

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A utilização do software GeoGebra como
instrumento para compreensão dos conceitos e
resultados da Geometria Plana

Wesley Handerson Barreto da Silva Martins



Instituto de Matemática

Maceió, Abril de 2024



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

WESLEY HANDERSON BARRETO DA SILVA MARTINS

**A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO PARA
COMPREENSÃO DOS CONCEITOS E RESULTADOS DA GEOMETRIA PLANA**

Maceió

2024

WESLEY HANDERSON BARRETO DA SILVA MARTINS

**A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO PARA
COMPREENSÃO DOS CONCEITOS E RESULTADOS DA GEOMETRIA PLANA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima

Maceió

2024

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M386u Martins, Wesley Handerson Barreto da Silva.
 A utilização do software GeoGebra como instrumento para
 compreensão dos conceitos e resultados da geometria plana / Wesley
 Handerson Barreto da Silva Martins. - 2024.
 181 f. : il.

Orientador: José Carlos Almeida de Lima.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade
Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 169-180.
Anexos: f. 181.

1. GeoGebra (*Software*). 2. Geometria plana. 3. Matemática. 4.
Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. I. Título.

CDU: 514.112

Folha de aprovação

WESLEY HANDERSON BARRETO DA SILVA MARTINS

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO PARA COMPREENSÃO DOS CONCEITOS E RESULTADOS DA GEOMETRIA PLANA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 29 de abril de 2024.

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS ALMEIDA DE LIMA
Data: 20/06/2024 13:36:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. José Carlos Almeida de Lima – UFAL (Presidente)



Documento assinado digitalmente
ANDRE LUIZ FLORES
Data: 20/06/2024 10:27:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. André Luiz Flores – UFAL (Examinador Interno)



Documento assinado digitalmente
GABRIEL ARAUJO GUEDES
Data: 20/06/2024 09:20:13-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Gabriel Araújo Guedes – UFRPE (Examinador Externo)

Dedico este trabalho aos meus filhos Maria Cecília, Maria Laura e Miguel Willian, os amores da minha vida. Aos meus pais Mário Sérgio e Maria Aparecida, que sempre foram a minha maior referência e inspiração. E à minha esposa, Josiellen, pelo grande apoio durante toda essa jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pelo dom da vida e por me permitir, que em meio a tantas dificuldades e desafios, pudesse concluir esta etapa tão importante em minha vida.

Aos meus pais, Mário Sérgio e Maria Aparecida, por se doarem completamente para que seus filhos pudessem ter um “FUTURO”.

Aos meus irmãos, Larissa e Ygor, que são partes fundamentais da minha vida.

Aos meus filhos, Maria Cecília, Maria Laura e Miguel Willian, por serem a minha maior determinação, sem eles eu não teria conseguido.

À minha esposa, Josiellen Karen, que desde o início me apoiou e me ajudou para que eu pudesse concluir o curso.

Aos professores do PROFMAT – UFAL por todo o apoio e atenção durante o curso e por todo saber que foi transmitido.

Ao meu orientador, Prof.º Dr. José Carlos, por ter me ajudado e apoiado ao longo dessa jornada e ter acreditado no potencial deste trabalho.

A todos os colegas de curso das turmas de 2019 e 2021.

Ao meu grande amigo e mestre Prof.º Ms. Ledivaldo Gomes, por toda orientação e apoio.

A todos os meus amigos que me incentivaram para que eu alcançasse esse título.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática – SBM e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, pelo oferecimento deste curso em Rede Nacional e a CAPES pelo apoio financeiro.

“A matemática é a linguagem a qual Deus escreveu o universo”.

Galileu Galilei

RESUMO

O ensino da Matemática vem passando por um processo de mudança que se acentuou principalmente durante a pandemia de COVID-19, visto que a sociedade atual está inserida no que é chamado de Educação 5.0. Neste tipo de “educação” a abordagem é mais voltada para as tecnologias digitais utilizadas no processo educacional para garantir um melhor desenvolvimento socioemocional ao estudante. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) através das suas competências gerais, objetivos de aprendizagem, nas competências e habilidades de diversos componentes curriculares recomenda o uso de tecnologias digitais visando as vivências dos estudantes. É nesse sentido que o uso do *GeoGebra*, como recurso tecnológico, pode garantir uma melhor abordagem de conceitos matemáticos, pois é um *software* dinâmico e tende a auxiliar na compreensão dos conteúdos. A escolha da abordagem do uso do *GeoGebra* na área de Geometria se dá devido à sua presença no dia a dia, mas, como também em diversos conteúdos matemáticos ou físicos e em diversas profissões. O presente trabalho tem como objetivo principal demonstrar conceitos de Geometria Plana utilizando o *software GeoGebra* para os estudantes do Ensino Médio, além de analisar suas potencialidades e limitações na exploração de conceitos da Geometria Plana e na resolução de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Para isso, a metodologia utilizada é do tipo qualitativa de natureza bibliográfica e exploratória. Por fim, os resultados obtidos através das demonstrações dos teoremas e das resoluções de questões da OBMEP mostram que o *GeoGebra* pode ser utilizado como recurso metodológico no ensino da Matemática e principalmente na demonstração de teoremas da Geometria Plana.

Palavras-chave: *GeoGebra*, Geometria Plana, Matemática, OBMEP.

ABSTRACT

Mathematics education has been undergoing a process of change that has intensified mainly during the COVID-19 pandemic, as today's society is immersed in what is called Education 5.0. In this type of "education", the approach is more focused on the digital technologies used in the educational process to guarantee a better socio-emotional development for the student. The National Common Curriculum Base (BNCC), through its general competences, learning objectives, in the competences and skills of various curricular components, recommends the use of digital technologies aimed at the students' experiences. It is in this sense that the use of GeoGebra, as a technological resource, can guarantee a better approach to mathematical concepts, as it is a dynamic software and tends to help in understanding the contents. The choice of the approach of using GeoGebra in the area of Geometry is due to its presence in everyday life, but also in various mathematical or physical contents and in various professions. The main objective of this work is to demonstrate Plane Geometry concepts using GeoGebra software for high school students, in addition to analyzing its potentialities and limitations in exploring Plane Geometry concepts and solving questions of the Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools (OBMEP). For this, the methodology used is of a qualitative nature, bibliographic and exploratory. Finally, the results obtained through the demonstrations of the theorems and the solutions of OBMEP questions show that GeoGebra can be used as a methodological resource in the teaching of Mathematics and mainly in the demonstration of Plane Geometry theorems.

Keywords: *GeoGebra*, Plane Geometry, Mathematics, OBMEP.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Interface do <i>GeoGebra</i>	25
Figura 2 –	Barra de Menu do <i>GeoGebra</i>	26
Figura 3 –	Barra de Ferramentas do <i>GeoGebra</i>	28
Figura 4 –	Barra de Caixa de entrada, janela de álgebra e de visualização do <i>GeoGebra</i>	28
Figura 5 –	Pontos, retas e plano.....	46
Figura 6 –	Construção de pontos no <i>GeoGebra</i>	47
Figura 7 –	Localização de pontos no plano cartesiano.....	47
Figura 8 –	Construção de retas no <i>GeoGebra</i>	48
Figura 9 –	Retas no <i>GeoGebra</i>	48
Figura 10 –	Representação de um plano no <i>GeoGebra</i>	49
Figura 11 –	Axioma 1 de incidência.....	51
Figura 12 –	Axioma 2 de incidência.....	52
Figura 13 –	Axioma 3 de incidência.....	52
Figura 14 –	Representação de um ponto e inúmeras retas.....	54
Figura 15 –	Semirretas com origem no ponto C.....	55
Figura 16 –	Representação de segmentos em uma reta.....	55
Figura 17 –	Representação da medição de um segmento.....	55
Figura 18 –	Ângulo $\hat{A}OB$	56
Figura 19 –	Ângulo $\hat{B}OA$	56
Figura 20 –	Transferidor de 180°	57
Figura 21 –	Transferidor de 360°	58
Figura 22 –	Ângulo nulo.....	58
Figura 23 –	Ângulo agudo.....	58
Figura 24 –	Ângulo reto.....	59
Figura 25 –	Ângulo obtuso.....	59
Figura 26 –	Ângulo raso.....	60
Figura 27 –	Ângulos congruentes.....	60
Figura 28 –	Ângulos consecutivos e adjacentes.....	61
Figura 29 –	Ângulos complementares.....	62
Figura 30 –	Ângulos suplementares.....	62

Figura 31 –	Ângulos opostos pelo vértice.....	63
Figura 32 –	Ângulos determinados por retas paralelas cortas das por uma transversal.....	64
Figura 33 –	Triângulos congruentes.....	66
Figura 34 –	Caso lado-lado-lado (LLL).....	67
Figura 35 –	Caso lado-ângulo-lado (LAL).....	67
Figura 36 –	Caso ângulo-lado-ângulo (ALA).....	68
Figura 37 –	Caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA _O).....	69
Figura 38 –	Quadrilátero.....	69
Figura 39 –	Quadriláteros.....	70
Figura 40 –	Paralelogramo.....	71
Figura 41 –	Retângulo.....	71
Figura 42 –	Losango.....	72
Figura 43 –	Quadrado.....	72
Figura 44 –	Trapézio isósceles.....	73
Figura 45 –	Trapézio retângulo.....	74
Figura 46 –	Polígono ABCDE.....	75
Figura 47 –	Figura na malha quadriculada.....	76
Figura 48 –	Área do quadrado.....	77
Figura 49 –	Área do retângulo.....	78
Figura 50 –	Área do paralelogramo.....	79
Figura 51 –	Transformação do paralelogramo em um retângulo.....	80
Figura 52 –	Área do triângulo.....	81
Figura 53 –	Área do retângulo.....	82
Figura 54 –	Área do triângulo.....	82
Figura 55 –	Triângulo equilátero.....	83
Figura 56 –	Área do losango.....	85
Figura 57 –	Área do losango.....	85
Figura 58 –	Área do trapézio.....	87
Figura 59 –	Decomposição do trapézio.....	88
Figura 60 –	Área do hexágono.....	89
Figura 61 –	Hexágono dividido em triângulos equiláteros.....	90
Figura 62 –	Diferença entre circunferência e círculo.....	91

Figura 63 –	Divisão da circunferência em setores circulares.....	92
Figura 64 –	Setores circulares organizados num paralelogramo.....	92
Figura 65 –	Figuras inscritas numa circunferência.....	93
Figura 66 –	Teorema de Tales.....	94
Figura 67 –	Teorema de Tales com retas transversais paralelas a reta r	95
Figura 68 –	Teorema de Tales com retas comensuráveis.....	96
Figura 69 –	Teorema de Pitágoras.....	98
Figura 70 –	Teorema de Pitágoras.....	100
Figura 71 –	Teorema de Pitágoras.....	100
Figura 72 –	Teorema de Pitágoras por James Abram Garfield.....	101
Figura 73 –	Triângulo retângulo com as projeções dos catetos.....	103
Figura 74 –	Controle deslizante.....	104
Figura 75 –	Caixa de comando controle deslizante.....	105
Figura 76 –	Definição de pontos para o controle deslizante.....	105
Figura 77 –	Rotação em torno de um ponto.....	106
Figura 78 –	Caixa de comando da rotação em torno de um ponto.....	106
Figura 79 –	Setor circular.....	107
Figura 80 –	Construção do setor circular.....	108
Figura 81 –	Ferramenta ângulo.....	108
Figura 82 –	Valor do ângulo.....	109
Figura 83 –	Pontos não colineares no plano.....	109
Figura 84 –	Semirretas \overline{AB} e \overline{AC}	110
Figura 85 –	Ângulo entre as retas f e g	110
Figura 86 –	Inserir uma imagem.....	111
Figura 87 –	Transferidor de 360°	111
Figura 88 –	Caixa para exibir/esconder objetos.....	112
Figura 89 –	Legenda da caixa para exibir/esconder objetos.....	112
Figura 90 –	Transferidor de 180°	113
Figura 91 –	Caixa para exibir/esconder objetos.....	113
Figura 92 –	Exibindo os dois transferidores.....	114
Figura 93 –	Exibindo transferidor de 180°	114
Figura 94 –	Exibindo transferidor de 360°	115
Figura 95 –	Construção de um quadrado.....	116

Figura 96 –	Controle deslizante.....	117
Figura 97 –	Quadrado inscrito num quadrado.....	117
Figura 98 –	Medidas dos segmentos dos quadrados.....	118
Figura 99 –	Valores da hipotenusa e dos catetos.....	119
Figura 100 –	Texto dinâmico com os valores da hipotenusa e dos catetos.....	119
Figura 101 –	Equação utilizando texto dinâmico.....	120
Figura 102 –	Soma dos quadrados dos catetos.....	121
Figura 103 –	Prova do Teorema de Pitágoras.....	121
Figura 104 –	Triângulo retângulo.....	122
Figura 105 –	Quadrados formados por um triângulo retângulo.....	123
Figura 106 –	Texto dinâmico Teorema de Pitágoras.....	123
Figura 107 –	Soma dos quadrados dos catetos.....	124
Figura 108 –	Prova do Teorema de Pitágoras.....	125
Figura 109 –	Construção de retas paralelas cortadas por transversais.....	126
Figura 110 –	Prova do Teorema de Tales.....	127
Figura 111 –	Proporcionalidade do Teorema de Tales.....	127
Figura 112 –	Quadrado em função da medida dos lados.....	128
Figura 113 –	Área e perímetro do quadrado.....	129
Figura 114 –	Retângulo em função da medida da base e da altura.....	129
Figura 115 –	Área e perímetro do retângulo.....	130
Figura 116 –	Questão 18 – Nível 3 – Fase 1 – OBMEP 2005.....	134
Figura 117 –	Polígono ABCDEF.....	135
Figura 118 –	Formação do polígono ABCGE.....	135
Figura 119 –	Perímetro do polígono ABCGE.....	136
Figura 120 –	Questão 4 – Nível 3 – Fase 2 – OBMEP 2005.....	137
Figura 121 –	Quadrado ABCD e controle deslizante X.....	138
Figura 122 –	Quadrado EFGH.....	138
Figura 123 –	Área do quadrado EFGH.....	139
Figura 124 –	Área dos canteiros.....	140
Figura 125 –	Questão 1 – Nível 3 – Fase 1 – OBMEP 2006.....	140
Figura 126 –	Construção da região sombreada.....	141
Figura 127 –	Área sombreada.....	142
Figura 128 –	Razão entre a área sombreada e a área total.....	142

Figura 129 –	Razão entre as áreas.....	143
Figura 130 –	Questão 4 – Nível 3 – Fase 2 – OBMEP 2018.....	144
Figura 131 –	Segmento \overline{PQ} paralelo ao lado \overline{BC}	145
Figura 132 –	Paralelogramos PBRQ e PSCQ.....	145
Figura 133 –	Polígono PQCRSB.....	146
Figura 134 –	Questão 8 – Nível 1 – Fase 1 – OBMEP 2022.....	147
Figura 135 –	Retângulo ABCD.....	147
Figura 136 –	Diagonais e segmentos do retângulo ABCD.....	148
Figura 137 –	Polígonos AEI, FJK, DHML e CHN.....	148
Figura 138 –	Área dos polígonos AEI, FJK, DHML e CHN.....	149
Figura 139 –	Construção de um segmento congruente.....	150
Figura 140 –	Segmento \overline{CE} congruente ao segmento \overline{AB}	151
Figura 141 –	Ângulo qualquer.....	151
Figura 142 –	Circunferência de raio \overline{AD}	152
Figura 143 –	Construção do segmento \overline{FH}	153
Figura 144 –	Construção de um ângulo congruente a partir de um ângulo dado.....	153
Figura 145 –	Ângulos quaisquer.....	154
Figura 146 –	Construção de uma circunferência c.....	155
Figura 147 –	Construção de uma circunferência d.....	155
Figura 148 –	Construção de uma circunferência e.....	156
Figura 149 –	Comparando os ângulos \widehat{DEF} e \widehat{IEK}	156
Figura 150 –	Construção das circunferências c e d.....	157
Figura 151 –	Mediatriz de um segmento.....	158
Figura 152 –	Ângulo \widehat{ABC}	159
Figura 153 –	Intersecção das circunferências de raio \overline{DF}	159
Figura 154 –	Bissetriz de um ângulo.....	160
Figura 155 –	Reta f e um ponto fora da reta.....	161
Figura 156 –	Construção de uma circunferência dados centros e raio.....	161
Figura 157 –	Circunferência com centro em D.....	162
Figura 158 –	Circunferência de raio \overline{CE}	162
Figura 159 –	Circunferência de raio \overline{CE} com centro em D.....	163
Figura 160 –	Intersecção da circunferência c com a circunferência h.....	163
Figura 161 –	Retas paralelas f e i.....	164

Figura 162 –	Reta f e um ponto fora da reta.....	165
Figura 163 –	Circunferência com centro em C	165
Figura 164 –	Circunferências com centro em E e F	166
Figura 165 –	Reta perpendicular g	166
Figura 166 –	Ângulos $H\hat{J}E$ e $H\hat{J}F$	167

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Objetos do conhecimento e habilidade de Geometria para o Ensino Fundamental – Anos Iniciais.....	31
Quadro 2 –	Objetos do conhecimento e habilidade de Geometria para o Ensino Fundamental – Anos Finais.....	35
Quadro 3 –	Competências específicas e habilidades de Geometria para o Ensino Médio.....	41
Quadro 4 –	Descrição do conteúdo de cada livro que compõem <i>Os Elementos</i>	44
Quadro 5 –	Propriedades dos paralelogramos.....	73
Quadro 6 –	Múltiplos e submúltiplos do metro quadrado.....	75
Quadro 7 –	Quantitativo de escolas e estudantes inscritos na 1ª e 2ª fase da OBMEP	131
Quadro 8 –	Quantitativo de medalhas distribuídas na OBMEP.....	133

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC –	Base Nacional Comum Curricular
OBMEP –	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PNLD –	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
TIC –	Tecnologias de Informação e Comunicação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	21
1.1 Objetivos	23
1.1.1 Problema de pesquisa	23
1.1.2 Objetivo geral	23
1.1.3 Objetivos específicos	23
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	25
2.1 O <i>GeoGebra</i>	25
3 METODOLOGIA.....	30
4 EXPLANAÇÃO DE CONCEITOS E RESULTADOS ABORDADOS NESSE TRABALHO	44
4.1 Ponto, reta e plano.....	44
4.2 Segmento de retas	49
4.3 Ângulos	55
4.4 Congruência de triângulos	65
4.5 Quadriláteros.....	69
4.6 Área de figuras plana	74
4.7 Teorema de Tales	93
4.8 Teorema de Pitágoras.....	97
5 UTILIZANDO O <i>GEOGEBRA</i> NAS DEMONSTRAÇÕES DE TEOREMAS DA GEOMETRIA PLANA	104
5.1 Construção de um ângulo utilizando o controle deslizante	104
5.2 Construção de um ângulo e o uso do transferidor de 180° e 360°	109
5.3 Demonstração do Teorema de Pitágoras a partir de um quadrado	115
5.4 Uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando áreas	122
5.5 Demonstração do Teorema de Tales.....	125
6 RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP SOBRE GEOMETRIA PLANA UTILIZANDO O <i>GEOGEBRA</i>	131
6.1 OBMEP 2005 – Questão 18 – Nível 3 – Fase 1	133
6.2 OBMEP 2005 – Questão 4 – Nível 3 – Fase 2	136
6.3 OBMEP 2006 - Questão 1 – Nível 3 – Fase 1	140
6.4 OBMEP 2018 – Questão 4 – Nível 3 – Fase 2	143
6.5 OBMEP 2022 - Questão 8 – Nível 1 – Fase 1	146
7 ATIVIDADES USANDO O <i>GEOGEBRA</i>	150

7.1 Construção com régua e compasso usando o <i>GeoGebra</i>	
7.1.1 Construção de segmentos congruentes a partir de um segmento dado.....	150
7.1.2 Construção de ângulos congruentes a partir de um ângulo dado.....	151
7.1.3 Comparar a medida de dois ângulos usando apenas régua e compasso	154
7.1.4 Construção de mediatriz de um segmento	157
7.1.5 Construção da bissetriz de um ângulo	158
7.1.6 Dado um ponto fora de uma reta, construir uma reta paralela a reta dada passando por esse ponto.....	160
7.1.7 Dado um ponto fora de uma reta, construir uma reta perpendicular a reta dada passando por esse ponto.....	164
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	168
REFERÊNCIAS.....	169
ANEXOS.....	181

1 INTRODUÇÃO

Galileu Galilei disse certa vez que “a Matemática é a linguagem a qual Deus escreveu o universo” e se olharmos a grandiosidade do nosso Universo podemos perceber que a história da humanidade e a história da Matemática se confundem. Com a evolução da humanidade, houve também a evolução da Matemática e essa evolução trouxe consigo novas formas de abordar tal ciência.

A Matemática em seu início se baseava apenas na contagem e segundo Mol (2013) começou a ser desenvolvida muito antes da escrita ou da formação de uma civilização e que as habilidades inerentes ao processo de contagem anteriorizam-se a um desenvolvimento matemático mais elaborado, sendo essencial para a compreensão da história da Matemática. Eves (2011) afirma que com a evolução da sociedade as contagens simples envolvendo quantidade de pessoas ou de animais se tornaram inevitáveis, desenvolvendo posteriormente um arranjo de sons vocais para representar o número de objetos e com o aprimoramento da escrita o surgimento de símbolos representando as quantidades.

Esse processo evolutivo da Matemática ao longo da história foi acompanhado de uma evolução dos conceitos de Educação, que segundo Felcher e Folmer (2021) teve suas denominações baseadas em acontecimentos que marcaram a sociedade em determinados períodos como a revolução industrial, o surgimento da internet, entre outros.

Para entender melhor o processo evolutivo da Matemática até os dias atuais é necessário entender como se deu a evolução em cada uma das etapas da Educação. Atualmente, a educação está dividida em cinco tipos: Educação 1.0, Educação 2.0, Educação 3.0, Educação 4.0 (FELCHER; FORLMER, 2021) e Educação 5.0 (FELCHER; BLANCO; FOLMER, 2022).

De acordo com Cònsolo (2020) a Educação 1.0 é um modelo de educação centralizador e unilateral, baseado apenas no professor como disseminador do saber, desenvolvida em um ambiente específico de forma individual ou coletiva. Para Souza e Schneider (2022) a Educação 2.0 é resultado de uma evolução do modelo anterior baseado no modelo industrial, onde os indivíduos deveriam ser agrupados em salas de aula com capacidade maior e divididos em fileiras, em total silêncio e realizando as mesmas atividades.

Já a Educação 3.0 ou segundo Lutz (2021) educação inovadora é marcada pelas alterações nas metodologias de ensino, na forma de ensinar e do uso de tecnologias. Oliveira e Damasceno (2021) evidenciam que na Educação 4.0 houve uma potencialização do processo de ensino-aprendizagem gerado pela disseminação, consolidação e potencialização de diversas tecnologias e metodologias ativas. Felcher, Blanco e Folmer (2022, p. 11) destacam que a

Educação 5.0 é “uma abordagem que prioriza as tecnologias digitais como uma aliada no processo educacional e no desenvolvimento socioemocional do estudante”.

Nesse sentido, como está a abordagem da Matemática tendo em vista as inúmeras mudanças ocorridas na educação? O professor deve utilizar metodologias que estejam relacionadas ao cenário atual? Como utilizar *softwares* para demonstrar conteúdos matemáticos?

Para responder a tais questionamentos é necessário entender o cenário no qual hoje a educação se encontra e que segundo Sousa *et al.* (2021) nos dias atuais o uso de tecnologias digitais está transformando a sociedade com o passar do tempo e com isso surge a necessidade da utilização dessas tecnologias no ensino de Matemática, pois há atualmente inúmeras políticas educacionais e projetos governamentais que incentivam e estimulam o seu uso.

Torres, Pereira e Elias (2021) retratam que devido a pandemia da COVID-19 desde o ano de 2020 a educação mundial foi afetada e houve a necessidade dos professores se adaptarem, utilizando as novas tecnologias digitais como metodologias de ensino.

O mais importante documento da educação brasileira, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), propõe o uso de tecnologias digitais para o desenvolvimento do pensamento computacional, levando em consideração as vivências dos estudantes. Isso pode ser visto nas competências gerais, nos objetivos de aprendizagem, nas competências e habilidades de diversos componentes curriculares (BRASIL, 2018).

Mas como abordar certos conceitos matemáticos em uma sociedade inserida na Educação 5.0? Qual a área da Matemática seria mais propícia à elaboração de conceitos e o desenvolvimento da teoria utilizando alguma tecnologia digital? Qual ou quais *softwares* poderão ser utilizados como recurso tecnológico nessa abordagem?

De acordo com Fonseca (2021) o uso de novas tecnologias torna o aprendizado mais realista, tendo o estudante um papel principal no aprendizado e o professor ficando como mediador do aprendizado. Para Moran (2018) o uso de tecnologias digitais associadas a metodologias ativas, potencializam as possibilidades de pesquisa, comunicação, entre outros, além de diluírem, ampliarem e redefinirem os espaços (formal e informal).

A Geometria é uma ferramenta extremamente importante no nosso cotidiano, assim como seus conceitos aparecem em fenômenos da natureza de forma muito natural. “Os conceitos geométricos se aplicam em diversas áreas de conhecimento como nas engenharias, na arquitetura, na astronomia, etc” (AGUIAR, 2021, p. 16). Segundo Stival (2019) a Matemática causa um certo terror entre inúmeras pessoas e a área da geometria não se difere, por envolver construções de figuras associadas à álgebra e por isso o uso de novas metodologias

é essencial por ter a possibilidade do uso de *softwares*. Já Kameyama (2021) afirma que as dificuldades na compreensão dos conceitos e postulados de geometria é decorrente das limitações causadas pelo uso do método de ensino tradicional e que o uso de novas tecnologias, como o uso do *software GeoGebra*, tende a minimizar as dificuldades de compreensão dos conteúdos em Matemática.

A escolha pelo *software GeoGebra* pode ser justificada pelo grande número de pesquisas, no contexto educacional, que abordam o uso do *GeoGebra* associado a algum conteúdo da Matemática (MARTINS; PACHECO, 2023; GOULART, 2022; SILVA, 2022; KAMEYAMA, 2021; MIRANDA, 2021; MONTES, 2021; ORNELAS, 2021; SILVA, 2021; MENDES, 2020; RODRIGUES, 2020). “O *GeoGebra* é um *software* gratuito, multiplataformas, desenvolvido por Markus Hohenwarter em um projeto iniciado na Universidade de Salzburg no ano de 2001 e posteriormente desenvolvido na Universidade Atlântica da Flórida” (MARTINS, PACHECO, 2023, p. 4).

1.1 Objetivos

1.1.1 Problema de pesquisa

De que forma é possível ensinar conceitos de Geometria Plana utilizando o *software GeoGebra*? Quais as contribuições que o *GeoGebra* pode oferecer no ensino da Geometria Plana? É possível melhorar a aprendizagem dos estudantes em Geometria Plana com o uso desse *software*?

1.1.2 Objetivo geral

Usar o *software GeoGebra* para explorar os conceitos da geometria plana de forma dinâmica para discentes do ensino fundamental e do ensino médio.

1.1.3 Objetivos específicos

- Proporcionar a aprendizagem de conceitos de Geometria Plana através do uso do *GeoGebra*.
- Analisar as potencialidades e as limitações do *GeoGebra* para a exploração de conceitos da Geometria Plana.

- Resolver questões da OBMEP utilizando o *GeoGebra*.
- Usar o aspecto dinâmico do *GeoGebra* para produzir vídeos que expressem de forma interativa os conceitos e as demonstrações de determinadas propriedades em geometria plana.

Este trabalho será abordado em sete capítulos: Capítulo 1 – Introdução e Objetivos, Capítulo 2 – Fundamentação Teórica, Capítulo 3 – Metodologia, estabelecida na pesquisa em questão, Capítulo 4 – Explicação de conceitos e resultados abordados nesse trabalho, Capítulo 5 – Utilizando o *GeoGebra* nas demonstrações de teoremas da Geometria Plana, Capítulo 6 – Resolução de questões da OBMEP sobre Geometria Plana utilizando o *GeoGebra*, Capítulo 7 – Atividades usando o *GeoGebra* e as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

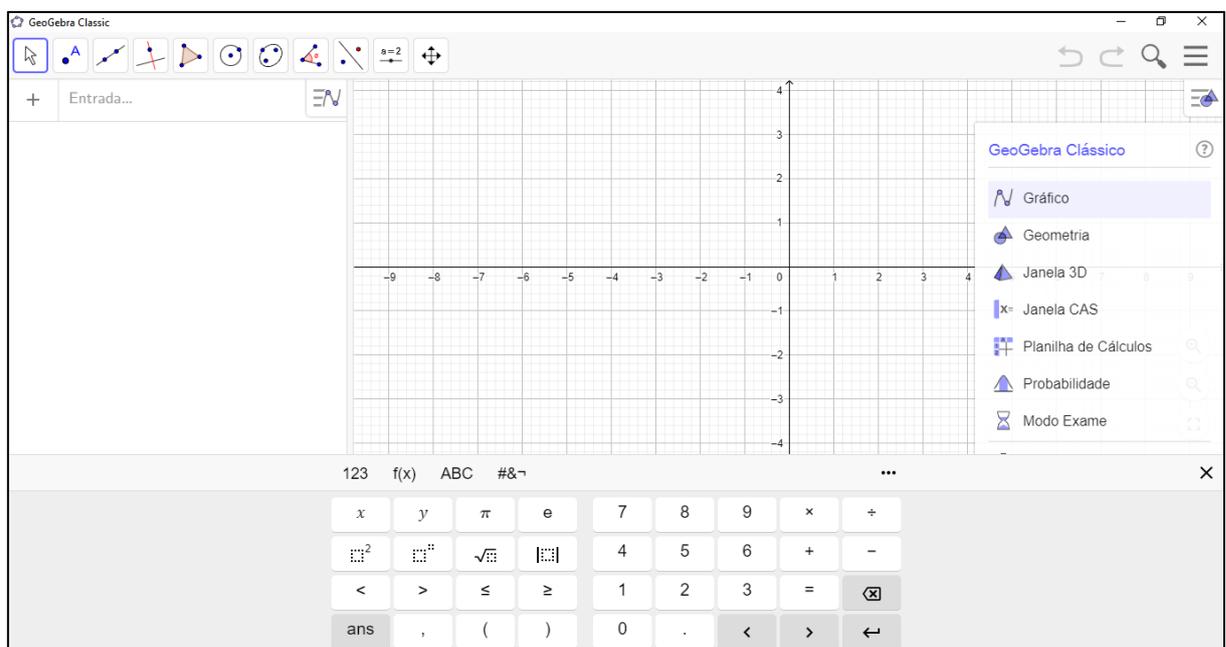
2.1 O GeoGebra

O *GeoGebra* é um *software* livre, gratuito, multiplataforma e de Matemática dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter em um projeto iniciado na Universidade de Salzburg e posteriormente desenvolvido na Universidade Atlântica da Flórida, cujo objetivo era ser utilizado em sala de aula combinando geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única interface (SCALDELAI, 2014).

Pesquisas anteriores a essa já abordaram o uso do *software GeoGebra* no ensino de Matemática e Física. Por exemplo, Cataneo (2011), Silva *et al* (2012), Marins (2013), Serrano (2014), Kessler (2015), Silva (2016), Costa (2017), Silva (2017), Costa (2018), Paixão (2019), Palmerim (2019), Rocha (2019), Sant'ana (2019), Tenório; Neto (2019) e Hallal *et al* (2020).

O *GeoGebra* ao ser inicializado direciona o usuário para o seu ambiente de manipulação (ferramentas e funções). Essa interface, conforme mostra a figura 1, é composta pela barra (menus e ferramentas), caixa de entrada, janela de álgebra, menu de comandos e de visualização 2D.

Figura 1 - Interface do *GeoGebra*

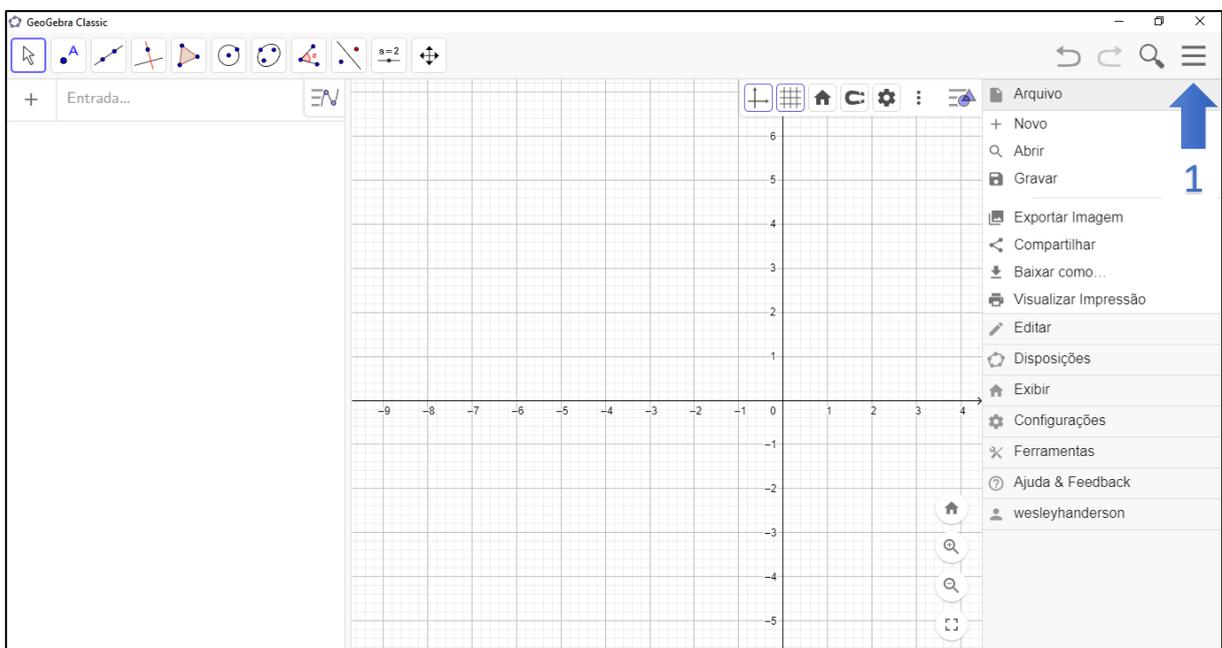


Fonte: *GeoGebra*, 2024

A barra de menu do *GeoGebra* fica no canto superior direito como indica a seta 1 na figura 2, nela pode-se encontrar as seguintes divisões:

- Arquivo
- Abrir
- Gravar
- Exportar Imagem
- Compartilhar
- Baixar como
- Visualizar Impressão
- Editar
- Disposições
- Exibir
- Configurações
- Ferramentas
- Ajuda & Feedback
- Login

Figura 2 – Barra de Menu do *GeoGebra*

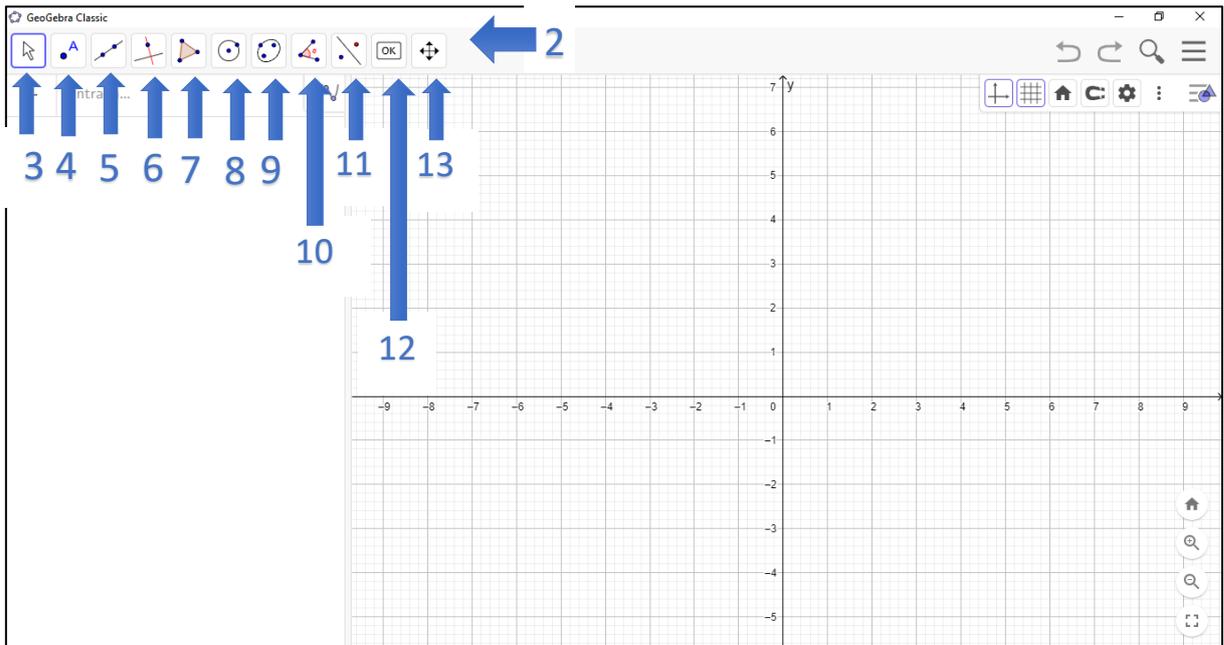


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

A barra de ferramentas do *GeoGebra* fica no canto superior esquerdo como indica a seta 2 na figura 3; nela pode-se encontrar as seguintes divisões:

- **Ferramentas da Janela 1** – seta 3 – que contém o botão Mover, Função à Mão Livre e Caneta.
- **Ferramentas da Janela 2** – seta 4 – Novo Ponto, Ponto em Objeto, Vincular/Desvincular Ponto, Interseção entre objetos, Ponto Médio, Número Complexo, Otimização e Raízes.
- **Ferramentas da Janela 3** – seta 5 – Reta, Segmento, Segmento com Comprimento Fixo, Semirreta, Caminho Poligonal, Vetor e Vetor a Partir de um Ponto.
- **Ferramentas da Janela 4** – seta 6 – Reta Perpendicular, Reta Paralela, Mediatriz, Bissetriz, Reta Tangente, Reta Polar ou Diametral, Reta de Regressão Linear e Lugar Geométrico.
- **Ferramentas da Janela 5** – seta 7 – Polígono, Polígono Regular, Polígono Rígido e Polígono Semideformável.
- **Ferramentas da Janela 6** – seta 8 – Circulo dados Centro e um de seus Pontos, Circulo dados centro e raio, Compasso, Círculo definido por Três Pontos, Semicírculo, Arco Circular, Arco Circulante, Setor Circular e Setor Circuncircular.
- **Ferramentas da Janela 7** – seta 9 – Elipse, Hipérbole, Parábola e Cônica por Cinco Pontos.
- **Ferramentas da Janela 8** – seta 10 – Ângulo, Ângulo de Amplitude Fixa, Distância, comprimento ou perímetro, Área, Inclinação, Lista, Relação e Inspetor de Funções.
- **Ferramentas da Janela 9** – seta 11 – Reflexão em Relação a uma Reta, Reflexão em Relação a um Ponto, Inversão, Rotação em Torno de um Ponto, Translação por um Vetor e Homotetia.
- **Ferramentas da Janela 10** – seta 12 – Controle Deslizante, Texto, Inserir Imagem, Botão, Caixa para Exibir/Esconder Objetos e Campo de Entrada.
- **Ferramentas da Janela 11** – seta 13 – Mover Janela de Visualização, Ampliar, Reduzir, Exibir/Esconder Objeto, Exibir/Esconder Rótulo, Copiar Estilo Virtual e Apagar.

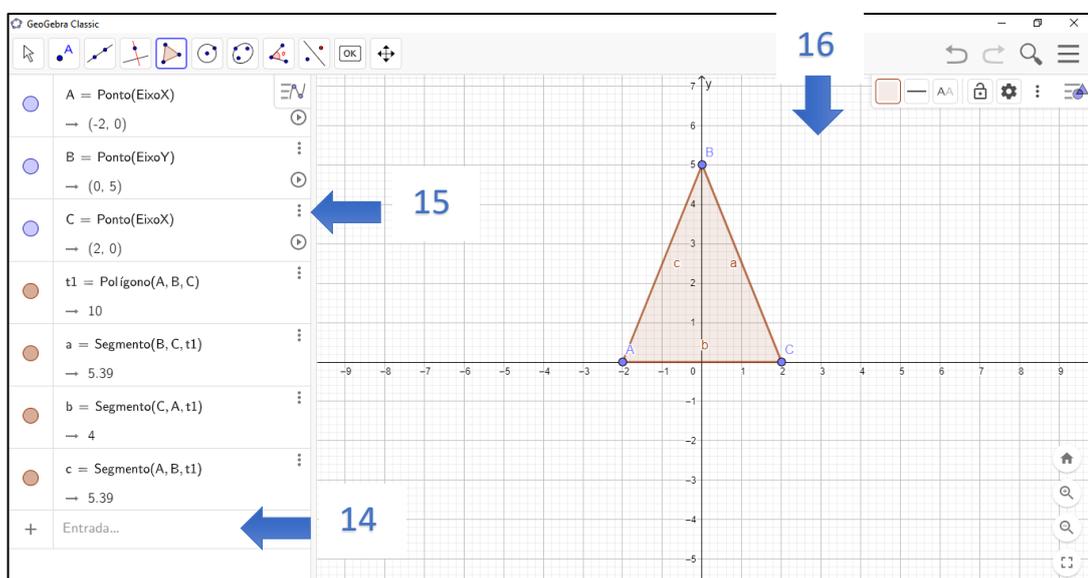
Figura 3 – Barra de Ferramentas do *GeoGebra*



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Além das barras de menu e ferramentas, o *GeoGebra* possui a caixa de entrada, seta 14, que é utilizado para inserir os comandos, coordenadas, equações e funções através do teclado, a janela de álgebra, seta 15, que é a região onde é exibido os objetos construídos, pontos, equações e outros, e a janela de visualização, seta 16, que é a área uma janela para construção de objetos com até duas dimensões.

Figura 4 – Barra de Caixa de entrada, janela de álgebra e de visualização do *GeoGebra*



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

A partir das ferramentas citadas anteriormente, pode-se realizar construções geométricas e/ou encontrar a soluções de situações problemas de forma lúdica e interativa.

3 METODOLOGIA

O uso do *GeoGebra* no ensino, na demonstração de teoremas e na resolução de problemas da Geometria Plana, é um assunto recorrente na literatura. Inúmeros trabalhos já foram produzidos e abrangem uma quantidade imensa de conteúdos.

De acordo com Moreira (2023, p. 22), as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) “auxiliam os professores na transmissão de conhecimentos de uma forma dinâmica e criativa, gerando novas descobertas e possibilitando a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento”.

Dessa forma, levando em consideração o período, pós-pandemia de COVID-19, e diante da importância de se utilizar as TIC's como forma de melhorar e impulsionar o aprendizado dos estudantes, o *GeoGebra* foi escolhido como instrumento para esse estudo. A escolha pela área de Geometria se deu pelo simples fato dos conceitos da geometria plana estarem inseridos em diversas áreas das ciências exatas. Um outro componente importante é que ao longo dos anos a geometria plana era renegada ao esquecimento e, em muitos momentos, os conteúdos não eram abordados.

No entanto, esse fato tem mudado ao longo desses últimos anos e Tenório (2016), destaca que os livros produzidos na década de 1990 dedicavam os últimos capítulos para o estudo da Geometria e que a partir do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2014, a Geometria ganhou mais espaço nos livros e se encontra distribuída ao longo de todo material e não apenas na parte final do curso.

Segundo a BNCC (2018, p. 271):

“A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência”.

A BNCC (2018), também afirma que deve haver o uso de *softwares* de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*, para o estudo de determinados conteúdos que envolvam a manipulação de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano. Além do

mais, há vários conceitos na Geometria que o estudante deve desenvolver para que o raciocínio hipotético-dedutivo, tão importante para a Matemática, seja construído.

De acordo com a BNCC (2018) o quadro abaixo lista os objetos do conhecimento e as habilidades de cada ano necessárias para os estudantes do Ensino Fundamental – Anos Iniciais em relação a área de Geometria.

Quadro 1 – Objetos do conhecimento e habilidade de Geometria para o Ensino Fundamental
– Anos Iniciais

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
1º ano	Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado	(EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás. (EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.
	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico	(EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.
	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.
2º ano	Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e	(EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas

	<p>indicação de mudanças de direção e sentido</p>	<p>e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.</p>
	<p>Esboço de roteiros e de plantas simples</p>	<p>(EF02MA13) Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.</p>
	<p>Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características</p>	<p>(EF02MA14) Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico.</p>
	<p>Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características</p>	<p>(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.</p>
3º ano	<p>Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência</p>	<p>(EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.</p>
	<p>Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações</p>	<p>(EF03MA13) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.</p> <p>(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros,</p>

		cones), relacionando-as com suas planificações.
	Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
	Congruência de figuras geométricas planas	(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.
4º ano	Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido Paralelismo e perpendicularismo	(EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.
	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características	(EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.
	Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e <i>softwares</i>	(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou <i>softwares</i> de geometria.
	Simetria de reflexão	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o

		uso de malhas quadriculadas e de <i>softwares</i> de geometria.
5° ano	Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1° quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano	<p>(EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.</p> <p>(EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1° quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros</p>
	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.
	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Fonte: BNCC, 2018

A BNCC também traz os objetos do conhecimento e as habilidades necessárias para os estudantes do Ensino Fundamental – Anos Finais e do Ensino Médio. Para o Ensino

Fundamental – Anos Finais é importante destacar que é nesse período é inevitável não levar em consideração os conhecimentos construídos ao longo da etapa anterior, sendo importante inserir a história da Matemática como um meio de despertar o interesse do estudante. O Quadro 2 traz consigo os objetos do conhecimento e as habilidades necessárias para os estudantes do Ensino Fundamental – Anos Finais em relação a área de Geometria.

Quadro 2 – Objetos do conhecimento e habilidade de Geometria para o Ensino Fundamental – Anos Finais

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
6°	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

	<p>Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas</p>	<p>(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.</p>
	<p>Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e <i>softwares</i></p>	<p>(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou <i>softwares</i> para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.</p> <p>(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).</p>
7º	<p>Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem</p>	<p>(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.</p> <p>(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.</p>
	<p>Simetrias de translação, rotação e reflexão</p>	<p>(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.</p>
	<p>A circunferência como lugar geométrico</p>	<p>(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como</p>

		lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.
	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° . (EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

		(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
8° ano	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.
9° ano	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

	<p>Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo</p>	<p>(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.</p>
	<p>Semelhança de triângulos</p>	<p>(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.</p>
	<p>Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais</p>	<p>(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.</p>
	<p>Polígonos regulares</p>	<p>(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também <i>softwares</i>.</p>
	<p>Distância entre pontos no plano cartesiano</p>	<p>(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.</p>

	Vistas ortogonais de figuras espaciais	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
--	--	---

Fonte: BNCC, 2018

Na última etapa da educação básica, o Ensino Médio, a BNCC aborda que o foco desta etapa é a construção de uma visão integrada com a Matemática e tem como objetivo aproveitar todo o que já foi construído ao longo da etapa anterior, dando destaque a importância do uso de tecnologias digitais, ampliando o letramento matemático.

“A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade” (BRASIL, 2018, p. 527).

O letramento matemático pode ser definido, segundo a BNCC (2018, p. 266):

“... como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)”.

São de extrema importância para o desenvolvimento do letramento matemático os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e de modelagem. E é no Ensino Médio que os estudantes desenvolvem habilidades referentes aos processos matemáticos a fim de que tenham um suporte para formular e resolver problemas em diversos contextos.

As competências necessárias (raciocinar, representar, comunicar e argumentar) e as aprendizagens previstas nessa etapa são de extrema importância para a eficiência do letramento matemático. Observando as competências gerais da BNCC e as do Ensino Fundamental, no Ensino Médio há o desenvolvimento de competências e habilidades específicas. O Quadro 3,

mostra as competências específicas e as habilidades para o Ensino Médio em relação a área de Geometria.

Quadro 3 – Competências específicas e habilidades de Geometria para o Ensino Médio

Competências Específicas	Habilidades
<p>Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.</p>	<p>(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.</p>
	<p>(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).</p>
<p>Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.</p>	<p>(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.</p>
<p>Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para</p>	<p>(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de</p>

<p>interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.</p>	<p>uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p>(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.</p> <p>(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p>(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).</p>
<p>Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.</p>	
<p>Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando</p>	<p>(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o</p>

estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
	(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
	(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Fonte: BNCC, 2018

É possível notar que nas competências específicas do Ensino Médio, algumas habilidades são da área de Grandezas e Medidas, visto que, utilizam algum conteúdo da área de Geometria que é a base desse estudo.

Essa pesquisa pode ser classificada como uma pesquisa do tipo qualitativa de natureza bibliográfica e exploratória, pois foi realizado um levantamento bibliográfico sobre o uso do *GeoGebra* associado a Geometria. Ela é do tipo exploratória, pois nos próximos capítulos serão apresentados alguns axiomas, fórmulas, teoremas e leis da Geometria Plana ou Geometria Euclidiana, bem como suas definições e propriedades, além de demonstrações desses axiomas, fórmulas, teoremas e leis da Geometria no *GeoGebra* com resolução de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) utilizando esse *software*.

4 EXPLANAÇÃO DE CONCEITOS E RESULTADOS ABORDADOS NESSE TRABALHO

Neste capítulo apresentaremos os fundamentos básicos da Geometria Plana necessários no desenvolvimento deste trabalho.

4.1 Ponto, reta e plano

“A palavra “geometria” vem do grego *geometrein* (geo, “terra”, *emetrein*, “medida”); originalmente geometria era a ciência de medição da terra” (SANTOS, VIGLIONI, 2011, p. 14). A Geometria Plana que nós conhecemos hoje se deve ao trabalho de Euclides, por isso é conhecida como, Geometria Euclidiana, graças ao seu livro *Os Elementos*.

“Euclides foi o primeiro a tornar o estudo sobre geometria como uma ciência dedutiva, onde uma afirmação deve ser deduzida de outras mais simples e assim por diante. Afirmações simples e não demonstradas, que seriam aceitas como verdadeiras pela sua simplicidade, Euclides as chamou de “postulados”, onde através destes, ele procurou analisar as propriedades de figuras e assim formular leis mais rigorosas deixando a aproximação de lado focando em demonstrá-las” (ALVES, 2017, p. 19).

De acordo com Papa Neto (2017), o livro *Os Elementos*, escrito por Euclides de Alexandria por volta de 300 anos a. C., é um tratado matemático composto por 13 livros, que abordam algumas definições, postulados, proposições e provas matemáticas sobre geometria, números, dos incomensuráveis e da geometria espacial.

Quadro 4 – Descrição do conteúdo de cada livro que compõem *Os Elementos*

Livro	Conteúdo
Livro I	Fundamentos da geometria plana
Livro II	Geometria dos retângulos
Livro III	Geometria do círculo
Livro IV	Polígonos regulares em círculos
Livro V	Teoria geral das proporções
Livro VI	Semelhança
Livro VII	Aritmética básica
Livro VIII	Números (inteiros) em proporção
Livro IX	Números pares, ímpares e perfeitos

Livro X	Segmentos de reta incomensuráveis
Livro XI	Fundamentos da geometria espacial
Livro XII	Áreas, volumes e o método da exaustão
Livro XIII	Poliedros regulares (ou platônicos)

Fonte: Autor, 2024

De acordo com Santos e Viglioni (2011), no livro 1 dos *Elementos*, inicia-se o estudo da Geometria Plana, onde há a explicação de 23 definições, entre elas a de ponto, plano, reta, círculo e triângulo. De acordo com Euclides (2009, p. 97), as definições de ponto reta e plano são:

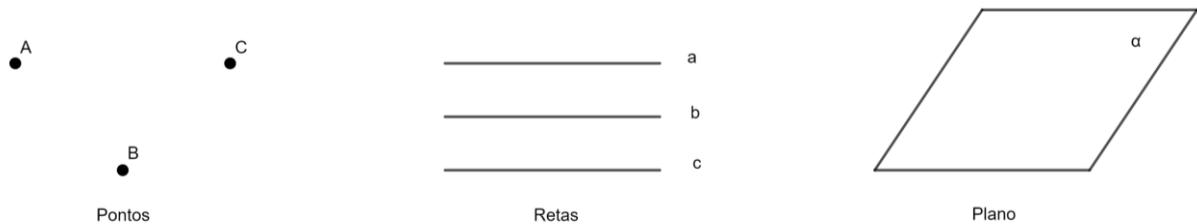
- “1 – Ponto é aquilo de que nada é parte;
- 2 – Linha é comprimento sem largura;
- 3 – E extremidades da linha são pontos;
- 4 – E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma;
- 5 – E um superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura;
- 6 – E extremidades de uma superfície são retas;
- 7 – Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma”.

Essas definições são chamadas de conceitos primitivos, pois não existe nenhum formalismo teórico que dê suporte teórico a tais definições. Essas definições, são aceitas de forma intuitiva. A notação para se expressar o ponto, a reta e o plano, pode ser da seguinte forma:

- Ponto: letras maiúsculas do nosso alfabeto (ex: A, B, C, etc ...);
- Reta: letras minúsculas do nosso alfabeto (ex: a, b, c, etc ...);
- Plano: letras gregas (ex: α, β, γ , etc ...).

De acordo com as definições intuitivas dos objetos geométricos básicos que estruturam a geometria plana, podemos representá-los graficamente, conforme explicitado na figura 5. Nela são representados os pontos A, B e C, as retas a, b e c e o plano α .

Figura 5 – Pontos, retas e plano



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Alves (2017, p. 44) define a representação gráfica de ponto e reta da seguinte maneira:

“O ponto é uma representação gráfica que não possui definição, dimensão e forma. E desta maneira não é possível encontrar qualquer medida nele, como comprimento, largura, altura, área, massa, volume etc. Para os gregos, o ponto era "o que não pode ser dividido" e teve um papel fundamental no desenvolvimento da geometria, pois é a partir de conjuntos de pontos que são formadas as figuras geométricas. É habitualmente representado por uma marca, ou seja, um "pingo" ou uma “bolinha”, mas é importante saber que isso é apenas uma representação geométrica a qual é utilizada para representar localizações no espaço e é identificado com uma letra latina maiúscula (A, B, C, D, etc).

A reta é uma representação gráfica formada por um conjunto de pontos onde geometricamente é representada por uma linha reta, ou seja, uma linha unidimensional infinita que não faz curva, que mesmo sendo formada por pontos, não possuem definição”.

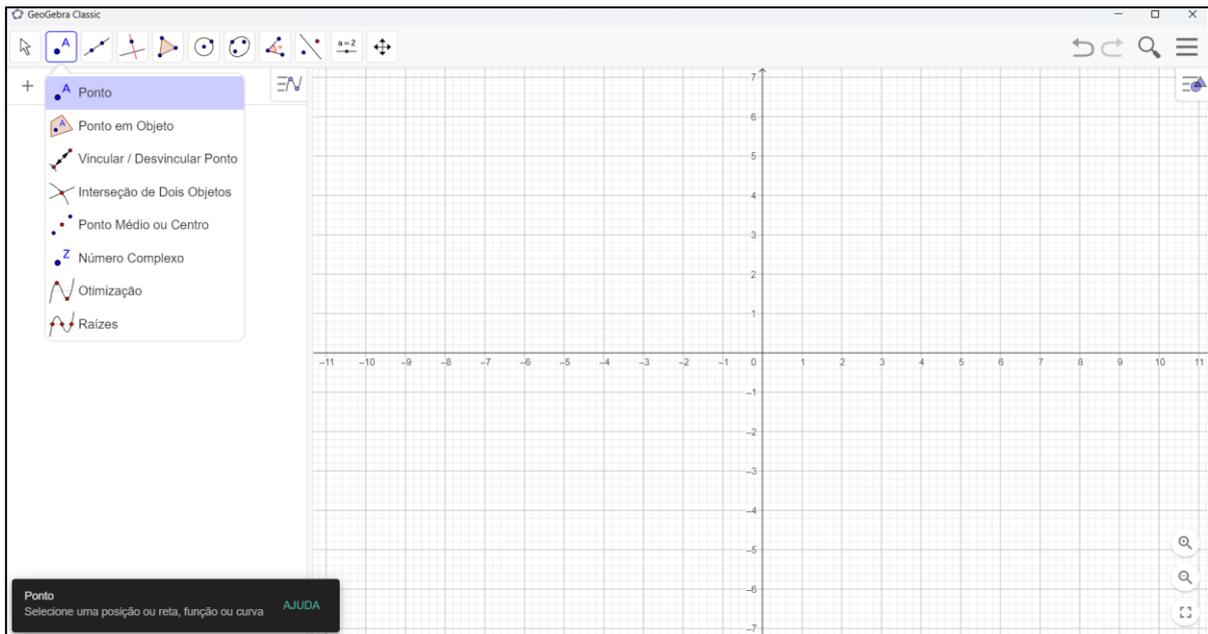
Já a definição de plano segundo Alves (2017, p. 46) é:

“O plano é uma representação geométrica bidimensional infinita formada pela reunião de infinitas retas, perpendiculares a uma reta dada, dispostas lado a lado. O plano como o ponto e a reta não possui definição e nem espessura e é representado por letras gregas minúsculas (α, β, γ , etc)”.

Com a utilização do *GeoGebra* é possível representar geometricamente esses objetos primitivos, ou seja, ponto, reta e plano de uma maneira muito prática. Para a criação de um ponto basta ir no menu e selecionar na barra de ferramenta a opção ponto. Depois é só clicar no plano, a localização onde deseja que o ponto seja inserido, ou ainda, pode-se utilizar o campo entrada e inserir as coordenadas do ponto desejado.

