



THAÍS CRISTINA BARROS MACHADO

**DINÂMICA ETÁRIA DA POPULAÇÃO DE MINAS GERAIS
UTILIZANDO MATRIZ DE LESLIE COM APLICAÇÕES
DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO**

**LAVRAS - MG
2024**

THAÍS CRISTINA BARROS MACHADO

**DINÂMICA ETÁRIA DA POPULAÇÃO DE MINAS GERAIS UTILIZANDO MATRIZ
DE LESLIE COM APLICAÇÕES DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa
Orientadora

Profa. Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré
Coorientadora

**LAVRAS - MG
2024**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pela própria autora.**

Machado, Thaís Cristina Barros.

Dinâmica etária da população de Minas Gerais utilizando
matriz de Leslie com aplicações didáticas no Ensino Médio / Thaís
Cristina Barros Machado. - 2024.

134 p. : il.

Orientador(a): Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa.

Coorientador(a): Rita de Cássia Dornelas Sodré.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de
Lavras, 2024.

Bibliografia.

1. Matriz de Leslie. 2. Crescimento populacional. 3. Sequência
didática. I. Costa, Maria do Carmo Pacheco de Toledo. II. Sodré,
Rita de Cássia Dornelas. III. Título.

A reprodução e a divulgação total ou parcial deste trabalho são autorizadas, por qualquer meio
convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

THAÍS CRISTINA BARROS MACHADO

**DINÂMICA ETÁRIA DA POPULAÇÃO DE MINAS GERAIS UTILIZANDO MATRIZ
DE LESLIE COM APLICAÇÕES DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO
AGE DYNAMICS OF THE POPULATION OF MINAS GERAIS USING LESLIE
MATRIX WITH DIDACTIC APPLICATIONS IN HIGH SCHOOL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 26 de abril de 2024.

Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa	UFLA
Profa. Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré	UFLA
Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves	UFLA
Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós	UTFPR

Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa
Orientadora

Profa. Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré
Coorientadora

**LAVRAS - MG
2024**

Dedico esta Dissertação ao bom Deus, à minha família e ao meu companheiro Miller, pois acredito que a presença deles na minha vida foi essencial para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e por ter me dado força em todas as etapas do curso.

Agradeço ao meu companheiro de vida Miller, por todo incentivo, apoio, paciência, amor e por confiar em meu potencial. Você foi fundamental para minha caminhada até aqui.

Sou grata a minha família por todo suporte e a minha mãe em especial, por sempre ter acreditado em mim.

Sou imensamente grata à Professora Doutora Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa, que foi uma mentora excepcional, suas contribuições foram essenciais para a realização deste trabalho.

Agradeço a Professora Doutora Rita de Cássia Dornelas Sodré pelas contribui es valiosas para este trabalho.

Sou grata a todos os professores do PROFMAT, que contribuíram para a minha forma o profissional e pessoal.

Agradeço aos estudantes que realizaram as atividades, vocês possibilitaram a aplica o e a análise da sequência didática, parte muito importante deste trabalho.

Por fim, agradeço a Universidade Federal de Lavras (UFLA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por possibilitar uma forma o de qualidade.

*Nunca deixe que lhe digam
Que não vale a pena acreditar no sonho que se tem
Ou que seus planos nunca vão dar certo
Ou que você nunca vai ser alguém
Tem gente que machuca os outros
Tem gente que não sabe amar
Mas eu sei que um dia a gente aprende
Se você quiser alguém em quem confiar
Confie em si mesmo
Quem acredita sempre alcança
(Renato Russo – Mais uma vez)*

RESUMO

O modelo de Leslie é um modelo matemático utilizado para prever o crescimento e a distribuição de uma população feminina com o passar do tempo. O modelo calcula o número de indivíduos femininos distribuído em faixas etárias no próximo período de tempo, por meio da multiplicação da chamada matriz de Leslie por uma matriz coluna que contém a distribuição etária inicial feminina da população. Abordamos inicialmente conceitos de Álgebra Linear importantes para compreender o modelo de Leslie, como autovalor, autovetor e diagonalização de matrizes. Fizemos um estudo detalhado da matriz de Leslie. Demonstramos os principais resultados e como um exemplo aplicamos o modelo para a população feminina do estado de Minas Gerais utilizando as informações do IBGE a partir do ano de 2010. O objetivo deste trabalho é analisar como o modelo de Leslie pode contribuir para o aprendizado da multiplicação de matrizes, proporcionando ao estudante uma visualização da aplicabilidade de matrizes. Para atender este objetivo foi desenvolvida e aplicada uma sequência didática, que trabalha de maneira construtiva o modelo de Leslie, em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública no sul de Minas Gerais. A sequência didática é composta por três atividades contextualizadas que introduz a matriz de Leslie e um questionário para saber a opinião dos estudantes sobre as atividades. Para realizar as multiplicações com matrizes foi usado o aplicativo Matrix Calculator. Os resultados da aplicação da sequência didática foram positivos, os estudantes gostaram e se sentiram motivados com a atividade diferenciada, mesmo com algumas dificuldades e erros matemáticos cometidos por eles. O uso do aplicativo contribuiu com os resultados positivos, pois tornou a atividade mais atrativa e proporcionou aprofundar a situação problema. Enfim, a sequência didática possibilitou mostrar uma aplicação para o conteúdo de matrizes, tornando a aula de Matemática mais interessante e tangível.

Palavras-chave: matriz de Leslie; crescimento populacional; sequência didática.

ABSTRACT

The Leslie model is a mathematical model used to predict the growth and distribution of a female population over time. The model calculates the number of female individuals distributed into age groups in the next period of time, by multiplying the called Leslie matrix by a column matrix that contains the initial female age distribution of the population. We initially address Linear Algebra concepts that are important for understanding Leslie's model, such as eigenvalue, eigenvector and diagonalization of matrices. We made a detailed study of the Leslie matrix. We demonstrate the main results and as an example we apply the model to the female population of the state of Minas Gerais using IBGE information from the year 2010. The objective of this work is to analyze how Leslie's model can contribute to learning multiplication of matrices, providing the student with a visualization of the applicability of matrices. To meet this objective, a didactic sequence was developed and applied, which works constructively on Leslie's model, in a second-year high school class at a public school in the south of Minas Gerais. The didactic sequence is made up of three contextualized activities that introduce the Leslie matrix and a questionnaire to find out students opinions about the activities. To perform matrix multiplications, the Matrix Calculator application was used. The results of applying the didactic sequence were positive, the students enjoyed and felt motivated by the different activity, even with some difficulties and mathematical errors made by them. The use of the application contributed to the positive results, as it made the activity more attractive and provided a deeper understanding of the problem situation. Ultimately, the didactic sequence made it possible to show an application for the matrices content, making the Mathematics class more interesting and tangible.

Keywords: Leslie matrix; population growth; didactic sequence.

INDICADORES DE IMPACTOS

Este trabalho aplicou um modelo matemático, chamado modelo de Leslie, para a população feminina do estado de Minas Gerais, usando os dados do censo de 2010, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), como população inicial. O modelo mostrou que, a longo prazo, a população feminina do estado de Minas Gerais sofrerá um decréscimo de 4,44% a cada cinco anos e essa informação pode ser importante para o setor público e privado fazerem seus planejamentos futuros e tomarem decisões a longo prazo. Além disso, o trabalho gerou, como produto educacional, uma sequência didática voltada para os estudantes do Ensino Médio, composta por três atividades. A sequência didática apresenta o modelo de Leslie de forma construtiva e com exemplos contextualizados, no formato de estudo dirigido. O intuito é mostrar uma aplicação de matrizes e motivar a aprendizagem deste conteúdo. Para auxiliar nos cálculos com multiplicação de matrizes foi usado o aplicativo gratuito Matrix Calculator. A sequência didática foi aplicada para uma turma de 26 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública no sul de Minas Gerais. A aplicação foi bem-sucedida, trouxe uma dinâmica diferente para as aulas de Matemática e a maioria dos estudantes gostaram das atividades.

IMPACT INDICATORS

This work applied a mathematical model, called the Leslie model, to the female population of the state of Minas Gerais, using data from the 2010 census, carried out by the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE), as the initial population. The model showed that, in the long term, the female population in the state of Minas Gerais will suffer a decrease of 4.44% every five years and this information can be important for the public and private sector to make their future planning and make decisions in the long term. Furthermore, the work generated, as an educational product, a didactic sequence aimed at high school students, consisting of three activities. The didactic sequence presents Leslie's model in a constructive way and with contextualized examples, in a directed study format. The aim is to show an application of matrices and motivate the learning of this content. To assist in matrix multiplication calculations, the free Matrix Calculator application was used. The didactic sequence was applied to a class of 26 second-year high school students at a public school in the south of Minas Gerais. The application was successful, it brought a different dynamic to Mathematics classes and the majority of students enjoyed the activities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Tela inicial do aplicativo Matrix Calculator.	28
Figura 3.2 – Gráfico da população feminina distribuída em faixas etárias.	29
Figura 3.3 – Gráfico da população feminina relativa distribuída em faixas etárias.	30
Figura 3.4 – Comportamento da função q	37
Figura 3.5 – Gráfico da distribuição etária da população feminina.	49
Figura 3.6 – Gráfico da distribuição etária relativa da população feminina.	53
Figura 3.7 – Gráfico da distribuição etária feminina.	55
Figura 5.1 – Distribuição etária inicial.	73
Figura 5.2 – Reprodução em cada faixa etária.	73
Figura 5.3 – Taxas de sobrevivência das faixas etárias.	74
Figura 5.4 – Distribuição etária inicial das porcas.	79
Figura 5.5 – Reprodução das porcas em cada faixa etária	79
Figura 5.6 – Taxas de sobrevivência das porcas nas faixas etárias.	80
Figura 5.7 – Tela inicial do aplicativo Matrix Calculator.	82
Figura 5.8 – Botão para multiplicar.	83
Figura 5.9 – Atividade 1 do estudante A.	86
Figura 5.10 – Atividade 1 do estudante B.	86
Figura 5.11 – Atividade 2 item c) do estudante A.	87
Figura 5.12 – Atividade 2 item c) do estudante C.	87
Figura 5.13 – Atividade 2 item c) do estudante D.	87
Figura 5.14 – Atividade 2 item d) do estudante A.	88
Figura 5.15 – Atividade 2 item j) do estudante A.	89
Figura 5.16 – Atividade 3 item e) do estudante E.	90
Figura 1 – Distribuição etária inicial.	97
Figura 2 – Reprodução em cada faixa etária.	97
Figura 3 – Taxas de sobrevivência das faixas etárias.	98
Figura 4 – Distribuição etária inicial das porcas.	103
Figura 5 – Reprodução das porcas em cada faixa etária.	104
Figura 6 – Taxas de sobrevivência das porcas nas faixas etárias.	104
Figura 7 – Tela inicial do aplicativo Matrix Calculator.	107
Figura 8 – Botão para multiplicar.	108

Figura 9 – Distribuição etária inicial.	116
Figura 10 – Reprodução em cada faixa etária.	116
Figura 11 – Taxas de sobrevivência das faixas etárias.	117
Figura 12 – Distribuição etária inicial das porcas.	123
Figura 13 – Reprodução das porcas em cada faixa etária.	124
Figura 14 – Taxas de sobrevivência das porcas nas faixas etárias.	124
Figura 15 – Tela inicial do aplicativo Matrix Calculator.	127
Figura 16 – Botão para multiplicar.	128

