre as longitudes dos pontos C e B, nessa ordem, ou seja, a longitude de C é* $long_1$ *e a longitude de B é* $long_2$*.*

Considerando que:

- $\cos(b) = \cos(90° - lat_1)$;
- $\text{sen}(b) = \text{sen}(90° - lat_1)$;
- $\cos(c) = \cos(90° - lat_2)$;
- $\text{sen}(c) = \cos(90° - lat_2)$.

Utilizando as identidades do seno e do cosseno, da diferença, como visto no Exemplo 3, temos que:

- $\cos(b) = \cos(90° - lat_1) = \text{sen}(lat_1)$;
- $\text{sen}(b) = \text{sen}(90° - lat_1) = \cos(lat_1)$;
- $\cos(c) = \cos(90° - lat_2) = \text{sen}(lat_2)$;
- $\text{sen}(c) = \cos(90° - lat_2) = \cos(lat_2)$.

Temos ainda que:

$$\text{Ângulo } a = \left(long_1 - long_2\right).$$

Substituindo esses valores na fórmula da lei dos cossenos de triângulos esféricos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}\, c \cdot \cos(\widehat{A}),$$

temos que:

$$\cos(a) = \text{sen}(lat_1) \cdot \text{sen}(lat_2) + \cos(lat_1) \cdot \cos(lat_2) \cdot \cos(long_1 - long_2).$$

Logo a distância esférica entre dois pontos quaisquer, na superfície da Terra, é dada por:

$$a = \cos^{-1}\{\text{sen}(lat_1)\cdot\text{sen}(lat_2)+\cos(lat_1)\cdot\cos(lat_2)\cdot\cos(long_1 - long_2)\}$$

Para calcularmos a distância D em quilômetros, entre dois pontos quaisquer, A e B, da superfície da Terra, dadas as coordenadas geográficas (latitudes e longitudes), podemos utilizar a equação da distância esférica dada por:

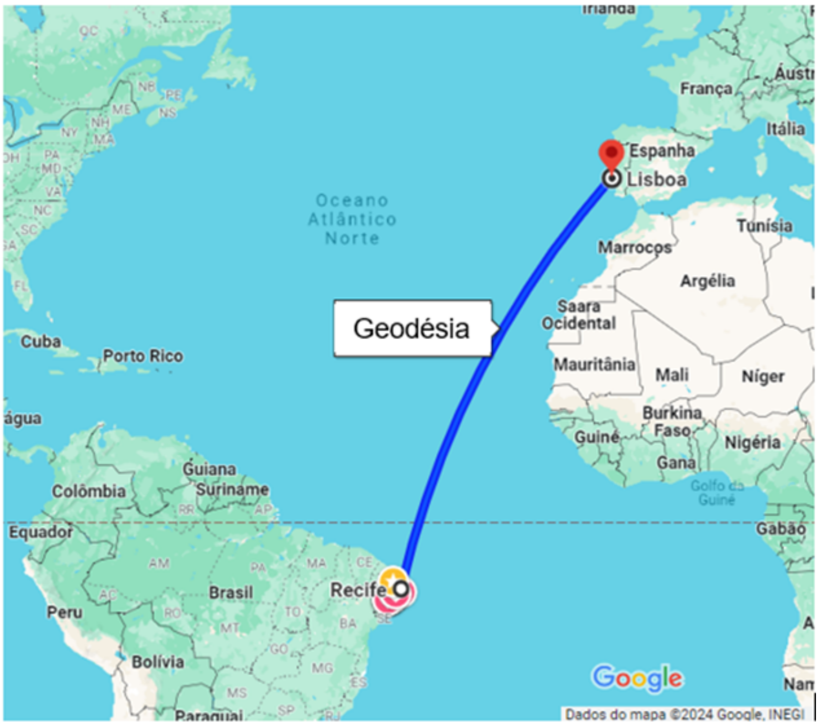
$$D(A,B) = \frac{2\pi r a}{360},$$

onde:

- *A e B são os pontos da Terra (sendo conhecidas suas coordenadas geográficas);*
- $\pi \approx 3,1415$
- $r =$ *raio da Terra* $\approx 6.371 km$
- $a =$ *distância esférica entre os pontos A e B, na superfície da Terra .*

Exemplo 5 (Elaborado pelo autor)**.** *Qual a distância esférica e em quilômetros entre a cidade do Recife(PE) e Lisboa (Portugal), sabendo que as coordenadas geográficas são dadas na tabela abaixo?*

Figura 56 – Distância entre Recife (Brasil) e Lisboa (Portugal).



Fonte: Google Maps, 2024.

Tabela 6 – Coordenadas geográficas de Recife e Lisboa.

CIDADE	**LATITUDE**	**LONGITUDE**
Recife	$\text{lat}_1 = 8°3'15''$ Sul $= -8.05428$	$\text{long}_1 = 34°52'53''$ Oeste $= -34.8813$
Lisboa	$\text{lat}_2 = 38°42'26''$ Norte $= 38.7071$	$\text{long}_1 = 9°8'8''$ Oeste $= -9.13549$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados obtidos das coordenadas geográficas (longitude e latitude), foram extraídos do site: Cidades e vilas do mundo, com endereço eletrônico:<https://pt.db-city.com>, donde pode-se obter as coordenadas geográficas de qualquer ponto da superfície da Terra.

Solução. *Vamos utilizar a seguinte fórmula:*

$$a = \cos^{-1}\{\text{sen}\,(lat_1)\cdot\text{sen}\,(lat_2) + \cos\,(lat_1)\cdot\cos\,(lat_2)\cdot\cos\,(long_1 - long_2)\}$$

Substituindo os valores das coordenadas geográficas explicitadas na Tabela, teremos:

$$\begin{aligned}
a &= \cos^{-1}\{\text{sen}\,(-8,05428)\cdot\text{sen}\,(38,7071) + \cos\,(-8,05428)\cdot\cos\,(38,7071)\cdot\cos\,(-25,74581)\}\\
a &= \cos^{-1}\{(-0,1401)\cdot(0,6253) + (0,9901)\cdot(0,7803)\cdot(0,9007)\}\\
a &= \cos^{-1}(0,6082538)\\
a &= 52,53°.
\end{aligned}$$

Logo, a distância esférica entre Recife (Pernambuco) e Lisboa (Portugal) é de aproximadamente $52,53°$.

No entanto, para sabermos a distância D em quilômetros, devemos fazer a conversão de a para D da fórmula dada:

$$D(A,B) = \frac{2\pi r a}{360}.$$

Sendo Recife (R) e Lisboa (L) e aplicando os valores, temos:

$$\begin{aligned}
D(R,L) &\approx \frac{2\cdot 3,1415\cdot 6371\cdot 52,53}{360}\\
&\approx \frac{2102723}{360}\\
&\approx 5.840\,Km.
\end{aligned}$$

Logo, a distância em quilômetros entre Recife (Pernambuco) e Lisboa (Portugal) é de aproximadamente 5.840 *km.*

5 PLANEJAMENTO E EXECUÇÃO DO MINICURSO

Planejar envolve antecipar ações para alcançar determinados objetivos, que surgem de necessidades identificadas em uma realidade específica, e agir de acordo com essas ideias previamente formuladas.

Para Vasconcellos (2002), um bom planejamento deve considerar três dimensões fundamentais: a realidade, a finalidade e o plano de ação, orientados pela objetividade, coerência e flexibilidade. A ordem dessas dimensões pode variar, pois em algumas situações começar pela avaliação da realidade pode desanimar o grupo, enquanto iniciar com os sonhos pode ser mais motivador; contudo, a avaliação da realidade é indispensável.

O planejamento é essencial no processo de ensino-aprendizagem, pois está intrinsecamente ligado à natureza humana e deve ser elaborado com qualidade e intencionalidade. Embora em alguns contextos o planejamento seja visto como um instrumento de controle burocrático e autoritário, onde a incapacidade do professor de cumpri-lo pode ser interpretada como incompetência, a redemocratização e os movimentos sociais têm transformado esse cenário, tornando o planejamento um verdadeiro instrumento de trabalho.

No entanto, o planejamento e a execução de um minicurso são etapas fundamentais para garantir o sucesso e a eficácia da atividade educacional proposta. Inicialmente, é essencial definir claramente os objetivos do minicurso, identificando o público-alvo e suas necessidades específicas de aprendizado. A partir daí, o planejamento deve incluir a seleção de conteúdos relevantes, a escolha de metodologias de ensino adequadas e a elaboração de atividades práticas e dinâmicas que promovam a participação ativa dos alunos.

Durante a execução de um minicurso, é importante manter uma comunicação eficaz com os participantes, garantindo o engajamento e a compreensão dos temas abordados. Além disso, é fundamental avaliar continuamente o andamento do minicurso, fazendo ajustes conforme necessário para atender às necessidades e expectativas dos alunos. Um planejamento bem elaborado e uma execução cuidadosa são essenciais para proporcionar uma experiência de aprendizado significativa e enriquecedora para os participantes.

