UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARIA PATRICIA GARDINALLI

GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM VETORIAL.

Boa Vista, RR

2024

MARIA PATRICIA GARDINALLI

GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM VETORIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr.Max Ferreira

Boa Vista, RR

2024

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

G221g Gardinalli, Maria Patricia.
Geometria analítica do ensino médio: uma abordagem vetorial / Maria Patricia Gardinalli. – Boa Vista, 2024.
55 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Max Ferreira.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Roraima. Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

1. Geometria. 2. Ensino médio. 3. Vetorial. 4. Matemática. I. Título. II. Ferreira, Max (orientador).

CDU (2. ed.) 514.12

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista (UFRR):
Maria de Fátima Andrade Costa - CRB-11/453-AM

MARIA PATRICIA GARDINALLI

GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM VETORIAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 22 de julho de 2024 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Max Ferreira

Prof. Dr.Max Ferreira
Orientador - UFRR

Almir Neto

Prof. Dr. Almir Cunha da Graça Neto
Membro Externo - UEA

Kelly Karina

Profa. Dra. Kelly Karina Santos
Membro Interno - UFRR

Boa Vista, RR
2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por por ter me proporcionado o oportunidade de viver essa experiência tão desejada por mim e permitir que eu chegasse onde cheguei. Ao meu esposo Thiago de Farias por entender a minha ausência em muitos momentos e sempre me apoiar. Aos meus amigos de turma, Gleyson Ricardo e Luiz Felipe, pela paciência, pelo apoio e pela amizade que construímos. Aos meus professores do PROFMAT - UFRR que foram essenciais em todo processo, em especial a professora Kelly Karina, que por diversas vezes me apoiou quando pensei que não conseguiria , e é claro, ao meu orientador Max Ferreira, pelo incentivo e pela grandiosa contribuição a esse trabalho.

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar.” Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho propõe uma abordagem didática para o ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio. Difere do programa tradicional ensinado nas escolas brasileiras, devido o tratamento vetorial dado. Além disso, possui três aspectos importantes a se considerar: 1. Determinados conteúdos são tratados de forma justificada e intuitiva, ao contrário da maioria dos livros didáticos utilizados nas escolas públicas ; 2. Possui um aspecto de subsunçor para as disciplinas Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo de várias variáveis para os alunos do Ensino Médio que optam por fazer os cursos de exatas como Matemática, Física e Engenharias; 3. Finalmente, são dadas demonstrações de proposições da Geometria Analítica, sem recorrer a objetos Matemáticos em três dimensões, como é o caso do cálculo de áreas de triângulos que é obtida sem usar produto vetorial, que só faz sentido em três dimensões.

Palavras-chave: Geometria, Ensino Médio, Vetorial, Matemática.

ABSTRACT

This report is a proposal for a didactic presentation of Analytical Geometry in High School. Different from the traditional program taught in Brazilian schools, due to the vectorial treatment given. Furthermore, it has three important aspects to consider: 1. certain contents are treated in a justified and intuitive way, unlike most textbooks ; 2. It has a prior knowledge aspect for the subjects Linear Algebra, Analytical Geometry in vetorial sense, Calculus of several variables for high school students who choose to take hard science courses such as Mathematics, Physics and Engineering; 3. Finally, proofs of Analytical Geometry propositions are given, without resorting to Mathematical objects in three dimensions, as is the case with the calculation of areas of triangles, which is obtained without using a cross product, which only makes sense in three dimensions.

Keywords: Geometry, High School, Vectorial, Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho propomos uma abordagem da Geometria Analítica do Ensino médio sob o ponto de vista vetorial. A Geometria Analítica no ensino superior possui um tratamento vetorial, inclusive, em alguns universidades também é denominada Cálculo Vetorial. Existe um grande abismo, em termos de subsunçores, entre o ensino da Geometria Analítica no Ensino Superior e o Ensino Básico, posto que, este último não possui tratamento vetorial, mas apenas o tratamento usando sistemas de coordenadas cartesianas. Um aspecto que dificulta o ponto de vista vetorial é a introdução do conceito de vetor, que depende não apenas de noções geométricas, mas também algébricas, como classe de equivalência que não é ensinada no Ensino Básico, embora ela esteja presente no estudo de frações equivalentes, paralelismo entre retas e congruência de triângulos, etc.

Ou seja, o aluno possui contato com as propriedades reflexivas, simétricas e transitivas mas não de forma sistematizada e explícita a ponto de reconhecer tais propriedades como uma relação de equivalência. Isto posto, no segundo capítulo, depois desta introdução, há uma construção do conceito de classe de equivalência usando as relações de equivalência estudas no primeiro e segundo ano do Ensino Médio. No terceiro capítulo introduzimos a definição de vetores, tanto do ponto de vista geométrico como algébrico. Este último, no sentido de classes de equivalência de segmentos orientados equipolentes entre si, ou seja, de segmentos orientados que estão relacionados em termos de possuírem a mesma direção, módulo e sentido. Simultaneamente exibimos demonstrações de algumas propriedades das operações entre vetores e introduzimos alguns conceitos importantes e suas propriedades, como a ideia de expressão analítica de um vetor.

No capítulo quatro abordamos alguns conceitos da Geometria Analítica, no plano cartesiano, do Ensino Médio sob o ponto vista vetorial. Tratamos a distância entre dois pontos como o módulo de um vetor, o perímetro de um triângulo com vértices nos pontos A, B e C dados como a soma dos módulos dos vetores , ponto médio, etc. Determinamos a condição de alinhamento, em termos vetoriais, entre três pontos A, B e C usando a colinearidade entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Além disso, a partir da condição de alinhamento entre três pontos demonstramos a equação da reta que passa pelos pontos A e B, em termos da regra de Sarrus, ou seja, em termos de um determinante 3×3. Usando outro caminho, determinamos a equação da reta, dados um ponto e um vetor direção. Uma vantagem desta última equação é que agora, em vez de um determinante 3×3 chegamos a tal equação com apenas a soma de dois determinantes 2×2. Mais precisamente, dados um ponto $A(x_1, y_1)$ e um vetor $\vec{v} = (m, n)$

a equação da reta é: $\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0.$

Algo interessante é que esta última equação, além de ser mais imediata nos permite obter a equação dados dois pontos e vice-versa.

Em seguida temos um dos resultados mais importantes, que é o cálculo da área do triângulo, pois este servirá mais adiante, como motivação para definição de produto escalar e projeção. A partir da área do triângulo obtivemos como corolário a áreas de outros polígonos. É importante mencionar que a área obtida não depende do produto vetorial que precisa de três dimensões para fazer sentido.

Finalmente definimos e obtemos algumas propriedades dos produto interno que surge naturalmente no cálculo de áreas em termos de coordenadas.

1 EQUIVALÊNCIA

Neste capítulo, iremos abordar os conceitos de relações e relações de equivalência, usando exemplos para melhor entendimento desses conceitos.

1.1 Relação

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma relação R entre A e B é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ pelo menos um elemento $y \in B$. Escrevemos xRy.

Exemplo 1.1.1. *Sejam A={$1, 2, 3$} B={a, b, c} . A sequência de relações $1Ra, 1Rb, 2Rb, 3Rc$, entre os elementos de A e B, determinam uma relação entre tais conjuntos, que podemos denotar como um conjunto de pares $\{(1, a), (1, b), (2, b), (3, c)\}$.*

Exemplo 1.1.2. *Observe que a notação de pares utilizada facilita a visão geral da relação entre os conjuntos e nos permite pensar tal correspondência como um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.*

Observação 1.1.1. *A partir de agora, estamos interessados nas relações em $A \times A$. Mais precisamente, nas relações que são subconjuntos de $A \times A$, ou seja nas relações dentro de um mesmo conjunto A.*

Definição 1.1.1. *(**Relação reflexiva**). Uma relação R em um conjunto A é dita reflexiva se xRx, qualquer que seja $x \in A$.*

Exemplo 1.1.3. *A relação $x > y$ (x maior que y) em $\mathbb{R}$ não é reflexiva(irreflexiva). De fato, $x \not> x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.1.4. *A relação $r//s$ (r paralela a s) no conjunto das retas do plano é reflexiva. Basta lembrar que $r//r$, qualquer que seja a reta r no plano.*

Exemplo 1.1.5. *A congruência entre triângulos é uma relação reflexiva, pois todo triangulo $ABCD$ é congruente a ele mesmo, da mesma forma a semelhança de triângulo, pois todo triângulo é semelhante a ele mesmo.*

Exemplo 1.1.6. *A igualdade entre números é uma relação reflexiva, pois todo número é igual a ele mesmo.*

Exemplo 1.1.7. *A relação de inclusão de conjuntos é reflexiva, pois todo conjunto está contido nele mesmo.*

Uma relação binária é chamada de irreflexiva, ou antirreflexiva, se não relacionar qualquer elemento a si mesma. Um exemplo é a relação "maior que"$(x > y)$ nos números reais. Nem toda relação que não é reflexiva é irreflexiva; é possível definir relações em que alguns elementos estão relacionados a si mesmos, mas outros não (ou seja, nem todos nem nenhum). Por exemplo, a relação binária "o produto de x e y é par"é reflexiva no conjunto de números pares, irreflexiva no conjunto de números ímpares e não reflexiva nem irreflexiva no conjunto de números naturais.

Exemplo 1.1.8. *(**Relações não reflexivas**). A relação "é um subconjunto próprio de"não é reflexiva, pois um conjunto A não é subconjunto próprio de si mesmo.*

Exemplo 1.1.9. *(**Relações Irreflexivas**). "é maior que", pois um numero não pode ser maior que ele mesmo*

Observação 1.1.2. *Nem toda relação não reflexiva é irreflexiva. "O produto de x e y é par"é uma relação reflexiva no conjunto de números pares, irreflexiva no conjunto de números ímpares e não reflexiva nem irreflexiva no conjunto de números naturais.*

Definição 1.1.2. *(**Relação simétrica**).Uma relação é dita simétrica no conjunto A, se para todo x, y pertencente A, x está relacionado com y, se, e somente se y está relacionado com x, ou seja, se x está relacionado com y então y está relacionado com x.*

Exemplo 1.1.10. *"é igual a"(igualdade), (enquanto "é menor que"não é simétrico).*

Exemplo 1.1.11. *"... e ... são ímpares"*

Exemplo 1.1.12. *"é um irmão totalmente biológico de"*

Exemplo 1.1.13. *"é um homófono de"*

Exemplo 1.1.14. *"é colega de trabalho de"*

Definição 1.1.3. *Uma relação binária é transitiva em um conjunto A se para quaisquer que sejam $x, y, z \in A$ temos que se xRy e yRz então xRz.*

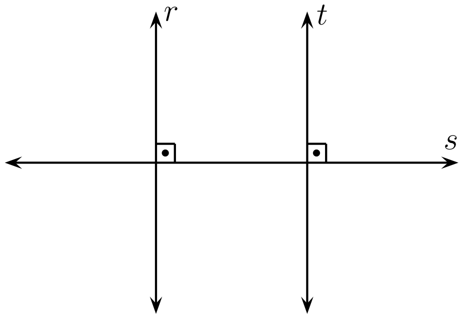
Exemplo 1.1.15. *A relação "maior que"é transitiva, em $\mathbb{R}$*

$$x > y \text{ e } y > z \Rightarrow x > z, \forall \; x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.1.16. *A relação perpendicularismo entre retas não é uma relação transitiva, nem reflexiva, embora seja simétrica.*

De fato se $r \perp s$ então $s \perp r$ mas r não é perpendicular a ela mesma, tampouco é transitiva, pois, como mostra a figura $r \perp s$ e $s \perp t$, mas r não é perpendicular a t.

