



Universidade Federal do ABC

**Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT**

**Dissertação de Mestrado**

**GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES  
UM ENFOQUE DA GEOMETRIA A PARTIR  
DO PROGRAMA DE ERLANGEN DE  
FELIX KLEIN**

**Carlos Eduardo Tofolis**

**Orientador: Prof. Dr. Armando Caputi**

Santo André

2013



Universidade Federal do ABC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

**GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES  
UM ENFOQUE DA GEOMETRIA A PARTIR  
DO PROGRAMA DE ERLANGEN DE  
FELIX KLEIN**

Carlos Eduardo Tofolis

Trabalho apresentado como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática  
sob orientação do Prof. Dr. Armando Caputi

Santo André  
2013



Universidade Federal do ABC

## Universidade Federal do ABC

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora.

Prof. Dr. Armando Caputi (UFABC) - Orientador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves (USP)

Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici (UFABC)

Dedico este trabalho à minha família, pelo seu apoio incondicional em especial à minha esposa Fabiola

## Agradecimentos

À Deus, por me conceder as oportunidades, a saúde, a luz, a família e os amigos.

Aos meus pais, tios e primos que sempre me encorajaram a persistir, em especial minha mãe Maria Elena.

Às minhas avós Olinda e Ilda pelo carinho, amor e paciência.

Aos meus irmãos pelo apoio e o carinho, em particular ao Marco Aurélio que por diversas vezes foi meu pai, amigo, e exemplo e sem o qual jamais chegaria aqui.

À minha família "herdada": Rôsangela, Laura, Gê, Telma e Ramon, pelo carinho e momentos de muita alegria sem os quais eu já teria "surtado".

Aos amigos: Jacson, Flávia, Daniela, Silmara, Daniel, Adriana, Carlos, Fabricio Dias, Roberta, Marcelo, Guilherme, Mariane, Cintia, Jeovah, Clayton, e em especial, Aguinaldo e Samuel que me ajudaram e muito nesse projeto.

Aos meus professores por nos orientar com toda motivação necessária aos sábados, com ênfase aos professores Rafael, João, Sinuê e claro, professor Armando Caputi, que acreditou e não mediu esforços para me auxiliar aos sábados, domingos, feriados, tornando possível a concretização deste sonho. Meu muito obrigado Caputi.

À minha companheira, amiga e esposa Fabiola Rejane Bravi pela força, amor, paciência, companherismo, alegrias, e tudo que faz minha vida valer a pena. Nós conseguimos.

Aos que por ventura me esqueci de mencionar aqui por essa minha memória falha.

## Resumo

A proposta deste trabalho é fornecer uma visão do Ensino - Aprendizagem de Geometria em alternativa à perspectiva axiomática, além de mostrar ferramentas interessantes na resolução de problemas clássicos como o Porisma de Steiner e o Problema de Apolônio. No primeiro capítulo, apresentamos o ponto de vista de Klein sobre a Geometria. No capítulo seguinte, apresentamos as inversões circulares juntamente com algumas de suas propriedades que serão úteis às resoluções do Porisma de Steiner e do Problema do Apolônio, discutidos nos capítulos 3 e 4, respectivamente. No último capítulo, é sugerida uma atividade com o GeoGebra<sup>©</sup> para resolução do Porisma de Steiner.

## Abstract

This dissertation aims at providing a teaching-learning view of Geometry as an alternative to the axiomatic perspective. In addition, it shows interesting tools for working out Classical problems such as the Steiner's Porism and the Problem of Apollonius. In the first chapter, it is presented Klein's viewpoint of Geometry. In the following one, Circular Inversions are introduced, regarding its useful properties for solving Steiner's Porism and the Problem of Apollonius, highlighted in chapters 3 and 4, respectively. In the last chapter, it is suggested an activity with GeoGebra<sup>®</sup> for working out Steiner's Porism.

# Índice

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>1 PONTO DE VISTA DE KLEIN</b>	<b>9</b>
1.1 GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES . . . . .	9
1.2 GEOMETRIAS DE KLEIN . . . . .	10
<b>2 INVERSÕES CIRCULARES</b>	<b>12</b>
2.1 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA INVERSÃO . . . . .	12
2.2 PROPRIEDADES DA INVERSÃO CIRCULAR . . . . .	14
2.2.1 Inversa de uma Inversão . . . . .	14
2.2.2 Circunferências Ortogonais . . . . .	14
2.2.3 Pontos Concíclicos . . . . .	15
2.2.4 Inversões de Circunferências e Retas . . . . .	18
2.2.5 Conservação de Ângulos . . . . .	19
2.3 INVERSÃO QUE COLOCA DUAS CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRI- CAS . . . . .	24
2.4 PRODUTO INVERSÍVEL DE CIRCUNFERÊNCIAS . . . . .	26
<b>3 PORISMA DE STEINER</b>	<b>31</b>
3.1 CONSTRUÇÃO DO PORISMA DE STEINER . . . . .	35
<b>4 O PROBLEMA DE APOLÔNIO</b>	<b>38</b>
4.1 CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE APOLÔNIO . . . . .	40
<b>5 GeoGebra®</b>	<b>50</b>
5.1 CRIANDO UMA FERRAMENTA: INVERSÃO CIRCULAR DE PONTOS.	50
5.2 CONSTRUINDO O PORISMA DE STEINER COM GeoGebra® . . . . .	54



<b>6 APÊNDICE</b>	<b>62</b>
6.1 POTÊNCIA DE PONTO . . . . .	62
6.2 ÂNGULOS CENTRAIS, INSCRITOS E DE SEGMENTO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA . . . . .	63
6.3 QUADRILÁTEROS INSCRITOS A UMA CIRCUNFERÊNCIA . . . . .	65
6.4 TANGENTES EXTERNAS E INTERNAS A DUAS CIRCUNFERÊNCIAS DADAS . . . . .	65
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>

# INTRODUÇÃO

*[O trabalho de Klein], baseado em pesquisa desenvolvida por ele próprio e Sophus Lie (1842-1899) em teoria dos grupos, apresentava a notável definição de "geometria" que serviu para codificar essencialmente todas as geometrias existentes à época e apontou o caminho para novas e frutíferas avenidas da pesquisa geométrica. Tornou-se conhecido como Programa de Erlanger e apareceu exatamente na época em que a teoria dos grupos estava invadindo quase todos os domínios da matemática e alguns matemáticos começavam a achar que toda a matemática não passaria de alguns aspectos dessa teoria*<sup>1</sup>.

Esse trabalho visa dar uma ideia inicial sobre as Geometrias de Klein, e como essas geometrias podem nos auxiliar a resolver problemas de uma maneira mais simplificada.

Apresentamos o ponto de vista de Klein, começando com a definição de grupos de transformações e a definição de Geometria por Klein além de algumas propriedades, definições básicas e relações entre diferentes geometrias. No segundo capítulo comentamos um pouco sobre Geometria Inversiva e iniciamos o estudo da inversão circular, uma transformação que inverte os pontos de um plano com exceção do centro da circunferência fazendo com que os pontos internos a ela passem a ser externos e vice-versa, e algumas propriedades.

Em seguida apresentamos dois problemas clássicos da geometria: o Porisma de Steiner, que consiste em construir uma cadeia de circunferências tangentes a duas dadas, e o Problema de Apolônio, que consiste em construir todas as circunferências tangentes a três circunferências dadas. Um pouco antes, definimos produto inversível entre circunferências, que será necessário para saber se um Porisma de Steiner tem ou não solução.

No quinto capítulo são sugeridas duas atividades com o GeoGebra<sup>®</sup>, para a elaboração de uma ferramenta para a inversão circular, com o intuito de oferecer ao aluno uma compreensão melhor dessa transformação e auxiliar na segunda atividade que é a construção de um Porisma de Steiner.

Durante o desenvolvimento do trabalho, não iremos demonstrar todos os teoremas e definições, mas somente os mais importantes para a compreensão do mesmo. Relações geométricas conhecidas do ensino médio utilizadas em algumas das nossas demonstrações são mencionadas no apêndice.

---

<sup>1</sup>[1] p. 605

# 1 PONTO DE VISTA DE KLEIN

Felix Christian Klein (1849-1925) foi um matemático alemão. Seu trabalho incidiu na geometria e nas interligações entre a teoria dos grupos e a geometria. Foi indicado com apenas vinte e três anos de idade professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do Conselho da Universidade de Erlangen. Em sua aula inaugural, falou do seu campo de pesquisa em geometria. Klein tinha a ideia de relacioná-las e classificá-las de acordo com os grupos de transformações (isometrias, similitudes, inversões, etc). Esse programa ficou conhecido como Programa de Erlangen.

Apresentamos a seguir as ideias básicas do Ponto de Vista de Klein como contextualização e depois nos aprofundamos em uma das transformações que é pouco usual no ensino médio, mas que possibilitaria resoluções de situações problemas desse nível de ensino com relativa facilidade.

## 1.1 GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES

Para dar início ao ponto de vista de Klein, vamos primeiro ver alguns conceitos básicos de grupos de transformações.

Lembremos que um conjunto  $G$ , dotado de uma operação  $\cdot$  é um grupo se

- a)  $\exists e \in G$ , tal que  $e \cdot g = g \cdot e = g \quad \forall g \in G$ ;
- b) Para cada  $g \in G$ , existe um  $g^{-1} \in G$ , tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$
- c) É associativo, ou seja:  $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$

Seja  $S$  um conjunto não vazio. Uma *transformação* de  $S$  é uma função bijetora  $t : S \rightarrow S$ . O conjunto de todas as transformações de  $S$ , dotado da operação de composição, constitui um grupo. Tal grupo, assim como os seus subgrupos, são genericamente chamados de *grupos de transformações* de  $S$ .

### Exemplos

- 1)  $S = \mathbb{R}^2$ ,  $G =$  Grupo das isometrias.

Uma isometria é uma transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ . Seu elemento neutro é a identidade. Rotações, translações e reflexões são exemplos de isometrias.

- 2)  $S = \mathbb{R}^2$ ,  $G =$  Grupo das similitudes.

Uma similitude é uma transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $d(T(x), T(y)) = k \cdot d(x, y)$ , para algum  $k > 0$ . Se  $k > 1$  chamamos a similitude de dilatação, se  $0 < k < 1$ , a chamamos de contração. Note que se  $k = 1$  a similitude é uma isometria. A menos de isometrias, elas são homotetias. Enquanto as isometrias preservam distância, nas similitudes as distâncias são proporcionais.

## 1.2 GEOMETRIAS DE KLEIN

Uma *Geometria de Klein* é um par  $(S, G)$  onde  $S$  é um conjunto não vazio e  $G$  é um grupo de transformações de  $S$ . Uma *figura geométrica* é um subconjunto de  $S$ . Uma *propriedade geométrica* é uma propriedade *invariante* por transformações de  $G$ , isto é, se  $F$  é uma figura que possui tal propriedade, então  $t(F)$  também possui,  $\forall t \in G$ . Duas figuras geométricas  $F$  e  $F'$  são ditas *G-congruentes*, se existe uma transformação  $t$  de  $G$ , tal que  $t(F) = F'$ .

Note que se  $F$  e  $F'$  são G-congruentes, então  $F$  e  $F'$  possuem as mesmas propriedades invariantes.

O estudo da geometria de  $S$  definida por  $G$  consiste em:

- 1- A descrição das classes G-congruentes,
- 2- A identificação das propriedades invariantes pela ação de  $G$ , e
- 3- Teoremas sobre as classes G-congruentes e as propriedades invariantes por  $G$ .

### Exemplos

A Geometria Euclidiana plana pode ser descrita assim:

- (a) O conjunto  $\mathbb{R}^2$  e
- (b) O grupo  $G$  das isometrias de  $\mathbb{R}^2$ .

Uma vez que cada transformação acima preserva a distância entre pontos, a distância é uma propriedade geométrica da Geometria Euclidiana. Também são propriedades invariantes da Geometria Euclidiana: áreas, ângulos, a colinearidade de três pontos, o paralelismo e o perpendicularismo entre retas, dentre outras.

A Geometria das Similitudes:

- (a) O conjunto  $\mathbb{R}^2$  e
- (b) O grupo  $G$  das similitudes de  $\mathbb{R}^2$ .

São propriedades invariantes da Geometria das Similitudes: ângulos, a colinearidade de três pontos, o paralelismo e o perpendicularismo entre retas, dentre outras.

Uma das vantagens da abordagem de Klein é que podemos relacionar diferentes geometrias. Suponha que  $G$  é um grupo de transformações de  $S$ , e que  $H$  é um subgrupo de  $G$ . Então  $H$  define uma outra geometria em  $S$ . Temos então o seguinte

**Teorema 1.1** *Se duas figuras são H-congruentes, então elas são G-congruentes.*

**Demonstração** Sejam  $P$  e  $Q$  H-congruentes, então existe um elemento  $h$  de  $H$  tal que  $h(P)=Q$ . Como  $H$  é um subgrupo de  $G$ , então  $h$  é também um elemento de  $G$ , logo  $P$  e  $Q$  são G-congruentes.  $\square$

Segue-se que cada classe  $G$ -congruente é uma união de classes  $H$ -congruentes, de modo que na geometria definida por  $G$ , há menos classes de congruências, porém elas são mais abrangentes. Sobre as propriedades invariantes temos o seguinte

**Teorema 1.2** *Se  $P$  é uma propriedade invariante de  $G$ , então  $P$  é uma propriedade invariante de  $H$ .*

**Demonstração** Seja  $F \subset S$  uma figura com a propriedade  $P$ . Como  $P$  é  $G$ -invariantes, então  $g(F)$  possui a propriedade  $P \forall g \in G$ . Assim, dado  $h \in H$ , como  $h \in G$ ,  $h(F)$  possui a propriedade  $P$ . Logo  $P$  é  $H$ -invariante.  $\square$

Assim a geometria de  $S$  definida por  $G$  pode ter menos propriedades que a definida por  $H$ .

## 2 INVERSÕES CIRCULARES

A Geometria Inversiva, dita de forma imprecisa, é a geometria do  $\mathbb{R}^2$  definida pelas inversões circulares. Mais precisamente, é a geometria do plano estendido  $\mathbb{R}_\infty^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$  definida a partir do grupo gerado pelas inversões circulares (o que inclui, nesse contexto, também as reflexões).

Nesse trabalho, não pretendemos explorar as propriedades gerais dessa geometria. Estudaremos apenas as propriedades das inversões circulares em  $\mathbb{R}^2$  e algumas aplicações que podem ser de interesse nas práticas de ensino-aprendizagem da Geometria, no Ensino Médio.

**Definição 2.1** *Uma inversão circular  $I_\lambda$  é uma função  $I_\lambda : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ , onde  $\lambda$  é uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , que leva cada ponto  $A$  do domínio em um ponto  $A'$  da semirreta  $OA$ , tal que*

$$OA \cdot OA' = r^2$$

Sempre que não houver perigo de confundirmos o segmento  $OA$  com a distância entre  $A$  e  $O$ , vamos denotar esta última apenas com  $OA$ . Nos demais casos explicitaremos quando formos nos referir a segmentos.

Observe que  $\frac{OA}{r} = \frac{r}{OA'}$  e logo todo ponto interior a  $\lambda$  tem como imagem um ponto exterior a  $\lambda$  e vice-versa, além de que os pontos na circunferência são fixos.

Também usaremos a notação  $\lambda(A) = I_\lambda(A)$  para simplificar, sempre que não houver perigo de confundir a inversão  $\lambda$  com a circunferência  $\lambda$ .

### 2.1 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA INVERSÃO

Seja uma circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$  e seja  $A$  um ponto interior a  $\lambda$ . Então para encontrar o ponto  $\lambda(A)$  construímos uma semirreta  $OA$ . Depois traçamos uma perpendicular  $s$  à semirreta  $OA$  passando por  $A$ , marcamos um ponto  $P$  de intersecção de  $s$  e  $\lambda$ , traçamos a tangente de  $\lambda$  por  $P$  e por último encontramos o ponto  $A'$  que é a intersecção desta tangente com a semirreta  $OA$ , como mostra a figura 1.

Afirmação:  $A' = \lambda(A)$

Justificativa:  $OP = r$ , o triângulo  $OPA$  é retângulo assim como o triângulo  $OA'P$ , além de possuírem outro ângulo em comum. Logo os triângulos  $OPA$  e  $OA'P$  são semelhantes. Daí tiramos a seguinte relação:

$$\frac{r}{OA} = \frac{OA'}{r}$$

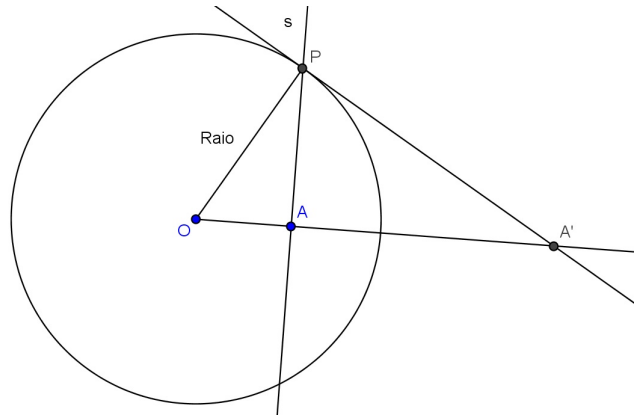


Figura 1: Imagem de um ponto A interno a  $\lambda$ .

o que nos dá:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

Observação: A construção acima independe da escolha de  $P$ .

Seja agora um ponto  $A$  exterior a  $\lambda$ . Construimos a semirreta  $OA$ , traçamos uma tangente de  $\lambda$  passando por  $A$  (secção 6.4), chamamos de  $P_1$  a intersecção de  $\lambda$  com a tangente, construímos a reta  $t$  perpendicular ao segmento  $OA$  passando pelo ponto  $P_1$ , obtendo o ponto  $A'$  de intersecção dos segmentos  $OA$  com  $t$ .

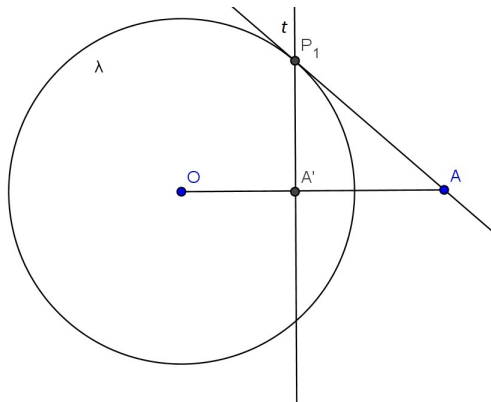


Figura 2: Imagem de um ponto A externo a  $\lambda$ .

Afirmação:  $A' = \lambda(A)$

Justificativa: Análoga à anterior.

Observação: A construção independe da escolha da tangente.

Vamos ver agora algumas propriedades da inversão.

## 2.2 PROPRIEDADES DA INVERSÃO CIRCULAR

### 2.2.1 Inversa de uma Inversão

**Teorema 2.2** *Seja  $\lambda$  uma inversão circular, então a inversa de  $\lambda$  é a própria  $\lambda$ , ou seja,*

$$\lambda \circ \lambda = Id$$

**Demonstração** Seja  $\lambda(A) = A'$ , então temos:

$$OA \cdot OA' = r^2 \quad \implies \quad OA' \cdot OA = r^2 \quad \implies \quad \lambda(A') = A$$

□

Observação: Na notação acima,  $A$  e  $A'$  são ditos *pontos inversos* relativos a  $\lambda$ .

### 2.2.2 Circunferências Ortogonais

**Definição 2.3** *Sejam duas circunferências distintas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que possuam pelo menos um ponto em comum. O ângulo entre estas duas circunferências é o ângulo formado pelas tangentes a cada uma delas no ponto de intersecção de  $\lambda_1$  com  $\lambda_2$ , com  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .*

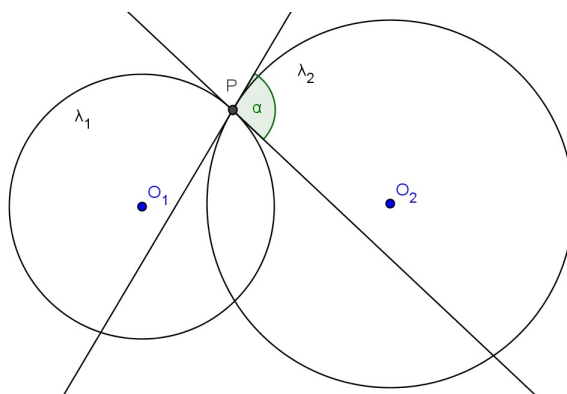


Figura 3: Ângulos entre Circunferências.