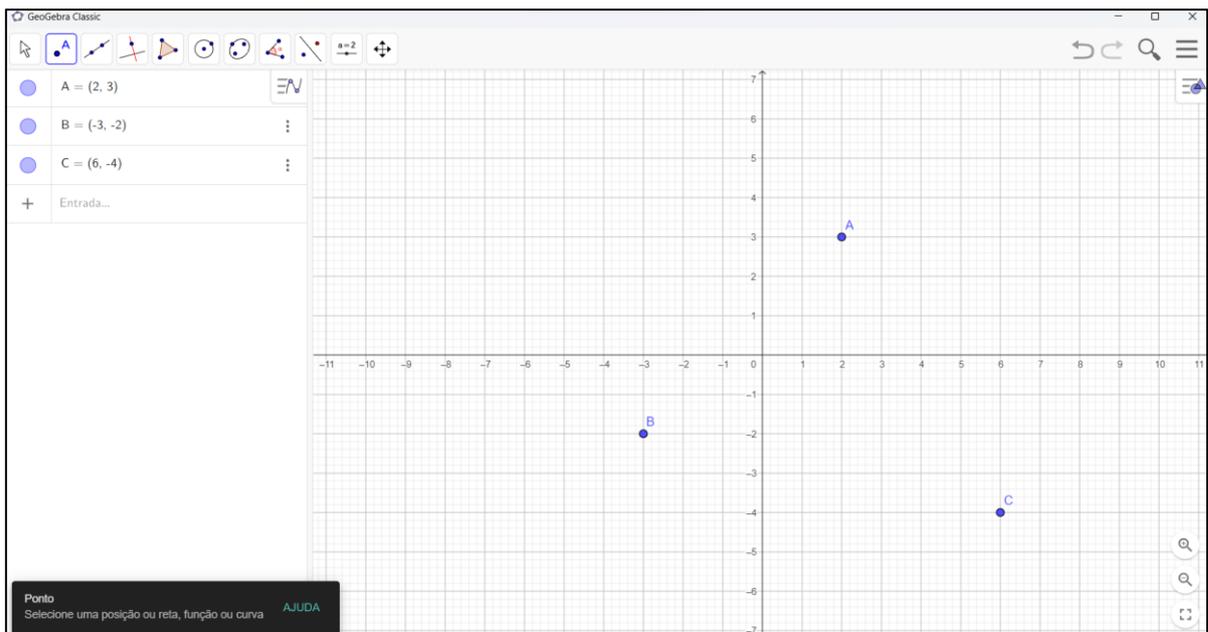
Na figura 6 é possível observar a interface do *GeoGebra* e a localização da ferramenta ponto na barra de ferramentas e na figura 7 é possível observar os pontos $A(2,3)$, $B(-3, -2)$ e $C(6, -4)$ no plano inseridos através do campo entrada.

Figura 6 – Construção de pontos no *GeoGebra*



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

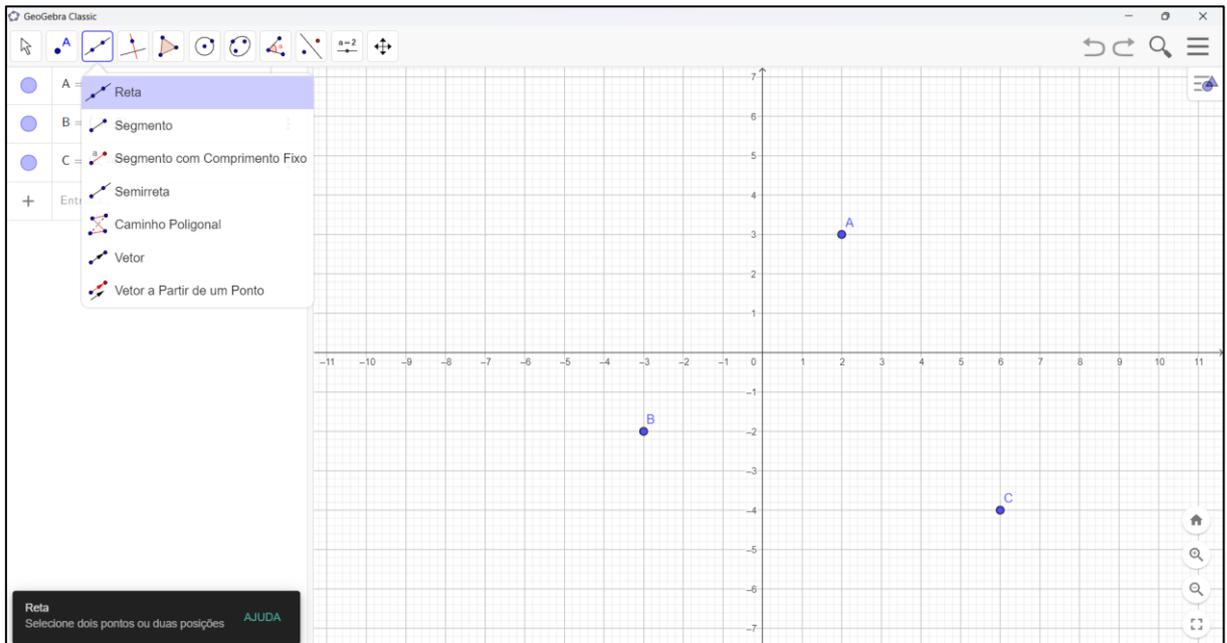
Figura 7 – Localização de pontos no plano cartesiano



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

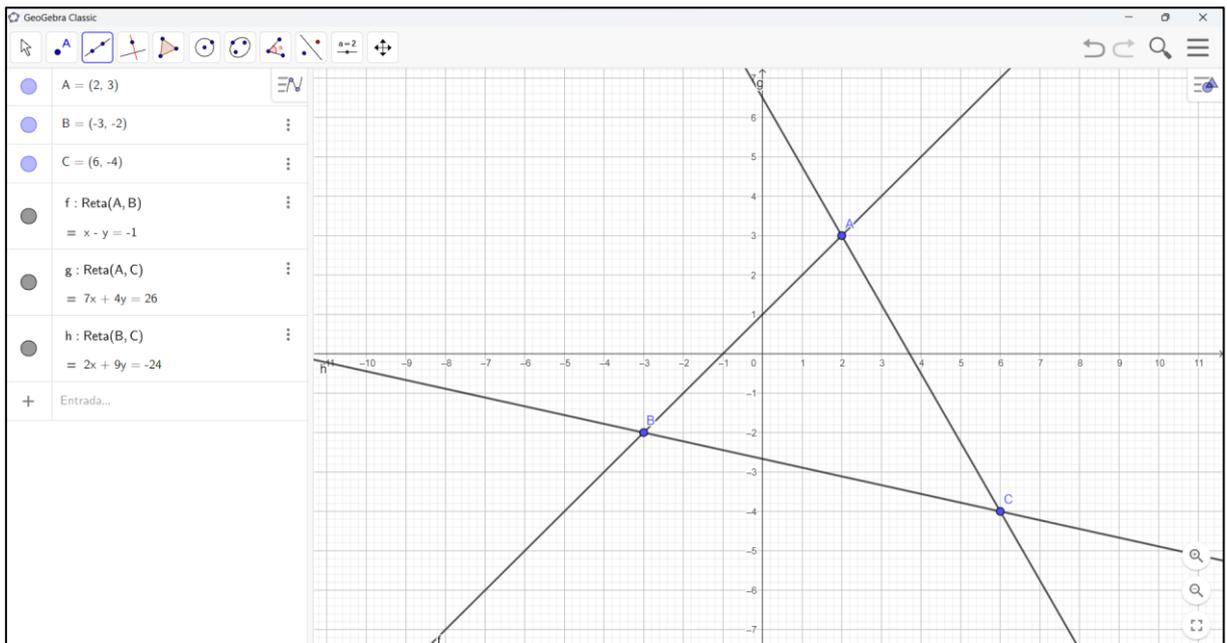
Para a construção de uma reta utilizando o *GeoGebra* basta selecionar a ferramenta *reta* no menu de ferramentas e selecionar dois pontos por onde a reta deve passar; na figura 8 é possível observar a interface do *GeoGebra* com a ferramenta *reta* e na figura 9 é possível ver a construção das retas *f*, *g* e *h* que passam pelos pontos, respectivamente, A e B, A e C, e B e C.

Figura 8 – Construção de retas no *GeoGebra*



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

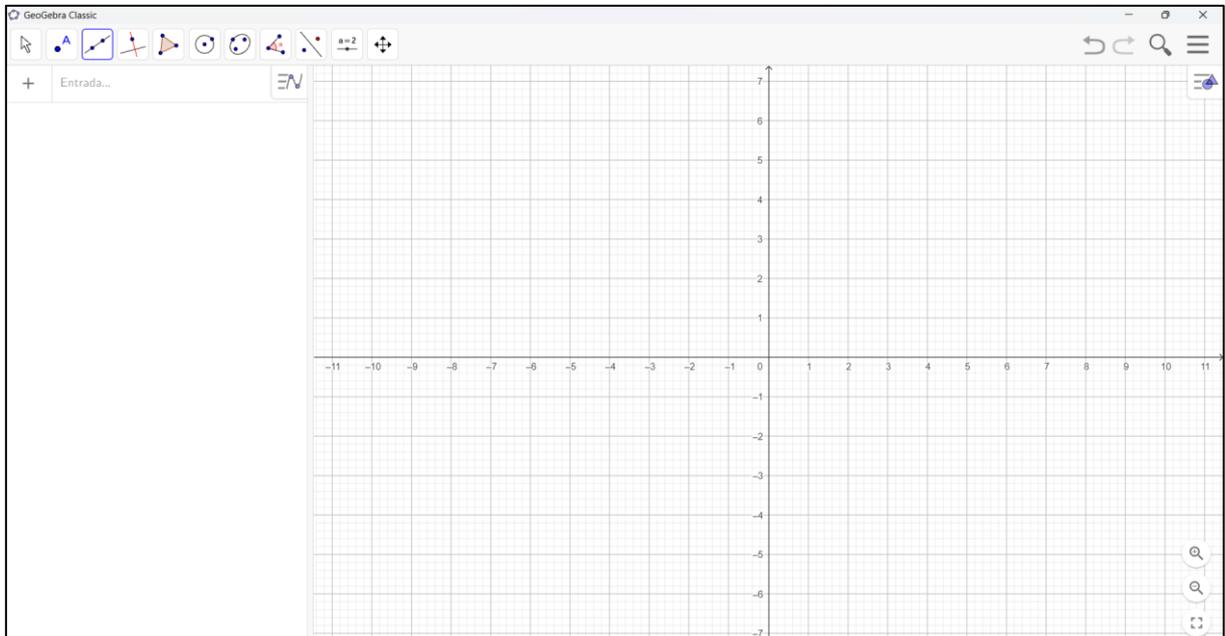
Figura 9 – Retas no *GeoGebra*



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Por fim, assim com o ponto e a reta podem ser representados no *GeoGebra*, também é possível representar o plano, que também por sinal é a janela de visualização do *software*. O plano do *GeoGebra* é uma representação de um Plano Cartesiano, como mostrado na figura 10.

Figura 10 – Representação de um plano no *GeoGebra*



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

4.2 Segmento de retas

Agora, veremos algumas definições e postulados sobre segmento de retas e ângulos. Tais definições e postulados foram definidos por Euclides em seu livro *Os Elementos* (2009, p. 97-98).

As definições são as seguintes:

- “8 – E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma mesma reta;
- 9 – E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado de retilíneo;
- 10 – E quando uma reta, tendo sido alterada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos seus ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou;
- 11 – Ângulo obtuso é o maior do que um reto;
- 12 – E agudo, o menor do que um reto” (EUCLIDES, 2009, p. 97).

Euclides formulou cinco postulados que são:

“1 – Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;
 2 – Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
 3 – E, com todo centro e distância, descrever um círculo;
 4 – E serem iguais entre si todos os ângulos retos;
 5 – E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos” (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Segundo Dolce e Pompeo (2013, p. 2), “as proposições primitivas ou postulados ou axiomas são aceitos sem demonstração”. Para entender melhor os postulados elaborados por Euclides, de acordo com Moreira (2006), o matemático alemão David Hilbert, entre os anos de 1898 e 1899, elaborou um sistema axiomático completo para a Geometria Euclidiana e a espacial, sendo considerado um marco na História da Matemática.

Tal sistema teve como base a divisão dos postulados de Euclides em grupos de axiomas, da seguinte maneira: termos indefinidos, axiomas de incidência, axiomas de ordem, axiomas de congruência, axioma das paralelas, axiomas de continuidade, e para a geometria espacial, o axioma sobre planos.

De acordo com Massago (2010), os axiomas de incidência são:

- **Axioma 1:** Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.
- **Axioma 2:** Toda reta possui pelo menos dois pontos distintos.
- **Axioma 3:** Existem pelo menos três pontos não colineares.

Já segundo Barbosa (2012), os axiomas de incidência são:

- **Axioma 1:** Seja uma reta qualquer, há pontos que pertencem e pontos que não pertencem a reta.
- **Axioma 2:** Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Mas Hilbert (2003), traz consigo mais alguns axiomas de incidência. Cujas definições são:

- **Axioma 4:** Para quaisquer três pontos A, B e C que não estão sobre uma mesma reta, há sempre um plano α , que está associado com qualquer um dos três pontos, A, B e C. Para cada plano há sempre um ponto que está associado a ele.

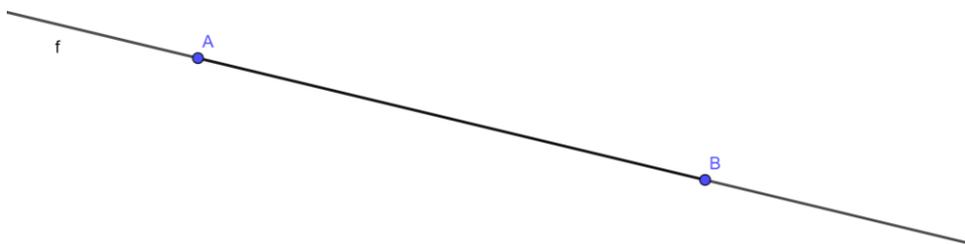
- **Axioma 5:** Para cada três pontos que não estão sobre uma mesma reta, não há mais de que um plano que está associado com qualquer dos três pontos A, B e C.
- **Axioma 6:** Se dois pontos A e B de uma reta a estão num plano α , então cada ponto de a está no plano α .
- **Axioma 7:** Se dois planos α e β têm um ponto em comum A, então têm, pelo menos, mais um outro ponto em comum.
- **Axioma 8:** Há, pelo menos, quatro pontos que não estão no mesmo plano.

Analisando os três primeiros axiomas propostos por Hilbert, que não alteram o sentido do trabalho de Euclides, pode-se inferir três fatos simples e bastante importantes. E que para Santos e Viglioni (2011) são:

- Em uma reta há pelo menos dois pontos distintos;
- Não há uma reta que contenha todos os pontos;
- E um plano é formado por, no mínimo, três pontos.

Podemos comprovar esses axiomas de incidência da Geometria Euclidiana Plana através do *GeoGebra*, através das figuras 11, 12 e 13. Na figura 11 é verificado o axioma 1 de incidência, que diz que por dois distintos pontos há uma reta.

Figura 11 – Axioma 1 de incidência

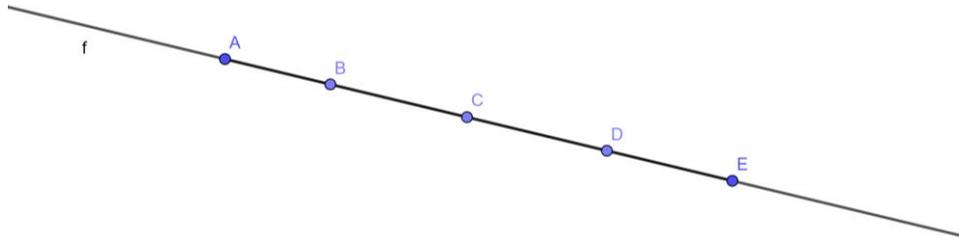


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Já na figura 12 é verificado o axioma 2 de incidência onde diz que em uma reta há pelo menos dois pontos distintos, ou seja, no mínimo dois pontos para que uma reta seja formada. Além disso, o axioma da incidência é usado para definir outros conceitos fundamentais na geometria, como segmentos de reta, planos e interseções entre diferentes entidades geométricas.

Em essência, ele estabelece uma relação fundamental entre pontos e linhas que é crucial para a construção da teoria geométrica.

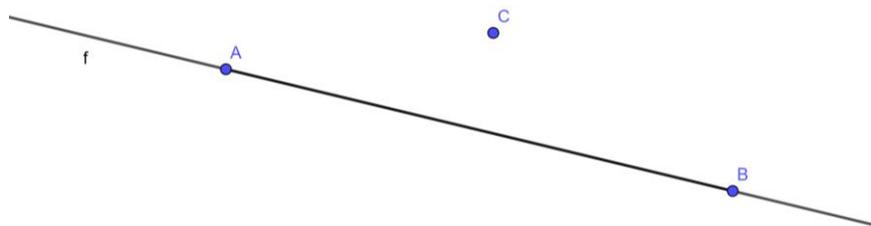
Figura 12 – Axioma 2 de incidência



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Por fim, na figura 13, é representado o axioma 3 de incidência, que em uma reta há pelo menos dois pontos e que há pelo menos três pontos que não estão sob uma mesma reta.

Figura 13 – Axioma 3 de incidência



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Além dos axiomas de incidência é preciso analisar os axiomas de ordem, para que seja possível verificar o conceito de semirreta e segmento de reta. Os axiomas de ordem segundo Hilbert (2003):

- **Axioma 1:** Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C, então o ponto B está também entre o ponto C e o ponto A, pois A, B e C são pontos distintos na reta.
- **Axioma 2:** Para cada dois pontos A e C há sempre, pelo menos, um ponto B sobre a reta AC tal que C está entre A e B.
- **Axioma 3:** Dados três pontos numa reta, não há mais que um ponto entre os outros dois.

- **Axioma 4:** Sejam A, B e C, três pontos que não estão em uma reta e a uma reta no plano ABC, que não intercepta nenhum dos três pontos A, B e C; se a reta passa por um ponto do segmento AB, conseqüentemente passará por um ponto do segmento BC ou do segmento AC.

Mas, Machado (2012) aborda os axiomas de ordem de uma forma diferente que Hilbert (2003). Há uma discussão sobre o conceito de distância e segmentos, que só é possível serem explicados utilizando alguns axiomas.

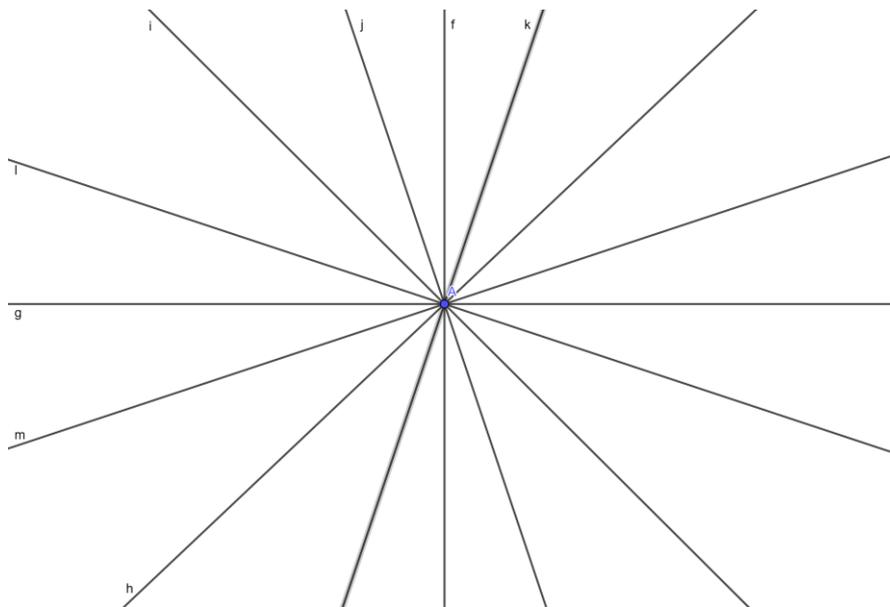
- **Axioma 1:** Para cada par de pontos A e B no plano, existe um único número real associado, denotado como AB, que satisfaz as seguintes propriedades:
 - a) $AB \geq 0$;
 - b) $AB = 0$ se e somente se $A = B$;
 - c) $AB = BA$.
- **Axioma 2:** Se três pontos A, B e C estão alinhados, logo apenas um deles está entre os outros dois.
- **Axioma 3:** Dados dois pontos A e B pertencentes a uma reta r, existe um ponto C que também pertence a reta r de tal forma que A está entre C e B.
- **Axioma 4:** Dados três pontos A, B e C de uma reta r, com o ponto A entre os pontos C e B, então as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , satisfazem as seguintes propriedades:
 - a) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = r$;
 - b) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = A$;
 - c) Dois pontos P e Q diferentes de A pertencem a uma mesma semirreta, se e somente se o ponto A não pertencer ao segmento \overline{PQ} .
 - d) Dois pontos P e Q diferentes de A pertencem a semirretas diferentes, se e somente se A pertencer a ao segmento \overline{PQ} .
- **Axioma 5:** Em qualquer semirreta \overrightarrow{AB} e para todo número real positivo c existe um ponto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AC = c$.

Santos e Viglioni (2011) também aborda os axiomas, mas diferencia os axiomas de incidência e ordem, e trata da medição de segmentos com os axiomas de medição de segmentos. Os axiomas de medição para Santos e Viglioni (2011) são:

- **Axioma 1:** Para qualquer segmento correspondente há um número, maior ou igual a zero. Esse número será zero se os pontos das extremidades do segmento forem iguais.
- **Axioma 2:** Os pontos de uma reta podem ser colocados em uma correspondência um a um com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre esses números mede a distância dos pontos correspondentes.
- **Axioma 3:** Dados três pontos A, B e C, colineares, com C entre A e B, então $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Tendo em vista todos os axiomas de incidência, ordem e também de medição de segmentos, vamos demonstrar no *GeoGebra* como a medição de segmentos pode ocorrer na geometria, além de expor a noção de semirreta e do próprio segmento de reta. A figura 11 mostra o primeiro axioma de incidência que determina que por dois pontos é possível se obter uma reta.

Figura 14 – Representação de um ponto e inúmeras retas



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

A figura 14 apresenta que por um único ponto é possível passar infinitas retas e que juntas são chamadas de feixe de retas. Já na figura 15 é representada uma reta com um ponto C, esse ponto divide a reta em duas partes, ou seja, duas semirretas cuja origem é o ponto C.

Figura 15 – Semirretas com origem no ponto C

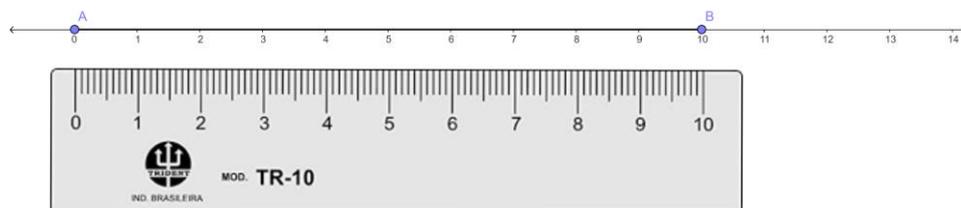
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Na figura 16 é feita a representação de segmentos em uma reta, para corroborar os axiomas de ordem definidos por Hilbert (2003) e Machado (2012). Entre dois pontos não há mais que um ponto entre eles e que para cada segmento \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} existe um número real positivo associado a cada um dos segmentos.

Figura 16 – Representação de segmentos em uma reta

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Na figura 17, usando uma régua graduada, exibimos como associar um número real positivo a um segmento qualquer. No *GeoGebra* é desenhado um segmento \overline{AB} no eixo de x e colocada uma imagem através da função inserir imagem na barra de ferramentas.

Figura 17 – Representação da medição de um segmento

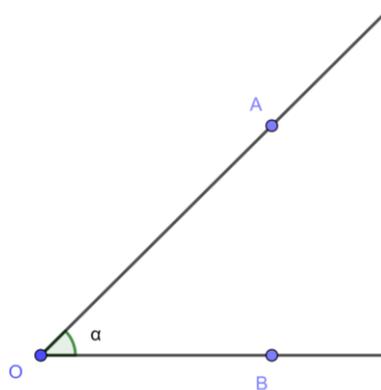
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

4.3 Ângulos

De acordo com Gay (2022, p. 73), a definição de ângulo “é a união, em um plano, de duas semirretas de mesma origem com uma das regiões determinadas por elas. As semirretas são os lados do ângulo, e a origem delas é o vértice do ângulo”.

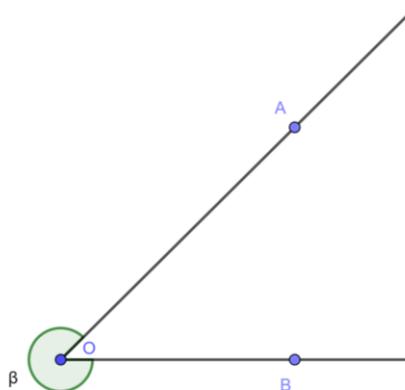
Na figura 18 é ilustrado o ângulo $\widehat{AÔB}$, cujo vértice é a origem comum das semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , ou seja, o ponto O é o vértice do ângulo $\widehat{AÔB}$ e as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do referido ângulo. A medida do ângulo $\widehat{AÔB}$ é dado por alfa (α). Já na figura 19 é ilustrado o ângulo $\widehat{BÔA}$ que possui centro O e é formado pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , porém com valor β . Vale ressaltar que o ângulo $\widehat{AÔB}$ (α) é o menor ângulo formado pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , enquanto $\widehat{BÔA}$ (β) é o maior ângulo formado pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .

Figura 18 – Ângulo $\widehat{AÔB}$



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Figura 19 – Ângulo $\widehat{BÔA}$



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

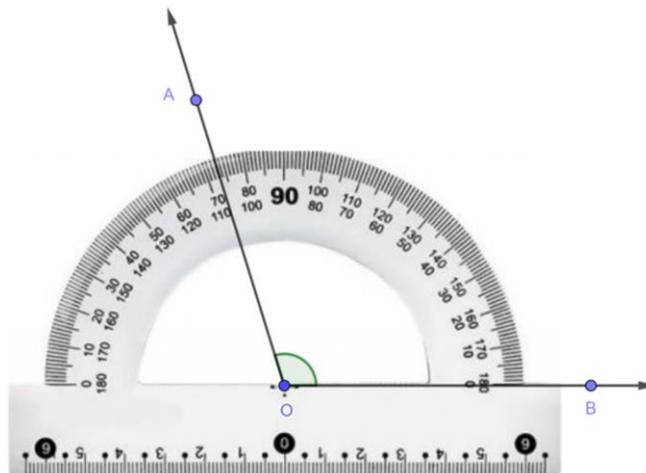
Existem várias formas de medir ângulos, cada uma adequada para diferentes situações e necessidades. As formas mais comuns são: grau e radiano. Também existem inúmeros instrumentos utilizados para a medição de ângulos e os mais comuns são: transferidor,

goniômetro e teodolito. Neste trabalho, a unidade de medida de ângulo utilizada será o grau ($^{\circ}$) e o instrumento usado será o transferidor que pode ser de 180° ou de 360° ¹. No *GeoGebra* é possível fazer a construção de ângulos de duas maneiras distintas: basta ir na barra de ferramentas e clicar na ferramenta 8, clicar em ângulo e selecionar três pontos ou duas retas, ou selecionar na ferramenta 8, clicar em ângulo com amplitude fixa e selecionar dois pontos e a amplitude do ângulo desejado.

As figuras 20 e 21 exibem a construção de um ângulo usando um transferidor de 180° e outro de 360° , respectivamente, além da unidade de medida grau, há submúltiplos que são o minuto (representado por ') e o segundo (representado por "). Para medir a abertura de um ângulo utilizando o transferidor basta, simplesmente, alinhar o centro do transferidor com o vértice do ângulo e uma das semirretas que compõe o ângulo com a marcação central do ângulo de 0° do transferidor.

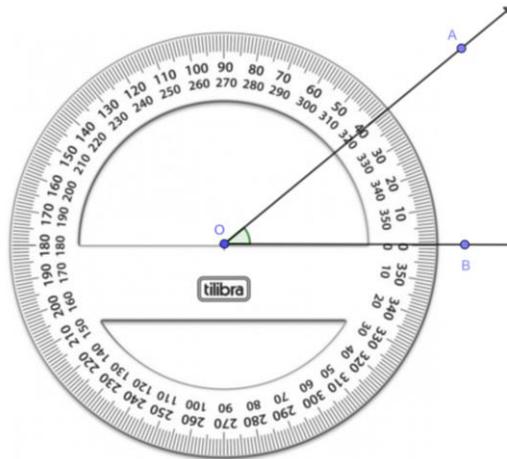
Dependendo da medida do ângulo ele pode ser classificado de formas distintas como: ângulo nulo, ângulo agudo, ângulo reto, ângulo obtuso, ângulo raso e ângulo completo (GAY, 2022; DANTE, 2018, PATARO, BALESTRI, 2018; ANDRINI, VASCONCELOS, 2015; BIANCHINI, 2015).

Figura 20 – Transferidor de 180°



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

¹ Na Geometria a medida de um ângulo é um número α , tal que $0 < \alpha < 180^{\circ}$. Já na Trigonometria é utilizado o sistema sexagesimal, onde o ângulo de uma volta é dividido em 360 partes iguais.

Figura 21 – Transferidor de 360°

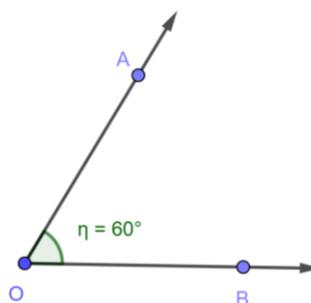
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

A classificação dos ângulos pode ser vista nas figuras 22, 23, 24, 25, 26 e 27. Na figura 22 temos um ângulo cujos lados são coincidentes. Esse ângulo é denominado ângulo nulo, ou seja, um ângulo cuja medida é 0° .

Figura 22 – Ângulo nulo

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

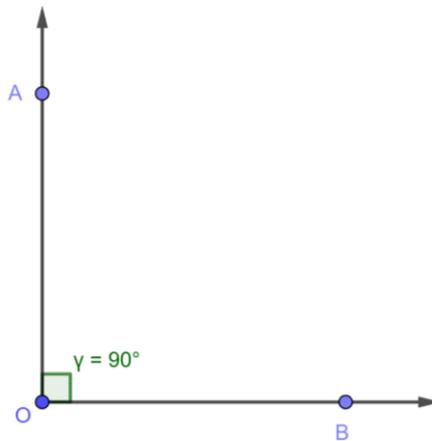
Já a figura 23 apresenta um ângulo agudo cuja medida é maior ou igual a 0° e menor que 90° .

Figura 23 – Ângulo agudo

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Por outro lado, na figura 24 ilustramos um ângulo reto, ou seja, um ângulo cuja medida é 90° .

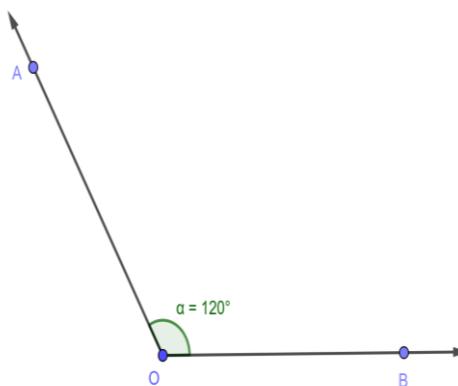
Figura 24 – Ângulo reto



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

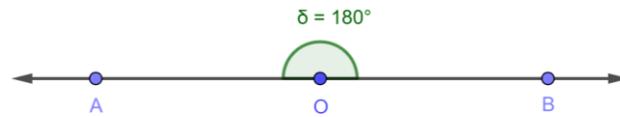
Na figura 25 temos um ângulo obtuso, que é um ângulo cuja medida é maior que 90° e menor ou igual a 180° .

Figura 25 – Ângulo obtuso



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Em particular o ângulo obtuso cuja medida é 180 é denominado ângulo raso

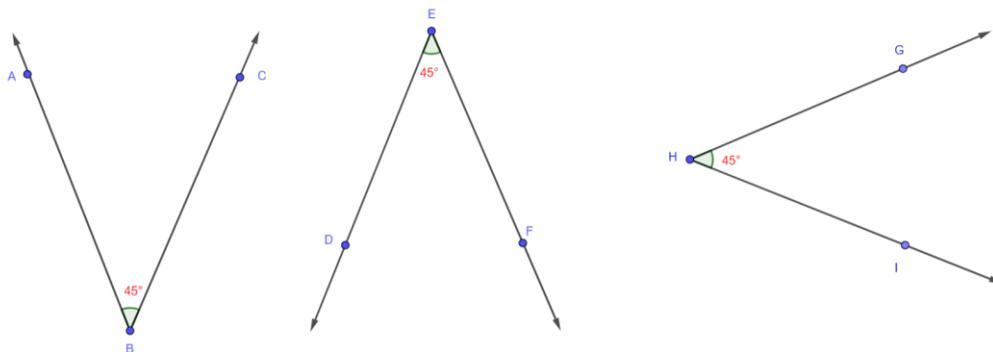
Figura 26 – Ângulo raso

Além da classificação com relação a medida dos ângulos, existe uma classificação com relação a congruência, ou seja, a igualdade de medida da região compreendida entre duas semirretas que tem a mesma origem, uma classificação com relação ao vértice e lado em comum, uma classificação com relação ao vértice em comum e outra classificação com relação a soma dos ângulos. Esses ângulos podem ser classificados como: ângulos congruentes, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares e ângulos suplementares (GIOVANNI JÚNIOR, 2022; DANTE, 2018).

Segundo Albuquerque (2017, p.133):

“Diremos que dois ângulos são congruentes quando transportados de modo que tenham o mesmo vértice e um dos lados comum, permanecendo ambos no mesmo semiplano, determinado pela reta que contém os lados comuns necessariamente, o outro lado também coincidiram”.

Na figura 27 observamos temos exemplos de ângulos congruentes, pois eles possuem a mesma medida. Essa congruência pode ser expressa como $\hat{A}BC \cong \hat{D}EF \cong \hat{G}HI$, onde lê-se ângulo $\hat{A}BC$ é congruente ao ângulo ao ângulo $\hat{D}EF$ e que também é congruente ao ângulo $\hat{G}HI$ (GIOVANNI JÚNIOR, 2022).

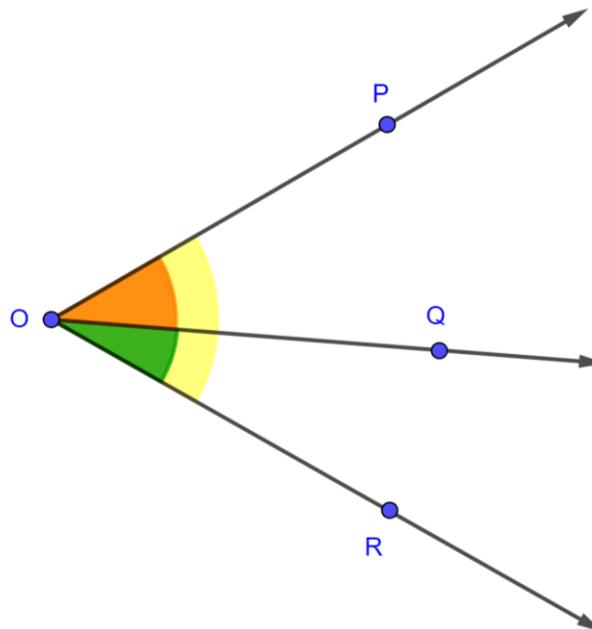
Figura 27 – Ângulos congruentes

Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

A definição de ângulo consecutivo é feita por Freitas (2013, p. 25) como sendo “dois ou mais ângulos que possuem um lado em comum são ditos ângulos consecutivos”. Já a definição de ângulo adjacente é feita por Giovanni Júnior (2022, p. 169) como sendo “dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos comuns são denominados ângulos adjacentes”.

Na figura 28 temos que os ângulos $P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}R$, $P\hat{O}Q$ e $P\hat{O}R$, $Q\hat{O}R$ e $P\hat{O}R$ são ângulos consecutivos, pois possuem, respectivamente, \overline{OQ} , \overline{OP} e \overline{OR} como lado comum. Por outro lado, os ângulos $P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}R$ não possuem pontos internos em comum. Como são consecutivos segue que são ângulos adjacentes.

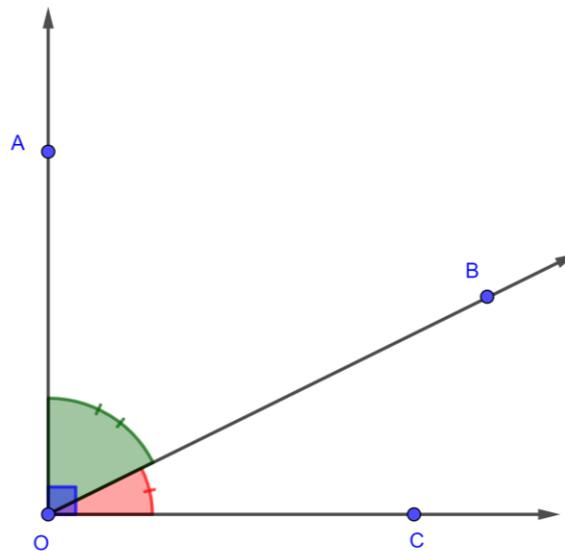
Figura 28 – Ângulos consecutivos e adjacentes



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

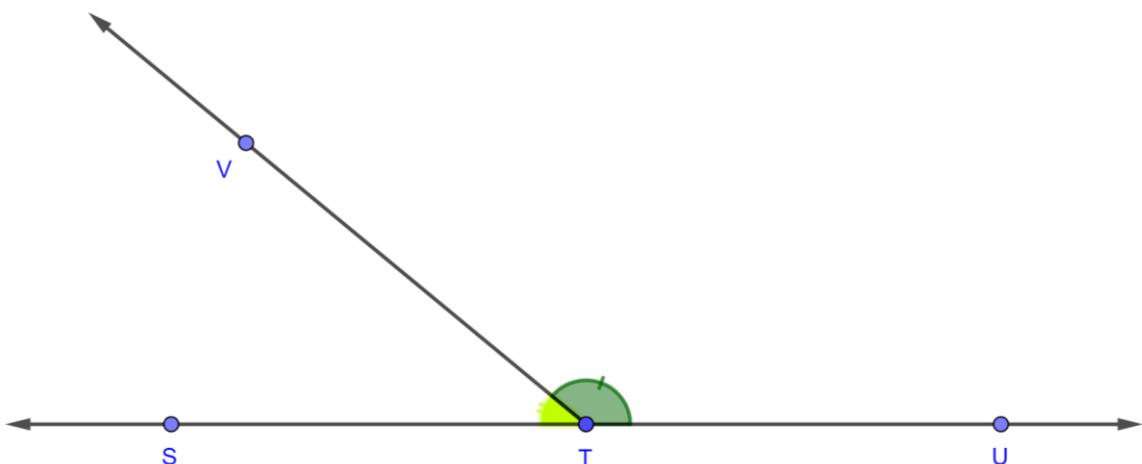
A seguir definiremos o que são ângulos complementares e suplementares. “Quando a soma das medidas de abertura de dois ângulos é igual a 90° , os ângulos são chamados complementares” (GAY, 2022, p. 77). E “quando a soma das medidas de dois ângulos é igual a 180° , dizemos que os ângulos são suplementares” (GIOVANNI JÚNIOR, 2022, p. 171).

Conforme podemos observar na figura 29, os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são complementares, pois a soma deles é igual a 90° .

Figura 29 – Ângulos complementares

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

É possível também dizer que $A\hat{O}B$ é o complemento de $B\hat{O}C$ e vice-versa. Já os ângulos suplementares têm quase a mesma definição dos complementares, a diferença é que a soma das medidas dos ângulos é igual a 180° . Podemos observar na figura 30 que os ângulos $S\hat{T}V$ e $V\hat{T}U$ são suplementares, pois a soma de suas medidas é igual a 180° . Logo, é possível dizer que $S\hat{T}V$ é o suplemento de $V\hat{T}U$ e vice-versa.

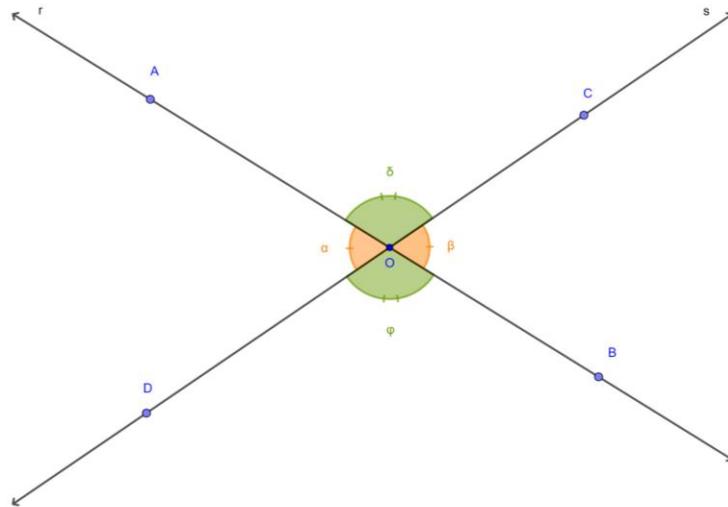
Figura 30 – Ângulos suplementares

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Quando duas retas se interceptam em um ponto dizemos que elas são concorrentes. Na figura 31 as retas “r” e “s” se interceptam no ponto O e, portanto, são concorrentes. Ao se

interceptarem as retas concorrentes determinam quatro ângulos que são: $\widehat{A\hat{O}C}$, $\widehat{C\hat{O}B}$, $\widehat{B\hat{O}D}$ e $\widehat{D\hat{O}A}$.

Figura 31 – Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

De acordo com Giovanni Júnior (2022, p. 174) “dois ângulos são chamados de opostos pelo vértice quando os lados de um deles forem semirretas opostas aos lados do outro, e vice-versa”. Uma propriedade interessante dos ângulos opostos pelo vértice é que eles são congruentes. A demonstração dessa propriedade é simples e baseada no fato dos ângulos $\widehat{A\hat{O}C}$ e $\widehat{D\hat{O}A}$ serem suplementares, ou seja, sua soma é igual a 180° . Assim como $\widehat{C\hat{O}B}$ e $\widehat{B\hat{O}D}$ também são ângulos suplementares cuja soma é igual a 180° . Logo, temos que:

$$\widehat{A\hat{O}C} + \widehat{D\hat{O}A} = 180^\circ \quad (1) \quad e \quad \widehat{A\hat{O}C} + \widehat{C\hat{O}B} = 180^\circ \quad (2)$$

Comparando-se (1) e (2), como $\widehat{A\hat{O}C} = \delta$, $\widehat{D\hat{O}A} = \alpha$ e $\widehat{C\hat{O}B} = \beta$, temos que:

$$\widehat{A\hat{O}C} + \widehat{D\hat{O}A} = \widehat{A\hat{O}C} + \widehat{C\hat{O}B}$$

$$\delta + \alpha = \delta + \beta$$

$$\alpha = \beta$$

Da mesma forma, é possível fazer tal comparação com os ângulos \widehat{AOC} e \widehat{COB} , \widehat{COB} e \widehat{BOD} , pois também são ângulos suplementares. Daí, temos que:

$$\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180^\circ \quad (3) \quad e \quad \widehat{COB} + \widehat{BOD} = 180^\circ \quad (4)$$

Comparando-se (3) e (4), como $\widehat{AOC} = \delta$, $\widehat{COB} = \beta$ e $\widehat{BOD} = \varphi$, temos que:

$$\widehat{AOC} + \widehat{COB} = \widehat{COB} + \widehat{BOD}$$

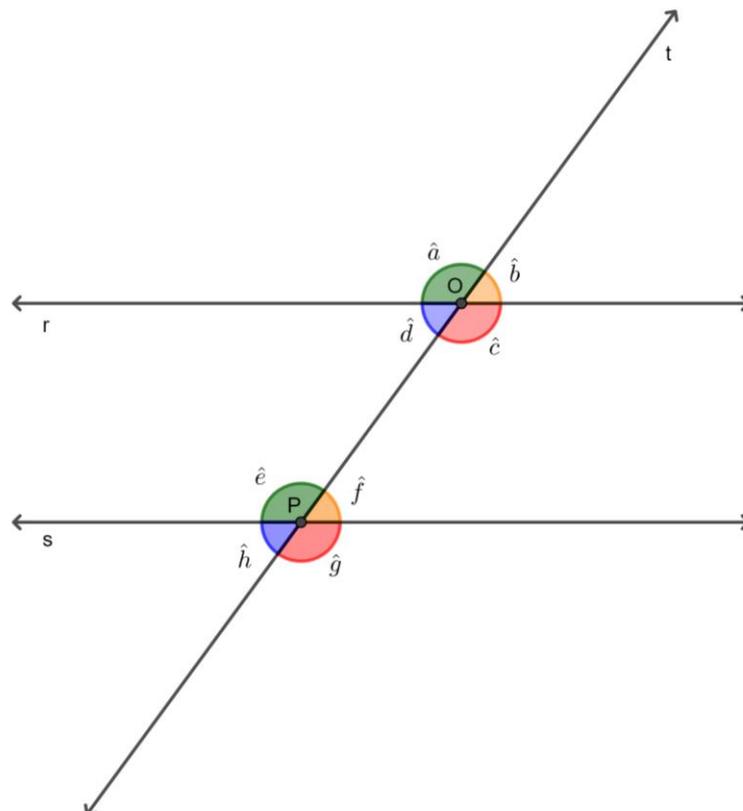
$$\delta + \beta = \beta + \varphi$$

$$\delta = \varphi$$

Portanto, verificamos que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Na figura 32, temos que as retas paralelas “r” e “s” são cortadas por uma transversal “t”. Conforme observamos nessa figura, a reta “t” corta as retas “r” e “s”, respectivamente, nos pontos O e P e determinam oito ângulos.

Figura 32 – Ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal



A reta r intercepta a reta t no ponto O , formando os ângulos \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} e \hat{d} , enquanto a reta s intercepta a reta t no ponto P e forma os ângulos \hat{e} , \hat{f} , \hat{g} e \hat{h} .

De acordo com a posição de cada ângulo, eles são denominados: ângulos correspondentes, ângulos alternos e ângulos colaterais. Os ângulos correspondentes são ângulos em que um dos lados está situado na transversal e o outro lado está situado em uma das paralelas. Os ângulos alternos internos estão em semiplanos distintos determinado pela transversal e situados entre as duas retas paralelas. Os ângulos alternos externos estão em semiplanos distintos determinado pela transversal e estão situados na região exterior as duas retas paralelas. Já os ângulos colaterais são os que estão no mesmo semiplano determinado pelas transversais. Os ângulos colaterais internos são os ângulos que estão situados no mesmo semiplano e na região compreendida entre as duas retas paralelas. Já os ângulos colaterais externos são os ângulos que estão situados no mesmo semiplano e na região externa as duas retas paralelas.

Para Gay (2022, p. 88), “os ângulos correspondentes, determinados por duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, são congruentes”. Em outras palavras, os ângulos correspondentes são ângulos que possuem a mesma medida.

Essa afirmação junto com o fato de os ângulos opostos pelo vértice serem congruentes produzem as seguintes igualdades: $\hat{a} = \hat{c} = \hat{e} = \hat{g}$ e $\hat{b} = \hat{d} = \hat{f} = \hat{h}$.

A partir das igualdades acima concluímos que os ângulos alternos internos e alternos externos são congruentes, assim como os ângulos colaterais internos e colaterais externos são suplementares.

4.4 Congruência de triângulos

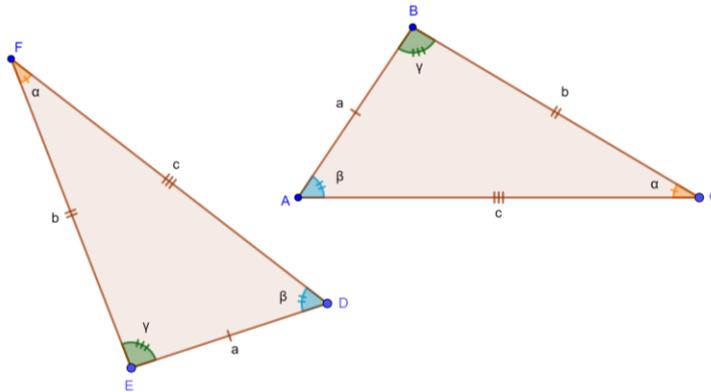
Definição: Dois triângulos ABC e DEF são ditos congruentes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca ordenada entre seus vértices de tal sorte que:

$$\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E} \text{ e } \hat{C} \equiv \hat{F}$$

e

$$\overline{BC} \equiv \overline{EF}, \overline{AC} \equiv \overline{DF} \text{ e } \overline{AB} \equiv \overline{DE}.$$

Figura 33 – Triângulos congruentes



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Observando a figura 33, temos que o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF, pois ao se identificar adequadamente os vértices dos dois triângulos obtemos o seguinte:

$$\widehat{ACB} = \alpha \text{ e } \widehat{DFE} = \alpha, \text{ logo } \widehat{ACB} = \widehat{DFE};$$

$$\widehat{BAC} = \beta \text{ e } \widehat{EDF} = \beta, \text{ logo } \widehat{BAC} = \widehat{EDF};$$

$$\widehat{ABC} = \gamma \text{ e } \widehat{DEF} = \gamma, \text{ logo } \widehat{ABC} = \widehat{DEF}.$$

Além disso, temos que:

$$\overline{AB} = a \text{ e } \overline{DE} = a, \text{ logo } \overline{AB} = \overline{DE};$$

$$\overline{BC} = b \text{ e } \overline{EF} = b, \text{ logo } \overline{BC} = \overline{EF};$$

$$\overline{AC} = c \text{ e } \overline{DF} = c, \text{ logo } \overline{AC} = \overline{DF}.$$

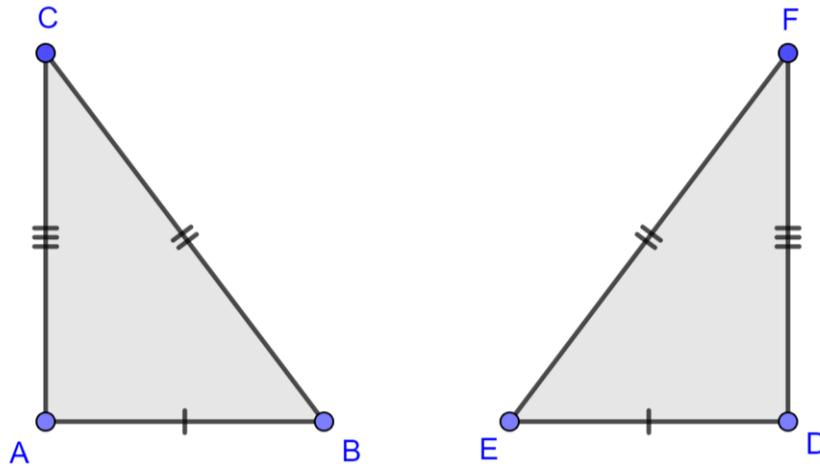
Dessa forma, os triângulos ABC e DEF são congruentes e podem ser indicados como $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Estudaremos a congruência de triângulos estabelecendo quatro casos de congruência, que são: caso lado-lado-lado (LLL), caso lado-ângulo-lado (LAL), caso ângulo-lado-ângulo (ALA) e caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA_O).

O primeiro caso de congruência envolvendo dois triângulos é o caso lado-lado-lado, ou caso LLL. Neste caso, os triângulos devem ter três lados congruentes. A congruência de triângulos leva em consideração a identificação dos vértices, de tal forma que ela identifica os ângulos e os lados correspondentes. Dessa forma, a ordem em que você representa uma congruência é de extrema importância.

A figura 34 representa dois triângulos, ABC e DEF , que tem seus lados correspondentes congruentes, ou seja, o lado $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Portanto, pelo caso LLL, temos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Figura 34 – Caso lado-lado-lado (LLL)

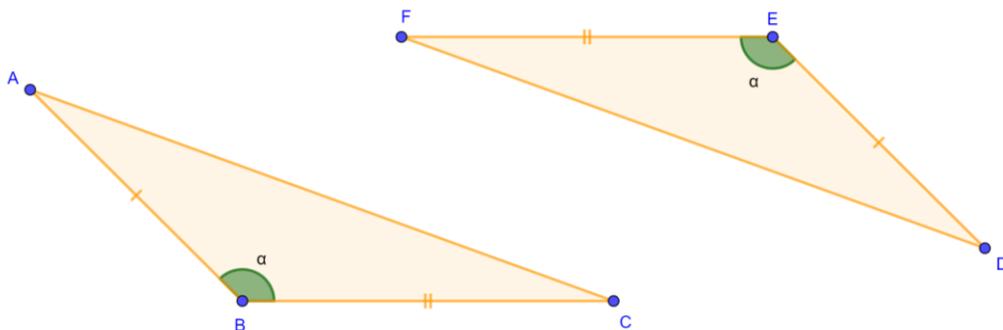


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

O segundo caso de congruência entre dois triângulos é o caso lado-ângulo-lado ou caso LAL. Gay (2022, p. 95) enuncia que “dois triângulos são congruentes se têm um ângulo correspondente congruente e os dois lados correspondentes que formam esse ângulo também congruentes”.

A figura 35 ilustra dois triângulos, ABC e DEF , que tem dois dos seus lados congruentes e o ângulo formado por esses lados congruentes, ou seja, o lado $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\hat{A}BC \cong \hat{D}EF$. Nesse caso, dizemos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Figura 35 – Caso lado-ângulo-lado (LAL)

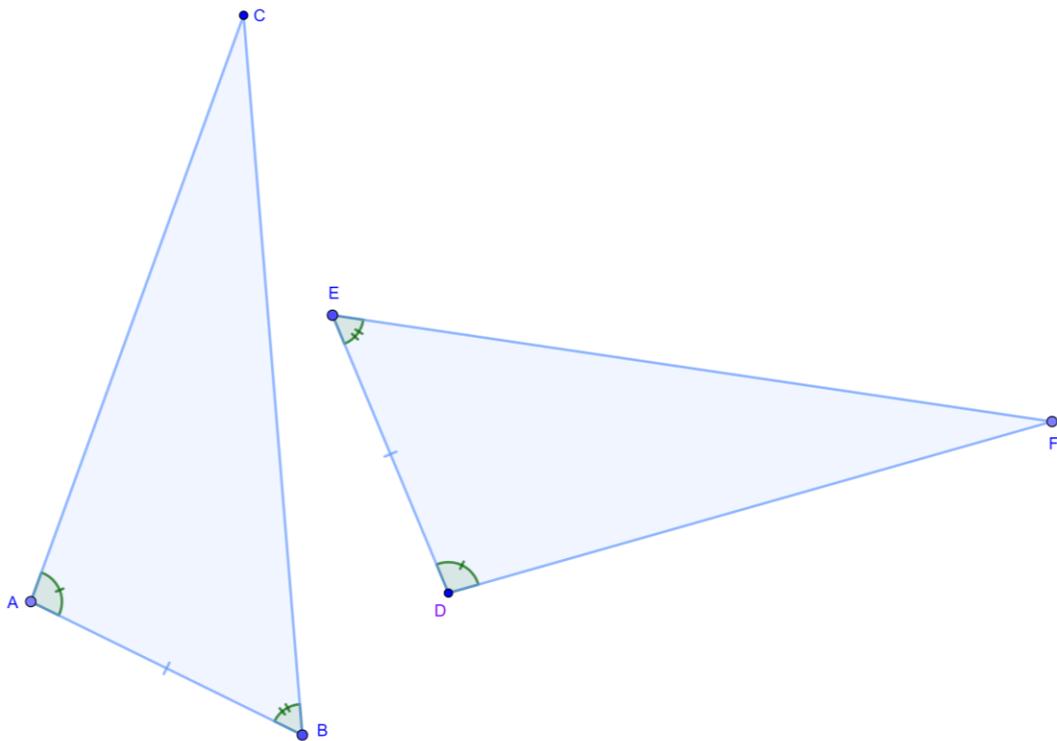


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

O terceiro caso de congruência entre dois triângulos é o caso ângulo-lado-ângulo ou caso ALA. Giovanni Júnior (2022, p. 86) diz que “são congruentes dois triângulos que têm dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos correspondentes congruentes”.

A figura 36 ilustra dois triângulos que possui dois lados congruentes e os ângulos adjacentes a esses lados também congruentes, ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\widehat{CAB} \equiv \widehat{FDE}$ e $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DFE}$. Nesse caso, dizemos que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

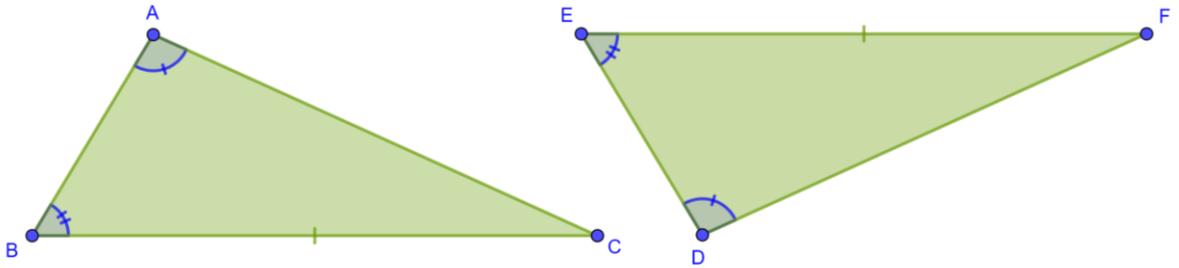
Figura 36 – Caso ângulo-lado-ângulo (ALA)



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

O último caso de congruência entre dois triângulos é o caso lado-ângulo-ângulo oposto, conhecido também como como caso LAA_O. Giovanni Júnior (2022, p. 97) afirma que “dois triângulos são congruentes se têm um lado correspondente congruente e se um dos ângulos adjacentes a esse lado e o ângulo oposto a ele também forem congruentes aos respectivos - ângulos correspondentes”.

