Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

GUSTAVO VILARINHO RODRIGUES NETO

ANÁLISE COMBINATÓRIA: A DEDUÇÃO DE FÓRMULAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM

TERESINA
2024

GUSTAVO VILARINHO RODRIGUES NETO

ANÁLISE COMBINATÓRIA: A DEDUÇÃO DE FÓRMULAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:

Prof. Dra. Lilane de Araújo Mendes Brandão.

TERESINA

2024

R696a Rodrigues Neto, Gustavo Vilarinho.

Análise combinatória: a dedução de fórmulas na resolução de problemas do ENEM / Gustavo Vilarinho Rodrigues Neto. – 2024.

47 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, *Campus* Poeta Torquato Neto, Teresina-PI, 2024.

"Orientadora Profa. Dra. Lilane de Araújo Mendes Brandão."

"Área de Concentração: Matemática."

1. Fórmulas matemáticas. 2. ENEM. 3. Análise combinatória. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI

Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB-3ª/1188

GUSTAVO VILARINHO RODRIGUES NETO

ANÁLISE COMBINATÓRIA: A DEDUÇÃO DE FÓRMULAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Lilane de Araújo Mendes Brandão

Data de aprovação: 13 de Agosto de 2024.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Lilane de Araújo Mendes Brandão – Orientador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva – Examinador Interno
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Paulo Alexandre Araújo Sousa

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa – Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí – UFPI

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus, por ter me guiado e sustentado durante essa jornada acadêmica e em todos os momentos da minha vida.

Agradeço imensamente à minha família: à minha mãe, Solange; ao meu pai, Antonino; ao meu irmão, Felipe; à minha noiva, Isandra. O apoio e incentivo incondicional foram fundamentais para enfrentar os desafios e dificuldades ao longo deste caminho. Muito obrigado por jamais me deixarem desistir nos momentos de fraqueza.

Agradeço aos amigos do IFPI campus São João do Piauí e do campus Corrente, que me ajudaram nessa trajetória, com palavras de apoio, incentivo e também com a documentação para o afastamento que com certeza me ajudou a concluir essa grande etapa.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), aos professores Arnaldo, Afonso, Pedro, Alexandre, Natã e Valdirene que, nesses dois anos, nos proporcionaram, além de muito aprendizado, o verdadeiro significado de inspiração e motivação para perseverar. Em especial, quero agradecer à minha orientadora Prof. Dra Lilane Brandão, pelo tempo e paciência dedicado a me ajudar nessa caminhada.

Agradeço aos meus amigos do mestrado que faço questão de citá-los: Afonso, Delon, Edvaldo, Eugênio, Erasmo, Miranda, Hislley, José Carlos, Lício, Lucas, Ney, Robson e Vanilson. Obrigado por toda ajuda nesse caminho, levo comigo cada um de vocês no coração. Obrigado por todas as conversas, conselhos e ensinamentos, saibam que cada um de vocês me inspiram. Sou muito grato a Deus e sou muito feliz por conhecer e ter vocês e os professores como companheiros nessa jornada.

Agradeço imensamente a minha prima Gabriella, por ter se prontificado a me ajudar na escrita da dissertação. Sua ajuda e disposição me fizeram mais confiante para terminá-la.

Enfim, agradeço a todos que de alguma maneira incentivaram a conclusão do mestrado, emitindo palavras de ânimo.

"Construí amigos, enfrentei derrotas, venci obstáculos, bati na porta da vida e disse-lhe: Não tenho medo de vivê-la!"

Augusto Cury

RESUMO

Inicialmente, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado para o egresso do ensino médio avaliar seus conhecimentos. Contudo, desde a sua reformulação em 2009, passou a ser um dos principais meios de acesso às universidades públicas e privadas brasileiras, bem como ao acesso de bolsas de estudo e, também, norteador de políticas públicas. À vista disso, a prática pedagógica de professores e instituições de ensino mudaram drasticamente com o intuito de preparar melhor os alunos para o exame. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo investigar a eficiência das deduções das fórmulas de Análise Combinatória na resolução de problemas do ENEM, para tal se propõe a analisar a seguinte problemática: como a dedução de fórmulas de Análise Combinatória podem colaborar na resolução de problemas do ENEM? Para isso, lista-se os problemas em que a Análise Combinatória é tema central ou tema suporte das edições de 2018 a 2023 através da plataforma Super Professor, em uma tentativa de reconhecer os impactos para a resolução das questões, analisando a similaridade das resoluções com os raciocínios utilizado nas deduções das fórmulas. A princípio, espera-se que as deduções das fórmulas possam colaborar de alguma maneira na resolução dos problemas do ENEM. Todavia, ao final deste trabalho, percebe-se a baixa eficiência das deduções das fórmulas de Análise Combinatória no que se refere a resolução dos problemas da prova do ENEM.

Palavras - chave: Fórmulas Matemáticas; ENEM; Análise Combinatória.

ABSTRACT

Initially, the National High School Exam (ENEM) was created for high school graduates to assess their knowledge. However, since its reformulation in 2009, it has become one of the main means of access to Brazilian public and private universities, as well as to scholarships and a guide for public policies. In view of this, the pedagogical practices of teachers and educational institutions have changed drastically in order to better prepare students for the exam. In this context, this work presents an analysis aimed at investigating the efficiency of the deductions of Combinatorial Analysis formulas in solving ENEM problems. It seeks to answer the following question: How can the deduction of Combinatorial Analysis formulas aid in solving ENEM problems? For this, the problems in which Combinatorial Analysis is a central or supporting theme from the 2018 to 2023 editions are listed through the Super Professor platform, in an attempt to recognize the impacts on problem-solving, analyzing the similarity of the solutions with the reasoning used in the deductions of the formulas. Initially, it is expected that the deductions of the formulas may somehow aid in solving ENEM problems. However, at the end of this work, the low efficiency of the deductions of Combinatorial Analysis formulas in solving the problems of the ENEM exam becomes apparent.

Keywords: Mathematical Formulas; ENEM; Combinatorial Analysis.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 Introdução

Segundo Brito et al. (2012, p. 02), o processo de demonstrações e provas de teoremas e fórmulas restringe-se quase em sua totalidade aos cursos superiores de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Ao ingressar no curso de Matemática, seja na modalidade de bacharelado ou licenciatura, o estudante é normalmente surpreendido com uma maneira diferente de ver a matemática. Fórmulas e teoremas são apresentados no ensino básico sem acompanhar suas demonstrações e deduções. Essa realidade nos faz questionar o porquê desse olhar matemático não ser apresentado no ensino básico, em particular, no contexto de preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), foi criado no ano de 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho dos alunos que concluíram o Ensino Médio Brasil (1998). Medidas governamentais, como o uso da nota do ENEM para fins do ProUni, a criação de Comitês Técnicos e Consultivos entre outros, que se sucederam ao longo dos anos, tornaram o Exame um grande norteador de políticas educacionais. Dessa forma, o ENEM tornou-se, não somente avaliador da qualidade de ensino, mas também, requisito de ingresso ao ensino superior.

Desde a sua criação, a prova do ENEM tem ganhado importância como principal meio de acesso ao ensino superior no Brasil. Sua influência se estende, não apenas ao processo seletivo para instituições de ensino superior, mas também aos currículos do ensino médio. O formato e os conteúdos cobrados têm incentivado escolas e professores a adaptarem suas práticas pedagógicas visando preparar melhor os alunos para este exame. Como resultado, o ENEM se tornou referência central no planejamento educacional, moldando tanto o ensino quanto a aprendizagem.

Além disso, o ENEM cumpre um dos seus objetivos quando exige dos candidatos, habilidades avançadas de compreensão, explicação e resolução de problemas em diversos contextos e, principalmente, aplicações. Nos gráficos das análises dos problemas, é possível perceber que o baixo percentual de colaboração das deduções das fórmulas demonstra que a prova se preocupa mais com a aplicação das fórmulas do que com o que é chamado de matemática pura. As questões são elaboradas para avaliar a capacidade dos alunos de aplicar conhecimentos teóricos a situações práticas, conforme Costa-Beber e Maldaner (2012, p. 02)

> O Novo ENEM é uma tentativa válida de influenciar o currículo escolar adotado, redirecionar processos seletivos de Instituições de ES e a vida das pessoas que participam da escola com diversas formas de incentivo, principalmente, pela expansão de suas funções. Infere-se, a partir das fundamentações teóricas do Novo ENEM, que questões propostas para os estudantes devem exigir a compreensão, explicação e resolução de problemas com abordagens multidimensionais e de diferentes contextos, além da proposição de soluções e construção de argumentação com base nos sistemas conceituais das diferentes áreas de conhecimento.

A escolha da Análise Combinatória se dá devido recorrentes estudos a respeito da dificuldade que os alunos têm para resolver as situações-problema propostas sobre essa temática. Segundo Alvim (2013, p. 10)

> [...] a disciplina é Matemática, estaremos no Ensino Médio, mas a dificuldade não se encontra nos cálculos que serão utilizados! A dificuldade será ler, analisar, interpretar, reescrever e, finalmente, utilizar alguma(s) dentre as quatro operações fundamentais (somar, subtrair, multiplicar ou dividir para obter solução de situação-problema).

Nos anos 70, um estudo feito por Bachx, Poppe e Tavares (1975) destaca que a Análise Combinatória é um desafio significativo para os alunos do ensino médio e tem como principal causa o estudo e uso limitado de definições e fórmulas, que conduzem os estudantes a um processo educacional mecânico, comprometendo a compreensão daquilo que estão aprendendo. É importante que o aluno compreenda a origem e como é feita a dedução das fórmulas que são utilizadas nos problemas de Análise Combinatória para que ele possa distinguir o uso de cada uma delas.