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Distribuição etária.	29
Tabela 3.2 – Construção das faixas etárias.	31
Tabela 3.3 – Distribuição etária (x_0 até x_5).	49
Tabela 3.4 – Distribuição etária (x_6 até x_{11}).	50
Tabela 3.5 – Distribuição etária (x_{12} até x_{16}).	50
Tabela 3.6 – Distribuição etária (x_{17} até x_{20}).	51
Tabela 3.7 – Distribuição etária (x_{21} até x_{24}).	51
Tabela 3.8 – Distribuição etária (x_{25} até x_{27}).	52
Tabela 3.9 – Distribuição etária (x_{28} até x_{30}).	52
Tabela 3.10 – População de Minas Gerais em 2010.	56
Tabela 3.11 – Filhas nascidas vivas em Minas Gerais de 2010 até 2014.	57
Tabela 3.12 – Óbitos de mulheres em Minas Gerais de 2010 até 2014.	59
Tabela 3.13 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2015 - 2020.	61
Tabela 3.14 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2025 - 2030.	62
Tabela 3.15 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2035 - 2040.	63
Tabela 3.16 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2045 - 2050.	64
Tabela 3.17 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2055 - 2060.	65
Tabela 3.18 – Projeção do modelo de Leslie da população de Minas Gerais no período 2065 - 2085.	66
Tabela 3.19 – Comparação da população de Minas Gerais no ano 2022.	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR	15
2.1	Autovalor e autovetor de uma matriz	15
2.2	Diagonalização de matrizes	20
3	MODELO DE LESLIE	26
3.1	Introdução ao modelo de Leslie	26
3.2	Construção da matriz de Leslie	30
3.3	Comportamento do modelo de Leslie ao longo do tempo	34
3.4	Aplicação do modelo de Leslie para Minas Gerais	56
4	TRABALHOS RELACIONADOS	70
5	O MODELO DE LESLIE NO ENSINO MÉDIO	72
5.1	Sequência didática	72
5.1.1	Atividade 1	72
5.1.2	Atividade 2	75
5.1.3	Atividade 3	78
5.1.4	Questionário - Matriz de Leslie	84
5.2	Aplicação da sequência didática	85
6	CONCLUSÃO	93
	REFERÊNCIAS	94
	APENDICE A – Sequência didática aplicada aos estudantes para impressão	96
	APENDICE B – Solução da sequência didática aplicada aos estudantes . . .	111
	APENDICE C – Sequência didática com correções para impressão	115
	APENDICE D – Solução da sequência didática com correções	131

1 INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico acelerado e as dificuldades do sistema educacional em se adaptar às mudanças rápidas da sociedade, são desafios que os educadores enfrentam diariamente. O modelo de ensino tradicional não é suficiente para atender às necessidades das novas gerações, que estão em constante contato com as tecnologias e informações. No nosso entendimento, na disciplina de Matemática a situação é ainda mais grave, porque os estudantes precisam aprender conteúdos matemáticos que não estão relacionados com suas realidades, na maioria das vezes eles não conseguem observar uma maneira de aplicar a Matemática que estão aprendendo. Assim, a disciplina com frequência é vista pelos estudantes como muito difícil e “sem muita utilidade”, pois não atende aos seus questionamentos e necessidades.

Relacionar os conteúdos matemáticos com situações reais e mostrar suas aplicações no contexto social pode motivar os estudantes em sala de aula e contribuir à melhoria do ensino da Matemática. Desta forma, esse trabalho apresenta a matriz de Leslie como uma aplicação para motivar o ensino de matrizes, mostrando como usar os conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais, ou seja, mostrar a aplicabilidade da Matemática.

De acordo com Anton e Rorres (2012), a matriz de Leslie L é utilizada para calcular o número de indivíduos distribuídos em faixas etárias no próximo período de tempo, por meio da multiplicação da matriz L por uma matriz coluna que contém a distribuição etária inicial da população.

O objetivo deste trabalho é investigar as possíveis contribuições do uso da matriz de Leslie no processo de ensinar e aprender Matemática. Para isto, foi desenvolvida e aplicada uma sequência didática, que trabalha de maneira construtiva o modelo de Leslie e aborda o conteúdo de matrizes, em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública no sul de Minas Gerais.

No Capítulo 2, são abordados os conteúdos de Álgebra Linear fundamentais para compreender o modelo de Leslie, como autovalor, autovetor e diagonalização de matrizes. No Capítulo 3, é feito um estudo do modelo de Leslie e como exemplo, o modelo é aplicado para a população feminina do estado de Minas Gerais. No Capítulo 4, é feito um levantamento dos trabalhos relacionados ao modelo de Leslie. No Capítulo 5, é apresentada a sequência didática e a análise de sua aplicação para os estudantes do Ensino Médio.

2 CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo apresentamos alguns resultados da Álgebra Linear, necessários para entender as propriedades da matriz de Leslie, como autovalor, autovetor e diagonalização de matrizes.

2.1 Autovalor e autovetor de uma matriz

Iniciamos esta seção com a definição de autovalor e autovetor de uma matriz. Veremos que o autovalor positivo de uma matriz de Leslie e seu autovetor associado são importantes para descrever o comportamento, a longo prazo, da população estudada. Neste texto, as matrizes com uma única coluna serão chamadas de vetores e estes serão escritos em negrito.

Definição 2.1. Seja A uma matriz de ordem n . Um escalar λ é um autovalor de A se existir um vetor não nulo \mathbf{x} tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. O vetor \mathbf{x} é chamado de autovetor de A associado ao autovalor λ .

Exemplo 2.2. Verifique se o vetor \mathbf{x} é um autovetor da matriz A , sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solução: Temos que

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\mathbf{x}.$$

Assim, $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz A e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Agora observemos que,

$$A(-4\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -24 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 3(-4\mathbf{x})$$

e, portanto, o vetor $-4\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ também é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Assim, temos a Proposição 2.3.

Proposição 2.3. Se \mathbf{x} for um autovetor de uma matriz A associado a um autovalor λ , então qualquer múltiplo escalar $\alpha\mathbf{x}$, com $\alpha \neq 0$, também é autovetor de A associado a λ .

Demonstração: Como \mathbf{x} é um autovetor de A associado ao autovalor λ , temos que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Logo, $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x} = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x})$ e, portanto, $\alpha\mathbf{x}$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ . \square

Observemos que a equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser escrita como $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$, sendo I a matriz identidade de mesma ordem da matriz A , ou seja,

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Assim, o escalar λ é autovalor da matriz A quando a equação (2.1) tiver uma solução não nula, isto é, quando

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (2.2)$$

pois o sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem solução não nula se, e somente se, $\det(A) = 0$.

Quando desenvolvemos o determinante na equação (2.2) obtemos um polinômio de grau n na variável λ ,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Esse polinômio recebe o nome de polinômio característico de A e possui n raízes no conjunto dos números complexos, contando as multiplicidades. As raízes do polinômio característico são os autovalores da matriz A , como afirma a Proposição 2.4.

Proposição 2.4. O escalar λ é um autovalor da matriz A se, e somente se, é uma raiz do polinômio característico de A .

Demonstração: Inicialmente vamos provar que se λ é um autovalor da matriz A , então λ é uma raiz do polinômio característico de A .

Para isto, sejam λ um autovalor da matriz A e \mathbf{x} o autovetor associado a λ , então

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

o que é equivalente ao sistema homogêneo

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Como \mathbf{x} é um autovetor de A , segue que o sistema (2.3) tem uma solução não nula. Logo, $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, $p(\lambda) = 0$ e, portanto, λ é uma raiz do polinômio característico de A .

Reciprocamente, se λ é uma raiz do polinômio característico da matriz A , então $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. Logo, o sistema $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem solução não nula \mathbf{x} . Portanto, λ é autovalor de A . \square

Exemplo 2.5. Determine os autovalores e os autovetores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solução: O polinômio característico da matriz A é igual a

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(5 - 6\lambda + \lambda^2) + 8 + 4 - 4\lambda + 4 - 4\lambda - 10 + 2\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6. \end{aligned}$$

Os autovalores de A são as raízes do polinômio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$.

Para calcular os autovetores de A , $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, vamos resolver a equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ que

é equivalente a $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1-\lambda)x + 2y - z \\ x - \lambda y + z \\ 4x - 4y + (5-\lambda)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y - z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ 4x - 4y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}. \quad (2.4)$$

Substituindo os autovalores, um de cada vez, no sistema de equações (2.4) e resolvendo-o, obtemos os autovetores:

a) substituindo $\lambda_1 = 1$ em (2.4) resulta em $x = -y$ e $z = 2y$, sendo y a variável livre, logo

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{C}. \text{ Assim, temos que } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ é um autovetor de}$$

A associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$;

b) substituindo $\lambda_2 = 2$ em (2.4) resulta em $x = -2y$ e $z = 4y$, sendo y a variável livre, logo

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 4y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{C}. \text{ Assim, temos que } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ é um autovetor}$$

de A associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$;

c) substituindo $\lambda_3 = 3$ em (2.4) resulta em $x = -y$ e $z = 4y$, sendo y a variável livre, logo

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 4y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{C}. \text{ Assim, temos que } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ é um autovetor de}$$

A associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$.

No Exemplo 2.6 temos autovalores complexos.

Exemplo 2.6. Calcule os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução: O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda.$$

Resolvendo a equação $-\lambda^3 - \lambda = 0$ obtemos os autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$. Para determinar os autovetores de A , associados a cada autovalor, vamos resolver o sistema $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} -\lambda x - y \\ x - \lambda y \\ y - \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\begin{cases} -\lambda x - y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Substituindo os autovalores, um de cada vez, no sistema de equações (2.5):

a) substituindo o autovalor $\lambda_1 = 0$ em (2.5) obtemos $x = 0$, $y = 0$ e z é a variável livre, logo

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C}. \text{ Assim, temos que } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ é um autovetor de } A$$

associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$;

b) substituindo o autovalor $\lambda_2 = i$ em (2.5) temos $x = iy$, $z = -iy$ e y é a variável livre, assim

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} iy \\ y \\ -iy \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, y \in \mathbb{C}. \text{ Assim, temos que } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ é um autovetor de } A$$

associado ao autovalor $\lambda_2 = i$;

c) substituindo o autovalor $\lambda_3 = -i$ em (2.5) obtemos $x = -iy$, $z = iy$ e y é a variável livre,

$$\text{logo } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -iy \\ y \\ iy \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, y \in \mathbb{C}. \text{ Assim, temos que } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ é um autovetor}$$

de A associado ao autovalor $\lambda_3 = -i$.

As Definições 2.7 e 2.8 e o Teorema 2.9 a seguir serão importantes para a Seção 2.2 que abordará a diagonalização de matrizes.

Definição 2.7. Os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ são ditos **linearmente independentes** se a igualdade

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

só for satisfeita quando todos os escalares c_1, c_2, \dots, c_n forem iguais a zero.

Definição 2.8. Os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ são ditos **linearmente dependentes** se existirem escalares c_1, c_2, \dots, c_n , não todos nulos, tais que

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Teorema 2.9. Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são autovalores distintos de uma matriz A , então os autovetores associados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, são linearmente independentes.

Demonstração: A prova do teorema será feita por indução em k .