Na figura 37, temos que $\widehat{CAB} \equiv \widehat{FDE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DFE}$, ou seja, por LAA_O, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

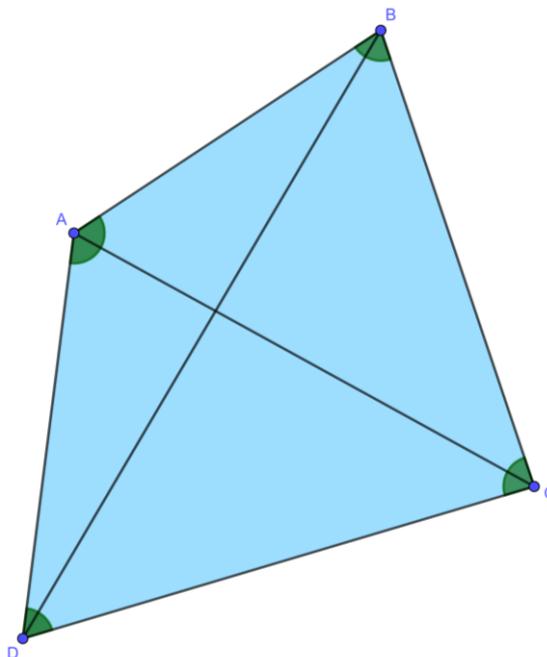
Figura 37 – Caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAAo)

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

4.5 Quadriláteros

Os quadriláteros são polígonos com quatro lados. A figura 38 ilustra um quadrilátero ABCD, onde se pode destacar os seguintes elementos:

- Vértices: A, B, C e D;
- Lados: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} ;
- Diagonais: \overline{AC} e \overline{BD} ;
- Ângulos internos: \widehat{DAB} , \widehat{ABC} , \widehat{BCD} e \widehat{CDA} .

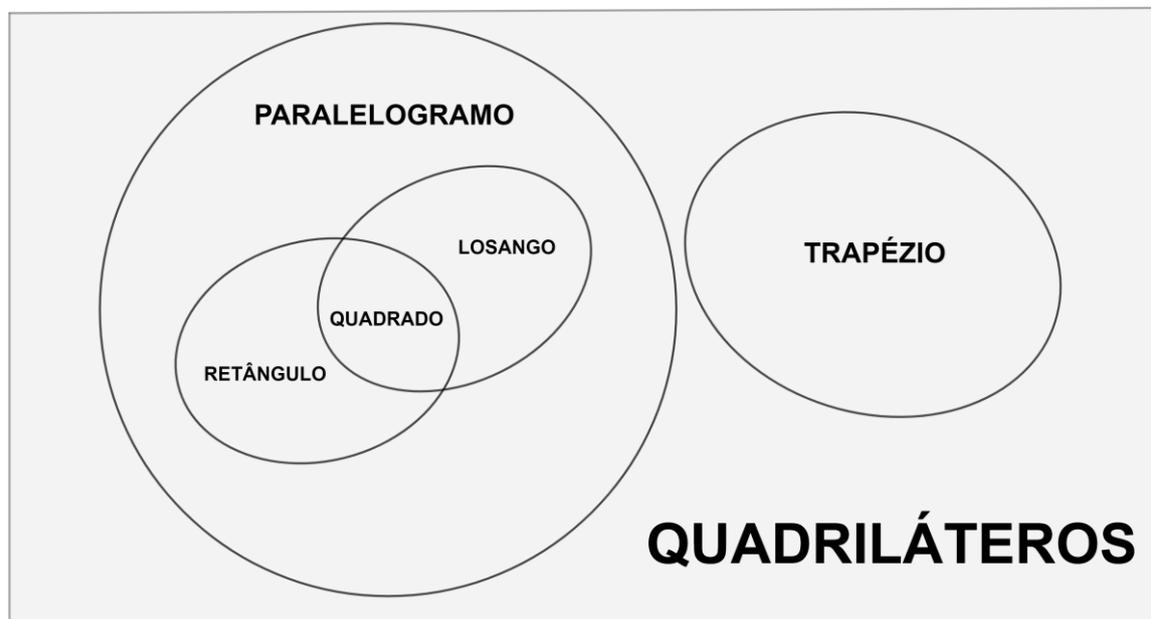
Figura 38 – Quadrilátero

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Os quadriláteros podem ser classificados quanto a algumas características em comum e segundo Silveira (2022) dentro os quadriláteros destacam-se, por suas propriedades, os paralelogramos e os trapézios. De acordo Andrade (2022, p. 220) afirma que “há quadriláteros que não são paralelogramos nem trapézios”. Já Gay (2022, p. 114) enuncia que “os quadriláteros com lados opostos paralelos recebem uma classificação especial e são denominados quadriláteros notáveis”.

Andrade (2022, p. 220) define que o paralelogramo é um “quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos. Neste caso, $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$ ”. Analisando a figura 39, pode-se notar que os quadriláteros se dividem em dois grupos: paralelogramos e trapézios (GAY, 2022).

Figura 39 – Quadriláteros



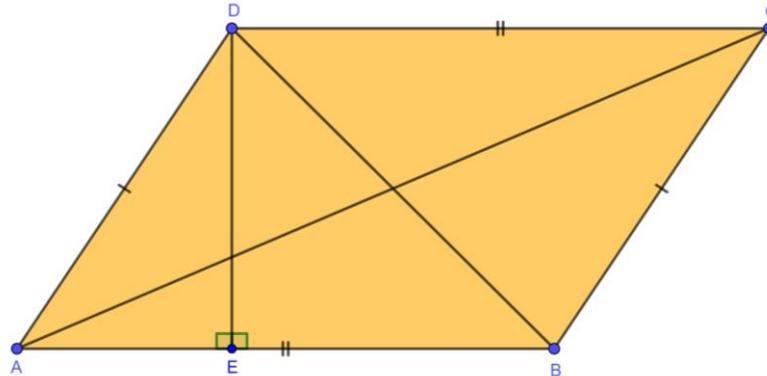
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Já o grupo do paralelogramo contém outros grupos de figuras como: quadrado, retângulo e losango. É possível, distinguir cada uma dessas figuras por suas propriedades particulares, mesmo todas elas sendo pertencentes ao mesmo grupo.

A figura 40 representa um paralelogramo ABCD que possui as seguintes propriedades, segundo Giovanni Júnior (2022, p. 196-197):

- “Em um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes”;
- “Em qualquer paralelogramo, os lados opostos são congruentes”;
- “Em qualquer paralelogramo, as diagonais interceptam-se no ponto médio de cada uma delas”.

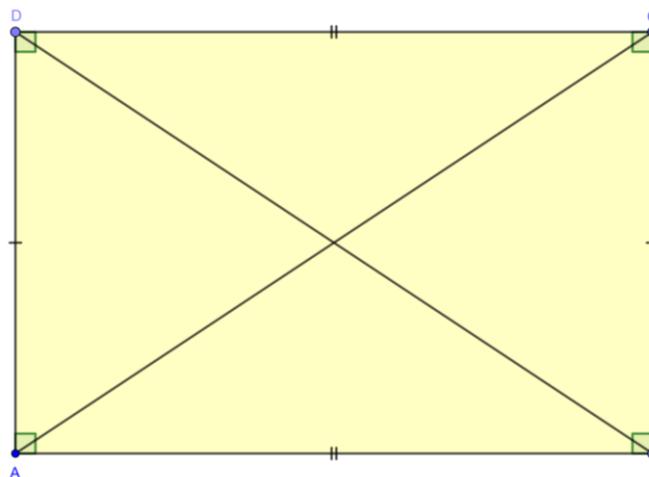
Figura 40 – Paralelogramo



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

As figuras 41, 42 e 43 ilustram, respectivamente, o retângulo, o losango e quadrado, e são casos particulares dos paralelogramos. A Figura 41 ilustra um retângulo ABCD, que possui dois pares de lados paralelos, todos os ângulos retos e diagonais congruentes.

Figura 41 – Retângulo

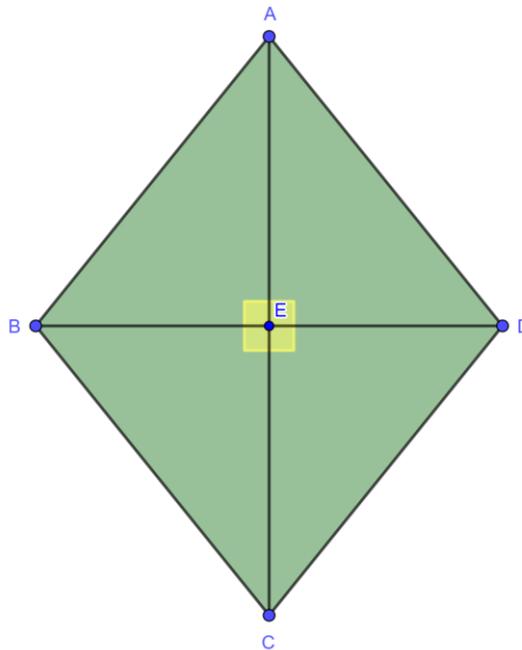


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Já a figura 42 retrata um losango ABCD, cujas diagonais não são congruentes, mas são perpendiculares entre si. Além das propriedades básicas dos paralelogramos, o losango tem a

seguinte propriedade: “as diagonais de um losango estão contidas nas respectivas bissetrizes dos ângulos internos e são perpendiculares entre si” (GAY, 2022, p. 121).

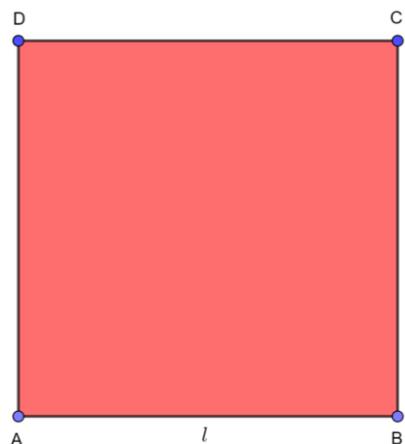
Figura 42 – Losango



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

A figura 43 ilustra um quadrado de lado “ l ”. Segundo Giovanni Júnior (2022, p. 198) “o quadrado reúne as propriedades dos paralelogramos, dos retângulos e dos losangos”.

Figura 43 – Quadrado



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Em síntese, as propriedades vistas são segundo Teixeira (2022, p. 227):

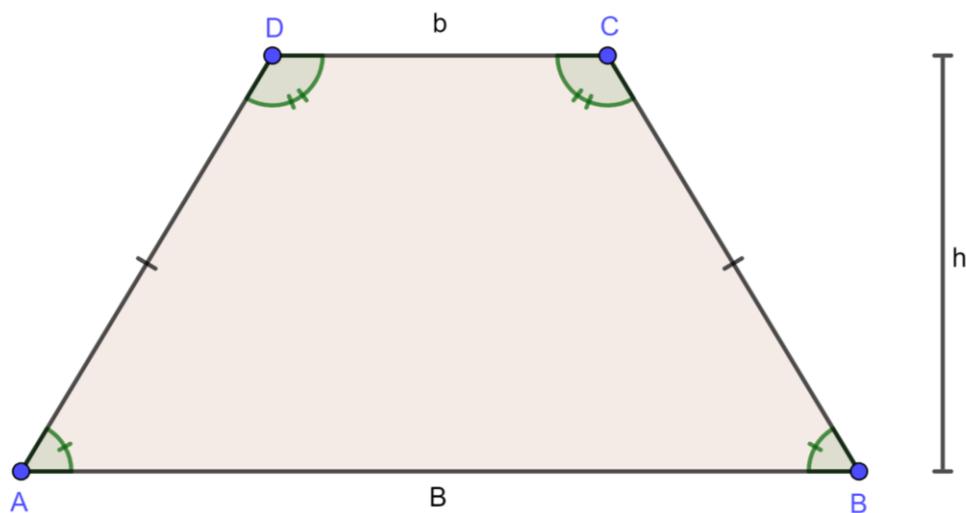
Quadro 5 – Propriedades dos paralelogramos

Paralelogramos	Os lados opostos são congruentes. Os ângulos internos opostos são congruentes. As diagonais se cruzam nos respectivos pontos médios.
Retângulos	Têm as propriedades dos paralelogramos. As diagonais são congruentes.
Losangos	Têm as propriedades dos paralelogramos. As diagonais são perpendiculares entre si. As diagonais correspondem às bissetrizes dos ângulos internos.
Quadrados	Como o quadrado é um caso particular de losango e de retângulo, ele tem todas as propriedades de ambos.

Fonte: Teixeira, 2022

Já os trapézios podem ser classificados de três formas diferentes: trapézio isósceles, trapézio retângulo e trapézio qualquer. Segundo Dante e Viana (2022, p. 199) o “trapézio é todo quadrilátero que tem apenas 2 lados paralelos (base maior e base menor)”.

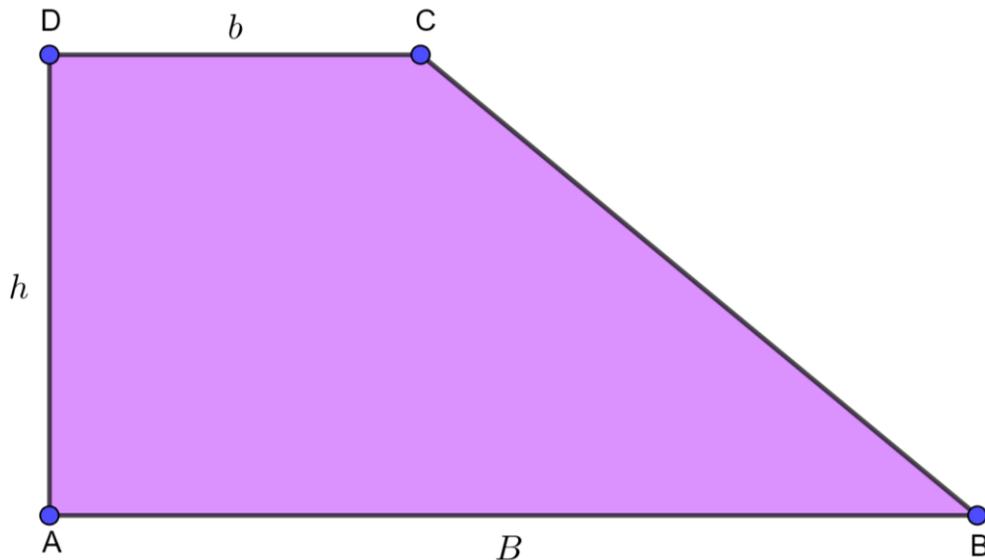
A seguir explicitaremos as propriedades inerentes aos trapézios isósceles e trapézios retângulo. Na figura 44 é ilustrado um trapézio ABCD, onde \overline{AB} é a base maior desse trapézio e \overline{CD} é a base menor desse trapézio.

Figura 44 – Trapézio isósceles

Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Já o trapézio retângulo segundo Dante e Viana (2022, p. 200) “é aquele que tem 2 ângulos internos retos”. A figura 45 ilustra o trapézio retângulo ABCD, onde \overline{AB} é a base maior desse trapézio e \overline{CD} é a base menor desse trapézio. Os lados \overline{AD} e \overline{BC} não são paralelos, mas o lado \overline{AD} é perpendicular aos lados \overline{AB} e \overline{CD} .

Figura 45 – Trapézio retângulo



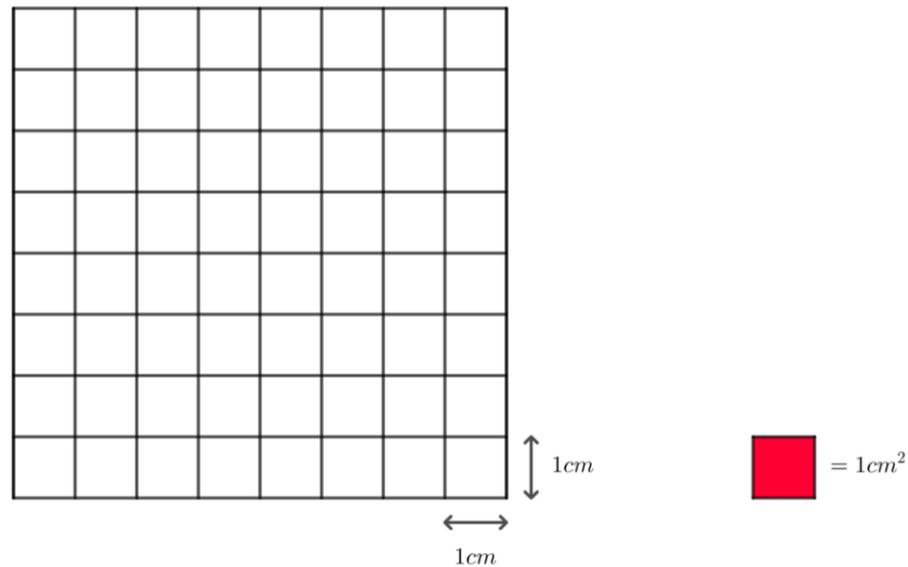
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

4.6 Área de figuras plana

O conceito de área está presente na Geometria Plana e é utilizado principalmente no cálculo da medida da superfície de figuras poligonais. Iezzi, Dolce e Machado (2022, p. 206) afirmam que “uma superfície plana ocupa certa porção do plano. A extensão ocupada por uma superfície plana é chamada de área da superfície. A medida de área expressa quantas vezes uma unidade de medida de área cabe na superfície”.

Nesta seção será abordada o cálculo da área da superfície de triângulos, quadriláteros regulares (quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio), além do hexágono e do círculo.

Primeiramente vamos adquirir a noção de área de superfície, inicialmente a área da superfície é a região ocupada por uma determinada figura e para assimilar tal conceito é possível fazer o uso da malha quadriculada e com isso utilizar uma unidade para medir a área.

Figura 46 – Malha quadriculada

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Analisando a figura 46 é possível observar uma malha quadriculada onde cada quadradinho mede 1 cm por 1 cm; sendo assim, a medida da área da superfície da figura é dada em função do número de quadrados que ela ocupa. Ao longo deste tópico utilizaremos a unidade de medida da área como sendo centímetro quadrado (cm^2), ou seja, cada quadradinho valendo 1 cm^2 .

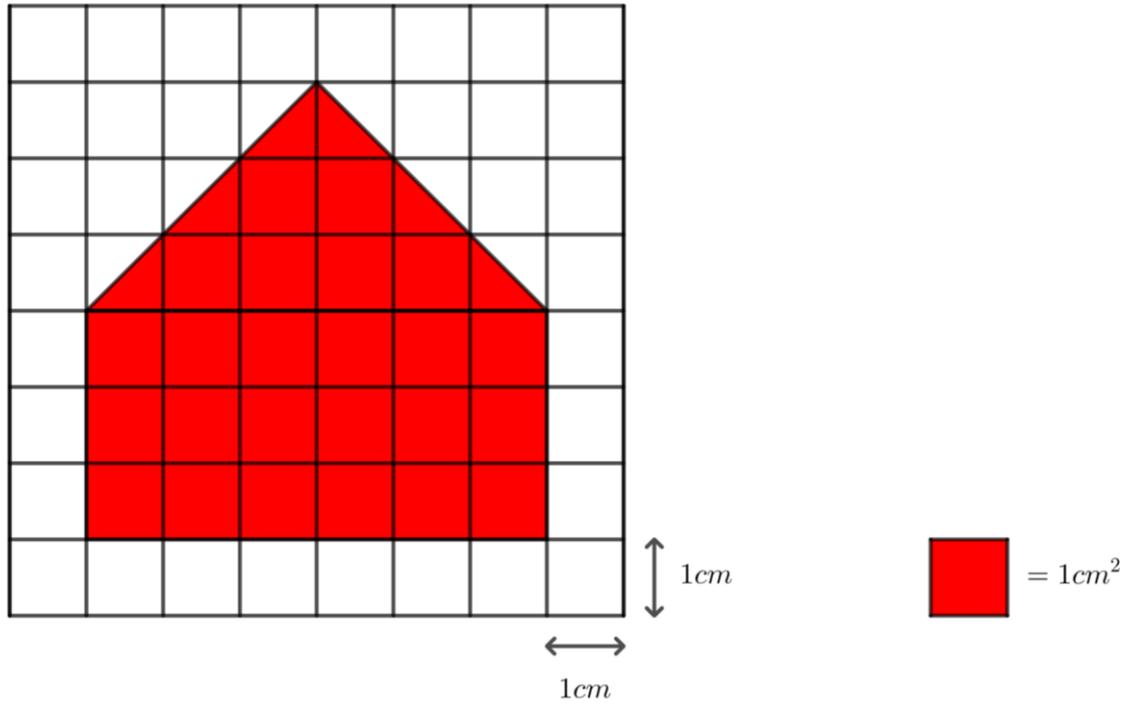
Oliveira e Fugita (2022) destacam que no Sistema Internacional de Unidades (SI) a unidade padrão é o metro quadrado (m^2), mas há a utilização dos seus múltiplos e submúltiplos no nosso dia a dia.

Quadro 6 – Múltiplos e submúltiplos do metro quadrado

Múltiplos			Unidade de medida padrão	Submúltiplos		
Quilômetro Quadrado (km^2)	Hectômetro Quadrado (hm^2)	Decâmetro Quadrado (dam^2)	Metro Quadrado (m^2)	Decímetro Quadrado (dm^2)	Centímetro Quadrado (cm^2)	Milímetro Quadrado (mm^2)
1 km^2 equivale a 1000000 m^2	1 hm^2 equivale a 10000 m^2	1 dam^2 equivale a 100 m^2	1 m^2	1 dm^2 equivale a $\frac{1}{100} \text{ m}^2$	1 cm^2 equivale a $\frac{1}{10000} \text{ m}^2$	1 mm^2 equivale a $\frac{1}{1000000} \text{ m}^2$

Fonte: Oliveira e Fugita, 2022

Figura 47 – Figura na malha quadriculada

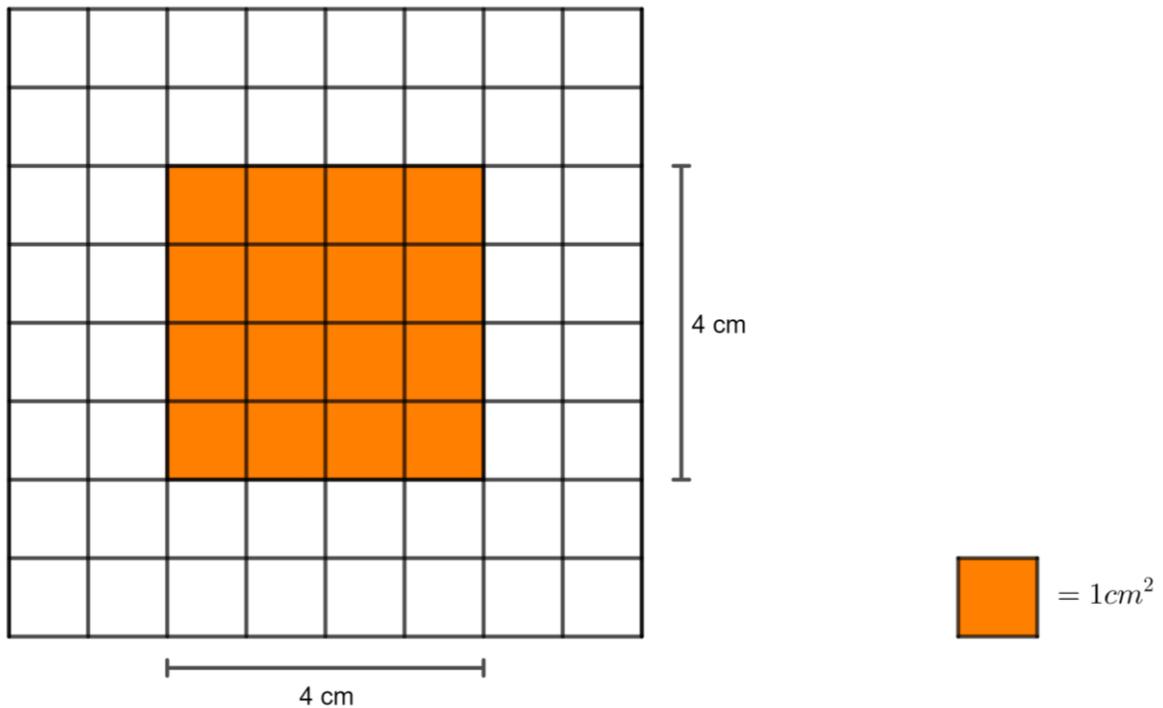


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Utilizando a malha quadriculada da figura 46 e assumindo que cada quadradinho tem 1cm^2 de área, temos na figura 47 um polígono convexo cuja área nada mais é do que o somatório da região da malha que ele ocupa. Este polígono é composto por quadrados, além de triângulos que têm a metade da área do quadradinho. Logo, a medida da área desse polígono é 27 cm^2 , pois ele é composto por 24 quadradinhos que totalizam uma área de 24 cm^2 mais 6 triângulos cuja soma da medida das áreas é 3 cm^2 ; a junção das duas áreas resulta numa área total de 27 cm^2 . Ao observar a figura 47 é possível contar a quantidade de quadradinhos que ela possui (24 quadradinhos) e a quantidade de triângulos (6 triângulos).

Ao se construir a noção intuitiva de área através da malha quadriculada, podemos analisar o processo para se determinar a área de polígonos regulares como: quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio, triângulo e hexágono.

Ao analisar o quadrado da figura 48, cujos lados medem 4 centímetros, para determinar sua área é possível fazer a divisão dos lados em segmentos de 1 centímetro, de forma que sejam construídos quadradinhos de 1 cm^2 de área. Dessa forma o quadrado será formado por 16 quadradinhos de 1 cm^2 de área, o que determina a área da figura como sendo 16 cm^2 .

Figura 48 – Área do quadrado

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Dessa forma é possível determinar uma fórmula para a área de qualquer quadrado. Observando o quadrado acima cujos lados medem 4 cm é possível dividi-lo em 16 quadrados menores de 1cm^2 , logo para determinar a área do quadrado é possível calcular da seguinte maneira:

$$A_{\text{quadrado}} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$$

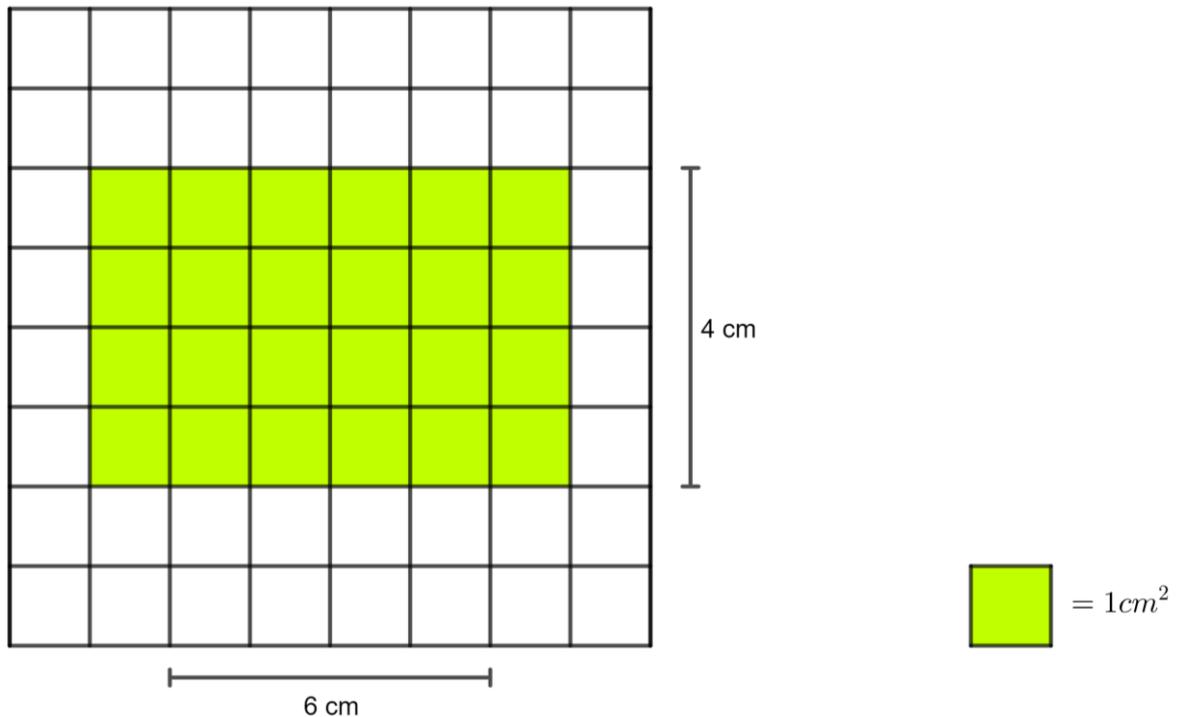
Daí, é possível determinar uma expressão que indica a área do quadrado (A) em função da medida do seu lado (l). Logo, temos que:

$$A_{\text{quadrado}} = l \cdot l$$

Analogamente ao que fizemos com a área do quadrado, podemos determinar a área de um retângulo de 6 cm de comprimento por 4 cm de largura através da malha quadriculada, figura 49. Dividindo os lados desse retângulo em segmentos de 1 cm, de forma que se obtenha

quadrado de 1cm^2 de área. Dessa forma temos que o retângulo abaixo é formado por 24 quadrados de área igual a 1cm^2 cada, sendo a área total do retângulo igual a 24cm^2 .

Figura 49 – Área do retângulo



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Para se calcular a área do retângulo acima, basta apenas multiplicar a medida do seu comprimento pela medida da sua largura, pois ao dividir o retângulo em quadrados de 1cm^2 de área, obtêm-se 24 quadrados, sendo possível calcular a sua área da seguinte maneira:

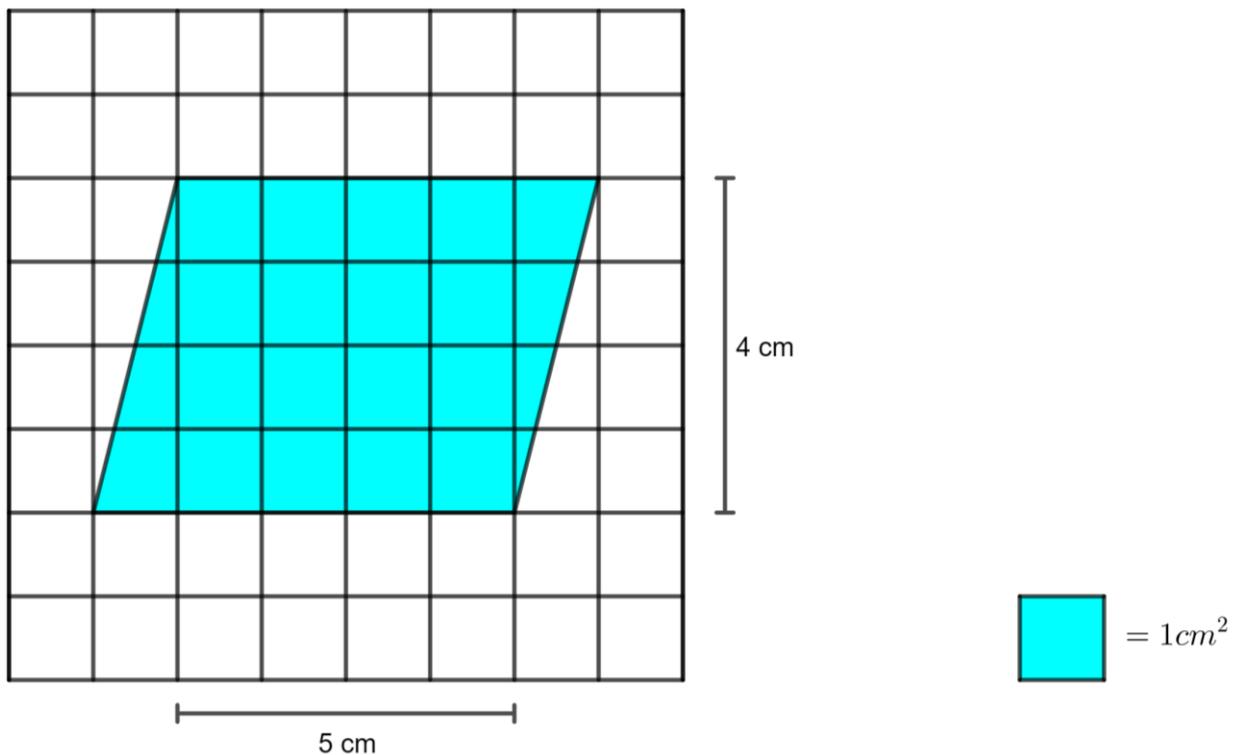
$$A_{\text{retângulo}} = 6 \cdot 4 = 24\text{ cm}^2$$

Escrevendo uma expressão que defina a área do retângulo em função do seu comprimento e largura. Adotando b como sendo a medida da sua base ou comprimento e h como sendo a medida da sua altura ou largura, temos que:

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$$

Para se calcular área do paralelogramo não é diferente da área do quadrado ou do retângulo quando ele se encontra numa malha quadriculada. Vamos dividir a base e a altura desse paralelogramo em segmentos de 1 cm de comprimento, fazendo isso é possível obter alguns quadradinhos de área igual a 1 cm^2 e outros quadradinhos incompletos. Se unirmos dois desses quadradinhos incompletos é possível obter um quadradinho de 1 cm^2 de área. A figura 50 ilustra um paralelogramo numa malha quadriculada.

Figura 50 – Área do paralelogramo

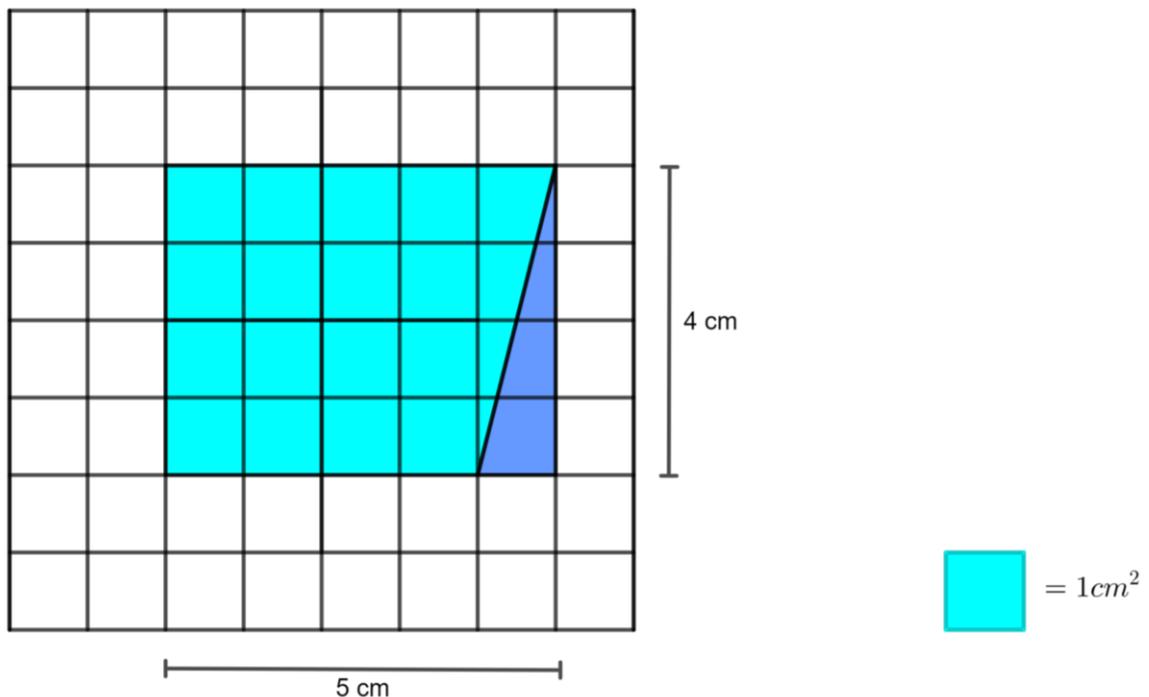


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

A figura 51 ratifica o que foi dito anteriormente sobre a união de dois quadradinhos incompletos. Ao deslocar as partes incompletas para formar um quadradinho completo percebe-se que a medida da área do paralelogramo é igual a medida da área do retângulo, logo a área do paralelogramo vai obedecer às mesmas condições da área do retângulo. Como após a junção das partes incompletas se formaram 20 quadradinhos de área igual a 1 cm^2 , pois haverá 5 quadradinhos na base e 5 quadradinhos na largura, daí multiplicando esses valores temos que a área do paralelogramo é 20 cm^2 . Pois, usando a fórmula da área do retângulo, temos que:

$$A_{\text{paralelogramo}} = 5 \cdot 4 = 20\text{ cm}^2$$

Figura 51 – Transformação do paralelogramo em um retângulo



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Dessa forma, conclui-se que a área do paralelogramo e a área do retângulo são as mesmas. Logo:

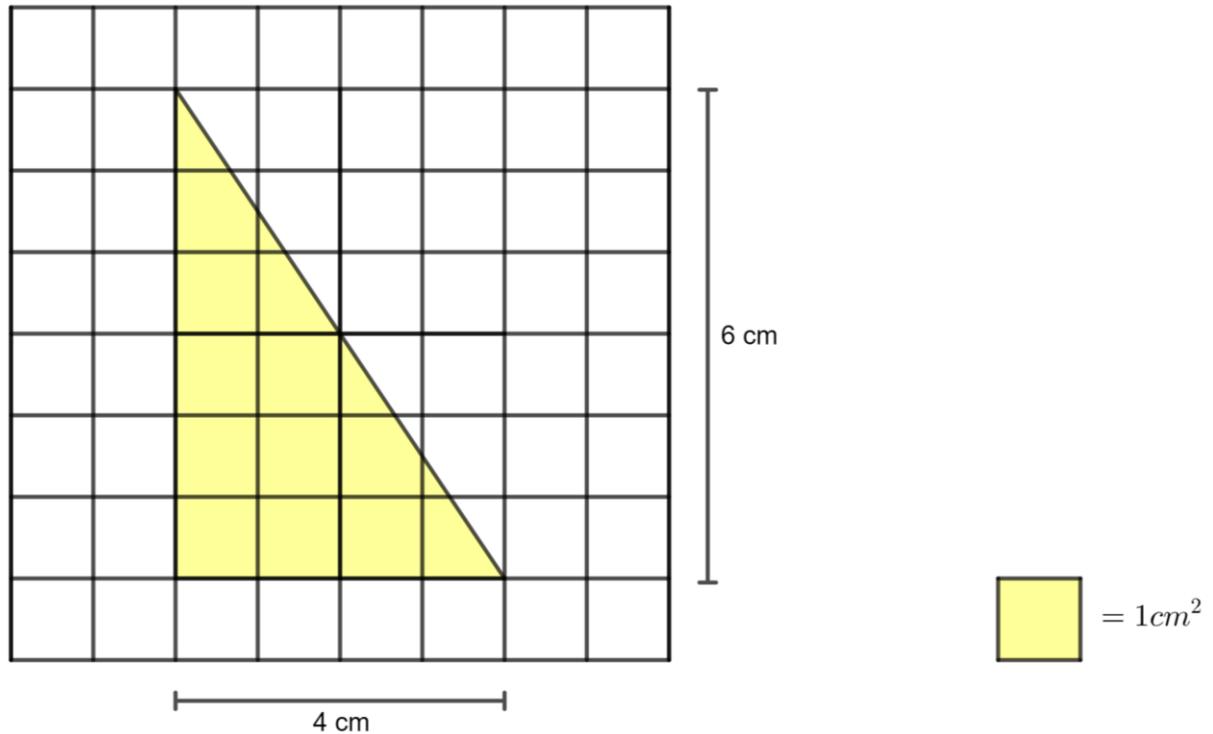
$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

O próximo polígono a ter sua área determinada é o triângulo que como o próprio nome diz é o polígono que possui três ângulos e conseqüentemente três lados. É importante ter o conhecimento da área do triângulo agora, pois ela servirá para a determinação dos quadriláteros regulares que ainda não foram abordados.

A figura 52 ilustra um triângulo retângulo numa malha quadriculada onde cada quadradinho tem 1 cm² de área. Irá ser feito um caso geral para a determinação da expressão que define a medida da área do triângulo em função da medida dos seus lados. Observando o triângulo na malha quadriculada é possível ver que ele está dividido em quadradinhos de 1 cm² de área completos e em alguns quadradinhos incompletos. União esses quadradinhos

incompletos é possível formar quadradinhos completos como ocorreu no caso do paralelogramo. Dessa forma há 8 quadradinhos completos de 1 cm^2 de área e 8 quadradinhos incompletos que juntos formam 4 quadradinhos de 1 cm^2 de área, logo o triângulo tem 12 quadradinhos de 1 cm^2 , o que representa uma área de 12 cm^2 .

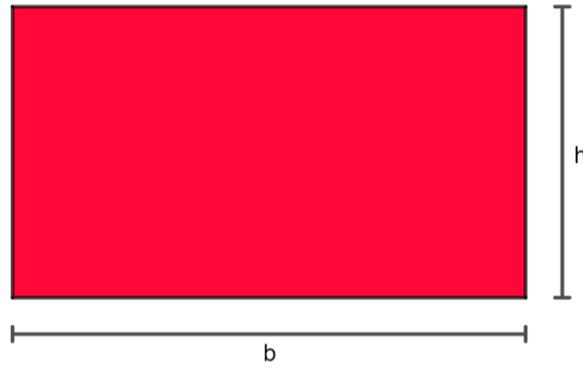
Figura 52 – Área do triângulo



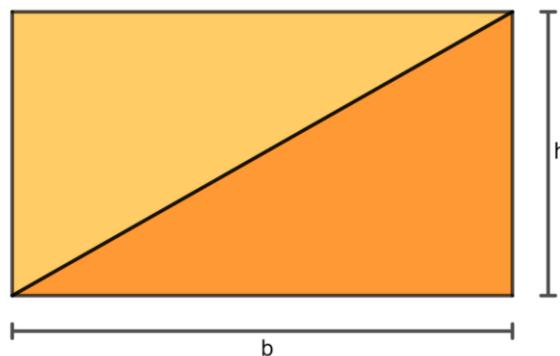
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Mas como determinar a área de um triângulo qualquer usando apenas a medida da sua base e a medida da sua altura sem precisar da malha quadriculada? Basta apenas analisar de que forma é possível construir um triângulo através de algum polígono regular já estudado. Temos na figura 53 um retângulo cuja base mede b e a altura mede h , mas se for traçada uma diagonal por dois dos seus vértices não consecutivos há a formação de duas regiões triangulares como mostra a figura 54.

Na figura 53 temos que a área do retângulo pode ser representada pelo produto da sua base pela altura, mas como na figura 54 a diagonal divide o retângulo em dois triângulos congruentes, conclui-se que a área de cada triângulo é metade da área do retângulo de base medindo b e altura medindo h .

Figura 53 – Área do retângulo

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Figura 54 – Área do triângulo

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Dessa forma, generalizando uma expressão que determina a área do triângulo em relação a medida de sua base e da sua altura, temos que:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

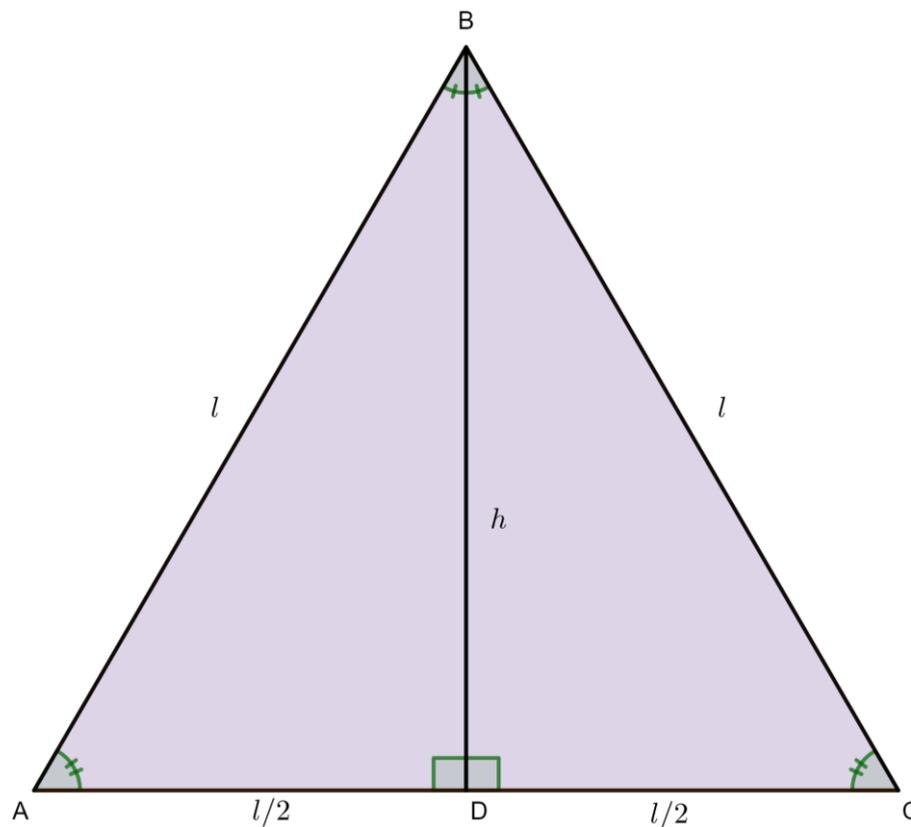
Utilizando a fórmula para determinar a área do triângulo da figura 52 que tem base medindo 4 cm e altura medindo 6 cm, temos que:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{4 \cdot 6}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

A fórmula expressa acima só é válida se o triângulo tiver a medida de sua base e a medida da sua altura determinadas. Quando o triângulo não apresenta sua altura definida, a área pode ser encontrada de outras maneiras. Das maneiras possíveis, podemos destacar duas delas que são: através do triângulo equilátero e da fórmula de Heron. Apenas discorreremos sobre a área do triângulo equilátero, pois será necessária para o cálculo da área do hexágono.

Um triângulo equilátero é um triângulo que possui todos os lados de mesma medida; logo vamos determinar sua área em função apenas da medida do seu lado. Para isso é necessário observar as características do triângulo equilátero: possui três lados iguais e os seus ângulos internos também são iguais de medida igual a 60° . Observando o triângulo ABC, da figura 55, cuja altura relativa ao lado \overline{AC} é h e divide a base em dois segmentos de medida igual a $l/2$.

Figura 55 – Triângulo equilátero



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Utilizando-se de conceitos que ainda serão abordados nesse trabalho que é o Teorema de Pitágoras, determinamos o valor da altura desse triângulo em função da medida do seu lado. Assim, temos que a altura é:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo o valor de h na fórmula da área do triângulo, determinada anteriormente, encontramos a seguinte fórmula:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

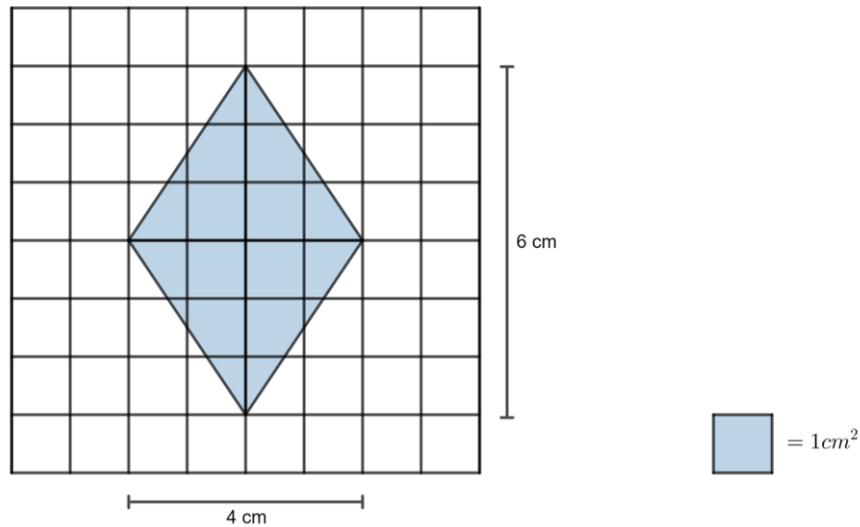
equilátero

Logo a área de um triângulo equilátero é:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

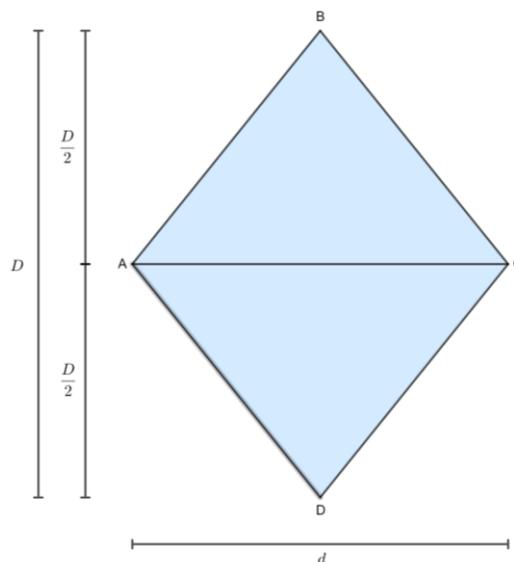
equilátero

O próximo quadrilátero regular a ser estudado é o losango que está sendo representado na figura 56. As propriedades do losango já foram descritas anteriormente e utilizando a malha quadriculada para determinar a sua área é possível perceber que há 4 quadrinhos completos cuja área é igual a 1 cm^2 e 16 quadrinhos incompletos, que unidos formam 8 quadrinhos completos de área igual a 1 cm^2 . Como os 4 quadrinhos de 1 cm^2 juntos tem área de 4 cm^2 e os 16 quadrinhos incompletos quando unidos, dois a dois, se tornam 8 quadrinhos completos de 1 cm^2 e juntos possuem área de 8 cm^2 . Temos que a área do losango abaixo é 12 cm^2 , pois $4+8 = 12 \text{ cm}^2$.

Figura 56 – Área do losango

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Fazer a análise da área de um polígono como o losango utilizando a malha quadriculada se torna uma tarefa difícil, pois é necessário observar a divisão da figura em quadrados de área de 1cm^2 . Como os 4 lados do losango possuem a mesma medida é possível determinar a sua área dividindo-o em dois triângulos, passando uma diagonal entre dois vértices não consecutivos. Ao invés de se observar a medida dos lados do losango, deve-se observar as suas diagonais, pois iremos determinar sua área em função das medidas das diagonais.

Figura 57 – Área do losango

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

A figura 57 representa um losango ABCD com sua diagonal maior de medida D e com sua diagonal menor de medida d. Traçando uma diagonal entre os vértices A e C, nota-se que a diagonal \overline{BD} foi dividida ao meio. Como a diagonal \overline{AC} divide o losango em dois triângulos iguais, podemos usar a fórmula da área do triângulo para determinar a fórmula da área do losango em função de suas diagonais. Daí, temos que:

$$A_{\text{losango}} = 2 \cdot A_{\text{triângulo}}$$

$$A_{\text{losango}} = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = b \cdot h$$

$$A_{\text{losango}} = d \cdot \frac{D}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Logo a área do losango é:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Onde D é a sua diagonal maior e d é a sua diagonal menor.

Calculando a área do losango da figura 56, temos que:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{6 \cdot 4}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{24}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = 6 \text{ cm}^2$$

Logo, ratifica-se a área encontrada primeiramente.

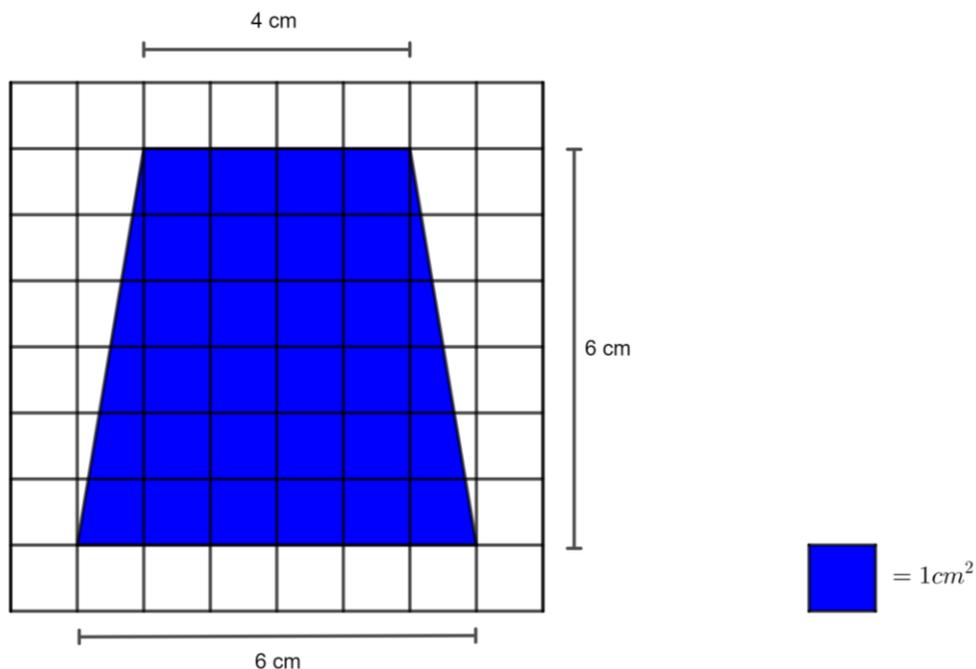
O último quadrilátero regular a ser estudado é o trapézio, figura 58, cujas propriedades já foram postas neste trabalho. O trapézio é o único dos polígonos regulares estudados que possui dois lados paralelos entre si e que possuem medidas diferentes.

O trapézio abaixo tem base maior medindo 6 cm, base menor medindo 4 cm e altura medindo 6 cm. Para determinar sua área utilizando a malha quadriculada, basta dividir a base maior e a altura em segmentos de 1 cm e cada quadradinho completo formado terá 1 cm^2 de área.

Fazendo a divisão do trapézio em quadradinho de 1 cm^2 de área é possível formar 24 quadradinhos de 1 cm^2 de área, ou seja, 24 cm^2 e 12 quadradinhos incompletos, que unidos formam 6 quadradinhos completos de 1 cm^2 de área, totalizando 30 cm^2 . Somando esses valores, encontramos a área do trapézio, da figura 58, que é de 30 cm^2 .

Mas, para se chegar a uma fórmula que determina a área de um trapézio qualquer é preciso decompor ele em outras figuras. Fazendo o somatório da área dessas figuras encontramos a área do trapézio. Para isso é necessário decompor o trapézio em dois triângulos semelhantes e em um retângulo, conforme a figura 59.

Figura 58 – Área do trapézio



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Dividindo a base maior B em três segmentos, um de medida igual a base menor b e os outros dois de medida $\frac{B-b}{2}$, temos dois triângulos semelhantes de base medindo $\frac{B-b}{2}$ e altura h , além de um retângulo de comprimento b e de largura h .

Calculando a área do triângulo, temos que:

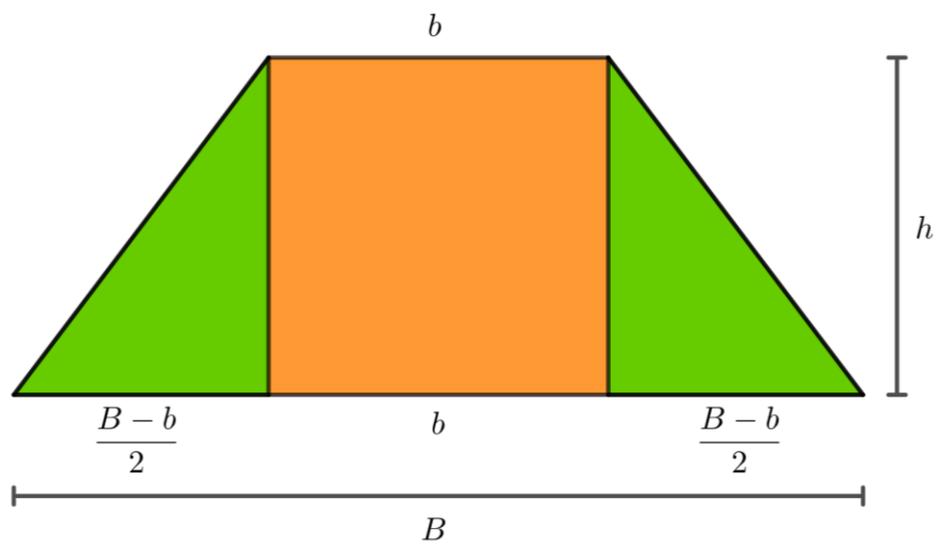
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\frac{B-b}{2} \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{(B-b) \cdot h}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{(B-b) \cdot h}{4}$$

Figura 59 – Decomposição do trapézio



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Calculando a área do trapézio, temos que:

$$A_{\text{trapézio}} = 2 \cdot A_{\text{triângulo}} + A_{\text{retângulo}}$$

$$A_{\text{trapézio}} = 2 \cdot \frac{(B-b) \cdot h}{4} + b \cdot h$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B-b) \cdot h}{2} + b \cdot h$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B-b) \cdot h}{2} + \frac{2 \cdot b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B-b+2b) \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Onde B representa a base maior do trapézio, b representa a base menor e há representa a altura.