Figura 1.1.1 – Relação de perpendicularismo entre retas



Fonte: Autor

1.2 Relação de Equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 1.2.1. *A relação de semelhança de triângulos é uma relação de equivalência, pois se* $\Delta A_1B_1C_1, \Delta A_2B_2C_2$ *e* $\Delta A_3B_3C_3$ *são três triângulos, então*

i) $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_1B_1C_1$.

ii) se $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ *então* $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$.

iii) se $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ *e* $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_3B_3C_3$ *então* $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_3B_3C_3$.

Exemplo 1.2.2. *A relação de congruência*$(\equiv)$ *de triângulos é uma relação de equivalência.*

Exemplo 1.2.3. *O paralelismo entre retas é uma relação de equivalência, pois se* r, s *e* t *são retas do plano então,*

i) $r//r$ *(reflexiva).*

ii) se $r//s$ *então* $s//r$ *(simétrica).*

iii) se $r//s$ *e* $s//t$ *então* $r//t$ *(transitiva).*

Exemplo 1.2.4. *A igualdade de frações(frações equivalentes) é uma relação de equivalência,*

i) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

iii) se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *então* $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

iii) se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *e* $\dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ *, então* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{e}{f}$ *.*

Observe que,

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \ldots$

Portanto é indiferente tomar qualquer uma dessas frações. Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 1.2.1. *Dado um conjunto A com uma relação de equivalência R, a classe de equivalência de um conjunto $x \in A$ é o subconjunto de todos os elementos de A que são equivalentes a x. Escrevemos*

$$[x] = \{y \in A/yRx\}.$$

Exemplo 1.2.5. *A classe de equivalência de fração $\dfrac{1}{2}$ no conjunto dos números racionais é*

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \cdots\right\}.$$

Observe que, neste caso, as classes de equivalência particionam o conjunto dos racionais na união de classes de equivalência.

Exemplo 1.2.6. *Considere a relação de equivalência definida no conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, por xRy quando $x - y$ for um número par.*

Seja $x = 2p + 1, y = 2q + 1$ números ímpares.

Então $x - y = (2p + 1) - (2q + 1) = 2(p - q) = 2k$ é um número par. Então todos os números ímpares estão relacionados. Portanto,

$$\ldots = -[3] = [-1] = [1] = [3] = \ldots$$

Por outro lado se $a = 2R$ e $b = 2S$, então

$$a - b = 2R - 2S = 2(R - S) = 2t,$$

onde $t = R - S$ é um número par. Portanto todos os números pares estão relacionados entre si,

$[1]$ =*{. . . ,* $-3, -1, 0, 1, 3, 5$*, . . . } e* $[2]$ = *{. . .,* $-4, -2, 0, 2, 4, 6$*,. . .}.*

Assim,

$\mathbb{Z} = [1] \cup [2]$ *é a união de duas classes de equivalência.*

Cada elemento da classe de equivalência é chamado de representante da classe.

Exemplo 1.2.7. *Na relação de equivalência em $\mathbb{Q}$ entre frações, qualquer elemento do conjunto,*

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\right\}$$

é um representante da classe. Assim, $\frac{2}{4}$ é um representante da classe e inclusive podemos escrever

$$\left[\frac{2}{4}\right] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots\right\}$$

Analogamente, todos os infinitos triângulos ΔXYZ que são semelhantes a um triângulo ΔABC são representantes desta classe. Além disso, sabemos que triângulos semelhantes possuem ângulos iguais e lados correspondentes iguais.

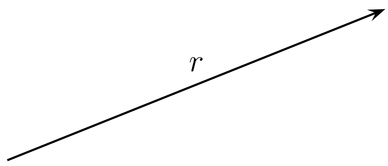
2 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE VETORES

Neste capítulo, iremos abordar os conceitos básicos de vetores e suas características, bem como os conceitos de segmento orientado e equipolência de segmentos orientados.

2.1 Reta Orientada - Eixo

Uma reta r é considerada orientada quando, nela, é escolhido um sentido de percurso, sendo esse sentido considerado como positivo e representado por uma seta.

Figura 2.1.1 – Reta orientada



Fonte: Autor

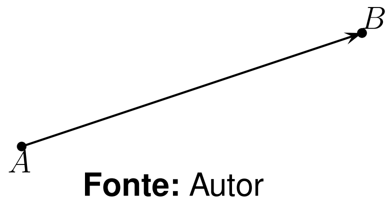
Como, em uma reta, só há dois sentidos, tomaremos o sentido contrário como negativo. Uma reta orientada é denominada eixo.

Neste capítulo, abordaremos os conceitos de segmento orientado e equipolência de segmentos orientados. Este último desempenhará um papel fundamental na estruturação do conceito de vetor, que será formalizado no próximo capítulo.

2.2 Segmento Orientado

Um segmento orientado é estabelecido por um par ordenado de pontos. Vamos designar por AB esse segmento, de modo que o primeiro ponto é referido como a origem do segmento e o segundo ponto como a extremidade. Neste caso, a orientação positiva será considerada da origem para extremidade, ou seja, de A para B. Temos que os segmentos AB e BA possuem o mesmo conjunto de pontos no plano, no entanto sua orientação é oposta, ou seja se sentido de percurso é oposto. Além disso, a representação geométrica é acentuada por uma seta que visualmente denota o sentido do segmento.

Figura 2.2.1 – Segmento de reta orientado

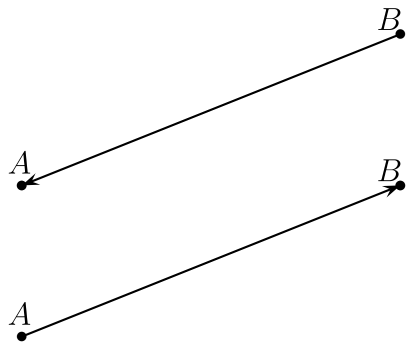


Fonte: Autor

- **Segmento nulo -** Segmento nulo é um segmento cuja extremidade coincide com a origem, ou seja, é um ponto, ou ainda um segmento degenerado.

- **Segmentos opostos -** Se considerarmos o segmento orientado AB, então o segmento orientado BA é o seu oposto.

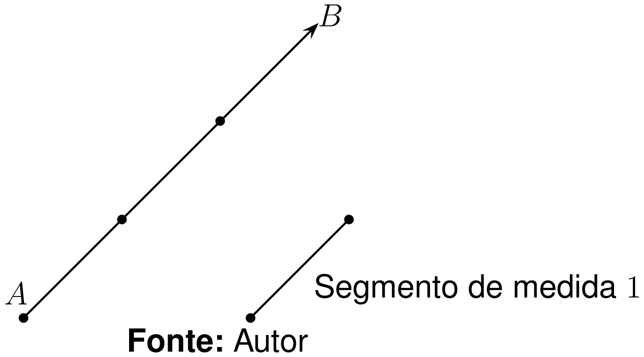
Figura 2.2.2 – Segmentos com sentidos opostos



Fonte: Autor

- **Medida de um segmento -** Ao fixar uma unidade de comprimento, é possível atribuir a cada segmento orientado um número real não negativo, que representa a medida desse segmento em relação à referida unidade. Essa medida é denominada como o comprimento ou módulo do segmento orientado. O comprimento do segmento AB é representado como AB. O comprimento do segmento AB é de 3 unidades de medida de comprimento como mostra a figura 2.2.3: $\overline{AB}$= $3u.c.$

Figura 2.2.3 – Comprimento de um segmento



Fonte: Autor

- **Direção e Sentido -** Uma reta r determina uma direção. Qualquer reta s paralela a r possui a mesma direção de r. O sentido é determinado por uma escolha de deslocamento em uma direção, ou seja, em uma reta. Mais precisamente, dado um ponto A em uma reta r, este ponto divide a reta em duas partes. Além disso, se considerarmos mais dois pontos distintos B e C poderemos escolher ir de A para B como sentido positivo e de A para C como sentido negativo, desde que A esteja entre B e C.

2.3 Segmentos Equipolentes

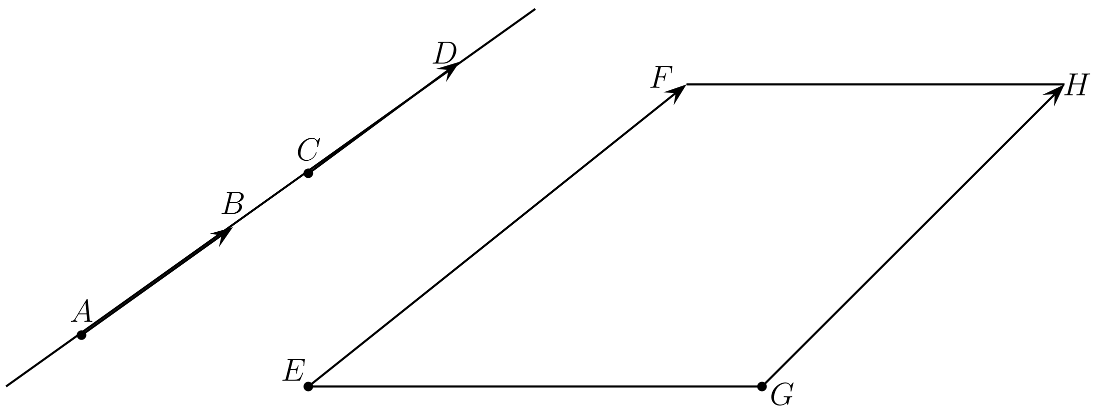
Dois segmentos orientados AB e CD,em um mesmo plano, são equipolentes quando possuem:

1. a mesma medida de comprimento;
2. a mesma direção;
3. o mesmo sentido.

Portanto a equipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos vetores no plano.

Isso significa que, além de terem a mesma medida, esses segmentos orientados estão alinhados na mesma direção e se movem na mesma orientação ao longo da linha que conecta seus pontos iniciais e finais.

Figura 2.3.1 – Segmentos equipolentes



Fonte: Autor

Observando a figura acima, temos que:

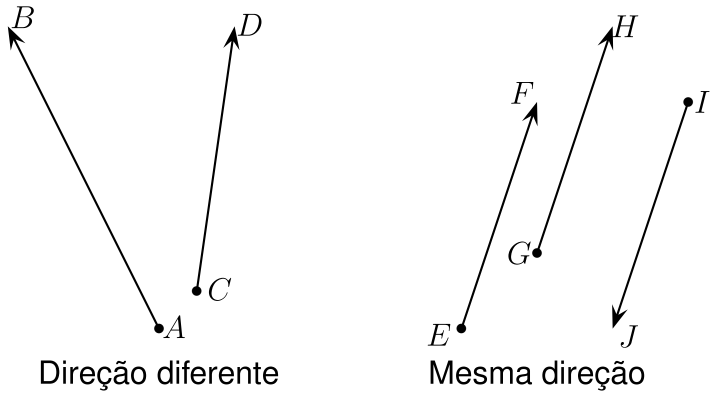
- AB e CD são equipolentes;

- EF e GH são equipolentes.

Observações:

- Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.
- A equipolência dos segmentos AB e CD é representada por $AB \equiv CD$.
- Dois segmentos orientados AB e CD têm o mesmo comprimento quando $d(A, B) = d(C, D)$ e têm a mesma direção se, e somente se, as retas onde estão contidos os segmentos forem paralelas ou coincidentes.