Observações:

- 1)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são tangentes se, e somente se, o ângulo entre elas é zero.
- 2) Se o ângulo entre elas for igual  $\frac{\pi}{2}$ , dizemos que elas são ortogonais.

**Teorema 2.4** *Sejam  $A$  e  $A'$  pontos inversos referentes a  $\lambda_1$  e seja  $\lambda_2$  uma circunferência que passa por  $A$  e  $A'$ . Então  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ortogonais.*



**Demonstração** Seja  $P$  um ponto de interseção de  $\lambda_1$  com  $\lambda_2$ . Como  $A'$  é a inversão de  $A$  em relação a  $\lambda_1$ , temos então que  $OA \cdot OA' = r^2 = OP^2$ . Por outro lado, a reta  $OP$  é tangente à  $\lambda_2$  por potência de pontos (Veja secção 6.1) e é perpendicular a tangente de  $\lambda_1$  por  $P$ , pois  $OP$  é uma reta radial de  $\lambda_1$ , concluímos assim que as circunferências são ortogonais.  $\square$

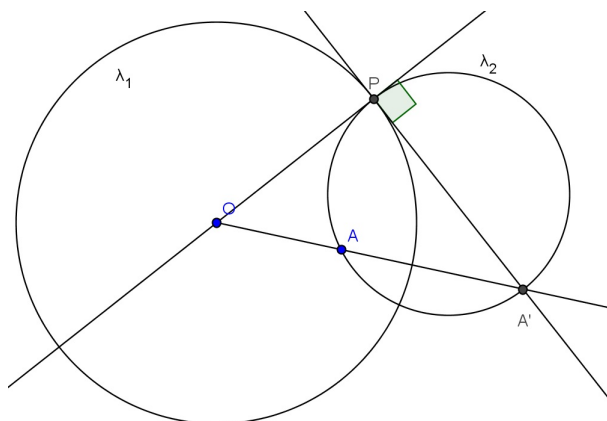


Figura 4: Circunferências Ortogonais.

### 2.2.3 Pontos Concíclicos

**Definição 2.5** Quatro ou mais pontos são concíclicos, se existe uma circunferência que os contém.

É sabido que dois pontos ou três pontos não colineares sempre são concíclicos.

**Teorema 2.6** Sejam  $A'$  e  $B'$  inversos  $\lambda_1$  de  $A$  e  $B$  respectivamente, então:

$$\angle OAB = \angle OB'A'$$

e

$$\angle OA'B' = \angle OBA$$

**Demonstração** Pela hipótese temos que:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \Rightarrow \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$$

O que significa que os  $\triangle OAB$  e  $\triangle OB'A'$  que têm um ângulo em comum são semelhantes e portanto, ângulos correspondentes são congruentes, como queríamos demonstrar.  $\square$

**Corolário 2.7** Os pontos  $A, B, A'$  e  $B'$  são concíclicos.

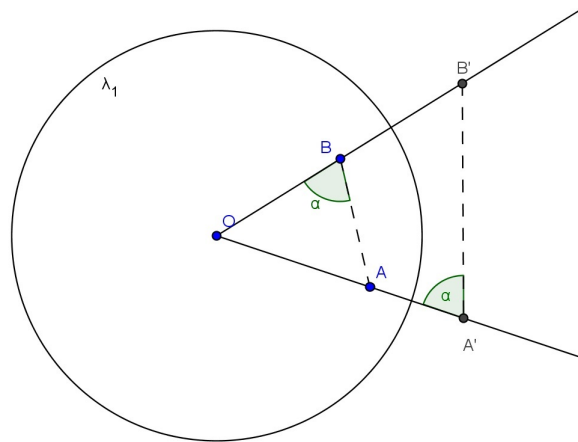


Figura 5: Pontos Concíclicos.

**Demonstração** Observemos que os ângulos  $\angle A'AB$  e  $\angle BB'A'$  são suplementares, logo pela propriedades dos quadriláteros inscritos a uma circunferência (secção 6.3) aplicada ao quadrilátero determinado pelos pontos  $A', A, B$  e  $B'$ , temos que  $A', A, B$  e  $B'$  formam uma circunferência  $\lambda_2$   $\square$

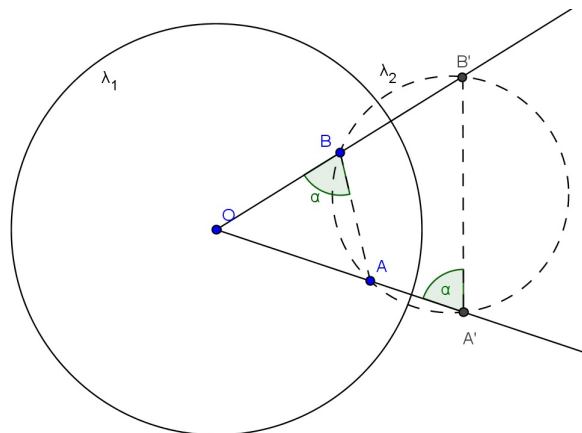


Figura 6: Pontos Concíclicos.

**Corolário 2.8** *Seja  $C$  um ponto na semirreta  $OA$  entre  $A$  e  $A'$ , então  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ .*

**Demonstração** Seja  $A$  um ponto interno a circunferência de inversão, então temos:

$$\angle ABC = \angle OBC - \angle OBA$$

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle OC'B' - \angle OA'B' \\ \angle ABC &= \angle A'B'C'\end{aligned}$$

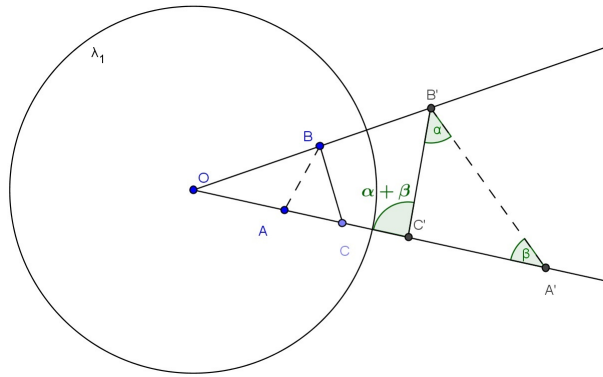


Figura 7: Ângulo entre três pontos.

Suponha agora  $A$  externo a circunferência de inversão, então temos:

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle OBA - \angle OBC \\ \angle ABC &= \angle OA'B' - \angle OC'B' \\ \angle ABC &= \angle A'B'C'\end{aligned}$$

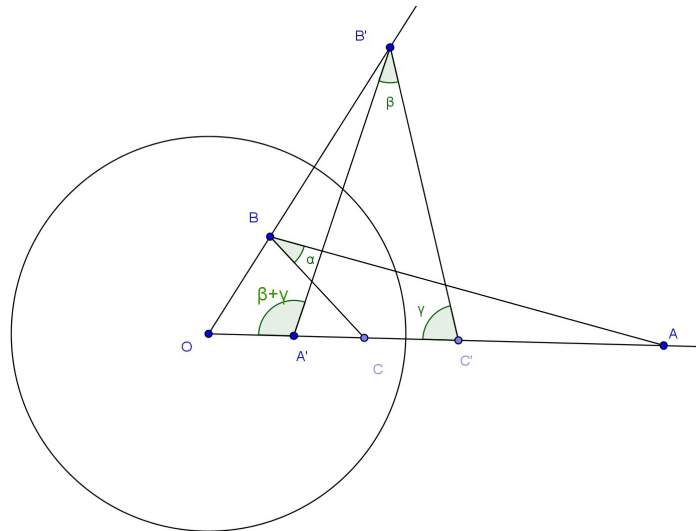


Figura 8: Ângulo entre três pontos.

Algumas observações:

1- Nas condições do Corolário 2.7, as circunferências  $\lambda_1, \lambda_2$  são ortogonais pela propriedade 4;

2- Conhecendo  $A, \lambda(A), B$  não colineares, é possível encontrar  $\lambda(B)$  facilmente, traçando a circunferência que passa por  $A, \lambda(A), B$  e encontrando o ponto de interseção de  $OB$  com a circunferência anterior;

3- Nas condições do Corolário 2.8, se  $C$  for um ponto na semirreta  $OB$  entre os pontos  $B$  e  $B'$ , então  $\angle BAC = \angle B'C'A'$ .

4- Qualquer circunferência que passa por  $A$  e  $\lambda(A)$  tem como inversão por  $\lambda$  ela mesma. Com efeito, seja  $\varphi$  uma circunferência que passa por  $A$  e  $\lambda(A)$ , e seja  $X$  um ponto qualquer de  $\varphi$ . Sabemos que esses três pontos definem uma única circunferência que é  $\varphi$ . Pelo teorema anterior sabemos também que  $\lambda(X)$  também pertence a  $\varphi$  e como  $X$  é um ponto qualquer, temos que todos os pontos  $X \in \varphi$  terão com imagem os pontos  $\lambda(X) \in \varphi$ .  $\square$

## 2.2.4 Inversões de Circunferências e Retas

**Teorema 2.9** *As inversões levam circunferências e/ou retas em circunferências e/ou retas, dependendo se elas passam<sup>2</sup> ou não no centro  $O$  da circunferência  $\lambda$ , como se segue:*

a) *Retas que não passam pelo centro de inversão são levadas em circunferências que passam pelo centro de inversão;*

b) *Circunferências que não passam pelo centro de inversão são levadas em circunferências que também não passam pelo centro de inversão;*

c) *Circunferências que passam pelo centro de inversão são levadas em retas que não passam pelo centro de inversão;*

d) *Retas que passam pelo centro de inversão são levadas nelas mesmas.*

**Demonstração** a) Seja  $s$  uma reta que não passa pelo centro  $O$  de  $\lambda$ . E seja  $A$  o pé da perpendicular a  $s$  passando por  $O$  e  $\lambda(A) = A'$ . Pegue agora qualquer ponto  $X \in s$ . Considere  $\lambda(X) = X'$ , observe que  $\angle OAX = \angle OX'A' = 90^\circ$ . Logo,  $\triangle OA'X'$  é retângulo e pode ser inscrito em uma circunferência de diâmetro  $OA'$ . Como  $X$  é um ponto qualquer de  $s$ , temos então que todo e qualquer ponto de  $s$  pertence a esta circunferência. Para mostrar que todos os pontos da circunferência são imagens da reta  $s$  pegamos um ponto  $B$  pertencente a essa circunferência. Observe que  $\angle OBA' = 90^\circ$  (Veja corolário 6.1) e que pelo Teorema 2.6 temos que  $\angle OAB' = 90^\circ$ . Onde concluímos que qualquer que seja o ponto  $B$  da circunferência, sua imagem estará sobre a reta perpendicular à reta  $OA'$  passando por  $A$  que é a reta  $s$ . Logo, pelo Teorema 2.2, temos que todo ponto  $B$  da circunferência é imagem de um ponto da reta  $s$ .

---

<sup>2</sup>Sabemos que o centro de inversão não possui inversão, e que portanto, quando dizemos inversão de uma circunferência que passa pelo centro de inversão queremos, na verdade, dizer uma inversão de todos os pontos da circunferência menos o ponto  $O$  que é o centro da inversão.

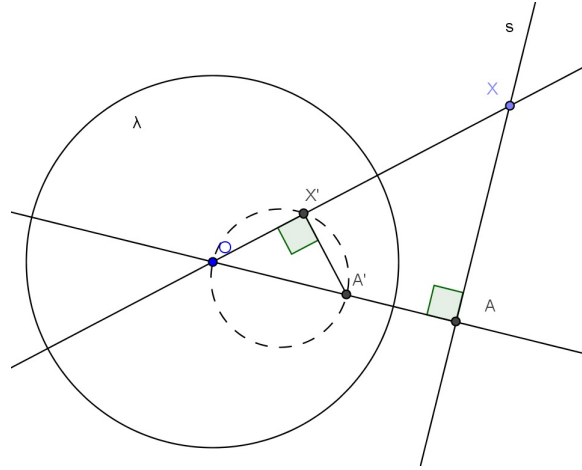


Figura 9: Inversão de uma Reta.

b) Seja  $\lambda_2$  uma circunferência que não passa pelo centro  $O$  da circunferência  $\lambda$ . Seja  $O_2$  o centro de  $\lambda_2$ . Sejam ainda  $A$  e  $B$  os pontos de interseção de  $OO_2$  com  $\lambda_2$ ,  $\lambda(A) = A'$  e  $\lambda(B) = B'$ . Pegue um  $X \in \lambda_2$ . Seja  $X' = \lambda(X)$ , temos que  $\angle OBX = \angle OX'B'$  e  $\angle OAX = \angle OX'A'$ . Como  $\angle OAX$  é o suplementar de  $\angle BAX$  e  $\angle OX'A'$  é o suplementar de  $\angle A'X'X$  temos que  $\angle B'X'A' = \angle AXB = 90^\circ$  pois  $\angle AXB$  está inscrito em uma circunferência de diâmetro  $AB$ . Logo  $X'$  está inscrito em uma circunferência de diâmetro  $B'A'$ . Como  $X$  é qualquer, temos que a imagem de  $\lambda_2$  é uma circunferência.

c) Para fazermos essa demonstração, utilizamos um argumento similar ao utilizado no item a. Seja  $\lambda_3$  uma circunferência de centro  $O_3$  que passa pelo centro de inversão de  $\lambda$ . Sejam  $A$  o ponto de intersecção da reta  $OO_3$  com  $\lambda_3$  diferente de  $O$  e  $A' = \lambda(A)$ . Pegue agora qualquer ponto  $X \in \lambda_3$ , e seja  $X' = \lambda(X)$ . Observe que  $\angle OXA = 90^\circ$  (Veja corolário 6.1) e que pelo Teorema 2.6 temos que  $\angle OA'X' = 90^\circ$ . Onde concluímos que qualquer que seja o ponto  $X \in \lambda_3$  sua imagem estará sobre a reta perpendicular à reta  $OO_3$  passando por  $A'$ .

d) É consequência direta dos itens  $a$ ,  $b$  e  $c$  anteriores e do Teorema 2.2(Inversa de uma Inversão).  $\square$

### 2.2.5 Conservação de Ângulos

Já sabemos medir o ângulo entre duas circunferências, e é sabido calcular o ângulo entre duas retas. Vamos definir o ângulo entre uma reta e uma circunferência. Seja  $r$  uma reta qualquer e  $\lambda$  uma circunferência concorrente a  $r$  nos pontos  $A$  e  $B$ , o seu ângulo é formado por  $r$  e a reta tangente a  $\lambda$  por  $A$  ou  $B$ . Observe que o ângulo independe do ponto escolhido.

As inversões conservam ângulos entre retas e circunferências conforme veremos a seguir. Antes uma observação: Seja  $s$  uma reta secante a uma circunferência  $\lambda$ . E sejam  $A$  e  $B$

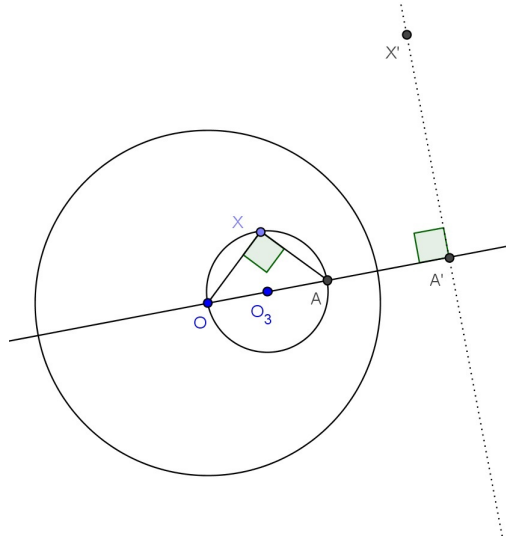


Figura 10: Inversão de uma Circunferência que passa pelo centro de inversão de  $\lambda$ .

os pontos de interseção de  $s$  com  $\lambda$ . Vamos aceitar de forma intuitiva que a tangente a  $\lambda$  passando por  $A$  é obtido quando  $B$  desloca em  $\lambda$  até chegar em  $A$ , em outras palavras, a tangente é uma posição limite das secantes.

**Teorema 2.10** *As inversões conservam ângulos entre retas e retas, retas e circunferências e entre circunferências.*

### Demonstração

(I) Vamos primeiro demonstrar que as inversões conservam ângulos entre uma reta que passa pelo centro de inversão e uma circunferência que não passa pelo centro de inversão.

Sejam  $\lambda_2$  uma circunferência que não passa pelo centro de inversão e  $r$  uma reta que passa pelo centro de inversão. Seja  $A$  uma intersecção entre  $r$  e  $\lambda_2$ . Como a reta  $r$  é fixa, basta mostrar que o ângulo formado por  $r$  e por  $\lambda_2$  no ponto  $A$  é o mesmo que o ângulo formado por  $r$  e por  $\lambda'_2$  que é a inversão de  $\lambda_2$  no ponto  $A'$  que é o inverso de  $A$ .

Seja  $X$  um ponto qualquer de  $\lambda_2$  e  $X' \in \lambda'_2$  seu inverso. Seja também  $Y$  o ponto de intersecção das retas  $AX$  e  $A'X'$ . Sabemos pela propriedade 6 que  $\angle OAX = \angle OX'A'$ . Observe agora a figura 13:

$$\angle OA'X' + \angle AOX = \angle OXA + \angle AOX = \pi - \angle OAX$$

Por outro lado, considere que o ângulo formado pela reta  $r$  e  $\lambda_2$  é o suplementar ao ângulo limite de  $\angle OAX$  quando  $X$  tende a  $A$ . Este ângulo se transforma pela inversão ao ângulo limite de  $\angle OA'X'$  quando  $X'$  se aproxima de  $A'$ .

Tomando então o limite da igualdade anterior quando  $X$  tende a  $A$  temos:

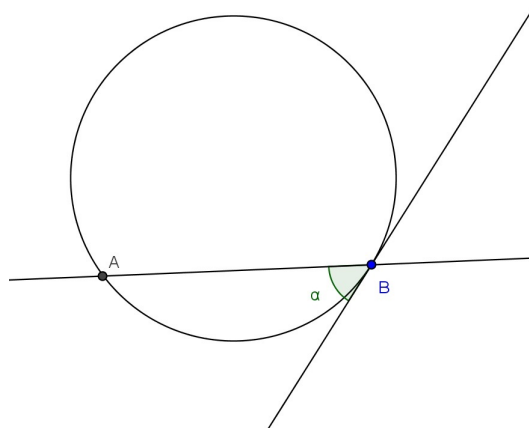


Figura 11: Ângulo entre reta e circunferência.

$$\lim_{X \rightarrow A} \angle OA'X' + \lim_{X \rightarrow A} \angle AOX = \lim_{X \rightarrow A} (\pi - \angle OAX)$$

$$\lim_{X \rightarrow A} \angle OA'X' = \lim_{X \rightarrow A} (\pi - \angle OAX)$$

O segundo membro é o ângulo entre a reta  $r$  e  $\lambda_2$  como tínhamos dito anteriormente, e o primeiro membro é a imagem deste ângulo formado pela inversão.

(II) A inversão conserva ângulos entre circunferências que não passam pelo centro de inversão.

Basta notar que o ângulo entre duas circunferências no ponto  $A$  de intersecção é a soma dos ângulos da reta  $OA$  com cada uma destas circunferências, observe figura 14:

(III) A inversão conserva ângulos entre uma reta que passa pelo centro de inversão e outra que não passa pelo centro de inversão.

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas concorrentes em  $A$  e que uma delas passa pelo centro de inversão. Considere sem perda da generalidade que seja  $r$  essa reta.