Com o intuito de enriquecer o ensino de Matemática para os alunos do Ensino Médio, propor uma abordagem visando a introdução dos conceitos de Trigonometria Esférica é muito importante. Reconhecendo sua relevância e aplicabilidade em diversas áreas, a Trigonometria Esférica apresenta como um complemento valioso à tradicional Geometria Plana ensinada no Ensino Médio.

No minicurso que nos propomos a executar, a metodologia central foi guiada pela resolução de problemas, uma estratégia pedagógica eficaz para estimular o pensamento crítico e a aplicação prática dos conceitos matemáticos. Onde o foco é na resolução ativa de problemas como principal meio de aprendizagem. Em vez de simplesmente transmitir informações aos alunos, essa metodologia envolve apresentar aos alunos problemas autênticos e desafiadores que requerem a aplicação de conceitos e habilidades específicas para serem resolvidos.

Para Leal e Onuchic (1999), problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver". As situações-problemas serão elaboradas condizentes com opção metodológica adotada, que defende que educador e educandos têm participação contínua no ensino e na aprendizagem, sendo a avaliação integrada como acompanhamento da evolução dos alunos.

Por meio dessa abordagem, os alunos são desafiados a desenvolver habilidades de planejamento, habilidades de pensamento crítico, raciocínio lógico, criatividade e resiliência, estabelecimento de relações, identificação de regularidades e aprendizado através da correção de equívocos, fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia intelectual. Os alunos são encorajados a explorar diferentes estratégias de resolução, a colaborar com os colegas e a refletir sobre seus processos de pensamento. Ela promove um aprendizado mais significativo, já que os alunos estão envolvidos ativamente na construção do seu conhecimento e na aplicação prática dos conceitos aprendidos.

5.1 Planejamento do Minicurso

Título do Minicurso: Introdução a Trigonometria Esférica e algumas de suas muitas aplicações.
Público-alvo: Estudantes do 2º Ano do Ensino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio de Panelas.
Duração total: 8 encontros de 50 min cada.
Objetivos:

- Inserir a história da trigonometria no contexto educacional, mostrando sua evolução e importância ao longo dos séculos, com o objetivo de oferecer aos alunos uma perspectiva histórica e prática dessa disciplina, enfatizando sua aplicação em diversas áreas e estimulando a compreensão crítica dos conceitos;

- Apresentar os conceitos fundamentais da Trigonometria Esférica de forma clara e acessível, destacando sua relevância na navegação astronômica e em outras áreas;

- Demonstrar a aplicação prática da Trigonometria Esférica na determinação da posição no mar, utilizando os astros como referência, e explorar sua interdisciplinaridade em Astronomia e Navegação;
- Estimular o aprendizado prático por meio da construção de instrumentos de navegação históricos, como astrolábios e quadrantes, promovendo pesquisa, criatividade e compreensão dos conceitos;
- Fomentar a interação e a troca de conhecimentos entre os alunos durante as apresentações dos instrumentos náuticos construídos por eles, enriquecendo a experiência de aprendizado;
- Explorar a representação dos globos terrestre e celeste, abordando os conceitos matemáticos envolvidos, suas características geométricas e sua importância na compreensão do espaço geográfico e astronômico;
- Realizar uma oficina de Geometria Esférica para permitir aos alunos uma compreensão prática dos conceitos, utilizando materiais simples;
- Explorar as propriedades dos triângulos esféricos e compará-las com as propriedades dos triângulos em uma superfície plana para uma compreensão mais abrangente da geometria;
- Propor o uso do GeoGebra para apresentar aos alunos os conceitos matemáticos envolvidos nos triângulos esféricos, utilizando suas funcionalidades de visualização 3D para explorar as características geométricas visando proporcionar uma experiência de aprendizado visual e interativa;
- Propor e resolver problemas práticos envolvendo triângulos esféricos, consolidando o conhecimento adquirido ao longo do minicurso.

Metodologia:

- Aulas expositivas com uso de recursos visuais, como slides, vídeos e material concreto;
- Atividades práticas em grupos para resolver problemas e desafios;
- Discussões em sala de aula sobre a aplicação dos conceitos aprendidos na navegação astronômica.

Atividades:

- Evolução da Trigonometria: Dos primórdios à Trigonometria Esférica;

- Importância da Trigonometria Esférica em diversas áreas;
- Apresentação clara e acessível dos conceitos;
- Construção e Apresentação de Instrumentos de Navegação Históricos;
- Estímulo à Interação e Troca de Conhecimentos;
- Representação dos Globos Terrestre e Celeste;
- Oficina de Geometria Esférica;
- Exploração das Propriedades dos Triângulos Esféricos;
- Resolução de Problemas Envolvendo Triângulos Esféricos.

Avaliação:

- Participação dos alunos durante as aulas e atividades práticas,
- Resolução dos problemas propostos,
- Compreensão dos conceitos fundamentais da Trigonometria Esférica e sua aplicação na navegação Astronômica.

Considerações finais:

Ao final do minicurso, esperar que os alunos adquiram uma compreensão sólida dos conceitos fundamentais da Trigonometria Esférica e de suas diversas aplicações, bem como uma apreciação pela interdisciplinaridade e relevância prática dessa disciplina.

5.2 PROPOSTA DE AULAS DO MINICURSO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1º ENCONTRO:

Objetivo da Aula:

Apresentar aos alunos a evolução da trigonometria, desde seus primórdios até a Trigonometria Esférica, destacando os principais conceitos, desenvolvimentos e matemáticos envolvidos, é fundamental para que compreendam a importância histórica e prática dessa disciplina. Demonstrar a relevância da Trigonometria Esférica em diversas áreas, como astronomia, geodésia e navegação, evidenciando como esses conhecimentos são aplicados em contextos reais, ampliando a percepção dos alunos sobre suas utilidades. Além disso, é crucial apresentar exemplos e ilustrações de forma clara e acessível, sempre que possível, para facilitar a compreensão dos conceitos e garantir um aprendizado mais eficaz e envolvente.

Recursos Necessários:

- Slides da apresentação com ilustrações para facilitar a compreensão;
- Vídeos explicativos (ampliando o leque de informações), os quais podem auxiliar na visualização dos conceitos e na contextualização histórica da trigonometria.

Metodologia:

- Apresentação do tema da aula e dos objetivos;
- Breve contextualização da importância da Trigonometria na Matemática e em outras áreas, enfatizando:
  - Origens e desenvolvimento inicial da trigonometria na antiguidade;
  - Contribuições de matemáticos como Pitágoras, Hiparco e Ptolomeu;
  - Avanços na Trigonometria durante a Idade Média e Renascimento;
  - Definição e importância da Trigonometria Esférica;
  - Estímulo para o estudo e aprofundamento na Trigonometria Esférica.

Avaliação:

- Avaliação da participação dos alunos durante a aula, observando o interesse e a compreensão dos conceitos apresentados.

2º ENCONTRO:

Objetivo da Aula:

Apresentar aos alunos os principais instrumentos de navegação utilizados historicamente, destacando o funcionamento e a importância de cada um, e promover a construção desses instrumentos de forma prática como atividade extraclasse (estímulo para a pesquisa adicional e a criatividade na construção dos instrumentos em grupos, para posterior apresentação dos mesmos).

Recursos Necessários:

- Slides da apresentação;
- Vídeos explicativos sobre os instrumentos.

Metodologia:

- Apresentação do tema da aula e dos objetivos;
- Contextualização da importância dos instrumentos de navegação na história como a Bússola, o Astrolábio, o Quadrante Náutico e a Balestilha;
- Apresentação de vídeos curtos demonstrando o uso de cada instrumento;
- Discussão sobre as vantagens e limitações de cada um;
- Explicação (instruções claras) sobre os materiais necessários e o processo de construção de cada instrumento;
- Espaço para os alunos tirarem dúvidas sobre a construção dos instrumentos;
- Os alunos terão 15 dias para construir os instrumentos em casa, seguindo as instruções fornecidas;
- Ao final do prazo, os alunos deverão trazer os instrumentos prontos para apresentação em sala de aula.

Avaliação:

- Avaliação da participação e interesse dos alunos durante a aula.

3º ENCONTRO:

Objetivo da Aula:

Estimular a interação entre os alunos durante as apresentações permitindo que os alunos apresentem os instrumentos náuticos que construíram anteriormente, promovendo a troca de conhecimentos ideias e experiências entre os estudantes.

Recursos Necessários:

- Instrumentos náuticos construídos pelos alunos;
- Slides ou materiais visuais auxiliares, se necessário.