Figura 2.3.2 – Direção de segmentos orientados



Fonte: Autor

Propriedades da equipolência

I) $AB \equiv AB$ (Reflexiva). Todo segmento orientado é equipolente a ele mesmo.

II) Se $AB \equiv CD$, $CD \equiv AB$ (simétrica).

III) Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, $AB \equiv EF$ (transitiva).

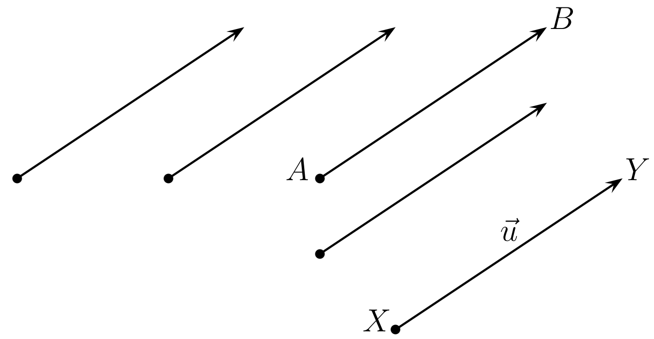
IV) Dado um seguimento orientado AB e um ponto C, existe um único ponto D tal que $AB \equiv CD$.(Transporte)

2.4 Vetor

Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos equipolentes a AB.

Se indicarmos com $\vec{u}$ este conjunto, simbolicamente poderemos escrever:

Figura 2.4.1 – Representação de $\overrightarrow{AB}$ no plano



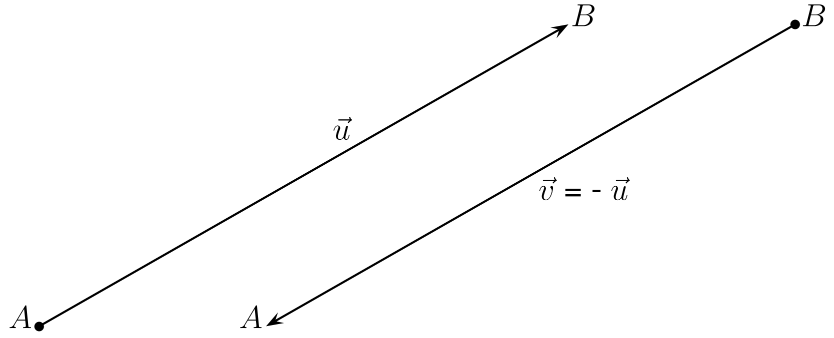
Fonte: Autor

$\vec{u}$ = $\{XY/XY \equiv AB\}$, onde XY é um segmento qualquer do conjunto. Um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser representado por uma infinidade de segmentos orientados, conhecidos como representantes desse vetor. Todos esses representantes são equivalentes em termos de magnitude e direção, o que significa que qualquer um deles representa o mesmo vetor. Essa perspectiva nos permite compreender que um vetor é uma entidade abstrata e independente de sua posição ou ponto de origem, pois todos os seus representantes são equivalentes entre si em relação à magnitude e direção.

As características essenciais de um vetor $\vec{u}$, como seu *módulo, direção e sentido*, são idênticas às do módulo, direção e sentido de qualquer um dos seus representantes. Em outras palavras, qualquer segmento orientado escolhido para representar o vetor possui as mesmas propriedades fundamentais, ou seja, magnitude, orientação e sentido, que o vetor original. O módulo de $\vec{u}$ se indica por $|\vec{u}|$.

- **Vetores Iguais-** Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são ditos iguais se, e somente se, $AB \equiv CD$.
- **Vetor Nulo -** é o vetor que tem como representante um segmento orientado nulo. É representado por $\vec{0}$.
- **Vetores opostos-** dado um vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{u}$.
- **Vetor unitário -** um vetor $\vec{u}$ é unitário se $|\vec{u}|$= 1.
- **Versor-** versor de um vetor não nulo $\vec{u}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{u}$.

Figura 2.4.2 – Vetores opostos

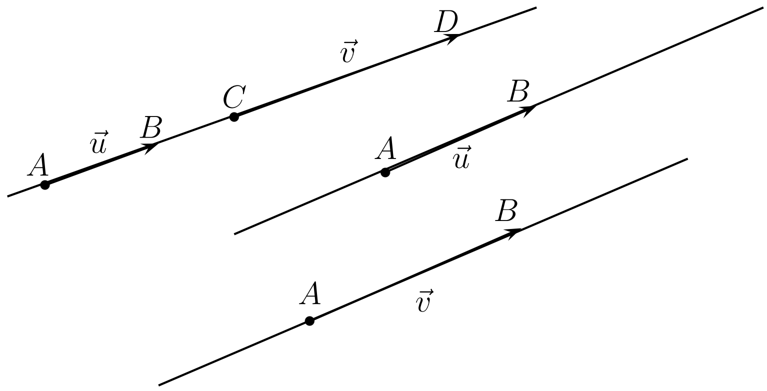


Fonte: Autor

2.5 Vetores Colineares

Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são *colineares* se tiverem a mesma *direção* , ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes AB e CD que pertençam a uma mesma reta ou à retas paralelas.

Figura 2.5.1 – Vetores colineares



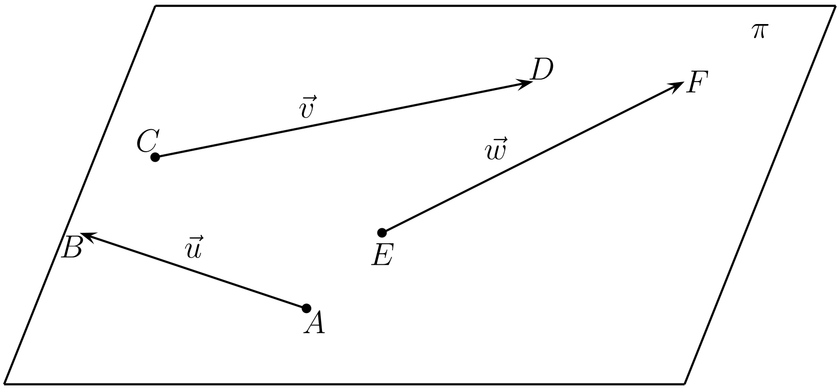
Fonte: Autor

2.6 Vetores Coplanares

Se três vetores não nulos, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (não importando a quantidade de vetores), possuem representantes AB,CD e EF pertencentes a um mesmo plano π, diz-se que eles são coplanares.

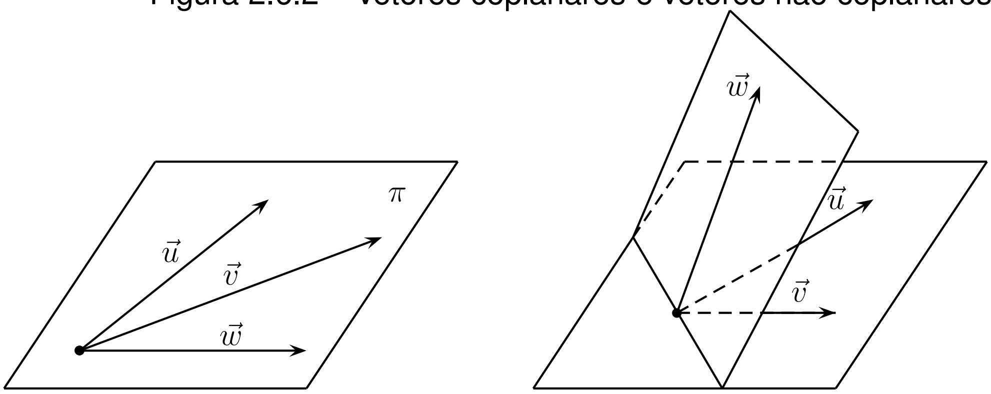
Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são sempre coplanares, pois podemos sempre tomar um ponto no espaço e, com origem nele, imaginar os dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencendo a um plano π que passa por este ponto. Três vetores poderão ou não ser coplanares.

Figura 2.6.1 – Vetores coplanares



Fonte: Autor

Figura 2.6.2 – Vetores coplanares e vetores não coplanares



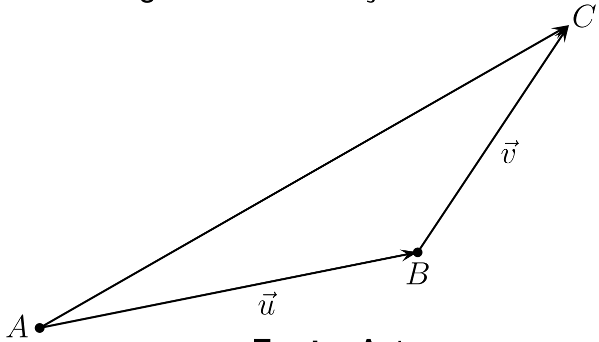
$\vec{u}$,$\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares $\vec{u}$,$\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares

Fonte: Autor

2.7 Adição de Vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no plano, sendo A um ponto qualquer do plano, AB o representante de $\vec{u}$ com origem no ponto A e BC o representante de $\vec{v}$ com origem em B. O vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é representado pelo segmento orientado AC,

Figura 2.7.1 – Adição de vetores



Fonte: Autor

ou seja:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Propriedades da adição

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no plano, então:

I) <u>Comutativa</u>: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

II) <u>Associativa</u>: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

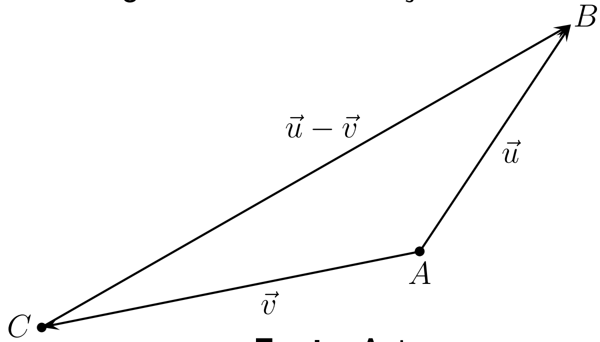
III) <u>Elemento Neutro</u>: Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo o vetor $\vec{v}$ se tem:
$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.

IV) <u>Elemento Oposto</u>: Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um só vetor $-\vec{v}$(vetor oposto de $\vec{v}$) tal que
$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$.

2.8 Diferença de Vetores

A diferença de vetores pode ser definida a partir da propriedade (IV) da adição de vetores. O vetor $\vec{u} - \vec{v}$ é definido como a soma do vetor $\vec{u}$ com o vetor - $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} = (-\vec{v})$

Figura 2.8.1 – Diferença de vetores



Fonte: Autor

A, B e C são pontos do plano (Figura 3.8.1), de modo que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Então,

$$\begin{aligned} \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

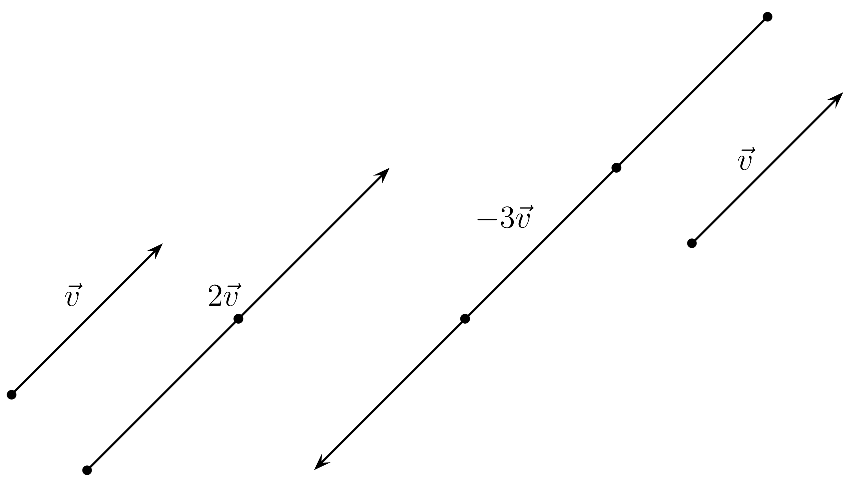
2.9 Multiplicação por um Número Real

É comum usar o termo *escalar* para designar *número real*, em contraposição a *vetor*. Por tal motivo essa operação também é chamada **multiplicação de escalar por vetor**.