Sejam  $s'$  a inversão de  $s$ ,  $A'$  a inversão de  $A$ ,  $P$  e  $P'$  o pé da perpendicular a  $s$  passando pelo centro  $O$  de inversão e seu inverso respectivamente. E seja ainda  $t$  a tangente a  $s'$  por  $A'$ . Sabemos que  $\angle OPA = \angle OA'P' = 90^\circ$ , sabemos também que os ângulos de segmentos, assim como os ângulos inscritos, medem a metade do arco entre eles seção 6.2, ou seja, o ângulo inscrito  $\angle POA$  e o de segmento  $\angle P'A'B$  são congruentes pois ambos medem a metade do arco  $A'P'$ . Como a soma dos ângulos  $\alpha + \beta = 90^\circ$  e que a soma dos ângulos  $\beta$ ,  $90^\circ$  e o ângulo entre  $s'$  e  $r' = r$  forma um ângulo raso, temos então que o ângulo entre  $s'$  e  $r' = \alpha$ . Logo o ângulo entre  $s'$  e  $r'$  é igual ao ângulo entre  $s$  e  $r$  como podemos observar na figura 15:

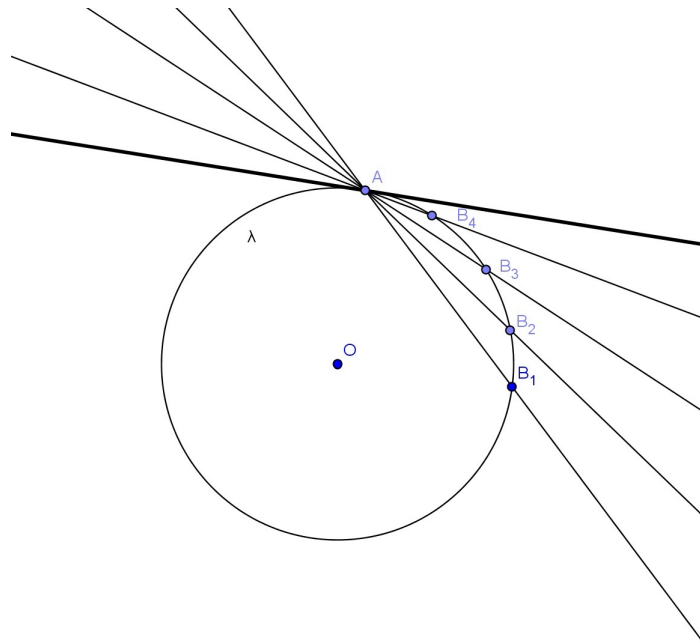


Figura 12: Secante para Tangente.

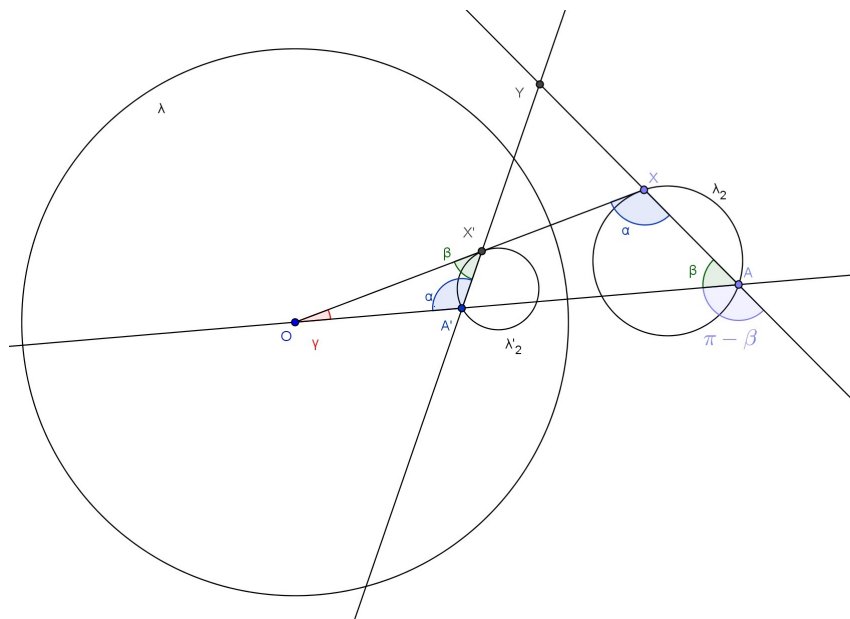


Figura 13: Os ângulos se conservam.

(IV) A inversão conserva ângulos entre duas retas que não passam pelo centro de inversão.

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas concorrentes que não passam pelo centro  $O$  de inversão, podemos



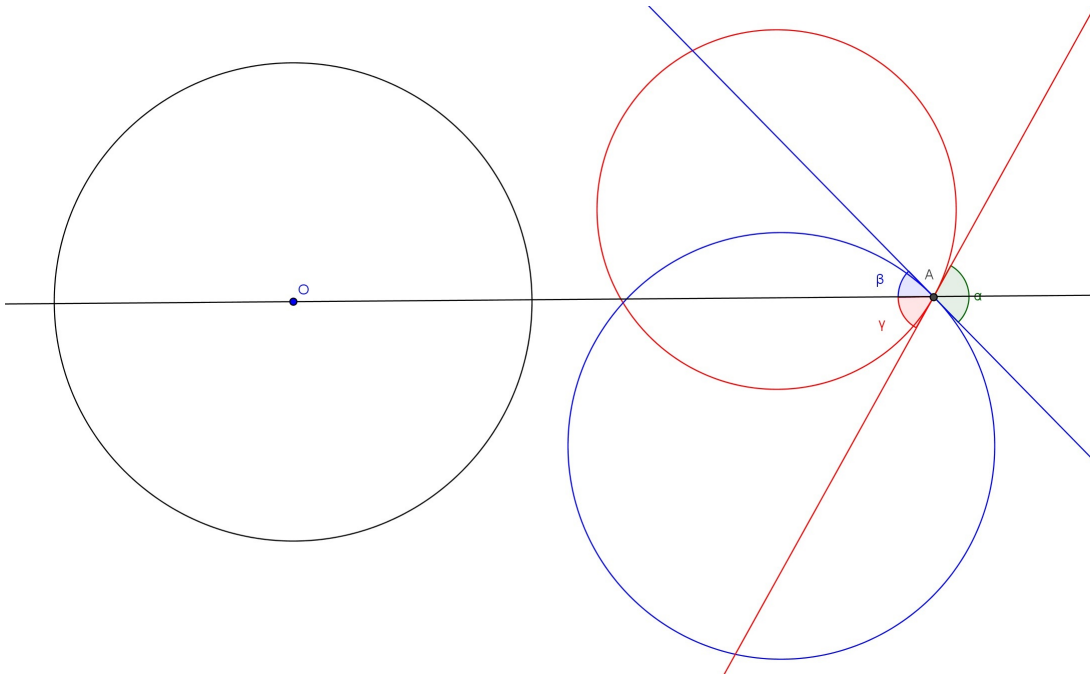


Figura 14: Os ângulos se conservam.

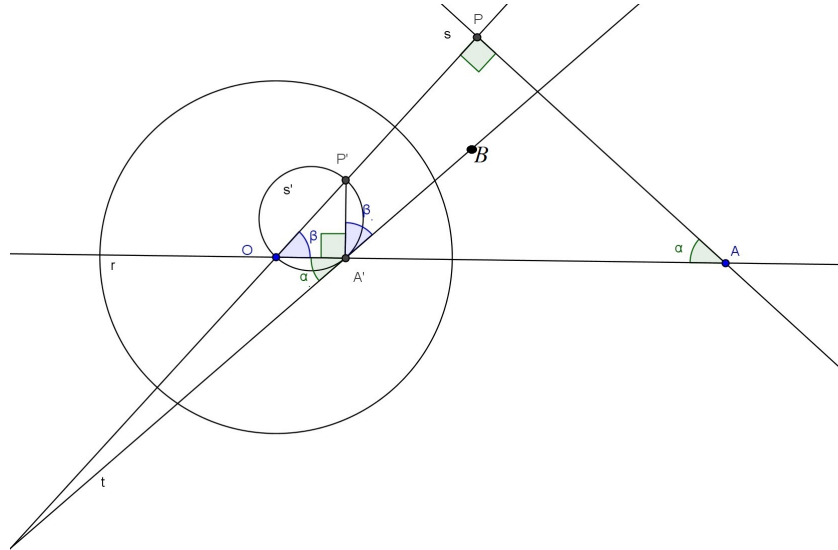


Figura 15: Os ângulos se conservam.

mostrar de modo análogo (II) que o ângulo entre elas se conservam.

(V) A inversão conserva ângulos entre duas circunferências que passam pelo centro de inversão.

Pelos Teoremas 2.2 e 2.9 e por (IV).

(VI) A inversão conserva ângulos entre duas circunferências, sendo uma que passa pelo centro de inversão e outra que não passa pelo centro de inversão.

Pelos Teoremas 2.2 e 2.9 e por (I). □

### 2.3 INVERSÃO QUE COLOCA DUAS CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  duas circunferências não concêntricas de modo que  $\lambda_2$  está contida na região interna delimitada por  $\lambda_1$ . Queremos encontrar uma inversão  $\varphi$  tal que  $\varphi(\lambda_1)$  e  $\varphi(\lambda_2)$  sejam duas circunferências concêntricas. Se aplicarmos uma inversão circular  $\lambda$  de centro em  $P \in \lambda_1$ , teremos as imagens  $\lambda(\lambda_1) = \lambda'_1$  e  $\lambda(\lambda_2) = \lambda'_2$  que serão uma reta e uma circunferência respectivamente, conforme ilustra a figura 16.

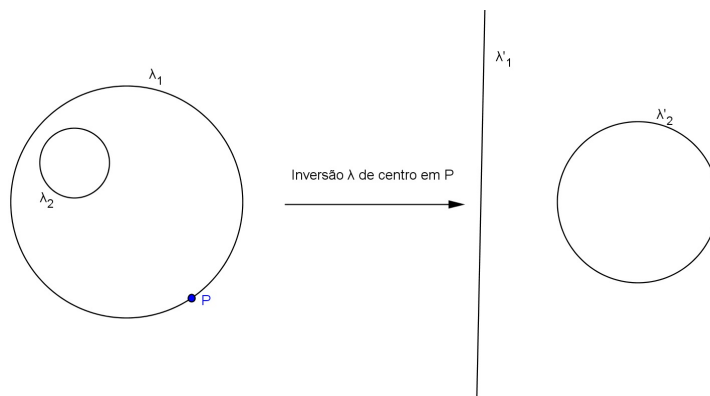


Figura 16: Inversão que coloca duas circunferências concêntricas: Passo 1.

Vamos agora construir duas circunferências  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  ortogonais a  $\lambda'_1$  e  $\lambda'_2$ . Tomemos dois pontos  $A$  e  $B \in \lambda'_2$  tais que  $A$  e  $B$  não pertençam ao diâmetro de  $\lambda'_2$  que é perpendicular a  $\lambda'_1$ . Sejam  $C$  e  $D$  os pontos de interseção de  $\lambda'_1$  com as tangentes a  $\lambda'_2$  que passam por  $A$  e  $B$  respectivamente, observe a figura 17.

Então as circunferências  $\lambda_3$  de centro em  $C$  e raio  $CA$  e  $\lambda_4$  de centro em  $D$  e raio  $DB$  são ortogonais a  $\lambda'_1$  e  $\lambda'_2$ , por construção, e se cortam nos pontos  $R$  e  $S$ .

Para mostrar que  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  são secantes (distância de  $C$  até  $D$  é menor que a soma dos raios de  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  e é maior do que a subtração dos mesmos.) basta observar na figura 18 que  $\lambda'_1$  é externa a  $\lambda'_2$  e que portanto temos:

$$x + y = \sqrt{a^2 - z^2} + \sqrt{b^2 - z^2} < \sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{b^2 - r^2} = r_c + r_d$$

e

$$r_c - r_d = \sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{b^2 - r^2} \leq \sqrt{a^2 - r^2 - b^2 + r^2} = \sqrt{a^2 - b^2} < \sqrt{a^2 - z^2} = x < x + y$$

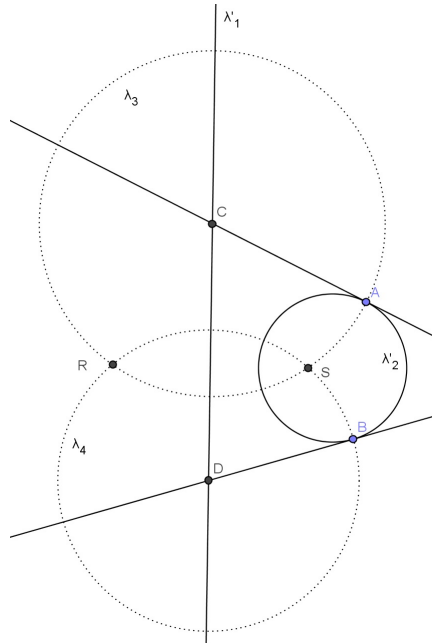


Figura 17: Inversão que coloca duas circunferências concêntricas: Passo 2.

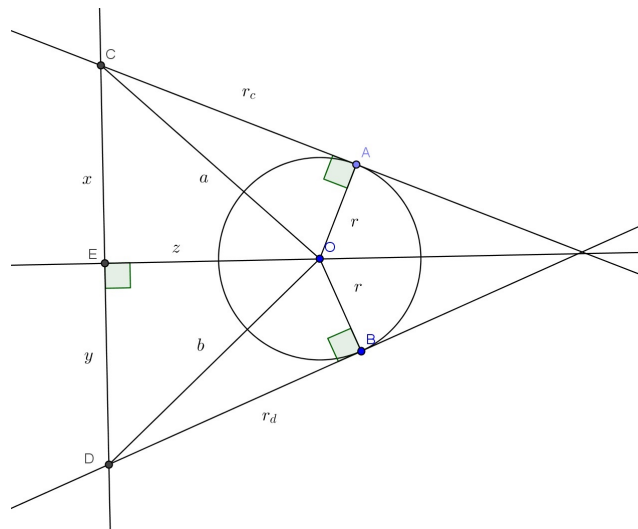


Figura 18:  $\lambda_1'$  e  $\lambda_2'$  são secantes

Vamos mostrar que qualquer inversão circular de centro em  $R$  transforma  $\lambda_1'$  e  $\lambda_2'$  em duas circunferências  $\lambda_1''$  e  $\lambda_2''$  concêntricas.

Com efeito, temos que  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  passam pelo centro de inversão, então pelo Teorema 2.9 temos que  $\lambda_3'$  e  $\lambda_4'$  são retas concorrentes em  $S'$  que é a inversão de  $S$ . A reta  $\lambda_1'$  se transforma em uma circunferência  $\lambda_1''$  ortogonal a  $\lambda_3'$  e  $\lambda_4'$  já que as inversões conservam ângulos, e portanto  $S'$  é o centro de  $\lambda_1''$ . E analogamente temos que a inversão de  $\lambda_2'$  que

vamos chamar de  $\lambda_2''$  é também ortogonal a  $\lambda_3'$  e  $\lambda_4'$ , o que nos garante que  $S'$  também é o centro de  $\lambda_2''$ .  $\square$

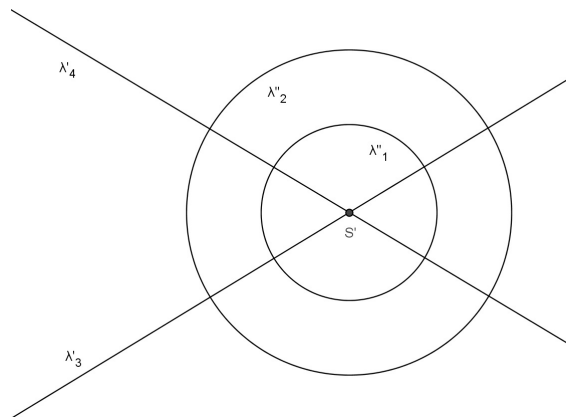


Figura 19: Inversão que coloca duas circunferências concêntricas: Passo 3.

## 2.4 PRODUTO INVERSÍVEL DE CIRCUNFERÊNCIAS

Para os resultados abaixo, utilizaremos o conceito de ângulo orientado entre circunferências secantes.

Sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros respectivos de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e seja  $A$  um dos pontos de intersecção entre elas, ângulo orientado entre duas circunferências é obtido medindo o ângulo  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , entre os segmentos  $O_1A$  e  $O_2A$  como ilustra a figura 20.

Tal ângulo é chamado de ângulo orientado porque coincide com o ângulo entre as tangentes a essas circunferências, orientadas (as tangentes) de acordo com o sentido anti-horário nas circunferências. Tal enfoque, porém, demandaria o uso do conceito de orientação de curvas, o que preferimos evitar por fugir ao âmbito do Ensino Médio.

**Definição 2.11** *Sejam duas circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  secantes nos pontos  $A$  e  $B$ . Seja ainda  $\alpha$  o ângulo orientado formado pelas duas circunferências em  $A$ . O produto inversível entre elas é definido por:*

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \cos \alpha$$

Se as equações de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são dadas por:

$$\lambda_1 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$\lambda_2 = (x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$$

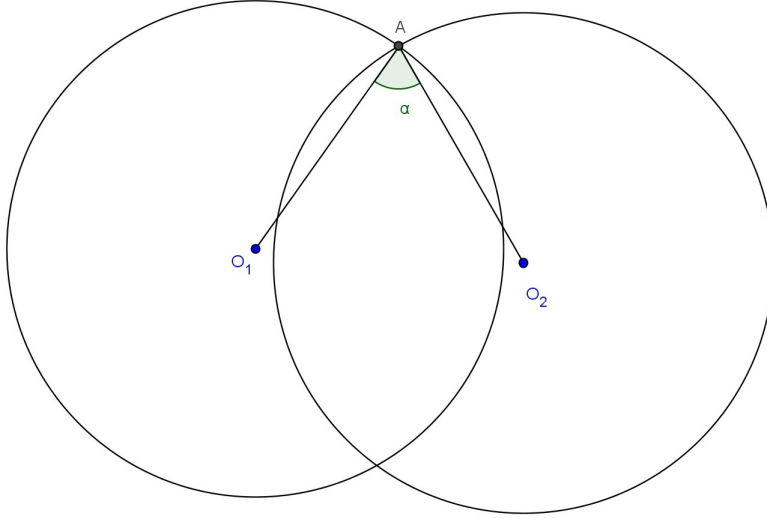


Figura 20: Ângulo orientado entre duas Circunferências.

então:

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \cos \alpha = \frac{1}{rR} \left( ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) \right). \quad (I)$$

Com efeito, sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros respectivos de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e seja  $A$  um dos pontos de intersecção entre elas e utilizando a lei dos cossenos no  $\triangle O_1AO_2$  temos:

$$(O_1O_2)^2 = R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$\left( \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \right)^2 = R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \alpha$$

Isolando  $\cos \alpha$  temos:

$$a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + d^2 - 2bd - R^2 - r^2 = -2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + d^2 - 2bd - R^2 - r^2}{-2Rr} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{rR} \left( ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) \right)$$

E portanto:

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \cos \alpha = \frac{1}{rR} \left( ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) \right)$$

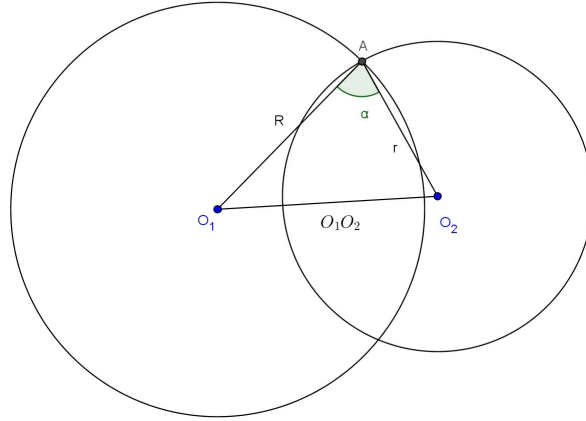


Figura 21: Lei dos cossenos.

O segundo membro da equação (I) tem sentido tanto se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são secantes ou não. Logo podemos tomá-la como definição do produto inversível de duas circunferências, sejam elas quais forem. Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são secantes, então  $\lambda_1 * \lambda_2$  é invariante por inversão, já que os ângulos se conservam.