Metodologia:

- Introdução da aula, explicando o objetivo da apresentação dos instrumentos;

- Organização dos alunos em grupos, de acordo com os instrumentos construídos por eles;
- Apresentações individuais ou em grupo de cada instrumento, onde os alunos explicarão o funcionamento, a importância histórica e qualquer outra informação relevante sobre o instrumento;
- Após cada apresentação, abertura para perguntas dos colegas e do professor;
- Discussão em sala de aula sobre as semelhanças e diferenças entre os diferentes instrumentos apresentados, bem como sobre os desafios e aprendizados durante o processo de construção;
- Conclusão da aula com um breve resumo das apresentações e dos principais pontos discutidos.

Avaliação:

- Avaliação da qualidade da apresentação dos alunos, incluindo clareza, organização e conhecimento demonstrado;
- Avaliação da participação dos alunos durante as apresentações e discussões.

4º ENCONTRO:

Objetivo da Aula:

Apresentar aos alunos os conceitos matemáticos envolvidos na representação dos globos terrestre e celeste, explorando suas características geométricas e sua importância na compreensão do espaço geográfico e astronômico.

Recursos Necessários:

- Globo terrestre;
- Globo celeste;
- Slides da apresentação (utilização de recursos visuais nos slides para ilustrar os conceitos);
- Material de apoio impresso (mapas, imagens);
- Régua e compasso.

Metodologia:

- Receber os alunos e introduzir o tema da aula explicando que hoje eles irão explorar a geometria dos globos terrestre e celeste e sua relação com a matemática;
- Iniciar com uma breve discussão sobre as formas esféricas e suas propriedades geométricas;
- Mostrar o globo terrestre aos alunos e explorar suas características geométricas, como a forma esférica e as linhas imaginárias (latitude, longitude), bem como os ângulos formados por elas;
- Utilizar a régua e o compasso para demonstrar como medir distâncias no globo terrestre e calcular ângulos entre diferentes pontos;
- Fazer perguntas aos alunos para verificar a compreensão, incentivando sua interação com o globo;
- Apresentar a esfera celeste aos alunos como uma representação Matemática do céu visto da Terra, destacando as coordenadas celestes e os ângulos entre os corpos celestes;
- Incentivar os alunos a fazerem perguntas e discutirem sobre o assunto;
- Dividir a turma em grupos e fornecer mapas do globo terrestre e imagens da esfera celeste;
- Mostrar aos alunos como resolvem problemas relacionados à geometria dos globos, como calcular distâncias entre cidades no globo terrestre ou determinar a posição de estrelas na esfera celeste;
- Reunir a turma para uma discussão em grupo sobre as soluções encontradas durante a atividade prática.
- Encerrar a aula recapitulando os principais conceitos aprendidos sobre a geometria dos globos terrestre e celeste e sua importância para entender o espaço geográfico e astronômico.

Avaliação:

- Avaliar a participação e interesse dos alunos durante a aula;
- Realizar avaliação contínua durante a aula, observando a participação dos alunos, o envolvimento nas atividades práticas e a correta aplicação dos conceitos matemáticos na resolução dos problemas propostos.

5º ENCONTRO:

Objetivo da Aula:

Explorar as coordenadas geográficas e sua aplicação na localização de pontos na Terra.

Recursos Necessários:

- Mapas;
- Globo terrestre;
- Material de escrita;
- Computadores com acesso à internet (opcional).

Metodologia:

- Explicar o que são coordenadas geográficas e sua importância na cartografia e na navegação.
- Discutir os componentes principais das coordenadas geográficas: latitude e longitude.
- Apresentar como são medidas a latitude e a longitude.
- Utilizar exemplos práticos, como mapas e globos terrestres, para mostrar como identificar e interpretar essas coordenadas.
- Propor exercícios práticos onde os alunos devem identificar a latitude e a longitude de pontos específicos em mapas ou globos terrestres.
- Estimular a participação ativa dos alunos, incentivando-os a trabalhar em grupos e a discutir suas respostas.
- Discutir exemplos de como as coordenadas geográficas são utilizadas na prática, como na navegação marítima, na aviação, na geografia urbana, entre outros.
- Propor um desafio aos alunos, onde eles devem utilizar as coordenadas geográficas para encontrar a localização de pontos específicos em um mapa ou globo terrestre.
- Estimular o raciocínio espacial e a aplicação dos conceitos aprendidos.
- Promover uma discussão em sala de aula sobre as dificuldades encontradas pelos alunos durante os exercícios e o desafio.
- Incentivar a reflexão sobre a importância das coordenadas geográficas no contexto atual e em diversas áreas do conhecimento.

Avaliação:

- Avaliar a compreensão dos alunos sobre as coordenadas geográficas através da participação nas atividades práticas, da precisão na identificação das coordenadas e da capacidade de aplicar esses conceitos em diferentes contextos.
- Observar o engajamento dos alunos e sua capacidade de trabalho em equipe durante os exercícios e desafios propostos.

6º ENCONTRO:

Objetivo da Aula:

Desenvolver uma oficina com os alunos para explorar conceitos básicos da Geometria Esférica, utilizando materiais simples como bolinhas de isopor, cordão, alfinetes, canudinhos e transferidor.

Recursos Necessários:

- Bolinhas de isopor;
- Cordão;
- Alfinetes;
- Palitos de churrasco;
- Transferidor;
- Régua.

Metodologia:

- Explicar o que é uma reta na geometria esférica.
- Pedir aos alunos que formem uma reta (um círculo máximo) na superfície esférica utilizando o cordão. Enfatizar que círculos pequenos não são considerados retas.
- Solicitar aos alunos que escolham um ponto na esfera e tracem retas (circunferências máximas) passando por esse ponto.
- Dialogar até que percebam que por esse ponto passam infinitas retas (circunferências máximas), assim como na geometria euclidiana.
- Pedir aos alunos que tentem traçar duas retas paralelas (circunferências máximas paralelas).

- Discutir até que percebam que não existem circunferências máximas paralelas na geometria esférica.
- Explicar o conceito de pontos antípodas e pedir aos alunos que identifiquem dois pontos antípodas.
- Discutir como dois pontos determinam uma única reta na geometria plana e como isso ocorre na geometria esférica.
- Ensinar como medir os ângulos formados por duas circunferências máximas.
- Utilizar o cordão para fazer duas circunferências máximas e os palitos para representar as paralelas passando por aquele ponto onde se formou o ângulo.
- Medir com o transferidor o ângulo formado.
- Distribuir as bolinhas de isopor para os alunos.
- Pedir que formem um Triângulo Esférico usando os alfinetes como vértices e o cordão para representar as geodésicas (arcos de circunferência) que conectam os vértices.
- Certificar-se de que entendam que estamos representando um triângulo em uma superfície esférica.
- Discutir com os alunos a soma dos ângulos internos obtida no Triângulo Esférico e compará-la com a soma dos ângulos internos de um triângulo em uma superfície plana (sempre 180°).
- Utilizar o transferidor para medir os ângulos internos do Triângulo Esférico formado pelas geodésicas.
- Os alunos devem registrar os dados e calcular a soma dos ângulos internos.
- Conduzir uma discussão sobre os resultados obtidos.
- Destacar que em qualquer Triângulo Esférico a soma dos ângulos internos é maior que 180 graus.
- Mostrar que, embora os lados do triângulo não possam ser uma semicircunferência máxima, à medida que tendem para esse valor, a soma dos ângulos internos tende a 540 graus.
- Conduzir uma discussão sobre as diferenças e similaridades entre as propriedades dos triângulos esféricos e planos.

- Destacar como as propriedades dos triângulos esféricos são afetadas pela curvatura da esfera.

Avaliação:

- Avaliar a participação e o engajamento dos alunos durante a oficina.
- Observar a compreensão dos conceitos abordados e a capacidade dos alunos em resolverem os problemas propostos.
- Observar a precisão e o entendimento dos alunos ao medirem os ângulos internos e compararem com a soma dos ângulos internos de um triângulo em uma superfície plana.

7º ENCONTRO:

Objetivo da Aula: Apresentar aos alunos os conceitos matemáticos envolvidos nos triângulos esféricos, utilizando o GeoGebra para demonstrar visualizações 3D e explorar suas características geométricas. Esse plano de aula deve proporcionar uma experiência de aprendizado visual e interativa.

Recursos Necessários:

- Computador com acesso ao GeoGebra;
- Projetor e tela para demonstração;
- Slides da apresentação (utilização de recursos visuais nos slides para ilustrar os conceitos);
- Material de apoio impresso (diagramas e definições);
- Acesso à internet (opcional).