Usando os valores da figura 58 para determinar a área do trapézio através da fórmula encontrada anteriormente, temos que:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(6 + 4) \cdot 6}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{10 \cdot 6}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{60}{2}$$

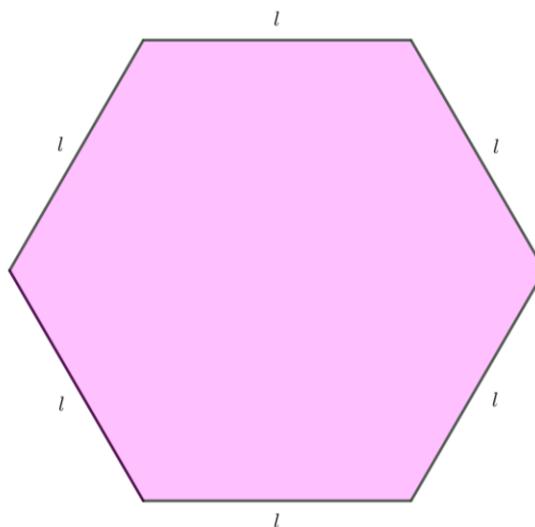
$$A_{\text{trapézio}} = 30 \text{ cm}^2$$

Encontrando assim a mesma área que o cálculo com malha quadriculada.

Como já foram demonstradas as fórmulas para se determinar a área de triângulos e dos quadriláteros, vamos determinar a área de um polígono que pode é bastante utilizando na Geometria Espacial, o hexágono.

A figura 60 ilustra um hexágono regular cujo lado mede l. As propriedades do hexágono não foram descritas neste trabalho anteriormente, mas como se trata de um polígono regular possui seus lados medindo a mesma medida assim como seus ângulos internos.

Figura 60 – Área do hexágono



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

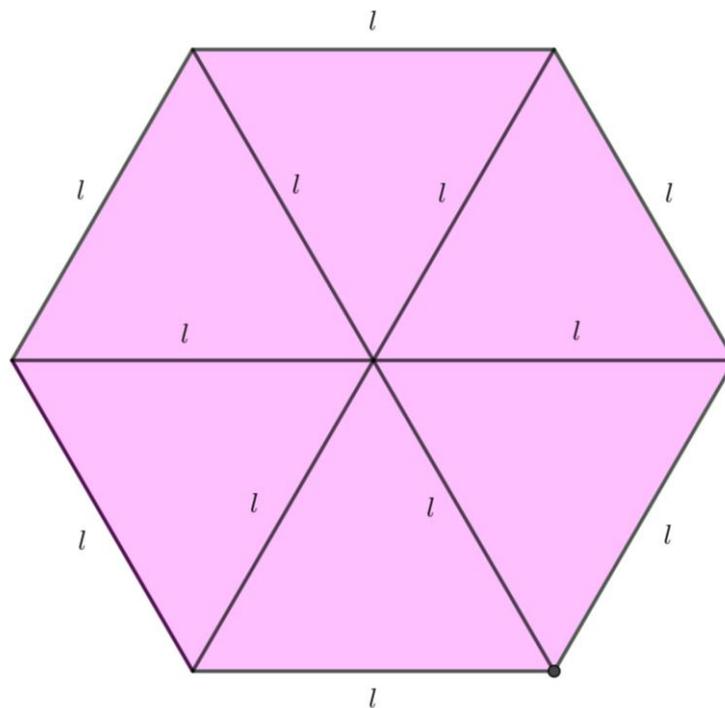
Traçando algumas diagonais do hexágono é possível dividi-lo em seis triângulos equiláteros, figura 61. Como visto anteriormente, um triângulo equilátero é um triângulo que possui todos os lados de mesma medida. Utilizando a fórmula da área do triângulo equilátero é possível determinar a área do hexágono da seguinte forma:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\text{triângulo equilátero}}$$

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{hexágono}} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

Figura 61 – Hexágono dividido em triângulos equiláteros

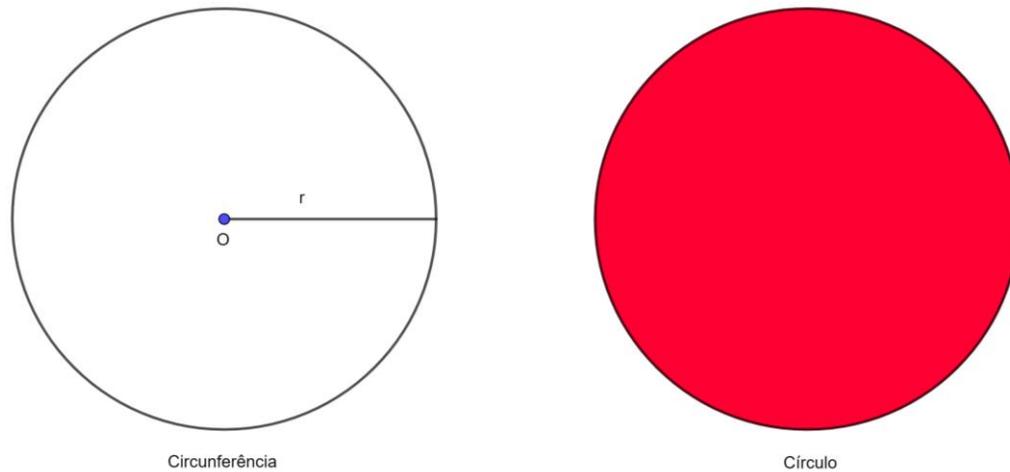


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Dessa forma determinamos a expressão que determina a área do hexágono em função da medida dos seus lados. Por fim, vamos determinar a área do círculo, que é a “reunião da circunferência com os pontos da sua região interna” (BONJORNO *et al*, 2022, p. 231).

A figura 62 ilustra a diferença entre circunferência e círculo.

Figura 62 – Diferença entre circunferência e círculo



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

De acordo com Longen (2022, p. 116) “o lugar geométrico dos pontos de um plano situados a uma mesma distância de um ponto fixo dado é uma circunferência. A superfície limitada por uma circunferência é denominada círculo”.

Em outras palavras, a circunferência é o contorno da região enquanto o círculo é a região delimitada pela circunferência. Os elementos presentes numa circunferência são:

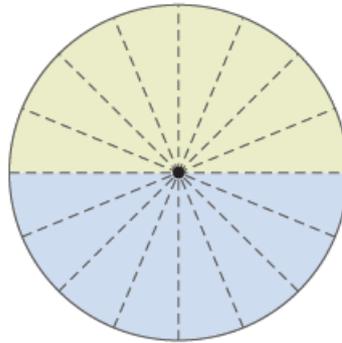
- Centro – é o ponto que determina a origem da circunferência, ou seja, uma das extremidades do raio.
- Raio – é qualquer medida de segmento que vai do centro até um ponto qualquer da circunferência.
- Diâmetro – é qualquer segmento que vai de um ponto qualquer da circunferência a outro ponto qualquer passando pelo centro da circunferência.

Segundo Iezzi, Dolce e Machado (2022, p. 215) “ao inscrever um polígono regular em uma circunferência, se traçarmos um segmento de reta que liga o centro O dessa circunferência a cada um dos n vértices do polígono, ele ficará dividido em n triângulos isósceles”.

Ao inscrever um polígono numa circunferência de raio r é possível dividir esse polígono em vários setores circulares que se muito pequenos se assemelham a triângulos e assim se forem reagrupados esses setores circulares a figura obtida ser algo parecido com um paralelogramo. Na figura 63 é possível observar uma circunferência dividida 16 partes que agrupadas na figura 64 formam uma figura semelhante a um paralelogramo e que tem como medida de base o valor

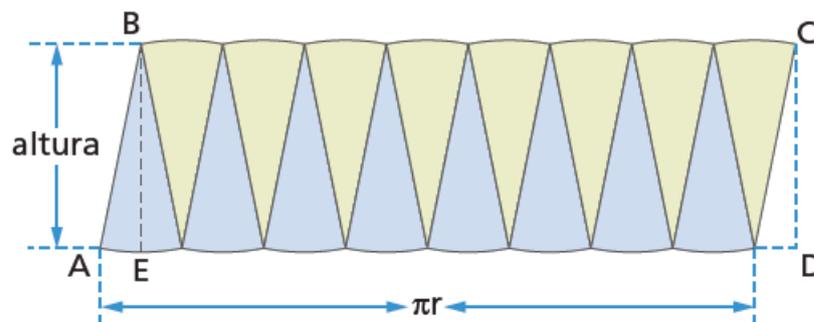
da metade do comprimento da circunferência e de altura a medida do raio (GIOVANNI JÚNIOR, 2022).

Figura 63 – Divisão da circunferência em setores circulares



Fonte: Giovanni Júnior, 2022, p. 257

Figura 64 – Setores circulares organizados num paralelogramo



Fonte: Giovanni Júnior, 2022, p. 257

Segundo Teixeira (2022, p. 254):

“Quanto maior for a quantidade de partes em que o círculo é decomposto, menos “inclinado” é o lado do paralelogramo. Assim, aumentando significativamente a quantidade de partes, a figura geométrica obtida lembra um retângulo, cuja medida do comprimento da base é metade da medida do comprimento da circunferência e cuja medida da altura é a medida do comprimento do raio do círculo”.

Dessa forma é possível determinar a área do círculo através da área do paralelogramo. Temos que a área do paralelogramo é o produto da sua base pela sua altura, substituindo pelos valores da base e da altura da figura 64, temos que:

$$A_{\text{círculo}} = A_{\text{paralelogramo}}$$

$$A_{\text{círculo}} = b \cdot h$$

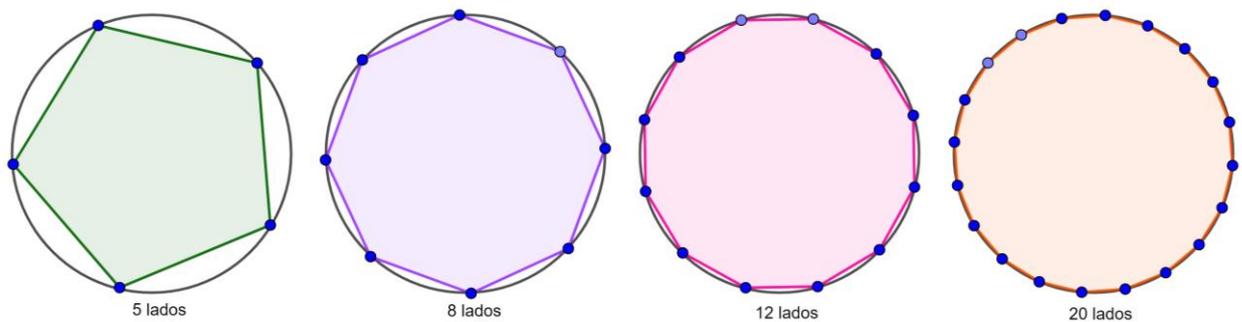
$$A_{\text{círculo}} = \pi r \cdot r$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

Onde r é o raio da circunferência. “A área de um círculo de raio r é igual ao produto do quadrado da medida do raio pelo número π ” (LONGEN, 2022, p. 123).

Outra maneira de determinar a área de um círculo é observando polígonos inscritos numa circunferência. À medida que se aumenta o número de lados de um polígono inscrito numa circunferência o seu formato se assemelha ao do círculo, sendo assim a área do polígono tende a ser igual a área do círculo.

Figura 65 – Figuras inscritas numa circunferência



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

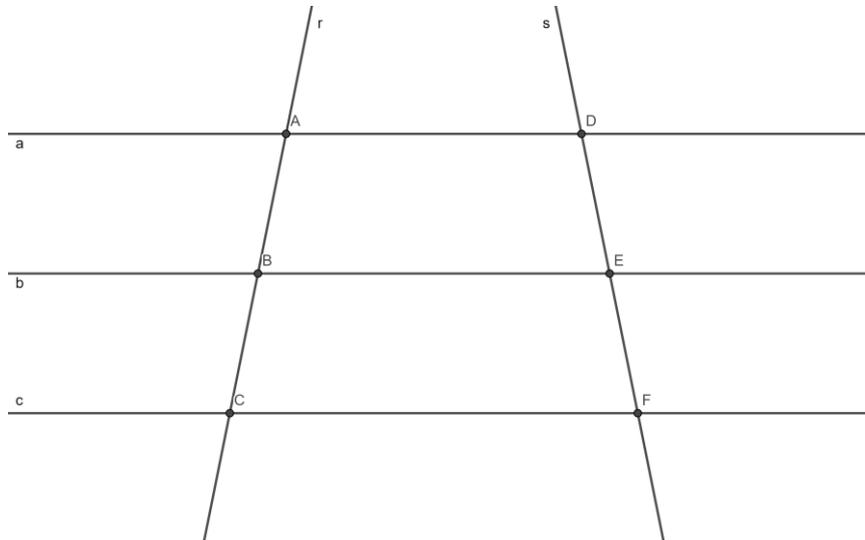
4.7 Teorema de Tales

Tales de Mileto (624 a. C – 558 a. C) foi um filósofo, matemático e astrônomo grego, sendo considerado um dos Setes Sábios da Grécia juntamente com Pítaco de Mitilene, Periandro de Corinto, Sólon de Atenas, Quílon de Esparta, Cleóbulo de Lindos e Bias de Priene. Tales é frequentemente apontado como o primeiro filósofo ocidental e o fundador da escola jônica de filosofia (LUNA, 2013).

Tales é conhecido por suas contribuições em diversas áreas. Na Matemática, ele é creditado por introduzir o conceito de teorema matemático. Ele é famoso pelo Teorema de Tales, que estabelece que, em um triângulo interceptado por retas paralelas, os segmentos de reta formados são proporcionais (REIS, 2014).

Teorema: (Teorema de Tales). Sejam a , b e c três retas paralelas, num mesmo plano, e sejam r , s duas transversais, tais que r intersecta respectivamente a , b e c em A , B e C , e s intersecta respectivamente a , b e c em D , E e F , então:

Figura 66 – Teorema de Tales



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

De acordo com Dante (2018) e Pataro e Balestri (2018), fazendo a demonstração para dois casos possíveis, temos que:

1º caso: Uma transversal divide um feixe de retas paralelo em segmentos congruentes.

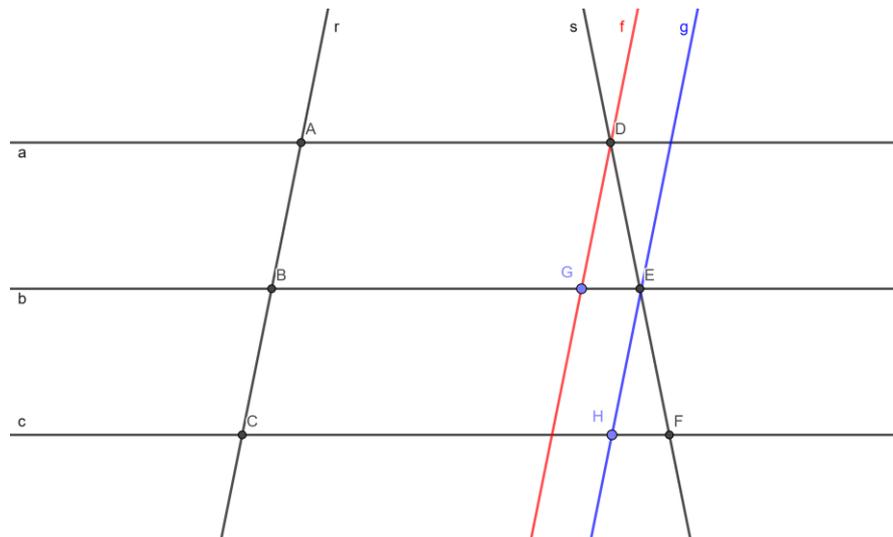
Considere que o feixe de retas formado pelas retas a , b , e c e as retas transversais r e s , a intersecção entre as retas a , b e c com a reta r formam os pontos A , B e C ; já a intersecção das retas a , b e c com a reta s formam os pontos D , E e F , tendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$. Logo, demonstremos que $\overline{DE} = \overline{EF}$.

Ao traçarmos uma reta f paralela à reta r e que passe pelo ponto D , temos que a intersecção dessa reta f com a reta b é o ponto G , da mesma forma, se traçarmos a reta g paralela à reta r e que passe pelo ponto E , temos que a intersecção dessa reta g com a reta c é o ponto H . Desse modo é possível notar que os paralelogramos $ABGD$ e $BCHE$ ficam determinados.

Como $\overline{AB} = \overline{DG}$, $\overline{BC} = \overline{EH}$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$, temos que $\overline{DG} = \overline{EH}$. Logo, pode-se concluir que:

- Os segmentos \overline{DG} e \overline{EH} possuem o mesmo comprimento.
- Os ângulos \widehat{GDE} , \widehat{HEF} , \widehat{GED} e \widehat{HFE} são correspondentes.

Figura 67 – Teorema de Tales com retas transversais paralelas a reta r



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Desse modo, utilizando o caso de congruência de triângulos LAA_o (lado, ângulo e ângulo oposto), os triângulos DEG e EFH são congruentes, sendo assim, $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$ e os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} são proporcionais aos segmentos \overline{DE} e \overline{EF} .

Daí, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = 1$$

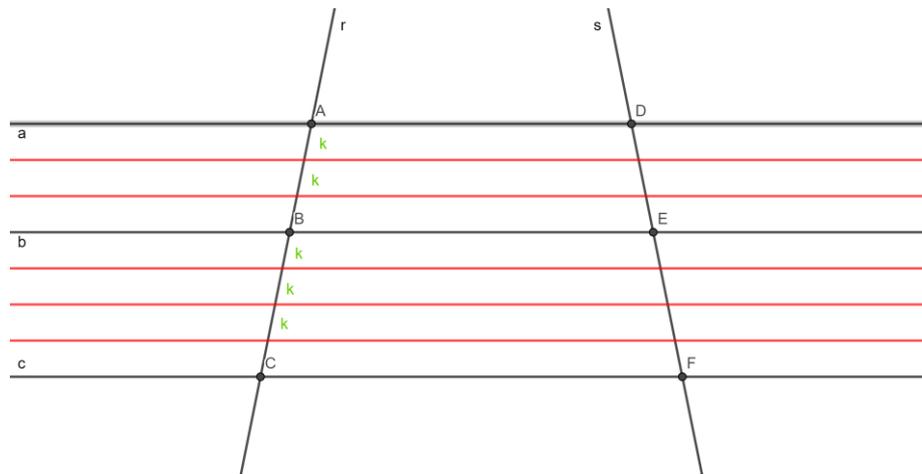
Logo, segundo Dante (p.88, 2018), a propriedade é demonstrada:

Se um feixe de retas paralelas determina segmentos de reta congruentes sobre uma reta transversal, então ele também determina segmentos de reta congruentes sobre qualquer outra reta transversal.

2º caso: Uma transversal divide um feixe de retas paralelo em segmentos comensuráveis de mesmo comprimento.

Considere que o feixe de retas formado pelas retas a , b e c e as retas transversais r e s , a intersecção entre as retas a , b e c com a reta r formam os pontos A , B e C ; já a intersecção das retas a , b e c com a reta s formam os pontos D , E e F . Considere que o segmento \overline{AB} seja dividido em m partes cujo comprimento é k e que o segmento \overline{BC} seja dividido em n partes cujo comprimento é k , com m e n inteiros. Logo, temos que, $\overline{AB} = m \cdot k$ e $\overline{BC} = n \cdot k$.

Figura 68 – Teorema de Tales com retas comensuráveis



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Assim, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k} = \frac{m}{n} \quad (1) \quad e \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k} = \frac{m}{n} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), nota-se que os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} são proporcionais aos segmentos \overline{DE} e \overline{EF} , pois:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

Portanto, segundo Andrade (p.18, 2020), a propriedade é demonstrada:

Se um feixe de retas paralelas intersecta duas transversais quaisquer distintas, então a razão entre os comprimentos dos segmentos obtidos em uma das transversais é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra transversal.

4.8 Teorema de Pitágoras

Pitágoras de Samos (570 a. C – 497 a. C) foi um filósofo e matemático grego que nasceu em Samos, uma ilha do Mar Egeu, por volta de 570 a. C. Ele é amplamente conhecido como o fundador da escola pitagórica, que teve grande influência no desenvolvimento da Matemática e da filosofia na Grécia Antiga (KAMERS, 2008).

Pitágoras e seus seguidores acreditavam que os números eram a essência fundamental do universo e que a realidade poderia ser compreendida por meio de princípios matemáticos. Eles consideravam os números como entidades divinas que revelavam a ordem cósmica e a harmonia subjacente a todas as coisas (BASTIAN, 2000).

Uma das contribuições mais famosas de Pitágoras é o Teorema de Pitágoras, que estabelece que, em um triângulo, o quadrado da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos catetos (os outros dois lados). Esse teorema desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da geometria e teve ampla aplicação em diversas áreas, desde a arquitetura até a física (OLIVEIRA FILHO, 2016).

Além de seus estudos matemáticos, Pitágoras também era conhecido por sua visão mística e espiritual do mundo. Acreditava-se que ele possuía conhecimentos secretos e iniciáticos que eram transmitidos apenas a seus discípulos mais próximos. A escola pitagórica era caracterizada por rituais e cerimônias secretas, bem como por uma série de preceitos morais e éticos, como a crença na transmigração da alma e a prática da abstinência de certos alimentos (SILVA FILHO, 2013).

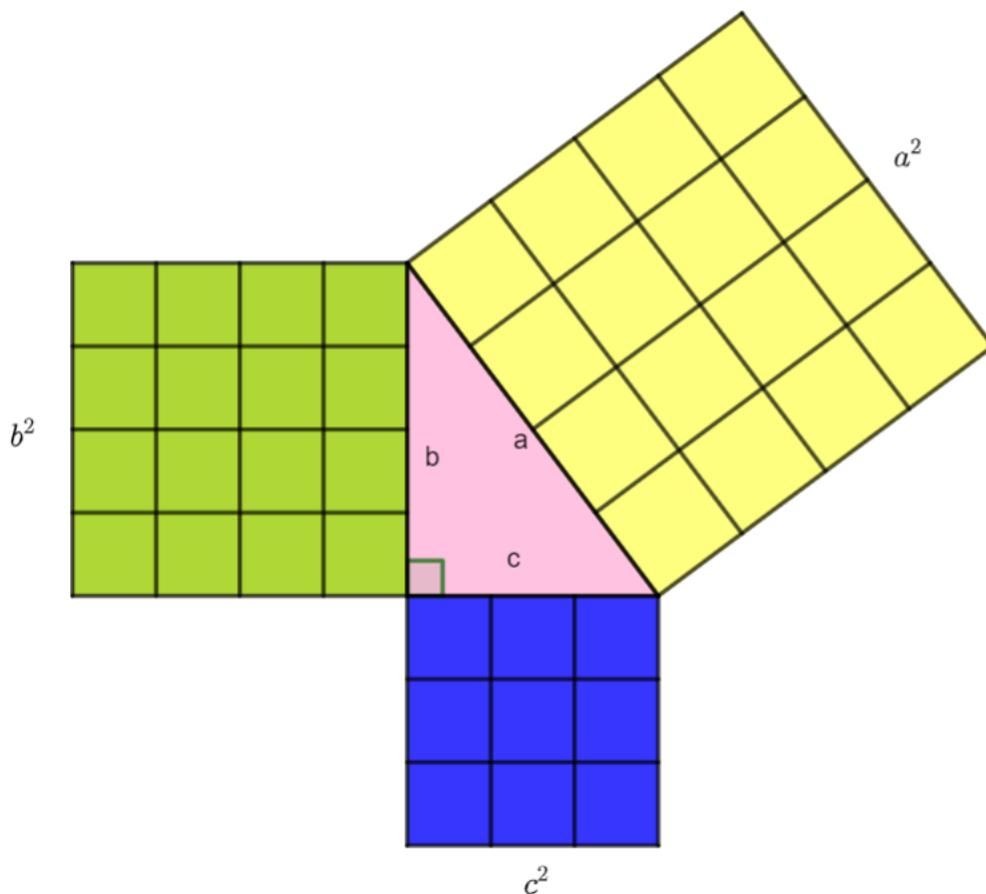
A influência da escola pitagórica se estendeu além da Matemática e do misticismo. Os pitagóricos também fizeram contribuições expressivas em áreas como a música, a astronomia e a política. Acreditavam que a música era um elemento fundamental para a harmonia e o equilíbrio do cosmos, e a relação entre números e coincidências musicais era vista como uma expressão da ordem divina (REALE apud JABLONSKI; BAIER, 2014).

Embora não haja tantos documentos que relatem a vida e a obra de Pitágoras e o que se sabe vem de dos seus discípulos (OLIVEIRA FILHO, 2016). Sua influência perdurou por séculos, influenciando grandes filósofos e matemáticos ao longo da história, e ainda hoje é

lembrado como uma das figuras mais importantes e emblemáticas da Grécia Antiga. Seu legado na Matemática continua a inspirar e fascinar estudiosos até os dias atuais.

“É importante observar que, como nenhum dos escritos originais chegou até os nossos dias, não podemos afirmar, com absoluta certeza, se Pitágoras apresentou ou não uma prova do teorema que leva seu nome. Como a Escola Pitagórica, além de secreta era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas pertenciam a todos, pode ser que algum de seus discípulos tenha demonstrado e tenha dado o crédito ao mestre, conforme as normas da comunidade” (SILVA; FANTI; PEDROSO, p. 24 , 2016).

Figura 69 – Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Há relatos que Pitágoras não foi o primeiro a trabalhar com essa relação entre os lados de um triângulo retângulo. Silva, Fanti e Pedrosa (p. 23, 2016), relatam que “séculos antes da existência de Pitágoras, o teorema já era conhecido por babilônios, egípcios e chineses, que utilizavam o resultado na resolução de problemas”. Mas, segundo Oliveira Filho (2016) a

primeira demonstração foi desenvolvida na escola pitagórica com a comparação de áreas, de acordo com historiadores.

Segundo Eves (1997) *apud* Evangelista (p. 11, 2014):

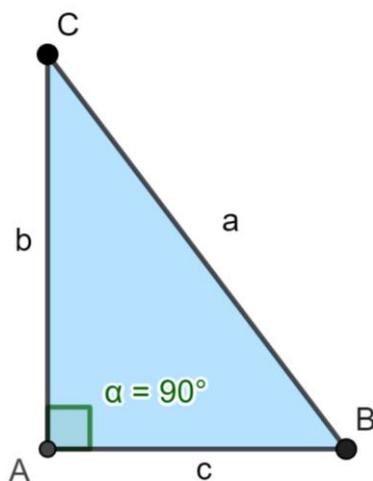
“... não foi Pitágoras quem inventou o teorema, pois “esse já era conhecido pelos babilônicos do tempo de Hamurabi, mais de um milênio antes”, é possível que o teorema leve seu nome por acreditar-se que ele tenha sido o primeiro a dar uma demonstração geral”.

Há inúmeros trabalhos na literatura que descrevem as inúmeras formas de demonstração do Teorema de Pitágoras (SILVA FILHO, 2013; EVANGELISTA, 2014; OLIVEIRA FILHO, 2016; SILVA; FANTI; PEDROSO, 2016; JORGE, 2021) e o que todos tratam em comum é a existência do livro *The Pythagorean Proposition*, escrito pelo matemático estadunidense Elisha Scott Loomis, tendo sua primeira versão lançada em 1927.

Jorge (2021) relata que o livro traz consigo 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras, feito que está registrado no livro dos records como o teorema que possui a maior quantidade de demonstrações conhecidas. Silva, Fanti e Pedroso (2016) falam que o teorema possui mais de 400 demonstrações, sendo algumas delas feitas por grandes personalidades como Bháskara e Leonardo da Vinci, e até por um presidente norte-americano, James Abram Garfield (1831-1881), em 1871.

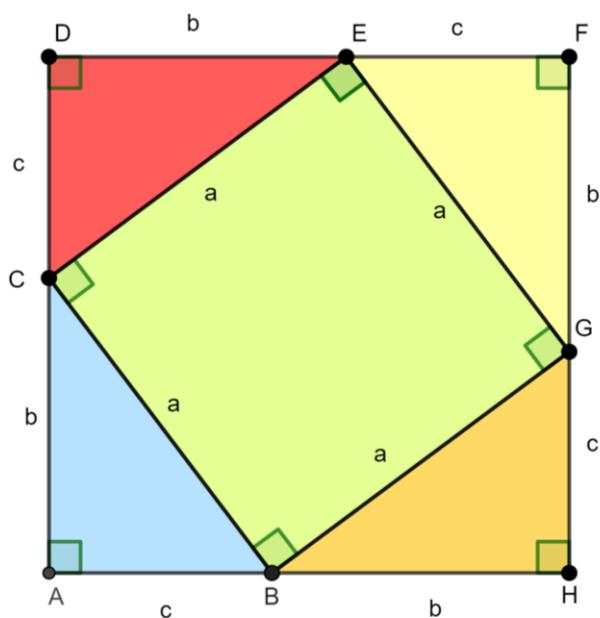
Teorema: (Teorema de Pitágoras). A “soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa” (SILVA; FANTI; PEDROSO, p. 25, 2016), que estabelece a seguinte relação: num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (SILVA FILHO, 2013).

Para Andrini e Vasconcelos (2015), Bianchini (2015) e Souza e Garcia (2016), o Teorema de Pitágoras pode ser demonstrado através da equivalência de áreas. Vamos supor que temos um triângulo ABC, cujo ângulo $\hat{C}AB$ é reto e que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, sendo assim o lado de medida a é o maior lado do triângulo retângulo e é chamado de hipotenusa, e os dois lados, b e c , são chamados de catetos, logo, temos que:

Figura 70 – Teorema de Pitágoras

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Construindo um quadrado de lado $(b + c)$, utilizando o triângulo equilátero acima, unindo os quatro triângulos formados, obtêm-se um quadrado BCEG. A soma das áreas dos quatro triângulos retângulos e do quadrado BCEG é a área do quadrado de lado $(b + c)$.

Figura 71 – Teorema de Pitágoras

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Pode-se chegar ao Teorema de Pitágoras somando a área dos quatros triângulos equiláteros com a área do quadrado BCEG e igualando ao quadrado da medida do lado $(b + c)$ do quadrado ADFG. Dessa forma, temos a seguinte expressão:

$$A_{BCEG} + 4 \cdot A_{\Delta ABC} = A_{ADFG}$$

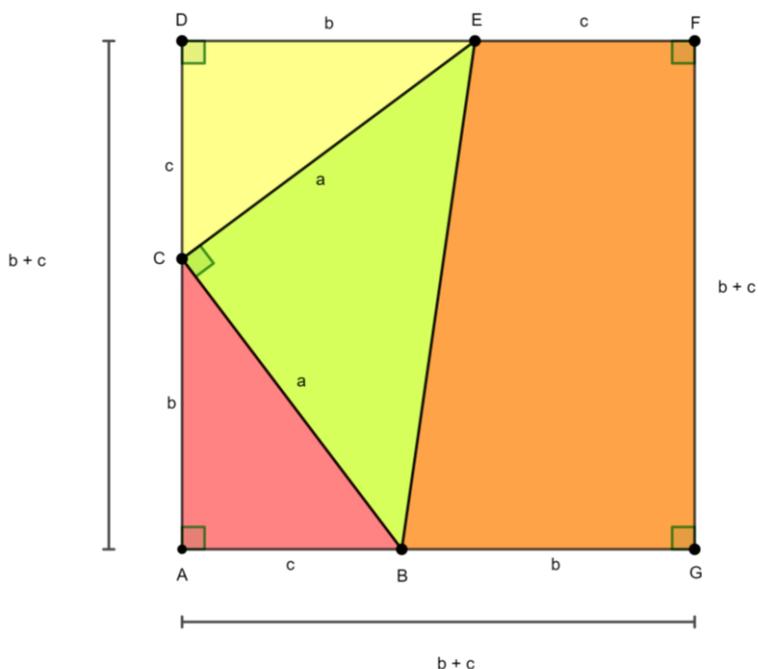
$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = (b + c)^2$$

$$a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Uma segunda forma de demonstrar o Teorema de Pitágoras é utilizando a demonstração proposta por James Abram Garfield, 20º presidente dos Estados Unidos da América. De acordo com Iezzi *et al* (2016), o quadrado ADFG de lado $(b + c)$ é formado por dois trapézios congruentes pelo segmento \overline{BE} : o trapézio ABED e o trapézio BEFG.

Figura 72 – Teorema de Pitágoras por James Abram Garfield



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

O trapézio ABEP pode ser dividido em três triângulos retângulos, onde dois deles são côngruos, para isso deve-se apenas criar um segmento que vai do ponto E até o ponto C e outro segmento que vai do ponto E para o ponto B.

Para calcular a área do trapézio ABED, podemos calcular a área de duas formas distintas:

- A área do trapézio ABED é metade da área do quadrado ADFG. Logo:

$$A_{ABED} = \frac{A_{ADFG}}{2}$$

$$A_{ABED} = \frac{(b+c) \cdot (b+c)}{2}$$

$$\boxed{A_{ABED} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2}} \quad (3)$$

- A área do trapézio ABED é a soma das áreas dos triângulos ABC, CDE e BCE. Logo:

$$A_{ABED} = A_{ABC} + A_{CDE} + A_{BCE}$$

$$A_{ABED} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$\boxed{A_{ABED} = \frac{2bc + a^2}{2}} \quad (4)$$

- Igualando (3) e (4), temos:

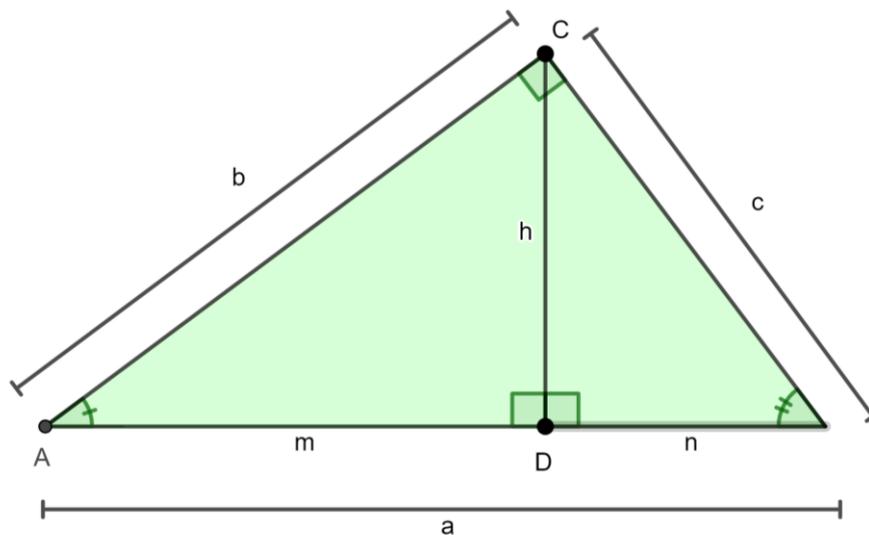
$$A_{ABED} = A_{ABED}$$

$$\frac{2bc + a^2}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Uma terceira, e última demonstração, feita neste trabalho, do Teorema de Pitágoras é feita utilizando as relações métricas no triângulo retângulo. Segundo Pataro e Balestri (2018), um triângulo ABC, cuja medida da hipotenusa é a , a medida dos catetos são b e c , a altura é h e as projeções relativas aos catetos b e c são m e n .

Figura 73 – Triângulo retângulo com as projeções dos catetos



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Utilizando as seguintes relações métricas, $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$, temos que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \text{ ----- fatorando e colocando o } a \text{ em evidência}$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n) \text{ ----- como } m + n = a, \text{ faz-se a substituição}$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Dessa forma, temos que, $a^2 = b^2 + c^2$.

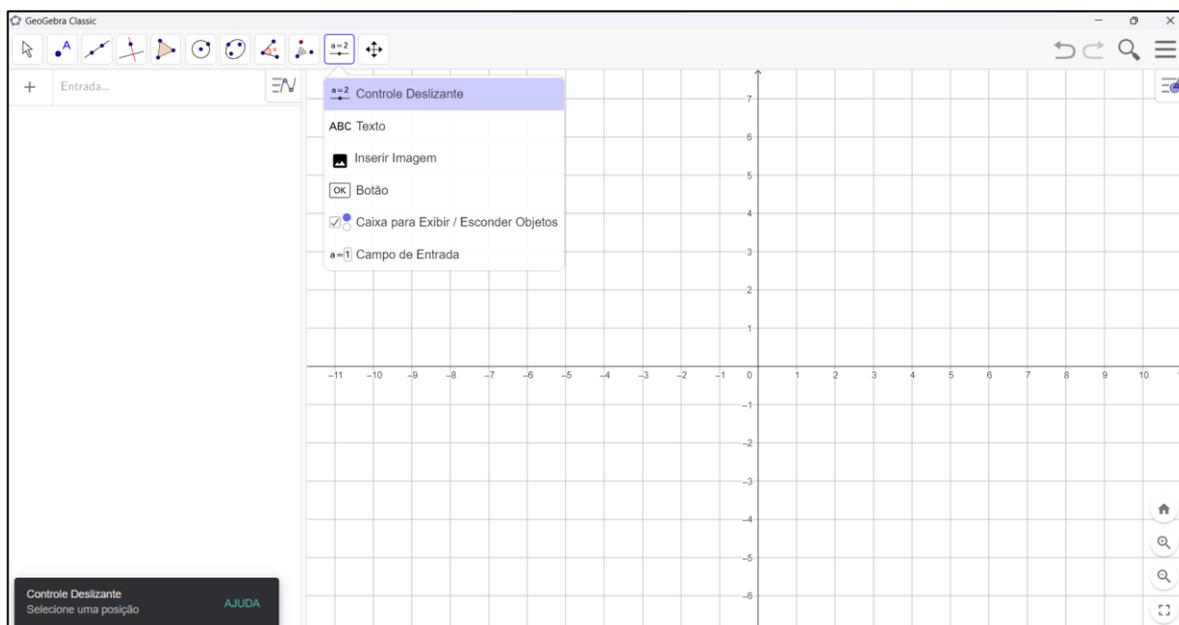
5 UTILIZANDO O *GEOTREBA* NAS DEMONSTRAÇÕES DE TEOREMAS DA GEOMETRIA PLANA

Neste capítulo são apresentadas algumas construções de ângulos, figuras e demonstrações de teoremas discutidos no capítulo anterior.

5.1 Construção de um ângulo utilizando o controle deslizante

Para construir um ângulo a partir do *GeoGebra* utilizando um controle deslizante basta inicialmente abrir o *GeoGebra* e ir na barra de ferramentas, na janela de ferramentas 10 e clicar na opção controle deslizante, conforme a figura 74.

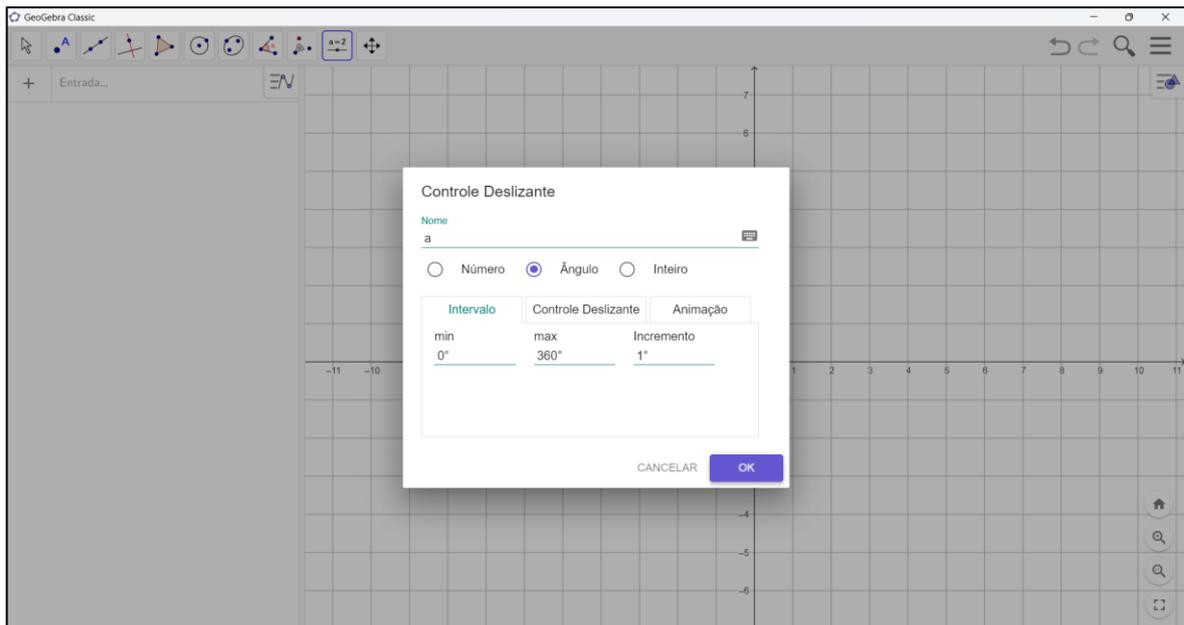
Figura 74 – Controle deslizante



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após clicar no controle deslizante, aparecerá uma caixa de comando onde é possível escolher entre as opções número, ângulo e inteiro. Além disso é possível definir um intervalo para que o controle deslizante funcione, um valor mínimo e um valor máximo, e ainda definir o incremento, ou seja, a variação do controle deslizante. Para construir um ângulo é necessário clicar na opção ângulo, definir o intervalo do ângulo e em quanto ele vai variar, conforme figura 75.

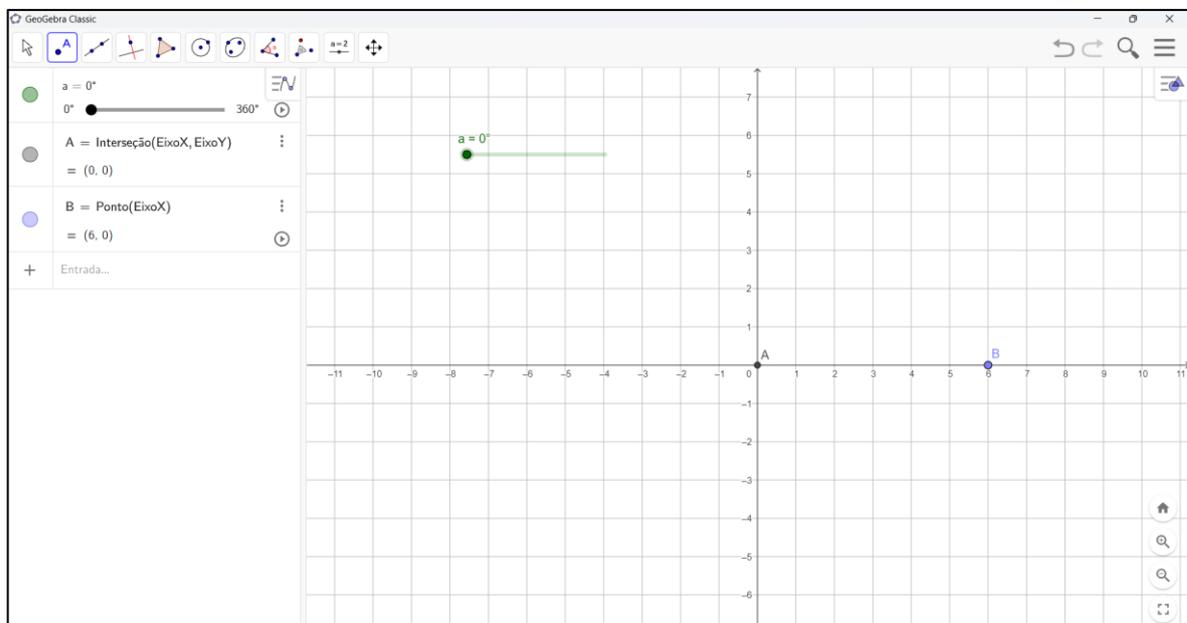
Figura 75 – Caixa de comando controle deslizante



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após a criação do controle deslizante é necessário definir dois pontos que serão, posteriormente, uma das semirretas do ângulo. Na figura 76 é demonstrado o resultado desse procedimento.

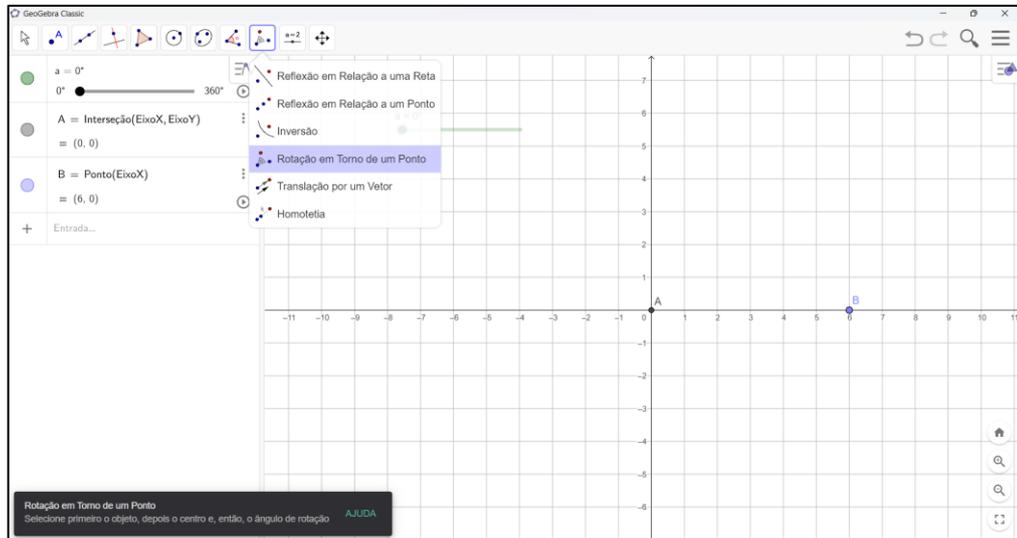
Figura 76 – Definição de pontos para o controle deslizante



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Agora é preciso ir na barra de ferramentas, ir na janela 9 e clicar na ferramenta *rotação em torno de um ponto*, conforme mostra a figura 77. Ao ser feito esse procedimento é necessário clicar nos pontos definidos na figura 76.

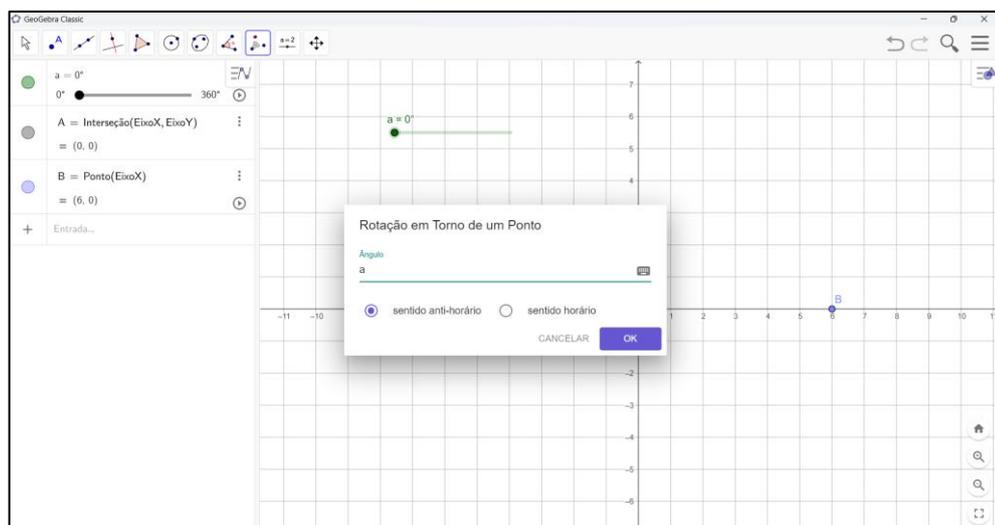
Figura 77 – Rotação em torno de um ponto



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após clicar nos pontos, aparecerá uma caixa de comando da ferramenta de rotação em torno de um ponto e deverá ser definido o sentido de rotação. Na caixa de texto onde está o ângulo, deverá ser substituído o valor do ângulo pela letra correspondente ao controle deslizante criado. A figura 78 ilustra essa situação.

Figura 78 – Caixa de comando da rotação em torno de um ponto

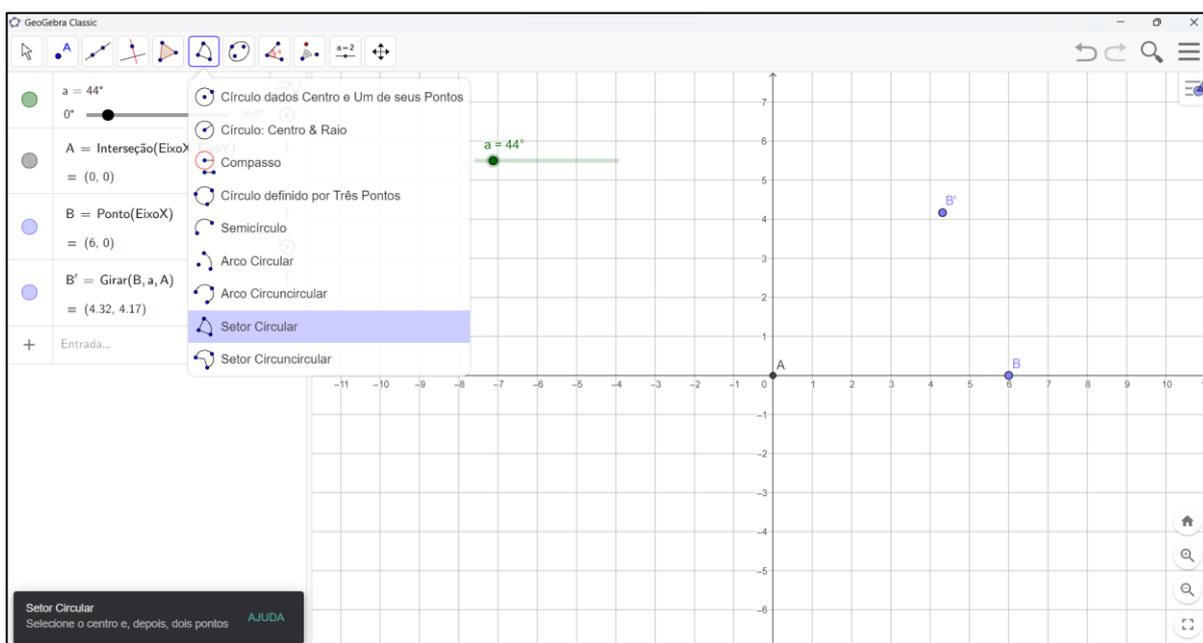


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Ao definir o sentido de rotação do ponto, aparecerá um novo ponto, conforme ilustrado na figura 79. Apenas com esses procedimentos é possível observar que ao mover o controle deslizante, o novo ponto irá se mover.

Para que seja possível observar o crescimento ou a diminuição da abertura do ângulo criado, pode-se ir na barra de ferramentas, na janela 6 e clicar na ferramenta setor circular. Selecionar os pontos na ordem que foram inseridos na janela de visualização.

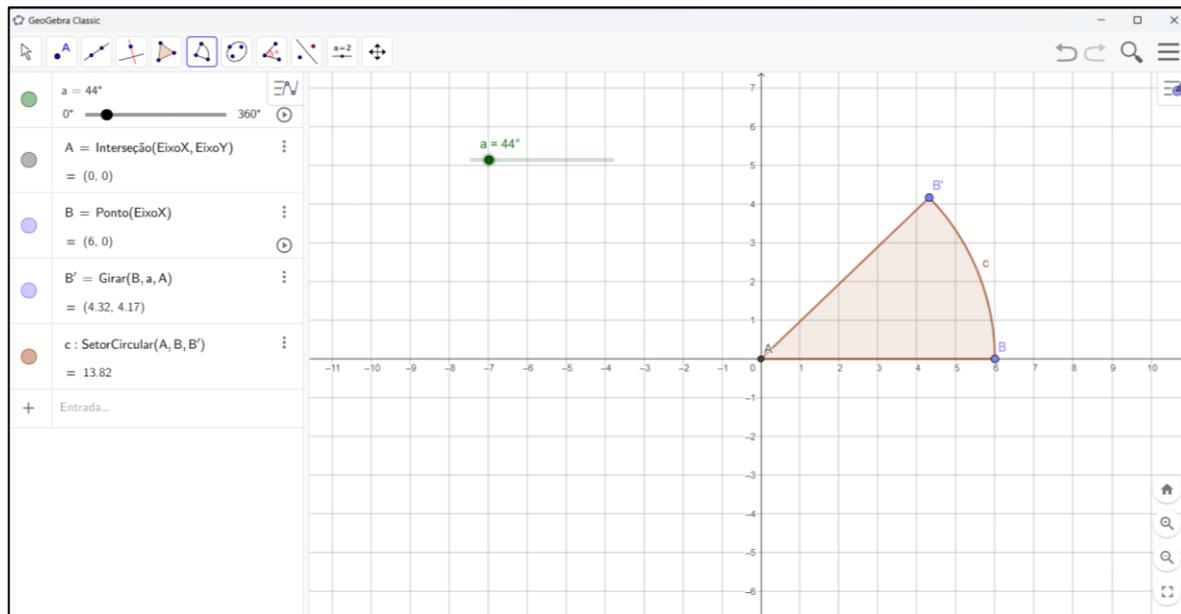
Figura 79 – Setor circular



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após esses passos, o ângulo formado ficará como o da figura 80. Ao mover o controle deslizante o ângulo terá uma abertura maior ou menor, a depender da abertura, podendo variar de 0° a 360° .

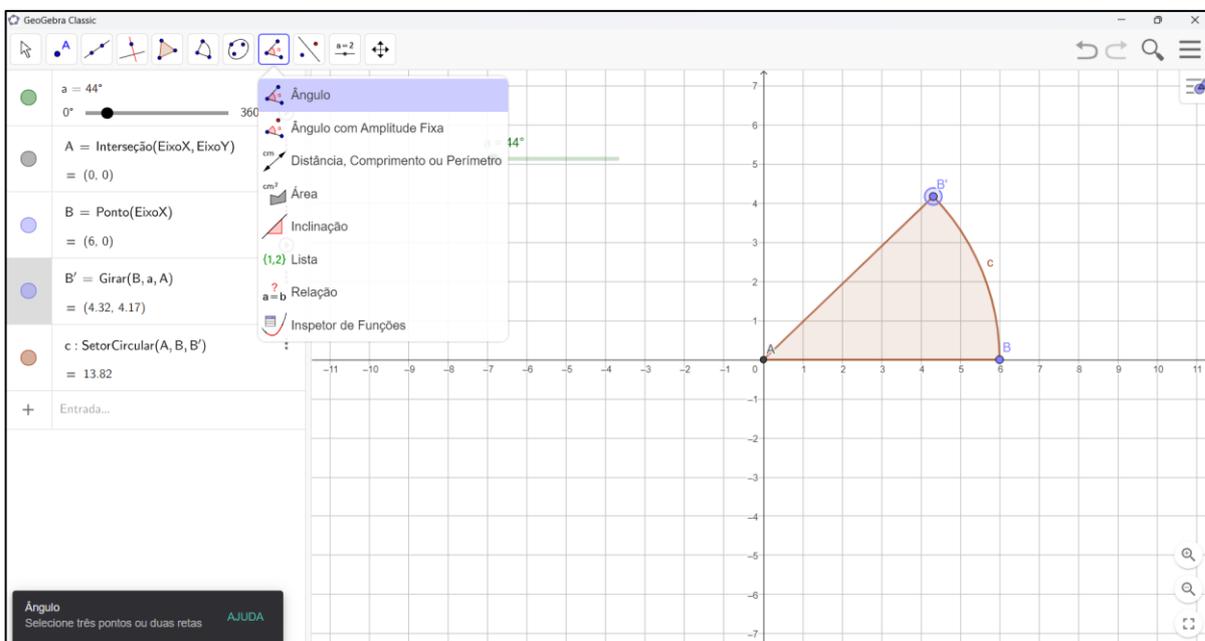
Figura 80 – Construção do setor circular



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

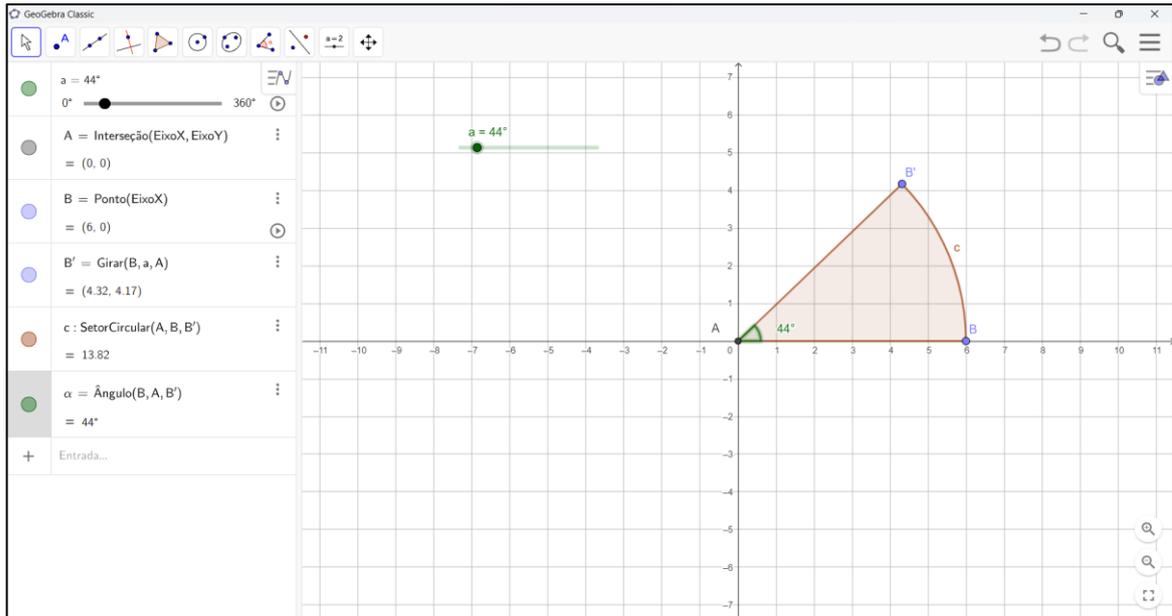
Já a figura 81 ilustra a ferramenta ângulo que se encontra na barra de ferramentas na janela 8. Após selecionar a ferramenta ângulo é preciso selecionar os pontos definidos e o valor do ângulo aparecerá na janela de visualização, conforme figura 82.