Mais em geral, vale o seguinte teorema, cuja demonstração omitiremos:

**Teorema 2.12** *O número  $\lambda_1 * \lambda_2$  é invariante por inversão. Tanto para circunferências secantes ou não.*

**Teorema 2.13** *Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são duas circunferências concêntricas de raios  $R$  e  $r$  respectivamente, então*

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right).$$

**Demonstração** Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  concêntricas e  $O = (a, b)$  o centro de ambas, temos então que:

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \frac{1}{rR} (aa + bb - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - R^2 - r^2))$$

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \frac{1}{rR} (a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 - R^2 - r^2))$$

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \frac{1}{rR} (a^2 + b^2 - a^2 - b^2 + \frac{1}{2}(R^2 + r^2))$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 * \lambda_2 &= \frac{1}{rR} \left( \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \right) \\ \lambda_1 * \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{R^2 + r^2}{rR} \right) \\ \lambda_1 * \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right)\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.14** *Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  duas circunferências, então:*

$$|\lambda_1 * \lambda_2| < 1 \iff \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ são secantes}$$

$$|\lambda_1 * \lambda_2| = 1 \iff \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ são tangentes}$$

**Demonstração** Sejam  $(a, b)$  e  $(c, d)$  centros de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente e raios  $R$  e  $r$ :

(a) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são secantes, então:

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \cos \alpha$$

$$-1 \leq \lambda_1 * \lambda_2 \leq 1$$

Porém, essa desigualdade só é 1 ou  $-1$  quando elas são tangentes internas ou externamente, e  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$  conforme Definição 2.3. Logo  $|\lambda_1 * \lambda_2| < 1$ .

Reciprocamente suponha que  $|\lambda_1 * \lambda_2| < 1$

$$-1 < \lambda_1 * \lambda_2 < 1$$

$$\left| \frac{1}{rR} (ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2)) \right| < 1$$

$$-1 < \frac{1}{rR} (ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2)) < 1$$

Como  $Rr > 0$ , então:

$$-Rr < ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) < Rr$$

$$2Rr > -2ac - 2bd + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2 > -2Rr$$

$$2Rr + R^2 + r^2 > -2ac - 2bd + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > -2Rr + R^2 + r^2$$

$$(R + r)^2 > (a - c)^2 + (b - d)^2 > (R - r)^2$$

Dai concluímos que  $R + r > \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ , ou seja, a soma dos raios é maior que a distância entre os centros de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , logo elas são secantes.

(b) Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tangentes internas ou externas, então seu ângulo  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$  e temos:  $\lambda_1 * \lambda_2 = \cos(0) = 1$  ou  $\lambda_1 * \lambda_2 = \cos(\pi) = -1$ .

$$|\lambda_1 * \lambda_2| = 1$$

$$\lambda_1 * \lambda_2 = -1 \text{ ou } \lambda_1 * \lambda_2 = 1$$

$$\frac{1}{rR}(ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2)) = -1$$

$$ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) = -Rr$$

$$-2ac - 2bd + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2 = 2Rr$$

$$(a - c)^2 + (b - d)^2 = (R + r)^2$$

Dai concluímos que a soma dos raios é igual à distância entre os centros de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , logo elas são tangentes externas e portanto  $\lambda_1 * \lambda_2 = -1$ .

Analogamente é fácil mostrar que  $R - r = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ , ou seja, a diferença entre os raios é igual a distância entre os centros das circunferências, o que nos faz concluir que elas são tangentes internas e portanto  $\lambda_1 * \lambda_2 = 1$ .  $\square$



### 3 PORISMA DE STEINER

*Qualificado como "o maior dos geômetras desde Apolônio", Steiner possuía um poder incrível para o tratamento sintético da geometria. Assim é que contribuiu prolificamente para esse campo e escreveu tratados do mais alto padrão. Diz-se que ele detestava o método analítico, que considerava uma muleta para os espíritos menos dotados. Ele produzia geometria nova com uma rapidez tão grande que às vezes não tinha tempo de anotar suas demonstrações, resultando daí que muitas de suas descobertas permanecessem por anos como quebra-cabeças para aqueles que procuravam demonstrações.*<sup>3</sup>

Um problema famoso proposto por Steiner é possível resolver utilizando inversão circular: Porisma de Steiner.

O problema consiste em: Dadas duas circunferências não concêntricas, uma interior à outra, é possível encontrar uma cadeia de circunferências, cada uma tangente à anterior e à posterior, e todas elas tangentes as duas circunferências dadas?

Este problema ou não tem solução, ou tem infinitas soluções, e dizemos então que temos um "Porisma" e neste caso, Porisma de Steiner <sup>4</sup>.

Usando inversão, podemos demonstrar de forma relativamente fácil o seguinte resultado de Steiner:

**Teorema 3.1** *Duas circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  admitem uma cadeia de  $n$  circunferências se, e somente se:*

$$\lambda_1 * \lambda_2 = 1 + 2 \tan^2 \frac{\pi}{n}$$

Antes vamos mostrar o seguinte lema:

**Lema 3.2** *Duas circunferências concêntricas de raios  $R$  e  $r$  com  $R > r$ , admitem uma cadeia de  $n$  circunferências,  $n \geq 3$ , se, e somente se:*

$$\text{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{R - r}{R + r}$$

**Demonstração** É fácil ver que se tal cadeia existe, os centros das  $n$  circunferências da cadeia forma um  $n$ -ágono regular, como ilustra a figura 22.

Como o raio das  $n$  circunferências da cadeia é  $\frac{R-r}{2}$ , temos que o lado do  $n$ -ágono vale  $R - r$ , a distância entre o centro de  $\lambda_2$  até o centro de cada circunferência da cadeia vale  $\frac{R+r}{2}$  e o  $\angle CAB = \frac{\pi}{n}$ . Temos:

---

<sup>3</sup>[1] pp.592-593

<sup>4</sup>Ao longo desse texto, sempre que falarmos de "cadeia de circunferências" será no sentido acima

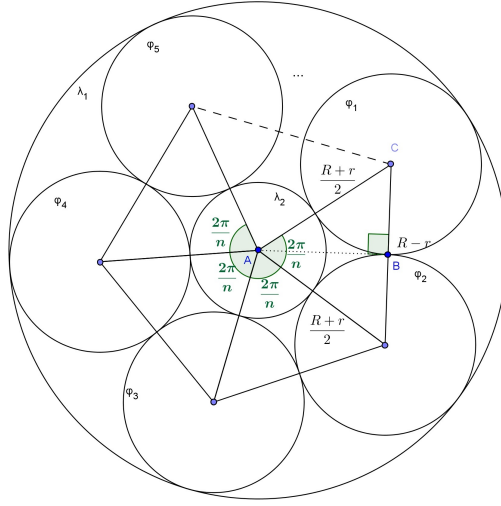


Figura 22:  $n$ -ágono formado pelos centros das circunferências da cadeia.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} &= \frac{R-r}{\frac{R+r}{2}} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} &= \frac{R-r}{R+r} \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha agora que  $\exists n \in \mathbb{N} : \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$ . Tome o  $n$ -ágono regular inscrito na circunferência de centro  $O$  e raio  $\frac{R+r}{2}$ . E observe que seu lado é  $R-r$ .

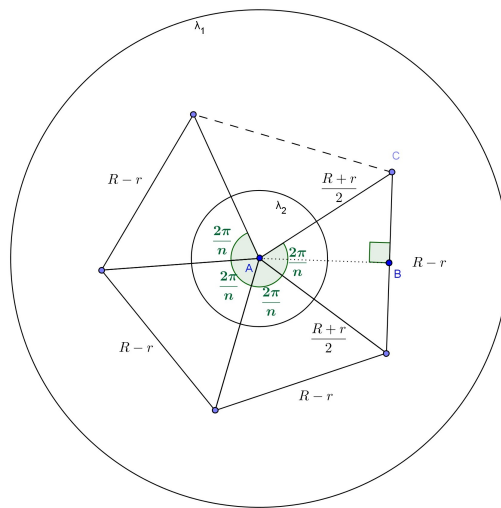


Figura 23:  $n$ -ágono no centro de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$

Se construirmos circunferências  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  com centros nos  $n$  vértices do  $n$ -ágono e

raios iguais a  $\frac{R-r}{2}$ , então teremos  $n$  circunferências tangentes a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e cada circunferência  $\varphi_i$  será tangente as circunferências  $\varphi_{i-1}$  e  $\varphi_{i+1}$  como ilustra a figura 24

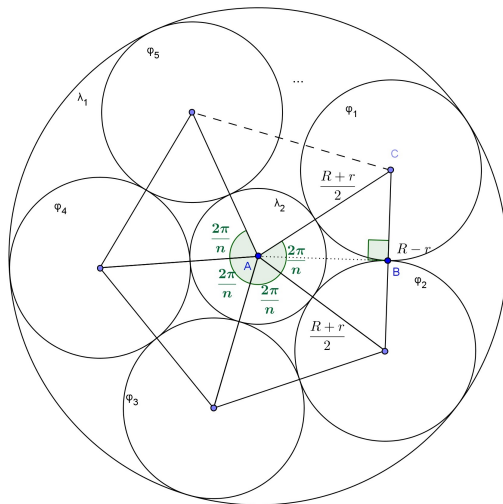


Figura 24:  $n$  Circunferências Tangentes

Justificativa: Sabemos que a distância do centro de  $\varphi_i$  com  $i = 1 \dots n$  para o centro de  $\lambda_2$  é  $\frac{R+r}{2}$  que é igual à soma dos raios de  $\lambda_2$  e  $\varphi_i$ , portanto  $\varphi_i$  é tangente a  $\lambda_2$ , analogamente podemos mostrar que cada  $\varphi_i$  é tangente às circunferências  $\varphi_{i-1}$  e  $\varphi_{i+1}$ . E por fim, a diferença entre o raio de  $\lambda_1$  e  $\varphi_i$  é igual a distância entre os centros destas mesmas circunferências, o que mostra que toda  $\varphi_i$  é tangente interna a  $\lambda_1$ .  $\square$

Agora podemos demonstrar o Teorema 3.1.

**Demonstração** Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  duas circunferências não concêntricas, e seja  $\varphi$  uma inversão que leva  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  a serem concêntricas. Sabemos pelo Teorema 2.13 e pelo Teorema 2.12 que

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \varphi(\lambda_1) * \varphi(\lambda_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right),$$

onde  $R$  e  $r$  são os raios das circunferências  $\varphi(\lambda_1)$  e  $\varphi(\lambda_2)$  respectivamente. Podemos assumir, sem perda da generalidade que  $r < R$ .

Pelo Lema 3.2,  $\text{sen } \frac{\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$  e portanto

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \text{sen } \frac{\pi}{n}}{1 + \text{sen } \frac{\pi}{n}}$$

Fazendo algumas substituições obtemos:

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \text{sen } \frac{\pi}{n}}{1 - \text{sen } \frac{\pi}{n}} + \frac{1 - \text{sen } \frac{\pi}{n}}{1 + \text{sen } \frac{\pi}{n}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( \frac{(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n})^2 + (1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n})^2}{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{2 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}} \right) = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} + 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 * \lambda_2 = 1 + 2 \tan^2 \frac{\pi}{n}$$

□

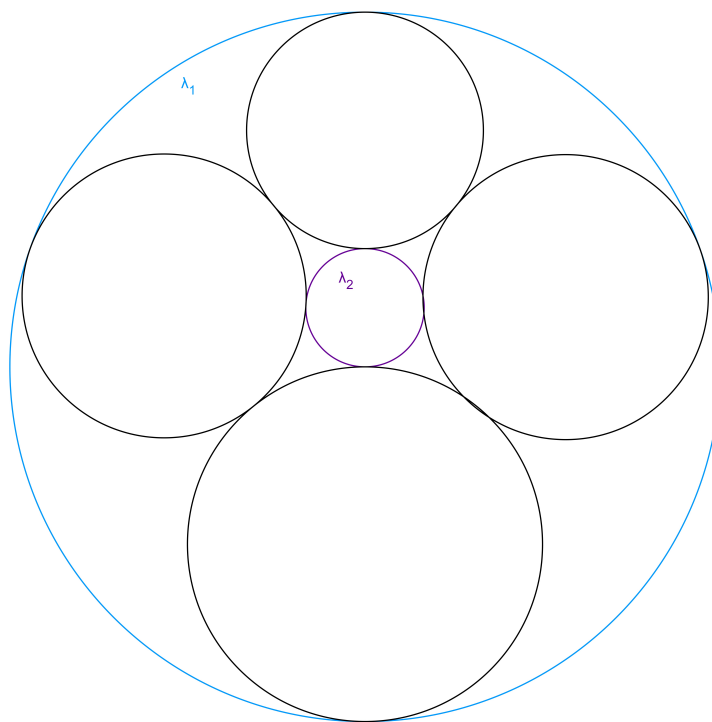


Figura 25: Porisma de Steiner para  $n = 4$ .

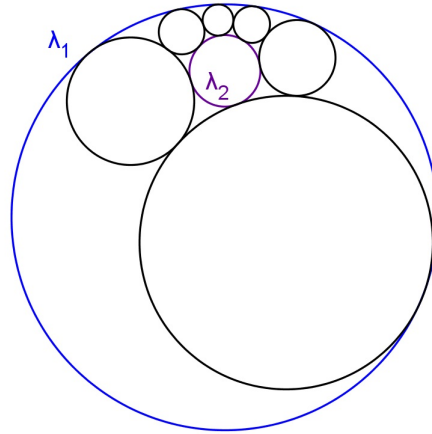


Figura 26: Porisma de Steiner para  $n = 6$ .

### 3.1 CONSTRUÇÃO DO PORISMA DE STEINER

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , tais que  $\lambda_1 * \lambda_2 = 1 + 2 \tan(\frac{\pi}{n})$ . Pelo Teorema 3.1, sabemos que existe uma cadeia de  $n$  circunferências. Vejamos como construir tal cadeia.

Passo 1) Aplique  $\varphi$ , uma inversão que transforma  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em circunferências concêntricas, por exemplo aquela contruída na seção 2.3.

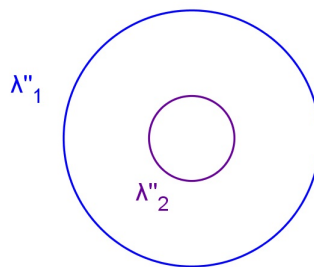


Figura 27: Porisma de Steiner: Passo 1.

Passo 2) Divida  $\varphi(\lambda_1)$  em  $n$  setores iguais com segmentos  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , onde  $m_i$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$  são raios de  $\lambda_1$ .

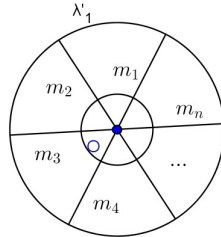


Figura 28: Porisma de Steiner: Passo 2.

Passo 3) Encontre todas as intersecções  $A_i$  e  $B_i$  entre  $m_i$  com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente.

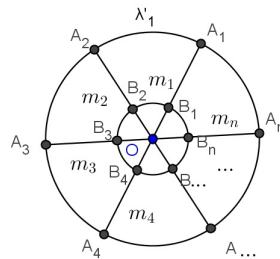


Figura 29: Porisma de Steiner: Passo 3.

Passo 4) Encontre todos os pontos médios  $M_i$  de  $A_i$  e  $B_i$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$

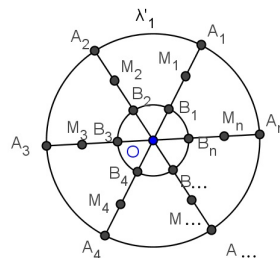


Figura 30: Porisma de Steiner: Passo 4.

Passo 5) Trace todas as  $n$  circunferências de centro  $M_i$  com raios  $M_i A_i$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$ .

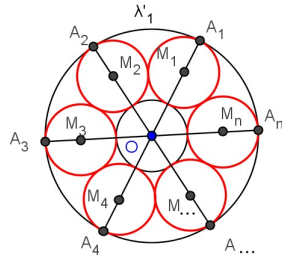


Figura 31: Porisma de Steiner: Passo 5.

Temos agora uma cadeia de  $n$  circunferências tangentes a  $\lambda'_1$  e  $\lambda'_2$ .

Passo 6) Aplique  $\varphi$  nas  $n$  circunferências traçadas no Passo 5.

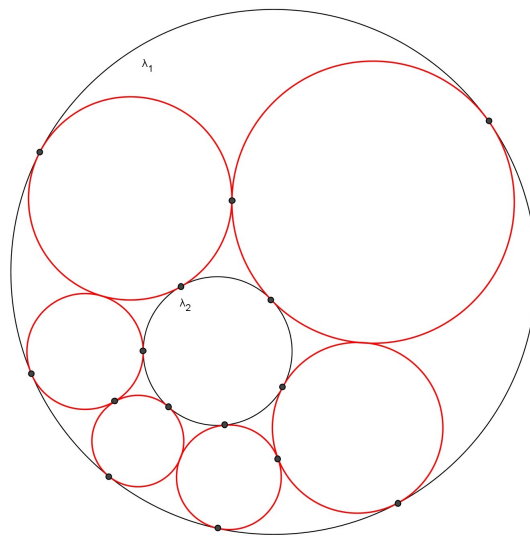


Figura 32: Porisma de Steiner: Passo 6.

As circunferências construídas no passo 6 constituem uma cadeia de circunferência como desejado.

## 4 O PROBLEMA DE APOLÔNIO

*Euclides, Arquimedes e Apolônio são os três gigantes da matemática do século II a.C. Apolônio, que era cerca de vinte e cinco anos mais novo do que Arquimedes, nasceu por volta de 262 a.C em Perga, no sul da Ásia Menor.*

*[...]Embora Apolônio fosse um astrônomo notável e embora ele tivesse escrito sobre múltiplos assuntos matemáticos, sua fama se deve principalmente a "Secções Cônicas", uma obra extraordinária, graças à qual seus contemporâneos lhe deram o cognome de "O Grande Geômetra". Com cerca de 400 proposições em seus oito livros, Secções Cônicas é um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides sobre esse assunto.<sup>5</sup>*

*[...]Tangências aborda o problema da construção de uma circunferência tangente a três circunferências dadas, permitindo-se a estas últimas que se degenerem independentemente em retas ou pontos. O problema, agora conhecido como problema de Apolônio, atraiu a atenção de muitos matemáticos, entre eles Viète, Euler e Newton. Uma das primeiras soluções empregando geometria cartesiana foi dada por uma discípula de Descartes, a princesa Elizabeth, filha do rei Frederico V da Boêmia<sup>6</sup>.*

Antes de enunciar o Problema de Apolônio, vamos primeiro abordar um caso particular deste problema. Dadas duas circunferências  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e um ponto  $P$ , traçar uma nova circunferência tangente às duas primeiras e que passa por  $P$ .

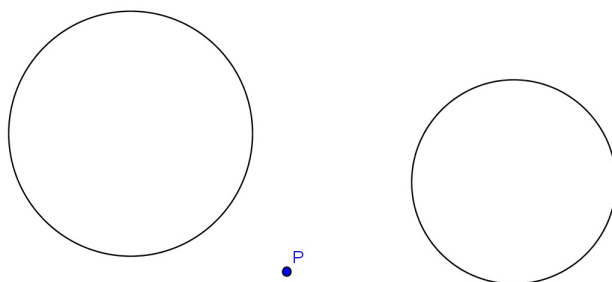


Figura 33: Caso particular do Problema de Apolônio

Utilizando inversão circular, o problema se torna muito fácil de se resolver.

Seja  $\varphi$  uma inversão circular de centro em  $P$  e raio arbitrário. Vamos primeiro aplicar  $\varphi$  em  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e construir uma reta tangente  $\lambda$  às duas circunferências  $\varphi(\lambda_1)$  e  $\varphi(\lambda_2)$  e que não passe por  $P$  (seção 6.4). Observe a figura 34, na qual  $\varphi(\lambda_1) = \lambda'_1$  e  $\varphi(\lambda_2) = \lambda'_2$

---

<sup>5</sup>[1] p.198

<sup>6</sup>[1] p. 201



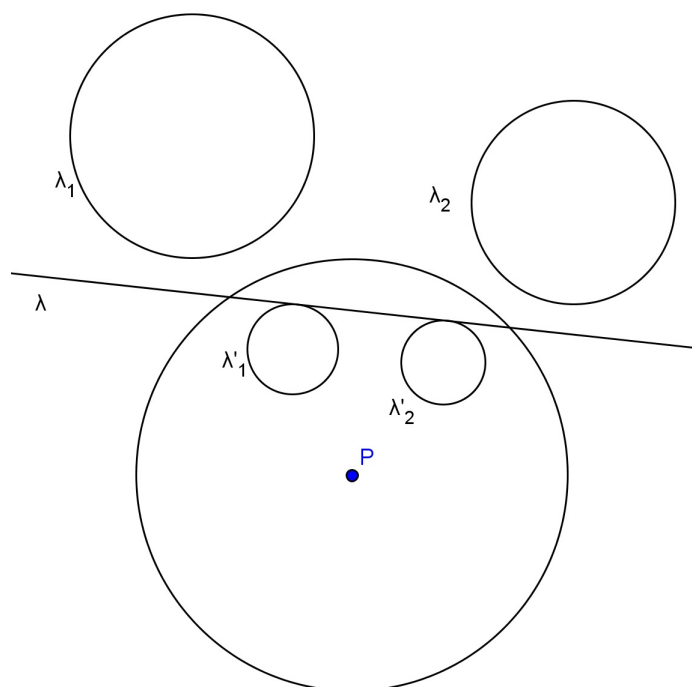


Figura 34: Prob. Apolônio Particular - Passo 1

Vamos agora aplicar  $\varphi$  novamente. Teremos as duas circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , além de uma nova circunferência  $\lambda'$  que é a imagem da reta  $\lambda$  e que passa por  $P$ .  $\lambda'$  é uma solução. Observe que existem até 4 soluções, dependendo é claro, da posição das circunferências dadas.