Metodologia:

- Receber os alunos e introduzir o tema da aula, explicando que hoje eles irão explorar os triângulos esféricos e suas propriedades geométricas utilizando o GeoGebra para visualização 3D;
- Revisar brevemente as propriedades básicas das esferas e os conceitos de latitude, longitude e linhas imaginárias.
- Utilizar slides para explicar os conceitos de triângulos esféricos, como a soma dos ângulos internos (que é maior que 180°), e os tipos de triângulos esféricos;

- Explicar a importância dos triângulos esféricos na compreensão de fenômenos geográficos e astronômicos.
- Utilizar o GeoGebra no projetor para demonstrar a construção de uma esfera;
- Mostrar como posicionar pontos na superfície da esfera para formar um Triângulo Esférico;
- Destacar como visualizar a esfera em 3D e manipular a visualização para melhor compreensão dos triângulos esféricos.
- Demonstrar como medir os ângulos e lados dos triângulos esféricos no GeoGebra;
- Utilizar a ferramenta para explorar diferentes tipos de triângulos esféricos e suas propriedades, como área e ângulos internos;
- Comparar essas propriedades com os triângulos planos para destacar as diferenças.
- Fazer perguntas aos alunos para verificar a compreensão e incentivar a interação;
- Permitir que os alunos façam perguntas e participem da discussão sobre as visualizações no GeoGebra.
- Recapitular os principais conceitos aprendidos sobre triângulos esféricos e suas visualizações no GeoGebra;
- Destacar a importância de utilizar ferramentas como o GeoGebra para a visualização e compreensão de conceitos geométricos complexos.

Avaliação:

- Avaliar a participação e interesse dos alunos durante a aula.
- Realizar avaliação contínua durante a aula, observando a participação dos alunos e o envolvimento nas discussões e atividades práticas.
- Considerar uma avaliação teórica ao final da aula, onde os alunos devem responder a questões sobre os conceitos de triângulos esféricos discutidos na aula.

8º ENCONTRO:

Objetivo da Aula: Propor problemas práticos envolvendo Triângulos Esféricos, consolidando assim o conhecimento adquirido ao longo do minicurso.

Recursos Necessários:

- Slides da apresentação (utilização de recursos visuais nos slides para ilustrar os conceitos);
- Exercícios impressos para os alunos.

Metodologia:

- Apresentar alguns problemas práticos envolvendo triângulos esféricos, utilizando slides para ilustrar cada problema;
- Explicar cada problema detalhadamente, destacando as informações importantes e as fórmulas que serão necessárias para resolvê-los;
- Dividir os alunos em pequenos grupos e distribuir os exercícios impressos.
- Incentivar a colaboração e a discussão dentro dos grupos para resolver os problemas;
- Circular pela sala para observar o progresso, oferecer orientações e responder a perguntas;
- Pedir aos grupos que apresentem suas soluções para os problemas.
- Discutir as diferentes abordagens utilizadas pelos grupos e corrigir eventuais erros;
- Consolidar o aprendizado reforçando os conceitos corretos e destacando as estratégias mais eficazes;
- Reforçar a importância da Trigonometria Esférica em contextos reais e a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos.

Avaliação

- Avaliação da participação e interesse dos alunos durante a aula;
- Avaliação do desempenho dos alunos nos exercícios propostos.

6 RELATO DA EXPERIÊNCIA VIVENCIADA EM SALA DE AULA

A aplicação da sequência didática de oito encontros de aproximadamente 50 minutos cada, com alunos do segundo ano do Ensino Médio teve como foco a evolução da Trigonometria, com destaque para a Trigonometria Esférica e suas aplicações práticas. A experiência foi marcada por momentos de aprendizagem ativa, interação entre os estudantes e atividades práticas que promoveram um entendimento profundo e contextualizado dos conceitos matemáticos.

Sobre o histórico da Trigonometria, a sequência didática iniciou com uma apresentação sobre a evolução da Trigonometria. Exploramos desde os primórdios até os desenvolvimentos mais modernos, destacando matemáticos influentes e seus contributos. Utilizei slide e vídeos para manter os alunos engajados. Durante as discussões, ficou evidente a surpresa dos alunos ao perceberem como a Trigonometria Esférica influenciou diversas áreas, como a Astronomia e a Navegação.

Referente os instrumentos de navegação, no segundo encontro, foi apresentado os principais instrumentos de navegação utilizados historicamente, como o astrolábio, o sextante e o quadrante. Cada instrumento foi detalhadamente explicado, enfatizando seu funcionamento e importância. Os alunos foram então desafiados a construir réplicas desses instrumentos como atividade extraclasse.

No terceiro encontro, foi percebido que a construção prática desses instrumentos não só incentivou a pesquisa adicional, mas também fomentou a criatividade e a colaboração em grupo. A atividade culminou em apresentações onde os alunos demonstraram seus modelos, discutindo as dificuldades encontradas e as soluções criativas que desenvolveram, promovendo a interação durante as apresentações dos instrumentos náuticos, no entanto foi uma estratégia eficaz para consolidar o conhecimento e incentivar a troca de ideias. Os alunos foram incentivados a fazer perguntas, fornecer feedback e discutir as diferentes abordagens na construção dos instrumentos. Esta troca não só reforçou o aprendizado, mas também criou um ambiente colaborativo e motivador.

No encontro seguinte, foram explorados os conceitos matemáticos envolvidos na representação dos globos terrestre e celeste. Utilizando modelos físicos de visualização, os alunos puderam entender as características geométricas dessas esferas e sua importância para a compreensão do espaço geográfico e astronômico. A integração de recursos visuais e tecnológicos facilitou a compreensão dos conceitos abstratos e tornou a aula mais interativa e envolvente.

No próximo encontro foi realizada a exploração das coordenadas geográficas através de atividades práticas que incluíram a utilização de mapas e globos. Os alunos aprenderam a localizar pontos na Terra usando latitude e longitude, compreendendo a aplicação prática desse conhecimento em contextos como a navegação e a geolocalização.

Uma oficina prática foi desenvolvida, em um outro encontro para explorar conceitos básicos de Geometria Esférica. Utilizando materiais simples como bolinhas de isopor, cordão, alfinetes, canudinhos e transferidor, os alunos construíram modelos que representavam Triângulos Esféricos e outros conceitos geométricos. A oficina foi um sucesso, pois permitiu aos alunos visualizar e manipular os conceitos, facilitando a compreensão, e os compararam com a Trigonometria Plana.

A utilização do software GeoGebra para explorar Triângulos Esféricos proporcionou uma experiência de aprendizado visual e interativa. Os alunos puderam visualizar em 3D as propriedades dos Triângulos Esféricos e entender suas características geométricas. Esta abordagem tecnológica não só tornou a aula mais atrativa, mas também desenvolveu habilidades digitais importantes.

Para enriquecer o aprendizado, os alunos resolveram problemas práticos envolvendo Trigonometria Esférica, especialmente para determinar distâncias entre cidades. Apesar do receio inicial com os elementos das fórmulas, como seno e cosseno de valores até então "estranhos"para eles, a explanação e o incentivo sobre como utilizar a calculadora para esses cálculos (a maioria não estava familiarizada com cálculos trigonométricos) os deixaram mais confortáveis e confiantes. Ao final, a maioria chegou aos resultados corretos, o que os deixou satisfeitos e motivados.

Isso ajudou a solidificar o entendimento dos conceitos fundamentais da Trigonometria Esférica, aplicando esses conhecimentos em situações reais e relevantes, onde os alunos se surpreenderam ao comparar os resultados obtidos em sala de aula com pesquisas realizadas na internet, em sites oficiais.

Ao longo dos encontros do minicurso, a metodologia ativa e a integração de atividades práticas, teóricas e tecnológicas mostraram-se eficazes para o aprendizado da Trigonometria Esférica. Os alunos não só adquiriram conhecimentos profundos sobre o tema, mas também desenvolveram habilidades colaborativas e criativas. A experiência demonstrou, que uma abordagem bem planejada e diversificada pode transformar a sala de aula em um ambiente dinâmico e estimulante, promovendo um aprendizado significativo e duradouro, e que é possível sim os alunos do Ensino Médio, compreenderem acerca da Trigonometria Esférica.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação apresentou os principais conceitos e resultados da Geometria e Trigonometria Esférica utilizando principalmente recursos da matemática elementar, oferecendo uma ferramenta valiosa para professores de Matemática do Ensino Médio. A demonstração aos alunos de como a Matemática está presente em nosso cotidiano é essencial, pois mostra como ideias e conceitos abstratos contribuem para o avanço do conhecimento e das tecnologias em prol do bem-estar da sociedade. Isso é essencial e indispensável para o desenvolvimento do pensamento geométrico, capacitando os alunos a interpretar e representar a localização e o movimento de figuras no plano cartesiano e na circunferência trigonométrica, identificando as transformações envolvidas, tornando as aulas de Matemática mais interessantes e motivadoras.

No entanto, abordou de forma abrangente a história, os conceitos e as aplicações da Trigonometria Esférica, com ênfase especial em sua relevância na navegação astronômica. O estudo teve como objetivo fornecer uma compreensão teórica dos fundamentos da Trigonometria Esférica e demonstrar suas aplicações práticas e impacto significativo. A pesquisa iniciou com uma análise histórica, destacando a evolução da trigonometria desde os antigos gregos até os matemáticos modernos, sublinhando as contribuições de figuras notáveis como Eratóstenes, Hiparco e Ptolomeu. Esse contexto histórico foi crucial para entender as bases sobre as quais a Trigonometria Esférica foi construída.