Dado um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se *produto do escalar* k pelo vetor $\vec{u}$ o vetor $\vec{p} = \vec{ku}$, tal que:

1. módulo: $|\vec{p}| = |\vec{ku}| = |k||\vec{u}|$;
2. direção: a mesma de $\vec{u}$;
3. sentido: o mesmo de $\vec{u}$ se $k > 0$, e contrario ao de $\vec{u}$ se $k < 0$.

Figura 2.9.1 – Produto escalar



Fonte: Autor

Observação 2.9.1. *Para multiplicar o vetor por um número real, basta multiplicar cada coordenada do vetor por esse número, ou seja, sendo* $\vec{u}$ = (a, b) *e* $k \in \mathbb{R}$*, daí* $k.\vec{u} = k.(a, b) = (ka, kb)$.

Propriedades da multiplicação de um vetor por um número real

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e *a* e *b* números reais, temos:

1. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ (associativa);
2. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ (distributiva em relação à adição de escalares);
3. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (distributiva em relação à adição de vetores);
4. $1\vec{v} = \vec{v}$ (identidade).

2.10 Dependência e independência linear

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer. Podemos dizer que um vetor $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se existirem números reais a e b tais que:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Definição 2.10.1. *(**Vetores linearmente dependentes**). Dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes(LD) se existirem a e b não ambos nulos, tais que:*

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}.$$

Definição 2.10.2. *(**Vetores linearmente independentes**). Dizemos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes (LI) ou não colineares ou não paralelos se a única solução da equação*

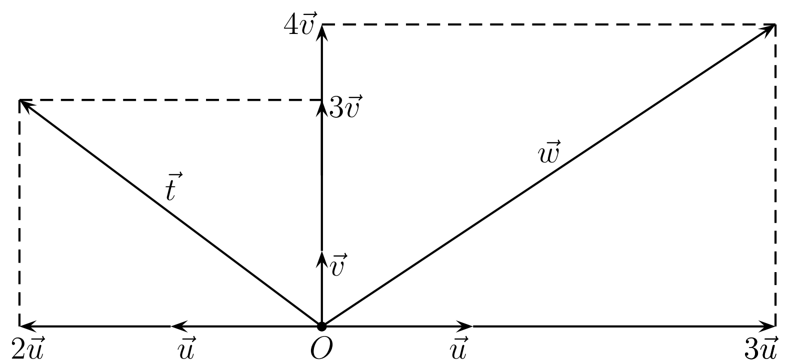
$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0},$$

é a solução trivial $a = 0$ e $b = 0$.

2.11 Decomposição de um Vetor no Plano

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos e com direção distinta e com origem no mesmo ponto O.

Figura 2.11.1 – Vetores no Plano



Fonte: Autor

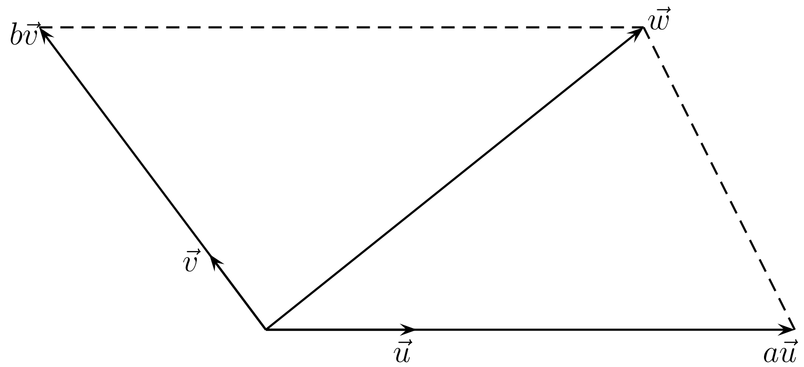
Observe que os vetores $\vec{w}$ e $\vec{t}$, representados na figura 16, são expressos em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja

$$\vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v} \qquad \text{e} \qquad \vec{t} = 2\vec{u} + 3\vec{v}.$$

De maneira geral, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos e não-colineares e qualquer vetor $\vec{w}$ coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$, existe um único par de números reais a e b que satisfaz

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}. \qquad (2.1)$$

Figura 2.11.2 – Combinação Linear de Vetores no Plano



Fonte: Autor

Quando expressamos o vetor $\vec{w}$ como:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

dizemos $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não colineares, é chamado base no plano. Qualquer conjunto de vetores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ não colineares, constitui uma base no plano. Os números a e b representados em (2.1) são chamados *componentes* ou *coordenadas* de $\vec{w}$ em relação à base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Considere fixado no plano um sistema de eixos cartesianos xOy. A base formada pelos vetores representados pelos segmentos orientados com origem em O e com extremidades nos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ se destaca entre todas as outras bases no plano xOy. Vetores esses que são de maneira usual denotados de $\vec{i}$ e $\vec{j}$, respectivamente.A base formada pelo conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é chamada de **base canônica** do plano xOy.

Dado um vetor qualquer $\vec{w}$ no plano xOy, existe um único par de números x e y tal que

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (2.2)$$

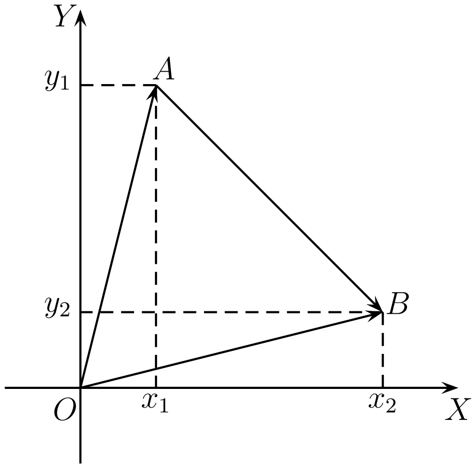
Assim, a cada vetor $\vec{w}$ no plano xOy pode-se associar um par de números reais(x, y), que são suas componentes na base canônica. Logo,

$$\vec{w} = (x, y). \qquad (2.3)$$

A igualdade (2.3) é chamada de expressão analítica do vetor $\vec{w}$.

2.12 Vetor Definido por dois Pontos

Figura 2.12.1 – Vetor definido por dois pontos



Fonte: Autor

Considere o vetor $\overrightarrow{AB} = (x, y)$ no plano xOy, com origem no ponto $A = (x_1, y_1)$ e extremidade em $B = (x_2, y_2)$. Observe que $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$. Daí observando o ΔOAB, temos que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Portanto,

$$x = (x_2 - x_1) \qquad \text{e} \qquad y = (y_2 - y_1).$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Como as componentes de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas subtraindo as coordenadas dos pontos A e B podemos representar também $\overrightarrow{AB}$ por

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

3 UMA ABORDAGEM VETORIAL DA GEOMETRIA ANALÍTICA.

Neste capítulo iremos abordar alguns conteúdos da geometria analítica no plano estudada no Ensino Médio. Usaremos definições e propriedades de vetores já estudadas nos capítulos anteriores para mostrar alguns resultados.

3.1 Distância entre dois pontos no plano cartesiano

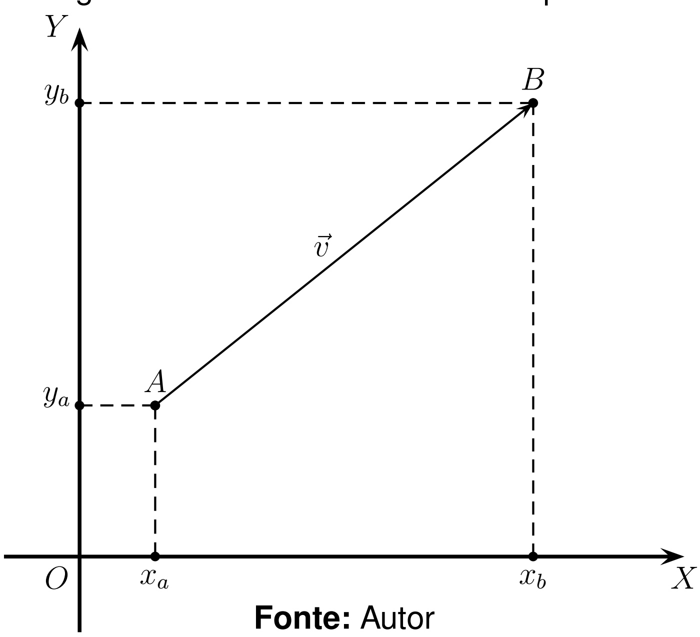
Chama-se distância entre dois pontos A e B, pertencentes ao plano $\mathbb{R}^2$, o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$. A distância entre os pontos A e B corresponde ao comprimento do segmento AB, ou seja:

$$d(A,B) = \mid \overrightarrow{AB} \mid = \mid B - A \mid.$$

Dados dois pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$, sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ e como $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$, então:

$$d(A,B) = \mid \vec{v} \mid = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Figura 3.1.1 – Distância entre dois pontos



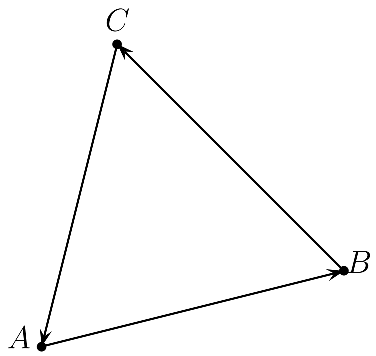
Fonte: Autor

Exemplo 3.1.1. *Os pontos $A(1,1), B(5,2)$ e $C(2,5)$ são vértices do triângulo ΔABC. Encontre o perímetro desse triângulo.*

Solução:

Observe que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$, são lados do triângulo ΔABC como mostra a figura abaixo:

Figura 3.1.2 – Triângulo ΔABC



Fonte: Autor

Logo o perímetro do ΔABC é dado por,

$$\begin{aligned} d(AB) + d(BC) + d(CA) &= \mid \overrightarrow{AB} \mid + \mid \overrightarrow{BC} \mid + \mid \overrightarrow{CA} \mid \\ &= \mid B - A \mid + \mid C - B \mid + \mid A - C \mid . \end{aligned}$$

Como $A(1,1), B(5,2)$ e $C(2,5)$, então

$\overrightarrow{AB} = (5-1, 2-1) = (4,1)$, $\overrightarrow{BC} = (2-5, 5-2) = (-3,3)$ e $\overrightarrow{CA} = (1-2, 1-5) = (-1,-4)$.