Handaya (2017, p. 13-14) elenca quatro dificuldades na resolução de problemas em Análise Combinatória, são eles: a variedade de problemas, dificuldade em ler e interpretar o enunciado dos problemas, a memorização de fórmulas e a falta de padronização dos termos utilizados em diferentes livros. A consequência direta dessas dificuldades é a promoção de raciocínios equivocados na resolução dos problemas, fazendo com que o aluno se sinta desmotivado, desistindo de compreender o conteúdo e, posteriormente, prejudicando-se no momento da prova.

Para além da sala de aula, observa-se a recorrência do tema em 69 dissertações apresentadas no programa PROFMAT nos últimos 5 anos, nas quais, apenas 1 foi abordada no programa da Universidade Estadual do Piauí, 3 na Universidade Federal do Piauí e 1 no Instituto Federal do Piauí, o que evidencia a escassez de estudos sobre o tema no âmbito piauiense[1].

Assim, o tema deste trabalho é a dedução das fórmulas na resolução de problemas, sendo delimitado pela contribuição das deduções de fórmulas na resolução de problemas do ENEM envolvendo a Análise Combinatória. Este trabalho tem como problema de pesquisa: como a dedução de fórmulas de Análise Combinatória podem colaborar na resolução de problemas do ENEM? Assim, o objetivo geral desta pesquisa é investigar a eficiência das deduções das fórmulas de Análise Combinatória na resolução de problemas do ENEM, nos anos de 2018 a 2023.

Nesse sentido, traçam-se os seguintes objetivos específicos: 1) Levantar dados históricos acerca do ENEM como instrumento avaliativo; 2) Mensurar a importância da

[1]Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

Análise Combinatória nas provas do ENEM, apresentando a recorrência do tema nas provas através de gráficos; 3) Estruturar as definições e as deduções das fórmulas de Análise Combinatória; 4) Analisar a eficiência das deduções na resolução de situações-problema nas provas de 2018 a 2023.

O trabalho está estruturado em 6 capítulos. No capítulo 1, foi realizada uma breve introdução a respeito da Análise Combinatória, do ENEM e o tema que se pretende abordar neste trabalho. O capítulo 2 aborda os aspectos históricos do ENEM e a recorrência do tema nas edições do Exame. O capítulo 3 traz os conceitos e as deduções das fórmulas abordadas. No capítulo 4, encontra-se a metodologia utilizada neste trabalho. No capítulo 5, concentram-se as questões do tema presentes nas provas do ENEM, nos anos de 2018 a 2023, divididas em dois grupos. Imediatamente após os grupos de questões, ainda no capítulo 5, encontra-se a análise das questões. Por fim, no capítulo 6, as considerações finais acerca da dissertação. Nos apêndices A e B, encontram-se as resoluções sugeridas pela plataforma Super Professor das questões analisadas neste trabalho.

2 Análise Combinatória na conjuntura do ENEM

O presente capítulo relata a trajetória histórica do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), identificando os principais eventos que marcam sua história até o chamado "novo ENEM" − nome dado à reformulação do exame no ano de 2009. Além disso, apresenta a matriz de referência do ENEM na área de matemática e suas tecnologias. Ao final, aborda o quantitativo de questões de Análise Combinatória cobradas nas provas do ENEM no período de 2009 a 2023.

2.1 Histórico do ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio − ENEM foi criado em 1998, como disposto no Brasil (1998, p. 178):

> Instituir o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, como procedimento de avaliação do desempenho do aluno, tendo por objetivos:
> I – conferir ao cidadão parâmetro para auto-avaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;
> II – criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do ensino médio;
> III – fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;
> IV – constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio.

De acordo com Brasil (2002, p. 09), a prova era constituída por 63 questões de múltipla escolha e uma proposta de redação com o objetivo de avaliar as competências e habilidades desenvolvidas pelos alunos participantes do exame. Segundo Brasil (2002, p. 11) as competências avaliadas pelo exame são:

> I. Dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica.
> II. Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
> III. Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
> IV. Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
> V. Recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

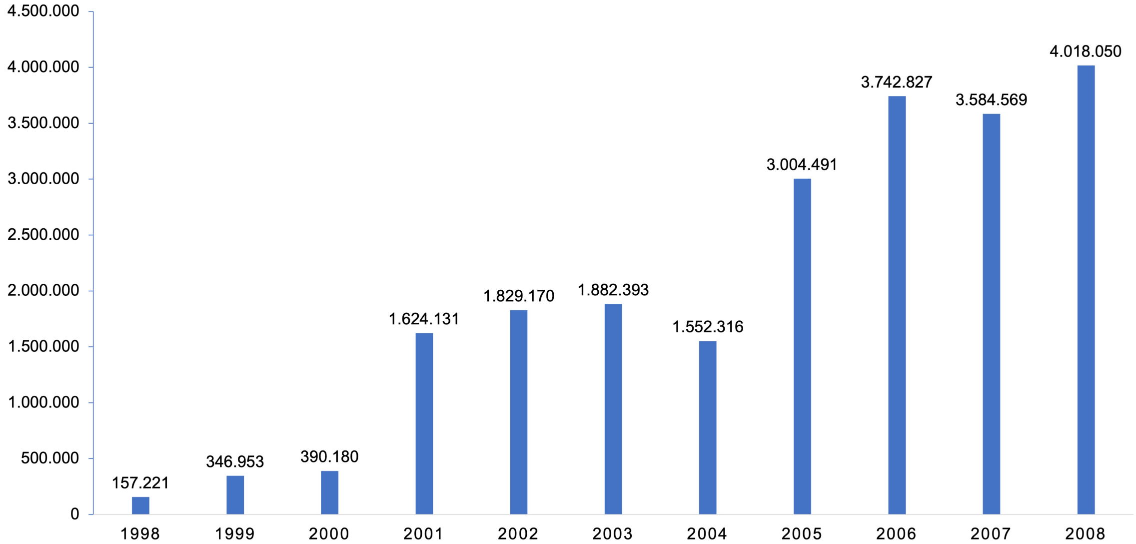
Na sua primeira edição, o ENEM registrou 157.221 inscrições, com aplicação em

184 municípios brasileiros. No que se refere ao acesso à Instituição de Educação Superior, apenas duas instituições utilizaram a nota da primeira edição do ENEM como meio de seleção, sendo estas a Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ). Ao final do ano de 1999, em sua segunda edição, houve um aumento significativo no número de participantes, de 157.221 para 315.960, atribuído ao aumento de instituições de ensino que utilizariam a prova como instrumento de seleção. O número de instituições parceiras aumentou de duas em 1998 para noventa e três em 1999.

Em 2004, o Programa Universidade para Todos (ProUni)[2] adotou a nota do ENEM para a concessão de bolsas de estudos integrais e parciais. Neste ano, o Exame contou com 1.552.316 inscritos e a prova foi aplicada em 608 municípios.

O emprego da pontuação do ENEM como critério para o acesso às universidades públicas resultou em um aumento significativo no número de participantes do exame ao longo dos primeiros 11 anos de criação. Esse aumento encontra justificativa nas políticas governamentais de facilitação de acesso ao ensino superior, a exemplo da criação de bolsas de estudo em instituições privadas. O aumento no número de inscritos é ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Número de Inscritos no ENEM de 1998 a 2008



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Com a crescente demanda e a criação do Sistema de Seleção Unificada (SISU)[3], em 2009 o exame foi aperfeiçoado e passou a ser chamado de Novo ENEM. Naquele ano,

[2] o Programa Universidade para Todos (Prouni), é um programa do governo federal destinado à concessão de bolsas de estudo integrais e bolsas de estudo parciais de 50% (cinquenta por cento) para estudantes de cursos de graduação e sequenciais de formação específica, em instituições privadas de ensino superior, com ou sem fins lucrativos Brasil (2005).

[3] "Trata-se de um sistema informatizado, gerenciado pela Secretaria de Educação Superior, por meio do qual instituições públicas gratuitas de educação superior ofertam vagas em cursos de graduação a estudantes, que são selecionados exclusivamente pelas notas obtidas no Enem" Superior (2014, p. 60).

as matrizes de referência são reformuladas com base nas Matrizes de Referência do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja). Junto com a reformulação da matrizes de referência, o ENEM tornou-se opção para a obtenção do certificado de conclusão do Ensino Médio Sakalauskas e Trevisan (2017, p. 02). Contudo, em 2017, o MEC adotou algumas mudanças e, dentre elas, o fim da certificação do Ensino Médio através do ENEM Almeida (2020, p. 17), tendo como consequência a redução no número de inscritos, em relação à edição de 2016, conforme mostra a Figura 2.