Os capítulos subsequentes exploraram os conceitos básicos da Trigonometria Esférica, incluindo as razões trigonométricas, as leis dos senos e cossenos esféricos, e a geometria associada aos triângulos esféricos, apresentando exemplos práticos e demonstrações para ilustrar como esses conceitos são aplicados na resolução de problemas de navegação e em outras áreas científicas.

A implementação do minicurso sobre trigonometria esférica no Ensino Médio destacou a importância de contextualizar os conceitos matemáticos no ensino, proporcionando aos alunos uma experiência de aprendizado mais significativa e prática. Os resultados demonstraram que, quando os alunos são expostos a aplicações práticas e históricas da Trigonometria Esférica, sua compreensão e interesse pelo assunto aumentam significativamente.

Conclui-se que a Trigonometria Esférica não é apenas uma área fascinante da Matemática, mas também uma ferramenta essencial para resolver problemas do mundo real, especialmente na Navegação e na Astronomia. A integração de sua história e aplicações no currículo escolar pode enriquecer o aprendizado dos alunos, preparando-os melhor para enfrentar desafios futuros.

Em suma, este estudo evidenciou que a Trigonometria Esférica possui um valor inestimável tanto no contexto educacional quanto nas aplicações práticas. A continuidade dessa abordagem interdisciplinar e histórica no ensino pode proporcionar um ensino de Matemática mais completo e engajador, promovendo um aprendizado mais profundo e duradouro.

Referências

AZAMBUJA, M. T. D. O uso do cotidiano para o ensino de matemática em uma escola de caçapava do sul. 2013. Citado na página 81.

BOCZKO, R. *Conceitos de astronomia*. [S.l.]: Editora Edgar Blucher LTDA, 1984. Citado 7 vezes nas páginas 66, 67, 69, 71, 74, 76 e 78.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2012. Citado 7 vezes nas páginas 25, 29, 39, 43, 45, 47 e 49.

BRASIL, M. d. E. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental*. 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Citado na página 81.

BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Citado na página 23.

D'AMBROSIO, U. *História da Matemática e educação. in: Ferreira, Eduardo Sebastiani*. [S.l.]: Editora Edgar Blucher LTDA, 1996. Citado na página 23.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 16, 25, 27, 31, 38 e 43.

FILHO, D. C. D. M. Manual de redação matemática. *Coleção Professor de Matemática, RJ, 2a Edição, SBM*, 2018. Citado na página 16.

LEAL, L. C.; ONUCHIC, L. d. l. R. Ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas como prática sociointeracionista. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 29, n. 53, p. 955–978, 1999. Citado na página 91.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas: coleção do professor de matemática*. [S.l.]: Rio de Janeiro - Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2010. Citado na página 17.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 2016. v. 6. Citado na página 24.

NACIONAIS, P. C. matemática. *Brasília: MEC/SEF*, v. 3, 1997. Citado na página 23.

ROCHA, M. L. P. C. *Pelos caminhos das idéias e da existência: a propósito das cartografias de J.T de Moura Filho*. [S.l.]: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010. Citado na página 69.

ROQUE, T. Historia da matematica–uma visao critica, desfazendo mitos e lendas. *Sustinere-Revista de Saude e Educacao*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro-Uerj, v. 5, n. 2, 2012. Citado na página 31.

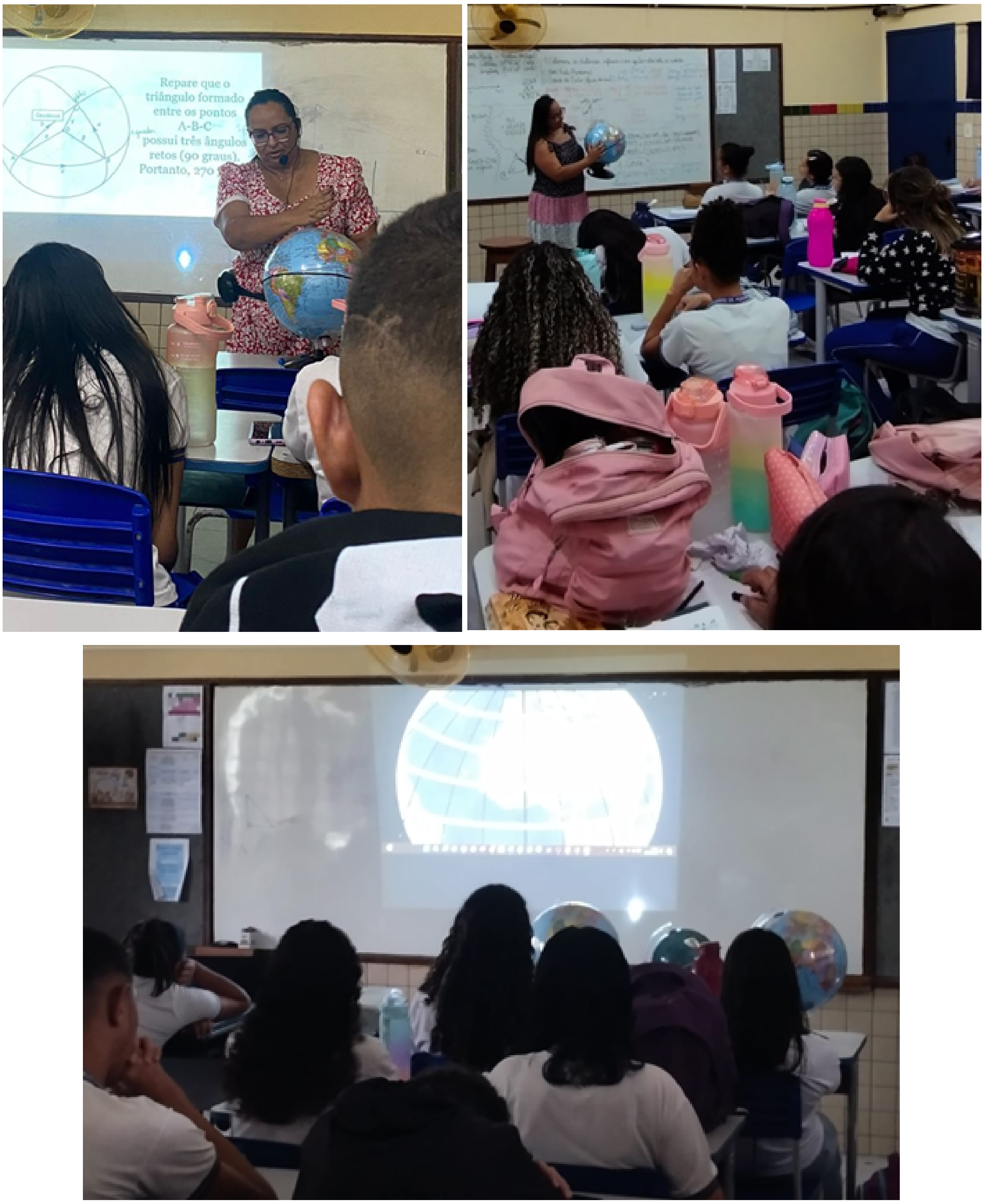
ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado na página 25.

VASCONCELLOS, C. d. S. *Planejamento: projeto de ensino-aprendizagem e projeto político-pedagógico. São Paulo: Libertad, 2002. VEIGA, Ilma Passos e RESENDE, Lúcia MG de (orgs.). Escola: espaço do projeto políticopedagógico*. [S.l.]: Campinas: Papirus, 2002. Citado na página 90.