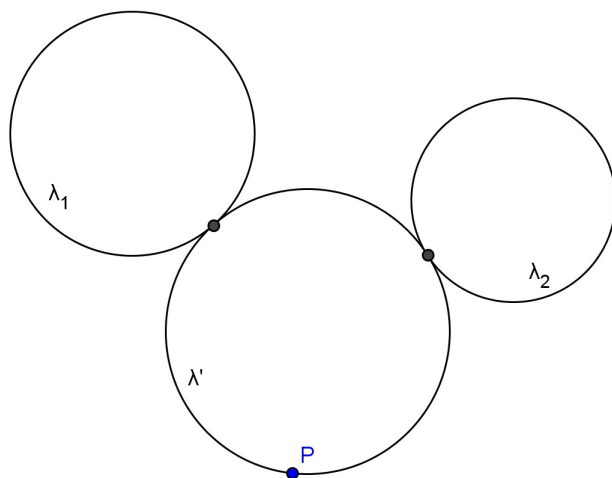


Figura 35: Prob. Apolônio Particular - Passo 2

Vamos agora ao caso geral do Problema de Apolônio, que consiste em contruir todas as circunferências tangentes a três circunferências dadas.

#### 4.1 CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE APOLÔNIO

A seguir, montamos os passos para a solução do problema de Apolônio. Nos casos em que não haja solução, devemos passar para o próximo passo. Dadas três circunferências,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , vamos construir uma circunferência tangente ao mesmo tempo às três dadas. Vamos considerar, sem perda de generalidade que  $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ , onde  $r_i$  é o raio da circunferência  $\lambda_i$ , com  $i = 1, 2, 3$  e que  $O_1, O_2, O_3$  são os seus centros.

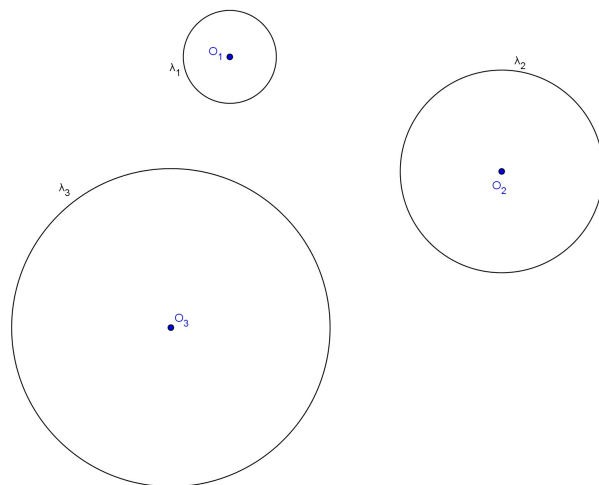


Figura 36: Problema de Apolônio

Passo 1) Construa duas circunferências:  $\lambda_4$  com centro em  $O_2$  e raio  $r_4 = r_2 - r_1$  e  $\lambda_5$  com centro em  $O_3$  e raio  $r_5 = r_3 - r_1$ .

Passo 2) Construa, caso exista, a circunferência  $\Lambda_a$  tangente às circunferências  $\lambda_4$  e  $\lambda_5$  passando pelo centro  $O_1$  de  $\lambda_1$ , tais que estas duas estejam exteriores a  $\Lambda_a$  como ilustra a figura 37(utilize o caso particular do problema de Apolônio visto acima).

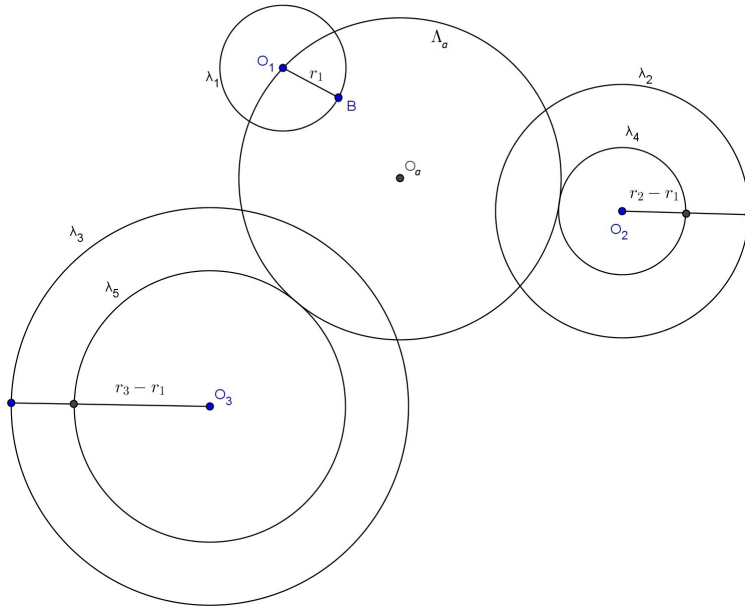


Figura 37: Problema de Apolônio - Passos 1 e 2

Sejam  $O_a$  e  $R_a$ , respectivamente o centro e o raio de  $\Lambda_a$ . Então a circunferência  $\lambda_a$  de centro em  $O_a$  e raio  $S_a = R_a - r_1$  é uma solução, observe a figura 38.

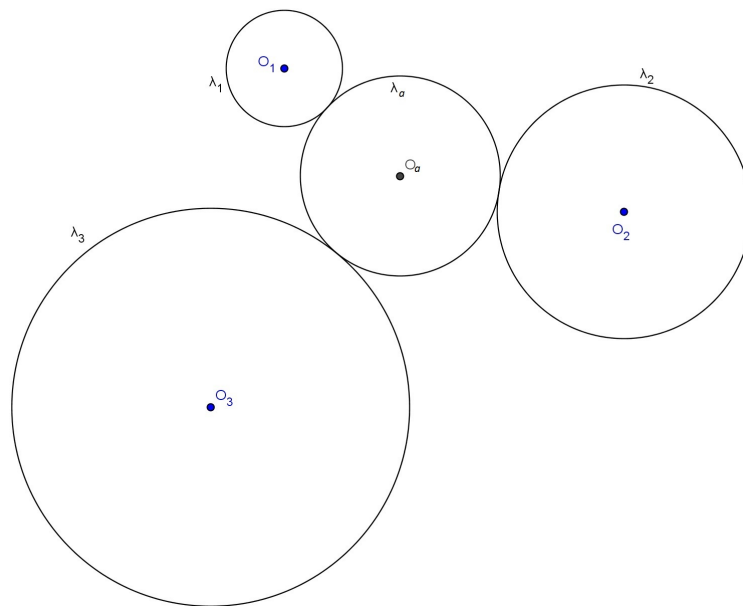


Figura 38: Problema de Apolônio - Uma solução

Passo 3) Construa, caso exista, a circunferência  $\Lambda_b$  tangente às circunferências  $\lambda_4$  e  $\lambda_5$  passando pelo centro  $O_1$  de  $\lambda_1$ , tais que estas duas estejam interiores a  $\Lambda_b$ , como ilustra a figura 39.

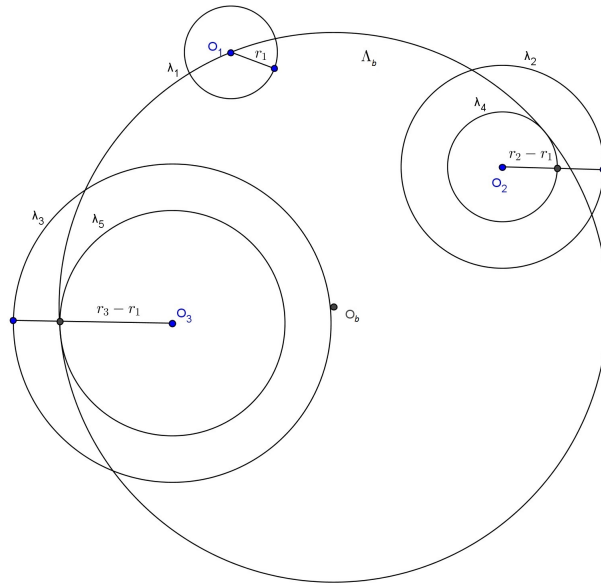


Figura 39: Problema de Apolônio - Passo 3

Seja  $O_b$  e  $R_b$  o centro e o raio respectivamente de  $\Lambda_b$ , então a circunferência  $\lambda_b$  de centro em  $O_b$  e raio  $S_b = R_b + r_1$  é uma solução, observe a figura 40.

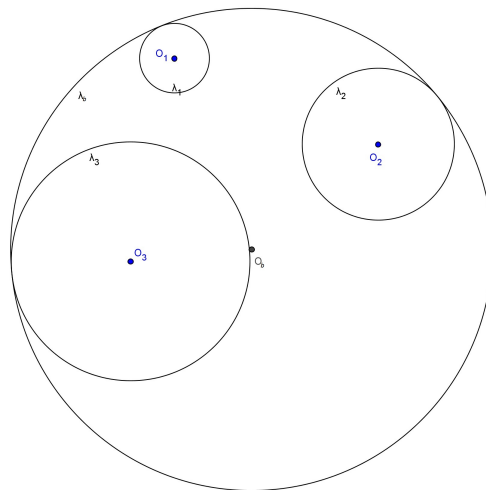


Figura 40: Problema de Apolônio - Uma solução

Passo 4) Construa duas circunferências:  $\lambda_6$  com centro em  $O_2$  e raio  $r_6 = r_2 + r_1$  e  $\lambda_7$  com centro em  $O_3$  e raio  $r_7 = r_3 + r_1$  como ilustra a figura 41.

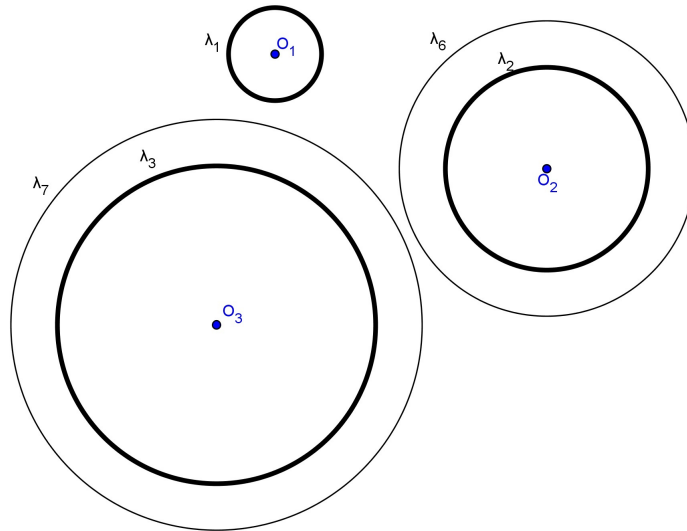


Figura 41: Problema de Apolônio - Passo 4

Passo 5) Analogamente ao passo 2, construa, caso exista, a circunferência  $\Lambda_c$  tangente às circunferências  $\lambda_6$  e  $\lambda_7$  passando pelo centro  $O_1$  de  $\lambda_1$ , tais que estas duas estejam exteriores a  $\Lambda_c$  como ilustra a figura 42

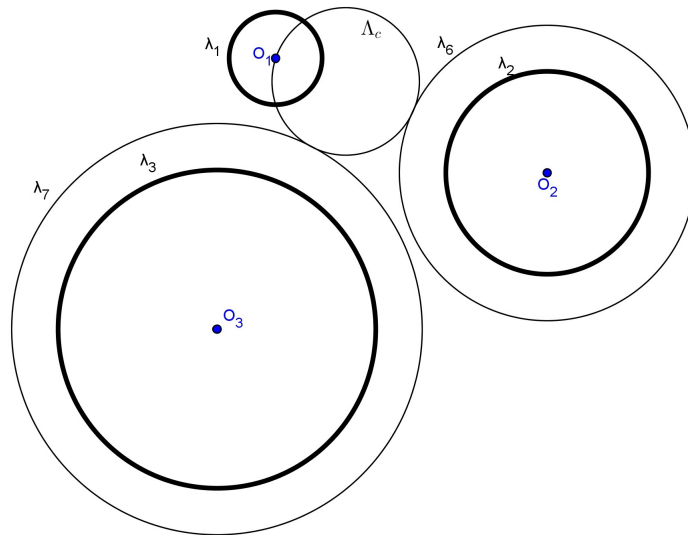


Figura 42: Problema de Apolônio - Passo 5

Seja  $O_c$  e  $R_c$  o centro e o raio respectivamente de  $\Lambda_c$ , então a circunferência  $\lambda_c$  de centro em  $O_c$  e raio  $S_c = R_c + r_1$  é uma solução, observe a figura 43.

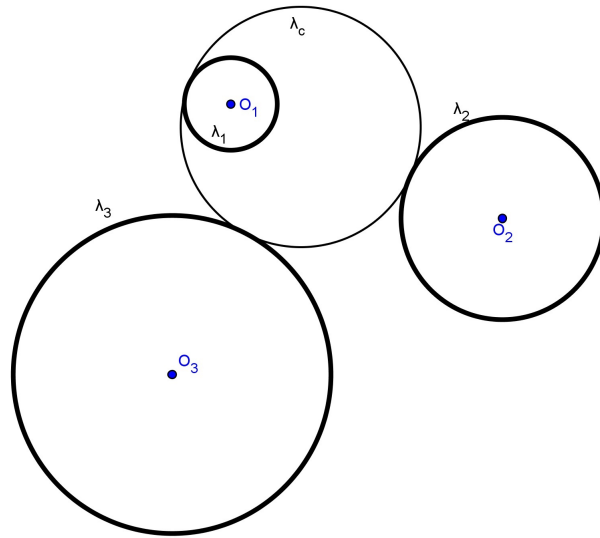


Figura 43: Problema de Apolônio - Uma solução

Passo 6) Analogamente ao passo 3, construa, caso exista, a circunferência  $\Lambda_d$  tangente às circunferências  $\lambda_6$  e  $\lambda_7$  passando pelo centro  $O_1$  de  $\lambda_1$ , tais que estas duas estejam interiores a  $\Lambda_d$ , como ilustra a figura 44.

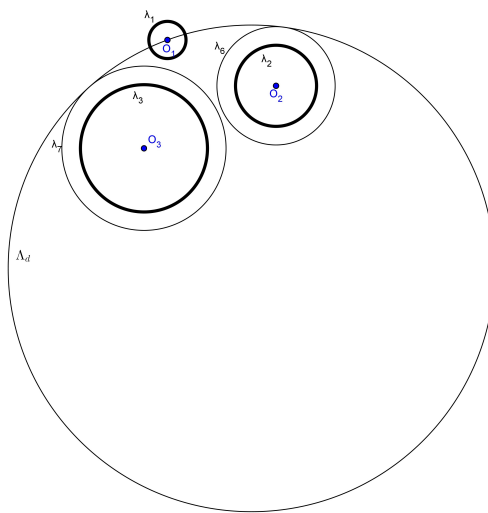


Figura 44: Problema de Apolônio - Passo 6

Seja  $O_d$  e  $R_d$  o centro e o raio respectivamente de  $\Lambda_d$ , então a circunferência  $\lambda_d$  de centro em  $O_d$  e raio  $S_d = R_d - r_1$  é uma solução, observe a figura 45.

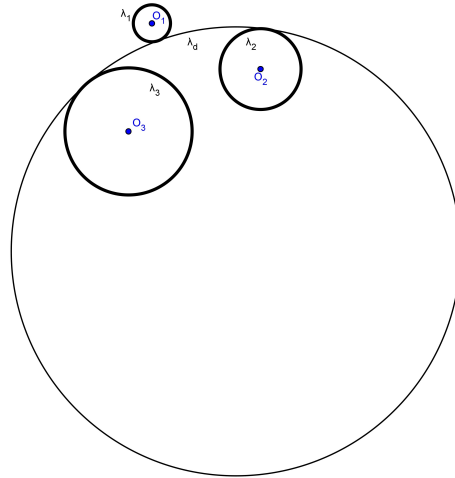


Figura 45: Problema de Apolônio - Uma solução

Passo 7) Construa, caso exista, a circunferência  $\Lambda_e$  tangente às circunferências  $\lambda_6$  e  $\lambda_5$  passando pelo centro  $O_1$  de  $\lambda_1$ , tais que  $\lambda_5$  seja exterior e  $\lambda_6$  seja interior a  $\Lambda_e$ , como ilustra a figura 46.

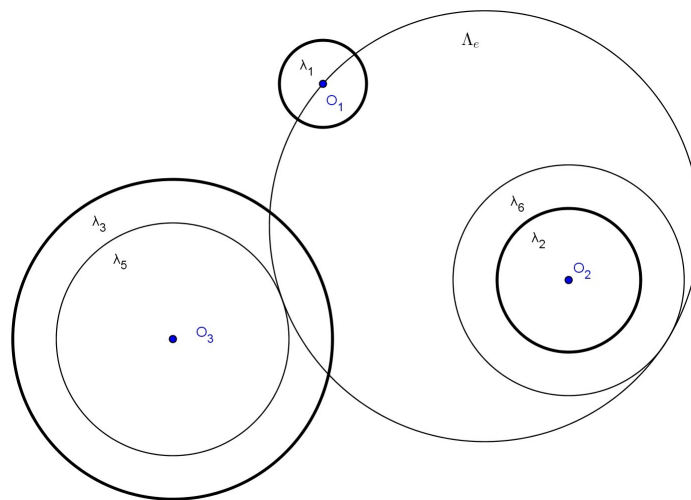


Figura 46: Problema de Apolônio - Passo 7

Seja  $O_e$  e  $R_e$  o centro e o raio respectivamente de  $\Lambda_e$ , então a circunferência  $\lambda_e$  de centro em  $O_e$  e raio  $S_e = R_e - r_1$  é uma solução, observe a figura 45.

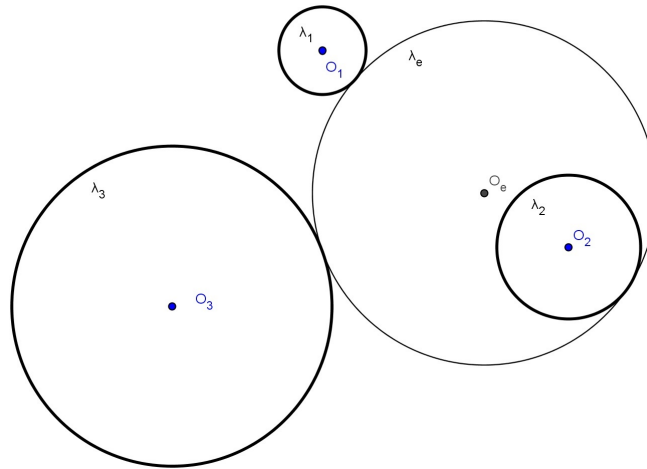


Figura 47: Problema de Apolônio - Uma solução

Passo 8) Construa, caso exista, a circunferência  $\Lambda_f$  tangente às circunferências  $\lambda_6$  e  $\lambda_5$  passando pelo centro  $O_1$  de  $\lambda_1$ , tais que  $\lambda_5$  seja interior e  $\lambda_6$  seja exterior a  $\Lambda_f$ , como ilustra a figura 48.