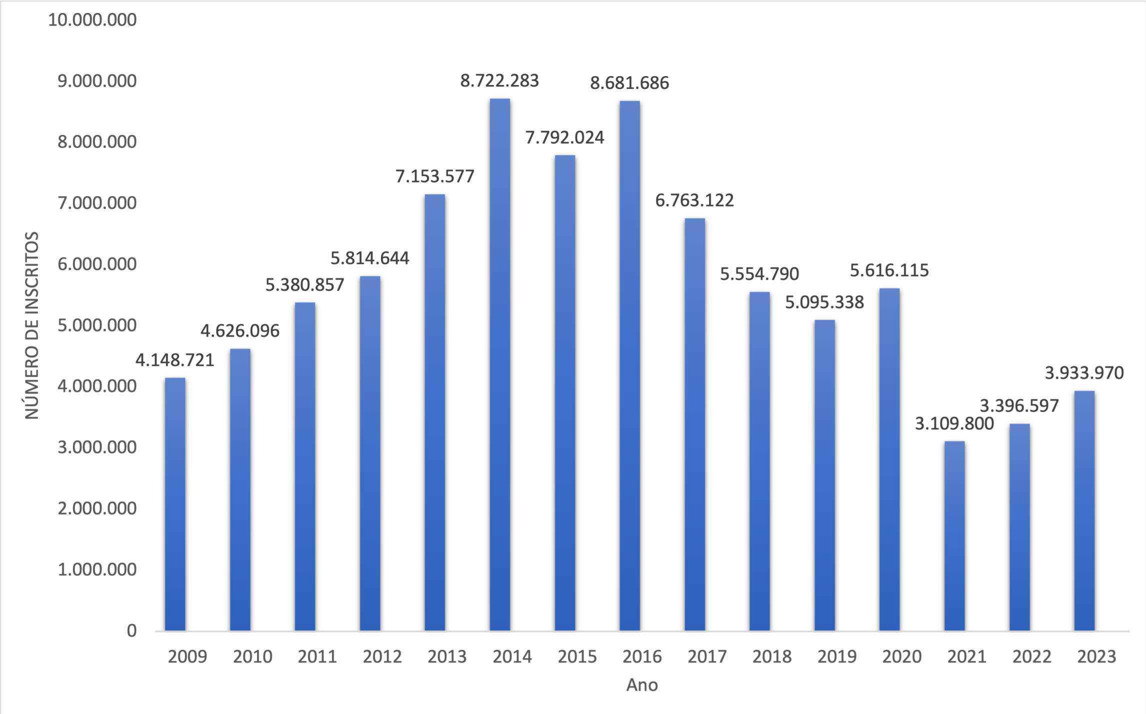
Assim, com a mudança nas matrizes de referência, a prova passou a ser dividida em quatro áreas do conhecimento: linguagens, códigos e suas tecnologias, matemática e suas tecnologias, ciências da natureza e suas tecnologias e ciências humanas e suas tecnologias, cada área é contemplada com 45 questões, além de uma proposta de redação que deverá ser escrita em língua portuguesa e na estrutura de um texto dissertativo-argumentativo Andriola (2011, p. 115-116). Outra mudança que o Novo ENEM trouxe consigo foi a utilização da Teoria de Resposta ao Item (TRI) em suas provas desde 2009 até os dias atuais. Em suma, a TRI leva em consideração as características psicométricas de cada item, que são capazes de distinguir os indivíduos que realizaram um teste Costa et al. (2017, p. 14).

Sete competências são delineadas na nova matriz de matemática e suas tecnologias, cada uma associada a um número específico de habilidades. O escopo deste estudo concentra-se nas competências e habilidades relacionadas aos objetivos da Análise Combinatória da seguinte forma, segundo ENEM (2013):

> **Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.**
> **H1** - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
> **H2** - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
> **H3** - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
> **H4** - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
> **H5** - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Em 2013, além de ser utilizada na concessão de bolsas de estudos do programa Ciências sem Fronteiras, a nota do ENEM foi adotada como critério de seleção para quase todas as instituições federais. A substituição dos vestibulares tradicionais pelo Novo ENEM visa instigar a reestruturação dos currículos do Ensino Médio, almejando aprimorar a qualidade da educação Costa-Beber e Maldaner (2012, p. 02). Dessa maneira, o Novo ENEM torna-se uma tentativa de adequar os processos seletivos das Instituições de Ensino Superior, a fim de democratizar o acesso, reduzir a evasão escolar e possibilitar a mobilidade acadêmica daqueles que estão concluindo o ensino básico. Ademais, as mudanças ocorridas em 2009 refletiram no aumento de inscrições nos anos seguintes, como mostra a Figura 2.

Figura 2: Número de inscritos no ENEM de 2009 a 2023



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

É importante salientar que, no ano de 2020, dos 5.616.115 inscritos no ENEM, apenas 2.795.369 candidatos compareceram aos dois dias de prova ou a, pelo menos, um dia. Isso representa, aproximadamente, 49% dos inscritos e, nos anos subsequentes, observa-se uma queda acentuada no número de inscritos. Essa queda no número de participantes e no número de inscritos nos anos posteriores, é reflexo do agravamento da pandemia da COVID-19 que, indiscutivelmente, afetou a educação, conforme se observa na Figura 2

2.2 Análise Combinatória nas provas do ENEM

Em 16 de fevereiro de 2017, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi integrada à legislação nacional por meio da Lei 13.415, após a aprovação da Resolução do Conselho Nacional de Educação (CNE) nº 2, datada de 22 de dezembro de 2017. Essa resolução não apenas estabelece como também orienta a implementação da BNCC, que formaliza o conjunto de aprendizagens essenciais para as etapas que compõem a Educação Básica.

A BNCC divide os componentes curriculares do Ensino Médio em quatro áreas: Linguagens e suas tecnologias; Ciências da natureza e suas tecnologias; Ciências humanas e sociais aplicadas; Matemática e suas tecnologias. Este trabalho concentra sua atenção na área de Matemática e suas tecnologias.

A Matemática, assim como outras áreas do conhecimento, inclui habilidades específicas em cada etapa do Ensino Fundamental e Médio. Antes de detalhar as habilidades relacionadas à Análise Combinatória, é importante entender o processo de identificação deste código alfanumérico que simplifica a localização das habilidades em cada etapa da Educação Básica. Por exemplo, no código EM13MAT311, existem quatro sequências intercaladas, duas alfabéticas e duas numéricas, que variam de acordo com a etapa da Educação Básica. De acordo com Brasil (2018) o primeiro par de letras (EM) indica a etapa da educação básica, neste caso, Ensino Médio. O primeiro par de números (13) indica que a habilidade descrita pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio. A segunda sequência de letras (MAT) indica a área ou o componente curricular, neste caso, Matemática e suas tecnologias. Por fim, os números finais (311) indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1° número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

No Ensino Fundamental, é possível destacar três habilidades que estão diretamente ligadas ao estudo de Contagem, Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo. Segundo Brasil (2018)

> (EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
> (EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
> (EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

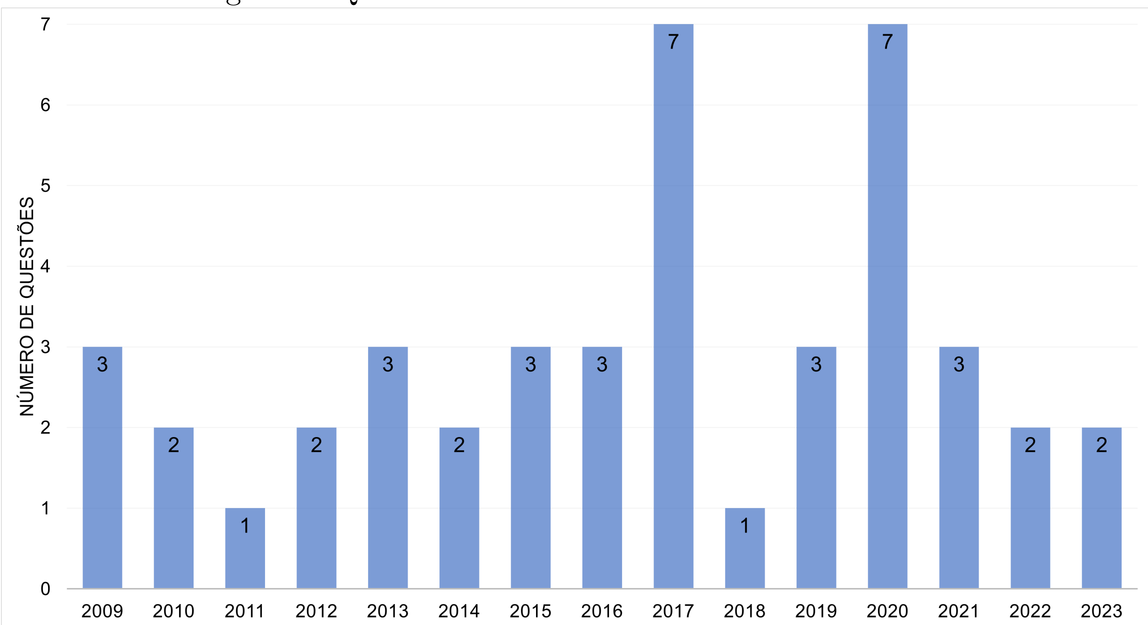
Para o Ensino Médio, são apresentadas duas habilidades que estão associadas à Análise Combinatória. De acordo com Brasil (2018) são elas:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

As habilidades que envolvem o conteúdo de Análise Combinatória estão presentes desde a criação do ENEM e ganharam maior destaque com a implementação da BNCC, tornando-se temas de grande importância na Educação Básica, assim como na prova de seleção para cursos superiores.