Se $k = 1$, a afirmação é verdadeira, pois teremos um conjunto unitário com um vetor não nulo. Em símbolos, $c_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ implica em $c_1 = 0$, pois \mathbf{x}_1 é não nulo.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $k - 1$ e provemos para k . Dada a combinação linear

$$c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade pela matriz A , temos

$$c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{k-1}A\mathbf{x}_{k-1} + c_kA\mathbf{x}_k = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + c_k\lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Multiplicando a igualdade (2.6) por λ_k e subtraindo da igualdade (2.7), obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda_k)c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)c_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Por hipótese de indução, os vetores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ são linearmente independentes. Logo, $(\lambda_1 - \lambda_k)c_1 = \cdots = (\lambda_{k-1} - \lambda_k)c_{k-1} = 0$. Como os autovalores são todos diferentes, segue que $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ e isto reduz a igualdade (2.6) a $c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Como \mathbf{x}_k é um vetor não nulo, temos que $c_k = 0$, o que prova o teorema. \square

2.2 Diagonalização de matrizes

Nesta seção veremos como calcular a potência de uma classe de matrizes (as matrizes diagonalizáveis) de uma maneira mais simples, o que será muito útil para aplicar o modelo de Leslie.

Definição 2.10. Uma matriz A de ordem n é **diagonalizável** se existem matrizes P e D , P invertível e D diagonal, tais que $A = PDP^{-1}$.

A fatoração $A = PDP^{-1}$ facilita o cálculo das potências da matriz A , como nos garante a Proposição 2.15, e algumas condições nos autovalores e autovetores da matriz A garantem se ela é diagonalizável, como mostram os resultados a seguir.

Lema 2.11. Uma matriz A de ordem n é invertível se, e somente se, tem n colunas linearmente independentes.

Demonstração: Primeiro, suponhamos que a matriz A seja invertível, o que significa que existe uma matriz A^{-1} tais que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, sendo I a matriz identidade de ordem n .

Sejam $Col_1(A), Col_2(A), \dots, Col_n(A)$ as colunas da matriz A e suponhamos que existam escalares c_1, c_2, \dots, c_n , de modo que

$$c_1 Col_1(A) + c_2 Col_2(A) + \dots + c_n Col_n(A) = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Multiplicando a igualdade (2.8) por A^{-1} pela esquerda, obtemos

$$c_1 A^{-1} Col_1(A) + c_2 A^{-1} Col_2(A) + \dots + c_n A^{-1} Col_n(A) = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Porém, como $A^{-1}A = I$, temos as multiplicações

$$A^{-1} Col_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A^{-1} Col_2(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A^{-1} Col_n(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, da equação (2.9) obtemos

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Disto, segue que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, o que mostra que as colunas de A são vetores linearmente independentes.

Por outro lado, suponhamos que as colunas de A sejam vetores linearmente independentes, logo se

$$c_1 Col_1(A) + c_2 Col_2(A) + \dots + c_n Col_n(A) = \mathbf{0},$$

ou ainda,

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

então $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, o que é equivalente a que o sistema

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = 0 \end{cases}$$

tenha somente a solução nula, logo A é invertível. \square

Teorema 2.12. Uma matriz A de ordem n é diagonalizável se, e somente se, ela tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: Suponhamos que A seja diagonalizável, então existem matrizes P e D , P invertível e D diagonal, tal que $A = PDP^{-1}$, ou seja,

$$AP = PD. \tag{2.10}$$

Consideremos

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

então

$$PD = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Seja $Col_j(P)$, $j = 1, \dots, n$, a j -ésima coluna de P , logo a j -ésima coluna da matriz AP é $ACol_j(P)$ e a j -ésima coluna de PD é $\lambda_j Col_j(P)$.

Então, da igualdade (2.10) segue que

$$ACol_j(P) = \lambda_j Col_j(P), j = 1, \dots, n.$$

Como P é invertível, as colunas de P são linearmente independentes pelo Lema 2.11, portanto, a matriz A tem n autovetores linearmente independentes, que são exatamente as colunas da matriz P e os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz A .

Reciprocamente, suponhamos que A tenha n autovetores linearmente independentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente. Consideremos P a matriz cuja j -ésima coluna é o vetor \mathbf{x}_j , para $j = 1, \dots, n$. Como $A\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j$, temos

$$\begin{aligned} AP &= (\mathbf{Ax}_1 \ \mathbf{Ax}_2 \ \dots \ \mathbf{Ax}_n)_{n \times n} \\ &= (\lambda_1\mathbf{x}_1 \ \lambda_2\mathbf{x}_2 \ \dots \ \lambda_n\mathbf{x}_n)_{n \times n} \\ &= (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n)_{n \times n} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}_{n \times n} \\ &= PD. \end{aligned}$$

Como P tem n colunas linearmente independentes, pelo Lema 2.11 P é invertível, logo $A = PDP^{-1}$ e, portanto, A é diagonalizável. \square

Da demonstração do Teorema 2.12 concluímos que quando uma matriz A é diagonalizável ($A = PDP^{-1}$), as colunas da matriz P são os autovetores da matriz A e os elementos da diagonal principal da matriz D são os autovalores de A .

Teorema 2.13. Se uma matriz A de ordem n tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Demonstração: Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Então, pelo Teorema 2.9, os autovetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ são linearmente independentes. Logo, pelo Teorema 2.12, a matriz A é diagonalizável. \square

Se uma matriz A de ordem n não tem n autovalores distintos, ela ainda pode ser diagonalizável, pois ela pode ter n autovetores linearmente independentes, como pode ser observado no Exemplo 2.14.

Exemplo 2.14. Verifique se a matriz A é diagonalizável,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução: O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(-1 - \lambda)^2 + \lambda = -\lambda^3 - 2\lambda^2.$$

Assim, resolvendo a equação $-\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$, obtemos os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$.

Vamos resolver o sistema $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} (-1 - \lambda)x + z \\ 3x - \lambda y - 3z \\ x + (-1 - \lambda)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\begin{cases} (-1 - \lambda)x + z = 0 \\ 3x - \lambda y - 3z = 0 \\ x + (-1 - \lambda)z = 0 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Substituindo os autovalores, um de cada vez, no sistema de equações (2.11):

a) substituindo o autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ em (2.11) obtemos $x = z$ e y é a variável livre, logo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C}. \quad \text{Assim, temos que } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ são autovetores de } A \text{ associados ao autovalor } \lambda_1 = \lambda_2 = 0;$$

b) substituindo o autovalor $\lambda_3 = -2$ em (2.11) temos que $x = -z$, $y = 3z$ e z é a variável

$$\text{livre, logo } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad \text{Assim, temos que } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ é um}$$

autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_3 = -2$.

Observe que os autovetores \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 são linearmente independentes.

Como os autovalores da matriz A são os elementos da diagonal principal da matriz D e os autovetores da matriz A são as colunas da matriz P , podemos escrever as matrizes D e P :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $AP = PD$ e P é invertível, segue que A é diagonalizável. Observe que mesmo a matriz A não tendo três autovalores distintos, ainda assim é possível diagonalizá-la, pois conseguimos obter três autovetores linearmente independentes.

Proposição 2.15. Se A é uma matriz diagonalizável, ou seja, $A = PDP^{-1}$, então $A^k = PD^kP^{-1}$, $k \geq 1$.

Demonstração: A demonstração será feita por indução em k .

Se $k = 1$ a igualdade é válida. Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para k e provemos para $k + 1$.

Pela hipótese de indução, $A^k = PD^kP^{-1}$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por A , obtemos

$$A^k A = PD^k P^{-1} A$$

$$A^{k+1} = PD^k P^{-1} P D P^{-1} = PD^{k+1} P^{-1}.$$

□

3 MODELO DE LESLIE

Neste capítulo será feito um estudo do modelo matricial de Leslie e suas principais características. Como um exemplo, aplicaremos o modelo de Leslie para a população feminina de Minas Gerais.

3.1 Introdução ao modelo de Leslie

O modelo de Leslie é um modelo matemático baseado em matrizes, formalizado por Patrick Holt Leslie, em 1945, no artigo “On the use of matrices in certain population mathematics” e utilizado para prever o crescimento e a distribuição de uma população feminina dividida em faixas etárias, em função do tempo. De acordo com Anton e Rorres (2012), o modelo de Leslie é muito utilizado por demógrafos para estudar o comportamento das populações ao longo do tempo e apesar do modelo considerar apenas o número de fêmeas da espécie, é muito útil, uma vez que o número de fêmeas e machos, nas populações, normalmente são bem próximos.

O modelo requer que a população feminina seja dividida em faixas etárias de mesmo tamanho, ou seja, com o mesmo número de anos ou outra unidade de tempo conveniente e, para isso, deve-se supor um tempo máximo de sobrevivência da espécie. Também é necessário ter dados sobre a população inicial e sobre a taxa de fertilidade e sobrevivência em cada faixa etária. A análise é realizada por meio da multiplicação da chamada matriz de Leslie pela matriz coluna contendo a distribuição inicial da população feminina em faixas etárias, obtendo-se então, a distribuição da população no tempo seguinte, e assim, sucessivamente. A duração entre dois tempos sucessivos de observação deve ser igual à duração da faixa etária.

Vejamos o Exemplo 3.1 para maior compreensão do modelo.

Exemplo 3.1. Uma população de animais é formada por 1.000 fêmeas na faixa etária de 0 a 1 ano, 800 fêmeas na faixa etária de 1 a 2 anos e 500 fêmeas na faixa etária de 2 a 3 anos. Considere que esses animais vivam no máximo por três anos. Suponha que as fêmeas de 0 a 1 ano não se reproduzam, as fêmeas de 1 a 2 anos tenham, em média, duas filhas por ano e as fêmeas de 2 a 3 anos tenham, em média, uma filha por ano. Assuma que 70% das fêmeas de 0 a 1 ano sobrevivam e mudem para a faixa etária de 1 a 2 anos e 50% das fêmeas de 1 a 2 anos sobrevivam e passem para a faixa etária de 2 a 3 anos. Como essa espécie de animal não vive mais que três anos, as fêmeas da faixa etária de 2 a 3 anos não sobrevivem para o próximo ano. Após um ano, qual será o número de fêmeas?

Solução: Depois de um ano teremos:

- na primeira faixa etária, as filhas nascidas das mães da segunda faixa etária ($800 \cdot 2 = 1.600$) e as filhas nascidas das mães da terceira faixa etária ($500 \cdot 1 = 500$), ou seja, teremos $1.600 + 500 = 2.100$ fêmeas;
- na segunda faixa etária teremos 700 fêmeas ($1.000 \cdot 0,7 = 700$), referentes às fêmeas que sobreviveram da primeira para a segunda faixa etária;
- na terceira faixa etária teremos 400 fêmeas ($800 \cdot 0,5 = 400$), correspondentes às fêmeas que sobreviveram da segunda para a terceira faixa etária.

Assim, após um ano, haverá 3.200 fêmeas.

Os cálculos do Exemplo 3.1 podem ser feitos através da multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.000 \\ 800 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1.000 + 2 \cdot 800 + 1 \cdot 500 \\ 0,7 \cdot 1.000 + 0 \cdot 800 + 0 \cdot 500 \\ 0 \cdot 1.000 + 0,5 \cdot 800 + 0 \cdot 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.100 \\ 700 \\ 400 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Seja L a matriz 3×3 na igualdade (3.1), x_0 o vetor que representa a população inicial de fêmeas e x_1 o vetor que contém a população de fêmeas após um ano, logo $Lx_0 = x_1$. Supondo que a taxa de sobrevivência e o número médio de filhas por fêmea se mantenham ao longo do tempo, podemos calcular, de maneira semelhante, a população depois de dois anos e, para isto, basta efetuar $Lx_1 = x_2$. Observe:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.100 \\ 700 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.800 \\ 1.470 \\ 350 \end{pmatrix}.$$

O vetor x_2 , resultante da multiplicação Lx_1 , indica que depois de dois anos a primeira faixa etária terá 1.800 fêmeas, a segunda faixa etária, 1.470 fêmeas e a terceira faixa etária, 350 fêmeas. O total de fêmeas, após dois anos, será de 3.620.