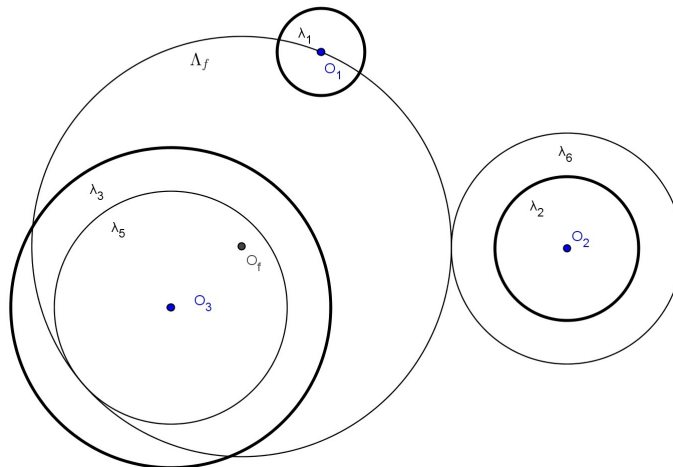


Figura 48: Problema de Apolônio - Passo 8



Seja  $O_f$  e  $R_f$  o centro e o raio respectivamente de  $\Lambda_f$ , então a circunferência  $\lambda_f$  de centro em  $O_f$  e raio  $S_f = R_f + r_1$  é uma solução, observe a figura 49.

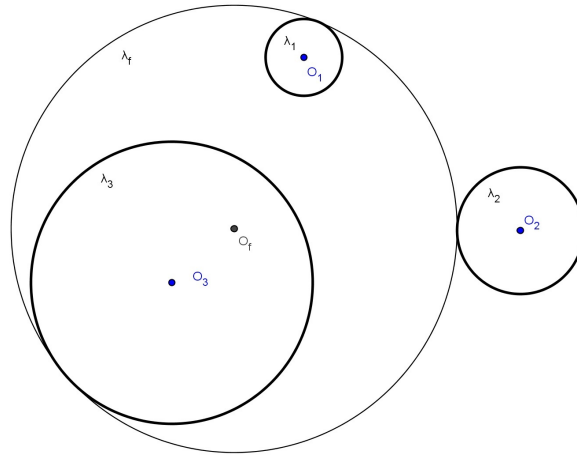


Figura 49: Problema de Apolônio - Uma solução

Passo 9) Construa, caso exista, a circunferência  $\Lambda_g$  tangente às circunferências  $\lambda_7$  e  $\lambda_4$  passando pelo centro  $O_1$  de  $\lambda_1$ , tais que  $\lambda_7$  seja exterior e  $\lambda_4$  seja interior a  $\Lambda_g$ , como ilustra a figura 50.

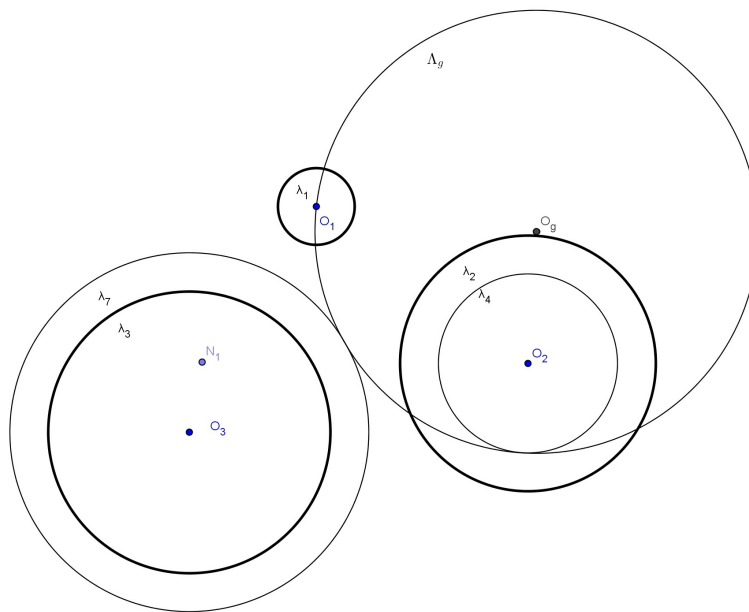


Figura 50: Problema de Apolônio - Passo 9

Seja  $O_g$  e  $R_g$  o centro e o raio respectivamente de  $\Lambda_g$ , então a circunferência  $\lambda_g$  de centro em  $O_g$  e raio  $S_g = R_g + r_1$  é uma solução, observe a figura 51.

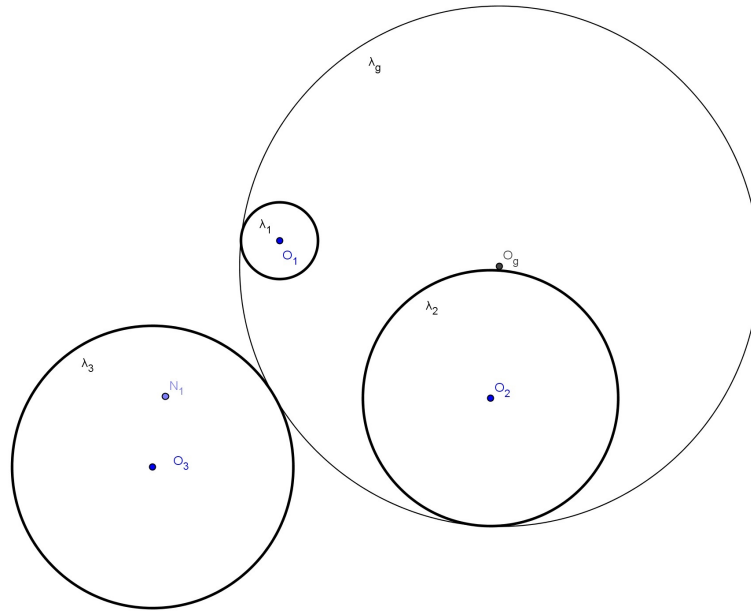


Figura 51: Problema de Apolônio - Uma solução

Passo 10) Construa, caso exista, a circunferência  $\Lambda_h$  tangente às circunferências  $\lambda_7$  e  $\lambda_4$  passando pelo centro  $O_1$  de  $\lambda_1$ , tais que  $\lambda_7$  seja interior e  $\lambda_4$  seja exterior a  $\Lambda_h$ , como ilustra a figura 52.

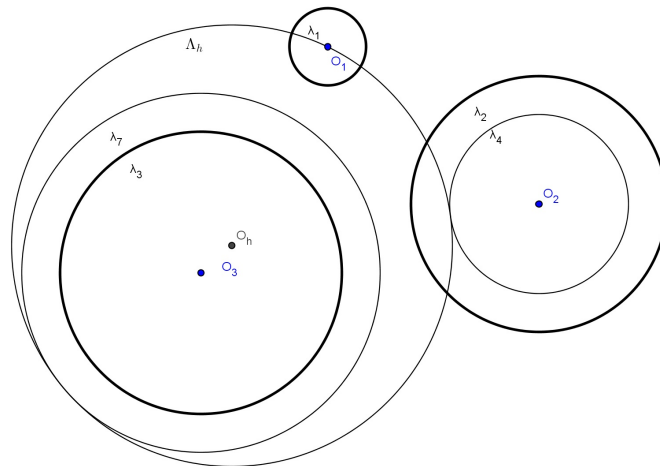


Figura 52: Problema de Apolônio - Passo 10

Seja  $O_h$  e  $R_h$  o centro e o raio respectivamente de  $\Lambda_h$ , então a circunferência  $\lambda_h$  de centro em  $O_h$  e raio  $S_h = R_h - r_1$  é uma solução, observe a figura 53.

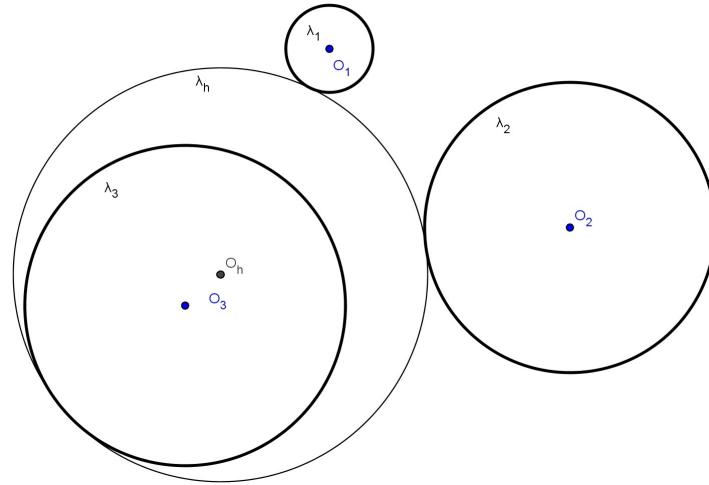


Figura 53: Problema de Apolônio - Uma solução

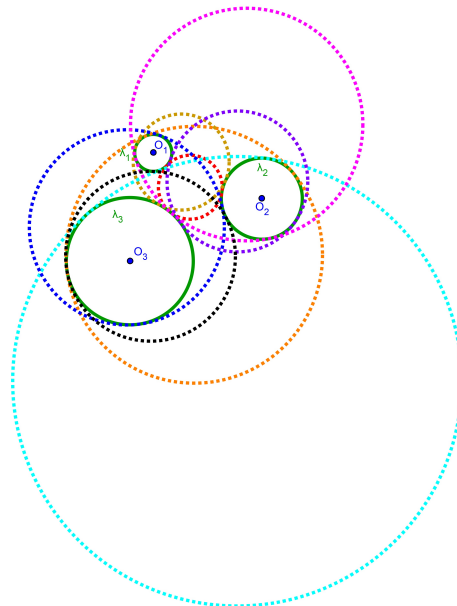


Figura 54: Problema de Apolônio com as 8 soluções

## 5 GeoGebra<sup>®</sup>

GeoGebra<sup>®</sup> (Aglutinação das palavras Geometria e Álgebra), é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI (Graphical User Interface). Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra<sup>®</sup> é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.<sup>7</sup>

Nosso objetivo, neste capítulo, é ilustrar o uso do GeoGebra<sup>®</sup> em sala de aula, propondo a construção do Porisma de Steiner nesse ambiente de geometria dinâmica. Para tanto, criaremos uma ferramenta no GeoGebra<sup>®</sup> para realizar a inversão circular.

Para o uso desse software, indicamos a página oficial do GeoGebra<sup>®</sup>: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), de onde é possível baixar instaladores para todos os sistemas operacionais ou tablets, além de permitir o uso online, sem necessidade de instalação. Indicamos também o GeoGebra Tube: <http://www.geogebraTube.org/>, no qual encontram-se disponíveis inúmeros projetos de interesse geral.

A seguir, propomos uma atividade para ser realizada por professores, com alunos do ensino médio. Apesar da ferramenta inversão circular já existir no GeoGebra<sup>®</sup>, sugerimos que os professores criem tal ferramenta com seus alunos, para que ele possa assimilar melhor o conceito de inversão circular.

### 5.1 CRIANDO UMA FERRAMENTA: INVERSÃO CIRCULAR DE PONTOS.

Para a construção da ferramenta no GeoGebra<sup>®</sup>, a inversão circular de pontos, vamos construir uma circunferência  $c$  de centro  $A$  e raio  $AB$ , como ilustra a figura 55.

Coloque um ponto  $C$  externo a circunferência de inversão  $c$  construída anteriormente. Encontre a inversão do ponto  $C$  como explicado no capítulo 2.1. No nosso caso, a inversão

---

<sup>7</sup>Texto extraído do site: <http://pt.wikipedia.org/wiki/geogebra>, Acessado em: 31/07/2013

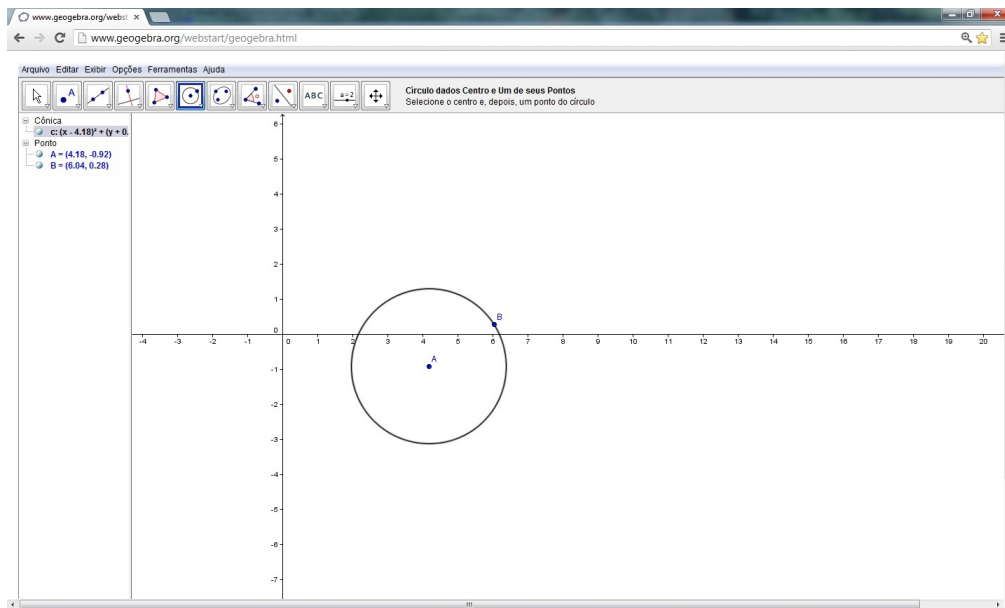


Figura 55: Construindo uma circunferência

de  $C$  é o ponto  $E$  como ilustra a figura 56.

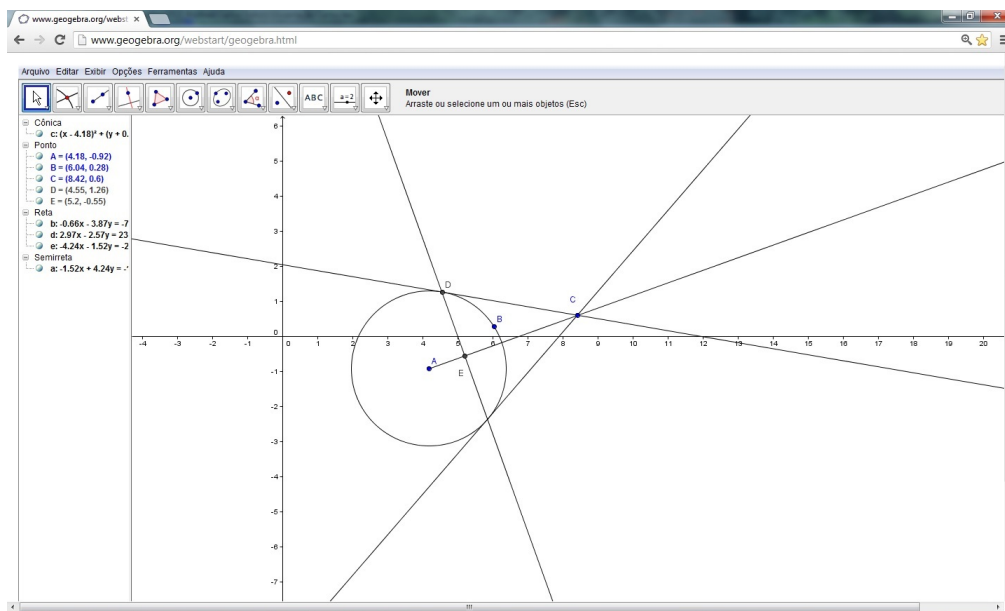


Figura 56: Inversão de um ponto Externo

Observe que ao deslocarmos  $C$  o ponto  $E$  se desloca também, porém se colocarmos o ponto  $C$  "dentro" da circunferência,  $E$  desaparece, assim como as retas que auxiliaram a sua construção. Isso ocorre porque construímos o ponto  $E$  quando  $C$  estava externo a circunferência de inversão. Construa agora a inversão de  $C$ , com  $C$  interno a circunferência

conforme explicado no capítulo 2.1, observe a figura 57.

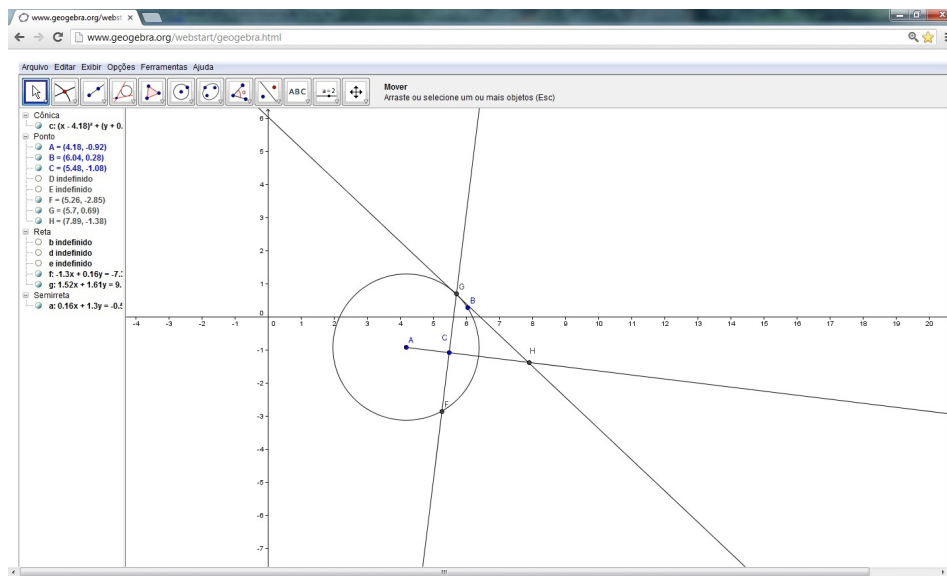


Figura 57: Inversão de um ponto Interno

Surge então o ponto  $H$ , que é a inversão de  $C$  quando este está interno a circunferência de inversão  $c$ .

Agora vamos criar a ferramenta "Inversão Circular". Clique em "Ferramentas" e depois em "criar uma nova ferramenta". Abrirá uma tela solicitando "Objetos Finais", observe a figura 58. Selecione da lista o ponto  $E$  e o ponto  $H$ , que são as inversões de  $C$  ora externo, ora interno.

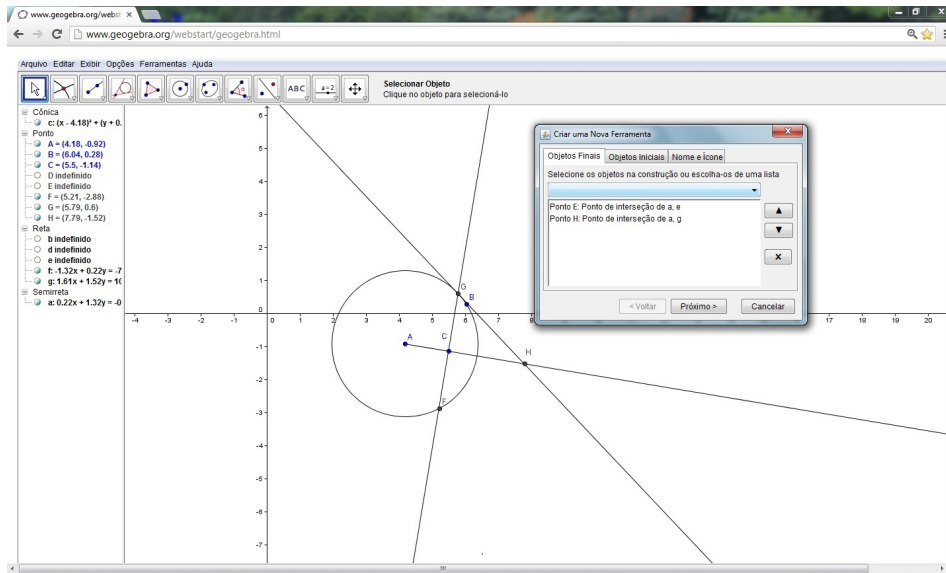


Figura 58: Criando Ferramenta - Objetos Finais

Clique em próximo e a tela irá solicitar "Objetos Iniciais". Selecione da lista o ponto  $C$ , a circunferência  $c$  e seu centro  $A$ . Observe a figura 59.