Um levantamento feito por Costa et al. (2021, p. 68) indicou que, após a reformulação da Matriz Curricular, foi observada uma incidência relevante do conteúdo das provas do ENEM e que, por vezes, o conteúdo de Análise Combinatória foi utilizado como suporte para resolver as questões de Probabilidade. De acordo com a plataforma Super Professor[4], a Análise Combinatória tem um quantitativo de 44 questões aplicadas nas provas do ENEM, nos anos de 2009 a 2023, incluindo as provas ENEM Libras, Enem 2ª aplicação (quando houve), ENEM digital e ENEM PPL e, ainda, as questões em que a Análise Combinatória foi conteúdo suporte para resolução de questões de Probabilidade. A Figura 3, a seguir, mostra o histórico das questões de Análise Combinatória no ENEM a partir do ano de 2009 até o ano de 2023.

Figura 3: Questões de Análise Combinatória no ENEM



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Analisando a Figura 3, percebe-se que o conteúdo de Análise Combinatória está presente em todos os anos na prova do Novo ENEM, com destaque nos anos de 2017 e 2020, seja como tema central das questões ou como tema suporte das questões de Probabilidade. Isso mostra a importância e o desafio de preparar adequadamente os alunos para responderem a esse tipo de questão.

[4] O SuperPro, como é mais conhecido, foi desenvolvido para ser um gerenciador de questões que possibilitasse ao professor rapidamente elaborar suas atividades de avaliação. Hoje, contendo um banco de itens com mais de 189.400 questões [...] Disponível em: https://www.sprweb.com.br/mod_superpro/index.php?PG=EMPRESA

3 Análise Combinatória

Este capítulo aborda fatos históricos relacionados à Análise Combinatória, ramo da Matemática presente nas provas do ENEM, como visto no capítulo anterior. Apresenta os conceitos básicos da Análise Combinatória, como o Princípio Fundamental da Contagem, e as deduções das fórmulas de Combinação Simples, Arranjo Simples, Permutação Simples e Permutação com Elementos Repetidos.

3.1 Aspectos Históricos

Esta seção, apresenta alguns aspectos e contribuições históricas acerca da Análise Combinatória. Para Biggs (1979, p. 179)

> A combinatória foi bastante negligenciada pelos historiadores da matemática. No entanto, existem boas razões para estudar as origens do assunto, uma vez que é um tipo de subcultura matemática, não exatamente paralela em seu desenvolvimento às grandes disciplinas de aritmética, álgebra e geometria.

A formalização e o desenvolvimento da teoria da Análise Combinatória ocorreram a partir do século XVI, contudo há registros de problemas de contagem na antiguidade. Os registros mais antigos são atribuídos aos chineses, e datam de quatro milênios na obra I-King (ou I Ching), na qual consta os Quadrados Mágicos, segundo Oliveira (2023)

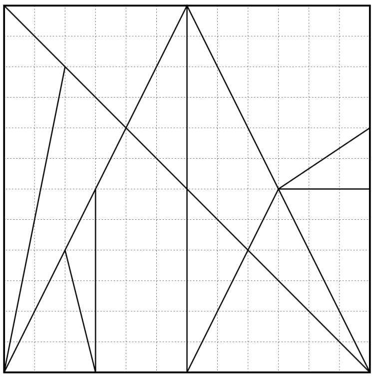
Em 1856, o escocês Alexander Henry Rhind (1833-1863) adquiriu um papiro no qual constavam escritos de matemática. Tal papiro foi nomeado de Papiro de Rhind em homenagem ao escocês. Segundo Oliveira (2023, p. 35) data do Papiro de Rhind é de 1650 a.C. aproximadamente e contém 85 problemas matemáticos. Dentre esses problemas, o problema 79 está associado à contagem. De acordo com Boyer (1974, p. 33):

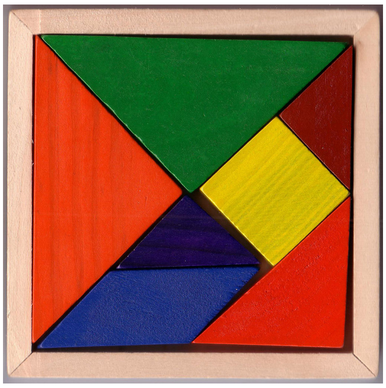
> Assim o Pro. 79 cita apenas "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hectares". É presumível que o escriba estava tratando de um problema, talvez bem conhecido, em que em cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria a quantidade de grão poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão.

Poucos registros se tem das contribuições gregas a respeito do que hoje chamamos de Análise Combinatória. Acredita-se que os gregos estariam mais interessados no campo visual da matemática, como na geometria. Assim, um dos registros que foi atribuído a Arquimedes (287 a.C - 212 a.C) foi o jogo chamado Stomachion semelhante ao Tangram como ilustra a Figura 4:

O Stomachion é um desafio composto por 14 formas geométricas, primariamente

Figura 4: À esquerda o jogo Stomachion, à direita o tabuleiro Tangram.





Fonte: Wikipedia

triângulos. Ao serem combinadas, essas peças se organizam em um quadrado. Conforme relata Santos (2013, p. 18), o historiador da Matemática Reviel Netz publicou um artigo em dezembro de 2013 no jornal norte-americano The New York Times, sob o título "*In Archimedes Puzzle*", da Universidade de Stanford, Califórnia. Netz conclui que Arquimedes estava interessado em determinar quantas maneiras existem de encaixar as 14 peças para formar o quadrado.

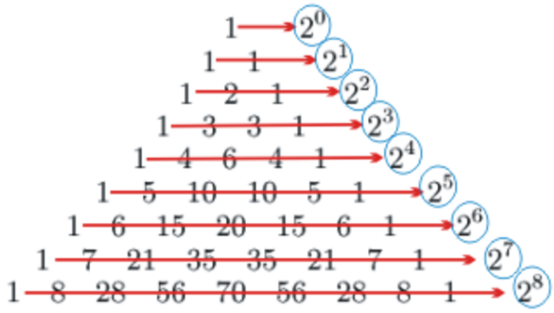
Após a Idade Média, a Análise Combinatória teve um avanço significativo devido a contribuições de diversos estudiosos que deixaram obras importantes, seja individualmente ou por meio de colaborações acadêmicas, a exemplo dos matemáticos Blaise Pascal (1632-1662) e Leonhard Euler (1707-1783) que contribuíram significativamente em diversas áreas da matemática, desenvolvendo teorias que são aplicadas atualmente.

Figura 5: Blaise Pascal

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

Pascal dedicou-se nos estudos sobre o Triângulo Aritmético, uma contribuição chinesa que já existia há aproximadamente 600 anos, descobrindo propriedades que não foram estudadas antes. Devido a essas descobertas significativas, a tabela numérica passou a ser chamada de Triângulo de Pascal, no qual os elementos são dispostos de acordo com as propriedades das combinações e auxiliam em alguns cálculos probabilísticos. Pascal demonstrou, dentre outras propriedades, a propriedade associada à soma dos elementos de uma linha, que resulta em 2^n, onde n é o número da n-ésima linha. A Figura 6 mostra o Triângulo de Pascal e a propriedade citada anteriormente.

Figura 6: Triângulo de Pascal e a soma dos elementos de uma linha



Fonte: https://vestibulares.estrategia.com/portal/materias/matematica/triangulo-de-pascal/

Já o suíço Leonhard Euler, deixou contribuições relevantes nos mais diversos campos da matemática. Um dos marcos fundamentais é a origem do conceito das Permutações Caóticas, como as conhecemos atualmente, que se desenvolveu a partir da colaboração acadêmica entre Euler e Nicolau Bernoulli (1687-1759), mediada por correspondência. Em uma dessas trocas de cartas, Euler foi desafiado por Nicolau a resolver um problema intrigante: enumerar quantas são as possíveis formas de se colocar uma certa quantidade de cartas, na mesma quantidade de envelopes com destinatários distintos, de modo que nenhuma das cartas esteja no envelope correto Filho e Ferreira (2017, p. 01).

Figura 7: Leonhard Euler

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

3.2 Princípios e métodos de contagem

Para Morgado et al. (2006, p. 01), a parte da Matemática que estuda as relações e estruturas discretas é a Análise Combinatória. Segundo Morgado et al. (2006, p. 01):

> O que é Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória? A maior parte dos alunos do Ensino Médio responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações. Isso no entanto é uma resposta parcial, pois embora combinações, arranjos e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver tipos de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Dessa maneira, apresentam-se os conceitos básicos que regem a Análise Combinatória do Ensino Médio, os princípios de contagem e as deduções das fórmulas que derivam dos princípios de contagem. O princípio a seguir consta no livro "Introdução à Análise Combinatória" de Santos, Mello e Murari (2007, p. 39):

3.2.1 Princípio Aditivo: Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \varnothing$) com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Para ilustrar o Princípio Aditivo, observa-se o exemplo 1: Numa confeitaria, há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?

Veja que Maria pode escolher entre 5 sabores de picolés ou 3 sabores de salgados. Portanto, Maria tem 8 possibilidades diferentes de fazer o seu pedido.

É importante destacar que o conectivo "ou" carrega consigo a ideia de união entre conjuntos. Quando não há intersecção entre tais conjuntos, a operação matemática que deve ser realizada, entre a quantidade de elementos dos conjuntos envolvidos, é a adição.

A seguir, o Princípio Multiplicativo, de acordo com o livro "Análise Combinatória e Probabilidade" de Morgado et al. (2006, p. 16):

3.2.2 Princípio Multiplicativo: Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$.

Para representar o Princípio Multiplicativo, observa-se o exemplo 2: Para fazer uma viagem Teresina-Corrente-Teresina, posso usar como transporte o ônibus das empresas: Real Maia, Guanabara e Real Sul. De quantos modos posso escolher a empresa se não desejo usar, na volta, a mesma empresa utilizada na ida?