Substituindo a equação $Lx_0 = x_1$ na equação $Lx_1 = x_2$, obtemos:

$$x_2 = Lx_1 = L(Lx_0) = L^2 x_0.$$

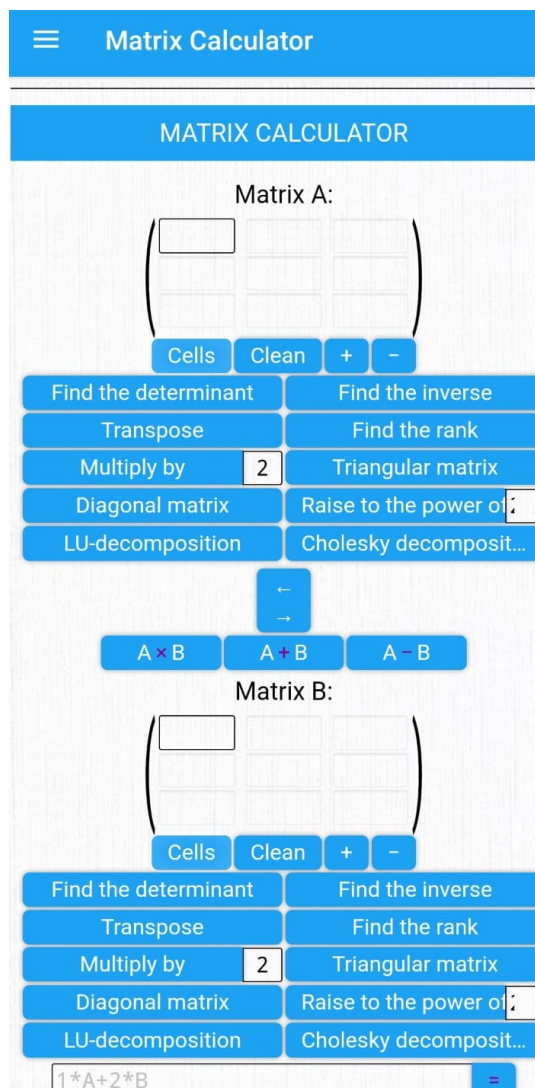
Dado isso, para calcular x_2 , o vetor que fornece a população após dois anos, não é preciso conhecer x_1 , o vetor da população após um ano, apenas precisamos de x_0 , o vetor da população inicial, e a matriz L . Assim, de forma geral,

$$x_t = L^t x_0,$$

no qual t é o tempo em anos decorridos desde a observação da população inicial.

Para ter uma ideia mais geral do que acontecerá com essa população no decorrer do tempo, vamos determinar os valores da distribuição etária para $t = 5, 10, 15, 20$ e 25 anos. Para realizar os cálculos pode-se usar softwares computacionais ou aplicativos de telefone celular. Neste trabalho, usamos o aplicativo Matrix Calculator (Figura 3.1). Esse aplicativo é simples de usar, gratuito e requer internet apenas para fazer o download, sendo também possível sua utilização de forma online por meio do link <https://matrixcalc.org/>.

Figura 3.1 – Tela inicial do aplicativo Matrix Calculator.



Fonte: Da autora (2024).

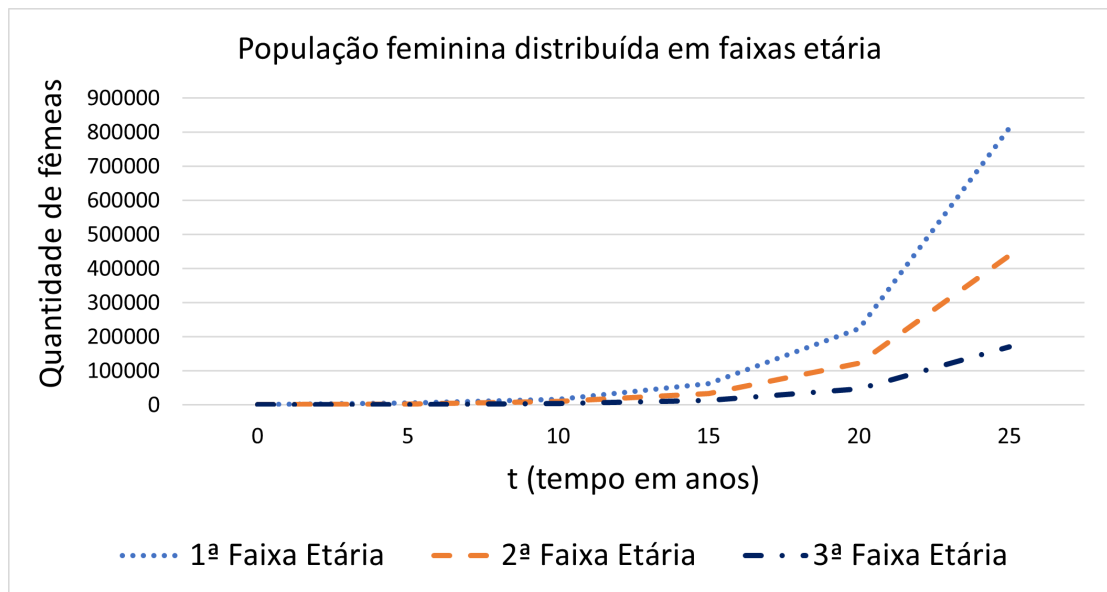
O vetor da distribuição etária para $t = 5, 10, 15, 20$ e 25 anos é:

$$x_5 = \begin{pmatrix} 5.236 \\ 2.278,5 \\ 1.151,5 \end{pmatrix}, x_{10} = \begin{pmatrix} 16.718,68 \\ 9.698,84 \\ 3.438,58 \end{pmatrix}, x_{15} = \begin{pmatrix} 62.840,66 \\ 33.285,34 \\ 13.237,8 \end{pmatrix},$$

$$x_{20} = \begin{pmatrix} 223.833,4 \\ 122.080,28 \\ 46.804,14 \end{pmatrix} \text{ e } x_{25} = \begin{pmatrix} 811.011,58 \\ 438.205,11 \\ 169.992,29 \end{pmatrix}.$$

Agora, observemos a projeção dessa população feminina no decorrer de vinte e cinco anos na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Gráfico da população feminina distribuída em faixas etárias.



Fonte: Da autora (2024).

Na Tabela 3.1, apresentamos o número de fêmeas em cada faixa etária e a distribuição etária relativa, isto é, o número de fêmeas de cada faixa etária dividido pelo número total de fêmeas, na forma percentual.

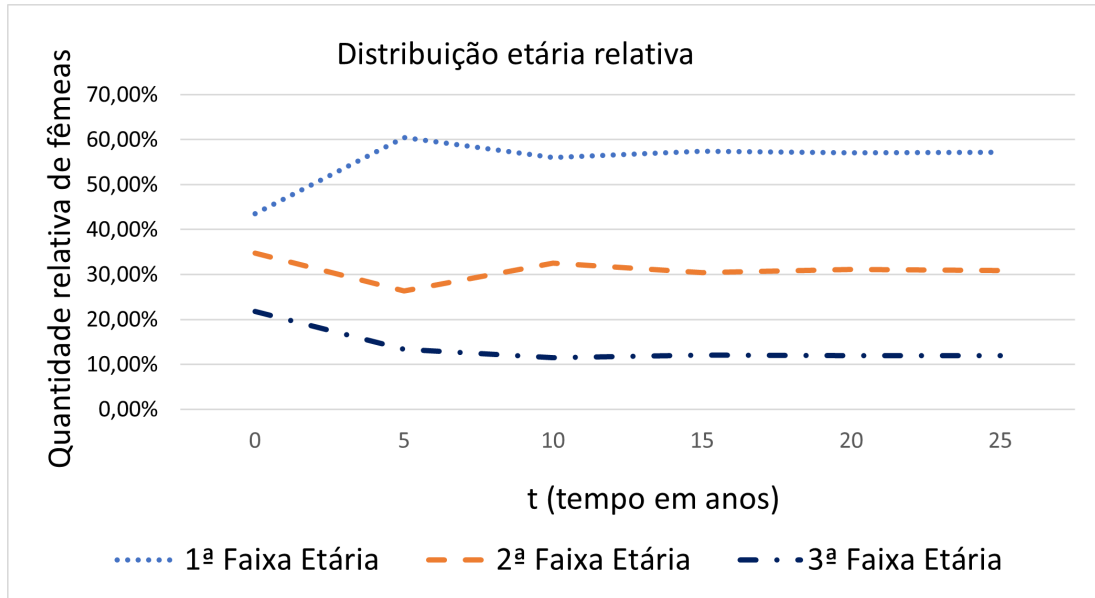
Tabela 3.1 – Distribuição etária.

Distribuição Etária						
	x_0	x_5	x_{10}	x_{15}	x_{20}	x_{25}
1ª Faixa Etária	1.000	5.236	16.718,68	62.840,66	223.833,4	811.011,58
2ª Faixa Etária	800	2.278,5	9.698,84	33.285,34	122.080,28	438.205,11
3ª Faixa Etária	500	1.151,5	3.438,58	13.237,8	46.804,14	169.992,29
Total	2.300	8.666	29.856,1	109.363,8	392.717,82	1.419.208,98
Distribuição Etária Relativa						
	x_0	x_5	x_{10}	x_{15}	x_{20}	x_{25}
1ª Faixa Etária	43,48%	60,42%	56%	57,46%	57%	57,14%
2ª Faixa Etária	34,78%	26,29%	32,48%	30,44%	31,08%	30,88%
3ª Faixa Etária	21,74%	13,29%	11,52%	12,10%	11,92%	11,98%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Da autora (2024).

Na Figura 3.3 temos o gráfico da distribuição etária relativa ao longo de vinte e cinco anos.

Figura 3.3 – Gráfico da população feminina relativa distribuída em faixas etárias.



Fonte: Da autora (2024).

Tanto na Tabela 3.1 quanto na Figura 3.3 podemos perceber que a distribuição etária relativa tende a se estabilizar com o passar do tempo. A primeira faixa etária estabiliza em aproximadamente 57%, a segunda faixa etária em 31% e a terceira faixa etária em 12%. Diante disso, é válido indagar se essa estabilidade a longo prazo sempre ocorre. No decorrer deste trabalho, vamos constatar que para isso ocorrer a matriz L , que será chamada matriz de Leslie, deve satisfazer algumas condições.

3.2 Construção da matriz de Leslie

Nesta seção vamos estudar a construção da matriz de Leslie para o crescimento populacional feminino.

Consideremos que a parte feminina de uma população seja dividida em n faixas etárias e que viva, no máximo, K unidades de tempo. A numeração e o intervalo de idade de cada faixa etária estão representados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Construção das faixas etárias.

Faixa etária	Intervalo de idade
1	$\left[0, \frac{K}{n}\right)$
2	$\left[\frac{K}{n}, \frac{2K}{n}\right)$
3	$\left[\frac{2K}{n}, \frac{3K}{n}\right)$
\vdots	\vdots
$n - 1$	$\left[\frac{(n-2)K}{n}, \frac{(n-1)K}{n}\right)$
n	$\left[\frac{(n-1)K}{n}, K\right]$

Fonte: Adaptado de Anton e Rorres (2012).