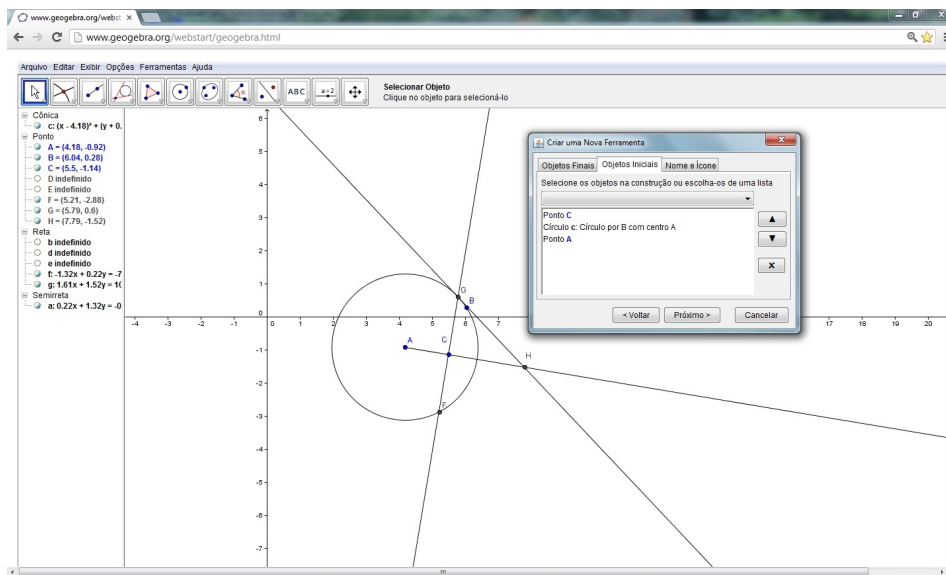


Figura 59: Criando Ferramenta - Objetos Iniciais

E por fim ao clicar em próximo ele pede o "Nome e Ícone" da ferramenta como ilustra a figura 60. Preencha com o nome e o ícone que desejar, clique em concluído e pronto. Nossa ferramenta foi construída.

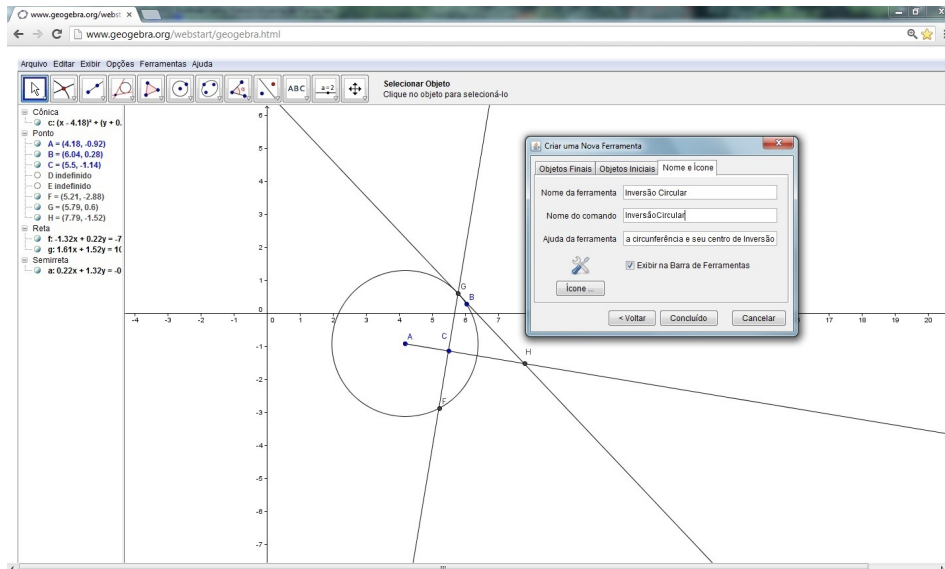


Figura 60: Criando Ferramenta - Nome e Ícone

Obs2: Quando utilizarmos a ferramenta criada acima, ela criará dois pontos, que serão a inversão do ponto  $X$  quando  $X$  for externo a circunferência de inversão, e a inversão do ponto  $X$  quando  $X$  for interno a circunferência de inversão. Porém, é claro que não pode ocorrer as duas coisas ao mesmo tempo, por isso, quando  $X$  for externo, aparecerá apenas um ponto como inversão, e o outro ponto aparecerá como indefinido e vice-versa, conforme mostra a figura 61.

Obs3: Para renomear os pontos, circunferências, etc, selecione o objeto desejado, clique no botão direito do mouse e renomeie-o.

## 5.2 CONSTRUINDO O PORISMA DE STEINER COM GeoGebra<sup>®</sup>

Construa uma circunferência e renomeie para  $\lambda_1$ . Renomeie também o seu centro para  $O_1$ . Construa uma nova circunferência de raio menor do que  $\lambda_1$  e que seja interna a esta. Renomeie para  $\lambda_2$  assim como seu centro para  $O_2$ . Construa o segmento  $O_1B$  e renomeie-o para  $R$ . Construa o segmento  $O_2O_1$  e renomeie-o para  $r$ .

É importante lembrar que o Porisma de Steiner só possui solução se, e somente se

$$\lambda_1 * \lambda_2 = 1 + 2 \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Logo é interessante adotarmos alguns "facilitadores" como se segue.

Colocar  $O_1$  na origem do sistema cartesiano e  $O_2$  sobre um de seus eixos, fará com que:

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \frac{1}{rR} (ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2))$$



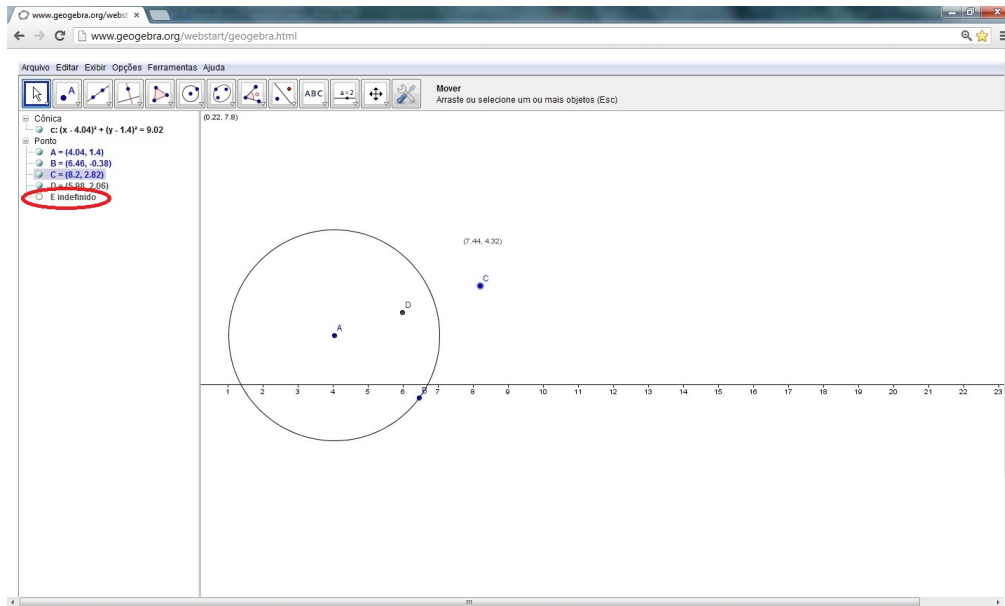


Figura 61: Inversão Circular e ponto indefinido

se torne:

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2rR}$$

Onde:

$R$ : raio de  $\lambda_1$

$r$ : raio de  $\lambda_2$

$d$ : Ponto sobre  $y$  onde estará o centro de  $\lambda_2$

Como vimos acima, para que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tenham uma cadeia de 4 circunferências, temos que ter necessariamente:  $\lambda_1 * \lambda_2 = 1 + 2 \tan(\frac{\pi}{4}) = 3$ .

Vamos fazer com que o GeoGebra<sup>®</sup> calcule para nós o valor de  $\lambda_1 * \lambda_2$ . Na barra de "Entrada" digite o seguinte comando: `Pic = (R^2 + r^2 - y(O_2)^2) / (2*r*R)` e pressione enter. Pic: Produto Inversível Circular. Observe a figura 63

Coloque  $O_1$  no centro do plano cartesiano e o ponto  $B$  nas coordenadas  $(3, 0)$  fazendo  $R = 3$ . Coloque agora  $O_2$  nas coordenadas  $(0, \frac{1}{2})$  e faça  $r = \frac{1}{2}$  conforme ilustra a figura 63. Como podemos observar naquela figura, temos que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  admite uma cadeia de 4 circunferências. Vamos construí-las seguindo os passos das seções 3.1 e 2.3.

Construa uma inversão  $\varphi_1$  de centro em  $B$  e raio arbitrário. Faça as inversões de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que são respectivamente uma reta e uma circunferência.

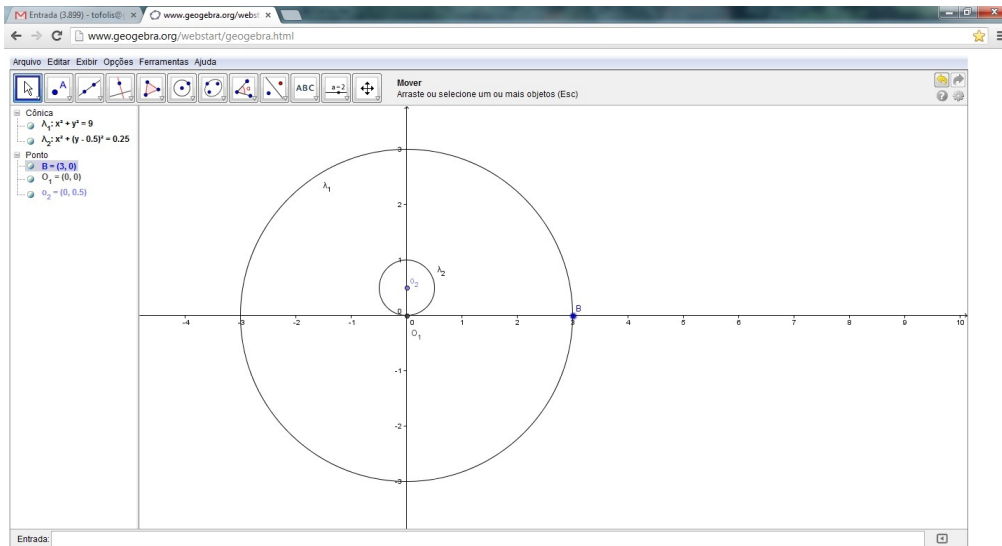


Figura 62: Passo 1- Adotando facilitadores

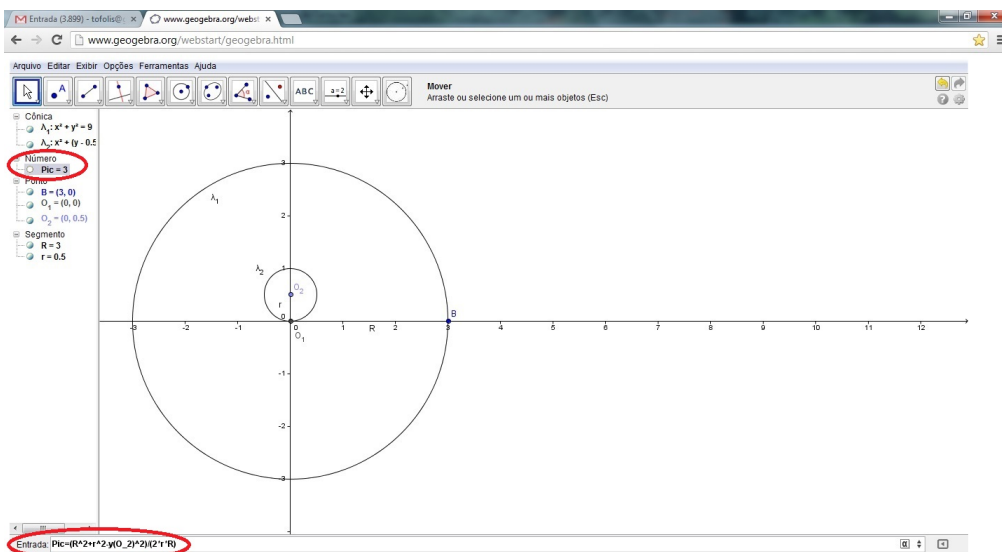


Figura 63: Passo 2 - Calculando PIC

Algumas observações importantes:

- a) Como sabemos que uma reta é definida por dois pontos e que a inversão dos pontos pertencentes a  $\varphi_1$  são eles próprios, então a imagem de  $\varphi_1(\lambda_1)$  é a reta que passa pela intersecção de  $\lambda_1$  com  $\varphi_1$ .
- b) Para encontrar a inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão, basta inverter 3 pontos quaisquer desta circunferência.
- c) Após encontrar a inversão desejada, é interessante ocultar alguns objetos para que

o desenho não fique carregado, daí a importância de renomear os objetos criados para não "perde-los" (Vamos ocultar também os eixos  $x$  e  $y$  do plano cartesiano). Vamos também colorir os objetos inversos de uma mesma cor para uma melhor visualização. Assim,  $\lambda_1$ ,  $\lambda'_1$ ,  $\lambda''_1$  terão a mesma cor, tal como  $\lambda_2$ ,  $\lambda'_2$ ,  $\lambda''_2$  terão uma outra cor, diferente da usada anteriormente (Selecione o objeto, clique no botão direito do mouse, vá em propriedades e altere a cor).

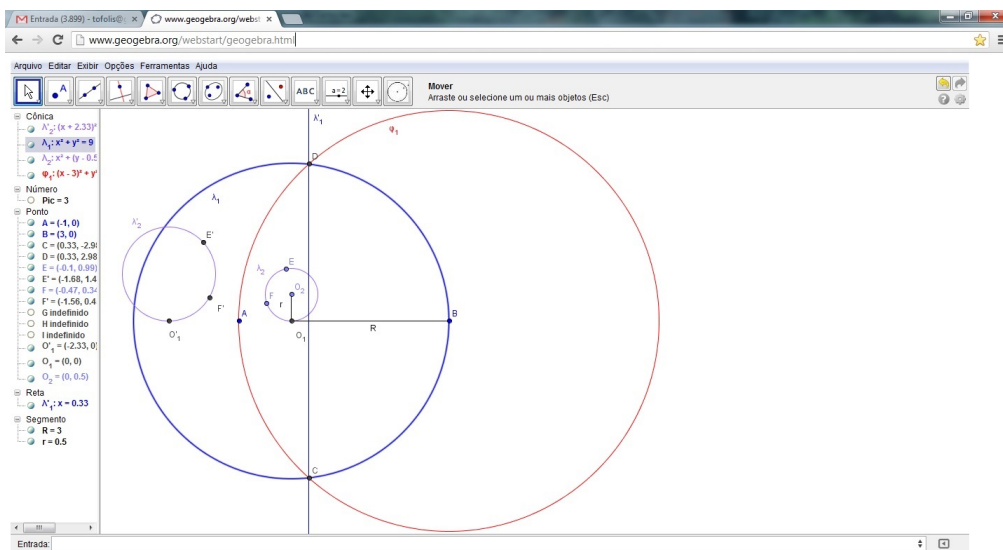


Figura 64: Passo 3 - Criando  $\varphi_1$  e construindo  $\lambda'_1 = \varphi_1(\lambda_1)$  e  $\lambda'_2 = \varphi_1(\lambda_2)$

Oculte  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  bem como seus elementos (Clique no objeto com o botão direito do mouse e selecione "Exibir Objeto").

Agora vamos construir uma inversão circular  $\varphi_2$  que coloca concêntricas  $\lambda'_1$  e  $\lambda'_2$  conforme o passo 2 da seção 2.3, como ilustra a figura 65. Construa  $\lambda''_1 = \varphi_2(\lambda'_1)$  e  $\lambda''_2 = \varphi_2(\lambda'_2)$  como ilustrado na figura 66.

d) Como vimos na seção 2.3, o centro das circunferências circunscritas será no inverso de  $S$ , então para construirmos  $\lambda''_1$  e  $\lambda''_2$  basta achar a inversão de  $S$  e um ponto de  $\lambda'_1$  e outro de  $\lambda'_2$ .

Dividimos agora  $\lambda_1''$  em quatro partes iguais, e construímos quatro circunferências tangentes a  $\lambda_1''$  e  $\lambda_2''$  simultaneamente como na seção 3.1, Passos 2, 3, 4 e 5.

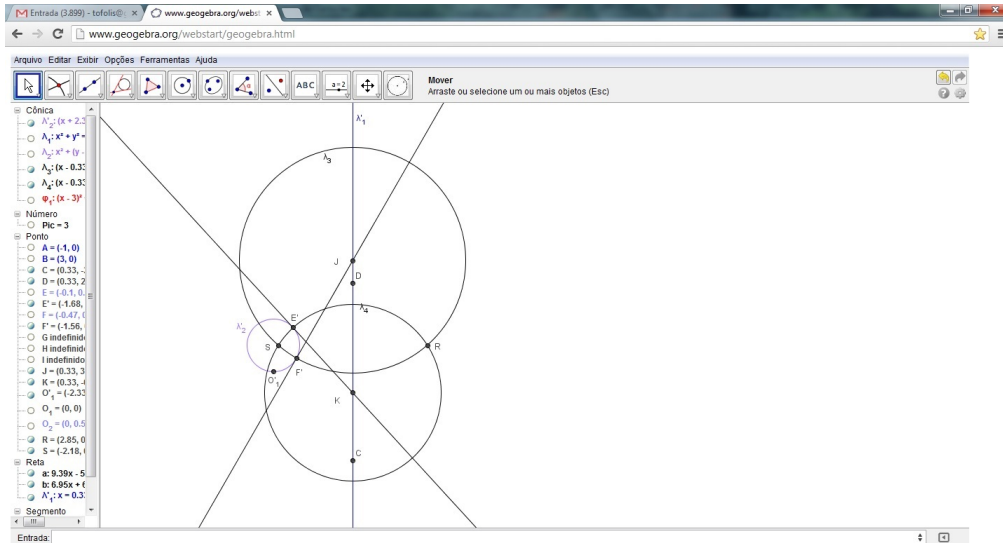


Figura 65: Passo 4 - Ocultando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e construindo  $\varphi_2$

Chamando de  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  e  $\psi_4$  as circunferências construídas no passo anterior, aplique primeiro a inversão  $\varphi_2$  e em seguida a inversão  $\varphi_1$  a cada uma das circunferências  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  e  $\psi_4$ .

Para isso, em cada circunferência  $\psi_i$ , construa 3 pontos:  $Ps_i1, Ps_i2$  e  $Ps_i3$  e construa as inversões  $\varphi_1 \circ \varphi_2(Ps_i1), \varphi_1 \circ \varphi_2(Ps_i2), \varphi_1 \circ \varphi_2(Ps_i3)$ .

Construa as circunferências  $\psi''_1, \psi''_2, \psi''_3$  e  $\psi''_4$ , onde  $\psi''_1$  passa pelos pontos  $\varphi_1 \circ \varphi_2(P_{s11}), \varphi_1 \circ \varphi_2(P_{s12}), \varphi_1 \circ \varphi_2(P_{s13})$ ,  $\psi''_2$  passa pelos pontos  $\varphi_1 \circ \varphi_2(P_{s21}), \varphi_1 \circ \varphi_2(P_{s22}), \varphi_1 \circ \varphi_2(P_{s23})$  e assim sucessivamente.