Figura 81 – Ferramenta ângulo



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Figura 82 – Valor do ângulo

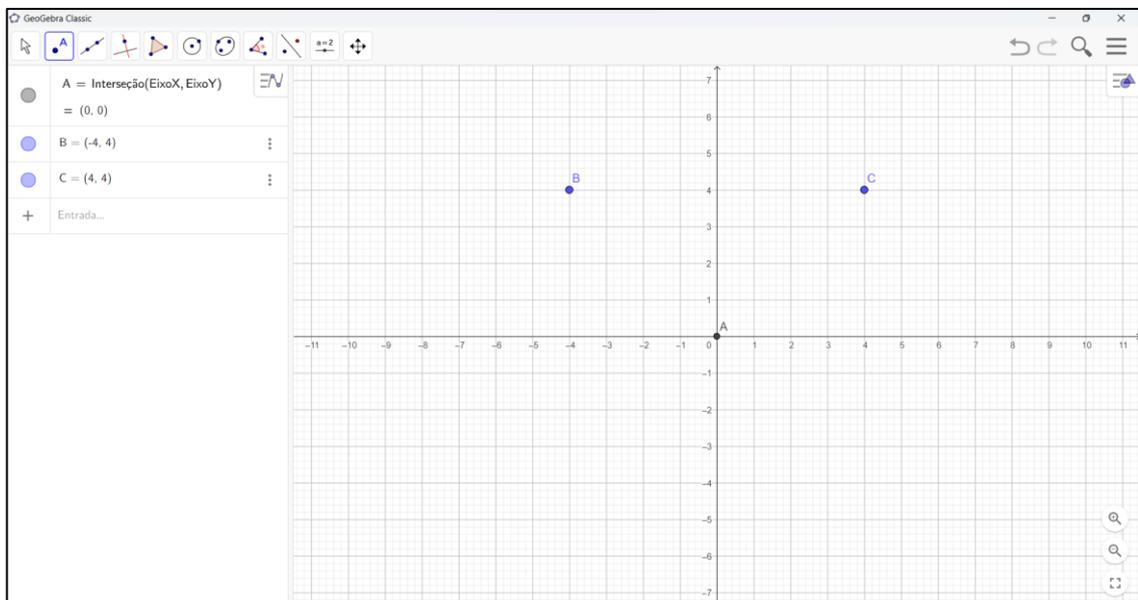


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

5.2 Construção de um ângulo e o uso do transferidor de 180° e 360°

Outra maneira de demonstrar o valor de um ângulo é usando um transferidor no *GeoGebra*. Para isso, inicialmente determina-se três pontos, conforme a figura 83. Os pontos não devem ser colineares.

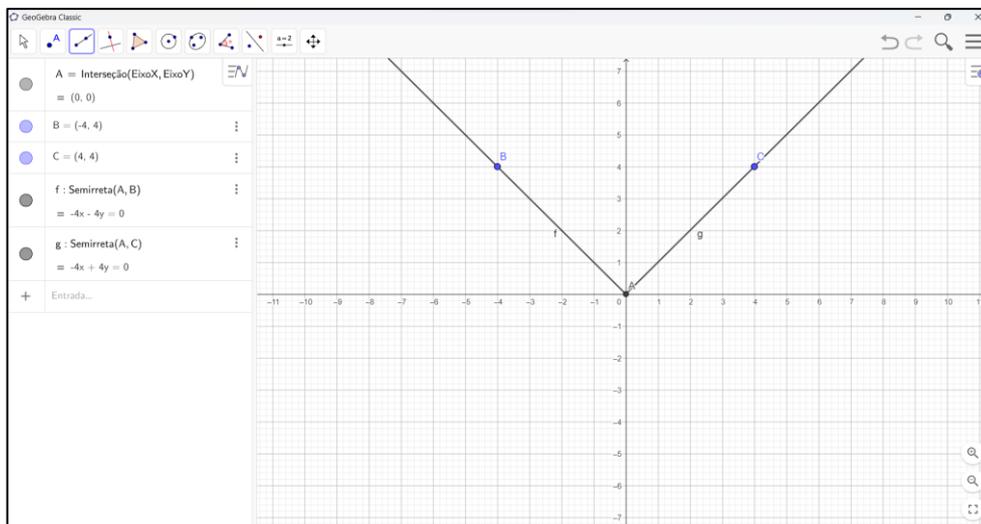
Figura 83 – Pontos não colineares no plano



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após determinar os pontos, deve-se construir duas semirretas que se interceptam em um ponto em comum. Logo, há a definição das semirretas \overline{AB} e \overline{AC} que se interceptam em A, como mostrado na figura 84.

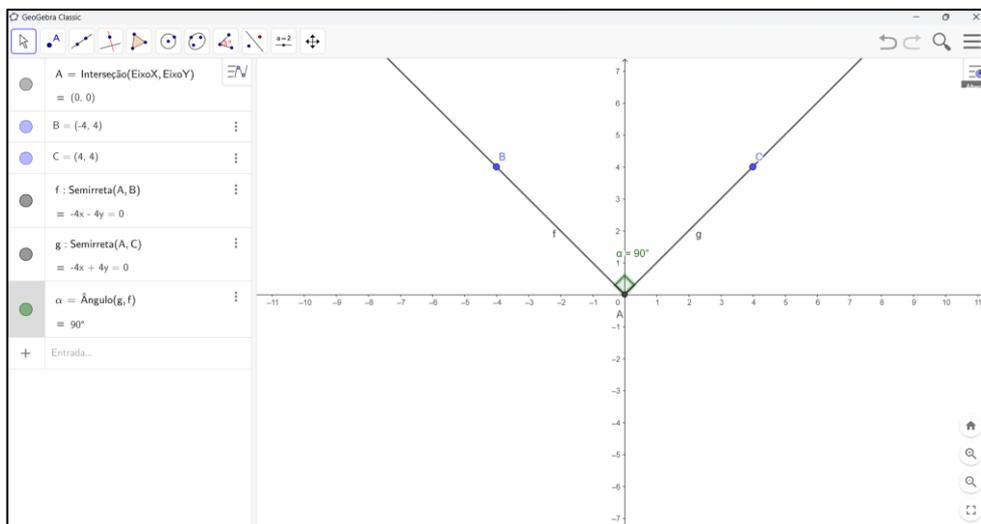
Figura 84 – Semirretas \overline{AB} e \overline{AC}



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após a determinação das semirretas deve-se determinar o ângulo entre elas. Para isso basta ir no menu de ferramentas, janela 8 e clicar na opção ângulo. Após isso é preciso selecionar as retas g e f, figura 85.

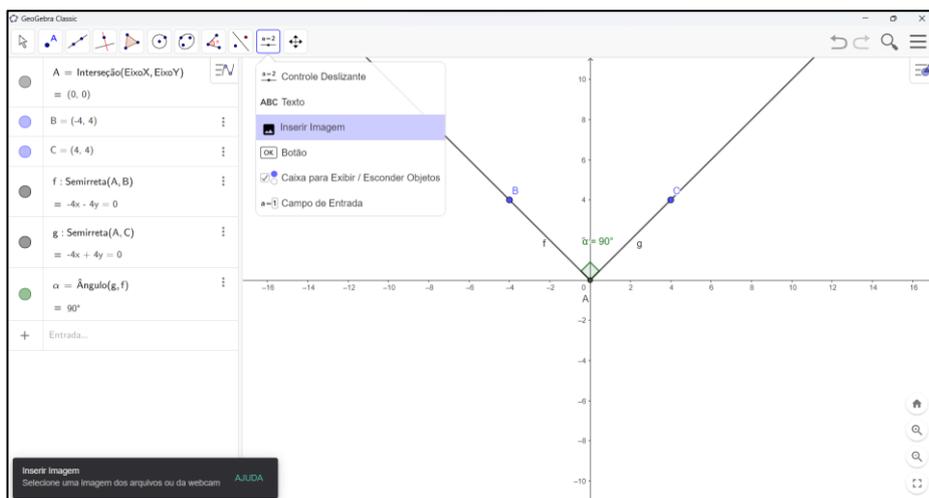
Figura 85 – Ângulo entre a retas f e g



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Para inserir uma imagem é preciso ir no menu ferramentas, janela 10 e clicar na ferramenta de inserir imagem. Na figura 86 é possível observar o passo-a-passo. Ao clicar na ferramenta de inserir imagem é aberta uma caixa de diálogo, onde é possível enviar uma imagem do seu computador.

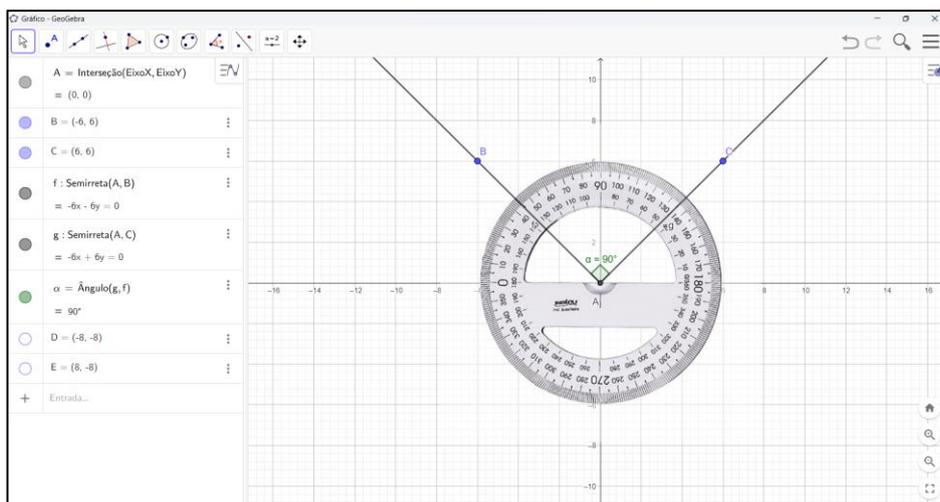
Figura 86 – Inserir uma imagem



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Inicialmente foi escolhida uma imagem de um transferidor de 360°. É preciso alinhar o centro do transferidor com o ponto A. Na figura 87 é feita uma demonstração do alinhamento do centro do transferidor com a interseção das semirretas.

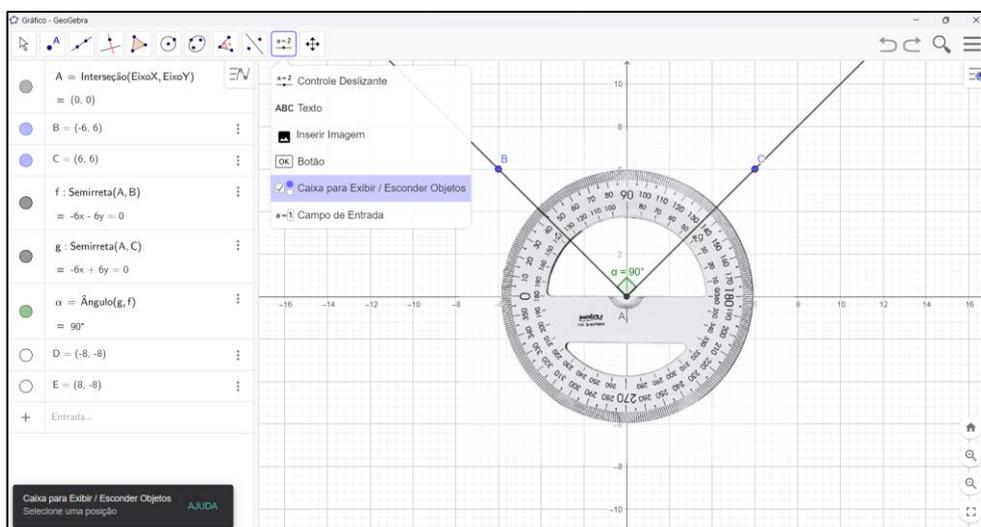
Figura 87 – Transferidor de 360°



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Na figura 88 é demonstrada a opção de inserir uma caixa para exibir ou esconder objetos. Tal ferramenta permite que seja colocados inúmeros elementos na área de visualização e depois sejam ocultados para que somente seja usado ou visualizado um determinado objeto.

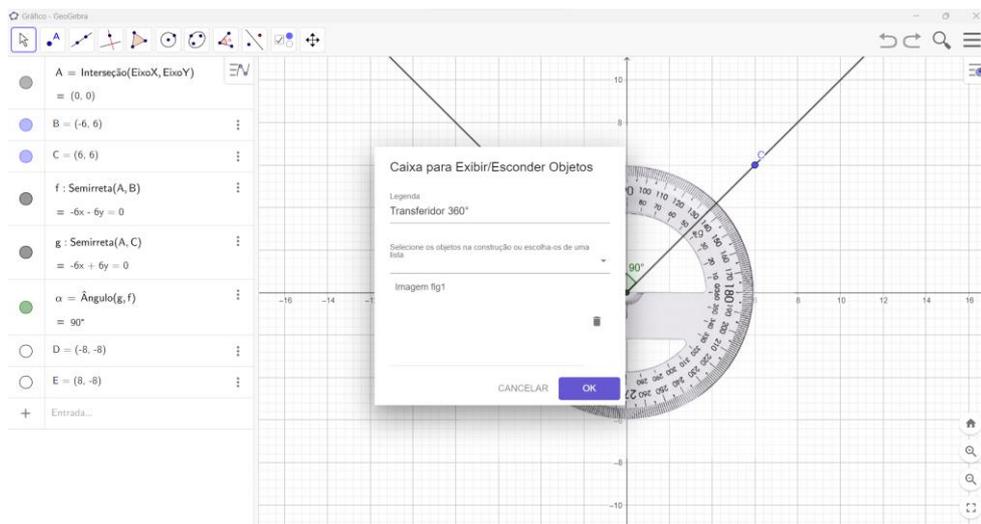
Figura 88 – Caixa para exibir/esconder objetos



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Ao clicar na ferramenta caixa para exibir/esconder objetos é aberta uma caixa de diálogo onde é preciso informar, de acordo com a figura 89, a legenda da caixa e selecionar o objeto que deverá ser ocultado.

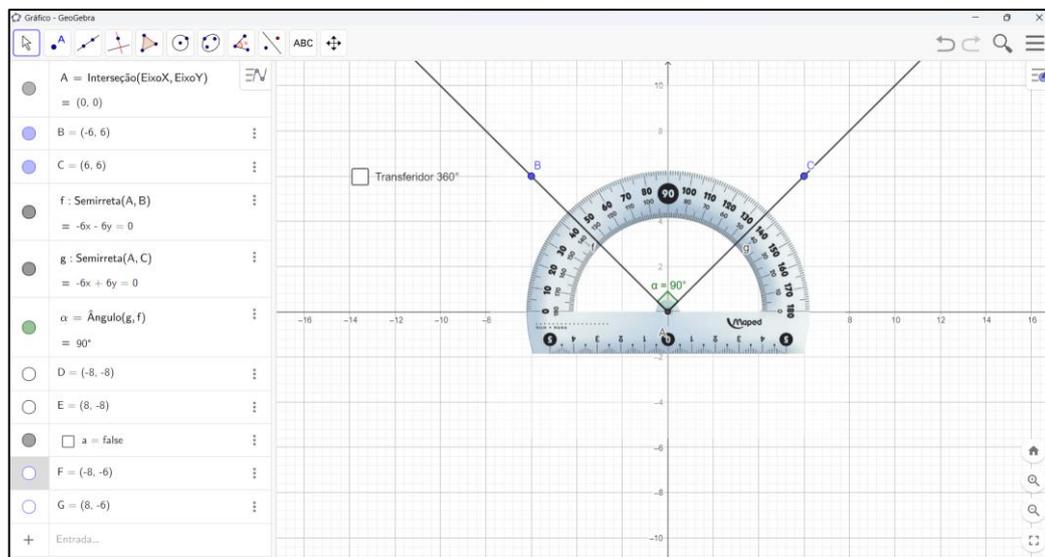
Figura 89 – Legenda da caixa para exibir/esconder objetos



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Ao configurar a ferramenta caixa para exibir/esconder objetos, foi feito a inserção da imagem de um transferidor de 180°, conforme a figura 90.

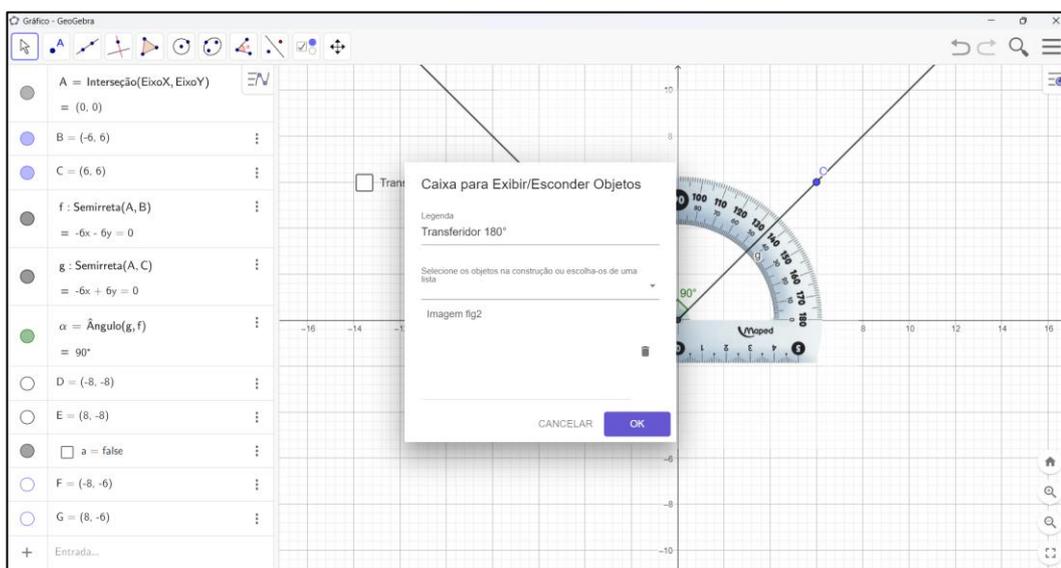
Figura 90 – Transferidor de 180°



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

É criada novamente uma outra caixa para exibir/esconder objetos, agora para o transferidor de 180°. É colocada uma legenda e selecionada uma imagem, conforme figura 91.

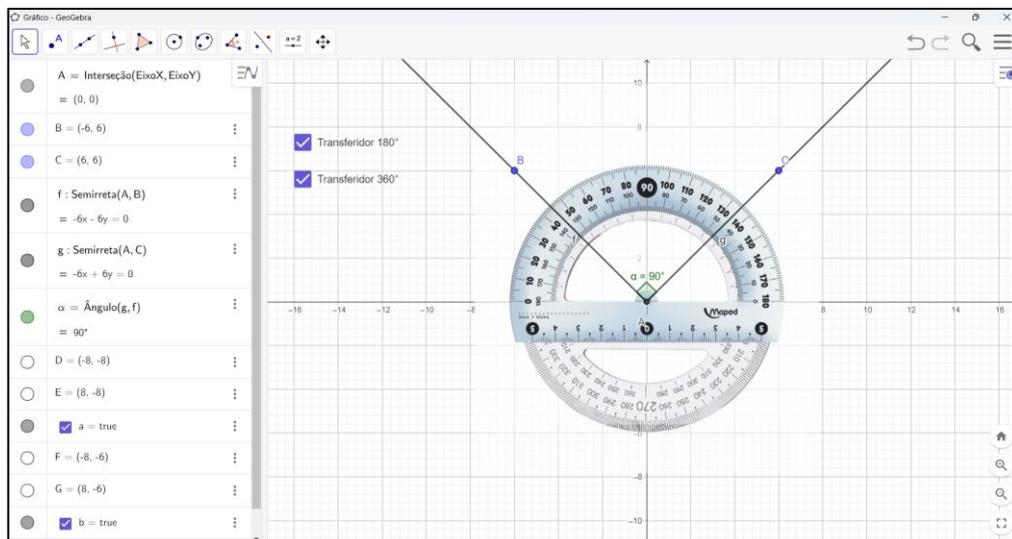
Figura 91 – Caixa para exibir/esconder objetos



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Quando as caixas estão marcadas, de acordo com a figura 92, as duas imagens do transferidor de 180° e 360° aparecem. Ao desmarcar a opção do transferidor de 360°, apenas é visível o transferidor de 180°.

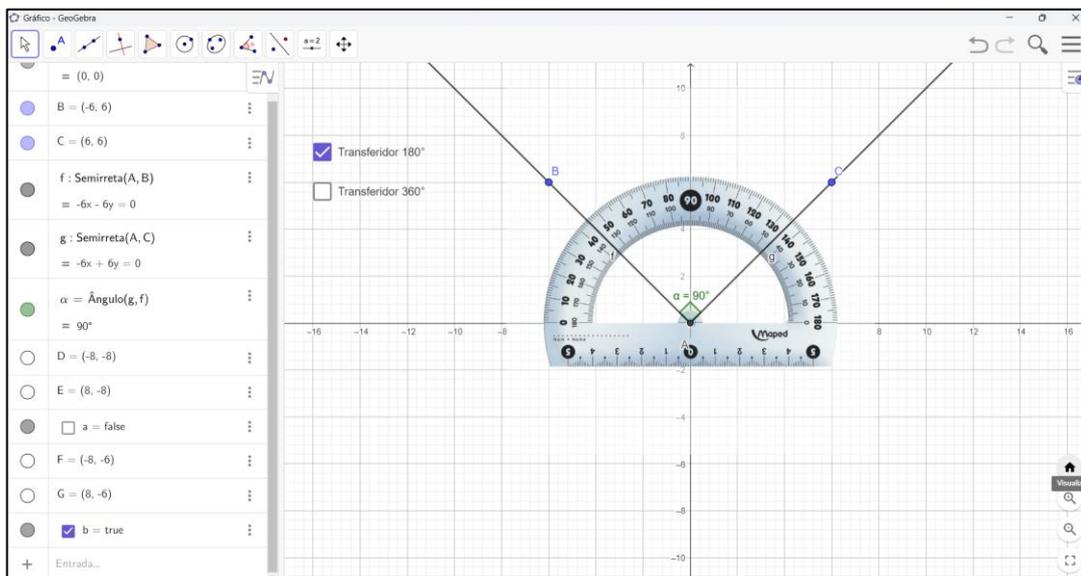
Figura 92 – Exibindo os dois transferidores



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Na figura 93 é possível observar apenas o transferirador de 180°, pois a caixa de exibição do transferirador de 360° está desmarcada.

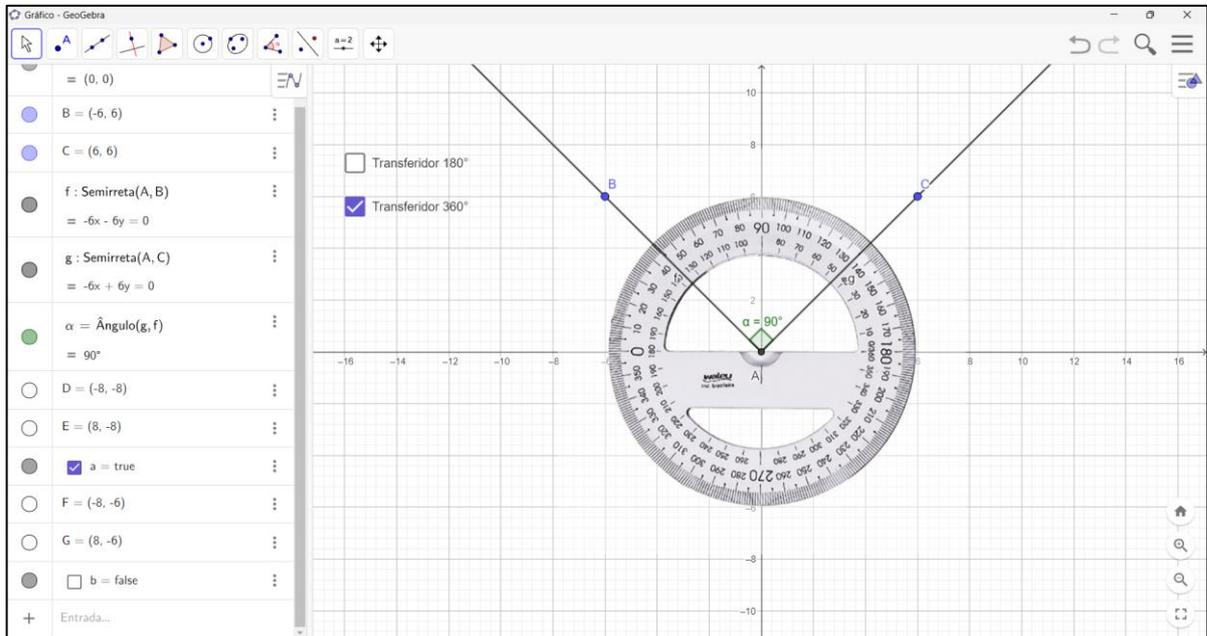
Figura 93 – Exibindo transferirador de 180°



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Ao desmarcar a caixa do transferidor de 180° e marcar a caixa do transferidor de 360° é exibido apenas o transferidor de 360° , conforme a figura 94.

Figura 94 – Exibindo transferidor de 360°



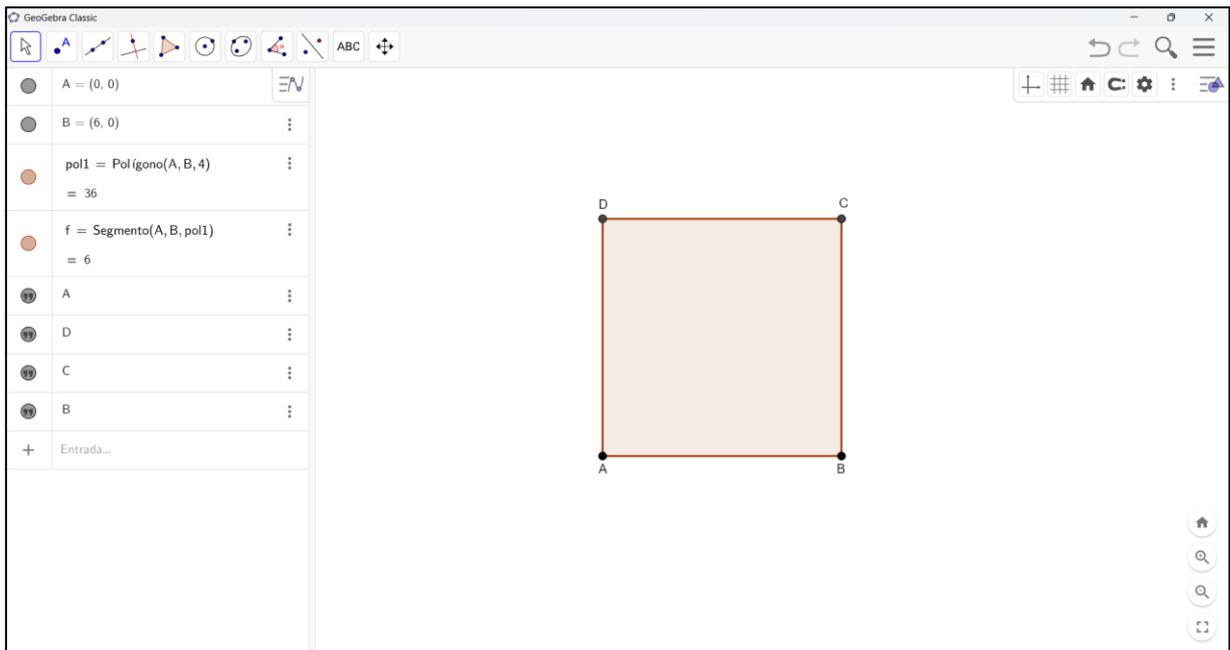
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

5.3 Demonstração do Teorema de Pitágoras a partir de um quadrado

O Teorema de Pitágoras pode ser enunciado como sendo a soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa” (SILVA; FANTI; PEDROSO, 2016), que estabelece a seguinte relação: num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados da medida dos catetos (SILVA FILHO, 2013).

Para demonstrar o Teorema de Pitágoras a partir de um quadrado utilizando o *GeoGebra*, vamos inicialmente definir dois pontos A e B, depois através da ferramenta polígono regular determinar a quantidade de vértices do polígono. A figura 95 ilustra a construção de um quadrado.

Figura 95 – Construção de um quadrado



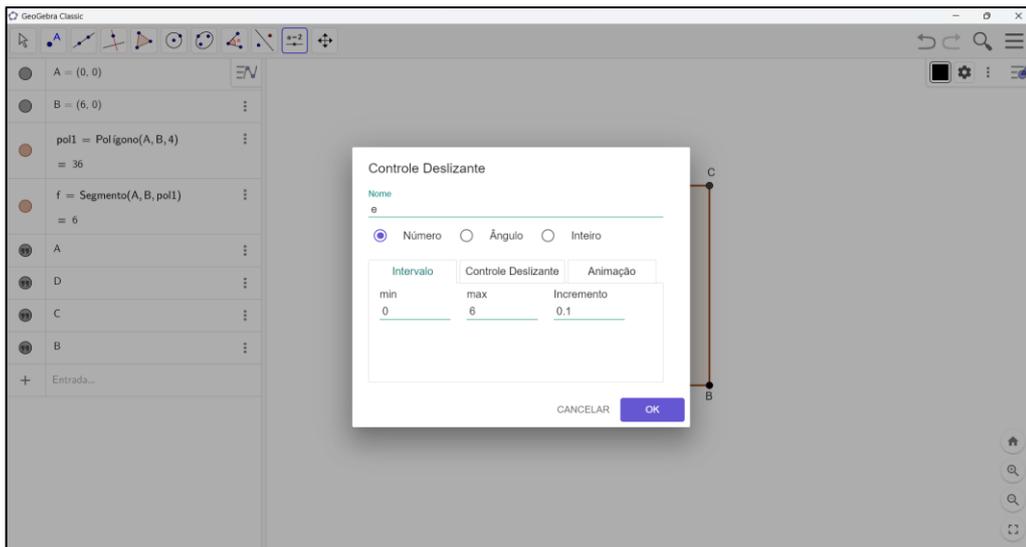
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Para que seja possível demonstrar o Teorema de Pitágoras vamos construir outro quadrado cujos vértices estarão sob os lados do primeiro quadrado. Para isso é preciso criar um controle deslizante para que os vértices desse novo quadrado percorram os lados do primeiro quadrado.

Anteriormente neste trabalho, foi demonstrado como inserir um controle deslizante e na figura 96 é demonstrada a configuração desse controle. Inicialmente, dar-se o nome ao controle deslizante e associa-se ele as coordenadas dos vértices do novo quadrado.

Dado o ponto $A=(0,0)$ e o $B=(6,0)$, os novos vértices em função do controle deslizantes serão $E=(e,0)$ e $F=(6,e)$, pois quando o controle deslizante for acionado o ponto E se deslocará no segmento \overline{AB} e o ponto F se deslocará no segmento \overline{BC} . Com a variação do controle deslizante cada lado do quadrado inicial é dividido em dois segmentos.

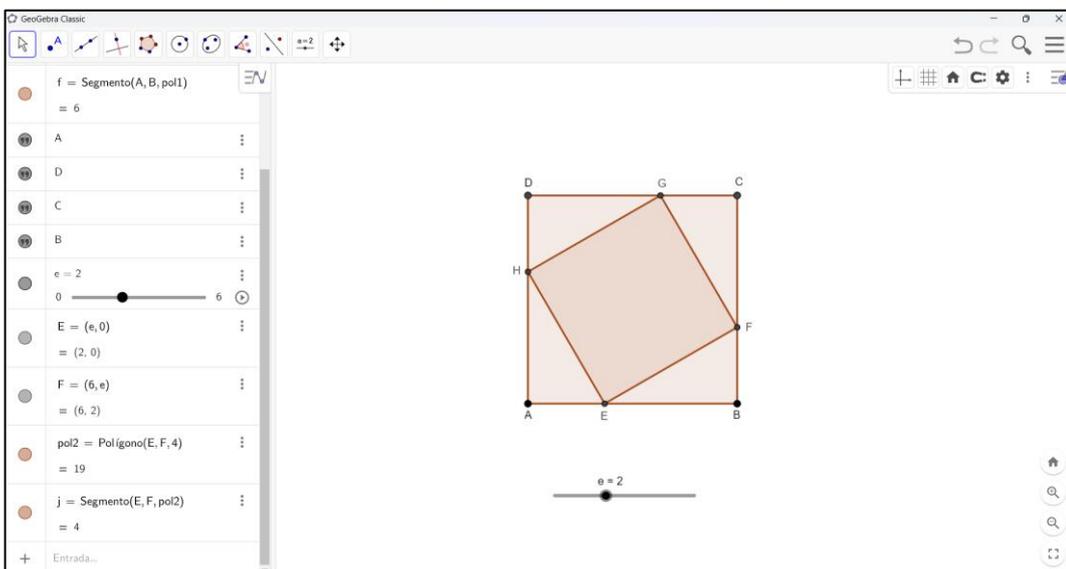
Figura 96 – Controle deslizante



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após a configuração do controle deslizante e a associação dele com os vértices do nome quadrado, é preciso construir esse novo polígono, conforme figura 97. O passo a passo da construção do novo quadrilátero é idêntico ao que foi feito inicialmente. Basta selecionar a ferramenta polígono regular, depois selecionar os vértices E e F e indicar a quantidade de vértices desse novo polígono. A figura 97 caracteriza o posicionamento dos quadrados quando o controle deslizante é igual a 2. Neste caso, o ponto E dista em duas unidades do ponto A e quatro unidades do ponto B.

Figura 97 – Quadrado inscrito num quadrado



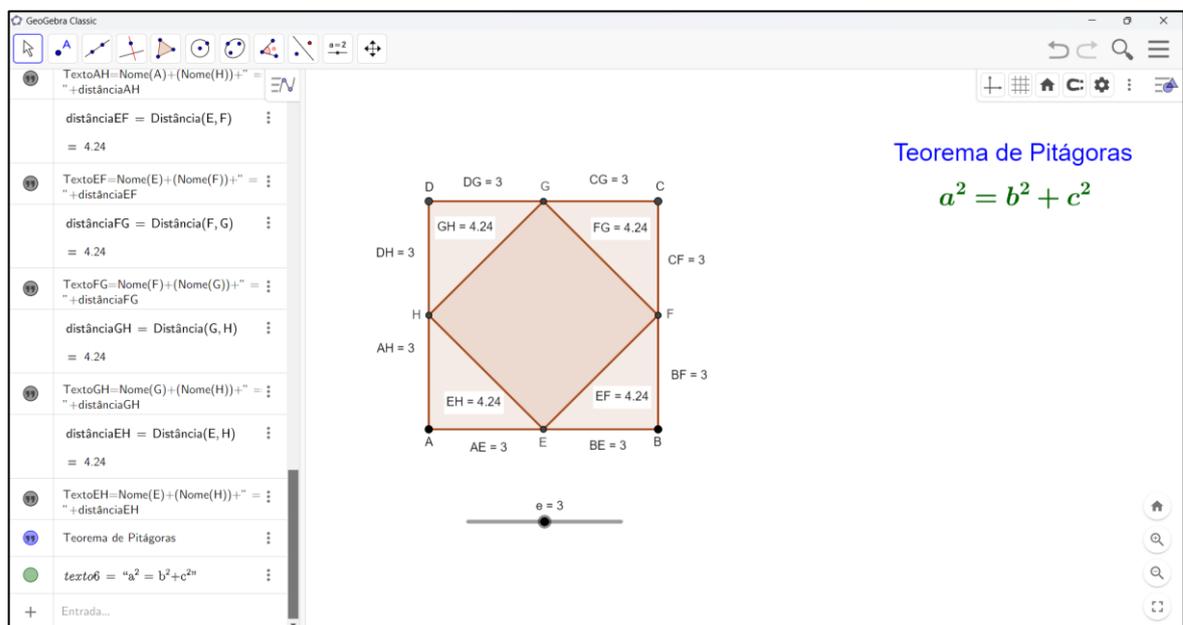
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Feita a construção dos dois quadrados e observando o funcionamento do controle deslizante, vamos determinar a medida de cada segmento formado. É possível observar que ao construir o novo quadrado, formam-se quatro triângulos retângulos, onde o lado desse novo quadrilátero é a hipotenusa do triângulo retângulo.

Para determinar a medida dos segmentos é preciso ir na barra de ferramentas, janela de ferramentas 8 e clicar na ferramenta distância, comprimento ou perímetro e depois selecionar o segmento desejado.

Ao determinar o valor de cada segmento dos quadrados, vamos em seguida escrever o Teorema de Pitágoras através de um texto. A figura 98 ilustra os procedimentos feitos anteriormente.

Figura 98 – Medidas dos segmentos dos quadrados



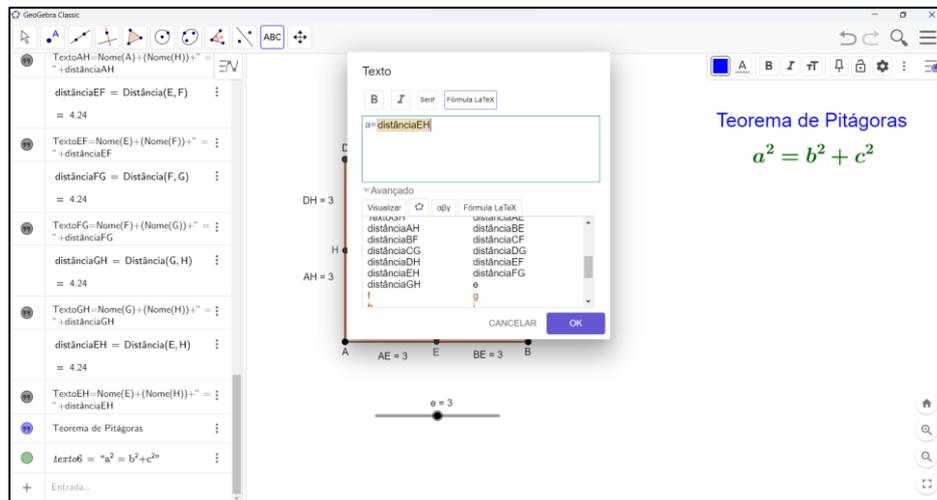
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Uma funcionalidade bastante interessante do *GeoGebra* é o uso do texto dinâmico que através do uso do controle deslizante permite que haja uma variação dos valores e automaticamente uma visualização dessa variação.

Para criar um texto dinâmico é preciso seguir os mesmos passos que para criar um texto normal, mas na caixa de diálogo é preciso selecionar o ícone do *GeoGebra*, de acordo com a figura 99 e determinar as variáveis do Teorema de Pitágoras.

Determinado o valor da hipotenusa do triângulo retângulo, basta apenas digitar a variável a e igualar ela ao segmento que o representa, dessa forma quando o segmento \overline{EH} mudar o valor de a mudará também, pois estão relacionados. Fazendo isso para os valores dos catetos, b e c , temos as variáveis necessárias para resolver o teorema.

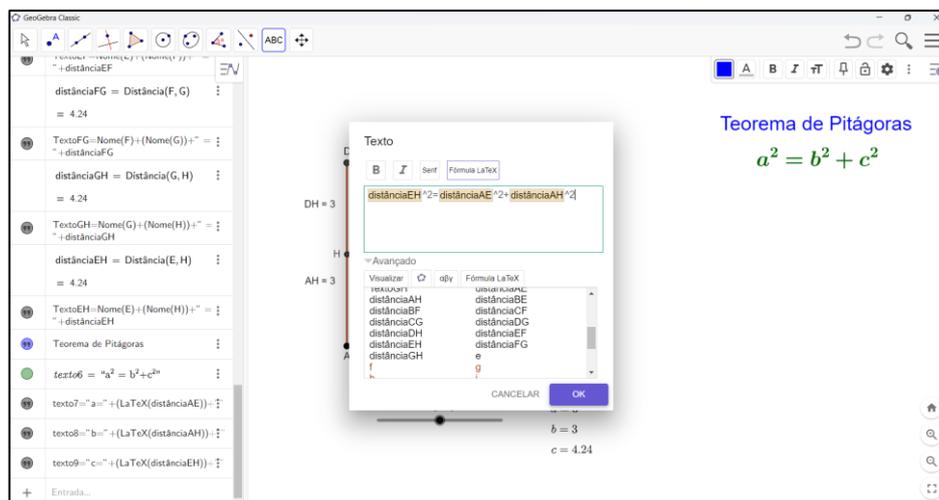
Figura 99 – Valores da hipotenusa e dos catetos



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após a determinação dos valores dos catetos e da hipotenusa, faz-se o mesmo processo de criação do texto dinâmico para o Teorema de Pitágoras. Como a hipotenusa é o segmento \overline{EH} e os catetos são os segmentos \overline{AE} e \overline{AH} , respectivamente, basta apenas elevá-los ao quadrado, conforme a figura 100.

Figura 100 – Texto dinâmico com os valores da hipotenusa e dos catetos



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Ao criar o texto dinâmico para as variáveis do Teorema de Pitágoras, automaticamente ele é preenchido com os valores das medidas das variáveis e podemos mudar elas através do controle deslizante.

Para que o resultado do quadrado da hipotenusa e dos catetos apareça é preciso criar uma nova variável que relaciona o valor da potência. Logo, dizemos que $r = (\overline{EH})^2$, $s = (\overline{AE})^2$ e $t = (\overline{AH})^2$ e usando o texto dinâmico, monta-se a equação utilizando as variáveis r, s e t , conforme a figura 101.

Figura 101 – Equação utilizando texto dinâmico

The screenshot shows the GeoGebra Classic interface. On the left, the algebra view lists several dynamic text objects:

- TextoEH = Nome(E) + (Nome(H)) + " = " + distânciaEH
- Teorema de Pitágoras
- texto6 = "a² = b² + c²"
- texto7 = "a = " + (LaTeX(distânciaEH))
- texto8 = "b = " + (LaTeX(distânciaAE))
- texto9 = "c = " + (LaTeX(distânciaAH))
- texto10 = "" + (LaTeX(distânciaEH))^2 + "" + (LaTeX(distânciaAE))^2 + "" + (LaTeX(distânciaAH))^2 + ""
- r = EH² = 18
- s = AE² = 9
- t = AH² = 9

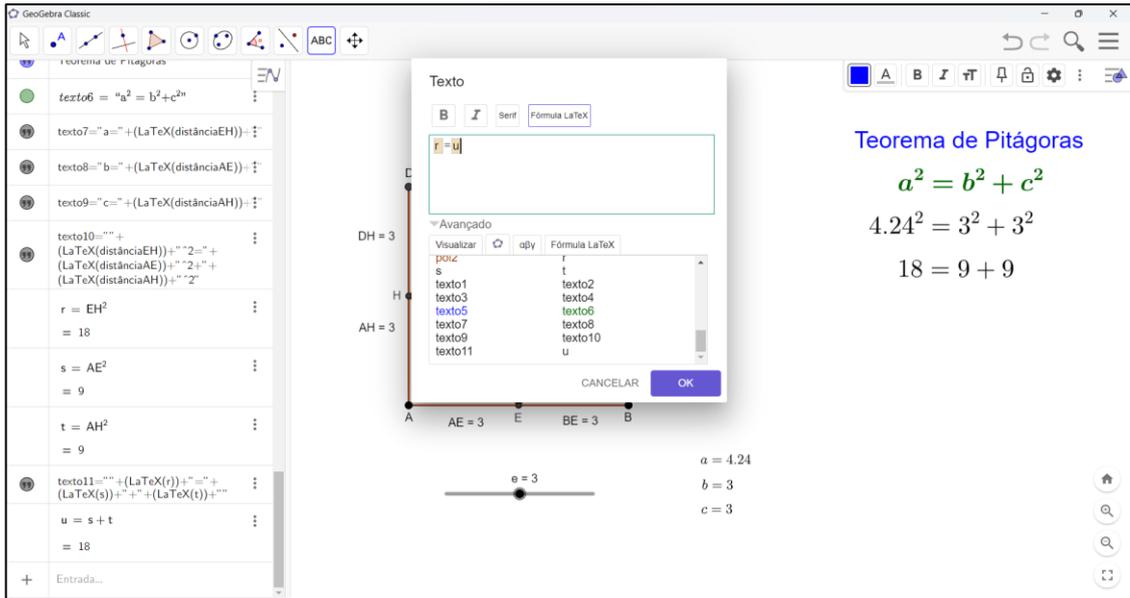
 The main workspace shows a right-angled triangle with vertices A, B, and C. The altitude from C to AB is EH. The hypotenuse is AB, and the legs are AC and BC. The altitude EH is 3. The segments AE and BE are both 3. The hypotenuse AB is 4.24. The equation $a^2 = b^2 + c^2$ is displayed in green, with the numerical version $4.24^2 = 3^2 + 3^2$ below it. A dynamic text editor is open in the center, showing the equation $r = s + t$. The editor has a toolbar with bold, italic, serif, and LaTeX formula options. The advanced options are also visible, showing a list of objects including pol1, r, t, and various text objects.

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após a criação da equação usando as variáveis r, s e t , é preciso criar outra variável que relaciona a soma do quadrado dos catetos \overline{AE} e \overline{AH} , chamando de u essa nova variável, temos então que $u = s + t$.

Dessa forma, o Teorema de Pitágoras pode ser escrito como $r = u$, pois u é a soma dos quadrados dos catetos, conforme ilustrado na figura 102.

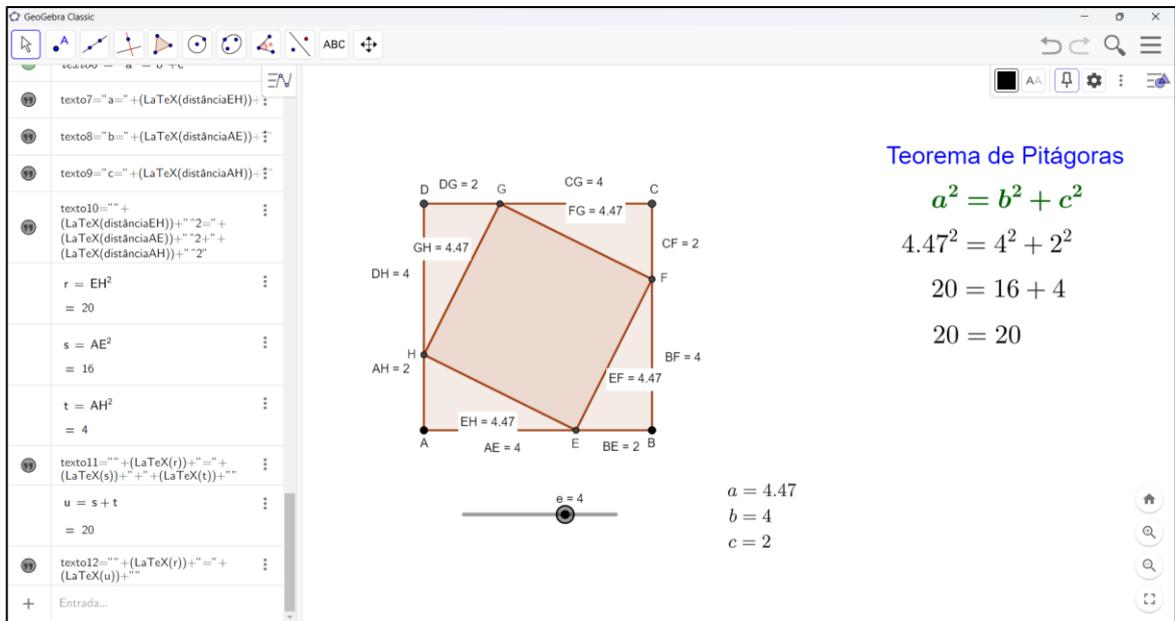
Figura 102 – Soma dos quadrados dos catetos



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Por fim, temos a figura 103 que ilustra o Teorema de Pitágoras quando o controle deslizante for 4, a hipotenusa terá o valor de 4,47, os catetos b e c terão, respectivamente, os valores de 4 e 2. Sendo assim, substituindo esses valores no Teorema de Pitágoras, provamos que a igualdade é válida.

Figura 103 – Prova do Teorema de Pitágoras

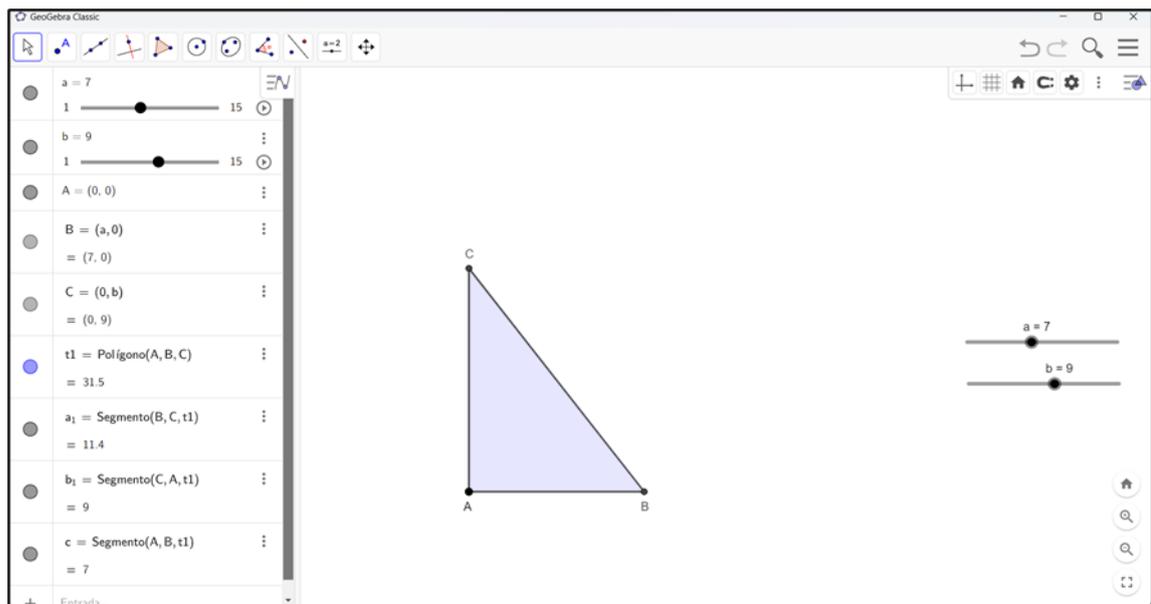


Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

5.4 Uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando áreas

Outra forma de provar o Teorema de Pitágoras é através da noção de área formando quadrados para cada lado do triângulo retângulo. A figura 104 mostra um triângulo equilátero ABC, onde o ângulo reto está no vértice A e com o uso de controles deslizantes a base e altura podem variar.

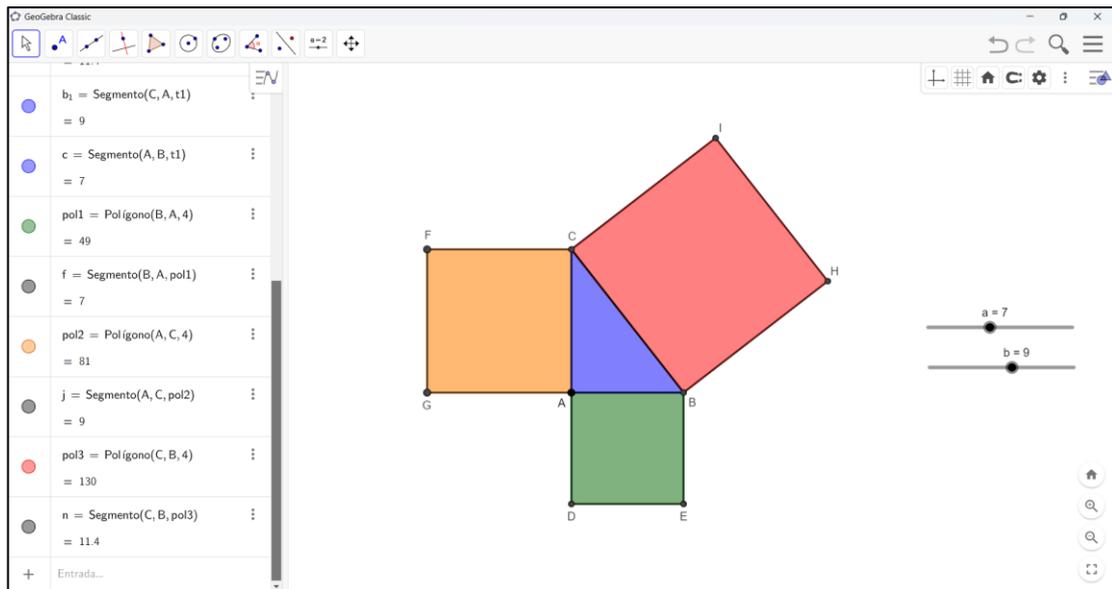
Figura 104 – Triângulo retângulo



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Ao construir o triângulo retângulo acima utilizando os controles deslizantes, deve-se construir quadrado para cada lado do triângulo, conforme mostra a figura 105. O passo a passo da construção do controle deslizante e dos polígonos foi mostrado anteriormente. Ao construir cada um dos quadrados de acordo com a medida dos lados do triângulo retângulo, percebe-se que a área de cada um deles é dada em função dos lados do triângulo.

Figura 105 – Quadrados formados por um triângulo retângulo

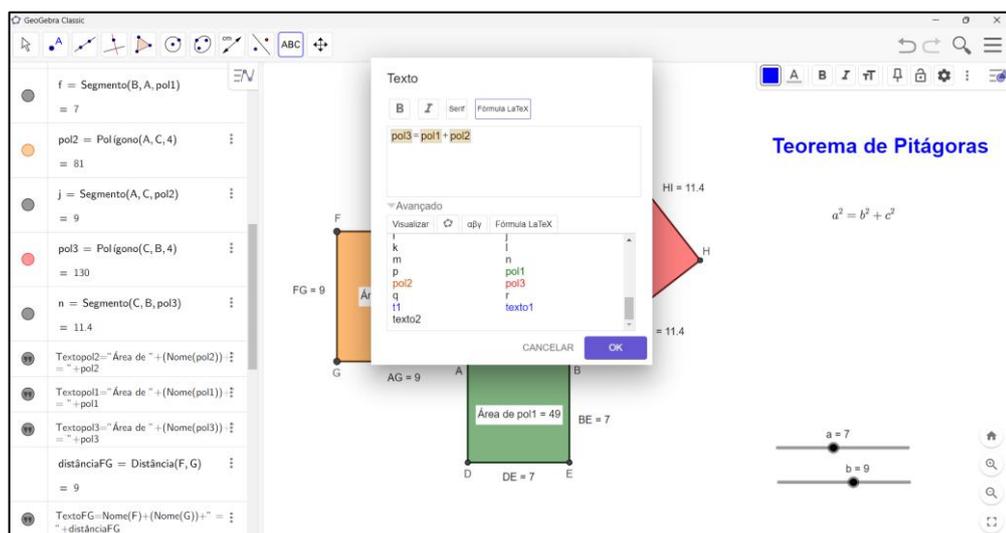


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Então, podemos determinar a medida da área de cada um desses quadrados. Para determinar a área do polígono basta ir no menu de ferramentas, janela de ferramentas 8 e clicar na ferramenta área. Ao clicar nessa ferramenta basta clicar no polígono que deseja obter a área.

Após esse procedimento, vamos inserir um texto dinâmico para mostrar que a soma das áreas dos quadrados menores é igual a área do quadrado maior. Ao selecionar a ferramenta de texto, deve-se ir no ícone do *GeoGebra* e escolher o nome das figuras, de acordo com a figura 106.