Se a quantidade inicial de fêmeas de uma população é conhecida, ou seja, é conhecido o número de fêmeas em cada faixa etária no tempo $t_0 = 0$, usa-se a notação x_{1,t_0} para o número inicial de fêmeas na primeira faixa etária e, de forma geral, x_{n,t_0} para o número inicial de fêmeas na última faixa etária. Esses n números formam o chamado **vetor de distribuição etária inicial**, representado por \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{1,t_0} \\ x_{2,t_0} \\ x_{3,t_0} \\ \vdots \\ x_{n,t_0} \end{pmatrix}.$$

A fim de facilitar o problema a ser estudado, a população é observada em intervalos discretos de tempo t_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, e como a duração entre dois tempos consecutivos deve ser igual a duração da faixa etária, de forma geral, temos

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{K}{n}, t_2 = \frac{2K}{n}, t_3 = \frac{3K}{n}, \dots, t_i = \frac{iK}{n}, \dots$$

Vamos denotar por \mathbf{x}_i o **vetor de distribuição etária** no tempo t_i , $i = 0, 1, 2, 3, \dots$,

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_{1,t_i} \\ x_{2,t_i} \\ x_{3,t_i} \\ \vdots \\ x_{n,t_i} \end{pmatrix},$$

sendo x_{j,t_i} o número de fêmeas na faixa etária j no tempo t_i , $j = 1, \dots, n$ e $i = 0, 1, \dots$

De acordo com Anton e Rorres (2012, p. 676), no decorrer do tempo, o número de fêmeas em cada uma das faixas etárias muda devido a três processos biológicos: nascimento, envelhecimento e morte. O processo de nascimento pode ser descrito pelo número médio de filhas nascidas por fêmea em cada faixa etária, o processo de envelhecimento é estudado observando a população em intervalos de tempo discretos e o processo de morte pode ser descrito pela fração de fêmeas que sobrevive e passa para a faixa etária seguinte.

Segundo Leslie (1945, p. 183), para simplificar o problema, consideramos que a taxa de sobrevivência e o número médio de fêmeas nascidas em cada faixa etária da população observada, permaneçam constantes por um período de tempo.

Vamos considerar a_j o número médio de fêmeas nascidas por fêmea na faixa etária j , com $j = 1, 2, \dots, n$. Temos que $a_j \geq 0$, e quando $a_j > 0$ diz-se que a faixa etária é fértil. Precisamos considerar pelo menos um $a_j \neq 0$ para que exista algum nascimento.

Denotaremos por b_j a taxa de sobrevivência, ou seja, a porcentagem de fêmeas da faixa etária j que sobrevive e muda para a faixa etária $j+1$, com $j = 1, 2, \dots, n-1$. Assim, $0 < b_j \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ e $b_n = 0$, pois nenhuma fêmea sobreviverá além da n -ésima faixa etária.

Observemos que a quantidade de fêmeas na primeira faixa etária, no tempo t_{i+1} , é composta pelas filhas nascidas entre o tempo t_i e t_{i+1} e pode ser expressa por

$$x_{1,t_{i+1}} = a_1x_{1,t_i} + a_2x_{2,t_i} + a_3x_{3,t_i} + \dots + a_nx_{n,t_i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

A quantidade de fêmeas nas demais faixas etárias, no tempo t_{i+1} , pode ser obtida pela equação

$$x_{j,t_{i+1}} = b_{j-1}x_{j-1,t_i}, \quad i = 0, 1, \dots \text{ e } j = 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

É importante salientar que na primeira faixa etária contamos os nascimentos e nas demais faixas etárias contamos os sobreviventes.

Com as igualdades (3.2) e (3.3) podemos escrever

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{pmatrix} x_{1,t_{i+1}} \\ x_{2,t_{i+1}} \\ x_{3,t_{i+1}} \\ x_{4,t_{i+1}} \\ \vdots \\ x_{n,t_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_{1,t_i} + a_2 x_{2,t_i} + a_3 x_{3,t_i} + \cdots + a_n x_{n,t_i} \\ b_1 x_{1,t_i} \\ b_2 x_{2,t_i} \\ b_3 x_{3,t_i} \\ \vdots \\ b_{n-1} x_{n-1,t_i} \end{pmatrix}.$$

O vetor de distribuição etária \mathbf{x}_{i+1} pode ser decomposto como a multiplicação de uma matriz de ordem n e o vetor de distribuição etária \mathbf{x}_i , ou seja,

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,t_i} \\ x_{2,t_i} \\ x_{3,t_i} \\ x_{4,t_i} \\ \vdots \\ x_{n,t_i} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

A matriz de ordem n , em (3.4), é chamada **matriz de Leslie** e será denotada por L , assim $\mathbf{x}_{i+1} = L\mathbf{x}_i$.

A matriz de Leslie L é composta, em sua primeira linha, pelo número médio de fêmeas nascidas por fêmeas em cada faixa etária. A partir da segunda linha, a matriz contém a taxa de sobrevivência de cada faixa etária, isto é, o número médio de nascimentos está na primeira linha, as probabilidades de mudança de faixa etária ocupam a primeira subdiagonal e todas as outras entradas são nulas.

Da expressão $\mathbf{x}_{i+1} = L\mathbf{x}_i$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= L\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= L\mathbf{x}_1 = L^2\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{i+1} &= L\mathbf{x}_i = L^{i+1}\mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{x}_i = L^i \mathbf{x}_0. \quad (3.5)$$

Da equação (3.5), concluímos que, para projetar a distribuição etária de uma população feminina em qualquer tempo t_i , não é necessário conhecer a distribuição etária em um tempo anterior t_{i-1} , basta conhecer a matriz de Leslie e o vetor de distribuição etária inicial.

3.3 Comportamento do modelo de Leslie ao longo do tempo

O objetivo desta seção é mostrar que se a matriz de Leslie tem um autovalor dominante então, para tempo suficientemente grande, a proporção das fêmeas nas faixas etárias tende a se estabilizar.

Para isso precisamos do polinômio característico da matriz de Leslie, que é dado por

$$p(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Proposição 3.2. Se L é a matriz de Leslie de ordem n , então o polinômio característico de L é expresso por

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} [a_1 \lambda^{n-1} + a_2 b_1 \lambda^{n-2} + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} + \dots + a_{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-2} \lambda + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}]. \quad (3.6)$$

Demonstração: Faremos a demonstração usando o princípio de indução finita. Para $n = 2$, temos

$$p(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1 \lambda - a_2 b_1.$$

Portanto, (3.6) é válido para $n = 2$.

Suponhamos que (3.6) seja válido para matrizes de Leslie de ordem n , isto é,

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(L - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} [a_1 \lambda^{n-1} + a_2 b_1 \lambda^{n-2} + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} + \\
&\quad + \dots + a_{n-1} b_1 \dots b_{n-2} \lambda + a_n b_1 \dots b_{n-1}]
\end{aligned}$$

e provemos para $n + 1$.

Para isto, vamos considerar a matriz de Leslie de ordem $n + 1$ e calcular seu determinante utilizando a última coluna. Então,

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(L - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & -\lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & b_{n-1} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+(n+1)} a_{n+1} \begin{vmatrix} b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{vmatrix} +
\end{aligned}$$

$$+(-1)^{(n+1)+(n+1)}(-\lambda) \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Usando a hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^{n+2} a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_n + \\ &\quad + (-1)^{2n+3} \lambda \{ (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} [a_1 \lambda^{n-1} + a_2 b_1 \lambda^{n-2} + \\ &\quad + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} + \dots + a_{n-1} b_1 \dots b_{n-2} \lambda + a_n b_1 \dots b_{n-1}] \} \\ &= (-1)^{n+2} a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_n + \\ &\quad + (-1)^{3n+3} \lambda^{n+1} + (-1)^{3n+4} [a_1 \lambda^n + a_2 b_1 \lambda^{n-1} + \\ &\quad + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 \dots b_{n-2} \lambda^2 + a_n b_1 \dots b_{n-1} \lambda] \\ &= (-1)^{n+2} a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_n + \\ &\quad + (-1)^{n+1} (-1)^{2n+2} \lambda^{n+1} + (-1)^{n+2} (-1)^{2n+2} [a_1 \lambda^n + a_2 b_1 \lambda^{n-1} + \\ &\quad + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 \dots b_{n-2} \lambda^2 + a_n b_1 \dots b_{n-1} \lambda] \\ &= (-1)^{n+2} a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_n + \\ &\quad + (-1)^{n+1} \lambda^{n+1} + (-1)^{n+2} [a_1 \lambda^n + a_2 b_1 \lambda^{n-1} + \\ &\quad + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 \dots b_{n-2} \lambda^2 + a_n b_1 \dots b_{n-1} \lambda] \\ &= (-1)^{n+1} \lambda^{n+1} + (-1)^{n+2} [a_1 \lambda^n + a_2 b_1 \lambda^{n-1} + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-2} + \\ &\quad + \dots + a_{n-1} b_1 \dots b_{n-2} \lambda^2 + a_n b_1 \dots b_{n-1} \lambda + a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_n]. \quad \square \end{aligned}$$

No que segue, sem perda de generalidade, iremos considerar n par. Desta forma, o polinômio característico da matriz de Leslie é igual a

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - \dots - a_{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-2} \lambda - a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}. \quad (3.7)$$

Com o objetivo de analisar as raízes do polinômio característico de L , para $\lambda \neq 0$, podemos escrever

$$\frac{p(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - \left(\frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-2}}{\lambda^{n-1}} + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n} \right). \quad (3.8)$$

Considerando

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-2}}{\lambda^{n-1}} + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n},$$

podemos reescrever (3.8) como

$$\frac{p(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - q(\lambda). \quad (3.9)$$

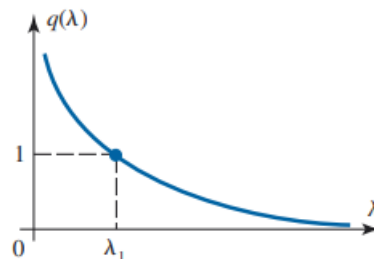
Proposição 3.3. A matriz de Leslie tem um único autovalor positivo.

Demonstração: Seja $p(\lambda)$ o polinômio característico da matriz de Leslie. Sabemos que $b_j > 0$, $j = 1, \dots, n-1$ e $a_j \geq 0$, com pelos menos um $a_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, logo

$$q'(\lambda) = -\frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{2a_2 b_1}{\lambda^3} - \frac{3a_3 b_1 b_2}{\lambda^4} - \dots - \frac{(n-1)a_{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-2}}{\lambda^n} - \frac{na_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^{n+1}} < 0,$$

para qualquer $\lambda > 0$, de onde segue que q é uma função decrescente para $\lambda > 0$. Observemos que a função q tende a zero, quando λ tende ao infinito, e q tende ao infinito, quando λ tende a zero pela direita (Figura 3.4).

Figura 3.4 – Comportamento da função q .



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 679).

Isto significa que existe um único valor de $\lambda > 0$, digamos λ_1 , tal que $q(\lambda_1) = 1$ e, portanto, $p(\lambda_1) = 0$. Logo, a matriz de Leslie possui um único autovalor positivo λ_1 . \square

Definição 3.4. Temos que r é uma raiz de multiplicidade n , com $n \geq 1$, da equação $p(x) = 0$, quando $p(x) = (x - r)^n q(x)$, $q(r) \neq 0$. Se r tem multiplicidade 1, dizemos que r é uma raiz simples.

Para mostrar que o autovalor positivo da matriz de Leslie tem multiplicidade um precisamos do Lema 3.5.