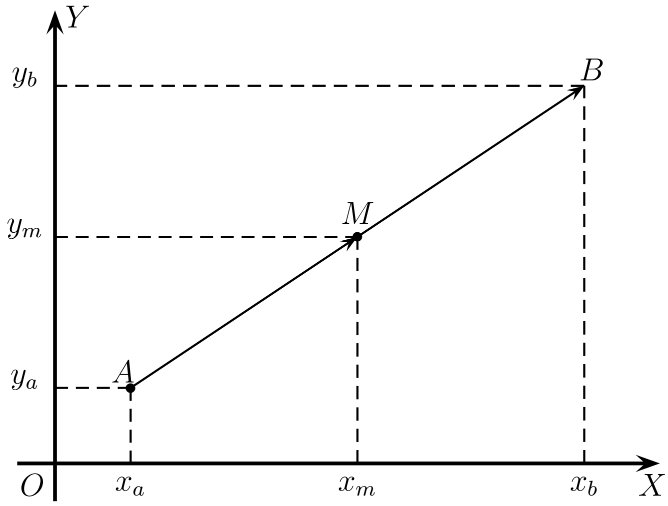
Daí temos que

$$\begin{aligned} d(AB) + d(BC) + d(CA) &= \sqrt{4^2 + 1^2} + \sqrt{(-3)^2 + 3^2} + \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} \\ &= 2\sqrt{17} + 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3.2 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Seja $M = (x_m, y_m)$ o ponto médio do segmento AB, com $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$.

Figura 3.2.1 – Ponto médio de um segmento de reta



Fonte: Autor

Então,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

Assim,

$$\overrightarrow{AM} = M - A = (x_m, y_m) - (x_a, y_a) = (x_m - x_a, y_m - y_a).$$
$$\overrightarrow{MB} = B - M = (x_b, y_b) - (x_m, y_m) = (x_b - x_m, y_b - y_m).$$

Portanto,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow x_m - x_a = x_b - x_m \Rightarrow 2x_m = x_a + x_b \Rightarrow x_m = \frac{x_a + x_b}{2}$$

e

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow y_m - y_a = y_b - y_m \Rightarrow 2y_m = y_a + y_b \Rightarrow y_m = \frac{y_a + y_b}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto médio se um segmento de reta são dados por:

$$M = (x_m, y_m) = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

.

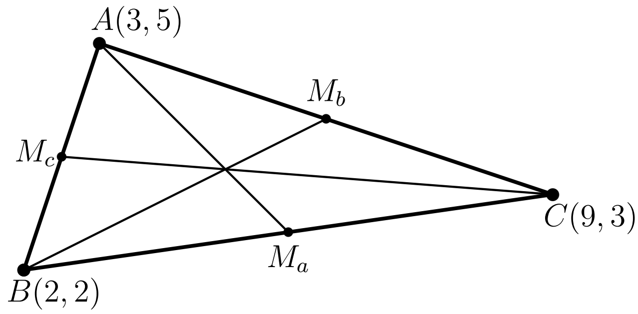
Exemplo 3.2.1. *Calcule a medida de cada mediana do triângulo* ABC *onde* $A(3,5), B(2,2)$ *e* $C(9,3)$.

Solução:

Sabemos que mediana de um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado aposto a esse vértice.

Observemos a Figura 3.2.2:

Figura 3.2.2 – Exemplo 4.2.1



Fonte: Autor

Vamos começar calculando os pontos médios dos segmentos AB, BC e AC.

Sendo M_a o ponto médio de BC,M_b o ponto médio de AC e M_c o ponto médio de AB temos que:

- $M_a = (x_{m_a}, y_{m_a}) = \left(\dfrac{x_b + x_c}{2}, \dfrac{y_b + y_c}{2}\right) = \left(\dfrac{2+9}{2}, \dfrac{2+3}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$
- $M_b = (x_{m_b}, y_{m_b}) = \left(\dfrac{x_a + x_c}{2}, \dfrac{y_a + y_c}{2}\right) = \left(\dfrac{3+9}{2}, \dfrac{5+3}{2}\right) = (6, 4)$
- $M_c = (x_{m_c}, y_{m_c}) = \left(\dfrac{x_a + x_b}{2}, \dfrac{y_a + y_b}{2}\right) = \left(\dfrac{3+2}{2}, \dfrac{5+2}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

Agora vamos calcular medida das medianas, para isso vamos usar a distância entre dois pontos já vista neste capítulo. Seja AM_a, BM_b e CM_c as medianas no ΔABC, então:

$$\begin{aligned}
d(A, M_a) &= |\overrightarrow{AM_a}| = \sqrt{(x_{m_a} - x_a)^2 + (y_{m_a} - y_a)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 5\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(B, M_b) &= |\overrightarrow{BM_b}| = \sqrt{(x_{m_b} - x_b)^2 + (y_{m_b} - y_b)^2} \\
&= \sqrt{(6-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} \\
&= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(A, M_c) = \mid \overrightarrow{AM_c} \mid &= \sqrt{(x_{m_c} - x_c)^2 + (y_{m_c} - y_c)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 9\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-13}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{170}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{170}}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto as medidas das medianas AM_a, BM_b e CM_c são respectivamente $\frac{5\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{5}$ e $\frac{\sqrt{170}}{2}$.

3.3 Condição de alinhamento de três pontos

Três pontos estão alinhados, ou são colineares, se, e somente se, pertencerem à mesma reta. A condição para que três pontos $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ estejam alinhados é que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ sejam colineares, ou seja:

$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Desenvolvendo a expressão acima, através de coordenadas, temos:

$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} \Rightarrow B - A = \alpha(C - A) \Rightarrow$

$(x_b, y_b) - (x_a, y_a) = \alpha[(x_c, y_c) - (x_a, y_a)] \Rightarrow$

$(x_b - x_a, y_b - y_a) = (\alpha(x_c - x_a), \alpha(y_c - y_a))$.

Logo,

$$x_b - x_a = \alpha(x_c - x_a) \Rightarrow \alpha = \frac{x_b - x_a}{x_c - x_a}$$

e

$$y_b - y_a = \alpha(y_c - y_a) \Rightarrow \alpha = \frac{y_b - y_a}{y_c - y_a}.$$

Portanto,

$$\frac{x_b - x_a}{x_c - x_a} = \frac{y_b - y_a}{y_c - y_a} = \alpha$$

Exemplo 3.3.1. *Dados os ponto A, B e C, de coordenadas $(-2, 1), (0, 3)$ e $(2, 5)$ respectivamente, verifique se estão alinhados.*

Solução

Temos que:

- $\alpha = \dfrac{x_b - x_a}{x_c - x_a} = \dfrac{0-(-2)}{2-(-2)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
- $\alpha = \dfrac{y_b - y_a}{y_c - y_a} = \dfrac{3-1}{5-1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Portanto os pontos A, B e C estão alinhados.

Observação 3.3.1. *Desenvolvendo a equação obtida na condição de alinhamento de três pontos podemos encontrar a equação da reta que passa pelos pontos A e B.*

Ou seja:

$\dfrac{x_b - x_a}{x - x_a} = \dfrac{y_b - y_a}{y - y_a} \Rightarrow$

$(y - y_a)(x_b - x_a) = (x - x_a)(y_b - y_a) \Rightarrow$

$(-1)(y - y_a)(x_b - x_a) = (x - x_a)(y_b - y_a)(-1) \Rightarrow$

$(y - y_a)(x_a - x_b) = (x - x_a)(y_a - y_b) \Rightarrow$

$(x_a - x_b)y - (x_a - x_b)y_a = (y_a - y_b)x - (y_a - y_b)x_a \Rightarrow$

$-x_b y + x_a y + x_b y_a - x_a y_a = -x y_b + x y_a + x_a y_b - x_a y_a.$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= x_a y_b + x y_a + x_b y - x y_b - x_a y - x_b y_a - x_a y_a + x_a y_a \\ &= x_a y_b + x y_a + x_b y - x y_b - x_a y - x_b y_a \\ &= \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3.4 Equação da Reta no Plano

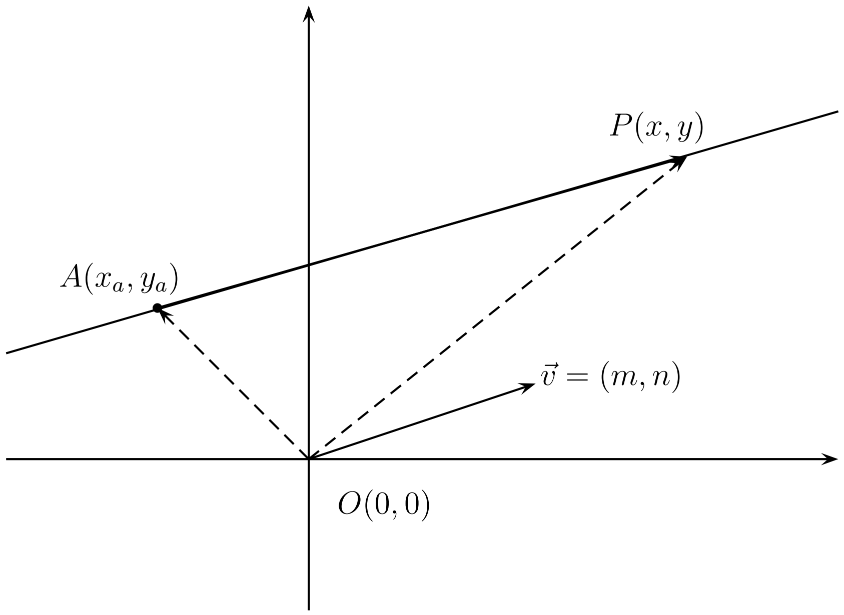
Sejam $\vec{v}$=(m, n) um vetor, com origem em $O(0,0)$, $A(x_a, y_a)$ um ponto conhecido e $P(x, y)$ um ponto qualquer do plano, de modo que $\vec{v}$ seja paralelo ao vetor $\overrightarrow{AP}$.

O ponto P satisfaz a equação vetorial $\overrightarrow{OA}$ + $\overrightarrow{AP}$ = $\overrightarrow{OP}$.
Podemos escrever

$\overrightarrow{AP}$ = $\overrightarrow{OP}$ - $\overrightarrow{OA}$ = $(P - O) - (A - O) = P - A$

A igualdade ou identificação

Figura 3.4.1 – Reta no Plano



Fonte: Autor

$\overrightarrow{OP}$ - $\overrightarrow{OA}$ = $(P - O) - (A - O) = P - A$ se supõe conhecida após exposição do conteúdo, desde a definição de vetores até as suas operações.
Como o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$\overrightarrow{AP}$ = $t\vec{v}$

Portanto

$$P - A = t\vec{v}$$

$$\Downarrow$$

$$(x, y) - (x_a, y_a) = t(m, n) \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$(x, y) = (x_a, y_a) + t(m, n) \qquad (2)$$

Equação vetorial da reta que passa por A e possui direção do vetor $\vec{v}$

$$\Downarrow$$

$$(x - x_a, y - y_a) = (tm, tn)$$

Assim, de (1)

$$\begin{cases} x - x_a = tm \\ y - y_a = tn \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_a}{m} = t \\ \dfrac{y - y_a}{n} = t \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x - x_a}{m} = \frac{y - y_a}{n}$$

Mas,

$$\frac{x - x_a}{m} = \frac{y - y_a}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$nx - my + (my_a - nx_a) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n \\ x_a & y_a \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Observe que (3) é a equação da reta que passa pelo ponto $A(x_a, y_a)$ e possui direção do vetor $\vec{v}$ = (m, n)

Por outro lado,

$$\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n \\ x_a & y_a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$nx - my + (my_a - nx_a) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{n}{m}x + \frac{my_a - nx_a}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{n}{m}x + q = px + q \qquad (4)$$

onde $p = \dfrac{n}{m}$ e $q = \dfrac{my_a - nx_a}{m}$.

A equação $y = px + q$ é chamada equação reduzida da reta.