Figura 106 – Texto dinâmico Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

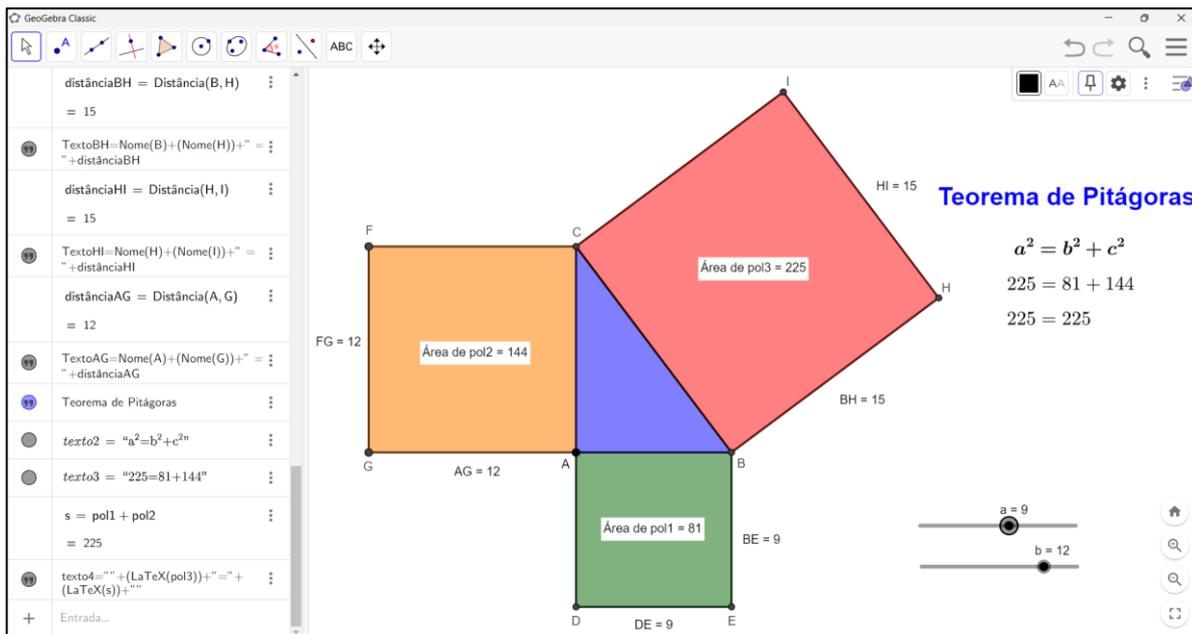
Na figura anterior foi mostrado como colocar um texto dinâmico que relaciona a áreas dos quadrados com o Teorema de Pitágoras. Já na figura 107 é possível observar a equação com os valores das suas variáveis. Logo em seguida é criada uma nova variável que relaciona a soma das áreas dos quadrados menores e criado um texto dinâmico para provar que a soma das áreas dos quadrados menores é igual a área do quadrado maior.

Figura 107 – Soma dos quadrados dos catetos

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Feito isso, temos que na figura 108, obtemos o Teorema de Pitágoras quando os controles deslizantes forem $a = 9$ e $b = 12$, consequentemente, temos que a área do quadrado maior é 225 e a área dos quadrados menores são 81 e 144, respectivamente. Logo, a soma das áreas dos dois quadrados menores é igual a área do quadrado maior e o Teorema de Pitágoras é provado.

Figura 108 – Prova do Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

5.5 Demonstração do Teorema de Tales

O Teorema de Tales pode ser enunciado como: sejam a, b, c três retas paralelas, num mesmo plano, e sejam r, s duas transversais, tais que r intersecta respectivamente a, b, c em A, B, C , e s intersecta respectivamente a, b, c em D, E e F , então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

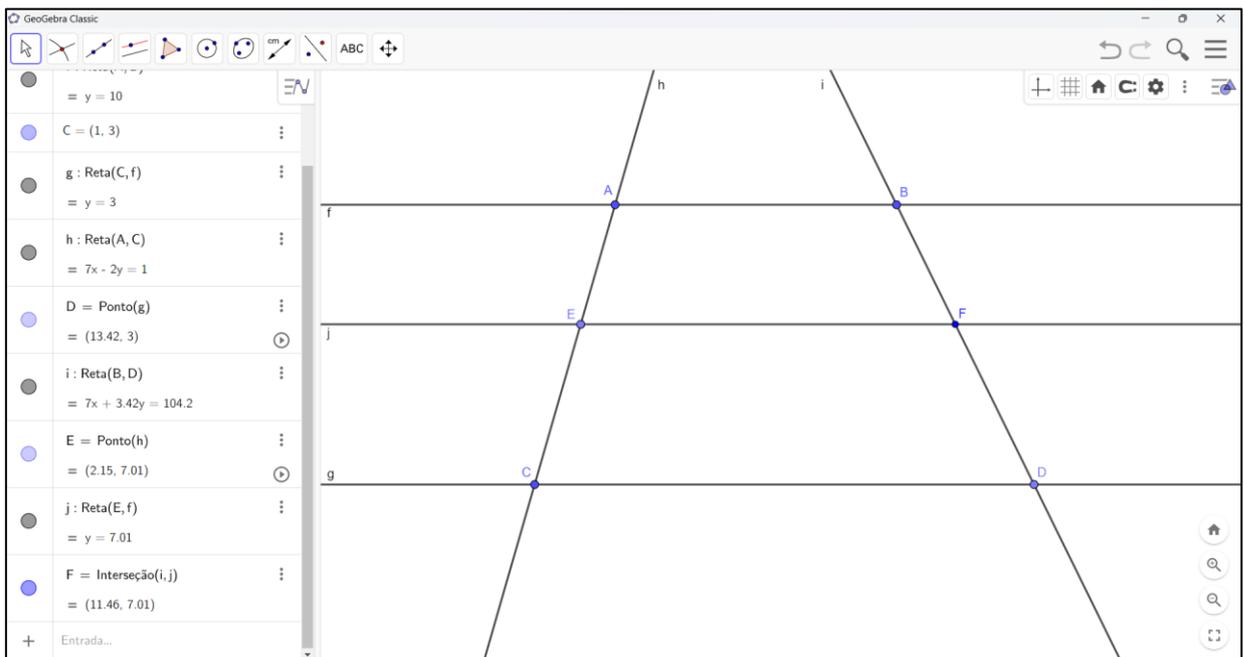
Primeiramente para construir um sistema que envolva inúmeras retas paralelas é preciso ir na barra de ferramentas, janela de ferramentas 3 e clicar na ferramenta reta.

Ao fazer esse procedimento é necessário seleccionar dois pontos aleatórios na janela de visualização que a reta será construída. Na figura 109, ao definir os pontos A e B, a reta r é inserida. Para que haja retas paralelas a reta r é preciso ir novamente na barra de ferramentas janela de ferramentas 4 e clicar na ferramenta *reta paralela*. Ao fazer isso devemos seleccionar um ponto qualquer na janela de visualização que a reta paralela a reta r aparecerá. Neste caso, ao inserir o ponto C, a reta g é formada.

Esse procedimento pode ser repetido inúmeras vezes para que inúmeras outras retas paralelas a reta r sejam criadas, mas neste caso em questão, optou-se por construir apenas a reta r e a reta g e em seguida criar as retas transversais para que depois fossem criadas outras retas paralelas.

Após criar as retas transversais h e i , cria-se a reta j que é paralela a reta r . Como o ponto E pertence a reta j , encontra-se a interseção entre a reta j e a reta i , a esse ponto dar-se o nome de F .

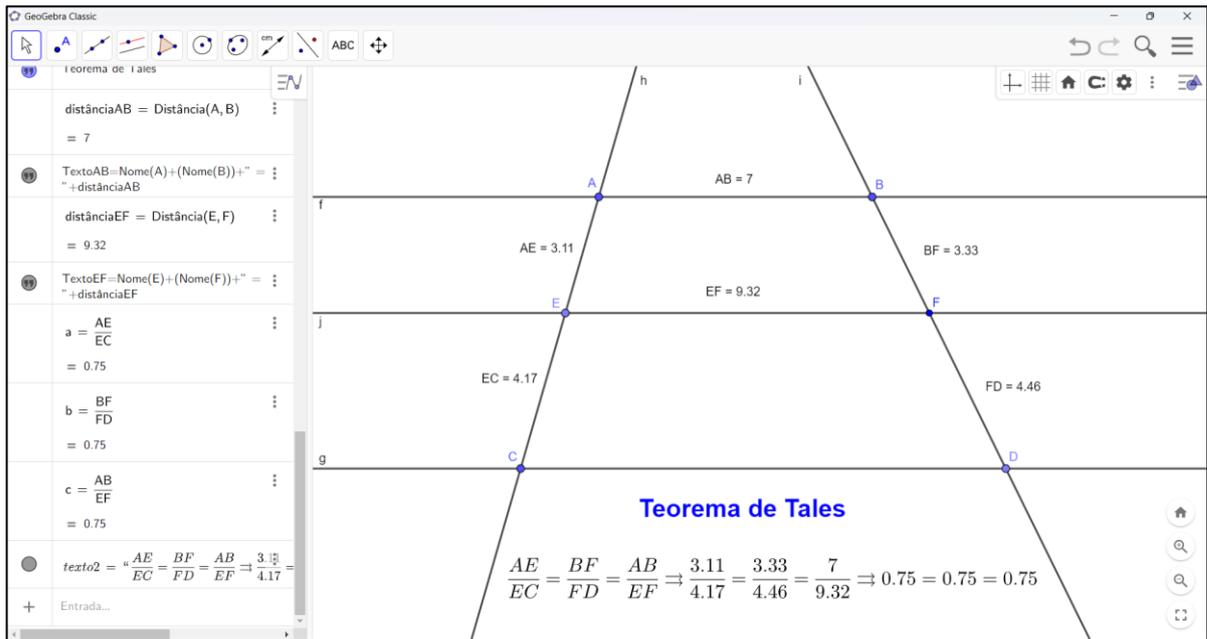
Figura 109 – Construção de retas paralelas cortadas por transversais



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Com o auxílio da ferramenta distância, comprimento ou perímetro, foi determinado o comprimento de cada um dos segmentos das retas. Logo após foi colocado um texto dinâmico que relaciona a razão entre os segmentos de retas paralelas cortadas pela mesma reta transversal com os seus valores. É possível observar que para a situação apresentada na figura 110 a razão entre os segmentos é igual a 0,75, independente de qual par de segmentos é observado, provando assim o Teorema de Tales.

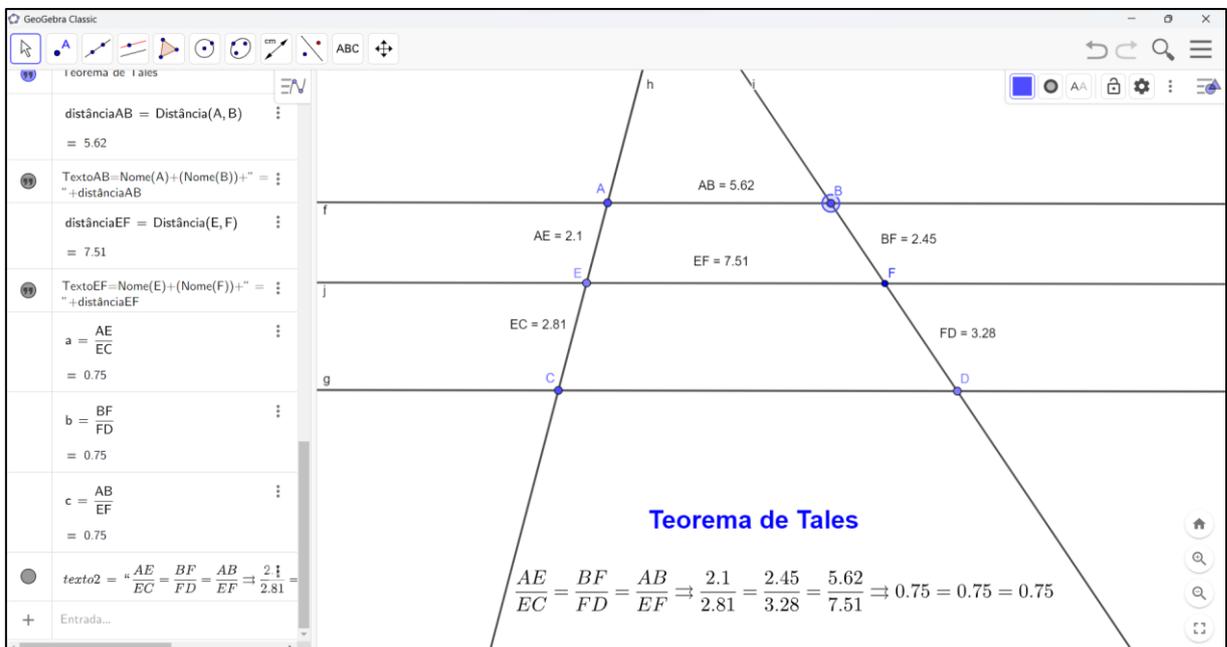
Figura 110 – Prova do Teorema de Tales



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Já na figura 111 é demonstrado o Teorema de Tales alterando os valores dos segmentos em relação a figura 110. Nota-se que mesmo alterando o valor dos segmentos a proporcionalidade é mantida, pois a razão entre os segmentos ainda é 0,75.

Figura 111 – Proporcionalidade do Teorema de Tales



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

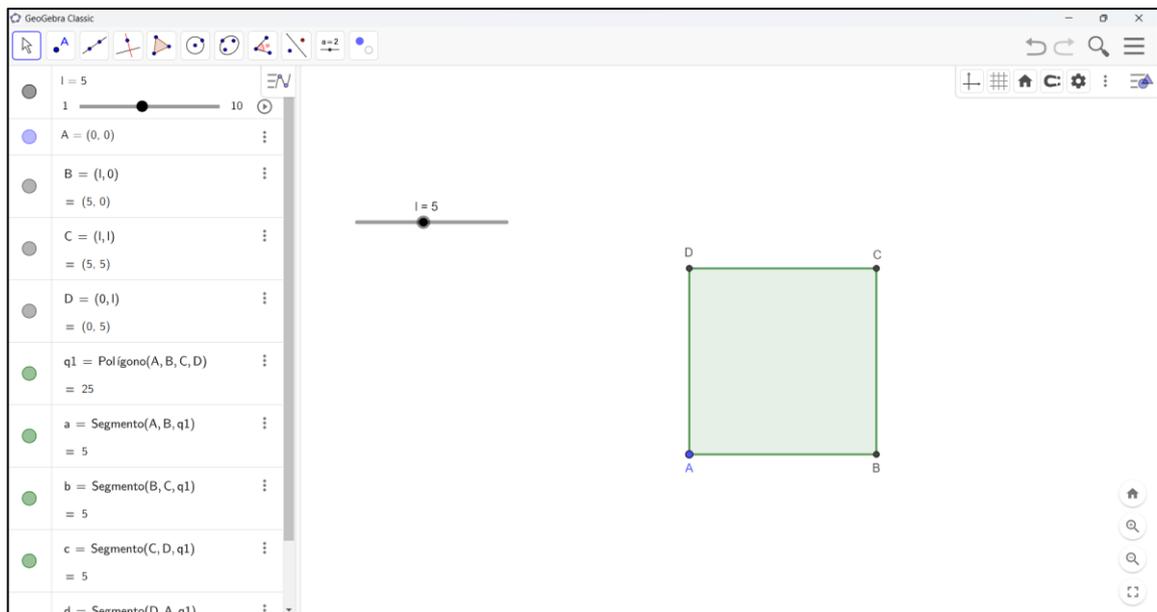
5.6 Área e perímetro de figuras planas com controle deslizante

É possível utilizar o controle deslizante do *GeoGebra* para determinar a área de alguns polígonos regulares que são constantemente utilizados. Neste tópico será utilizada a noção intuitiva de área para o quadrado e o retângulo.

Inicialmente, para se construir um quadrado é necessário inserir um controle deslizante que esteja em função da medida do lado desse quadrado, neste caso vamos chamar de l o controle deslizante referente a medida do lado.

Após a criação do controle deslizante são inseridos os pontos que darão origem ao quadrado a ser estudado. Deve-se observar que as coordenadas dos pontos desse quadrilátero devem estar relacionadas ao controle deslizante l . Dessa forma, a figura 112 ilustra a construção do quadrado ABCD em função do controle deslizante l .

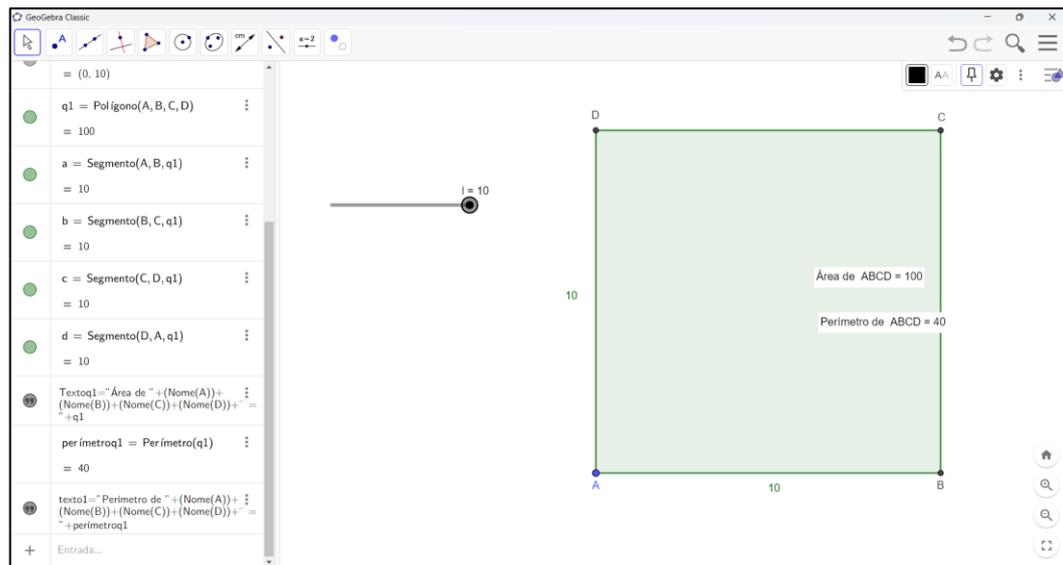
Figura 112 – Quadrado em função da medida dos lados



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após construir o quadrado, para verificar sua área e o seu perímetro basta ir no menu de ferramentas, janela de ferramenta 8 e clicar na ferramenta *área* e depois na ferramenta *distância, comprimento ou perímetro* que aparecerá a medida da área e do perímetro do quadrado. Na figura 113 é mostrado o quadrado com medida de lado igual a 10 cujo perímetro é 40 e a área 100.

Figura 113 – Área e perímetro do quadrado

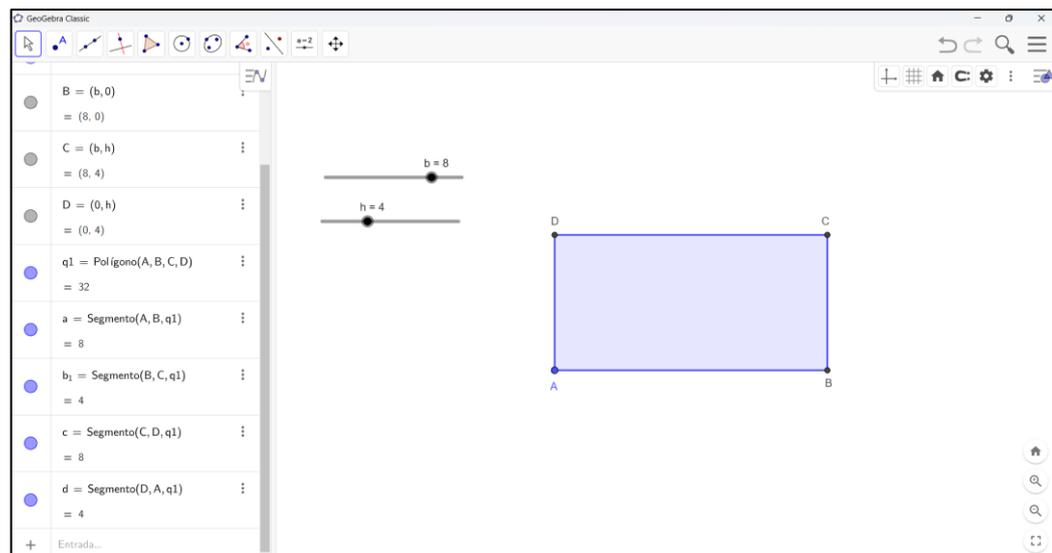


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Da mesma forma que foi feito para a construção de um quadrado, deve-se construir controles deslizantes para o retângulo. Neste caso em específico deve haver um controle deslizante para a medida da base (comprimento) e para a medida da altura (largura).

Na figura 114 é demonstrado a construção do controle deslizante b que representa a medida da base (comprimento) do retângulo e o controle deslizante h que representa a medida da altura (largura) do retângulo. Após a construção dos controles deslizantes, deve-se inserir os pontos em função dos controles e criar o retângulo ABCD.

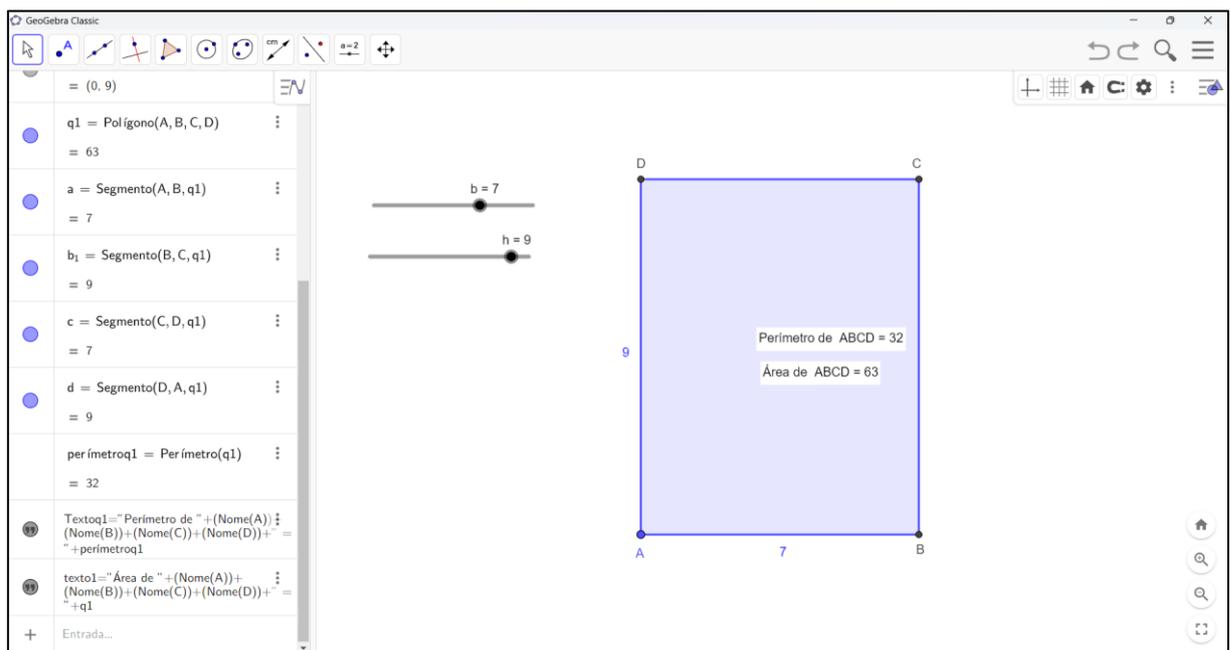
Figura 114 – Retângulo em função da medida da base e da altura



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após construir o retângulo, para verificar sua área e o seu perímetro basta ir no menu de ferramentas, janela de ferramenta 8 e clicar na ferramenta *área* e depois na ferramenta *distância, comprimento ou perímetro* que aparecerá a medida da área e do perímetro do quadrado. Na figura 115 é mostrado o retângulo com medida de base igual a 7 e altura igual a 9 cujo perímetro é 32 e a área 63.

Figura 115 – Área e perímetro do retângulo



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

É possível fazer a construção de outras figuras geométricas como triângulo, losango, paralelogramo e trapézio e utilizar os controles deslizantes para determinar a variação das medidas dos seus lados. Por ora, as demonstrações do quadrado e do retângulo são suficientes para compreender o potencial do *GeoGebra*.

6 RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP SOBRE GEOMETRIA PLANA UTILIZANDO O *GEOGEBRA*

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma olimpíada científica que reúne milhares de estudantes de escolas públicas e privadas de todo o Brasil, organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e promovida com recursos de Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI). Ocorre anualmente desde o ano de 2005, mas em 2020 devido a pandemia de COVID-19 teve sua realização interrompida, voltando em 2021 e, atualmente, se encontra na sua décima oitava edição.

Desde sua criação até o ano de 2023 contou com a participação de 318.829.481 de estudantes em sua primeira fase e de 13.915.454 em sua segunda fase até o ano de 2022. Em 2005 participaram cerca de 31.031 estudantes e em 2023, houve uma participação de 55.383 estudantes, representando um aumento de aproximadamente 78,5% no número de escolas participantes.

O número de escolas participantes vem crescendo desde a primeira edição do OBMEP, tem tido uma pequena redução no ano de 2011, mas voltando a crescer em 2012 e a partir de 2017 com a inclusão das escolas particulares esse número cresceu ainda mais. Em 2021, por conta da pandemia o número de escolas participantes diminuiu e não foi apenas na OBMEP que ocorreu isso, olimpíadas como a Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) e a Mostra Brasileira de Foguetes tiveram uma redução no número de escolas participantes em 2020 (MARTINS, 2022). Tal redução foi revertida no ano seguinte, tendo 2023 superado o recorde de escolas participantes, ao todo 55.383 escolas participaram da 18ª edição da OBMEP, o que representa um total de 99,87% de municípios participantes segundo dados da própria OBMEP.

O quadro 7 mostra o total de escolas e estudantes participantes por ano na primeira fase e, também, o total de escolas e estudantes participantes por ano na segunda fase. Comparando a primeira edição da OBMEP com a edição de 2023 houve um aumento de aproximadamente 74,59% no número de estudantes participantes e um aumento de aproximadamente 78,47% no número de escolas participantes.

Quadro 7 – Quantitativo de escolas e estudantes inscritos na 1ª e 2ª fase da OBMEP

1ª fase	2ª fase
---------	---------

	Escolas	Estudantes		Escolas	Estudantes
2005	31.031	10.520.831	2005	29.074	457.725
2006	32.655	14.181.705	2006	29.661	630.864
2007	38.450	17.341.732	2007	35.483	780.333
2008	40.397	18.326.029	2008	35.913	789.998
2009	43.854	19.198.710	2009	39.387	841.139
2010	44.717	19.665.928	2010	39.929	863.000
2011	44.691	18.720.068	2011	39.935	818.566
2012	46.728	19.166.371	2012	40.770	823.871
2013	47.144	18.762.859	2013	42.480	954.926
2014	46.711	18.192.526	2014	41.302	907.446
2015	47.580	17.972.333	2015	42.316	889.018
2016	47.474	17.839.424	2016	43.232	913.889
2017	53.231	18.240.497	2017	49.617	941.630
2018	54.498	18.237.996	2018	50.183	952.782
2019	54.831	18.158.775	2019	50.663	949.240
2021	53.375	17.774.936	2021	35.075	566.285
2022	54.488	18.159.636	2022	46.602	834.742
2023	55.383	18.369.125	2023	-	-
Total		318.829.481	Total		13.915.454

Fonte: Autor, OBMEP, 2024

O quadro 8 mostra o quantitativo de medalhas distribuídas após a segunda fase da OBMEP. Em sua primeira edição foram distribuídas 1.110 medalhas de ouro, prata e bronze e em 2022 houve um aumento de aproximadamente 575,67% no número de medalhas distribuídas. Ao todo foram premiados um total de 85.115 estudantes desde 2005 contribuindo efetivamente para a popularização da Matemática e para a melhoria do ensino na educação básica.

Quadro 8 – Quantitativo de medalhas distribuídas na OBMEP

Ano	Ouro	Prata	Bronze	Total
2005	300	405	405	1.110
2006	300	405	405	1.110

2007	301	600	2.101	3.002
2008	301	901	1.803	3.005
2009	300	900	1.800	3.000
2010	504	900	1.804	3.208
2011	500	900	1.802	3.202
2012	500	902	3.102	4.504
2013	499	900	4.599	5.998
2014	501	1.500	4.500	6.501
2015	500	1.500	4.501	6.501
2016	501	1.500	4.500	6.501
2017	576	1.727	5.188	7.491
2018	575	1.725	5.175	7.475
2019	579	1.746	5.183	7.508
2021	576	1.732	5.191	7.499
2022	586	1.730	5.184	7.500
Total	7.899	19.973	57.243	85.115

Fonte: Autor, OBMEP, 2024

Portanto, neste capítulo serão apresentadas resoluções de questões da OBMEP de diversos anos, níveis e fases, com o auxílio do *GeoGebra*.

6.1 OBMEP 2005 – Questão 18 – Nível 3 – Fase 1

O problema apresentado na figura 168 é uma questão presente na prova da OBMEP de 2005, primeira fase do nível 3 para estudantes do ensino médio. Ela trata de um problema sobre perímetro que inicialmente deveria ser resolvido determinando a medida do segmento \overline{AE} pertencente ao triângulo AEF através do Teorema de Pitágoras para que depois fosse determinado a medida do segmento \overline{EG} pertencente ao triângulo DEG.

Como os triângulos AEF e DEG são retângulos, os seus ângulos \widehat{FAE} e \widehat{DGE} são iguais e como os lados \overline{AF} e \overline{DE} são paralelos, logo temos que esses triângulos são semelhantes e assim o valor de \overline{EG} pode ser determinado. Após isso, é feita a soma dos segmentos pertencentes ao polígono ABCG.

Figura 116 – Questão 18 – Nível 3 – Fase 1 – OBMEP 2005

INSCREVER-SE

Questão 18

A figura mostra um polígono ABCDEF no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e sobre a reta que passa por A e E. Os comprimentos de alguns lados estão indicados em centímetros.

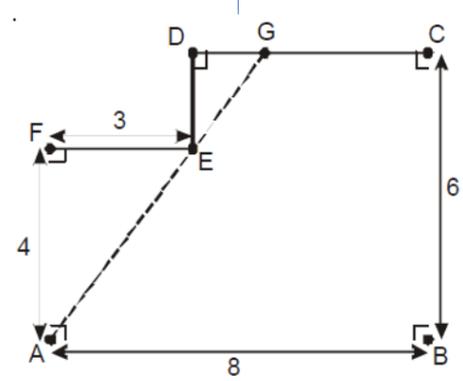
Qual é o comprimento do polígono ABCG ?

A) 22 cm
B) 23 cm
C) 24 cm
D) 25 cm
E) 26 cm



Professor
**WESLEY
MARTINS**

Apoie este projeto!



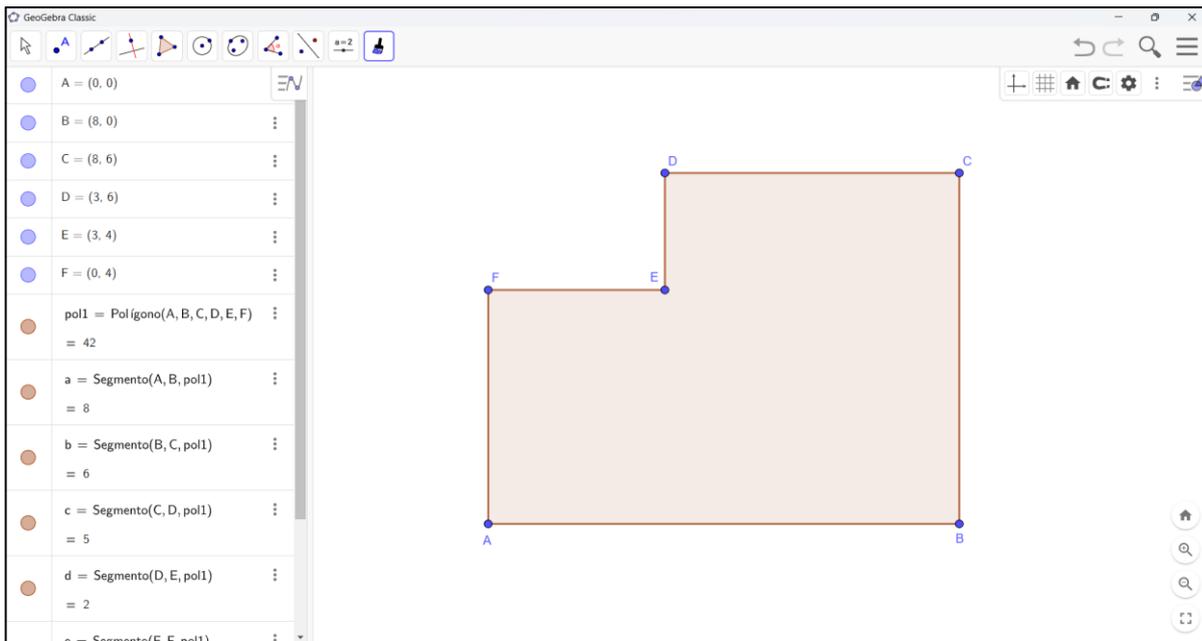
Fonte: Autor, 2024

Utilizando o *GeoGebra*, é possível determinar o perímetro do polígono ABCG de uma forma simples. Inicialmente precisamos construir a figura apresentada na questão no *GeoGebra*.

Inserindo os pontos A, B, C, D, E e F e criando o polígono ABCDEF, conforme a figura 117. A questão tem como objetivo determinar o perímetro do polígono ABCGE, contudo, precisamos determinar a localização do ponto G, para isso é necessário traçar uma semirreta que passe pelos pontos A e E. Logo, a interseção entre a semirreta e o lado \overline{CD} é o ponto G.

Como os \overline{AF} e \overline{EF} estão definidos, seria possível determinar o segmento \overline{AE} por meio do Teorema de Pitágoras. Mas, para determinar o segmento \overline{EG} teria que ser usado uma proporção, visto que os triângulos AEF e DEG são semelhantes.

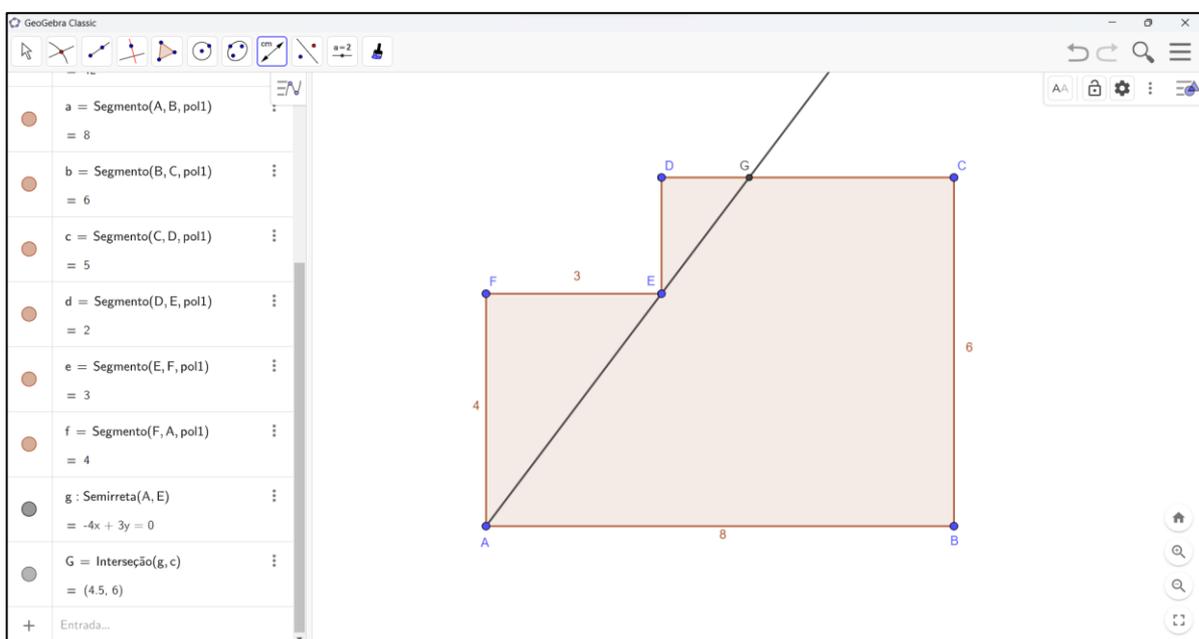
Figura 117 – Polígono ABCDEF



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Traçando uma semirreta que se origina no ponto A passando pelo ponto E, temos a formação de um novo polígono ABCGE, conforme a figura 118. Sendo $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{EF} = 3$ e $\overline{AF} = 4$. Calculando a medida dos segmentos \overline{AE} e \overline{EG} pelo *GeoGebra* através da ferramenta *distância*, *comprimento* ou *perímetro*, temos que $\overline{AE} = 5$ e $\overline{EG} = 2,5$.

Figura 118 – Formação do polígono ABCGE



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

De acordo com a figura 119 o perímetro do polígono ABCGE é a soma dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CG} , \overline{EG} e \overline{AE} . Dessa forma, temos que:

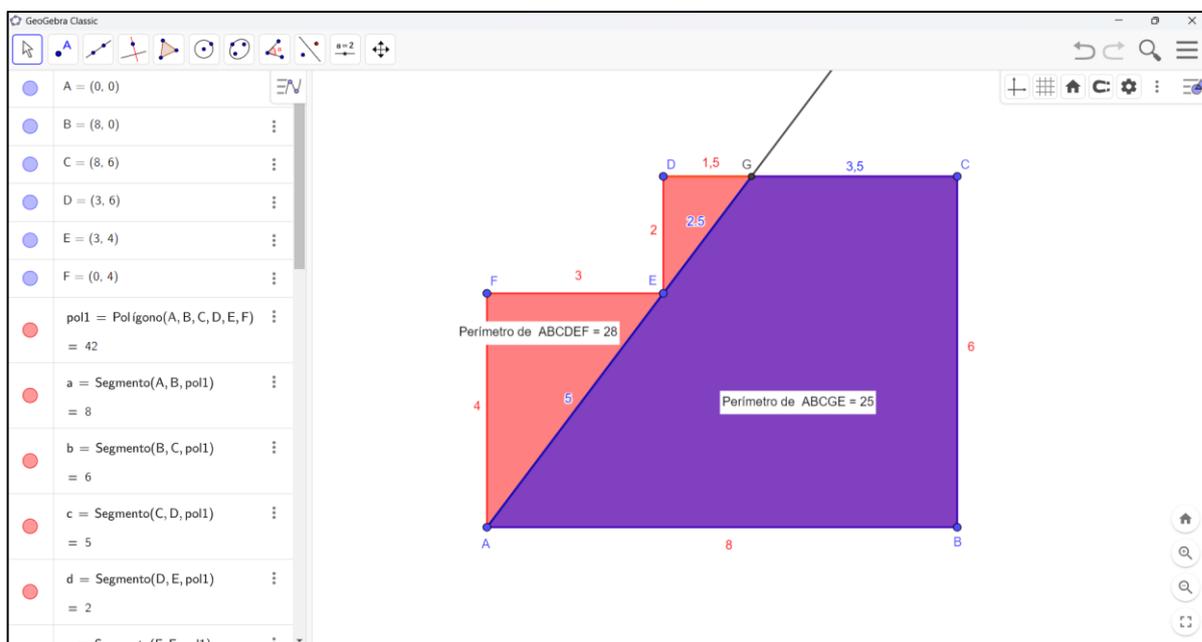
$$P_{ABCGE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} + \overline{EG} + \overline{AE}$$

$$P_{ABCGE} = 8 + 6 + 3,5 + 2,5 + 5$$

$$P_{ABCGE} = 25$$

Logo, o perímetro do polígono ABCGE é 25, sendo o segmento $\overline{AE} = 5$ e $\overline{EG} = 2,5$. Através do *GeoGebra*, é possível determinar também o perímetro do polígono ABCDEF, visto que, $\overline{CD} = 5$ e $\overline{DE} = 2$. Assim, o perímetro do polígono ABCDEF é 28, conforme demonstrado na figura 119.

Figura 119 – Perímetro do polígono ABCGE



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

6.2 OBMEP 2005 – Questão 4 – Nível 3 – Fase 2

O problema apresentado na figura 120 é uma questão presente na prova da OBMEP de 2005, segunda fase do nível 3 para estudantes do ensino médio. Ela trata de um problema sobre

área de figuras planas onde pode ser utilizado o conceito de função, mas apenas a alternativa a) será solucionada.

No problema, temos uma praça quadrada de lado medindo 10 m que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, conforme a figura 120. Não se sabe a área do canteiro quadrado de grama, mas ele dependerá da medida do segmento \overline{AB} . Logo, a área do canteiro quadrado de grama é dada em função do valor do segmento \overline{AB} .

Figura 120 – Questão 4 – Nível 3 – Fase 2 – OBMEP 2005

INSCREVER-SE

Questão 4 – Fase 2

Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.

A) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.

B) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x . Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

C) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

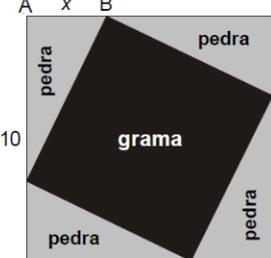
D) Se o prefeito tem apenas R\$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?



Professor
**WESLEY
MARTINS**

Apoie este projeto!

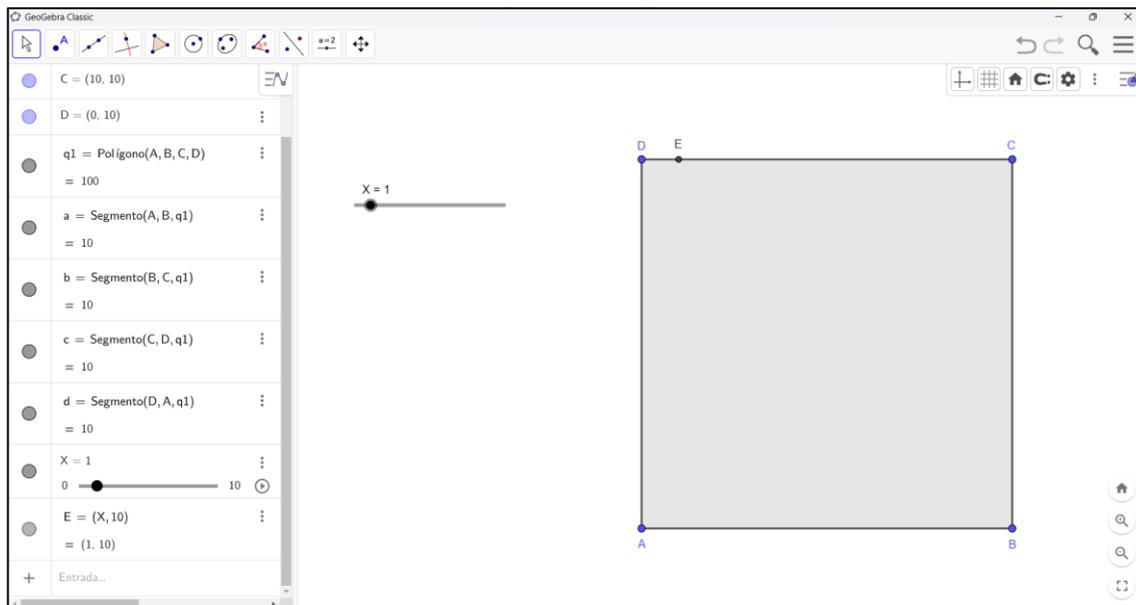
A x B



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Inserindo os pontos $A(0,0)$, $B(10,0)$, $C(10,10)$ e $D(0,10)$ com a ferramenta *ponto* e construindo o quadrado $ABCD$ com a ferramenta *polígono*. Deve-se construir um controle deslizante X , cujo intervalo vai de 0 a 10, e determinar um ponto E que seja dado em função do controle deslizante X . Sendo assim, o ponto E é dado como $(X,10)$, conforme a figura 121.

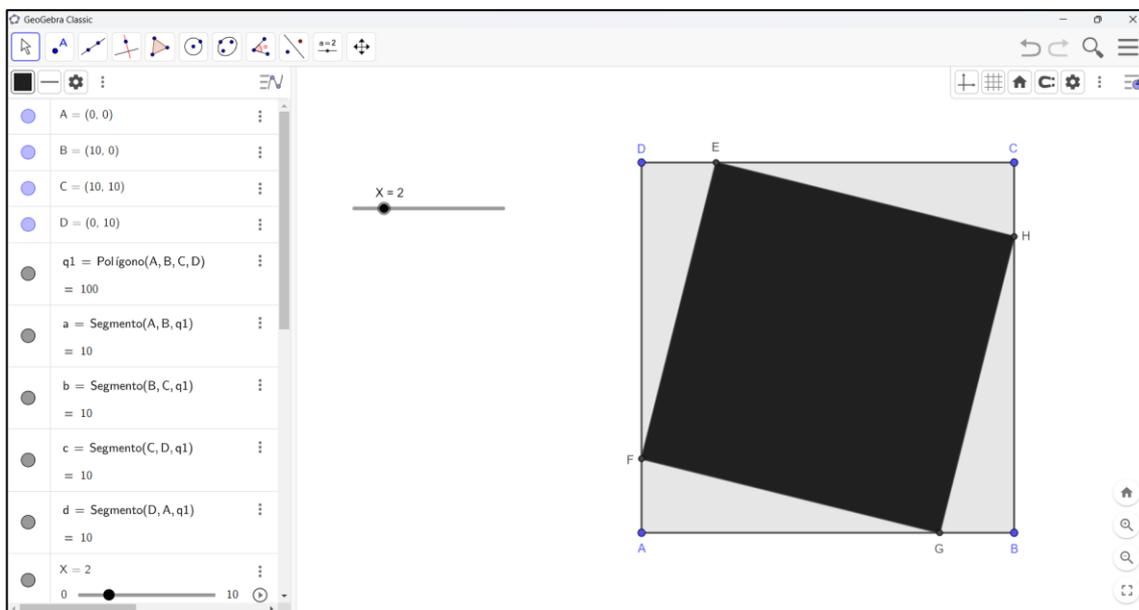
Figura 121 – Quadrado ABCD e controle deslizante X



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após a inserção do ponto E, deve-se inserir os outros pontos que serão os vértices dos canteiros triangulares em função do controle deslizante X, sendo assim, as coordenadas dos pontos são: $F(0, X)$, $G(10 - X, 0)$ e $H(10, 10 - X)$. Depois construir o quadrado EFGH com a ferramenta *polígono*, conforme a figura 122.

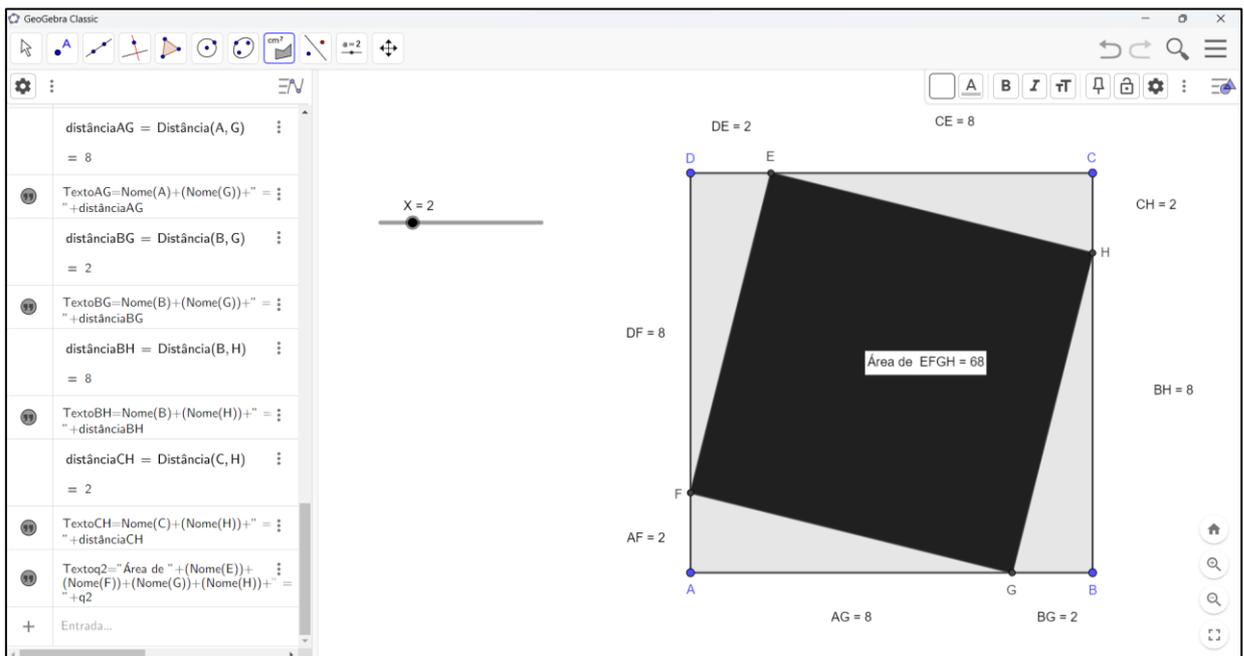
Figura 122 – Quadrado EFGH



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Determinado o valor de cada segmento do quadrado ABCD para $X=2$, temos então que: $\overline{AG} = 8$, $\overline{BG} = 2$, $\overline{BH} = 8$, $\overline{CH} = 2$, $\overline{CE} = 8$, $\overline{DE} = 2$, $\overline{DF} = 8$ e $\overline{AF} = 2$. Na figura 123 é possível observar todos os segmentos da figura com suas respectivas medidas. O item a) pede a área do canteiro quadrado de grama para $X = 2$, neste caso, basta ir à ferramenta de *área* do *GeoGebra* e clicar no quadrado EFGH. Logo, a área do quadrado EFGH será de 68 m^2 , conforme a figura 123.

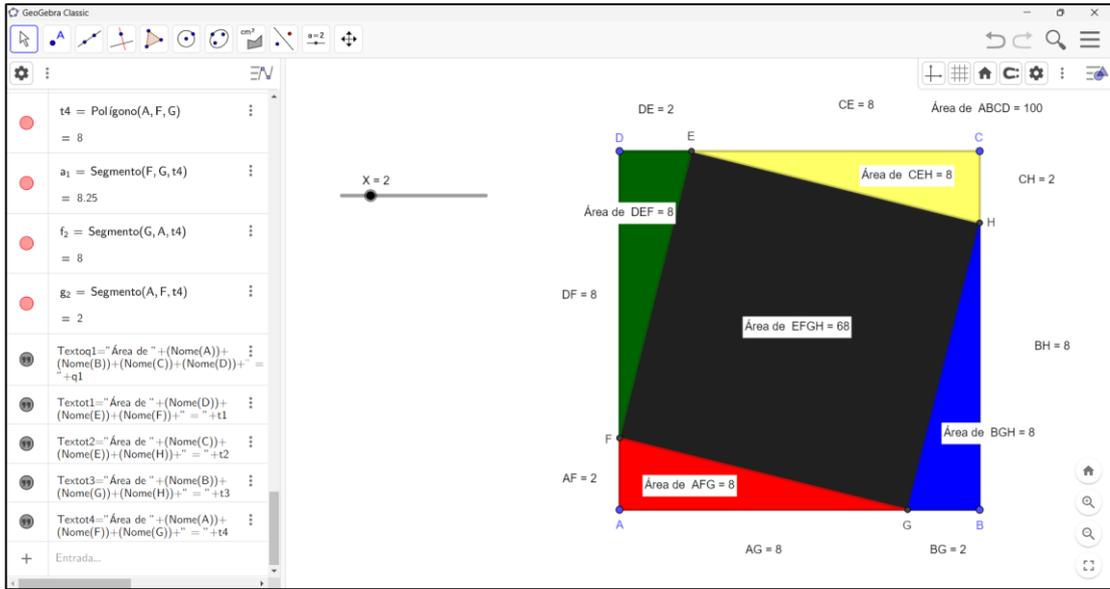
Figura 123 – Área do quadrado EFGH



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Sendo o quadrado ABCD de lado medindo 10 m, então sua área será de 100 m^2 . Como cada região triangular tem base medindo 2 m e altura medindo 8 m, logo a área do triângulo é de 8 m^2 . Daí, temos que a área dos quatros canteiros triangulares é 32 m^2 e a área do canteiro quadrado é 68 m^2 , o que juntas totaliza uma área de 100 m^2 .

Figura 124 – Área dos canteiros



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

6.3 OBMEP 2006 - Questão 1 – Nível 3 – Fase 1

O problema apresentado na figura 125 é uma questão presente na prova da OBMEP de 2006, primeira fase do nível 3 para estudantes do ensino médio. A questão trata de um problema envolvendo ponto médio dos lados, diagonais e área.

Figura 125 – Questão 1 – Nível 3 – Fase 1 – OBMEP 2006

Questão 1

No retângulo ao lado, A, B e C são pontos médios de seus lados e O é o ponto de encontro de suas diagonais. A área da região sombreada é

A) 1/4 da área do retângulo.
 B) 1/3 da área do retângulo.
 C) 1/2 da área do retângulo.
 D) 3/5 da área do retângulo.
 E) 2/3 da área do retângulo.

Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

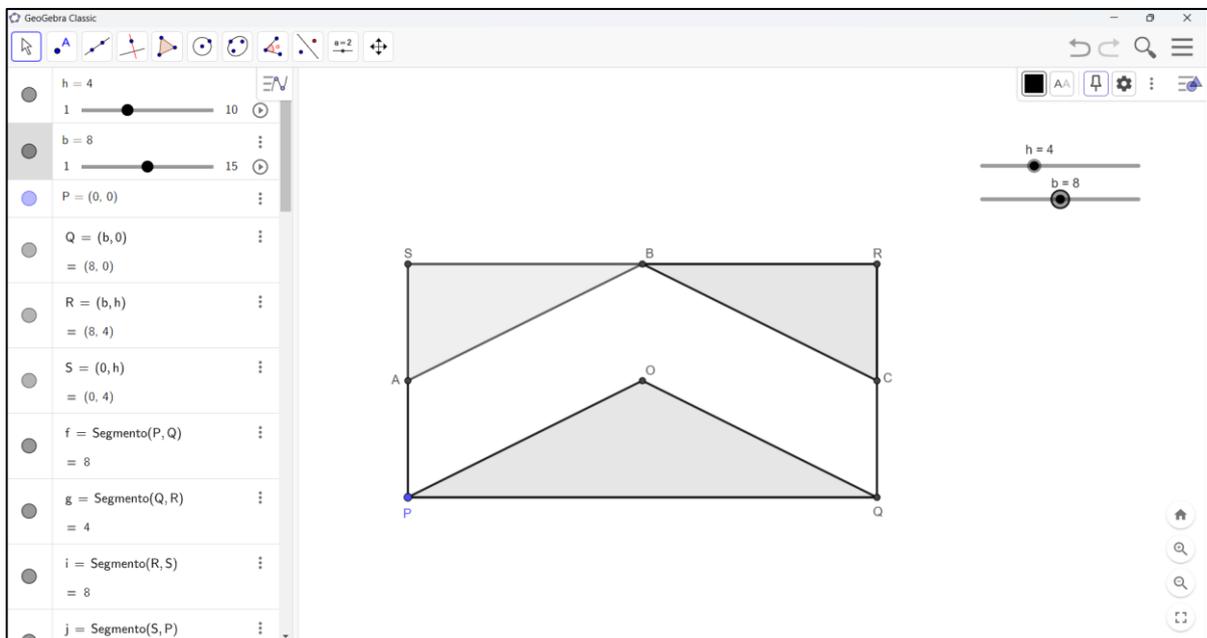
Inicialmente é preciso construir um retângulo, cujos pontos A, B e C são pontos médios de seus lados e o ponto O é a intersecção das diagonais desse retângulo. Como não se tem informações sobre a medida dos lados do retângulo, e para provar que independente das medidas dos lados do retângulo, a área da região sombreada será sempre a mesma. Vamos construir dois controles deslizantes para a alterar a medida dos lados do retângulo.

Na figura 126 é apresentada a construção da figura com os pontos médios de seus lados e os respectivos controles deslizantes. Para a determinação do ponto médio dos lados do retângulo basta, utilizar a ferramenta *ponto médio*.

Inserindo os pontos $P(0,0)$, $Q(b,0)$, $R(b,h)$ e $S(0,h)$ com a ferramenta *ponto* e construindo o retângulo PQRS com a ferramenta *polígono*. Construindo dois controles deslizantes, b e h, cujo intervalo vai de 0 a 15 e de 0 a 10, respectivamente, depois traçar as diagonais do retângulo e usando a ferramenta *intersecção de dois objetos*, determinar o ponto O que é o ponto de encontro das duas diagonais.

Usando a ferramenta *ponto médio*, são determinados o ponto A que é o ponto médio do lado \overline{PQ} , o ponto B que é o ponto médio do segmento \overline{RS} e o ponto C que é o ponto médio do segmento \overline{QR} . Logo em seguida, utilizando a ferramenta *polígono*, são construídos os polígonos ABS, BCR e OPQ, que representam a região sombreada do retângulo

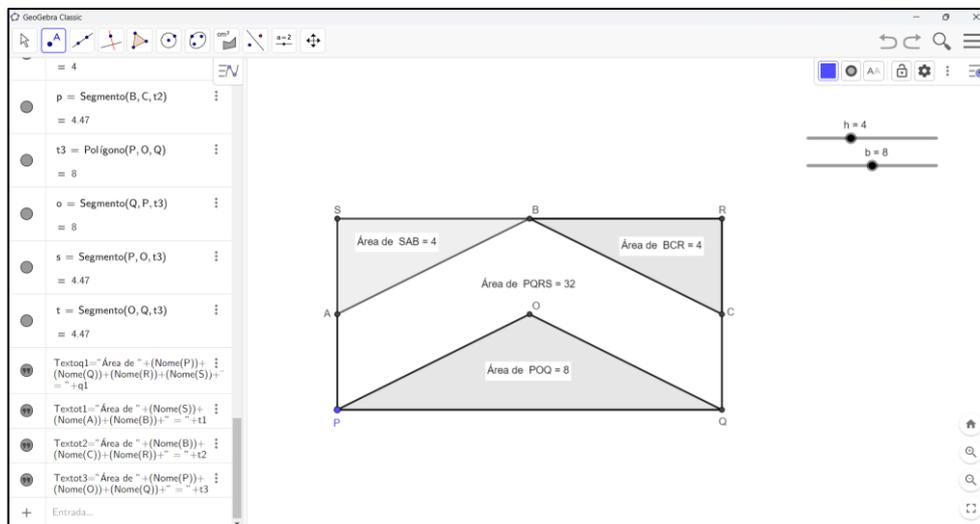
Figura 126 – Construção da região sombreada



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Após a construção da figura, é necessário determinar a área total do retângulo e depois a área da região sombreada. Utilizando a ferramenta *área*, é possível determinar a área do retângulo PQRS e depois determinar a área dos triângulos ABS, BCR e OPQ. A região sombreada é a área dessas três regiões triangulares.