Lema 3.5. A raiz λ_1 de um polinômio $p(\lambda)$ é simples se, e somente se, $p'(\lambda_1) \neq 0$.

Demonstração: Seja $p(\lambda)$ um polinômio qualquer cujas raízes distintas são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, então

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{k_i}. \quad (3.10)$$

Suponhamos inicialmente que λ_1 seja uma raiz simples do polinômio $p(\lambda)$, isto é, $k_1 = 1$, assim,

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{k_i}. \quad (3.11)$$

Calculando a derivada em (3.11), obtemos

$$p'(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{k_i} + (\lambda - \lambda_1)[(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{k_i}]'. \quad (3.12)$$

Substituindo λ por λ_1 na expressão (3.12), temos

$$p'(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda_1 - \lambda_i)^{k_i}.$$

Assim, como $\lambda_1 \neq \lambda_i$, para todo $i \neq 1$, segue que $p'(\lambda_1) \neq 0$.

Agora, suponhamos que $p'(\lambda_1) \neq 0$. Precisamos provar que $k_1 = 1$. Suponhamos, por absurdo, que $k_1 \geq 2$. Calculando a derivada do polinômio $p(\lambda)$ em (3.10), temos

$$p'(\lambda) = k_1(\lambda - \lambda_1)^{k_1-1}[(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{k_i}] + (\lambda - \lambda_1)^{k_1}[(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{k_i}]'. \quad (3.13)$$

Substituindo λ por λ_1 em (3.13), concluímos que $p'(\lambda_1) = 0$, o que é uma contradição. Logo, $k_1 = 1$ e, conseqüentemente, λ_1 é uma raiz simples do polinômio $p(\lambda)$. \square

Teorema 3.6. O único autovalor positivo da matriz de Leslie tem multiplicidade um e os autovetores associados são múltiplos de um vetor com todas as entradas positivas.

Demonstração: Sejam L a matriz de Leslie, λ_1 seu autovalor positivo e $p(\lambda)$ seu polinômio característico. De (3.9) temos que

$$p(\lambda) = (1 - q(\lambda))\lambda^n, \text{ para } \lambda \neq 0.$$

Para mostrar que o autovalor λ_1 tem multiplicidade um, usaremos o Lema 3.5, isto é, provaremos que $p'(\lambda_1) \neq 0$. Calculando a derivada de $p(\lambda)$, obtemos

$$p'(\lambda) = -q'(\lambda)\lambda^n + (1 - q(\lambda))n\lambda^{n-1}. \quad (3.14)$$

Substituindo λ por λ_1 em (3.14), temos

$$p'(\lambda_1) = -q'(\lambda_1)\lambda_1^n + (1 - q(\lambda_1))n\lambda_1^{n-1}.$$

Como $p(\lambda_1) = 0$, segue que $q(\lambda_1) = 1$, logo

$$p'(\lambda_1) = -q'(\lambda_1)\lambda_1^n.$$

Assim, para provar que $p'(\lambda_1) \neq 0$, precisamos mostrar que $q'(\lambda_1) \neq 0$, uma vez que $\lambda_1 > 0$. Calculando a derivada de $q(\lambda)$ e substituindo λ por λ_1 , obtemos

$$q'(\lambda_1) = -\frac{a_1}{\lambda_1^2} - \frac{2a_2b_1}{\lambda_1^3} - \frac{3a_3b_1b_2}{\lambda_1^4} - \dots - \frac{(n-1)a_{n-1}b_1b_2\dots b_{n-2}}{\lambda_1^n} - \frac{na_nb_1b_2\dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n+1}}.$$

Como todos os b_i são positivos, $i = 1, \dots, n-1$, e $a_j \geq 0$, com pelo menos um a_j não nulo, $j = 1, \dots, n$, segue que $q'(\lambda_1) \neq 0$, logo $p'(\lambda_1) \neq 0$ e, portanto, λ_1 tem multiplicidade um.

Consideremos agora $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ um autovetor de L associado ao autovalor λ_1 .

Desta forma, $Lv_1 = \lambda_1 v_1$, que na forma matricial, corresponde a

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

e cujo sistema correspondente é

$$\begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n = \lambda_1 v_1 \\ b_1 v_1 = \lambda_1 v_2 \\ b_2 v_2 = \lambda_1 v_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} v_{n-1} = \lambda_1 v_n \end{cases}. \quad (3.15)$$

A segunda linha do sistema (3.15) pode ser escrita como

$$v_2 = \frac{b_1 v_1}{\lambda_1}. \quad (3.16)$$

Substituindo a equação (3.16) na terceira linha do sistema (3.15), obtemos

$$v_3 = \frac{b_1 b_2 v_1}{\lambda_1^2}.$$

Continuando as substituições até a última linha do sistema, concluímos que

$$v_n = \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1} v_1}{\lambda_1^{n-1}}.$$

Desta forma, o autovetor v_1 pode ser expresso em função de v_1 como

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{b_1 v_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2 v_1}{\lambda_1^2} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1} v_1}{\lambda_1^{n-1}} \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Por fim, todo autovetor associado ao autovalor λ_1 é um múltiplo do autovetor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

que possui todas as entradas positivas. \square

Teorema 3.7. Se λ_1 é o único autovalor positivo da matriz de Leslie L e λ_k é qualquer outro autovalor real ou complexo de L , então $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.

Demonstração: Seja $p(\lambda) = (1 - q(\lambda))\lambda^n$ o polinômio característico de L , sendo

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n},$$

para $\lambda \neq 0$. Como λ_1 é um autovalor de L , temos que $p(\lambda_1) = 0$ de modo que $q(\lambda_1) = 1$.

Então,

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^n} = 1.$$

Seja $\lambda_k \neq 0$ um outro autovalor da matriz L , então $q(\lambda_k) = 1$, isto é,

$$\frac{a_1}{\lambda_k} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_k^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_k^n} = 1. \quad (3.18)$$

A forma polar do número λ_k é dada por

$$\lambda_k = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \text{ sendo } r = |\lambda_k|. \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.19) na equação (3.18), obtemos

$$\frac{a_1}{r(\cos\theta + isen\theta)} + \frac{a_2b_1}{r^2(\cos\theta + isen\theta)^2} + \dots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{r^n(\cos\theta + isen\theta)^n} = 1,$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{r}(\cos\theta + isen\theta)^{-1} + \frac{a_2b_1}{r^2}(\cos\theta + isen\theta)^{-2} + \\ & + \dots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}(\cos\theta + isen\theta)^{-n} = 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Usando o Teorema de Moivre, que estabelece $(\cos\theta + isen\theta)^n = \cos(n\theta) + isen(n\theta)$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, podemos escrever (3.20) como

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{r}(\cos(-\theta) + isen(-\theta)) + \frac{a_2b_1}{r^2}(\cos(-2\theta) + isen(-2\theta)) + \\ & + \dots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}(\cos(-n\theta) + isen(-n\theta)) = 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Usando as identidades trigonométricas $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $sen(-\theta) = -sen(\theta)$ em (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{r}(\cos(\theta) - isen(\theta)) + \frac{a_2b_1}{r^2}(\cos(2\theta) - isen(2\theta)) + \\ & + \dots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}(\cos(n\theta) - isen(n\theta)) = 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Igualando a parte real e a parte imaginária na equação (3.22), temos

$$\frac{a_1}{r}\cos(\theta) + \frac{a_2b_1}{r^2}\cos(2\theta) + \dots + \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}\cos(n\theta) = 1 \quad (3.23)$$

e

$$-\frac{a_1}{r}sen(\theta) - \frac{a_2b_1}{r^2}sen(2\theta) - \dots - \frac{a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}sen(n\theta) = 0.$$

Como $b_j > 0$, $j = 1, \dots, n-1$, $a_j \geq 0$, com pelo menos um $a_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, e $|\cos(n\theta)| \leq 1$, segue de (3.23)

$$\begin{aligned}
|1| &= \left| \frac{a_1}{r} \cos(\theta) + \frac{a_2 b_1}{r^2} \cos(2\theta) + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n} \cos(n\theta) \right| \\
&\leq \left| \frac{a_1}{r} \cos(\theta) \right| + \left| \frac{a_2 b_1}{r^2} \cos(2\theta) \right| + \dots + \left| \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n} \cos(n\theta) \right| \\
&\leq \frac{a_1}{r} |\cos(\theta)| + \frac{a_2 b_1}{r^2} |\cos(2\theta)| + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n} |\cos(n\theta)| \\
&\leq \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 b_1}{r^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$1 \leq \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 b_1}{r^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n},$$

e, portanto, $r \leq \lambda_1$, pois

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^n} = 1 \leq \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 b_1}{r^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}.$$

Como $|\lambda_k| = r$, concluímos que $|\lambda_k| \leq \lambda_1$. □

Definição 3.8. Um autovalor λ_1 de uma matriz A é chamado autovalor dominante se $|\lambda| < \lambda_1$, para todo autovalor λ de A .

Teorema 3.9 (Autovalor dominante). Se duas entradas sucessivas a_j e a_{j+1} da primeira linha da matriz de Leslie L são não nulas, então o autovalor positivo λ_1 de L é dominante.

A demonstração do Teorema 3.9 pode ser encontrada em Mesquita (2011).

Teorema 3.10. Sejam L uma matriz de Leslie com duas entradas sucessivas a_j e a_{j+1} não nulas na primeira linha e λ_1 seu autovalor positivo. Se \mathbf{x}_i é o vetor distribuição etária no tempo t_i , então, após um período grande de tempo,

$$\mathbf{x}_i \approx \lambda_1 \mathbf{x}_{i-1}.$$

Demonstração: Vamos demonstrar apenas para o caso em que L seja uma matriz diagonalizável. Como L é diagonalizável, do Teorema 2.12 segue que L possui n autovetores, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, linearmente independentes.

Consideremos P a matriz em que as colunas são os autovetores de L ,

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}.$$

Assim, a diagonalização de L é dada por

$$L = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

sendo λ_k os autovalores associados a \mathbf{v}_k , com $k = 1, \dots, n$.

Pela Proposição 2.15, podemos escrever

$$L^i = P \begin{pmatrix} \lambda_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^i \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (3.24)$$

para todo $i = 0, 1, 2, \dots$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.24) pelo vetor de distribuição etária inicial \mathbf{x}_0 , temos

$$L^i \mathbf{x}_0 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^i \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0.$$

Como $\mathbf{x}_i = L^i \mathbf{x}_0$, obtemos

$$\mathbf{x}_i = P \begin{pmatrix} \lambda_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^i \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0,$$

logo

$$\frac{1}{\lambda_1^i} \mathbf{x}_i = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^i \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (3.25)$$

Temos que $\left| \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right| < 1$, com $k = 2, 3, \dots, n$, pois λ_1 é o autovalor dominante de L . Logo, para cada $k = 2, 3, \dots, n$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right|^i = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^i = 0.$$

Portanto, calculando o limite, com i tendendo ao infinito, em ambos os lados da equação (3.25), temos

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda_1^i} \mathbf{x}_i \right] &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^i \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0 \right] \\ &= P \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^i \end{pmatrix} \right] P^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & \dots & v_{n2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & v_{3n} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como a matriz P^{-1} tem ordem n e a matriz \mathbf{x}_0 tem ordem $n \times 1$, o produto $P^{-1} \mathbf{x}_0$ resultará em uma matriz de ordem $n \times 1$, digamos $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$. Logo, decorre da igualdade (3.26),

que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda_1^i} \mathbf{x}_i \right] = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ v_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_{11} \\ a_{11}v_{12} \\ \vdots \\ a_{11}v_{1n} \end{pmatrix}.$$

Denotando a_{11} por a , temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda_1^i} \mathbf{x}_i \right] = a\mathbf{v}_1. \quad (3.27)$$

Da equação (3.27) obtemos, para valores grandes de i , que

$$\mathbf{x}_i \approx a\lambda_1^i \mathbf{v}_1. \quad (3.28)$$

De (3.28), podemos escrever

$$\mathbf{x}_{i-1} \approx a\lambda_1^{i-1} \mathbf{v}_1,$$

ou ainda,

$$\mathbf{v}_1 \approx \frac{\mathbf{x}_{i-1}}{a\lambda_1^{i-1}}. \quad (3.29)$$

Por fim, de (3.28) e (3.29) obtemos

$$\mathbf{x}_i \approx a\lambda_1^i \frac{\mathbf{x}_{i-1}}{a\lambda_1^{i-1}},$$

ou seja,

$$\mathbf{x}_i \approx \lambda_1 \mathbf{x}_{i-1}. \quad \square$$

A expressão $\mathbf{x}_i \approx \lambda_1 \mathbf{x}_{i-1}$ significa que $(\lambda_1 - 1) \cdot 100$ é a porcentagem de crescimento da população a cada período de tempo, para $\lambda_1 > 1$, e $(1 - \lambda_1) \cdot 100$ é a porcentagem de decréscimo a cada período de tempo, para $\lambda_1 < 1$.