Observe que $\dfrac{n}{m}$ = $\tan\theta$, onde θ é o angula determinado pelo vetor $\vec{v}$ e o eixo das abscissas, ou seja, é a inclinação da reta, que coincide com a inclinação do vetor, visto que estes são paralelos.

Observe também que $\dfrac{n}{m}$ é o coeficiente angular da reta(uma boa justificativa para a denominação).

Na literatura p é denominado, muitas vezes, coeficiente linear. É claro que $y = \frac{n}{m}x + q$ é linear em x quando $q = 0$.

Além disso,

$$\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n \\ x_a & y_a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$nx - my + (my_a - nx_a) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax + by + c = 0, \quad (5)$$

onde $a = n, b = -m$ e $c = my_a - nx_a$.

A equação (5) é chamada *equação geral da reta*.

Fazendo $p = \frac{n}{m}$ em (a) resulta

$y = px + q \quad (6)$

Da equação (6) podemos deduzir a equação da reta que passa pelos pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$.

Exemplo 3.4.1. *Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(0, 2)$ e possui direção do vetor $\vec{v} = (2, \frac{1}{2})$*

Temos que

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}x - 2y + 4 - 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}x - 2y + 4 = 0$$

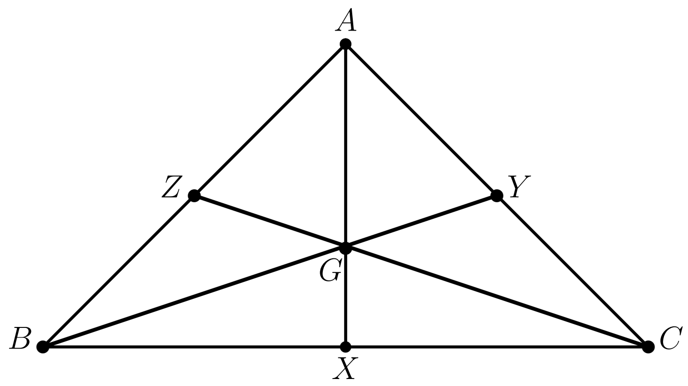
Há outra possibilidade de deduzir a equação da reta que consideramos na dissertação, mas esta perde o apelo vetorial e ganha uma interpretação mais geométrica.

Entendemos que várias formas de justificar e deduzir uma equação, como a da reta, é melhor que a ausência de tais justificativas e deduções.

3.5 **Coordenadas do Baricentro de um Triângulo**

Baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção das três medianas. Lembrando que uma mediana é o seguimento que liga um vértice ao ponto médio do seu lado oposto.Na Figura 3.5.1 podemos observar que os segmentos AX, BY e CZ são medianas do ΔABC e G é seu baricentro.

Figura 3.5.1 – Medianas do ΔABC



Fonte: Autor

Vamos mostrar que as medianas AX e BY se intersectam num ponto G que divide AX e BY na razão de 2 para 1, ou seja:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AX} \text{ e } \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BY}.$$

Inicialmente observe que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ (definição de subtração). Então:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\
&= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BY} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AY}\\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Sendo os pontos A, G e X colineares, temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \gamma\overrightarrow{AX}\\ &= \gamma\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{\gamma}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\end{aligned}$$

de maneira análoga,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \beta\overrightarrow{BY}\\ &= \beta\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

onde β e γ são números reais.

Uma equação onde envolve-se os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{BG}$ é:

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}.$$

Desta equação temos:

$$\beta\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

isolando os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, teremos:

$$\overrightarrow{AB}\left(-\beta + 1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \overrightarrow{AC}\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \vec{0}.$$

como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são LI, então:

$$\begin{cases} -\beta - \dfrac{\gamma}{2} + 1 = 0 \\ \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\beta = \gamma = \frac{2}{3}$$

Portanto, G divide tanto o segmento AM quanto o segmento BN na razão de 2 para 1.

Mostraremos agora que C, G e Z são colineares, ou seja:

$$\overrightarrow{CG} = \lambda \overrightarrow{CZ}$$

,

onde λ é um número real.

De acordo com a figura 4.5.1, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CZ} &= \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Substituindo em $\overrightarrow{CG} = \lambda \overrightarrow{CZ}$, obtemos:

$$\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \lambda \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right).$$

Isolando $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, obtemos:

$$\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{3}-\frac{\lambda}{2}\right)+\overrightarrow{AC}\left(-\frac{2}{3}+\lambda\right)=\vec{0}$$

Sabendo que o vetores $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ são LI, então:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{\lambda}{2}=0\\ -\dfrac{2}{3}+\lambda=0\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

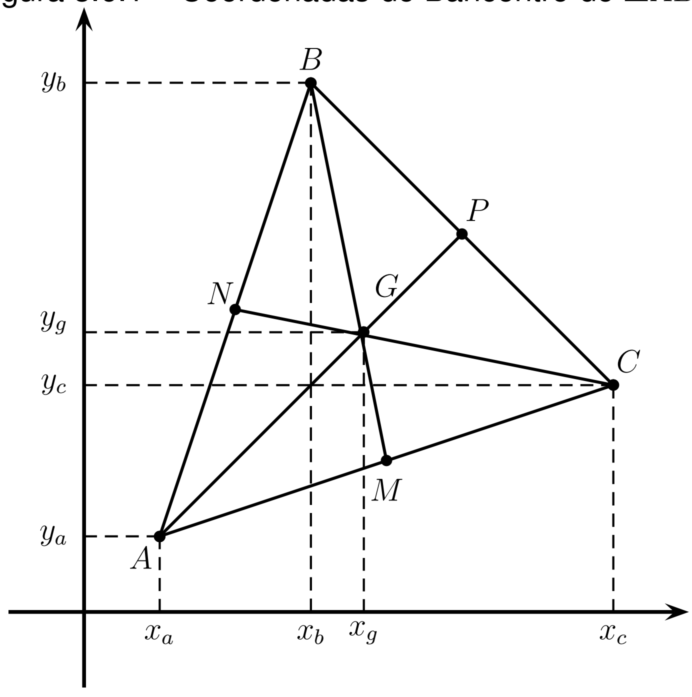
$$\lambda=\frac{2}{3}.$$

Logo, temos que os pontos C, G e Z são colineares e G divide CZ na razão 2 para 1.

3.6 Coordenadas do Baricentro

Consideremos no plano cartesiano os pontos $A=(x_a, y_a)$, $B=(x_b, y_b)$ e $C=(x_c, y_c)$ distintos e não colineares. Seja $G(x_g, y_g)$ o baricentro do ABC.

Figura 3.6.1 – Coordenadas do Baricentro do ΔABC



Fonte: Autor

Sendo $M = (x_m, y_m)$ o ponto médio de AC, temos:

$$x_m = \frac{x_a + x_c}{2} \quad \text{e} \quad y_m = \frac{y_a + y_c}{2}.$$

Sabemos que o ponto G é tal que $\overrightarrow{BG} = 2(\overrightarrow{GM})$, então:

$$\overrightarrow{BG} = 2(\overrightarrow{GM}) \Rightarrow G - B = 2(M - G) \Rightarrow G - B = 2M - 2G \Rightarrow$$
$$3G = 2M + B \Rightarrow G = \frac{2M + B}{3} \Rightarrow$$
$$(x_g, y_g) = \frac{2(x_m, y_m) + (x_b, y_b)}{3}.$$

Então teremos:

- $x_g = \dfrac{2x_m + x_b}{3} = \dfrac{2\left(\dfrac{x_a + xc}{2}\right) + x_b}{3} = \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3}.$
- $y_g = \dfrac{2y_m + y_b}{3} = \dfrac{2\left(\dfrac{y_a + y_c}{2}\right) + y_b}{3} = \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3}.$

Logo, as coordenadas do baricentro são dadas por:

$$G = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right).$$

Exemplo 3.6.1. *Considere o ΔABC, sendo X o ponto médio lado BC, Y o ponto médio do lado AC e Z o ponto médio do lado AB. Tendo os pontos X, Y e Z, coordenadas $(2,3), (4,5)$ e $(-1,6)$, respectivamente, encontre as coordenadas do baricentro desse triângulo.*

Solução:

Vamos começar encontrando às coordenadas dos pontos A, B e C, para isso iremos utilizar às coordenadas dos pontos médios X, Y e Z.

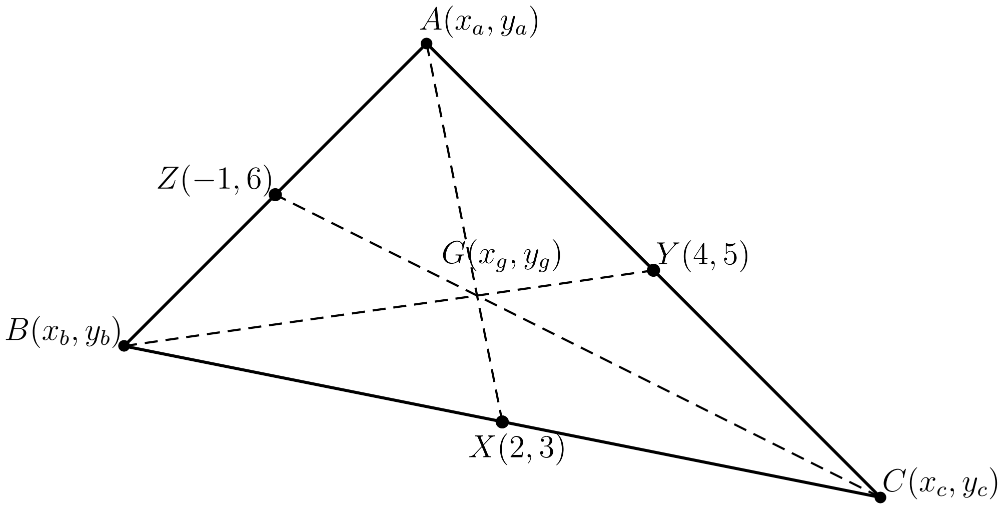
Observe a seguinte figura:

Temos,

$$X = (x_x, y_x) = \left(\frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2}\right) \Rightarrow (2,3) = \left(\frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{x_b + x_c}{2} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{y_b + y_c}{2} = 3 \qquad (1)$$

Figura 3.6.2 – Exemplo 5.6.1



Fonte: Autor

$$Y = (x_y, y_y) = \left(\frac{x_a + x_c}{2}, \frac{y_a + y_c}{2}\right) \Rightarrow (4, 5) = \left(\frac{x_a + x_c}{2}, \frac{y_a + y_c}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{x_a + x_c}{2} = 4 \qquad \text{e} \qquad \frac{y_a + y_c}{2} = 5 \qquad (2)$$

$$Z = (x_z, y_z) = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right) \Rightarrow (-1, 6) = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{x_a + x_b}{2} = -1 \qquad \text{e} \qquad \frac{y_a + y_b}{2} = 6 \qquad (3)$$

De (1), (2) e (3), obtemos os seguintes sistemas de equações:

$$\text{(I)} \begin{cases} x_b + x_c = 4 \\ x_a + x_c = 8 \\ x_a + x_b = -2 \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} y_b + y_c = 6 \\ y_a + y_c = 10 \\ y_a + y_b = 12 \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), obtemos

(I) $x_a = 1, x_b = -3$ e $x_c = 7$

(II) $y_a = 8, y_b = 4$ e $y_c = 2$

Logo as coordenadas de A, B e C são respectivamente $(1, 8), (-3, 4)$ e $(7, 2)$.

Agora vamos encontrar a coordenada do baricentro do ΔABC, que é representada pelo ponto G.