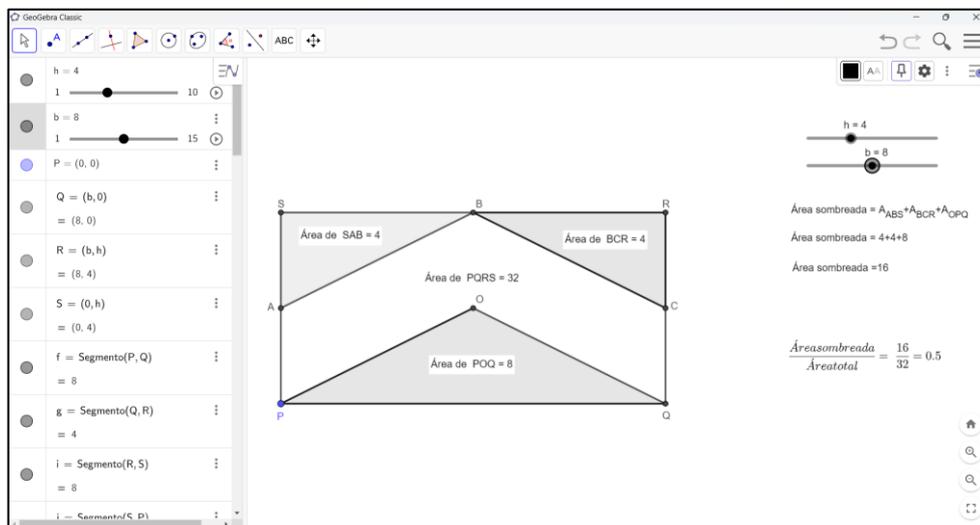
Figura 127 – Área sombreada



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Usando o texto dinâmico, encontra-se a área da região sombreada total e determina-se a razão com a área total da figura, conforme figura 128.

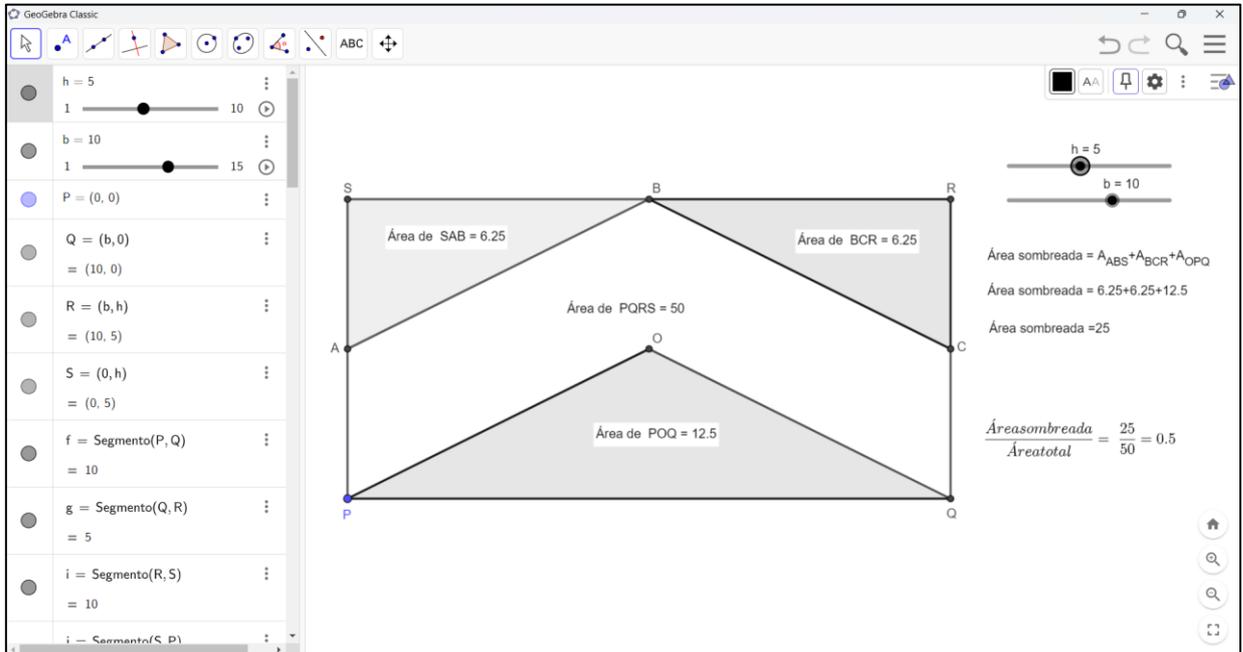
Figura 128 – Razão entre a área sombreada e a área total



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Ao mudar os valores dos controles deslizantes para $b=10$ e $h=5$, na figura 129, observe-se que a área total e a área sombreada mudam, mas que a razão entre elas permanece a mesma.

Figura 129 – Razão entre as áreas



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Logo, a área da região sombreada é a metade da área do retângulo.

6.4 OBMEP 2018 – Questão 4 – Nível 3 – Fase 2

O problema apresentado na figura 130 é uma questão presente na prova da OBMEP de 2018, segunda fase do nível 3 para estudantes do ensino médio. Ela trata de um problema sobre área de figuras planas, onde pode ser utilizado o conceito de função, mas resolveremos utilizando o *GeoGebra*.

No problema é apresentado um triângulo ABC , cujos catetos AB e AC medem 10 . Sobre o lado AB há um ponto P e sobre o lado AC há um ponto Q , sendo PQ paralelo a BC . O ponto R se encontra sobre BC , enquanto o ponto S se encontra sobre o lado AC , de forma que QR é paralelo a AB e OS paralelo a AC . A união dos paralelogramos $PBRQ$ e $PSCQ$ determinam a região sombreada da figura.

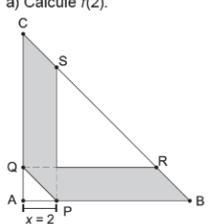
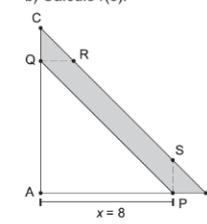
Figura 130 – Questão 4 – Nível 3 – Fase 2 – OBMEP 2018

Questão 4 – Fase 2



O triângulo retângulo ABC tem catetos de medidas $AB = 10$ e $AC = 10$. O ponto P sobre o lado AB está a uma distância x de A. O ponto Q sobre o lado AC é tal que PQ é paralelo a BC. Os pontos R e S sobre BC são tais que QR é paralelo a AB e PS é paralelo a AC. A união dos paralelogramos PBRQ e PSCQ determina uma região cinza de área $f(x)$ no interior do triângulo ABC.

a) Calcule $f(2)$. b) Calcule $f(8)$.



Professor
WESLEY
MARTINS

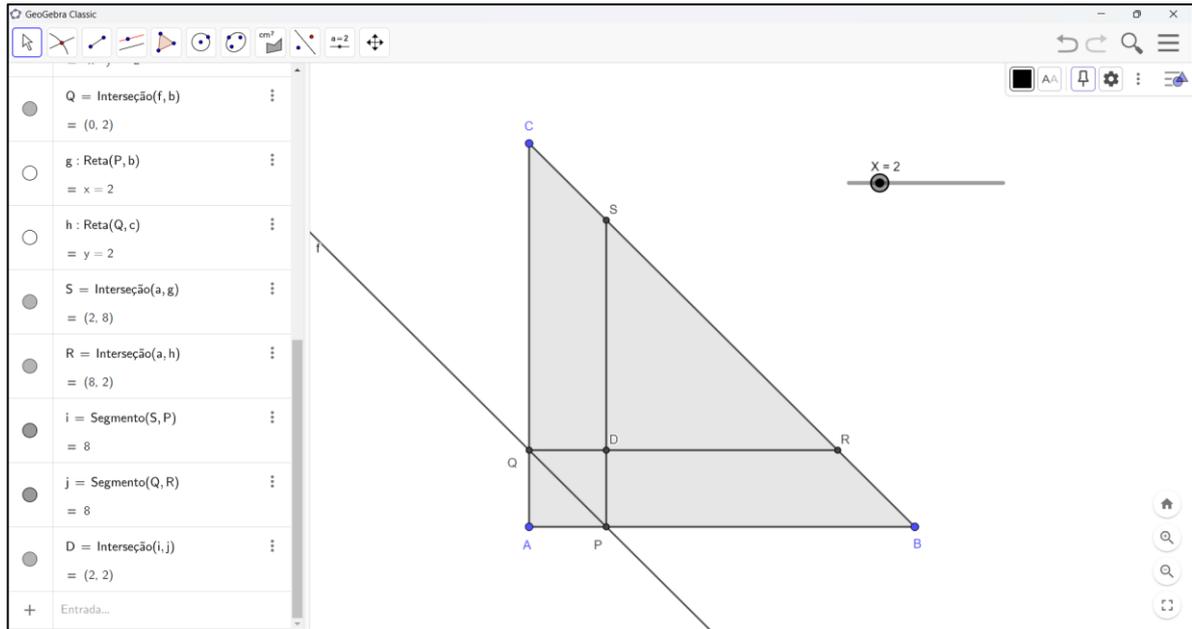
Apoie este projeto!

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

No item a) da questão, é pedido para se determinar a área da região cinza, quando o ponto P estiver a 2 unidades do ponto A. Para isso, deve-se inicialmente, construir um o triângulo ABC, cujas coordenadas dos pontos são: $A(0,0)$, $B(10,0)$ e $C(0,10)$. Usando a ferramenta *controle deslizante* deve-se criar um controle que permita a movimentação do ponto P, conforme sua distância ao ponto A. O controle deslizante X é criado com o intervalo de 0 a 10 com o incremento de 1.

Para associar o controle deslizante ao ponto P, as coordenadas do ponto deverão ser $(X,0)$, dessa forma, o ponto P se deslocará sobre o lado AB. Depois, deve-se traçar uma reta f que seja paralela ao BC e a intersecção dessa reta com o lado AC é o ponto Q. Em seguida, deve-se traçar uma reta g que seja paralela ao lado AC que passe por P, a intersecção dessa reta com o lado BC é o ponto S e traçando uma reta h paralela ao lado AB que passe pelo Q, a intersecção dessa reta com o lado BC é o ponto R. Criando os segmentos \overline{PS} e \overline{QR} e tendo D como a intersecção desses segmentos, conforme a figura 131.

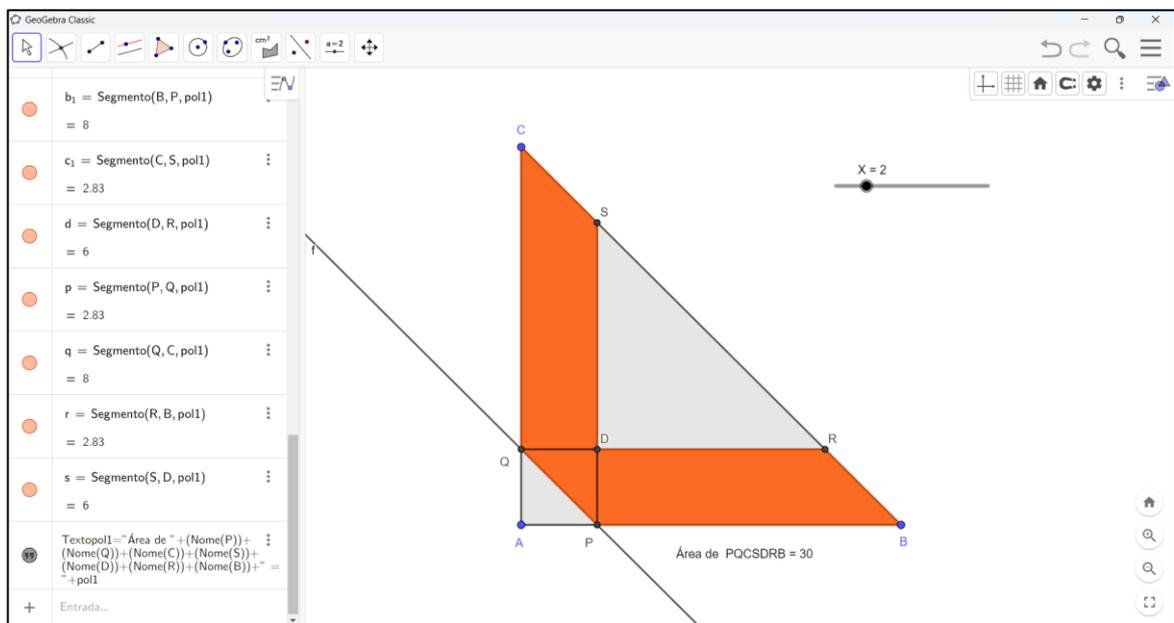
Figura 131 – Segmento \overline{PQ} paralelo ao lado \overline{BC}



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Com o controle deslizante no valor 2 e utilizando a ferramenta *polígono*, vamos determinar a área da região formada pela união dos paralelogramos PBRQ e PSCQ. A área formada é o polígono PQCDRDB. Com a ferramenta *área*, determinamos a área do polígono PQCDRDB que é 30, conforme a figura 132.

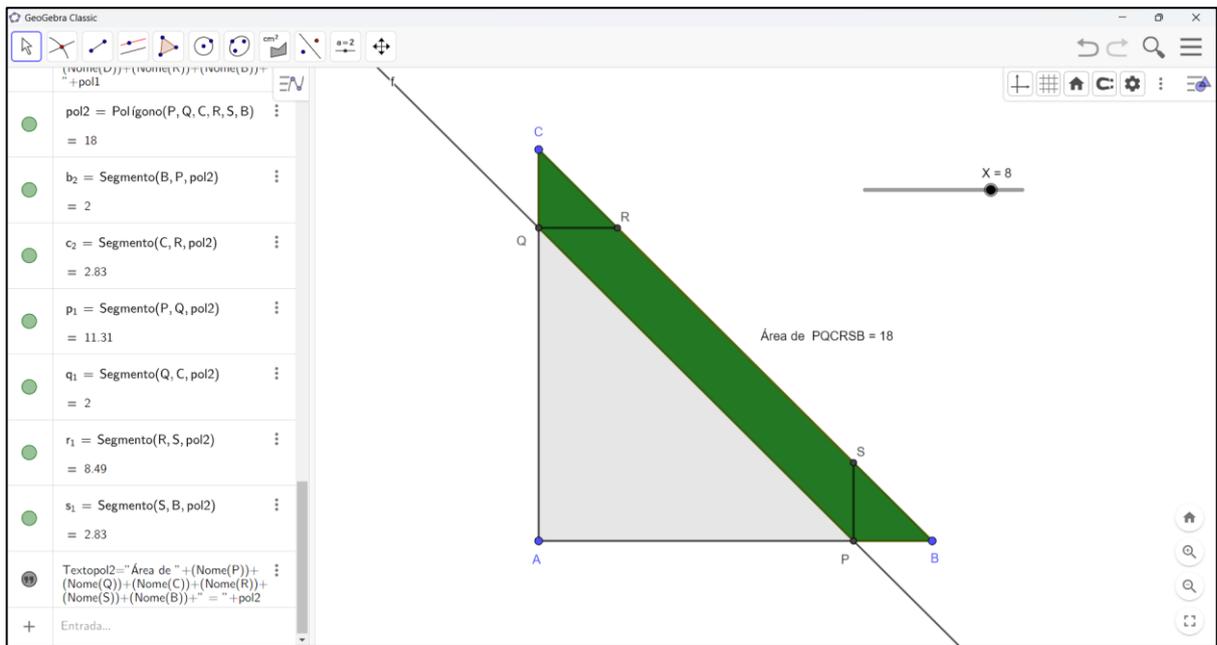
Figura 132 – Paralelogramos PBRQ e PSCQ



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Para determinar o item b) da questão, quando o ponto P estiver a 8 unidades do ponto A, conforme a figura 133. Vamos mover o controle deslizante para o valor 8 e utilizando a ferramenta *polígono*, criar o polígono PQCRSB. E com a ferramenta *área*, determinar a área do polígono PQCRSB que é 18.

Figura 133 – Polígono PQCRSB



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Dessa forma, determinamos a área das regiões pedidas, utilizando o *GeoGebra*.

6.5 OBMEP 2022 - Questão 8 – Nível 1 – Fase 1

O problema apresentado na figura 134 é uma questão presente na prova da OBMEP de 2022, primeira fase do nível 1 para estudantes do ensino fundamental (6º e 7º anos). Ela trata de um problema sobre área, onde se tem um retângulo ABCD de área igual a 1 cm^2 e os pontos E, F, G e H são os pontos médios dos lados aos quais pertencem. Dessa forma, vamos determinar a soma das áreas das regiões coloridas de azul.

Figura 134 – Questão 8 – Nível 1 – Fase 1 – OBMEP 2022

Questão 8 – Nível 1

INSCREVER-SE

O retângulo ABCD tem área igual a 1 cm^2 e os pontos E, F, G e H são pontos médios dos lados aos quais pertencem, conforme indicado na figura. Qual é a soma das áreas das regiões coloridas de azul?

A) $2/7 \text{ cm}^2$
 B) $1/3 \text{ cm}^2$
 C) $1/4 \text{ cm}^2$
 D) $2/9 \text{ cm}^2$
 E) $1/6 \text{ cm}^2$

Professor
WESLEY
MARTINS

Apoie este projeto!

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

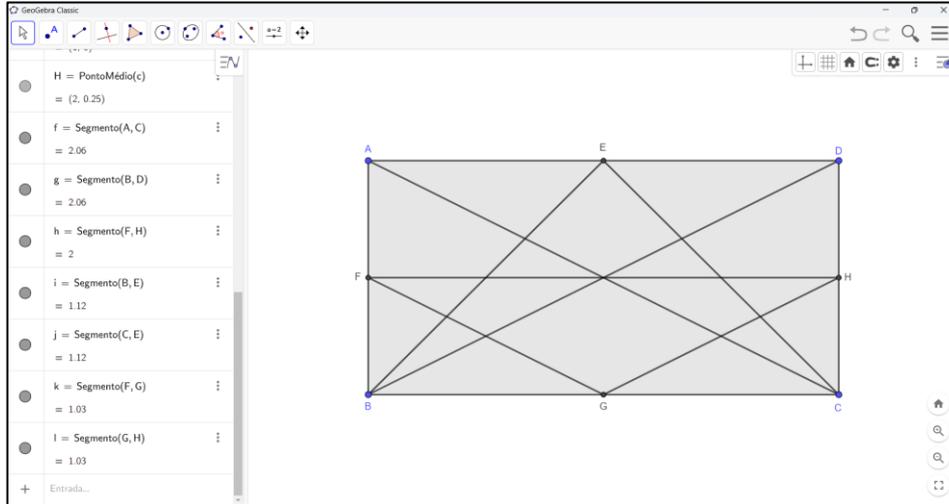
Utilizando a ferramenta pontos vamos inicialmente determinar os pontos A, B, C e D, cujas coordenadas são, respectivamente, $(0,0.5)$, $(0,0)$, $(2,0)$ e $(2,0.5)$. Com a ferramenta *polígono*, vamos criar o retângulo ABCD. Dessa forma, o retângulo terá uma área de 1 cm^2 . Com a ferramenta *ponto médio*, vamos determinar os pontos E, F, G e H, conforme a figura 135.

Figura 135 – Retângulo ABCD

Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Na figura 136 são traçadas as diagonais, \overline{AC} e \overline{BD} , e os segmentos \overline{BE} , \overline{CE} , \overline{FG} , \overline{FH} e \overline{GH} .

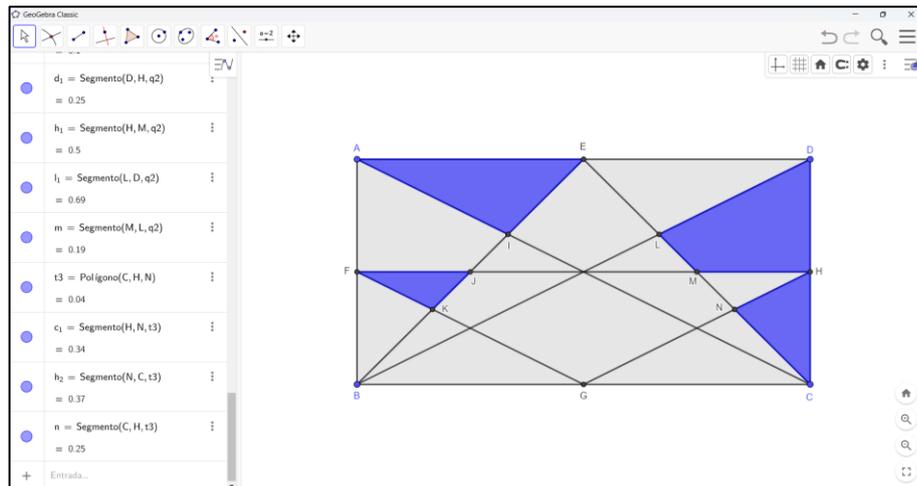
Figura 136 – Diagonais e segmentos do retângulo ABCD



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Logo em seguida, na figura 137, vamos determinar o ponto I que é a intersecção da diagonal \overline{AC} com o segmento \overline{BE} , o ponto J que é a intersecção do segmento \overline{BE} com o segmento \overline{FH} , o ponto K que é a intersecção do segmento \overline{BE} com o segmento \overline{FG} , o ponto L que é a intersecção da diagonal \overline{BD} com o segmento \overline{CE} , o ponto M que é a intersecção do segmento \overline{CE} com o segmento \overline{FH} e o ponto N que é a intersecção do segmento \overline{CE} com o segmento \overline{GH} . E usando a ferramenta *polígono*, criar os polígonos AEI, FJK, DHML e CHN.

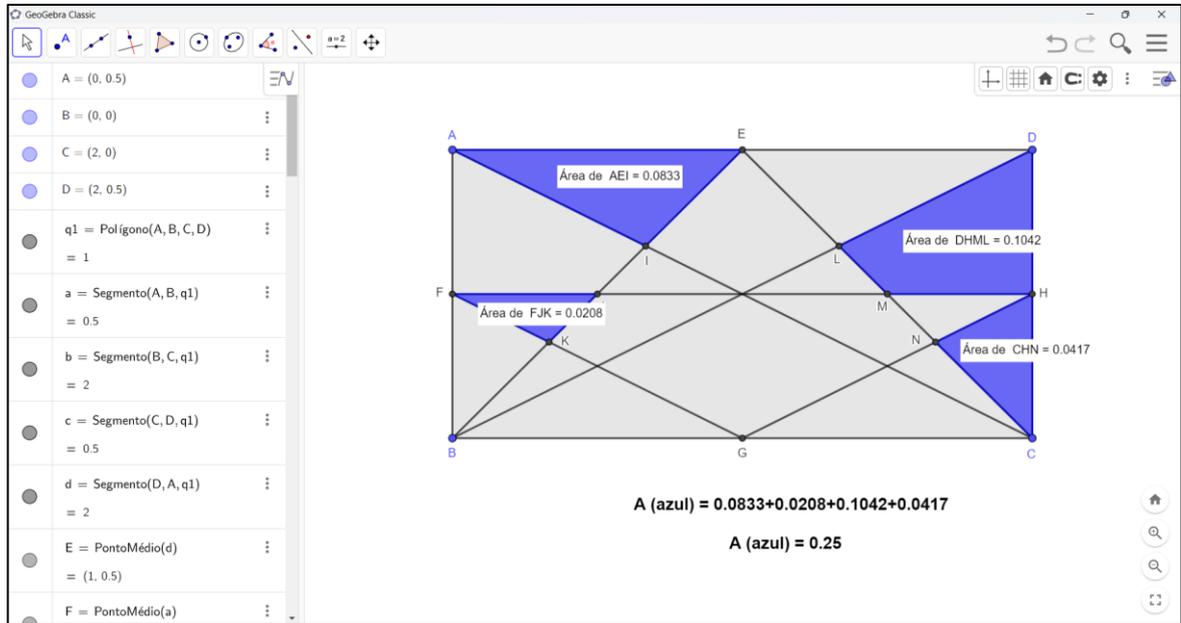
Figura 137 – Polígonos AEI, FJK, DHML e CHN



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Com a ferramenta *área*, vamos determinar a área dos polígonos AEI, FJK, DHML e CHN. E na figura 138, utilizando o texto dinâmico, mostrar a soma das áreas das regiões coloridas de azul.

Figura 138 – Área dos polígonos AEI, FJK, DHML e CHN



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Logo, a soma das áreas coloridas de azul é $0,25 \text{ cm}^2$, ou seja, $\frac{1}{4}$ da área do retângulo ABCD.

7 ATIVIDADES USANDO O *GEOGEBRA*

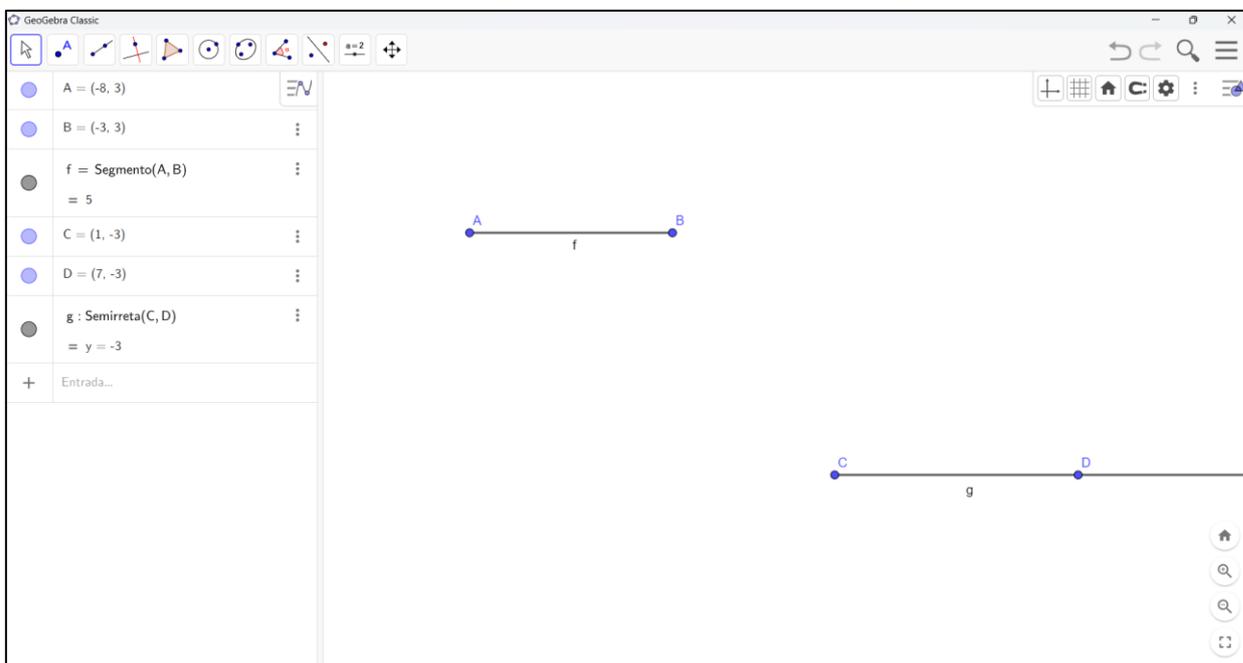
Neste capítulo, o *GeoGebra* será utilizado para provar e comprovar alguns conceitos da Geometria Plana.

7.1 Construção com régua e compasso usando o *GeoGebra*

7.1.1 Construção de segmentos congruentes a partir de um segmento dado

Vamos construir, através do *GeoGebra*, segmentos congruentes a partir de um segmento dado. Dado o segmento \overline{AB} , marcamos um ponto C qualquer no plano e traçamos uma semirreta a partir dele, conforme figura 139.

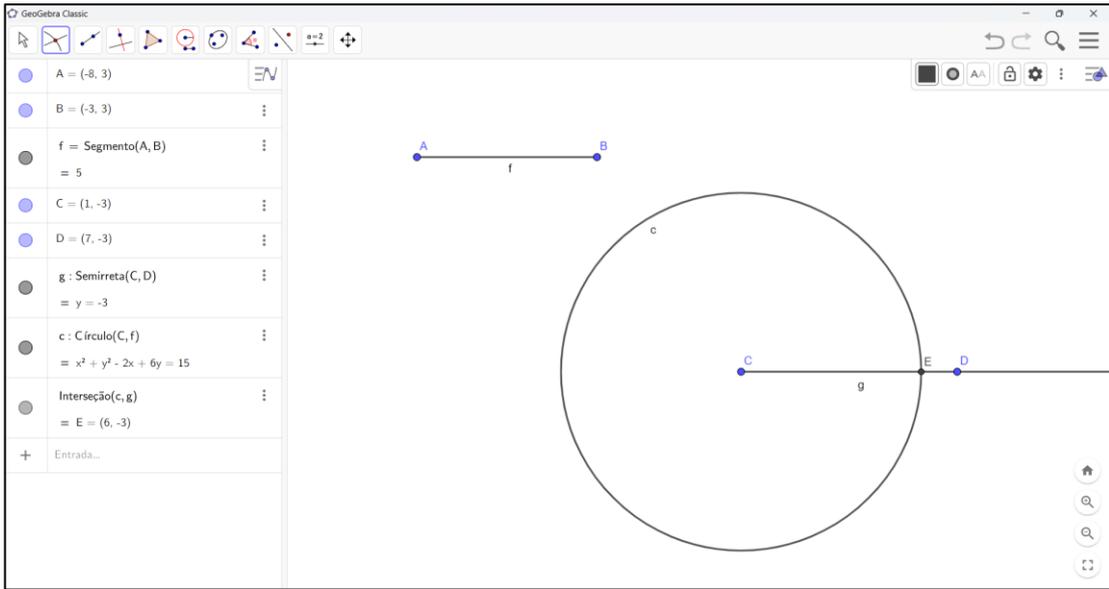
Figura 139 – Construção de um segmento congruente



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Com a ferramenta compasso selecionar o segmento \overline{AB} cuja medida será o raio da circunferência e clicar no ponto C para desenhar a circunferência de raio \overline{AB} e centro C. Utilizando a ferramenta intersecção de objetos para determinar o ponto E que é a intersecção entre a semirreta $g = \overline{AB}$ e a circunferência c .

Figura 140 – Segmento \overline{CE} congruente ao segmento \overline{AB}



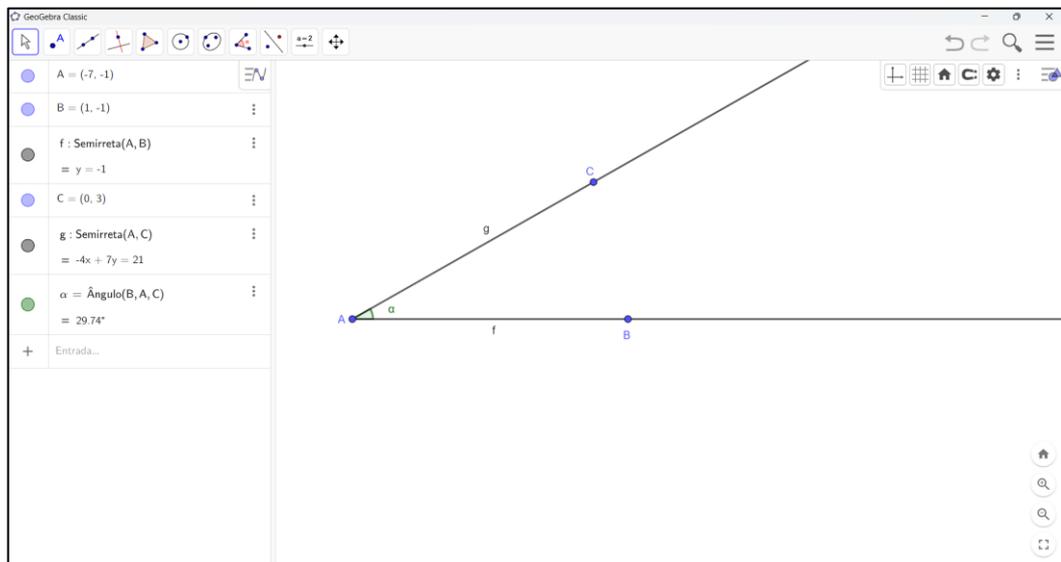
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Logo, temos que, na figura 140 o segmento \overline{CE} é congruente ao segmento \overline{AB} , pois $\overline{CE} = r = \overline{AB}$.

7.1.2 Construção de ângulos congruentes a partir de um ângulo dado

Vamos construir através do *GeoGebra* ângulos congruentes a partir de um ângulo dado.

Figura 141 – Ângulo qualquer

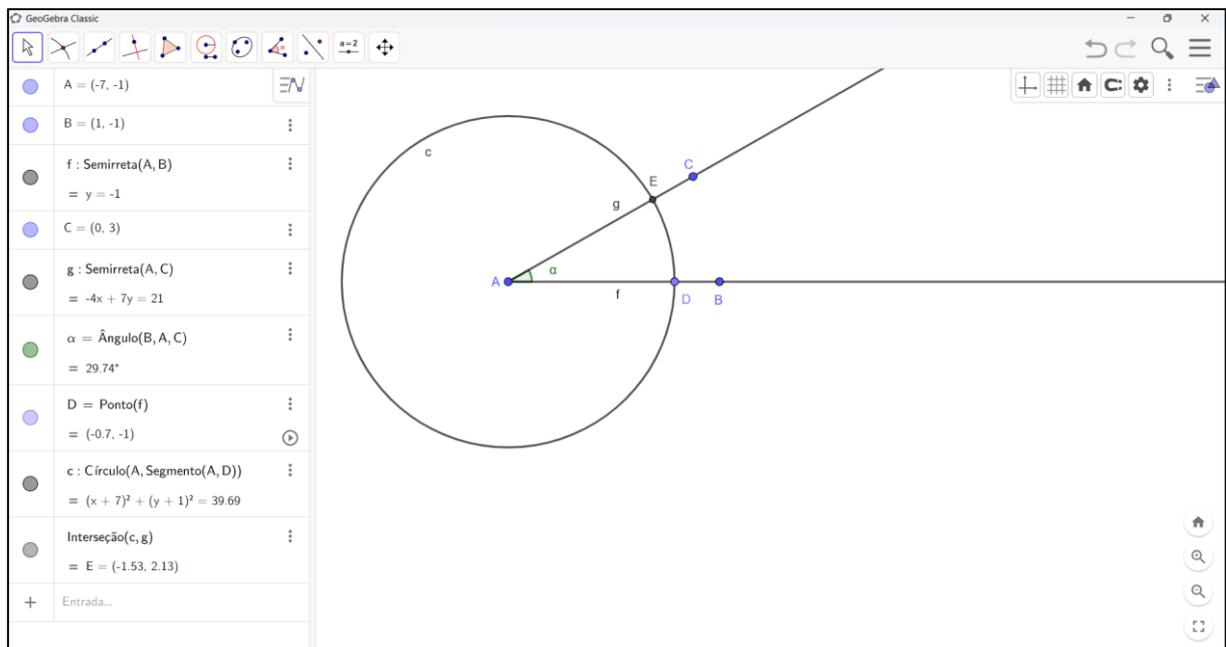


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Para construir um ângulo congruente ao um ângulo dado, inicialmente traçamos no plano uma semirreta qualquer que será um dos lados do ângulo a ser construído. Para isso vamos inserir um ponto D sobre a semirreta f e com a ferramenta compasso criar uma circunferência cujo raio é o segmento \overline{AD} e o centro esteja em A.

Na figura 142 é ilustrada a circunferência c cujo raio é o segmento \overline{AD} e com a ferramenta intersecção entre dois objetos é determinado o ponto E que é a intersecção entre a circunferência c e a semirreta g .

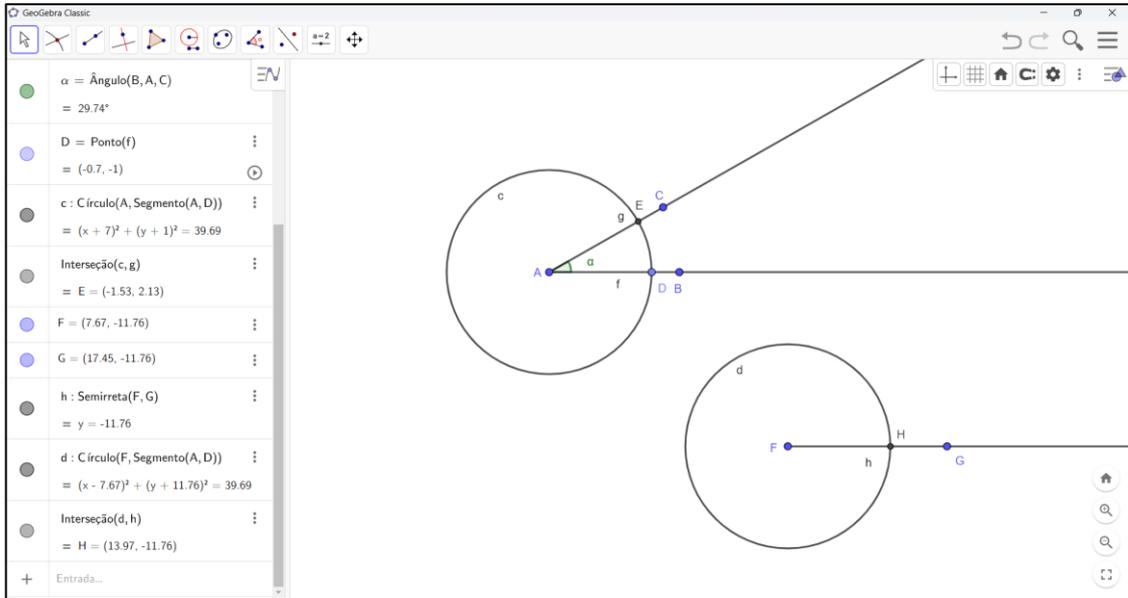
Figura 142 – Circunferência de raio \overline{AD}



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Em seguida, deve-se inserir um ponto F e a partir dele traçar uma semirreta h . Com a ferramenta compasso selecionar o segmento \overline{AD} e clicar no ponto F. Logo, temos uma circunferência d cujo centro é F e a intersecção entre a circunferência d e a semirreta h é o ponto H, conforme figura 143.

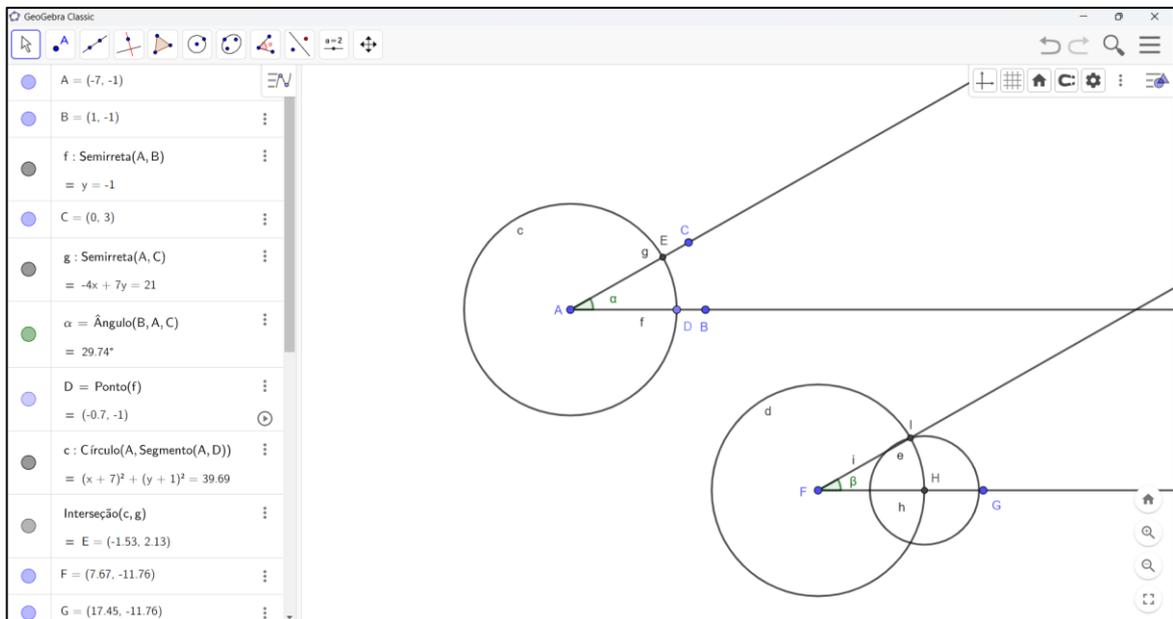
Figura 143 – Construção do segmento \overline{FH}



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Novamente com a ferramenta compasso, vamos selecionar o segmento \overline{DE} e clicar no ponto H. Uma circunferência e será criada conforme a figura 144. Com a ferramenta intersecção entre dois objetos vamos selecionar a circunferência d e a circunferência e , obtendo o ponto I como intersecção. Depois é só traçar uma semirreta i cuja origem é o ponto A e que passe pelo ponto I.

Figura 144 – Construção de um ângulo congruente a partir de um ângulo dado



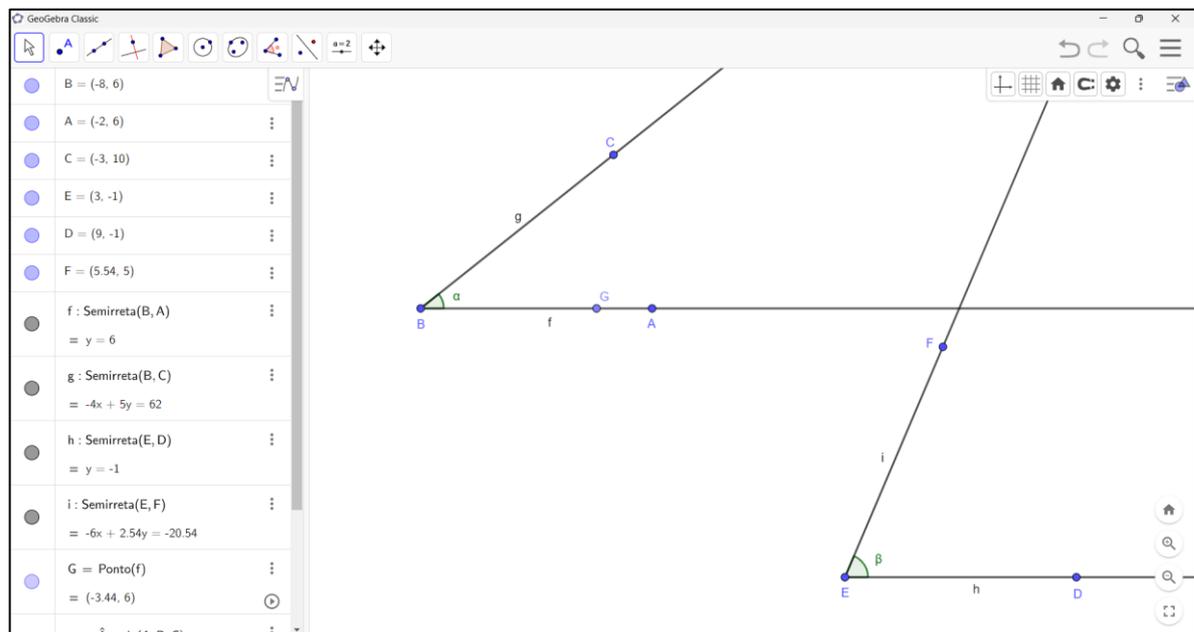
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Sendo assim, temos que o ângulo β é congruente ao ângulo α . Pois, os triângulos ADE e FMI são congruentes pelo caso LLL (Lado-Lado-Lado).

7.1.3 Comparar a medida de dois ângulos usando apenas régua e compasso

Vamos comparar através do *GeoGebra* a medidas de dois ângulos quaisquer. Inicialmente vamos construir um ângulo qualquer, para isso é necessário utilizar a ferramenta ponto e colocar um ponto B qualquer, depois com o auxílio da ferramenta semirreta traçar duas semirretas que tenham origem no ponto B. Logo em seguida, vamos construir outro ângulo qualquer e utilizando a ferramenta ponto inserir o ponto E, depois com o auxílio da ferramenta semirreta traçar duas semirretas que tenham origem no ponto E, conforme a figura 145.

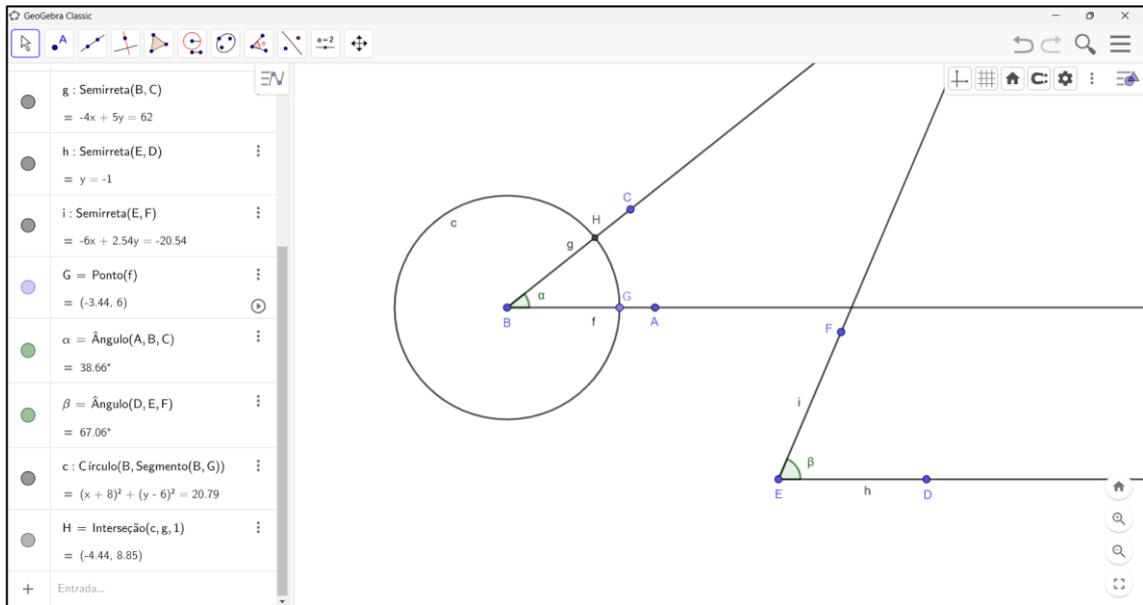
Figura 145 – Ângulos quaisquer



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Para comparar o ângulo \widehat{ABC} com o ângulo \widehat{DEF} , devemos construir um ângulo congruente ao ângulo \widehat{ABC} em \widehat{DEF} . Com a ferramenta ponto vamos inserir um ponto G na semirreta \overrightarrow{BA} e com a ferramenta compasso traçar uma circunferência de raio \overline{BG} tendo seu centro em B. Com a ferramenta intersecção de dois objetos obter o ponto de intersecção entre a circunferência e a semirreta \overrightarrow{BC} que é o ponto H, conforme a figura 145.

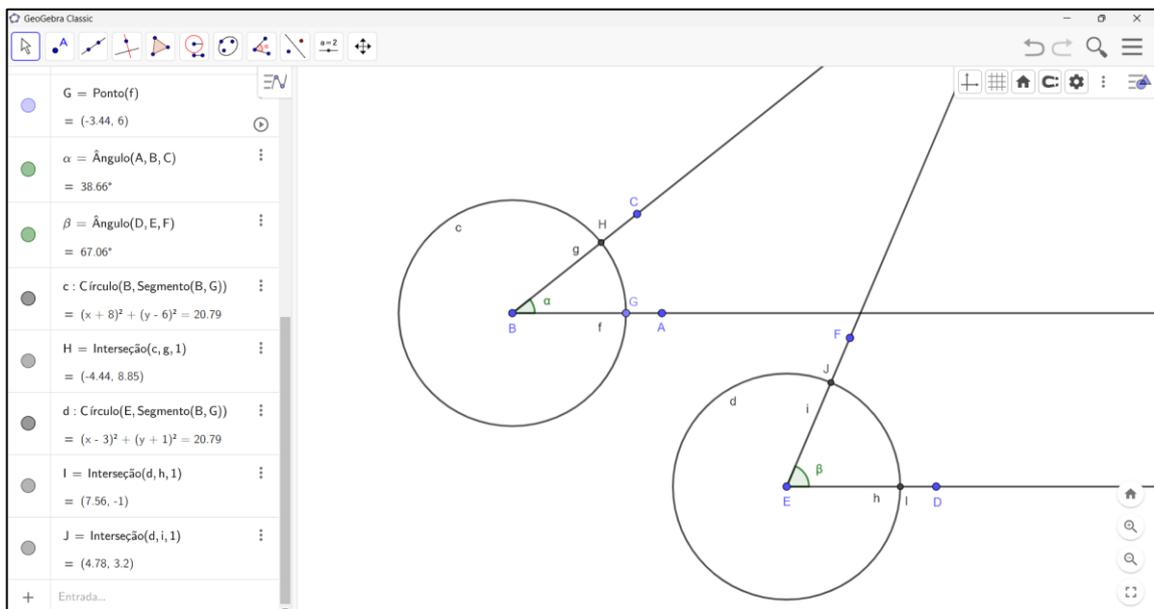
Figura 146 – Construção de uma circunferência *c*



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Na figura 147 com a ferramenta compasso, vamos construir uma circunferência de raio \overline{BG} tendo seu centro em E. Com a ferramenta intersecção de dois objetos determinar o ponto I que é a intersecção da semirreta \overline{ED} com a circunferência *d* e o ponto J que é a intersecção da semirreta \overline{EF} com a circunferência *d*.

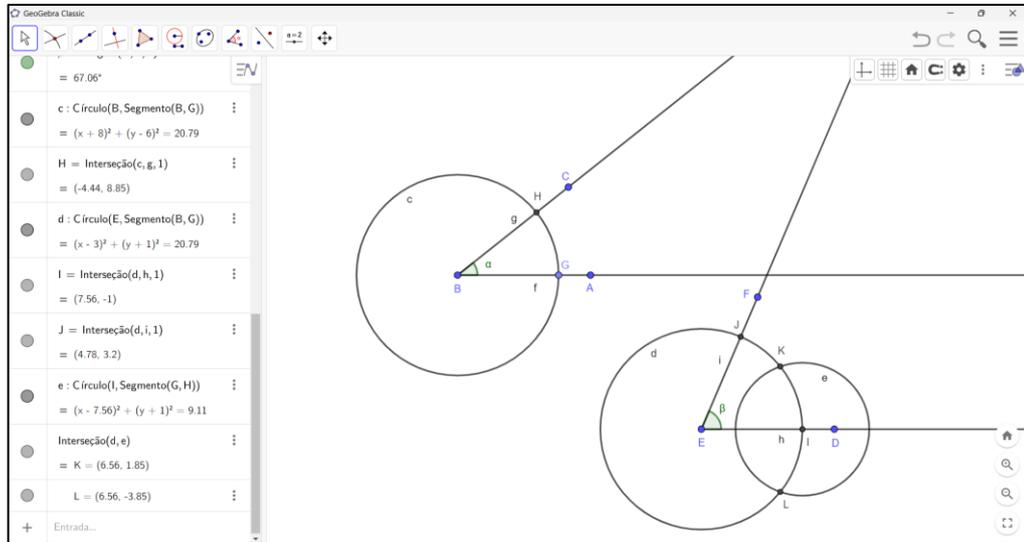
Figura 147 – Construção de uma circunferência *d*



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Utilizando a ferramenta compasso novamente vamos construir uma circunferência de raio \overline{GH} tendo seu centro em I. Na figura 148 é possível observar os pontos K e L que são a intersecção entre as circunferências d e e .

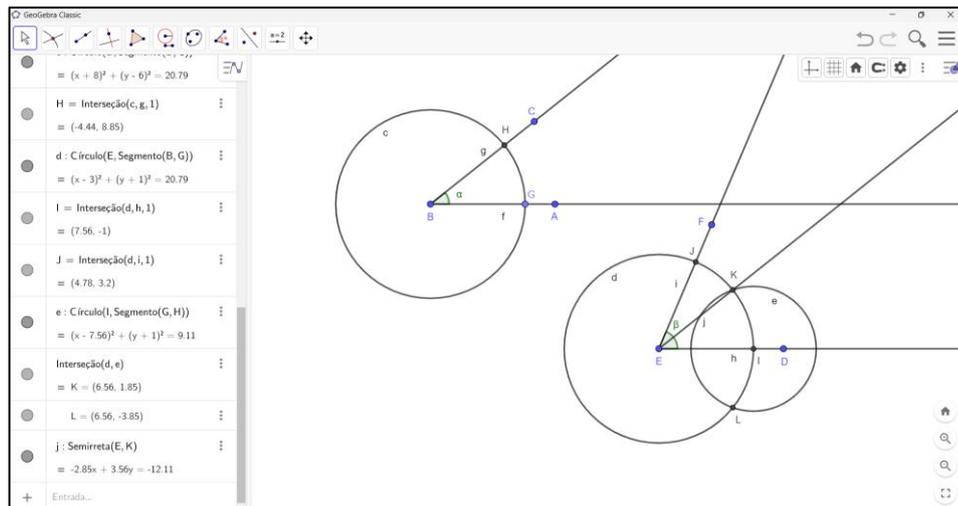
Figura 148 – Construção de uma circunferência e



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Com a ferramenta semirreta vamos traçar uma semirreta que tem origem em E e passe pelo ponto J. Dessa forma podemos determinar o ângulo $\widehat{I\hat{E}K}$ que é cômgruo ao ângulo $\widehat{A\hat{B}C}$. Comparando os ângulos $\widehat{D\hat{E}F}$ e $\widehat{I\hat{E}K}$, temos que $\widehat{I\hat{E}K} < \widehat{D\hat{E}F}$, conforme a figura 149.

Figura 149 – Comparando os ângulos $\widehat{D\hat{E}F}$ e $\widehat{I\hat{E}K}$



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

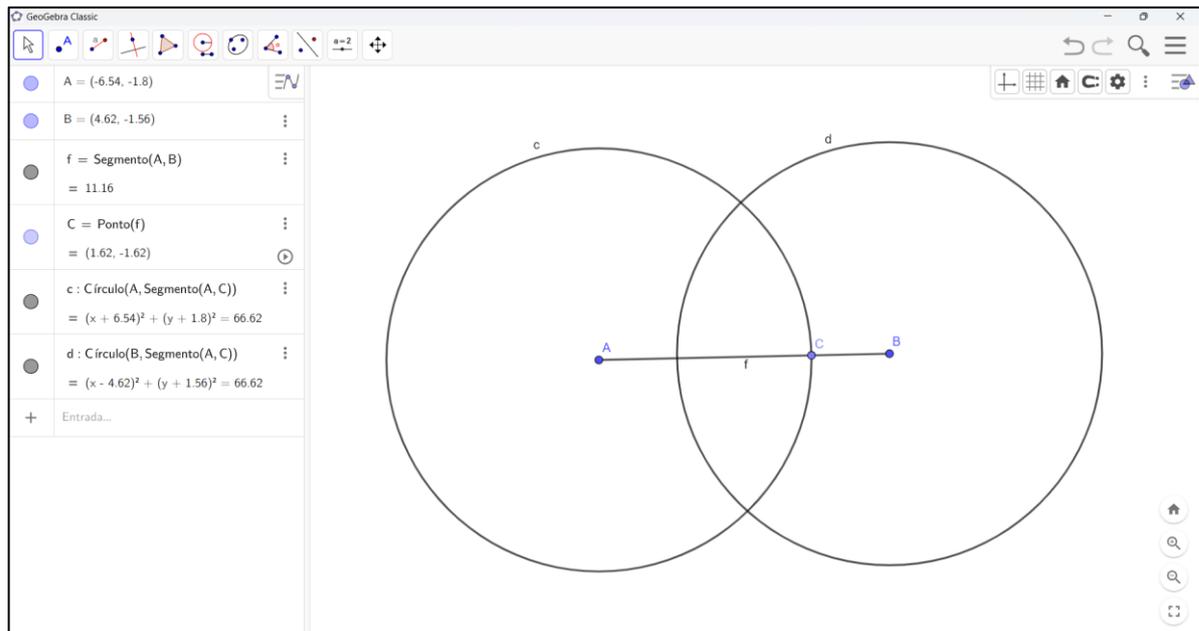
Logo, o ângulo $\widehat{ABC} = \widehat{IEK}$ e que $\widehat{IEK} < \widehat{DEF}$, pois como \overline{EI} e \overline{DE} são congruentes e os ângulos partem da mesma origem no ponto E, o segmento \overline{EF} tem uma abertura maior que o segmento \overline{EK} , ou seja, $\widehat{ABC} < \widehat{DEF}$.

7.1.4 Construção de mediatriz de um segmento

Vamos construir através do *GeoGebra* a mediatriz de um segmento qualquer.

Dado o segmento \overline{AB} , tome um ponto C em \overline{AB} tal que a medida do segmento \overline{AC} seja maior que a metade do segmento \overline{AB} . Utilizando a ferramenta compasso, vamos construir uma circunferência c cuja medida do raio é \overline{AC} com centro em A. Logo em seguida construir uma circunferência d de raio \overline{AC} com centro em B. Na figura 150 podemos ver a construção dessas duas circunferências.