Além disso, para valores grandes de tempo, o vetor de distribuição etária é aproximadamente um múltiplo constante do vetor de distribuição etária do tempo anterior, em que a constante é o autovalor dominante da matriz de Leslie. E, como podemos observar, se $\lambda_1 > 1$, a

população aumenta ao longo do tempo, se $\lambda_1 < 1$, a população diminui e se $\lambda_1 = 1$, a população se mantém estável.

Exemplo 3.11. (adaptado de Poole (2011, p. 245)) Suponha que as fêmeas de uma certa população, divididas em três faixas etárias com duração de um ano, vivam no máximo por três anos. Inicialmente, há 40 fêmeas na primeira faixa etária de 0 a 1 ano, 40 fêmeas na segunda faixa etária de 1 a 2 anos e 20 fêmeas na terceira faixa etária de 2 a 3 anos. Suponha que as fêmeas de 0 a 1 ano não se reproduzam, cada fêmea de 1 a 2 anos tenha em média 4 filhas e cada fêmea de 2 a 3 anos tenha em média 3 filhas. Considere que 50% das fêmeas de 0 a 1 ano sobrevivam e passem para a faixa etária de 1 a 2 anos e 25% das fêmeas de 1 a 2 anos sobrevivam e mudem para a faixa etária de 2 a 3 anos. Após um ano, qual será o número de fêmeas?

Solução: Vamos escrever \mathbf{x}_0 , o vetor de distribuição etária inicial, e usar (3.4) para escrever a matriz de Leslie correspondente a essa população. Assim,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ e } L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da igualdade $\mathbf{x}_i = L^i \mathbf{x}_0$, podemos determinar \mathbf{x}_1 , a distribuição etária da população após um ano,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Portanto, após um anos há 220 fêmeas entre 0 a 1 ano, 20 fêmeas entre 1 a 2 anos e 10 fêmeas entre 2 a 3 anos.

Para compreender como essa população se comportará com o passar do tempo, vamos calcular os valores da distribuição etária até 30 anos, ou seja, para $i = 2, \dots, 30$.

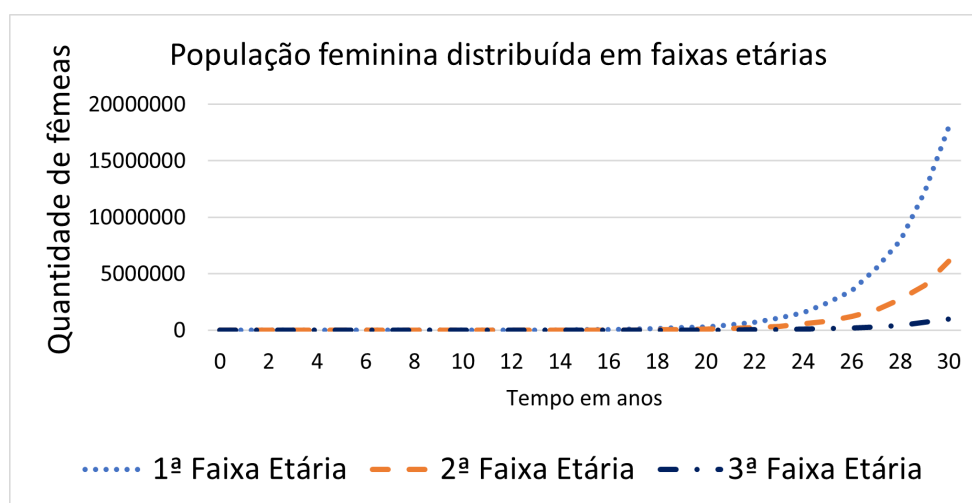
$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 455 \\ 55 \\ 27,5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 302,5 \\ 227,5 \\ 13,75 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 951,25 \\ 151,5 \\ 56,88 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 775,63 \\ 475,63 \\ 37,81 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} 2.015,94 \\ 387,81 \\ 118,91 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{pmatrix} 1.907,97 \\ 1.007,97 \\ 96,95 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_9 = \begin{pmatrix} 4.322,73 \\ 953,98 \\ 251,99 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{10} &= \begin{pmatrix} 4.571,91 \\ 2.161,37 \\ 238,5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{11} = \begin{pmatrix} 9.360,96 \\ 2.285,96 \\ 540,34 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{12} = \begin{pmatrix} 10.764,85 \\ 4.680,48 \\ 571,49 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{13} = \begin{pmatrix} 20.436,38 \\ 5.382,43 \\ 1.170,12 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_{14} &= \begin{pmatrix} 25.040,07 \\ 10.218,19 \\ 1.345,61 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{15} = \begin{pmatrix} 44.909,58 \\ 12.520,03 \\ 2.554,55 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{16} = \begin{pmatrix} 57.743,78 \\ 22.454,79 \\ 3.130,01 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_{17} &= \begin{pmatrix} 99.209,19 \\ 28.871,89 \\ 5.613,7 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{18} = \begin{pmatrix} 132.328,64 \\ 49.604,6 \\ 7.217,97 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{19} = \begin{pmatrix} 220.072,3 \\ 66.164,32 \\ 12.401,15 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_{20} &= \begin{pmatrix} 301.860,73 \\ 110.036,15 \\ 16.541,08 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{21} = \begin{pmatrix} 489.767,84 \\ 150.930,37 \\ 27.509,04 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{22} = \begin{pmatrix} 686.248,58 \\ 244.883,92 \\ 37.732,59 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_{23} &= \begin{pmatrix} 1.092.733,46 \\ 343.124,29 \\ 61.220,98 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{24} = \begin{pmatrix} 1.556.160,11 \\ 546.366,73 \\ 85.781,07 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{25} = \begin{pmatrix} 2.442.810,14 \\ 778.080,05 \\ 136.591,68 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_{26} &= \begin{pmatrix} 3.522.095,26 \\ 11.221.405,07 \\ 194.520,01 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{27} = \begin{pmatrix} 5.469.180,31 \\ 1.761.047,63 \\ 305.351,27 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{28} = \begin{pmatrix} 7.960.244,32 \\ 2.734.590,16 \\ 440.261,91 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_{29} &= \begin{pmatrix} 12.259.146,34 \\ 3.980.122,16 \\ 683.647,54 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{x}_{30} = \begin{pmatrix} 17.971.431,25 \\ 6.129.573,17 \\ 995.030,54 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A Figura 3.5 ilustra a projeção da população feminina no decorrer de 30 anos.

Figura 3.5 – Gráfico da distribuição etária da população feminina.



Fonte: Da autora (2024).

Observemos nas Tabelas 3.3 a 3.9 o número de fêmeas em cada faixa etária e o número relativo de fêmeas em cada faixa etária, isto é, o número de fêmeas de cada faixa etária dividido pelo número total de fêmeas, na forma percentual.

Tabela 3.3 – Distribuição etária (x_0 até x_5).

Distribuição Etária						
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1ª Faixa Etária	40	220	110	455	302,5	951,25
2ª Faixa Etária	40	20	110	55	227,5	151,25
3ª Faixa Etária	20	10	5	27,5	13,75	56,88
Total	100	250	225	537,5	543,75	1.159,38
Distribuição Etária Relativa						
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1ª Faixa Etária	40%	88%	48,89%	84,65%	55,63%	82,05%
2ª Faixa Etária	40%	8%	48,89%	10,23%	41,84%	13,05%
3ª Faixa Etária	20%	4%	2,22%	5,12%	2,53%	4,9%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.4 – Distribuição etária (x_6 até x_{11}).

Distribuição Etária						
	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1ª Faixa Etária	775,63	2.015,94	1.907,97	4.322,73	4.571,91	9.360,96
2ª Faixa Etária	475,63	387,81	1.007,97	953,98	2.161,37	2.285,96
3ª Faixa Etária	37,81	118,91	96,95	251,99	238,5	540,34
Total	1.289,07	2.522,66	3.012,89	5.528,7	6.971,78	12.187,26
Distribuição Etária Relativa						
	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1ª Faixa Etária	60,17%	79,92%	63,33%	78,18%	65,58%	76,81%
2ª Faixa Etária	36,9%	15,37%	33,46%	17,26%	31%	18,76%
3ª Faixa Etária	2,93%	4,71%	3,21%	4,56%	3,42%	4,43%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.5 – Distribuição etária (x_{12} até x_{16}).

Distribuição Etária					
	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
1ª Faixa Etária	10.764,85	20.436,38	25.040,07	44.909,58	57.743,78
2ª Faixa Etária	4.680,48	5.382,43	10.218,19	12.520,03	22.454,79
3ª Faixa Etária	517,49	1.170,12	1.345,61	2.554,55	3.130,01
Total	16.016,26	26.988,93	36.603,87	59.984,16	83.328,58
Distribuição Etária Relativa					
	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
1ª Faixa Etária	67,21%	75,72%	68,4%	74,87%	69,3%
2ª Faixa Etária	29,22%	19,94%	27,92%	20,87%	26,95%
3ª Faixa Etária	3,57%	4,34%	3,68%	4,26%	3,75%
Total	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.6 – Distribuição etária (x_{17} até x_{20}).

Distribuição Etária				
	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
1ª Faixa Etária	99.209,19	132.328,64	220.072,3	301.860,73
2ª Faixa Etária	28.871,89	49.604,6	66.164,32	110.036,15
3ª Faixa Etária	5.613,7	7.217,97	12.401,15	16.541,08
Total	133.694,8	189.151,21	298.637,77	428.437,96
Distribuição Etária Relativa				
	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
1ª Faixa Etária	74,2%	69,96%	73,69%	70,46%
2ª Faixa Etária	21,6%	26,22%	22,16%	25,68%
3ª Faixa Etária	4,2%	3,82%	4,15%	3,86%
Total	100%	100%	100%	100%

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.7 – Distribuição etária (x_{21} até x_{24}).