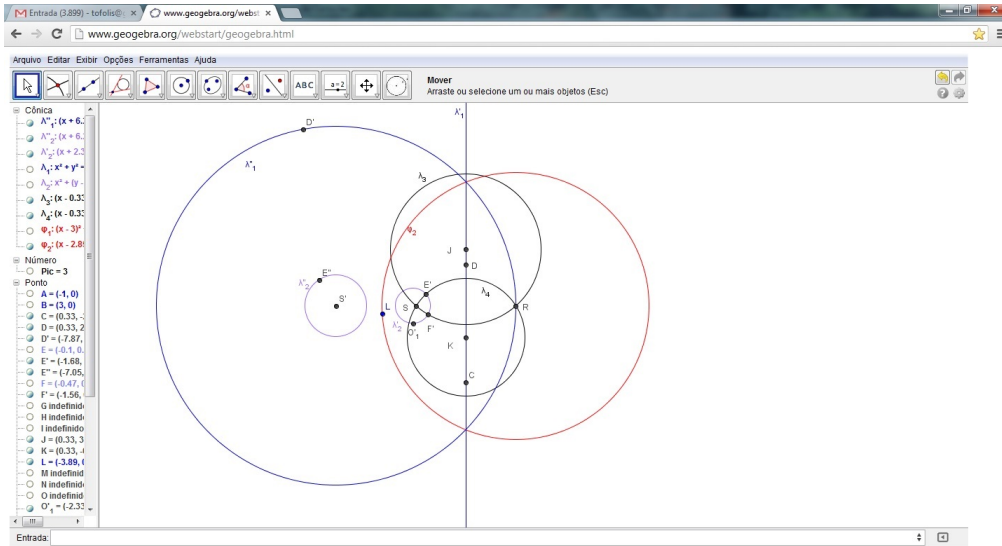


Figura 66: Passo 5 - Construindo  $\lambda''_1 = \varphi_2(\lambda'_1)$  e  $\lambda''_2 = \varphi_2(\lambda'_2)$

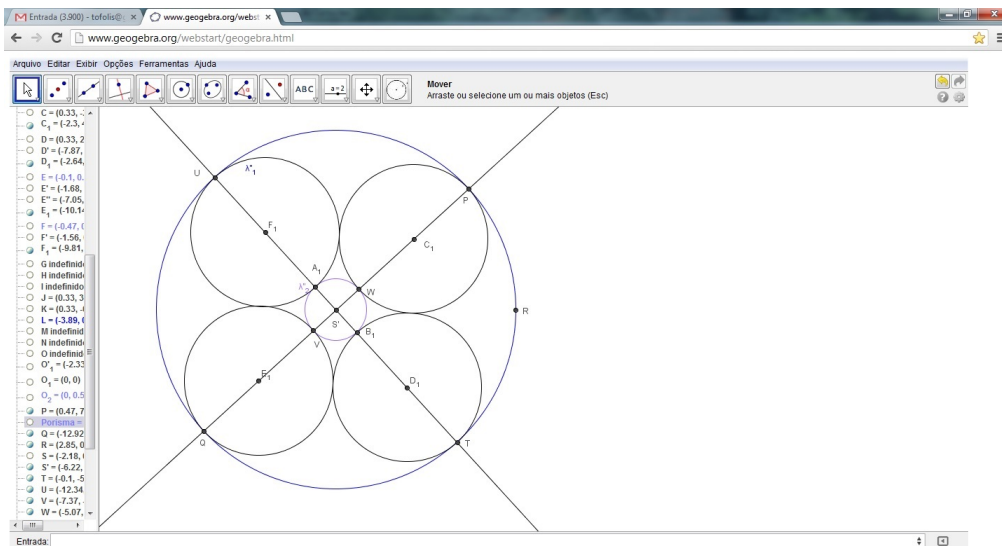


Figura 67: Passo 6 - Dividindo  $\lambda''_1$  em quatro partes iguais e construindo  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  e  $\psi_4$

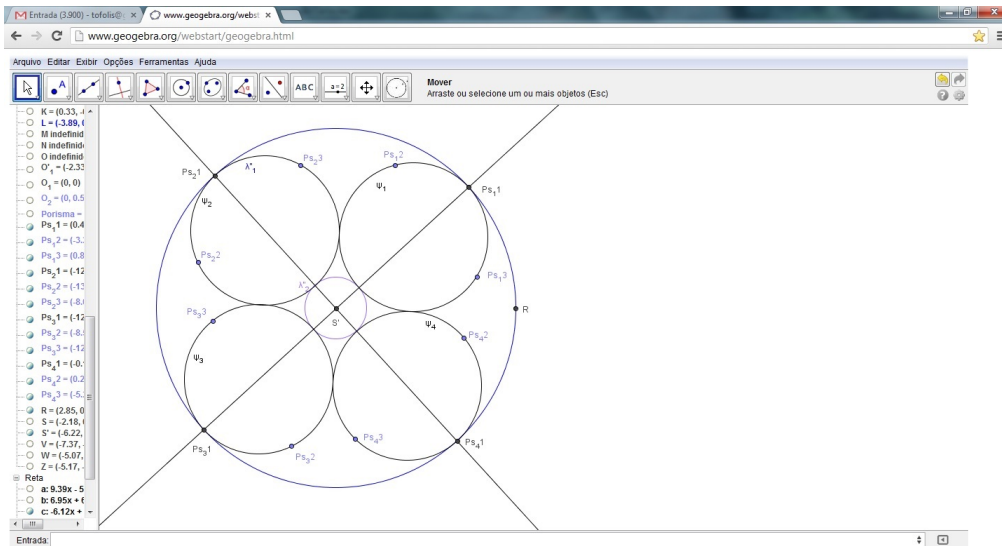


Figura 68: Passo 7 - Construindo os pontos  $P_{s_{ij}}$

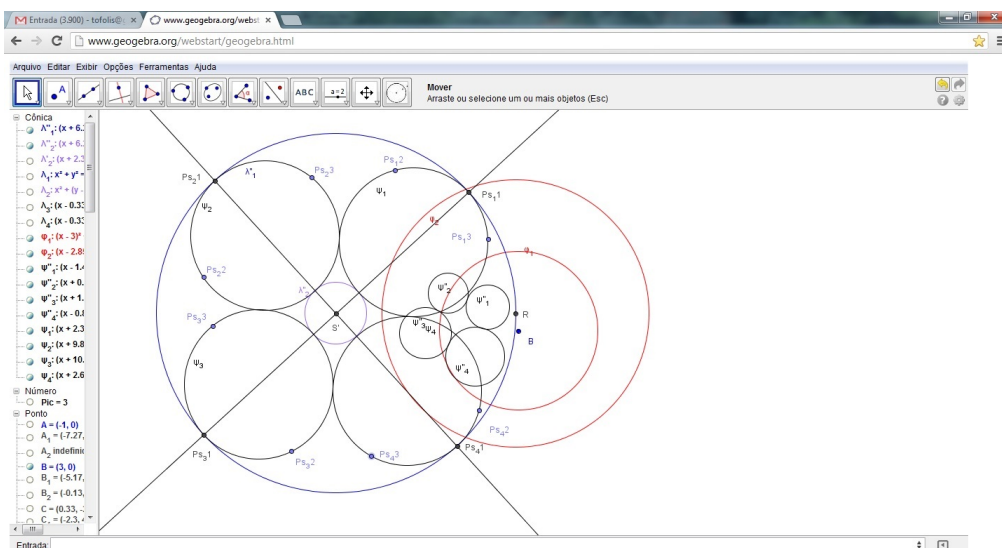


Figura 69: Passo 8 - Construindo  $\psi''_1, \psi''_2, \psi''_3$  e  $\psi''_4$

Agora é só ocultar as construções e exibir as circunferências  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\psi''_1$ ,  $\psi''_2$ ,  $\psi''_3$  e  $\psi''_4$ .

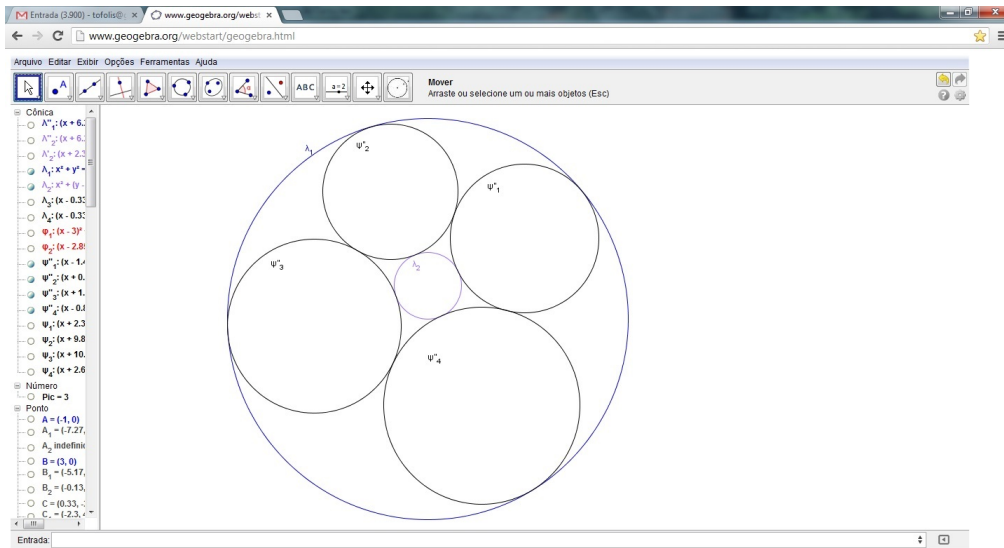


Figura 70: Passo 9 - Ocultando as construções e exibindo  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\psi''_1$ ,  $\psi''_2$ ,  $\psi''_3$  e  $\psi''_4$

## 6 APÊNDICE

Nesta seção iremos mostrar algumas propriedades que utilizamos nos capítulos anteriores, mas porém não iremos demonstra-las por se tratar de conteúdo básico do ensino médio.

### 6.1 POTÊNCIA DE PONTO

Teorema das cordas: Seja  $\lambda$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , e seja ainda,  $AB$  e  $CD$  duas cordas de  $\lambda$  que se cortam em  $P$  como ilustra a figura 71 :

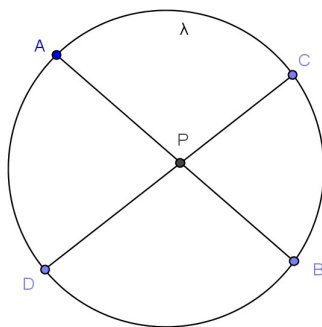


Figura 71: Potência de Pontos - Teorema das cordas

Temos que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

Teorema das secantes: Seja  $\lambda$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  e seja  $P$  um ponto externo a  $\lambda$ , sejam ainda dois segmentos  $PB$  e  $PD$  que cortam  $\lambda$  em  $A, B$  e  $C, D$  respectivamente como ilustra a figura 72.

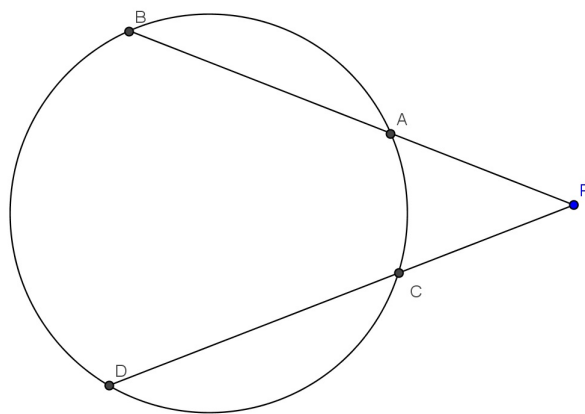


Figura 72: Potência de Pontos - Teorema das secantes

Temos que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .



Teorema da secante e da tangente: Seja  $\lambda$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  e seja  $P$  um ponto externo a  $\lambda$ , sejam ainda dois segmentos  $PT$  tangente a  $\lambda$  e  $PB$  secante a  $\lambda$  que interceptam  $\lambda$  em  $T$  e  $A, B$  respectivamente como ilustra a figura 73

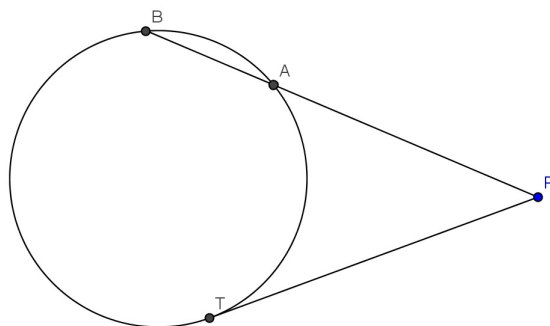


Figura 73: Potência de Pontos - Teorema da secante e tangente

Temos que  $PT^2 = PA \cdot PB$ . A volta também vale, ou seja, se  $PT^2 = PA \cdot PB$  então  $PT$  é tangente a  $\lambda$ .

## 6.2 ÂNGULOS CENTRAIS, INSCRITOS E DE SEGMENTO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA

Ângulos centrais a uma circunferência é o ângulo formado por três pontos onde dois estão na circunferência e seu vértice no seu centro  $O$ , sua abertura corresponde ao tamanho do arco, como ilustra a figura 74

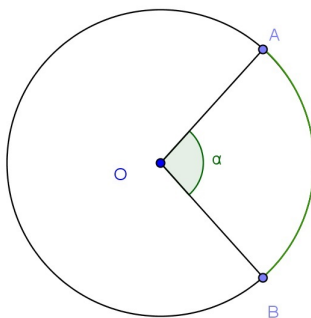


Figura 74: Ângulo Central

Ângulos inscritos a uma circunferência é o ângulo formado por três pontos que estão na circunferência, escolhendo um deles como vértice. Podemos relacionar o ângulo inscrito com o central, o ângulo inscrito tem a metade da abertura do central como ilustra a figura 75

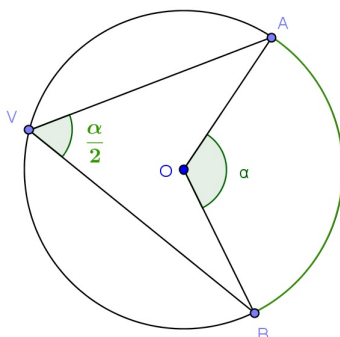


Figura 75: Ângulo Inscrito

**Corolário 6.1** *Todo triângulo inscrito em uma circunferência cujo um lado é o diâmetro é um triângulo retângulo.*

O lugar geométrico dos vértices de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa vale  $h$  é uma circunferência de diâmetro  $h$  menos os dois pontos de interseção da circunferência com a hipotenusa como ilustra a figura 76:.

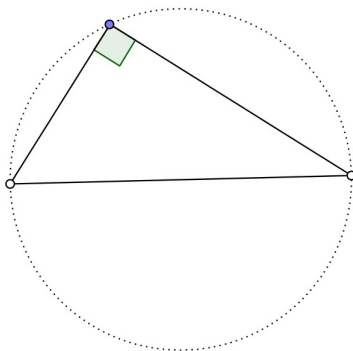


Figura 76: Lugar Geométrico do Triângulo Retângulo de Hipotenusa  $h$

Ângulos de segmento tem o vértice na circunferência, e um dos seus segmentos é tangente a ela, como ilustra a figura 77.

Sua abertura equivale a metade do arco localizado entre os dois segmentos e formado pelo segmento secante.

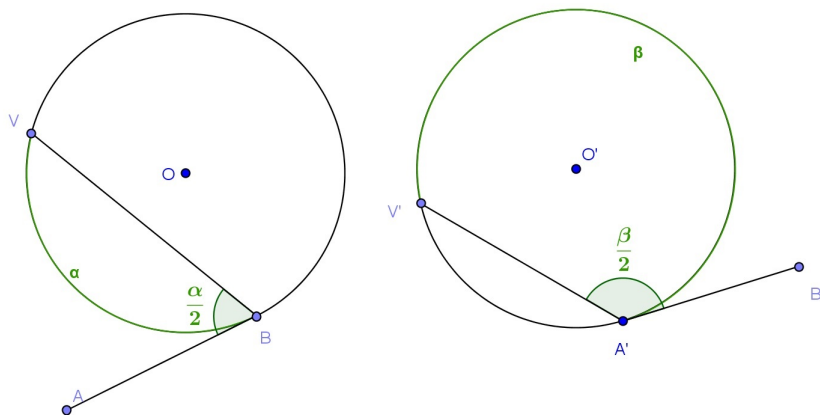


Figura 77: Ângulo De Segmento

### 6.3 QUADRILÁTEROS INSCRITOS A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Um quadrilátero pode ser inscrito em uma circunferência se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.

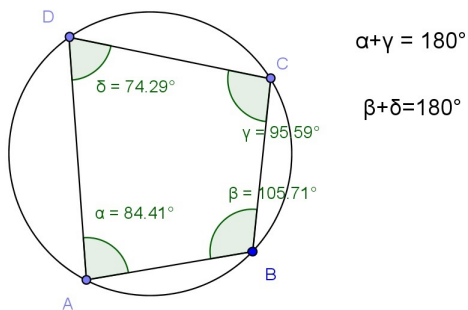


Figura 78: Quadrilátero Inscrito

### 6.4 TANGENTES EXTERNAS E INTERNAS A DUAS CIRCUNFERÊNCIAS DADAS

É sabido que para traçar uma tangente a uma circunferência  $\lambda$  de centro  $O$ , passando por um ponto  $P$  de  $\lambda$ , basta construir o segmento  $OP$  e traçar uma perpendicular à  $OP$  passando por  $P$ . Seja agora  $P$  um ponto externo a  $\lambda$ . Para construir uma tangente a  $\lambda$  passando por  $P$ , encontramos o ponto médio  $M$  de  $OP$ , construímos a circunferência

de centro em  $M$  e raio  $OM$ . Chamando de  $T$  o ponto de intersecção entre as duas circunferências, temos que a reta  $PT$  é tangente à  $\lambda$  e portanto é uma solução.

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  circunferências de raios  $R$  e  $r$  respectivamente, e considere sem perda da generalidade que  $R \geq r$ .

Para traçar as tangentes externas a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  construa uma circunferência  $\lambda_3$  de raio  $R - r$  e centro em  $O_1$  de  $\lambda_1$ . Trace as tangentes a  $\lambda_3$  pelo ponto  $O_2$  que é o centro de  $\lambda_2$ . Chame de  $P_1$  e  $P_2$  os pontos de intersecção das tangentes com  $\lambda_3$ , trace as semirretas  $O_1P_1$  e  $O_1P_2$ . Encontre os pontos  $T_1$  e  $T_2$  de intersecção das semirretas com  $\lambda_1$  e trace as tangentes a  $\lambda_1$  por  $T_1$  e  $T_2$ .

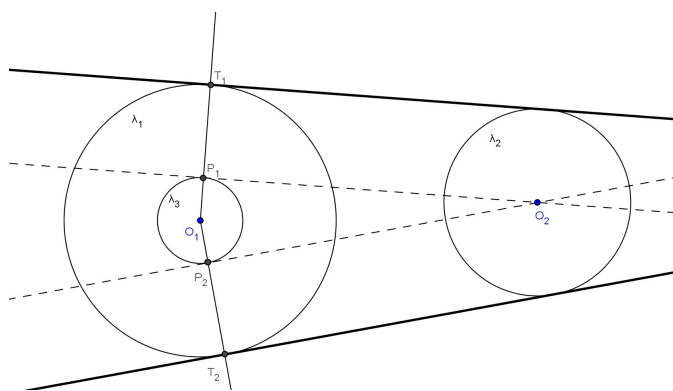


Figura 79: Tangentes Externas

Para traçar as tangentes internas a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  construa uma circunferência  $\lambda_3$  de raio  $R + r$  e centro em  $O_1$  de  $\lambda_1$ . Trace as tangentes a  $\lambda_3$  pelo ponto  $O_2$  que é o centro de  $\lambda_2$ . Chame de  $P_1$  e  $P_2$  os pontos de intersecção das tangentes com  $\lambda_3$ , trace as semirretas  $O_1P_1$  e  $O_1P_2$ . Encontre os pontos  $T_1$  e  $T_2$  de intersecção das semirretas com  $\lambda_1$  e trace as tangentes a  $\lambda_1$  por  $T_1$  e  $T_2$ .

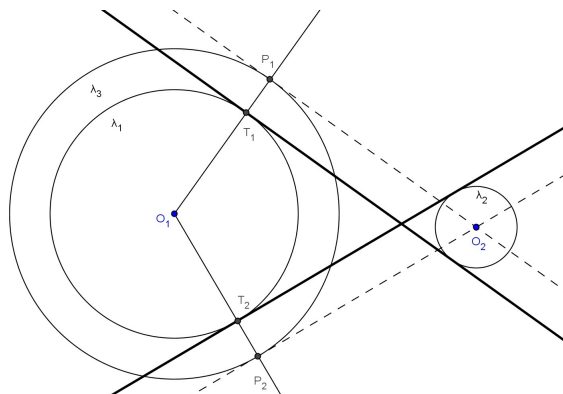


Figura 80: Tangentes Internas

## Referências

- [1] EVES, HOWARD. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de: An Introduction to the History of Mathematics. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- [2] KLEIN, FELIX. *Elementary Mathematics - from an Advanced Standpoint: Geometry*. Translated from the Third German Edition by: E.R. Hedrick, Mineola,N.Y.USA: Editora Dover Publications, INC, 2004.
- [3] COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*. 2nd Ed., Wiley Classics Library, 1989.
- [4] DOLCE, OSVALDO *Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana*. 8<sup>a</sup> ed., São Paulo: Atual, 2005.
- [5] TARRIDA, A. REVENTÓS *LA GACETA DE LA RSME, Vol. 6.: Geometria Inversa*, LA GACETA DE LA RSME,(2003), pp. 39-79.
- [6] <http://www.maths.gla.ac.uk/wws/cabripages/klein/klein0.html> Acessado em: 31/07/2013