Perceba que, para a decisão d_1 (ida para Corrente), há 3 modos de escolher a empresa e, para a decisão d_2 (volta para o Teresina), há 2 escolhas possíveis (visto que não é possível escolher a mesma empresa de ida). De acordo com o Princípio Multiplicativo há $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de escolher as empresas que farão a viagem.

Note a presença do conectivo “e” para a solução do problema. Veja que para realizar o trajeto o viajante precisa fazer a decisão d_1 e a decisão d_2. Assim, nos problemas de contagem, deve-se observar as decisões sucessivas para resolução e, em seguida, utilizar o Princípio Multiplicativo.

Para além dos princípios multiplicativo e aditivo, este trabalho aborda os métodos de contagem: Permutação Simples, Permutação com elementos repetidos, Combinação Simples e Arranjo Simples. Para isso, é importante exibir as deduções das fórmulas desses métodos de contagem a partir do Princípio Multiplicativo.

Os métodos de contagem a seguir são chamados de Permutação Simples e Permutação com Elementos Repetidos.

3.2.3 Permutação Simples: Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como Permutação Simples cada uma das sequências ordenadas, formada pelos n elementos de X. A fórmula utilizada para encontrar o número de permutações simples de n objetos é denotada por:

$$P(n) = n!$$

A seguir, a dedução da fórmula anterior, apresentada no artigo Araújo (2019, p. 23):

Para ocupar a primeira posição da sequência, temos à disposição, n elementos; para ocupar a segunda posição, temos $n-1$ elementos à disposição, já que um deles ocupou a primeira posição. Seguindo esse raciocínio, temos que:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

■

Quando há elementos repetidos, deve ser utilizada a fórmula de permutação com elementos repetidos. Assim, chamamos de $P_n^{r_1,r_2,...,r_z} = \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_z!}$ o total de permutações de n objetos, onde elementos se repetem $r_1, r_2, ..., r_z$ vezes. A seguir, a dedução da fórmula de Permutação com Elementos Repetidos de acordo com Araújo (2019, p. 24):

Considere os elementos $a_1, a_2, a_3, ..., a_z$, onde o elemento a_1 se repete r_1 vezes, o elemento a_2, se repete r_2 vezes, até o elemento a_z que se repete r_z vezes, e ao somarmos $r_1 + r_2 +, ..., +r_z = n$, ou seja, temos n elementos. Podemos permutar os n elementos de $P_n = n!$ maneiras, mas repare que o elemento a_1 pode ser permutado de $P_{r_1} = r_1!$ maneiras, porém isso não gera novas permutações, o mesmo ocorre com os demais elementos repetidos, portanto para deixarmos de contar essas “falsas” permutações devemos realizar a seguinte divisão

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_z!} = P_n^{r_1,r_2,...,r_z}$$

■

As definições 3.2.4 e 3.2.5 são relativas aos métodos de contagem, os quais são utilizados em problemas de agrupamentos. As definições são encontradas no artigo Oliveira (2023, p. 41-42):

3.2.4 Arranjo Simples: Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como Arranjo Simples dos n elementos, tomados p a p, com $p \leq n$, cada um dos agrupamentos formados por p elementos distintos entre si pela ordem ou pela espécie, do conjunto X.

A fórmula de Arranjo Simples é denotada por $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ e deduzida, de acordo com Araújo (2019, p. 23), a seguir:

Para ocupar a primeira posição podemos escolher entre n elementos, para a segunda $n-1$ elementos até chegarmos a escolha do p-ésimo elemento onde temos $n-(p-1)$, pois já havíamos escolhido $p-1$ elementos para ocupar as posições anteriores, logo temos que o total de possibilidades será

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-(p-1)) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-p+1)$$

Ao multiplicar a expressão por $\dfrac{(n-p)!}{(n-p)!}$, obtemos

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

■

3.2.5 Combinação Simples: Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como combinações simples dos n elementos, tomados p a p, $p \leq n$, cada um dos agrupamentos formados por p elementos, distintos entre si, do conjunto X, ou como o número de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos.

A fórmula de Combinação Simples é denotada por $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ e deduzida, de acordo com Araújo (2019, p. 23-24), a seguir:

Se a ordem importasse poderíamos utilizar a fórmula anterior para calcular, donde teríamos $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Como a ordem não importa, devemos inicialmente pensar de quantas formas diferentes poderíamos permutar p elementos, para isso recorremos à fórmula de permutação simples daí $P_p = p!$

Portanto, basta realizar a divisão

$$\frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_{n,p}$$

■

Este trabalho destaca a diferença entre arranjo simples e combinação simples. Santos, Mello e Murari (2007, p. 57) afirmam que o arranjo simples são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela natureza e pela ordem dos elementos agrupados. Ainda, segundo Santos, Mello e Murari (2007, p. 62), deve ser considerada combinação simples quando se tem agrupamentos de elementos que diferem entre si somente pela sua natureza. A diferença entre arranjo e combinação é exemplificada nos exemplos 3 e 4. Veja:

Exemplo 3: Uma competição de natação no Círculo Militar de Teresina conta com 8 atletas. Sabendo disso, calcule de quantas maneiras podemos entregar os troféus de 1°, 2° e 3° lugar.

Comentário: Perceba que os elementos que compõem o pódio são diferentes tanto pela sua natureza, considerando que são pessoas distintas, quanto pela ordem, pois ao trocar o posicionamento, cada pessoa receberá um troféu diferente. Assim, esse problema pode ser resolvido com o uso da fórmula de Arranjo Simples.

Exemplo 4: Em uma sala de aula do Instituto Federal do Piauí, há vinte alunos dos quais três serão selecionados para representarem a escola em uma Olimpíada de Matemática. De quantas maneiras esses alunos podem ser selecionados?

Comentário: Neste problema, é possível observar que, independentemente da ordem em que forem escolhidos os três alunos, eles formarão um grupo que irá representar a escola na Olimpíada. Portanto, esse problema pode ser resolvido com o uso da fórmula de Combinação Simples.

4 Metodologia

A metodologia utilizada no trabalho aborda as provas do ENEM realizadas no período de 2018 a 2023. Assim, ela é caracterizada como uma pesquisa de procedimento bibliográfico e documental uma vez que, segundo Gil (2002, p. 45), o documento pesquisado não sofreu nenhum tratamento analítico. Além disso, para LÜdke e AndrÉ (2018, p. 45), a análise documental busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse. Para tanto, busca-se em quais situações-problema as deduções das fórmulas de Análise Combinatória podem contribuir na resolução de questões do ENEM.

Nesse sentido, ao analisar as provas do ENEM, faz-se uma pesquisa qualitativa e quantitativa envolvendo as situações-problema referente ao conteúdo de Análise Combinatória, com o intuito de quantificar os problemas e descrever as situações em que as deduções das fórmulas, através dos princípios de contagem, podem colaborar nas suas resoluções. Nesse sentido, segundo Matias-Pereira et al. (2016), pode-se afirmar que:

> No método qualitativo a pesquisa é descritiva, ou seja, as informações obtidas não podem ser quantificáveis. Por sua vez, os dados obtidos são analisados de forma indutiva. Nesse sentido, a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa.

Diante do exposto, o campo utilizado para a pesquisa é a plataforma Super Professor, banco de questões comumente utilizado pelos professores para a elaboração de avaliações e atividades em que constam as provas do ENEM e as respectivas resoluções dos problemas.

Para a análise quantitativa, foi feito o levantamento do número de problemas envolvendo a Análise Combinatória nas provas do ENEM, de 2018 a 2023. Após o levantamento e apresentação das questões, é feita a análise a que se propõe este trabalho. Posteriormente a análise das questões, é feito um gráfico apresentando o percentual de questões em que as deduções das fórmulas foram eficientes para a resolução do problema. Conforme Costa (2019, p. 45), no que diz respeito a análise quantitativa, o levantamento de dados envolve gráficos, tabelas e outras ferramentas mostrando as categorias e apresentando as suas frequências.

No que diz respeito a análise qualitativa, os dados foram divididos em dois grupos, de acordo com a forma em que as alternativas das questões foram apresentadas. Por fim, ainda conforme Costa (2019, p. 45), para cada categoria ou agrupamento foi feito um texto sintetizando a análise de cada grupo.

5 Situações-Problema do ENEM

Este capítulo apresenta questões do ENEM, dos anos de 2018 a 2023, em que se faz o uso do conteúdo Análise Combinatória para resolvê-las, seja como conteúdo principal ou como conteúdo suporte. Além disso, analisa-se em quais contextos as deduções das fórmulas podem contribuir na resolução. Nesse sentido, apresentam-se a seguir as questões levantadas e a análise proposta por este trabalho, de maneira agrupada, conforme se apresentam as alternativas de resposta em cada situação-problema. Ao final do trabalho, nos apêndices A e B, encontra-se a resolução sugerida pela plataforma Super Professor dos problemas analisados. Com efeito, as questões anuladas pelo INEP foram retiradas desta análise.