Apêndices

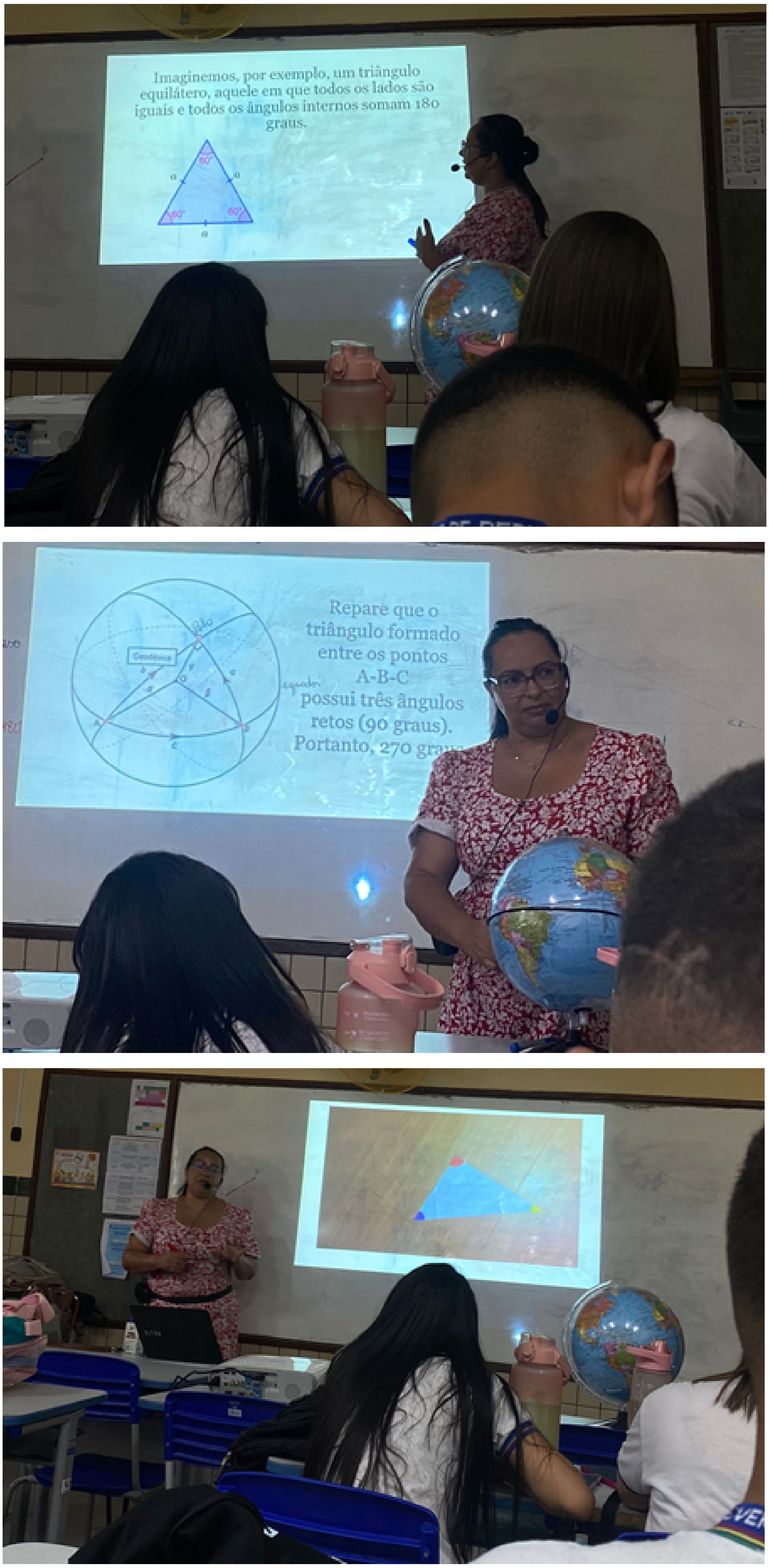
APÊNDICE A – Registro fotográfico das aulas

Figura 57 – Registro 01 fotográficos das aulas



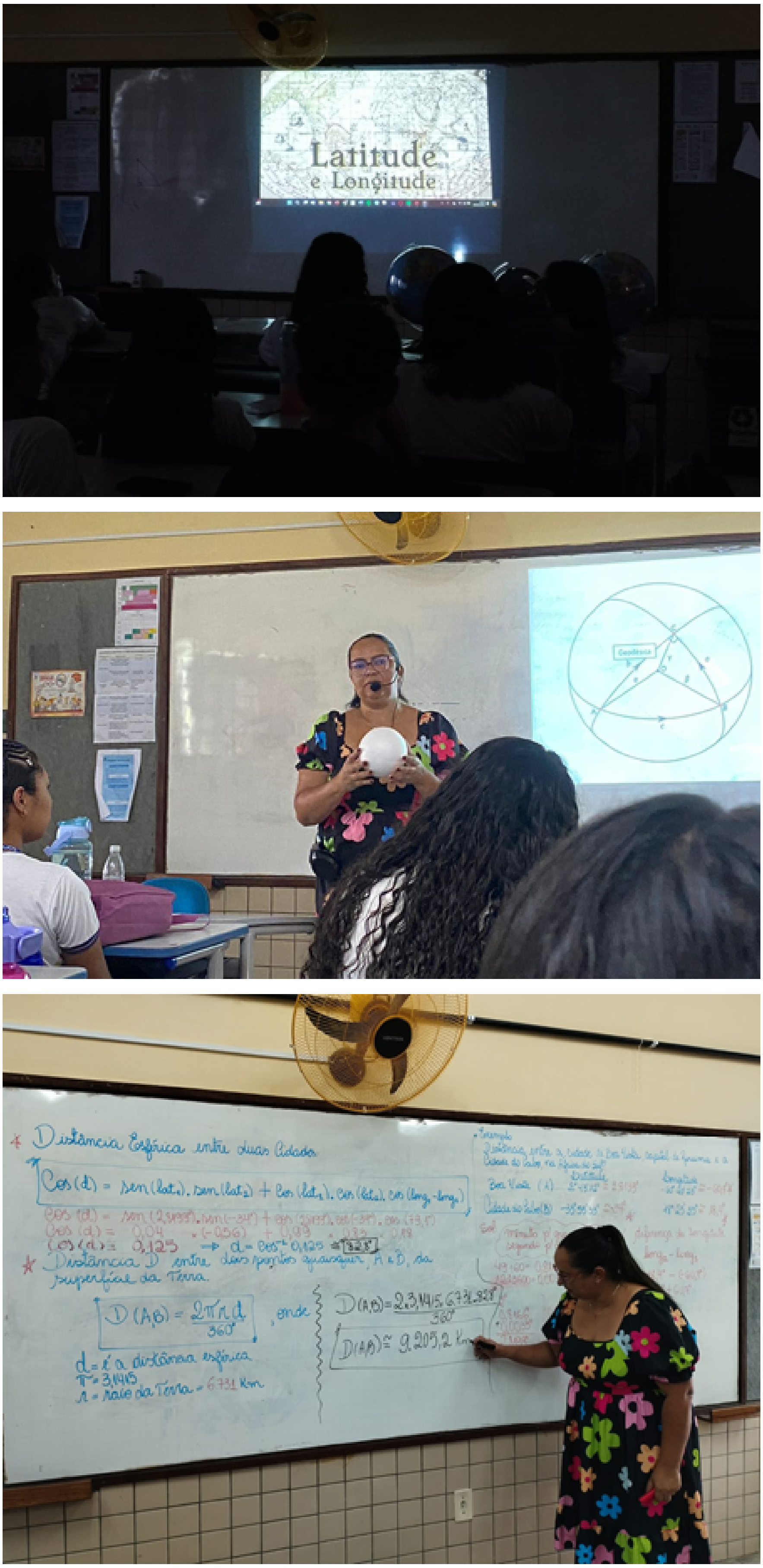
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 58 – Registro 02 fotográficos das aulas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 59 – Registros 03 fotográficos das aulas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

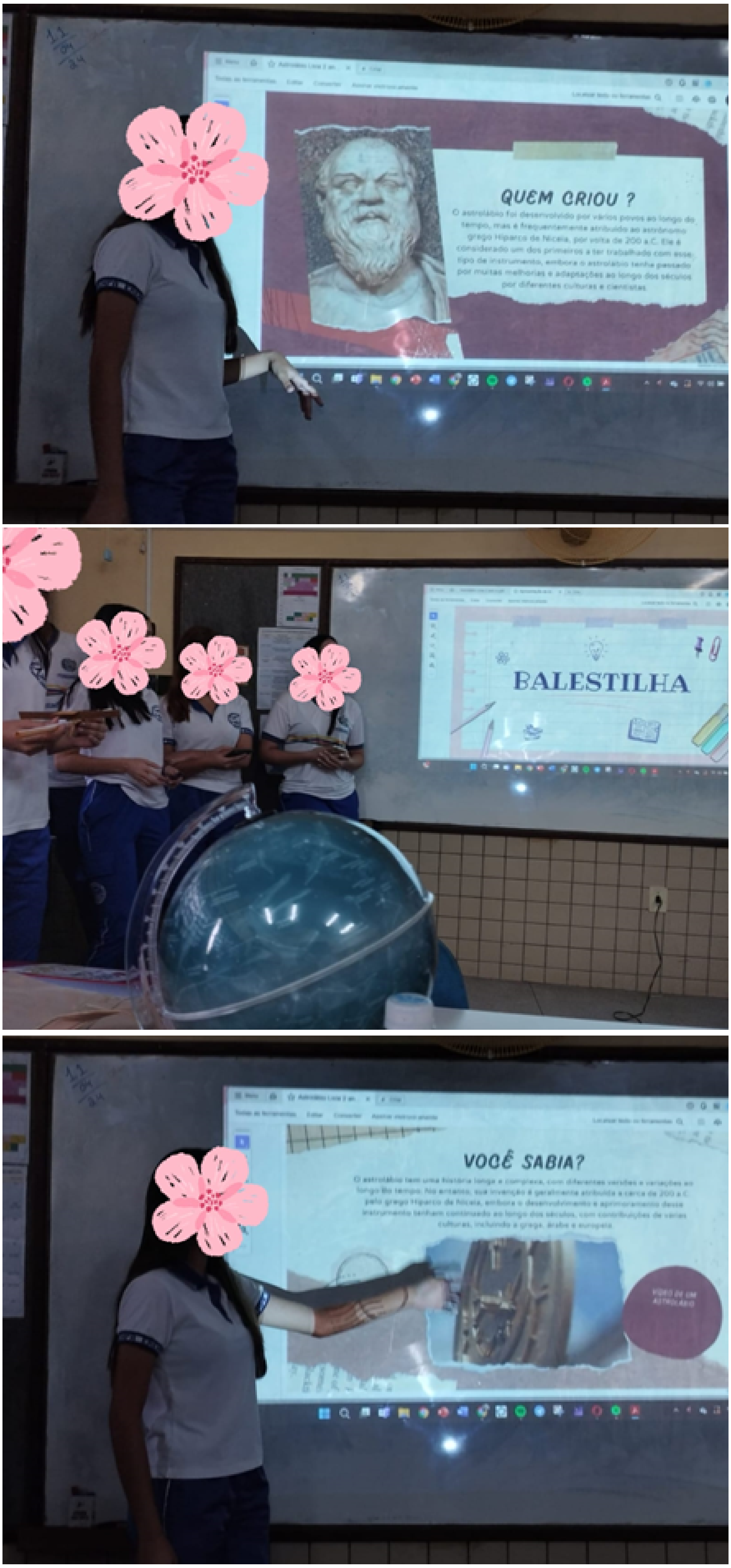
Figura 60 – Confeccionando os instrumentos náuticos 01.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 61 – Confeccionando os instrumentos náuticos 02.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 01.