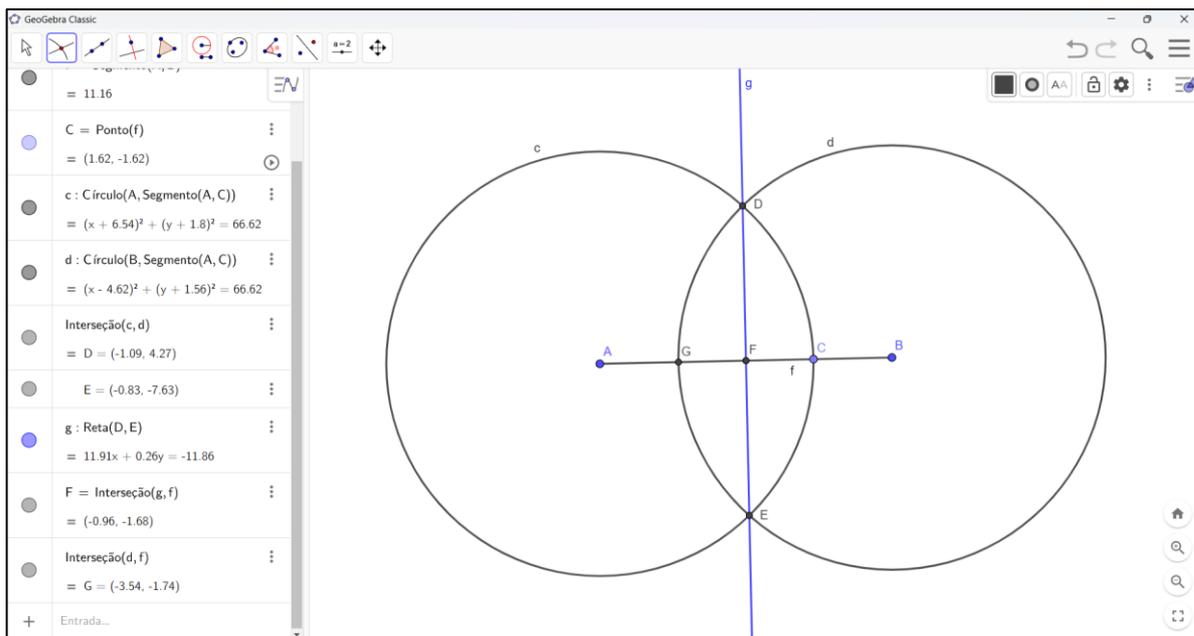
Figura 150 – Construção das circunferências c e d



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Agora com a ferramenta intersecção de dois objetos vamos obter os pontos D e E que são os pontos de intersecção entre as duas circunferências e o ponto G que é o ponto de intersecção entre o segmento \overline{AB} e a circunferência d .

Figura 151 – Mediatriz de um segmento



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

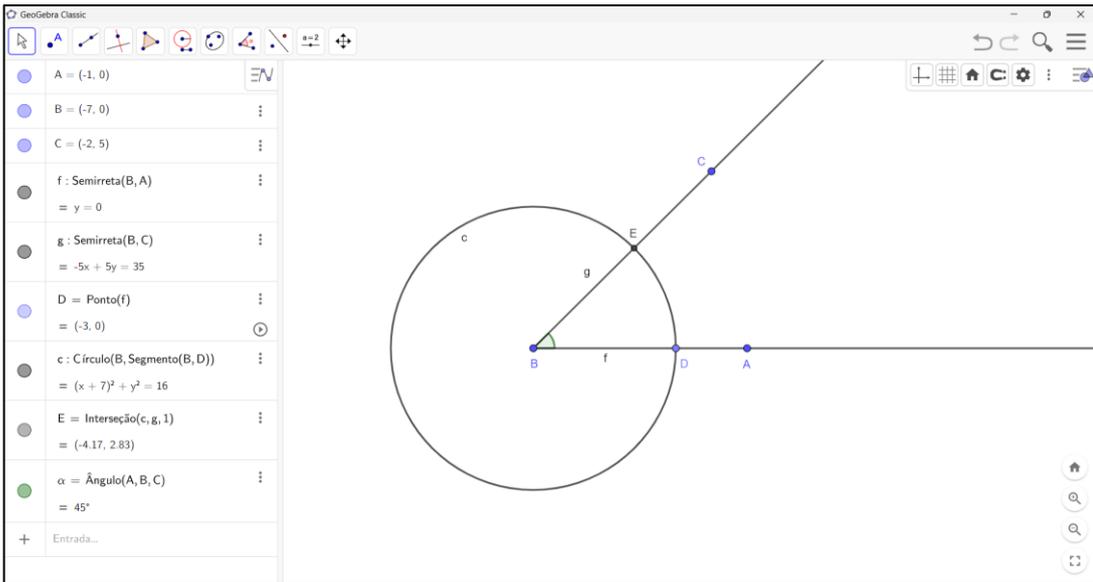
Por fim, é preciso traçar uma reta que passe pelos pontos D e E . Essa reta é a mediatriz do segmento \overline{AB} , pois é possível ter a congruência entre os triângulos ADF e BDF , sendo o ponto M o ponto médio dessa congruência. O ponto F é a intersecção da reta g (mediatriz) com o segmento \overline{AB} , ou seja, o ponto F é o ponto médio do segmento \overline{AB} .

7.1.5 Construção da bissetriz de um ângulo

Vamos construir através do *GeoGebra* a bissetriz de um ângulo qualquer.

Para determinar a bissetriz de um ângulo é necessário inserir um ponto D que pertença a semirreta \overrightarrow{BA} e com a ferramenta compasso, construir uma circunferência de raio \overline{BD} cujo centro é dado em B . Na figura 152 é ilustrado a circunferência de raio \overline{BD} e o ponto E é a intersecção da circunferência com a semirreta \overrightarrow{BC} .

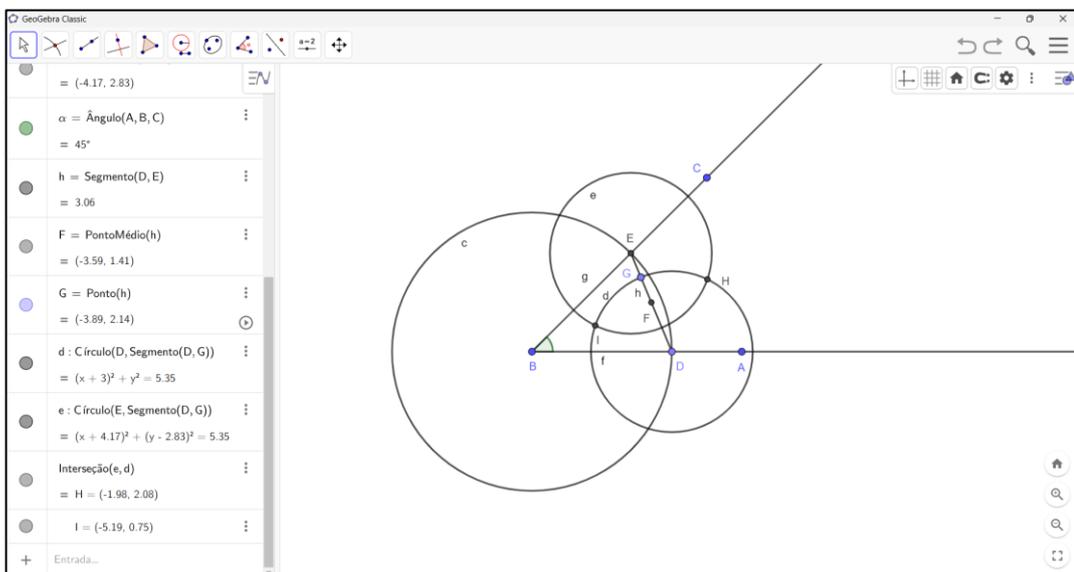
Figura 152 – Ângulo \widehat{ABC}



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Com a ferramenta segmento vamos construir o segmento \overline{DE} e com a ferramenta ponto médio definir o ponto F. Depois vamos inserir um ponto G entre o segmento \overline{DE} , de forma que a distância entre os pontos D e E seja igual ou maior que a metade do segmento \overline{DE} , ou seja maior que segmento \overline{DF} . Com a ferramenta compasso, vamos construir uma circunferência de raio \overline{DG} com o seu centro em D e construir uma outra circunferência de raio \overline{DF} com o seu centro em E, assim como ilustrado na figura 153.

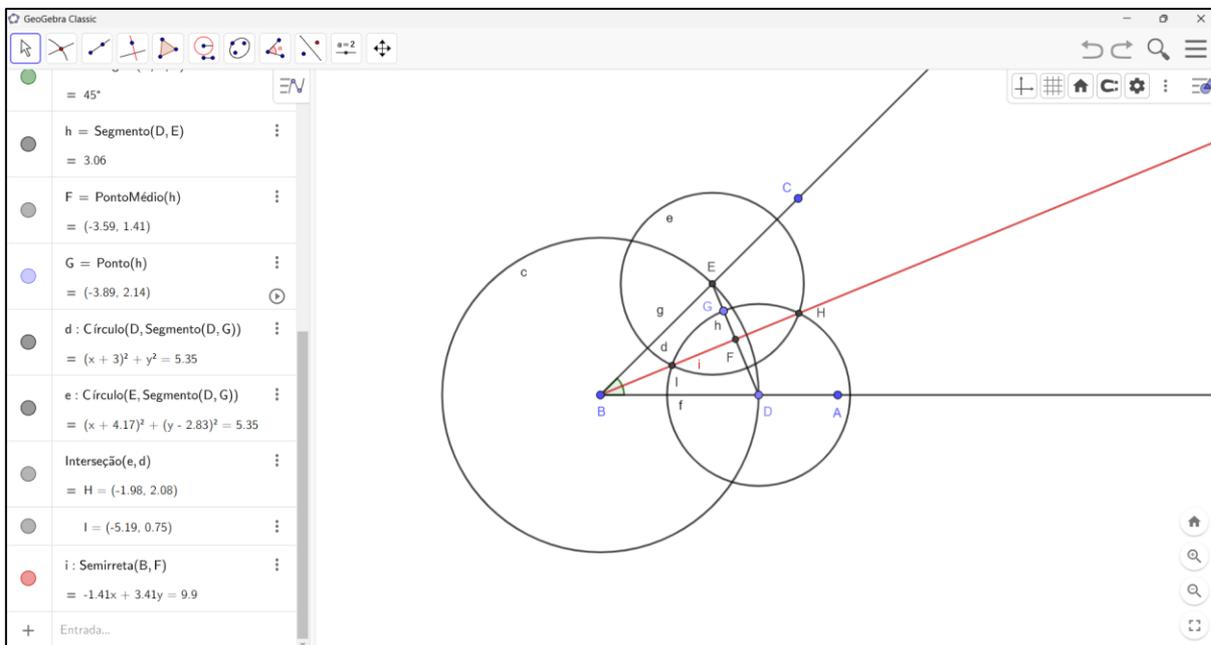
Figura 153 – Intersecção das circunferências de raio \overline{DF}



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Com o auxílio da ferramenta intersecção de dois objetos vamos encontrar os pontos de intersecção entre as duas circunferências de raio \overline{DG} . Os pontos H e I são as intersecções entre a circunferência d e a circunferência e .

Figura 154 – Bissetriz de um ângulo



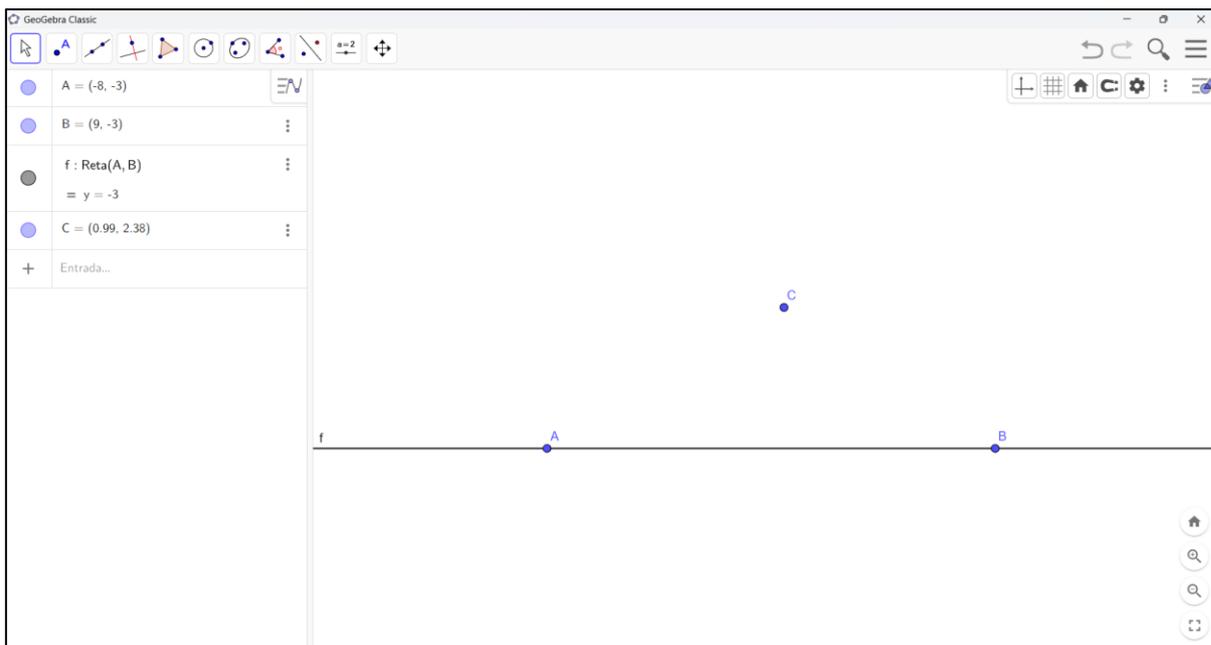
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Com o auxílio da ferramenta semirreta vamos selecionar os pontos B e F, dessa forma a reta i é a bissetriz do ângulo \widehat{ABC} . Pois, os triângulos DBF e EBF são congruentes pelo caso LLL, portanto o ângulo \widehat{DBF} é congruente ao ângulo \widehat{EBF} .

7.1.6 Dado um ponto fora de uma reta, construir uma reta paralela a reta dada passando por esse ponto

Vamos construir através do *GeoGebra* uma reta paralela a uma reta dada que passa por um ponto que não pertence a reta. Inicialmente dada uma reta f com os pontos A e B pertencentes a reta e inserindo um ponto C que não pertencente a reta, conforme a figura 155.

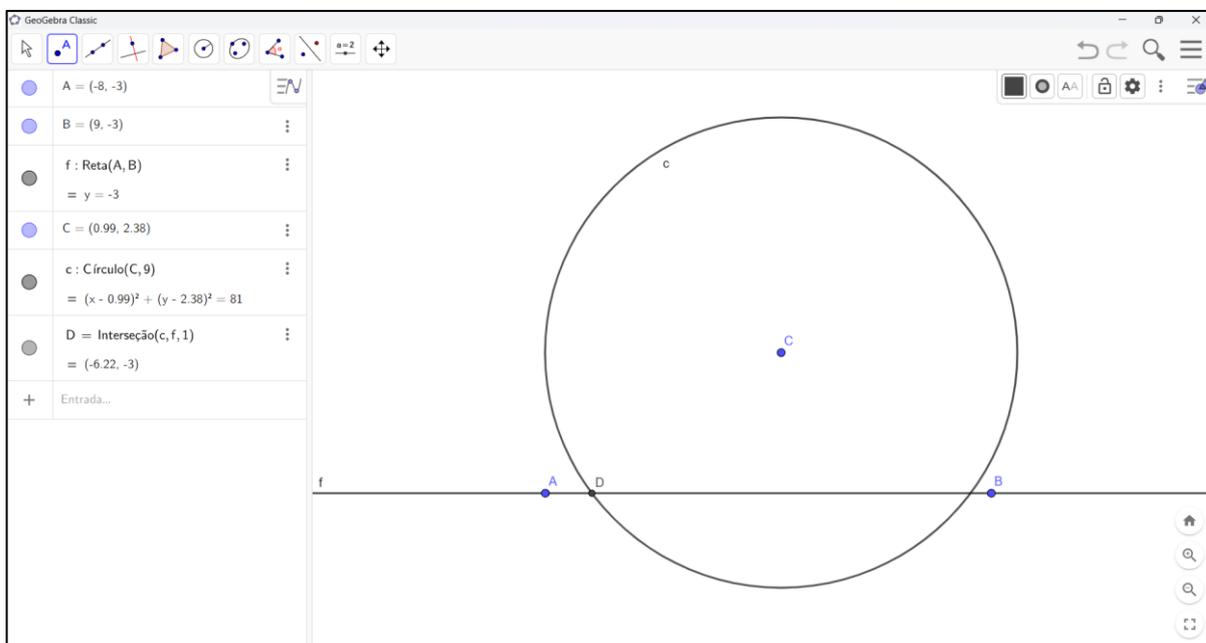
Figura 155 – Reta f e um ponto fora da reta



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Desenhando um círculo de centro no ponto C e raio maior que a distância entre o ponto C e a reta t , ou seja, $r > d(C,t)$. Dessa forma, a circunferência de centro em C intercepta a reta f em dois pontos, conforme a figura 156.

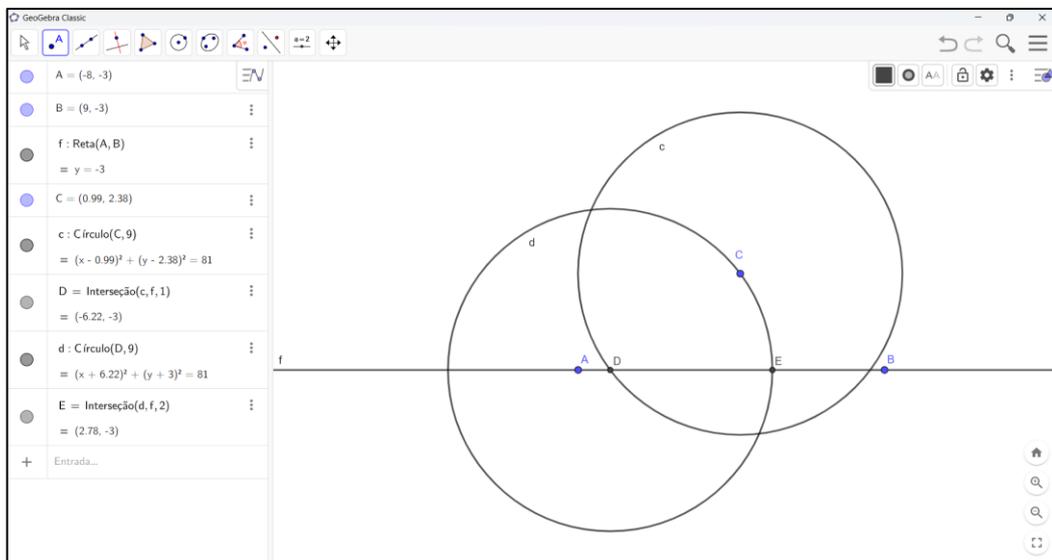
Figura 156 – Construção de uma circunferência dados centro e raio



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Com a mesma medida do raio da primeira circunferência, vamos agora construir outra circunferência com o centro em D; a intersecção dessa nova circunferência com a reta f é o ponto E.

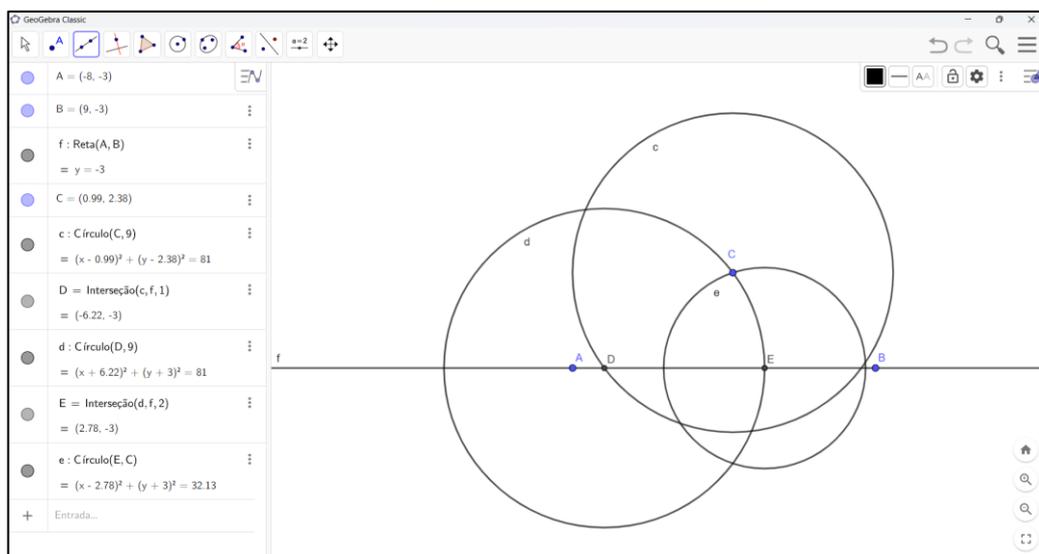
Figura 157 – Circunferência com centro em D



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Com a ferramenta compasso vamos selecionar os pontos C e E, e escolher como centro da circunferência o ponto E. A figura 158 ilustra a construção da circunferência de raio \overline{CE} .

Figura 158 – Circunferência de raio \overline{CE} .

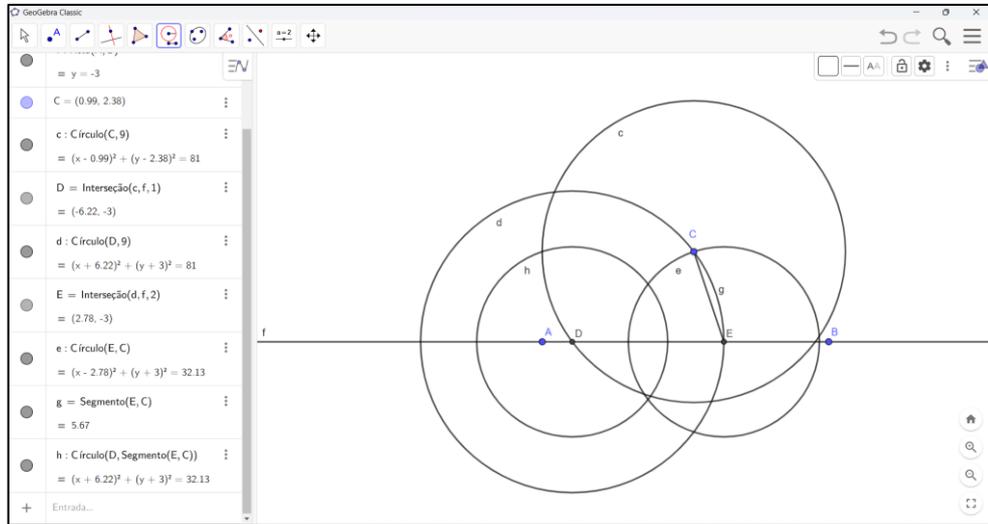


Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Utilizando o segmento \overline{CE} vamos construir outra circunferência agora com o centro em D.

D.

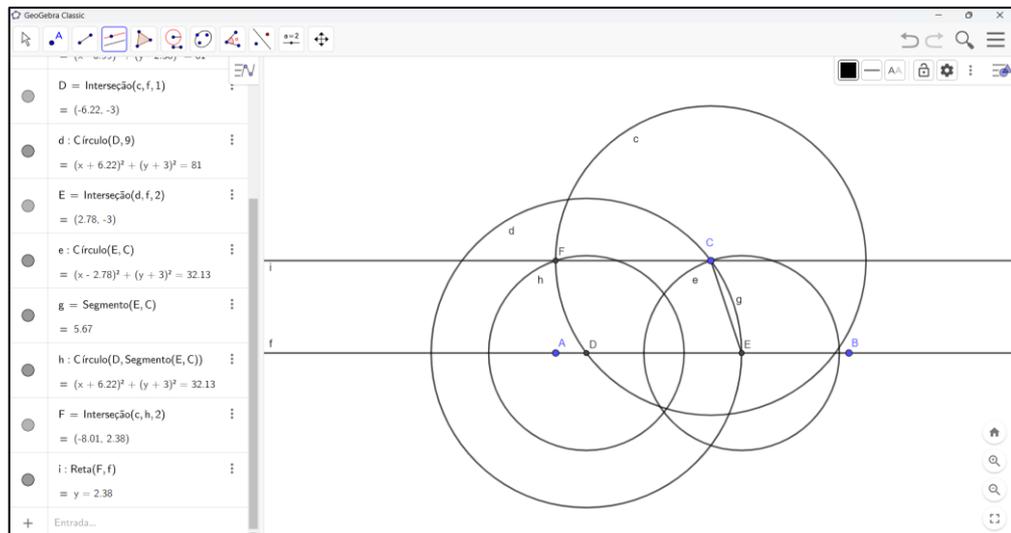
Figura 159 – Circunferência de raio \overline{CE} com centro em D



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Utilizando a ferramenta intersecção de dois pontos, vamos determinar o ponto F que é a intersecção da circunferência c com a circunferência h , conforme mostra a figura 160. E com a ferramenta reta paralela, traçar uma reta paralela a reta f que passe pelos pontos F e C, daí temos a inserção da reta i que é paralela a reta f e que passa pelo ponto C.

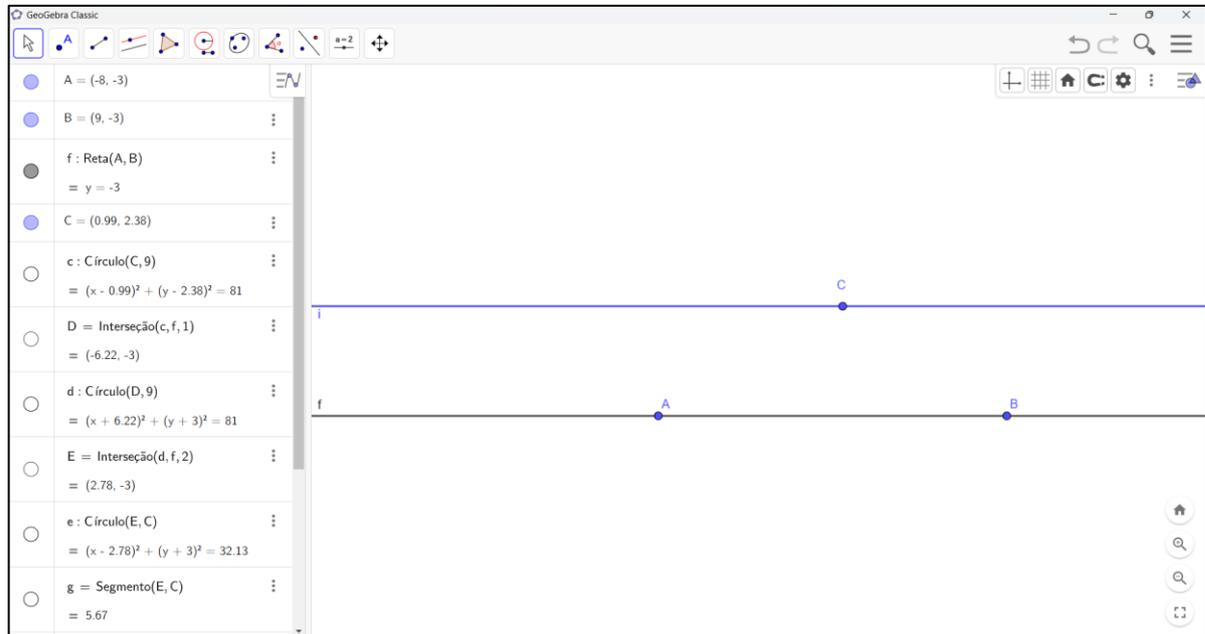
Figura 160 – Intersecção da circunferência c com a circunferência h



Fonte: Autor, GeoGebra, 2024

Observando-se a construção feita na figura 160, temos que o quadrilátero DECF é um losango e portanto, seus lados DE e FC são paralelos.

Figura 161 – Retas paralelas f e i



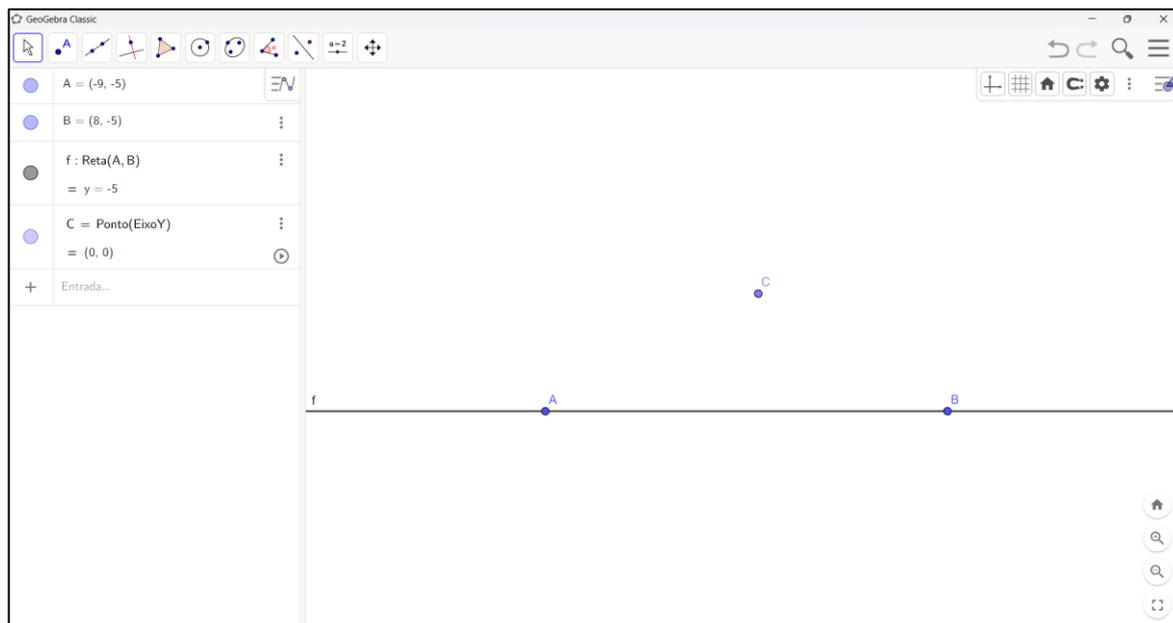
Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Portanto, dessa forma conseguimos traçar uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto que não pertence a ela.

7.1.7 Dado um ponto fora de uma reta, construir uma reta perpendicular a reta dada passando por esse ponto

Vamos construir através do *GeoGebra* uma reta perpendicular a uma reta dada que passa por um ponto que não pertence a reta. Dada uma reta f como na figura 162 e utilizando a ferramenta ponto, vamos inserir o ponto C em uma posição qualquer.

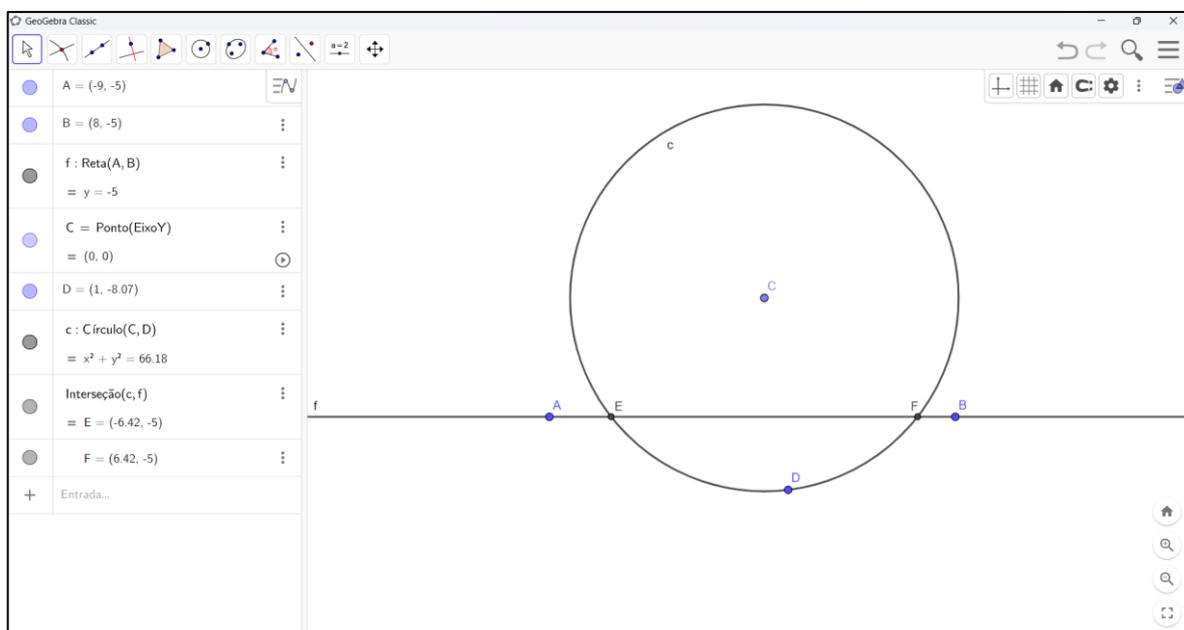
Figura 162 – Reta f e um ponto fora da reta



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Utilizando a ferramenta círculo dados centro e raio podemos construir uma circunferência de centro em C que intercepte a reta f em dois pontos, E e F, conforme a figura 163.

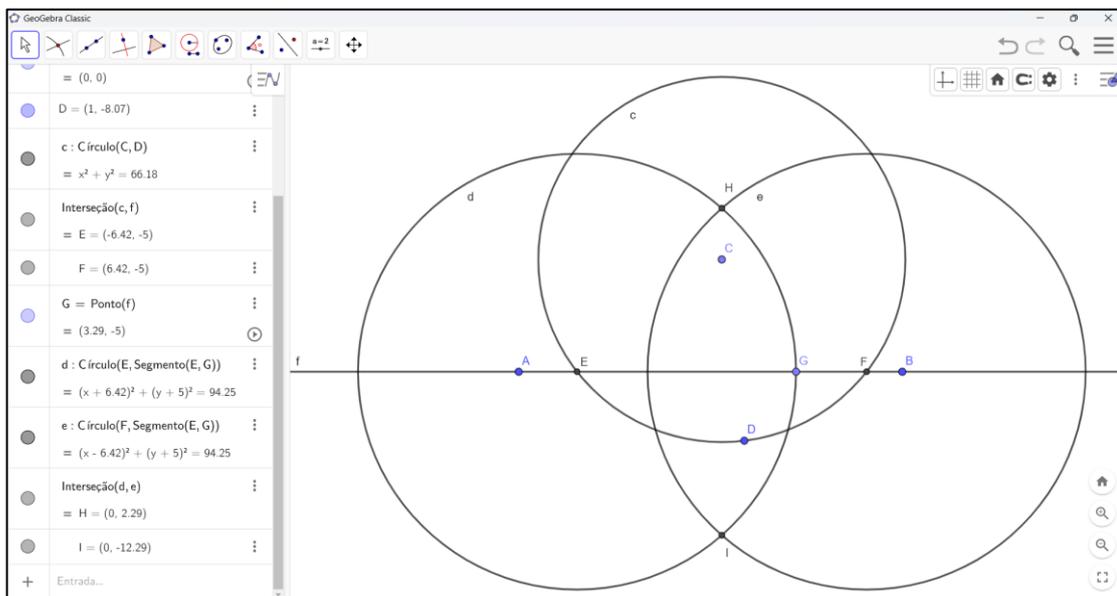
Figura 163 – Circunferência com centro em C



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Com a ferramenta circunferência dados centro e raio é necessário criar uma circunferência de centro em E cujo raio seja maior que a metade do segmento \overline{EF} . Depois devemos repetir o processo agora com a circunferência com o centro em F.

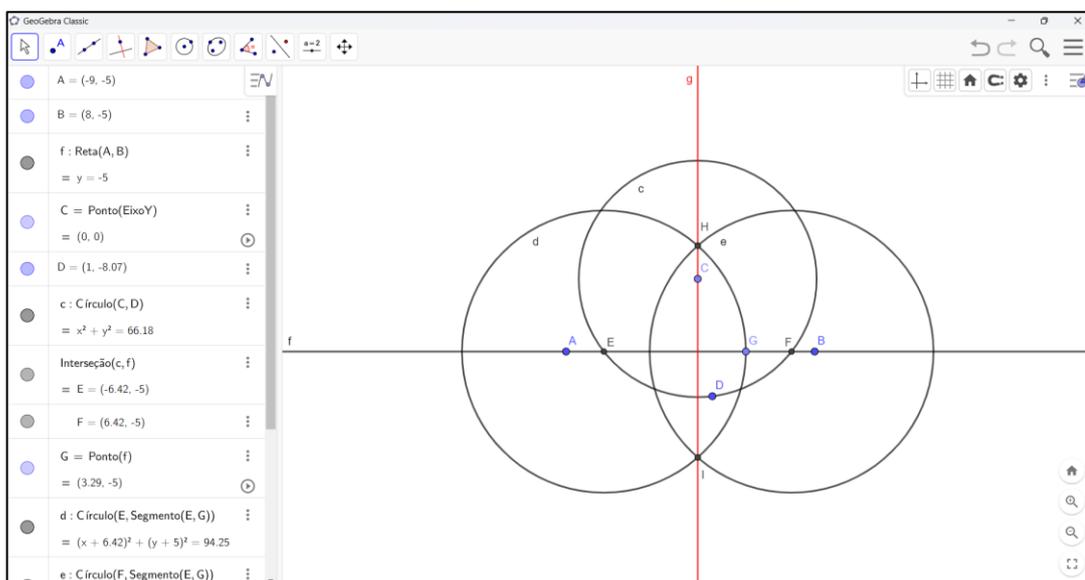
Figura 164 – Circunferências com centro em E e F



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Agora com a ferramenta reta é só selecionar os pontos H e I, conforme a figura 165. A reta g é a reta perpendicular a reta f que passa pelo ponto C.

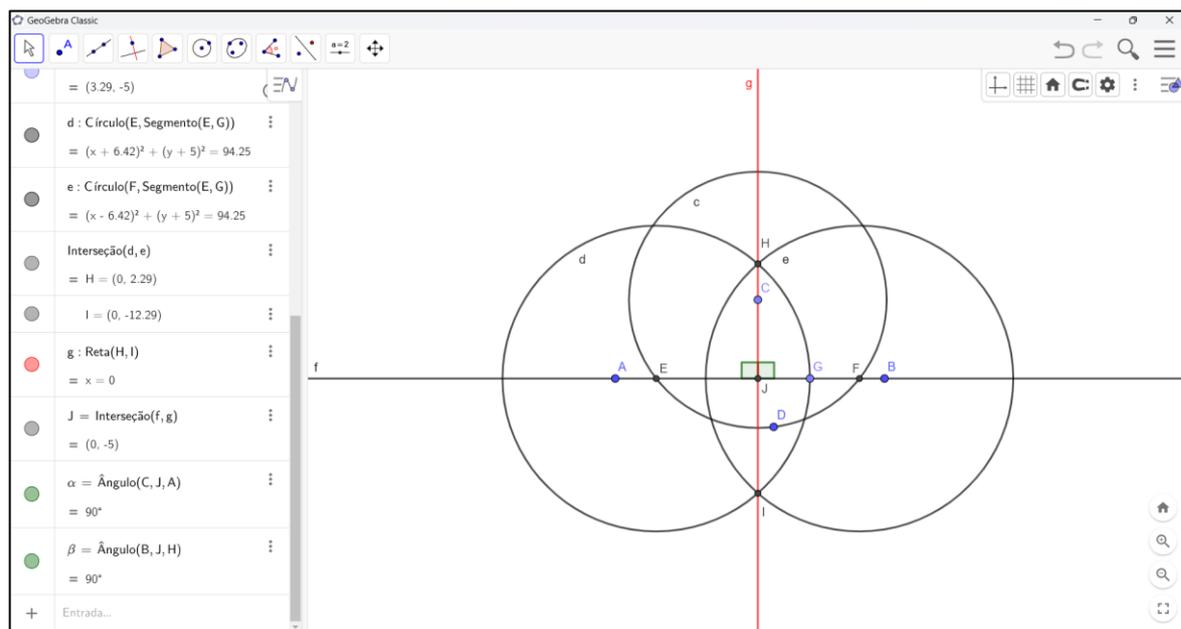
Figura 165 – Reta perpendicular g



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Para concluir que a reta g é perpendicular a reta f é necessário que a reta g forme um ângulo de 90° com a reta f . Logo, temos que o triângulo EJH é semelhante ao triângulo FJH e sendo $\overline{EH} = \overline{FG}$ e \overline{JH} o lado em comum entre os dois triângulos, concluímos que $\overline{EJ} = \overline{FJ}$. Dessa forma, temos que os ângulos $H\hat{J}E$ e $H\hat{J}F$ são congruentes pelo caso LAL, conforme a figura 166.

Figura 166 – Ângulos $H\hat{J}E$ e $H\hat{J}F$



Fonte: Autor, *GeoGebra*, 2024

Portanto, podemos concluir que a reta g é paralela a reta f e passa pelo ponto C .

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, procurou-se analisar o uso do *software GeoGebra* para explorar os conceitos da geometria plana de forma dinâmica, tendo como objetivos proporcionar a aprendizagem de conceitos de Geometria Plana no ensino básico, a análise das potencialidades e as limitações do *GeoGebra* para a exploração de conceitos da Geometria Plana, a resolução de questões da OBMEP utilizando o *GeoGebra* e a produção de vídeos que expressem de forma interativa os conceitos e as demonstração de determinadas propriedades em geometria plana.

Em um mundo voltado para as tecnologias digitais e inserido na Educação 5.0, o uso de *software* com o *GeoGebra* é uma excelente estratégia de ensino por ser um recurso metodológico dinâmico que agrega valor às aulas de Matemática. Para Sousa *et al.* (2021) a sociedade está sendo transformada pelo uso de tecnologias digitais e com isso surge a necessidade de utilizar essas tecnologias no ensino de Matemática.

O *GeoGebra* é relevante para o estudo da Geometria Plana, pois consegue unir os conceitos e teorias que estão nos livros didáticos com a prática ou lúdico que é necessário numa abordagem moderna.

Com base neste trabalho, o *software GeoGebra* se mostrou como um instrumento metodológico capaz de resolver problemas e demonstrar fórmulas de uma maneira dinâmica, sendo possível melhorar a aprendizagem dos estudantes em Geometria Plana, encorajando a experimentação e promovendo a colaboração entre estudantes e professores.

Portanto, o *GeoGebra* permite que diferentes habilidades e estilos de aprendizagem dos estudantes sejam trabalhadas, permitindo um avanço mais significativo na aprendizagem, assim como sua exploração em áreas de interesse específicas.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, G. L. **Uma proposta de atividades sobre a relação de Euler por meio do software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal de Jataí, 2021.

ALFONSI, L. G.; FECHI, R. F.; FERRARESI, F. H. **A geometria e a astronomia na Grécia Antiga**. Universidade Estadual de Campinas, 2006.

ALVES, W. F. M. **Uso do GeoGebra no ensino de geometria plana no ensino básico**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2017.

ANDRADE, T. M. (org.). **Matemática interligada : trigonometria, fenômenos periódicos e programação** 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ANDRADE, T. M. **Jornadas: novos caminhos. Matemática: 8º ano**. 1. ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática: 9º ano**. 4. ed. Renovada. São Paulo : Editora do Brasil, 2015.

ARAÚJO, R. R. O. **Uma perspectiva do Teorema de Menelaus através do software Geogebra**. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí, Paranaíba, 2017.

BACHA, J. A. M. **Geometria Plana: teoremas clássicos e aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BASSALO, J. M. F. A crônica da gravitação. Parte II: da Grécia antiga à idade média. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 7, n. 3, p. 212-224, 1990.

BASTIAN, I. V. **O Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

BENTO, H. A. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o software: GeoGebra**. 2010. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini: 7º ano**. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini: 8º ano**. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini: 9º ano**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRITO, G. V. S. **Aplicações de Teoremas de Geometria Plana em Problemas de Olimpíadas de Matemática**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

CATANEO, V. I. **O uso do software Geogebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da matemática no ensino fundamental séries finais**. Monografia. Centro Universitário Barriga Verde - UNIBAVE. Orleans. 2011.

CÔNSOLO, A. T. G. Educação 4.0: onde vamos parar? *In*: GARCIA, S. **Gestão 4.0 em tempos de disrupção**. São Paulo: Blucher, 2020, p. 93 – 114.

COSTA, A. G. C. **A importância da função afim e da geometria plana no aprendizado de física do ensino médio e o GeoGebra como ferramenta**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2018. 142 f.

COSTA, A. S. M. **A utilização do Geogebra como ferramenta para o ensino de Trigonometria**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória. 2017.

DANTE, L. R. **Teláris matemática: 7º ano**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Teláris essencial matemática: 8º ano**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2022.

DANTE, L. R. **Teláris matemática: 9º ano**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9 : geometria plana**. 7. ed. São Paulo : Atual, 2013.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução Irineu Bicudo, São Paulo: Unesp, 2009, 593 p.

EVANGELISTA, L. A. **O Teorema de Pitágoras: alternativas de demonstrações**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2014.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Rodrigues. 5ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1977 *apud* EVANGELISTA, L. A. **O Teorema de Pitágoras: alternativas de demonstrações**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2014.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Rodrigues. 5ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. 848 p.

FELCHER, C. D. O.; FOLMER, V. EDUCAÇÃO 5.0: Reflexões e perspectivas para sua implementação. **Revista Tecnologias Educacionais em Rede (ReTER)**, v. 2, n. 3, p. e5/01–15, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/reter/article/view/67227>. Acesso em: 15 jan. 2023.

FELCHER, C. D. O.; BLANCO, G. S.; FOLMER, V. Educação 5.0: uma sistematização a partir de estudos, pesquisas e reflexões. **Pesquisa, Sociedade e Desenvolvimento**, v. 11, n. 13, 2022.

FERREIRA, F. D. **Unificando os Teoremas de Menelaus e Ceva**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2017.

FONSECA, E. S. educação 5.0 – o conectivismo, a revolução digital e o ensino a distância - contribuições para o ensino híbrido. **Revista Científica Multidisciplinar**, v. 2, n. 4, 2021.

FREITAS, V. P. **Alguns teoremas clássicos da geometria sintética e aplicações**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013.

FREITAS, V. P.; OLIVEIRA, N. V. Alguns teoremas clássicos da geometria sintética e aplicações. **Ciência e Natura**, Santa Maria v.37 n.3, 2015, Set.- Dez. p. 898 – 909.

GAY, M. R. G. **Aribabá conecta matemática: 7º ano**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

GAY, M. R. G. **Aribabá conecta matemática: 8º ano**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista matemática: 7º ano**. 1. ed. São Paulo : FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista matemática: 8º ano**. 1. ed. São Paulo : FTD, 2022.

GOULART, R. F. P. **Uso de ferramentas tecnológicas no ensino de Matemática: relato de uma experiência como uso do *software* GeoGebra durante a pandemia da Covid-19 e uma proposta de oficina para professores de Matemática**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2022.

HALLAL, Renato et al. O Ensino de matemática e o *software* GeoGebra: apresentando potencialidades dessa relação como recurso para o ensino de derivada. **Revista ESPACIOS**, v. 798, p. 1015. 2020.

HILBERT, D. **Fundamentos da Geometria**. Tradução: A. J, Franco de Oliveira. 1ª ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

IEZZI, G.; *et al.* **Matemática: ciência e aplicação**. Vol. 1. 9. Ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

JORGE, A. T. **Teorema de Pitágoras: aplicabilidade em sala de aula**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021.

KAMERS. F. **Pitágoras de Samos e o Teorema de Pitágoras**. Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

KAMEYAMA, E. S. **O uso do GeoGebra no Ensino de Geometria Espacial de Posição**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2021.

KESSLER, A. L. F. **Aplicações de funções na área das ciências da natureza por meio do Geogebra**. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT. Universidade Federal de Santa Maria – Santa Maria – Rio Grande do Sul, 2015.

LIMA, M. L. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. S. **Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo geogebra: Incentivo à visualização para alunos do 2º ano do ensino médio**. VIDYA, v. 38, n. 1, p. 199-221, jan./jun., 2018 - Santa Maria, 2018.

LIMA, A. T. O. **Teorema de Menelaus e de Ceva: apresentação, demonstração e aplicação**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016.

LOPES, J. L. **Aplicando o Teorema de Ptolomeu a alunos da rede pública**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014.

LUNA, W. A. **Uma construção da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.

LUTZ, A. Educação 3.0 e os desafios à formação continuada dos professores. **Revista e-Curriculum**, v. 19, n. 2, p. 748-771, 2021.

MAIA FILHO, R. A. **O Teorema de Ptolomeu e aplicações**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

MAR, E. B. **O Teorema de Euler para poliedros**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013.

MARINHO, E. R. M. **A história da matemática como motivação para a aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

MARINS, L. S. **O uso do GeoGebra no ensino da Geometria Analítica: estudo da reta**. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

MARTINS, W. H. B. S.; PACHÊCO, F. F. F. Resolução de uma atividade com o auxílio do GeoGebra: um olhar para a função afim e o movimento uniforme. **Revista Cearense de Educação Matemática**, v. 2, n. 3, p. 1-16, 2023

MASSAGO, S. **Axiomas da Geometria Euclidiana**. 2010.

MATOS, R. D. **Geometria plana: propriedades e teoremas não muito usuais no cotidiano da educação básica**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Pará, Abaetetuba, 2021.

MENDES, M. J. F.; ROCHA, M. L. P. C. Rumos que levam à tabela trigonométrica a partir da corda. In: CHAQUIAM, M.; CABRAL, N. F. (org.). **Coleção Educação Matemática na Amazônia**, v. 1, Belém: SBEM-PA., 2010

MENDES, C. J. **O uso do GeoGebra 3D no ensino de Geometria**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade de Brasília, Brasília, 2020.

MIRANDA, R. S. **O uso do GeoGebra no estudo de trigonometria**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2021.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 138 p.

MONTES, P. C. M. **A utilização do GeoGebra no ensino da geometria analítica**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2021.

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018.

MOREIRA, A. C. S. **Geometrias sob a Axiomática de Hilbert**. Campinas: Unicamp, 2006.

OLIVEIRA, R. D.; DAMASCENO, M. M. S. **Educação 4.0: aprendizagem, gestão e tecnologia**. OLIVEIRA, R. D.; DAMASCENO, M. M. S. (org.). Iguatu: Quipá Editora, 2021.

OLIVEIRA FILHO, A. J. **O Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

OLIVEIRA, E. G. **Uma abordagem da trigonometria no ensino fundamental, tendo a história como recurso didático**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

OLIVEIRA, J. **Tópicos selecionados de trigonometria e sua história**. Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

ORNELAS, M. G. **Explorando áreas e volumes de figuras geométricas como forma de estimular o aprendizado de produtos notáveis via GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2021.

PAIXÃO, A. A. S. **Utilização de materiais concretos e do *software* geogebra no ensino aprendizagem da geometria espacial**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Teófilo otoni – Minas Gerais, 2019.

PALMERIM, A. C. **Uma proposta para o ensino de trigonometria por meio do *software* Geogebra**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas e Naturais - Universidade Federal do Pará. 81 f. 2019.

PAPA NETO, A. **Geometria plana e construções geométricas**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

PARENTE, U. L. **Os Teoremas de Ptolomeu e Hiparco**. Portal da Matemática, 2019.

PATARO, P. R. M.; BALESTRI, R. D. **Matemática essencial: 7º ano**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PATARO, P. R. M.; BALESTRI, R. D. **Matemática essencial: 9º ano**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PEREIRA, T. L. M. **Geometria dinâmica: um estudo de atividades investigativas e demonstrações em geometria plana**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal De Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2022.

PILLING, D. P. A.; DIAS, P. M. C. A hipótese heliocêntrica na Antiguidade. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29 ,n. 4 ,p. 613 – 623 , 2007.

PORTELA, C. G. **Quadriláteros Convexos Inscritos e Circunscritos**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2021.

REALE, G. **História da filosofia antiga**. São Paulo: Loyola, 1993. v.1 *apud* JABLONSKI, E.; BAIER, T. Aspectos Históricos e Filosóficos das relações entre Matemática e Música. X ANPED SUL, Florianópolis, 2014.

REIS, P. F. S. **O Teorema de Tales por meio de atividades investigativas**. Dissertação (Mestrado) – Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes, 2014.

ROCHA, A. F. **O uso do *software* GeoGebra como ferramenta auxiliar no ensino da área de figuras planas**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas e Naturais - Universidade Federal do Pará. 75 f. 2019.

RODRIGUES, P. V. S. **Poliedros regulares: Aplicações e construções utilizando o *software* geométrico GeoGebra como instrumento facilitador no processo de ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

SANT'ANA, É. C. **Estratégia didática para o ensino da geometria analítica com o auxílio do Aplicativo Geogebra**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia. Campos dos Goytacazes, RJ, 2019. 161 f.

SANTOS, W. C. **As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Leibniz**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. B. **Geometria Euclidiana Plana**. Universidade Federal de Sergipe, 2011.

SCALDELI, D. **O *software* geogebra** (org.). O GeoGebra e a matemática da educação básica: frações, estatística, círculo e circunferência. BASNIAK, I; ESTEVAM, E. J. G. Curitiba: Ithala, 2014. 130p.

SERRANO, S. A. **Utilização de GeoGebra na construção de instrumentos: relógio de pêndulo e engrenagens.** Dissertação (Mestrado) - PROFMAT. Rio de Janeiro, 2014.

SILVA, J. **Investigações Matemáticas e o ensino da Geometria: Uma proposta de Intervenção em sala de aula com o uso do Geogebra.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2022.

SILVA, V. M. R. **Uma visão dinâmica de alguns teoremas geométricos clássicos via GeoGebra.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2022.

SILVA, G. M. D. **Um estudo sobre o uso do GeoGebra na aprendizagem de geometria analítica no ensino médio.** 2016

SILVA, M. R. A. **A utilização do *software* Geogebra no processo de ensino-aprendizagem da geometria plana.** Dissertação (Mestrado) – PROFMAT. Universidade Federal de Alagoas (UFAL) – Maceió, 2017.

SILVA, J. E. B.; FANTI, E. L. C.; PEDROSO, H. A. Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 21-47, jul. 2016.

SILVA, E. A. **Teorema de Casey: Uma generalização do Teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

SILVA, J. C. **Os Teoremas de Menelaus e Ceva.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

SILVA FILHO, E. M. **Uma abordagem didática diferenciada para o Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

SILVA, J. W. A.; *et al.* O uso do GeoGebra no estudo de alguns resultados da Geometria Plana e de Funções. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, 2012.

SILVEIRA, E. **Desafios da Matemática com Ênio Silveira: 8º ano**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

SOUSA, F. G. A.; *et al.* Contribuições das novas tecnologias à aprendizagem matemática. *In*: MOREIRA, M. M.; SILVA, A. G. F. G.; ALVES, F. C. (org.). **O Ensino de Matemática na Educação Contemporânea: o devir entre a teoria e a práxis**. 1. ed. Iguatu: Quipá Editora, 2021, p. 34-42.

SOUZA; T. S. **Um estudo da extensão do seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo para funções de domínio real**. Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **#Contato matemática: 1º ano**. 1º ed. São Paulo: FTD, 2016.

SOUZA, F. G. A.; *et al.* Contribuições das novas tecnologias à aprendizagem matemática. *In*: MOREIRA, M. M.; SILVA, A. G. F. G.; ALVES, F. C. **O ensino de matemática na educação contemporânea : o devir entre a teoria e a práxis**. Iguatu, CE : Quipá Editora, 2021, p. 32 – 41.

SOUZA, A. A. N.; SCHNEIDER, H. N. Da educação 1.0 à educação 3.0: desafios para a prática docente no Século XXI. **Olhar de professor**, Ponta Grossa, v. 25, p. 1-20, 2022. Disponível em: <https://revistas2.uepg.br/index.php/olhardeprofessor>. Acesso em: 15 jan. 2023.

SOUZA NETO, F. R. **O cálculo de distâncias entre pontos inacessíveis**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

STIVAL, E. G. P. **Reta de Euler, Circunferência dos Nove Pontos, Sólidos Platônicos e Arquimedianos: aspectos teóricos, suas construções em GeoGebra e aplicações no Ensino**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal do Goiás, Goiânia, 2019.

TEIXEIRA, L. A. **Superação matemática: 8º ano**. 1º. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

TENÓRIO, A.; NETO, A. C. B. O uso do GeoGebra na resolução de questões sobre movimento uniforme. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. ISSN 2237-9657, v. 8, n. 1, p. 16-36, 2019.

TENÓRIO, J. L. M. **O Ensino de Geometria em Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental Antes e Depois do PNLD**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2016.

TORRES, C. E.; PEREIRA, C. L.; ELIAS, E. M. C. Educação matemática e seu ensino na educação básica no século XXI com o advento das tecnologias digitais. *In*: PEREIRA, C. L.; PEREIRA, M. R. S. **Educação matemática escolar: múltiplos contextos & abordagens de ensino**. Curitiba-PR: Editora Bagai, 2021, p. 94-108.

VELÁSQUEZ-TOBIRIO, A. M.; OLIVEIRA, M. Discutindo o modelo de Ptolomeu e sua equivalência com o modelo de Copérnico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 42, 2020.

ANEXOS

OBMEP - Questão 18 - Nível 3 - Prova 2005	https://youtu.be/enIyQgFljV8
OBMEP - Questão 4 - 2ª fase- Nível 3 - Prova 2005	https://youtu.be/X91kobP052s
OBMEP 2006 Questão 1 – Nível 3 – Fase 1	https://youtu.be/JaUzmFzJTeE
Construção de segmentos congruentes a partir de um segmento dado utilizando o GeoGebra	https://youtu.be/8aKWUwQHbHM
Construção de segmentos congruentes a partir de um segmento dado utilizando o GeoGebra	https://youtu.be/00S0VEFH9CY
Construção de segmentos congruentes a partir de um segmento dado utilizando o GeoGebra.	https://youtu.be/hzqRpR_Xq_M
Construção de ângulo com controle deslizante através do GeoGebra	https://youtu.be/9WT4XC5ooNc