5.1 Questões que apresentam fórmulas, expressões algébricas ou numéricas como resposta

Problema 1: (Enem 2018)

O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

a) A_{10}^{4}

b) C_{10}^{4}

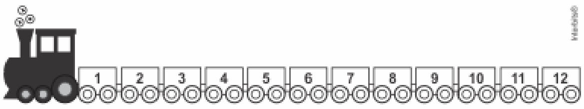
c) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$

d) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$

e) $C_4^2 \times C_6^2$

Problema 2: (Enem 2019)

Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



Fonte: Prova ENEM

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a) $C_{12}^{4} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$

b) $C_{12}^{4} + C_{8}^{3} + C_{5}^{3} + C_{2}^{2}$

c) $C_{12}^{4} \times 2 \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{2}$

d) $C_{12}^{4} + 2 \times C_{12}^{3} + C_{12}^{2}$

e) $C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$

Problema 3: (Enem digital 2020)

Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

Fonte: Prova ENEM

Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

a) $4^5 - 4^4 - 4^3$

b) $4^5 + 4^4 + 4^3$

c) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$

d) $(4!)^5$

e) 4^5

Problema 4: (Enem PPL 2020)

O governador de um estado propõe a ampliação de investimentos em segurança no transporte realizado por meio de trens. Um estudo para um projeto de lei prevê que se tenha a presença de três agentes mulheres, distribuídas entre os 6 vagões de uma composição, de forma que duas dessas agentes não estejam em vagões adjacentes, garantindo assim maior segurança aos usuários.

Disponível em: www.sisgraph.com.br. Acesso em: 29 jan. 2015 (adaptado).

A expressão que representa a quantidade de maneiras distintas das três agentes serem distribuídas nos vagões é

a) $C_4^3 + 3!$

b) C_6^3

c) $C_4^3 \times 3!$

d) A_6^3

e) $A_4^3 \times 3!$

Problema 5: (Enem 2020)

Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”. Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

a) $9!$

b) $4!5!$

c) $2 \times 4!5!$

d) $\dfrac{9!}{2}$

e) $\dfrac{4!5!}{2}$

Problema 6: (Enem PPL 2020)

A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas. Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro. De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por

a) 5

b) $5 \cdot 3$

c) $\dfrac{5!}{(5-3)!}$

d) $\dfrac{5!}{(5-3)!2!}$

e) $\dfrac{5!}{(5-3)!3!}$

Problema 7: (Enem PPL 2021)

Um diretor esportivo organiza um campeonato no qual haverá disputa de times em turno e returno, isto é, cada time jogará duas vezes com todos os outros, totalizando 380 partidas a serem disputadas.

A quantidade de times (x) que faz parte desse campeonato pode ser calculada pela equação

a) $x = 380 - x^2$
b) $x^2 - x = 380$
c) $x^2 = 380$
d) $2x - x = 380$
e) $2x = 380$

Problema 8: (Enem 2021)

Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

a) $\dfrac{6!}{4!2!} \cdot \dfrac{15!}{10!5!}$

b) $\dfrac{6!}{4!2!} + \dfrac{15!}{10!5!}$

c) $\dfrac{6!}{2!} + \dfrac{15!}{5!}$

d) $\dfrac{6!}{2!} \cdot \dfrac{15!}{5!}$

e) $\dfrac{21!}{7!14!}$

Problema 9: (Enem 2022)

Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;

- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;

- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã. De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

a) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)!}$

b) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!}$

c) $9 \times \dfrac{4!}{(4-2)! \times 2!}$

d) $9 \times \dfrac{2!}{(2-2)! \times 2!}$

e) $9 \times \left(\dfrac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1\right)$

5.1.1 Análise do grupo 5.1

Observa-se que, neste grupo de questões, é essencial que o aluno saiba diferenciar as situações em que deve utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo, além de distinguir entre o uso da fórmula de arranjo e a de combinação simples. Não é necessário calcular os valores numéricos, mas apenas encontrar as expressões que levariam ao resultado correto.

Dentre esses problemas, verifica-se que as deduções das fórmulas de arranjo, combinação, permutação simples e permutação com elementos repetidos podem ajudar o aluno a inferir a resposta correta apenas no problema 5.

A semelhança entre a resposta correta do problema e a dedução da fórmula de permutação com elementos repetidos é evidente quando é necessário incluir, no cálculo do problema, a divisão da permutação das letras repetidas. Para eliminar a troca de elementos repetidos, deve-se dividir o cálculo pela permutação do número de vezes que cada elemento se repete, conforme demonstrado na dedução da fórmula de permutação com elementos repetidos.

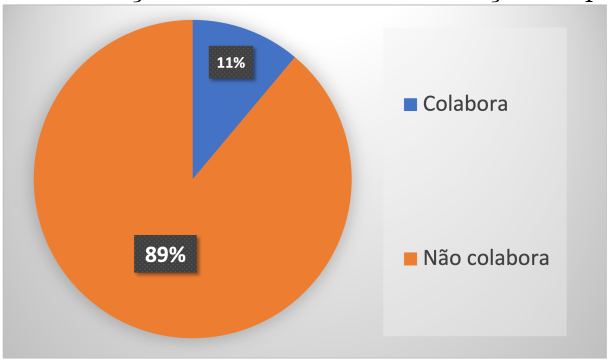
É importante destacar que os problemas 6, 8 e 9, embora sejam semelhantes ao problema 5 no que diz respeito às opções apresentadas, podem ser resolvidos pelo aluno mesmo sem ter visto a demonstração das fórmulas de arranjo e combinação simples. Para resolvê-los, é necessário e suficiente lembrar das fórmulas e compreender a diferença entre o uso do arranjo e da combinação simples.

Nos problemas de 1 a 4, é fundamental que o aluno seja capaz de distinguir entre o uso de arranjo e combinação simples, bem como compreender os princípios aditivo e multiplicativo. Para resolver o problema 7, é necessário que o aluno utilize a fórmula de arranjo simples e realize manipulações algébricas para chegar ao resultado. Nesses problemas, a aplicação correta das fórmulas e conceitos é fundamental, exigindo do aluno um entendimento sólido das técnicas matemáticas envolvidas.

A Figura 8, a seguir, apresenta os resultados percentuais da análise do grupo 5.1 sobre a eficiência das deduções de fórmulas na resolução de problemas deste grupo. Das 9 questões analisadas, em 8 as deduções das fórmulas não contribuíram para a resolução e, em apenas 1 problema, a dedução da fórmula pode contribuir.

Observa-se que a dedução da fórmula contribuiu para um problema de permutação com elementos repetidos, em que a alternativa correta resulta na fórmula da permutação com elementos repetidos. Contudo, ainda que a dedução da fórmula possa contribuir para a resolução do problema, é possível resolver o problema utilizando apenas a fórmula da permutação com elementos repetidos, sem que seja necessário o aluno ter visto anteriormente a dedução da fórmula.

Figura 8: A eficiência das deduções de fórmulas na resolução de problemas do grupo 5.1



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Esta figura ilustra a baixa utilização das deduções de fórmulas em diferentes problemas, proporcionando uma visão clara das limitações e potencialidades dessa abordagem. Assim, conclui-se que apresentar ao aluno a dedução das fórmulas de Análise Combinatória não produz resultados significativos na resolução de problemas nos moldes do grupo 5.1.

5.2 Questões que apresentam um número real como resposta

Problema 1: (Enem PPL 2019)

Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão. A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por

a) 6.
b) 8.
c) 12.
d) 16.
e) 24.

Problema 2: (Enem 2019)

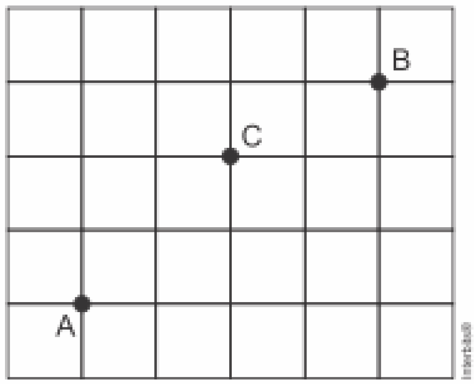
Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

a) 69
b) 70
c) 90

d) 104
e) 105

Problema 3: (Enem 2020)

Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



Fonte: Prova ENEM

André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita ($\rightarrow$) ou para cima ($\uparrow$), segundo o esquema da figura. O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

a) 4.
b) 14.
c) 17.
d) 35.
e) 48.

Problema 4: (Enem digital 2020)

Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @ . O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a) 59
b) 60
c) 118
d) 119
e) 120

Problema 5: (Enem PPL 2020)

Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.

Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a

a) 64.
b) 74.
c) 254.
d) 274.
e) 634.

Problema 6: (Enem 2022)

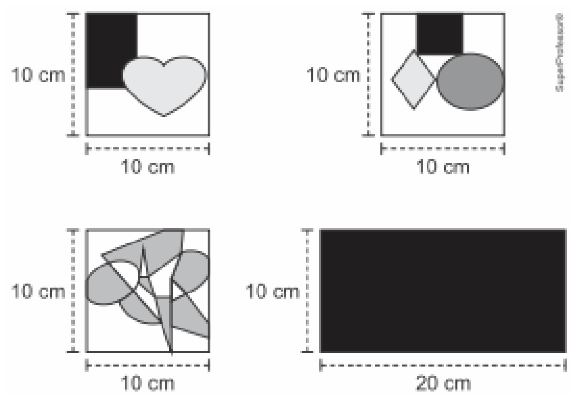
Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1.000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis. Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

a) 8.
b) 9.
c) 11.
d) 18.
e) 24.

Problema 7: (Enem PPL 2023)

Uma costureira tem à sua disposição pelo menos duas unidades de cada um dos quatro tipos de retalhos retangulares com as estampas e os tamanhos apresentados.