Fonte: Elaborada pelo autor.

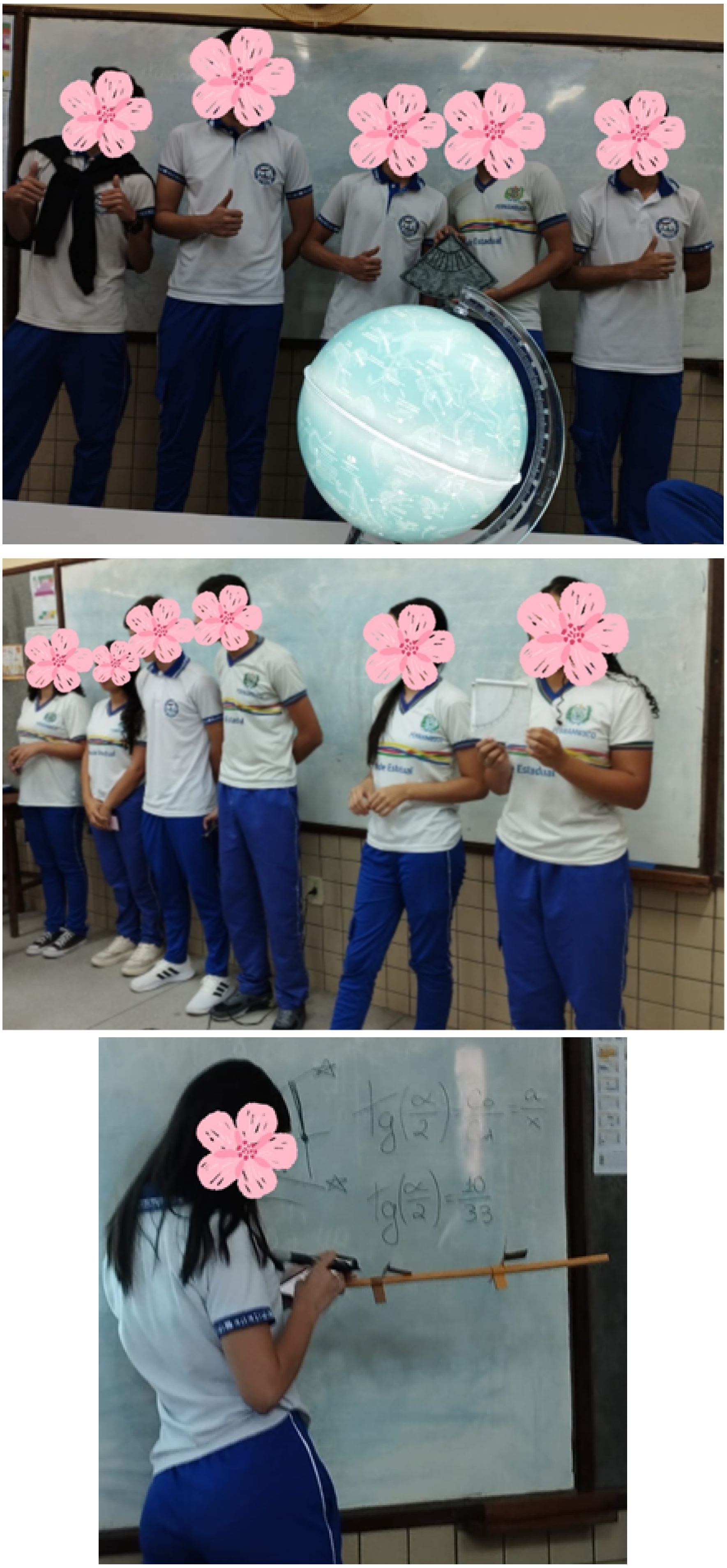
Figura 63 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 02.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 03.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 04.



Fonte: Elaborada pelo autor.

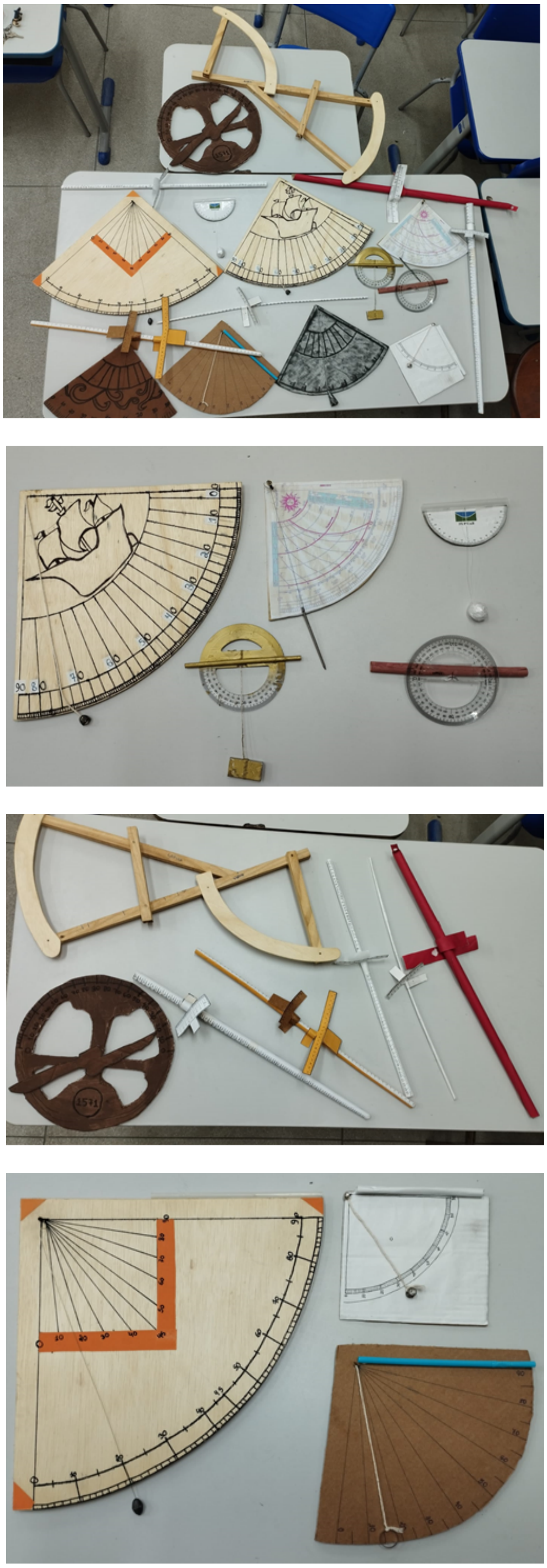
Figura 66 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 05.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 67 – Alunos apresentando os instrumentos náuticos 06.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 68 – Instrumentos Náuticos construídos pelos Alunos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