Então,

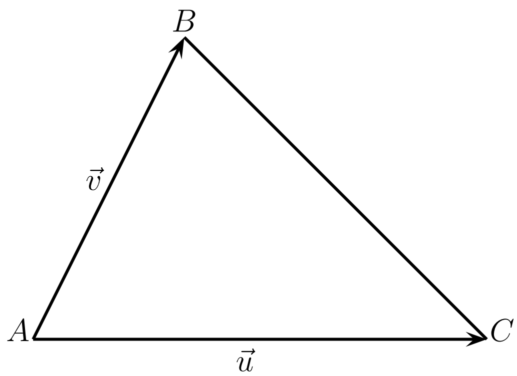
$$\begin{aligned} G = (x_g, y_g) &= \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1 - 3 + 7}{3}, \frac{8 + 4 + 2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right). \end{aligned}$$

Portanto a coordenada do baricentro do triângulo ΔABC é $\left(\frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

3.7 Área de um Triângulo e outros Polígonos

Considere o triângulo ABC abaixo:

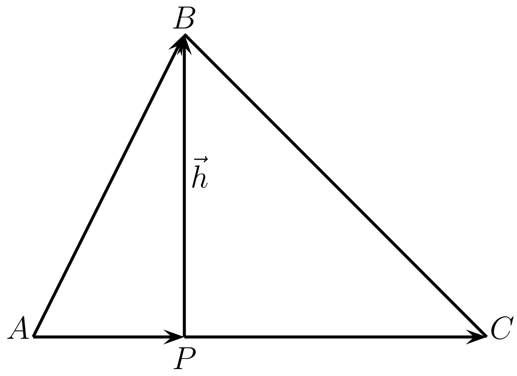
Figura 3.7.1 – Triângulo ABC



Fonte: Autor

Estamos interessados em determinar a área do ΔABC, na figura 3.7.1, em termos das coordenadas dos pontos $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$. Para isso recorreremos aos módulos dos vetores $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$. Consideraremos como base, o lado AC e, neste caso, a altura é o segmento BP perpendicular ao segmento AC e que possui como extremidades o ponto B e o ponto P, que é o pé da perpendicular BP ao lado AC.

Figura 3.7.2 – Triângulo ABC com altura $|\vec{h}| = h$



Fonte: Autor

Na figura 3.7.2 , seguinte,

a área A_T é dada por

$$A_T = \frac{base.altura}{2},$$

ou seja,

$$A_T = \frac{|\overrightarrow{AC}|.|\vec{h}|}{2}.$$

Como os pontos A e C são dados, o módulo do vetor $\overrightarrow{AC}$ é conhecido, mas a altura, ou seja, o módulo do vetor $\vec{h}$, não. Agora, a obtenção da área depende de determinarmos o módulo do vetor $\vec{h} = \overrightarrow{PB}$ em termos de coordenadas dos pontos do triângulo. Como $|\vec{h}|$ depende de B e P, devemos de alguma forma contornar a dependência do ponto P. A figura 3.7.3 aponta um caminho possível.

Observe que $\vec{w} = \overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{AC} + \vec{h} = \overrightarrow{AB}$ e daí $\vec{h} = \overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{AC}$.

Portanto, podemos determinar $|\vec{h}|$ se determinarmos α, visto que A e C são pontos conhecidos.

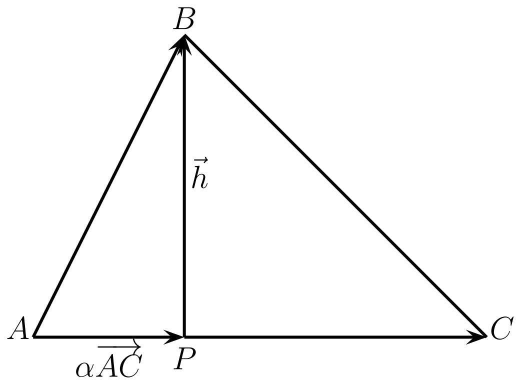
Definição 3.7.1. *O vetor $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC}$ é a projeção do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ sobre o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.*

Denotemos por

proj($\vec{u}_{\vec{v}}$)

Por outro lado, temos que

Figura 3.7.3 – Triângulo ABC com altura $|\overrightarrow{BP}|$



Fonte: Autor

$$\alpha\overrightarrow{AC} + \vec{h} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{h} = \overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{AC}.$$

Pondo

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (x_1, y_1)$$

e

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (c_1, c_2) - (a_1, a_2) = (x_2, y_2)$$

fica,

$$\vec{h} = (x_1, y_1) - \alpha(x_2, y_2) = (x_1 - \alpha x_2, y_1 - \alpha y_2).$$

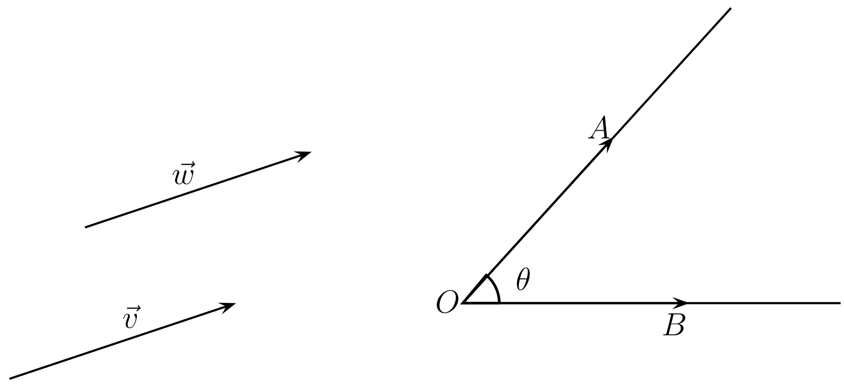
Quando consideramos os representantes de dois vetores não- nulos com mesma origem é possível perceber um ângulo entre as semirretas de mesma origem que são suporte para os representantes de tais vetores. Esta ideia motiva a

Definição 3.7.2. *Sejam $\vec{w}$ e $\vec{v}$ vetores no plano coordenado. Consideremos dois representantes $\vec{w} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ com mesma origem. O ângulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, de $\vec{w}$ e $\vec{v}$ é o ângulo das semirretas de mesma origem, $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$, que são suportes dos vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$.*

Veja a figura 3.7.4

Na figura 3.7.3 os segmentos AP e PB são perpendiculares, ou seja, os representantes dos vetores $\vec{w}$ e $\vec{h}$ são perpendiculares. Assim, temos a seguinte

Figura 3.7.4 – Ângulo entre os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$



Fonte: Autor

Definição 3.7.3. *Sejam $\vec{w}$ e $\vec{u}$ vetores no plano coordenado. Dizemos que dois vetores são ortogonais se os seus representantes com origem na origem do sistema cartesiano são perpendiculares. Denotaremos a ortogonalidade entre os vetores $\vec{w}$ e $\vec{u}$ por $\vec{w} \perp \vec{u}$.*

A ortogonalidade está bem definida, pois se tivermos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, com $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ e $D(d_1, d_2)$ então

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x_1, y_1)$$

e

$$\vec{w} = \overrightarrow{CD} = D - C = (d_1, d_2) - (c_1, c_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (x_2, y_2)$$

são vetores cujos representantes possuem origem no ponto $O(0, 0)$. De posse da definição 3.7.3 temos o

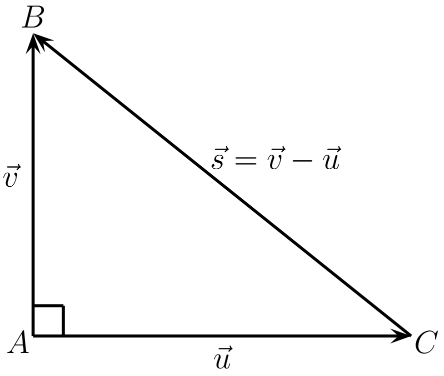
Lema 3.7.1. *Se $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.*

Demonstração:

Considere a figura

As medidas dos lados AB, AC e BC são respectivamente $|\vec{v}|, |\vec{u}|$ e $|\vec{v} - \vec{u}|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras fica $|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2$. Daí

Figura 3.7.5 – Triângulo ABC



Fonte: Autor

$$\begin{aligned}
|\vec{v} - \vec{u}|^2 &= |x_2 - x_1, y_2 - y_1|^2 \\
&= \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^2 \\
&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
&= x_2^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 \\
&= (x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 &= \left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 \\
&= x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

De (1) = (2) resulta $-2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 0$, ou seja,

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

Voltando a figura 3.7.3, como $\vec{h} = \overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{AC} = (x_1 - \alpha x_2, y_1 - \alpha y_2)$ é a altura em relação à base $\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$ segue que $\vec{h} \perp \overrightarrow{AC}$. Assim,

$$\begin{aligned}
(x_1 - \alpha x_2)x_2 + (y_1 - \alpha y_2)y_2 &= x_1x_2 - \alpha x_2^2 + y_1y_2 - \alpha y_2^2 \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 - \alpha(x_2^2 + y_2^2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

i) α só depende dos pontos A, B e C, que são pontos conhecidos;

ii) O numerador dá informações sobre o ângulo entre os vetores. Se $x_1x_2 + y_1y_2 \neq 0$ então os vetores não são ortogonais.

Observando mais atentamente percebemos que o número $x_1x_2 + y_1y_2$ possui propriedades interessantes. Para melhor estudar tais propriedades temos a

Definição 3.7.4. *Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer do plano coordenado. O número $x_1x_2+y_1y_2$ é chamado produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Denotaremos o produto escalar por*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

Temos que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_2^2 + y_2^2.$$

Portanto podemos escrever

$$\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

A primeira propriedade do produto escalar é que

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1^2 + y_1^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right) = |(x_1, y_1)|^2 = |\vec{u}|^2.$$

Ou seja, vale a

Proposição 3.7.1. *Seja $\vec{u}$ um vetor qualquer do plano coordenado. Então*

$$|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

Além disso, com notação da definição 3.7.1 temos a

Proposição 3.7.2. *Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores no plano coordenado. Então*

$$\text{proj}(\vec{u}_{\vec{v}}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}$$

Demonstração:

Usando a notação da definição 3.7.1 resulta $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e

$$\text{proj}(\vec{u}_{\vec{v}}) = \alpha\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{v} = \frac{A_T = \dfrac{|\vec{v}|.|\vec{u} - \alpha\vec{v}|}{2}}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}.$$

De posse de α temos a

Proposição 3.7.3. *Seja ΔABC um triângulo qualquer no plano coordenado, com vértices nos pontos A, B e C.Então a área do triângulo é*

$$A_T = \frac{|\vec{v}|.|\vec{u} - \alpha\vec{v}|}{2} = \frac{|\vec{v}|.|\vec{u} - \text{proj}(\vec{u}_{\vec{v}})|}{2}$$

onde $\alpha = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Demonstração:

Basta lembrar que $|\vec{v}|$ é o comprimento da base AC do triângulo e ue a medida h da altura é o comprimento do seguimento PB, que é $|\vec{h}| = |\vec{u} - \alpha\vec{v}|$. Veja a figura 3.7.3.