Para confeccionar um tapete em formato retangular de $10cm \times 50cm$, ela utilizará os retalhos, na posição indicada na figura, costurando um lado de um a um lado do outro, sem que haja rotações desses retalhos. O modelo de tapete que pretende confeccionar



Fonte: Prova Enem

deverá conter um único retalho de $10cm \times 20cm$ e mais três retalhos de formato $10cm \times 10cm$, sendo que retalhos de mesma estampa não poderão ficar lado a lado. Quantos modelos diferentes de tapetes poderão ser confeccionado?

a) 12
b) 24
c) 34
d) 48
e) 60

Problema 8: (Enem PPL 2023)

Um funcionário de uma loja de computadores misturou, por descuido, três computadores defeituosos com sete computadores perfeitos que estavam no estoque. Uma pequena empresa fez a compra de cinco computadores nessa loja, escolhendo-os aleatoriamente dentre os dez que estavam no estoque. Qual é a probabilidade de essa empresa ter levado, em sua compra, todos os três computadores defeituosos?

a) $\frac{1}{72}$
b) $\frac{1}{12}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{10}$
e) $\frac{3}{7}$

5.2.1 Análise do grupo 5.2

Neste grupo, pode-se observar que as deduções das fórmulas foram importantes apenas no problema 2, onde é necessário que o aluno desconsidere a permutação dos elementos. Essa técnica é abordada na dedução da fórmula da permutação com elementos repetidos. Parte dos problemas deste grupo exige uma habilidade na montagem eficiente dos cálculos, e não apenas a aplicação de uma fórmula ou o uso do Princípio Multiplicativo.

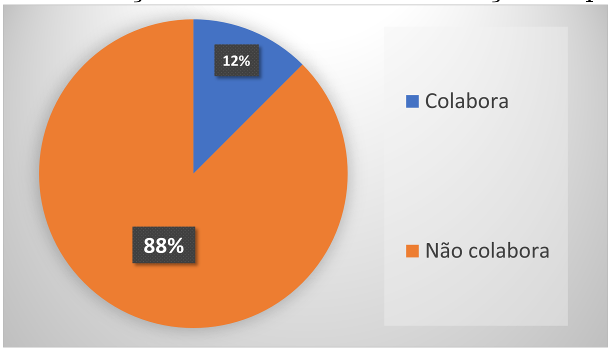
Para resolver os problemas 1, 6 e 7, o aluno deve empregar os princípios multiplicativo e aditivo. O problema 1 possui uma solução relativamente simples, baseada no uso do princípio multiplicativo. Por outro lado, nos problemas 6 e 7, além de utilizar os princípios multiplicativo e aditivo, o aluno precisa adotar estratégias específicas de resolução e contagem para chegar ao resultado correto. Isso envolve uma abordagem mais detalhada e estruturada, onde o aluno deve analisar cuidadosamente as etapas do problema, aplicar corretamente os princípios, e implementar técnicas de contagem eficientes.

Nos problemas 3, 4 e 5, o aluno deve aplicar a teoria dos conjuntos, com ênfase no conceito de conjunto complementar, para resolver esses problemas de maneira mais eficiente. Isso envolve um processo específico: primeiro, o aluno precisa calcular o total de possibilidades abrangentes, considerando todas as combinações possíveis. Em seguida, deve subtrair desse total as possibilidades que não são requeridas pelo problema, identificando e eliminando as opções que não atendem aos critérios especificados. Esse método permite refinar os resultados, isolando apenas as soluções corretas.

Por fim, o problema 8 aborda o conteúdo de probabilidade, no qual a Análise Combinatória serve como fundamento essencial para a resolução. Inicialmente, é necessário aplicar a fórmula de combinação simples para determinar as possíveis combinações dos elementos envolvidos. Em seguida, o aluno deve utilizar o princípio multiplicativo, que permite calcular o número total de resultados possíveis em eventos sucessivos. Por último, a regra do produto deve ser empregada para resolver questões de probabilidade sucessiva, assegurando que todos os cálculos estejam devidamente integrados e corretos. Este processo não apenas reforça a compreensão dos conceitos de Análise Combinatória, mas também demonstra a interconexão entre diferentes áreas da matemática na resolução de problemas complexos.

A Figura 9, a seguir, apresenta os resultados percentuais da análise do grupo 5.2 sobre a eficiência das deduções de fórmulas na resolução de problemas deste grupo. Dos 8 problemas analisados, em 7 as deduções das fórmulas não contribuíram de forma significativa para a resolução e, em apenas em 1 questão, a dedução da fórmula pode contribuir para a resolução do problema.

Figura 9: A eficiência das deduções de fórmulas na resolução de problemas do grupo 5.2



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Esta figura ilustra a baixa utilização das deduções de fórmulas em diferentes problemas. Dessa forma, conclui-se que ensinar aos alunos a dedução das fórmulas de Análise Combinatória não resulta em melhorias significativas na resolução de problemas do tipo 5.2.

6 Considerações Finais

O presente trabalho foi estruturado em quatro partes, delineados pelos objetivos específicos a seguir: Inicialmente, levantar dados históricos acerca do ENEM e, também, o crescimento de sua importância para aqueles que almejam ingressar no Ensino Superior. Em seguida, mensurar a importância da Análise Combinatória nas provas do ENEM, a partir dos dados encontrados no banco de questões da plataforma Super Professor e gráficos elaborados pelo autor, apresentando a recorrência do tema nas provas do ENEM. Por fim, estruturar as definições e as deduções das fórmulas de combinatória para, então, analisar a eficiência das deduções na resolução dos problemas propostos nas provas de 2018 a 2023.

Para isso, foi feita a busca das questões de Análise Combinatória que estiveram presentes nas últimas cinco edições do ENEM, em todas as aplicações: ENEM Regular, ENEM Libras, Enem 2ª aplicação, ENEM digital e ENEM PPL, através da plataforma Super Professor. Desta maneira, foi possível observar que a dedução das fórmulas podem contribuir para que o aluno obtenha a resposta correta nos problemas em que há a necessidade de desconsiderar a ordem dos elementos, tal qual é demonstrado na dedução da fórmula de permutação com elementos repetidos e apresentado na análise de questões.

Desta forma, por meio deste trabalho, infere-se que a prova do ENEM não exige do aluno o conhecimento e habilidades de demonstração e dedução de fórmulas, mas sim, aplicação destas em diferentes contextos e situações. Conclui-se então que é imprescindível o aluno compreender as mais variadas aplicações dos métodos de contagem para lograr êxito na resolução de problemas da prova do ENEM, sem se ater ao rigor matemático das deduções de fórmulas de contagem.

Portanto, ainda que as deduções apresentaram uma baixa eficiência para a resolução dos problemas na prova do ENEM, conforme apresentada na análise dos grupos de questões, destaca-se que para melhorar o entendimento dos alunos acerca da Análise Combinatória é importante que seja apresentada aos alunos a dedução das fórmulas. Todavia, as deduções de fórmulas não são uma prerrogativa para responder aos problemas do ENEM, mas servirão de apoio para que os alunos possam desenvolver a habilidade para resolver problemas, partindo de um pensamento crítico, reflexivo e matemático-científico, fazendo com que os alunos desenvolvam seus próprios métodos de resolução, conforme mostrado por Araújo (2019, p. 28).

Com a finalidade de enriquecer as discussões no que se refere ao tema e, tendo em vista que esta dissertação tem como característica um estudo bibliográfico acerca do tema, para futuros trabalhos indica-se a aplicação de testes em pesquisas de campo, que possam investigar a eficiência das deduções das fórmulas na resolução de problemas do ENEM.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, V. S. de. O encceja e o enem: o exame nacional do ensino médio como ferramenta para certificação do ensino médio. *Saberes Interdisciplinares*, v. 13, n. 25, p. 11–22, 2020. 16

ALVIM, K. G. C. Análise combinatória: uma questão de lógica e linguagens. *Universidade Federal de Goiás*, Universidade Federal de Goiás, 2013. 12

ANDRIOLA, W. B. Doze motivos favoráveis à adoção do exame nacional do ensino médio (enem) pelas instituições federais de ensino superior (ifes). *Ensaio: avaliação e políticas públicas em educação*, v. 19, n. 70, p. 107–125, 2011. 16

ARAÚJO, N. d. F. *Uma reflexão quanto ao uso de fórmulas na Análise Combinatória.* Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal da Paraíba, 2019. 24, 25, 40

BACHX, A. d. C.; POPPE, L. M.; TAVARES, R. N. Prelúdio à análise combinatória. *Companhia Editora Nacional*, 1975. 12

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. *Historia mathematica*, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 109–136, 1979. 20

BOYER, C. B. História da matemática; tradução: Elza f. *Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo*, 1974. 20

BRASIL. Portaria mec nº 438, de 28 de maio de 1998: **Institui o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM**. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, 1998. Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes_p0178-0181_c.pdf. Acesso em: 07 de Jan. 2024. 11, 14

BRASIL. Ministério da educação. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). ENEM:** documento básico. *Brasília*, 2002. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/enem_exame_nacional_do_ensino_medio_documento_basico_2002.pdf. Acesso em: 11 de Jan. 2024. 14

BRASIL. Lei nº 11.096, de 13 de janeiro de 2005. **Institui o Programa Universidade para Todos - PROUNI, regula a atuação de entidades beneficentes de assistência social no ensino superior; altera a Lei nº 10.891, de 9 de julho de 2004, e dá outras providências.** *Brasília: Diário Oficial da União*, 2005. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2005/lei/l11096.htm. Acesso em: 19 de Jan 2024. 15

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular.** *Brasília: MEC*, 2018. 18