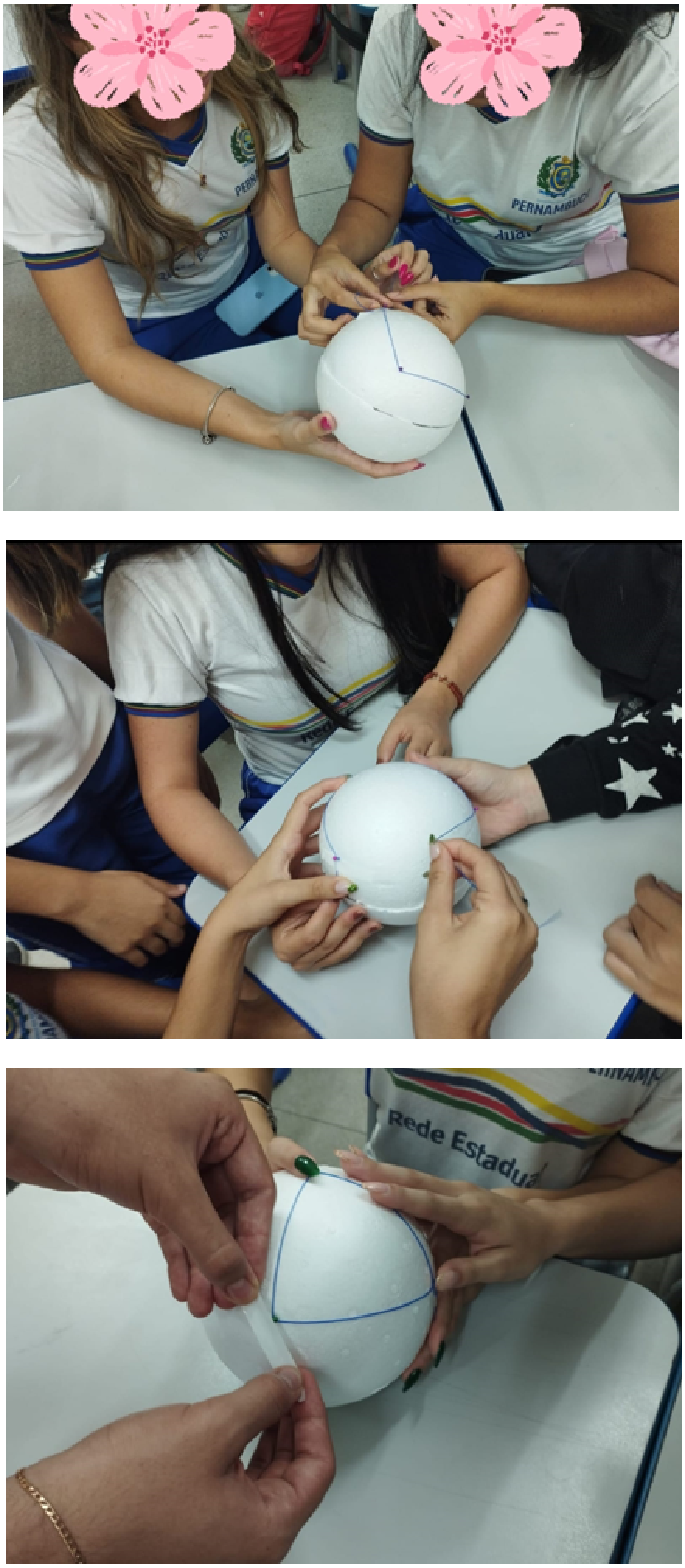
Figura 69 – Aula expositiva sobre círculo máximo e menor na esfera 01.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 70 – Aula expositiva sobre círculo máximo e menor na esfera 02.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 71 – Aula apresentando Triângulo Esférico com Bolas de Isopor 01.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 72 – Aula apresentando Triângulo Esférico com Bolas de Isopor 02.

Fonte: Elaborada pelo autor.

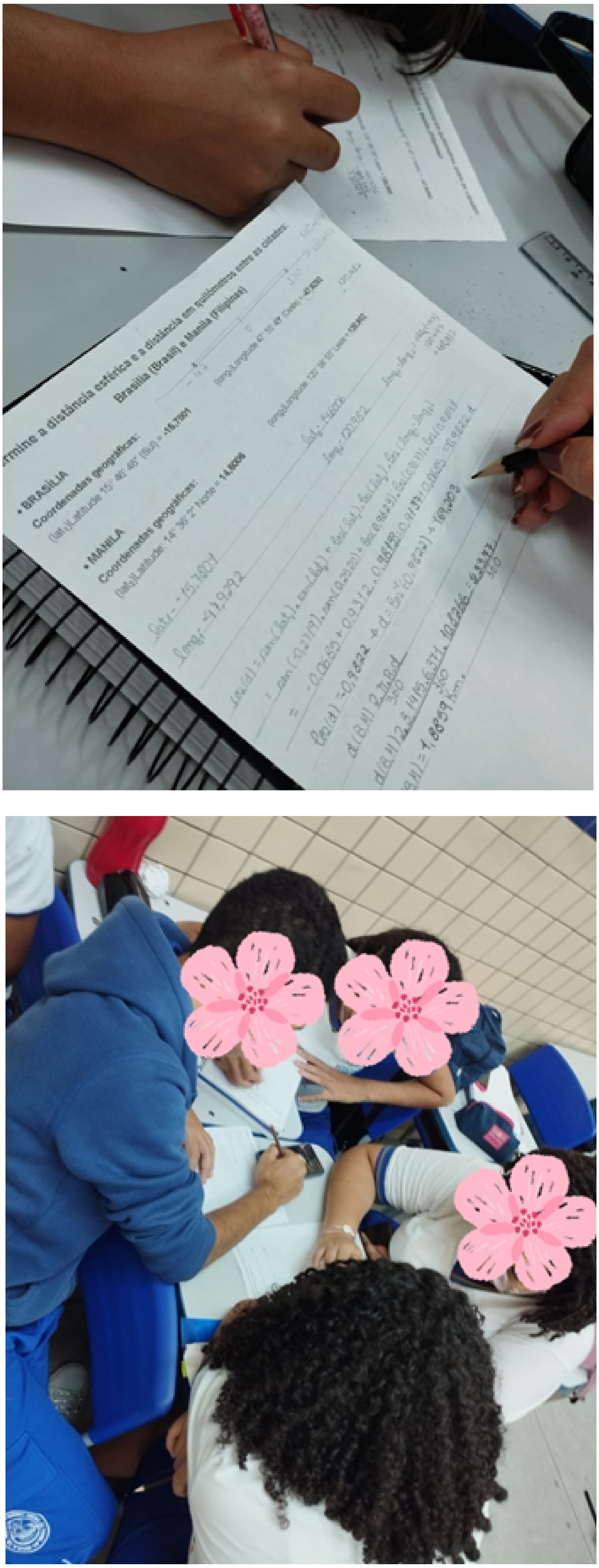
Figura 73 – Aula de explanação sobre a distância esférica e em quilômetros entre duas cidades 01.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 74 – Aula de explanação sobre a distância esférica e em quilômetros entre duas cidades 02.

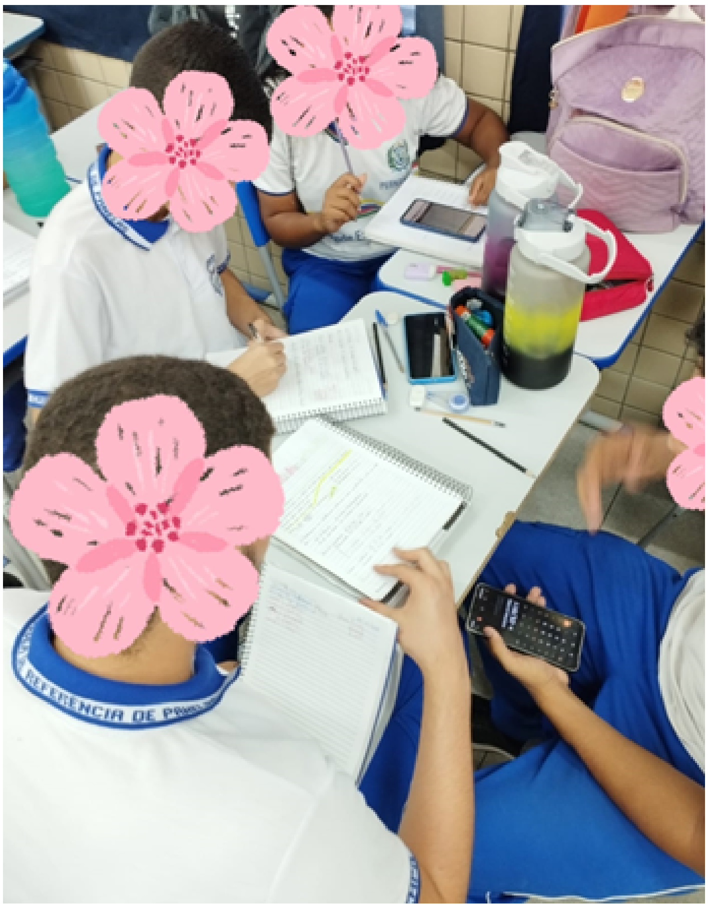
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 75 – Alunos resolvendo exercícios de Trigonometria Esférica 01.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 76 – Alunos resolvendo exercícios de Trigonometria Esférica 02.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 77 – Alunos resolvendo exercícios de Trigonometria Esférica 03.

Fonte: Elaborada pelo autor.