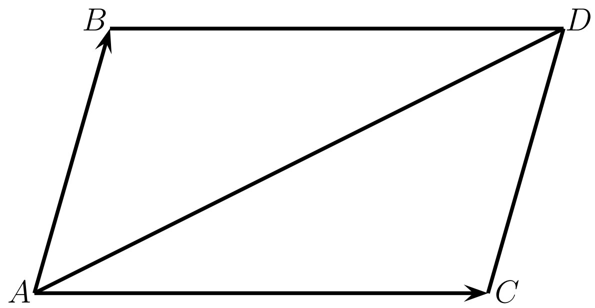
Corolário 3.7.1. *A área do paralelogramo $P(ABCD)$, nesta ordem, é*

$$A_T = |\vec{v}|.|\vec{u} - \alpha\vec{v}|$$

Demonstração:

Considere o paralelogramo da figura 3.7.6 abaixo

Figura 3.7.6 – Paralelogramo $P(ABCD)$



Fonte: Autor

Os triângulos $\Delta_1 ABC$ e $\Delta_2 BDC$, são triângulos retângulos congruentes e portanto possuem a mesma área. Segue que

$$A_P = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2} = 2A_{\Delta_1} = 2\frac{|\vec{v}|.|\vec{u} - \alpha\vec{v}|}{2} = |\vec{v}|.|\vec{u} - \alpha\vec{v}|.$$

Corolário 3.7.2. *Se o triângulo é retângulo então*

$$A_T = \frac{|\vec{v}|.|\vec{u}|}{2}$$

Demonstração:

Como o triângulo ΔABC é retângulo, digamos, sem perda de generalidade em A, segue que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$. Daí

$$\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \frac{0}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = 0.$$

Com isso

$$A_T = \frac{|\vec{v}|.|\vec{u} - \alpha\vec{v}|}{2} = \frac{|\vec{v}|.|\vec{u} - 0\vec{v}|}{2} = \frac{|\vec{v}|.|\vec{u}|}{2}.$$

Corolário 3.7.3. *A área do retângulo $R(ABCD)$ no plano coordenado com vértices nos pontos A, B, D e C, nesta ordem, é*

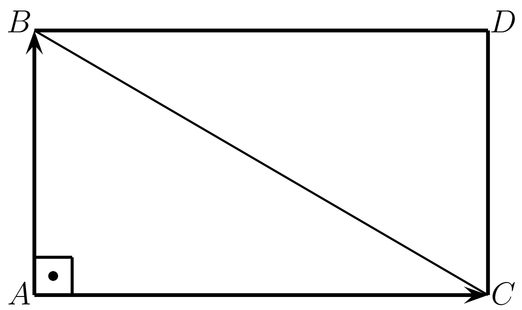
$$A_R = |\ \vec{v}\ ||\ \vec{u}\ |,$$

onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Demonstração:

Considere o retângulo da figura 3.7.7

Figura 3.7.7 – Retângulo $ABCD$



Fonte: Autor

Os triângulos $\Delta_1 ABC$ e $\Delta_2 BDC$ são triângulos retângulos congruentes e portanto possuem a mesma área. Segue

$$A_R = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2} = 2A_{\Delta_1} = 2\frac{|\vec{v}|.|\vec{u}|}{2} = |\vec{v}|.|\vec{u}|.$$

Além disso,

Corolário 3.7.4. *A área do quadrado $Q(ABCD)$ no plano coordenado com vértices nos pontos A, B, D e C, nesta ordem, é*

$$A_Q = \mid \vec{v} \mid^2 = \mid \vec{u} \mid^2,$$

onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Como todo quadrado é retângulo com lados congruentes temos que $|\vec{v}| = |\vec{u}|$. Portanto

$$A_Q = \mid \vec{v} \mid . \mid \vec{u} \mid = \mid \vec{v} \mid . \mid \vec{v} \mid = \mid \vec{v} \mid^2,$$

ou

$$A_Q = \mid \vec{v} \mid . \mid \vec{u} \mid = \mid \vec{u} \mid . \mid \vec{u} \mid = \mid \vec{u} \mid^2 .$$

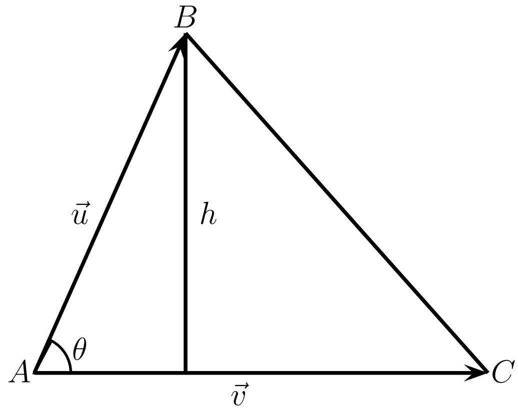
Uma observação importante a fazer é que pode - se obter em termos de corolário, no plano coordenado, as áreas de outros polígonos que são decomponíveis em triângulos.

Até o presente momento tratamos da área do triângulo apenas em termos do módulo dos vetores que "são"lados deste polígono. A partir de agora vão olhar para o ângulo entre tais lados. Mais precisamente vamos mostrar que o número α pode ser obtido, também, em termos do ângulo θ, o que proporciona uma riqueza em termos de possíveis exercícios para cálculo da área de um triângulo. Além disso, a determinação da área fica mais simples quando se conhece o ângulo referido.

Proposição 3.7.4. *Considere o triângulo ΔABC e o ângulo θ dos lados AB e AC. Então a área do triângulo ΔABC é*

$$A_T = \frac{|\vec{u}||\vec{v}|sen\theta}{2},$$

Figura 3.7.8 – Triângulo ABC com altura h



Fonte: Autor

onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Demonstração:

Na figura 3.7.8 abaixo:

Temos que

$$\text{sen}\theta = \frac{h}{|\vec{u}|} \Rightarrow h = |\vec{u}|\text{sen}\theta.$$

Segue que

$$A_T = \frac{h|\vec{v}|}{2} = \frac{|\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\theta}{2}.$$

Mesmo que o ângulo θ não seja conhecido é possível determiná-lo e assim calcular a área do triângulo como mostra a

Proposição 3.7.5. *Seja ΔABC um triângulo com vértices A, B e C. Então o ângulo θ dos lados AB e AC é dado por*

$$\cos\,\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

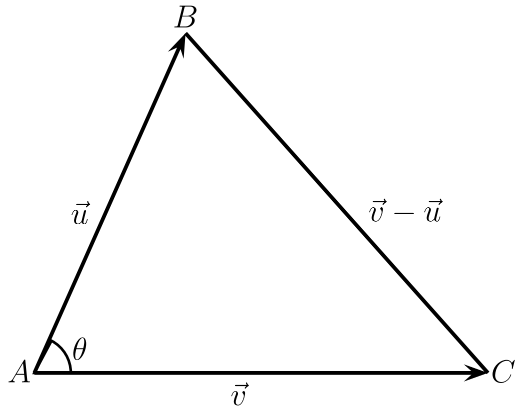
Demonstração:

Considere a figura 3.7.9.

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$. Aplicando a lei dos cossenos fica,

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}|\text{cos}\theta.$$

Figura 3.7.9 – Triângulo ABC



Fonte: Autor

Assim,

$$
\begin{aligned}
|\vec{v}-\vec{u}|^2 &= \left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right)^2 \\
&= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \\
&= x_2^2-2x_1x_2+x_1^2+y_2^2-2y_1y_2+y_1^2 \\
&= x_2^2+x_1^2+y_2^2+y_1^2-2x_1x_2-2y_1y_2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|\vec{v}|^2+|\vec{u}|^2-2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta &= \left(\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^2+\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)^2-2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta \\
&= x_2^2+y_2^2+x_1^2+y_1^2-2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Fazendo $(1)=(2)$ fica

$$x_2^2+x_1^2+y_2^2+y_1^2-2x_1x_2-2y_1y_2 = x_2^2+y_2^2+x_1^2+y_1^2-2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta.$$

Que implica

$$x_1x_2+y_1y_2 = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta.$$

Ou seja,

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta.$$

Portanto

$$\text{cos}\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}||\vec{u}|}.$$

De posse do cosseno do ângulo θ é possível determinar o seno de θ usando a relação $\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ e com isso pode-se determinar a área do triângulo ΔABC.

CONCLUSÕES

Com base no que foi apresentado, podemos dizer que este trabalho é uma proposta que possui dois aspectos importantes a serem levados em consideração: é uma proposta com abordagem vetorial e é uma proposta com motivação vetorial: como exemplo podemos pensar na determinação da equação de reta; o cálculo da área do triângulo e outros polígonos motiva a definição de conceitos como ortogonalidade, produto interno, projeção e determinação de ângulos entre vetores. Por outro lado, ressaltamos que não é uma proposta acabada e, neste sentido, queremos expressar que é uma ideia mais geral que pode ser melhorada com mais detalhes de modo que alcance de forma plena o aluno do ensino básico, principalmente no sentido de oferecer mais subsunçores para enfrentar os cursos de Geometria Analítica, Cálculo Vetorial e Álgebra Linear futuramente. Para o aluno dos cursos de Geometria Analítica dos cursos superiores de exatas pode ser pensado como uma forma de introdução, posto que os conceitos, definições propriedades, como supracitado, são motivados por problemas. Veja (SILVA, 2012) e (SILVA; LIMA, 2016).

Portanto o conteúdo não é introduzido do nada, sem motivação como ocorre com a definição de produto interno ou como a determinação da equação da reta em alguns livros.

Outros aspectos que gostaríamos de ressaltar é a obtenção de um fórmula inédita e justificada, para equação da reta, dados um ponto e uma direção, que depende apenas da soma de dois determinantes 2×2 (tal equação é vantajosa, pois os livros didáticos do ensino médio utilizam determinante 3×3, que é mais trabalhoso em termos de cálculos) e uma fórmula para o cálculo da área do triângulo e outros polígonos, que depende do módulo de vetores, sem utilizar produto vetorial. Uma proposta interessante é inserir o tratamento vetorial em sala, juntamente coma a forma convencional que utiliza apelas sistema de coordenadas cartesianas, quando possível, no ensino básico de modo que o aluno posso ter um ponto de vista a mais.

Nem todos os conceitos, definições e suas propriedades foram tratados, deixando a possibilidade de exploração e continuidade de tal abordagem. Neste sentido pode-se escrever um e-book para inserir mais detalhes e exemplos. Esperamos e incentivamos os leitores do trabalho a dar suas contribuições e sugestões posto que, este, é apenas um começo e não um fim.

REFERÊNCIAS

BOULOS, P.; CAMARGO, I. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo - SP: Mc Graw-Hill, 1987.

DANTE, L. R. *Contexto e Aplicações vol.3*. 2ª. ed. São Paulo: Atica, 2013.

DELGADO, K. F. J.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. 2°. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2017.

GOMEZ, J. J. D. *Geometria Analítica I. v.único*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: Funadação CECIERJ, 2010.

MOREIRA, M. A. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: EPU, 1999.

NETO, F. F. da S. Aplicando as propriedades dos vetores a problemas da geometria classíca. Dissertação (Mestrado em matemática)-PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, p. https://sca.profmat–sbm.org.br/profmat–tcc.php?id1=1522eid2=550, 2014.

SILVA, A. L. d. M. M. Sandra Albano da; LIMA, A. C. de O. O ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. p. https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7992–4150–ID.pdf, 2016.

SILVA, L. de A. Ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas no ensino fundamental ii. *Rios Eletrônica- Revista Científica da FASETE*, p. https://www.unirios.edu.br/revistarios/media/revistas/2012/6/ensino–da–matematica–atraves–da–resolucao–de–problemas–no–ensino–fundamental–ii.pdf, 2012.

SOUZA, J. R. de. *Contato Matematica vol.3*. 1ª. ed. São Paulo: FDT, 2016.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 2º. ed. São Paulo, SP: Makron books, 1987.

VENTURI, J. J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. 6ª. ed. Curitiba: [s.n.], 1949.

WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Person Markron Books, 2000.