BRITO, L. L. de et al. Demonstrações matemáticas na educação básica: Explorando propriedades geométricas. *Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 2012. 11

COSTA-BEBER, L. B.; MALDANER, O. A. O novo enem como instrumento de gestão e intervenção no sistema educacional: características de suas questões. *XVI ENEQ/X EDUQUI*, 2012. 11, 16

COSTA, J. d. O. et al. Guia de ensino para análise combinatória a partir dos livros didáticos, enem e bncc. *Universidade Federal de Campina Grande*, 2021. 19

COSTA, R. D. d. *Análise de questões do novo ENEM relativas à proporcionalidade empregando a metodologia Análise de Conteúdo*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019. 27

COSTA, S. T. S. et al. Teoria de resposta ao item aplicada no enem. *Universidade Federal de Goiás*, Universidade Federal de Goiás, 2017. 16

ENEM, M. D. R. Ministério da educação instituto nacional de estudos e pesquisas educacionais anísio teixeira. *Diário Oficial da União*, 2013. 16

FILHO, D. C. de M.; FERREIRA, M. S. A. *O problema das cartas mal endereçadas de Nicolaus Bernoulli e Euler: uma nota sobre como Euler resolveu brilhantemente um problema interessante*. 2017. 22

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: São Paulo, 2002. 27

HANDAYA, A. Uma reflexao sobre dificuldade de aprendizagem de análise combinatória. *Revista Sinergia*, v. 18, n. 1, p. 13–17, 2017. 12

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. [S.l.]: E.P.U, 2018. 27

MATIAS-PEREIRA, J. et al. *Manual de metodologia da pesquisa científica*. [S.l.]: Atlas, 2016. 27

MORGADO, A. C. et al. Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios. *Coleção do Professor de Matemática, ed*, v. 9, 2006. 23

OLIVEIRA, P. M. L. de. A contextualização e a interdisciplinaridade na preparação da análise combinatória para o enem. *Universidade Federal Rural do semi-árido*, 2023. 20, 25

SAKALAUSKAS, S. R.; TREVISAN, A. L. Enem: rompendo paradigmas para a conclusão do ensino médio. *Debates em Educação*, v. 9, n. 19, p. 01–01, 2017. 16

SANTOS, J. P. de O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. [S.l.]: Ed. Ciencia Moderna, 2007. 23, 25, 26

SANTOS, P. F. Uma abordagem da análise combinatória sem o uso abusivo de fórmulas. *Universidade Federal de Viçosa*, 2013. 21

SUPERIOR, S. de E. **A democratização e expansão da educação superior no país 2003 - 2014.** *Brasília, DF: Balaço Social SESU*, 2014. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=16762-balanco-social-sesu-2003-2014&Itemid=30192. Acesso em: 22 de Jan 2024. 15

APÊNDICE A - RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS GRUPO 5.1

Problema 1

[C]

Em relação aos carros que ficarão na entrada, existem maneiras de escolher o compacto e modos de escolher a caminhonete. Já para o estande da região central, tem-se escolhas para o compacto e para a caminhonete. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que o número de possibilidades para compor os estandes é igual a

$4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 = \binom{6}{2} \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2$

$= \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot 2 \cdot 2.$

Problema 2

[E]

Existem $\binom{12}{4}$ modos de escolher os vagões pintados na cor vermelha, $\binom{8}{3}$ maneiras de escolher os vagões pintados na cor azul, $\binom{5}{3}$ modos de escolher os vagões que serão pintados na cor verde e $\binom{2}{2}$ maneiras de escolher os vagões pintados na cor amarela. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é

$\binom{12}{4} \times \binom{8}{3} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{2}.$

Problema 3

[B]

O número de códigos possíveis é dado por:

Para 3 toques: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

Para 4 toques: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot = 4^4$

Para 5 toques: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot = 4^5$

Portanto, a expressão representa o número total de códigos existentes é: $4^3{+}4^4{+}4^5$.

Problema 4

[C]

Se denota um vagão com agente e um vagão sem agente, então o número de configurações possíveis é igual a conforme o diagrama abaixo.

a	v	a	v	a	v
v	a	v	a	v	a
a	v	a	v	v	a
a	v	v	a	v	a

Fixada a ordem dos vagões, ainda é possível permutar as agentes de $P_3 = 3!$ modos. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $4 \cdot 3! = C_4^3 \cdot 3!$.

Problema 5

[E]

Como existem quatro vogais e cinco consoantes, a única configuração possível é

$$c_1 v_1 c_2 v_2 c_3 v_3 c_4 v_4 c_5 v_5$$

em que cada c_i representa uma consoante e cada v_i representa uma vogal. Desse modo, temos $P_5^2 = \dfrac{5!}{2!}$ maneiras de dispor as consoantes e $P_4 = 4!$ modos de intercalar as vogais. Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $\dfrac{5!}{2} \cdot 4!$.

Problema 6

[E]

Sabendo que a ordem não importa, a resposta é
$\dbinom{5}{3} = \dfrac{5!}{3! \cdot (5-3)!}$.

Problema 7

[B]

O número de partidas disputadas em turno e returno corresponde ao número de arranjos simples de x times tomados dois a dois, ou seja,

$$A_{x,2} = 380 \leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 380 \leftrightarrow x(x-1) = 380 \leftrightarrow x^2 - x = 380$$

.

Problema 8

[A]

Existem $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!}$ maneiras de escolher os tecidos e $\dbinom{15}{5} = \dfrac{15!}{5! \cdot 10!}$ modos de escolher as pedras. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{15!}{5! \cdot 10!}$$

.

Problema 9

[B]

Existem 9 possibilidades de escolher o andar. Em cada andar, as escolhas possíveis estão entre os apartamentos de final 1 a 6 Logo, em cada andar, é possível escolher 2 apartamentos de $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!}$ maneiras. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $9 \times \dfrac{6!}{2! \times (6-2)!}$.

APÊNDICE B - RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS GRUPO 5.2

Problema 1

[D]

Como cada chave pode assumir apenas duas posições, pelo Princípio Multiplicativo, é imediato que a resposta é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot = 32$.

Problema 2

[C]

Grupo $\begin{cases} 6 & destros \\ 2 & canhotos \end{cases}$

Imposição: 4 duplas, sendo que não haverá dupla com 2 canhotos.

Neste caso, teremos:

Todas as duplas: TD $= \dfrac{C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{4!} = 105$

Duplas com uma dupla de canhotos: TC $= C_{2,2} \cdot \dfrac{C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{3!} = 15$

Total: $T = TD - TC = 105 - 15 = 90$.

Problema 3

[C]

O número de maneiras de ir de A até B passando ou não por C é dado por

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

O número de maneiras de ir de A até C é igual a

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

enquanto que o número de maneiras de ir de C até B é

$$P_3^{2} = \frac{3!}{2!} = 3$$

Desse modo, pelo Princípio Multiplicativo, é possível ir de A até B passando por C de $6 \cdot 3 = 18$ maneiras.

A resposta é $35 - 18 = 17$.

Problema 4

[D]

O número de anagramas em que as letras “edu” estejam juntas e nessa ordem é dado pela permutação das 4 letras com o bloco composto pelas três letras que devem permanecer juntas. Ou seja: $5! = 120$

Descontando a sequência "eduardo", teremos: $120 - 1 = 119$.

Problema 5

[C]

O número total de partidas é dado por $A_{20,2} = \dfrac{20!}{18!} = 380$

Portanto, se ocorreram 126 empates, então houve ganhador em $380 - 126 = 254$ jogos.

Problema 6

[B]

Seja n o número de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes. Sabendo que existem 7 modelos de carros, 2 tipos de motores e n cores, pelo Princípio Multiplicativo, segue que o número de configurações, sem opcionais, é dado por $7 \cdot 2 \cdot n = 14n$ As configurações possíveis com opcionais têm um, dois ou três dos opcionais disponíveis.

Desse modo, existem $\binom{3}{1} = 3$ maneiras de escolher um opcional, $\binom{3}{2} = 3$ maneiras de escolher dois opcionais e $\binom{3}{3} = 1$ maneira de escolher três opcionais. Em consequência, pelo Princípio Aditivo, existem $3 + 3 + 1 = 7$ maneiras de escolher pelo menos um opcional e, portanto, o número de configurações, com opcionais, pelo Princípio Multiplicativo, é $7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot n = 98n$.

Logo, para que a montadora cumpra a oferta, deve-se ter

$$14n + 98n > 1000 \leftrightarrow n > \frac{1000}{112} \leftrightarrow n > 8 + \frac{13}{14}$$

O menor valor inteiro de n que satisfaz a desigualdade é $n = 9$.

Problema 7

[E]

Como há apenas 1 retalho de $10cm \times 20cm$, temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 &= 12 \\ 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 &= 18 \\ 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 &= 18 \\ 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 &= 12 \end{aligned}$$

Logo, a quantidade de modelos diferentes de tapetes é: $12 + 18 + 18 + 12 = 60$.

Problema 8

[B]

O número de maneiras de permutarmos 3 computadores defeituosos e 2 computadores perfeitos vale: $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

E a probabilidade de escolhermos 3 computadores defeituosos dentre os 5 computadores comprados (dentre os 10 disponíveis) é igual a:

$$\underbrace{\frac{3}{10}}_{def} \cdot \underbrace{\frac{2}{9}}_{def} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{def} \cdot \underbrace{\frac{7}{7}}_{perf} \cdot \underbrace{\frac{6}{6}}_{perf} \cdot 10 = \frac{1}{12}$$