Distribuição Etária				
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
1ª Faixa Etária	489.767,84	686.248,58	1.092.733,46	1.556.160,11
2ª Faixa Etária	150.930,37	244.883,92	343.124,29	546.366,73
3ª Faixa Etária	27.509,04	37.732,59	61.220,98	85.781,07
Total	668.207,25	968.865,09	1.497.078,73	2.188.307,91
Distribuição Etária Relativa				
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
1ª Faixa Etária	73,3%	70,83%	72,99%	71,11%
2ª Faixa Etária	22,59%	25,28%	22,92%	24,97%
3ª Faixa Etária	4,11%	3,89%	4,09%	3,92%
Total	100%	100%	100%	100%

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.8 – Distribuição etária (x_{25} até x_{27}).

Distribuição Etária			
	x_{25}	x_{26}	x_{27}
1ª Faixa Etária	2.442.810,14	3.522.095,26	5.469.180,31
2ª Faixa Etária	778.080,05	1.221.405,07	1.761.047,63
3ª Faixa Etária	136.591,68	194.520,01	305.351,27
Total	3.357.481,87	4.938.020,34	7.535.579,21
Distribuição Etária Relativa			
	x_{25}	x_{26}	x_{27}
1ª Faixa Etária	72,76%	71,33%	72,58%
2ª Faixa Etária	23,17%	24,73%	23,37%
3ª Faixa Etária	4,07%	3,94%	4,05%
Total	100%	100%	100%

Fonte: Da autora (2024).

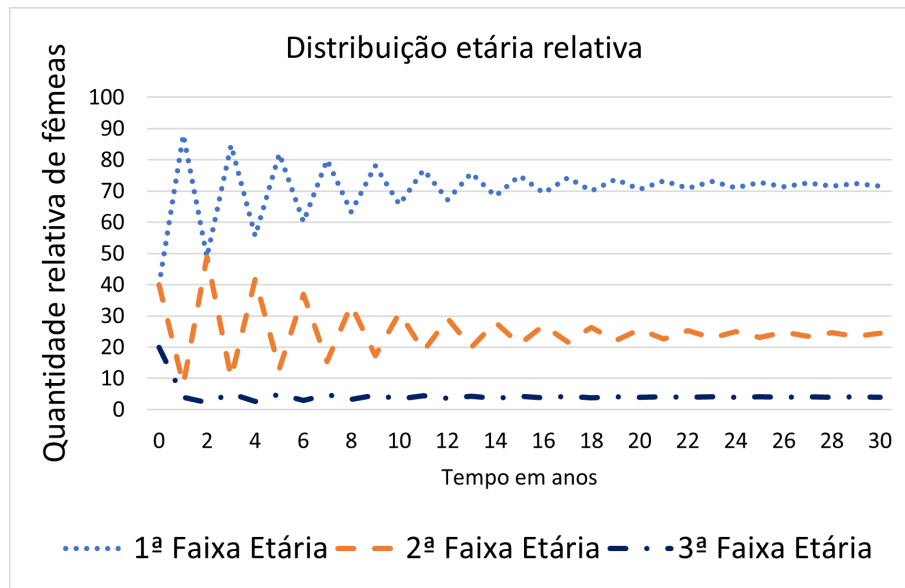
Tabela 3.9 – Distribuição etária (x_{28} até x_{30}).

Distribuição Etária			
	x_{28}	x_{29}	x_{30}
1ª Faixa Etária	7.960.244,32	12.259.146,34	17.971.431,25
2ª Faixa Etária	2.734.590,16	3.980.122,16	6.129.573,17
3ª Faixa Etária	440.261,91	683.647,54	995.030,54
Total	11.135.096,39	16.922.916,04	25.096.034,96
Distribuição Etária Relativa			
	x_{28}	x_{29}	x_{30}
1ª Faixa Etária	71,49%	72,44%	71,62%
2ª Faixa Etária	24,56%	23,52%	24,42%
3ª Faixa Etária	3,95%	4,04%	3,96%
Total	100%	100%	100%

Fonte: Da autora (2024).

Na Figura 3.6 temos o gráfico da distribuição relativa ao longo de trinta anos.

Figura 3.6 – Gráfico da distribuição etária relativa da população feminina.



Fonte: Da autora (2024).

Nas Tabelas 3.3 a 3.9 e na Figura 3.6 podemos perceber que a distribuição etária relativa tende a se estabilizar com o passar do tempo. A primeira faixa etária estabiliza em aproximadamente 72%, a segunda faixa etária em 24% e a terceira faixa etária em 4%. Para confirmar essa estabilidade, analisaremos o autovalor positivo da matriz de Leslie e seu autovetor correspondente.

O polinômio característico da matriz de Leslie referente a essa população é dado pela equação (3.7):

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(L - \lambda I) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} \\
 &= \lambda^3 - 0 \cdot \lambda^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot \lambda - 3 \cdot 0,5 \cdot 0,25 \\
 &= \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

Observemos que a matriz L tem duas entradas consecutivas na primeira linha não nulas, assim o Teorema 3.9 nos garante que o autovalor positivo é o autovalor dominante. Resolvendo a equação $\lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8} = 0$, determinamos os autovalores $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{4}$ e $\lambda_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{4}$, sendo que o autovalor dominante é $\lambda_1 = \frac{3}{2}$.

Para determinar um autovetor associado a $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, usamos a igualdade (3.17):

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{0,5}{\frac{3}{2}} \\ \frac{0,5 \cdot 0,25}{(\frac{3}{2})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 3.10 temos, após um grande período de tempo, que $\mathbf{x}_i \approx \frac{3}{2}\mathbf{x}_{i-1}$, isto significa que $(\frac{3}{2} - 1) \cdot 100 = 50\%$ é a porcentagem de crescimento do número de fêmeas em cada faixa etária por ano.

Observe também pelo Teorema 3.10 que, para valores grandes de tempo, temos

$$\mathbf{x}_i \approx a \left(\frac{3}{2}\right)^i \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix},$$

sendo a uma constante positiva que depende do vetor de distribuição inicial \mathbf{x}_0 . Em vista disso, a longo prazo, as fêmeas estarão distribuídas na proporção $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{18}$. Somando $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{25}{18}$, determinamos o correspondente ao total de fêmeas nas três faixas etárias:

- $\frac{1}{\frac{25}{18}} = 0,72$, assim 72% da população de fêmeas estará na primeira faixa etária;
- $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{25}{18}} = 0,24$, logo 24% da população de fêmeas estará na segunda faixa etária;
- $\frac{\frac{1}{18}}{\frac{25}{18}} = 0,04$, portanto 4% da população de fêmeas pertencerá à terceira faixa etária.

Portanto, conseguimos verificar a estabilidade que as Tabelas 3.3 a 3.9 e a Figura 3.6 apontavam.

Observemos no Exemplo 3.12 o que acontece quando o autovalor positivo não é autovalor dominante.

Exemplo 3.12. (adaptado de Leslie (1945, p. 200)) Determine os autovalores da matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução: Os autovalores de L são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 1.$$

Resolvendo a equação $p(\lambda) = 0$, determinamos os autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Observe que λ_1 é o único autovalor positivo, porém não é autovalor dominante, pois $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$.

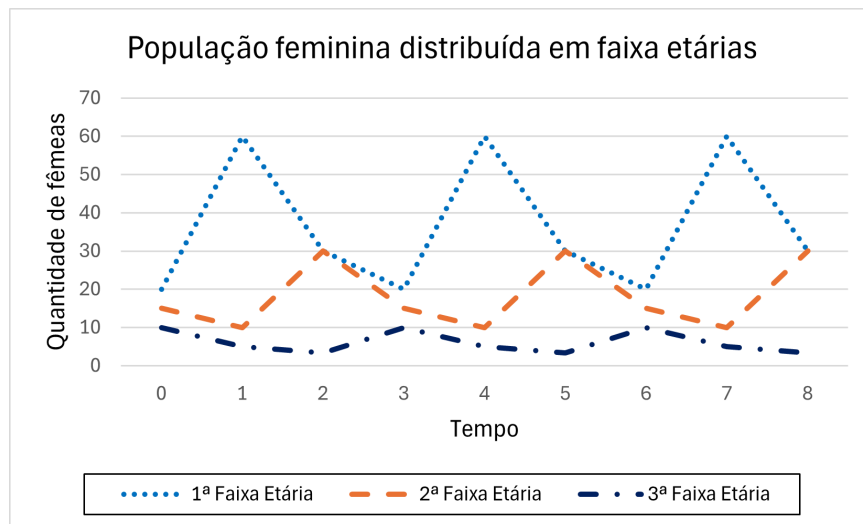
Consideremos a distribuição etária inicial $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$ para o Exemplo 3.12 e utilizando a expressão $\mathbf{x}_i = L^i \mathbf{x}_0$, vamos calcular a distribuição etária para $i = 2, \dots, 8$.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 3,33 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 3,33 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 3,33 \end{pmatrix}.$$

Observemos na Figura 3.7 como fica a distribuição etária para os tempos de 0 a 8.

Figura 3.7 – Gráfico da distribuição etária feminina.



Fonte: Da autora (2024).

Em concordância com Anton e Rorres (2012, p. 680), a matriz L do Exemplo 3.12 possui a propriedade $L^3 = I$, ou seja, independente do vetor de distribuição etária inicial \mathbf{x}_0 escolhido, obtemos $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_6 = \dots = \mathbf{x}_{3i}$. Assim, a cada três períodos de tempo a população retorna para o vetor de distribuição inicial, este fenômeno é chamado de ondas populacionais. As ondas populacionais não ocorrem quando a matriz de Leslie possui autovalor dominante.

3.4 Aplicação do modelo de Leslie para Minas Gerais

Nesta seção será aplicado o modelo de Leslie para os dados reais da população feminina do estado de Minas Gerais. Os dados utilizados podem ser encontrados no site do IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2010), tendo como base o censo de 2010.

O vetor de distribuição etária inicial será composto com a população feminina de Minas Gerais no ano de 2010. O tempo máximo de sobrevivência da espécie humana será considerado 100 anos, pois a população acima de 100 anos é pouco expressiva e o IBGE não distingue a população acima de 100 anos, apenas a agrupa e a denomina “mais de 100 anos”. A população será expressa em faixas etárias com duração de 5 anos, obtendo assim 20 faixas etárias.

Observemos a Tabela 3.10 com a distribuição etária da população de Minas Gerais em 2010. As colunas “Porcentagem de mulheres” e “Porcentagem de homens” foram calculadas em relação à população total.

Tabela 3.10 – População de Minas Gerais em 2010.

Faixa etária	Número de mulheres	Porcentagem de mulheres	Número de Homens	Porcentagem de homens
[0, 5)	627.206	3,2 %	649.660	3,3 %
[5, 10)	702.961	3,6%	726.034	3,7%
[10, 15)	830.051	4,2%	858.109	4,4%
[15, 20)	851.253	4,3%	868.022	4,4%
[20, 25)	859.390	4,4%	874.104	4,5%
[25, 30)	853.105	4,4%	851.586	4,3%
[30, 35)	805.450	4,1%	790.229	4,0%
[35, 40)	722.116	3,7%	694.342	3,5%
[40, 45)	702.039	3,6%	671.738	3,4%
[45, 50)	666.388	3,4%	628.195	3,2%
[50, 55)	584.829	3,0%	548.830	2,8%
[55, 60)	479.713	2,4%	441.415	2,3%
[60, 65)	376.213	1,9%	339.165	1,7%
[65, 70)	290.172	1,5%	251.626	1,3%
[70, 75)	233.376	1,2%	191.852	1,0%
[75, 80)	168.843	0,9%	129.276	0,7%
[80, 85)	112.030	0,6%	76.292	0,4%
[85, 90)	56.569	0,3%	34.862	0,2%
[90, 95)	24.269	0,1%	12.469	0,1%
[95, 100]	7.576	0,0 % (0,038%)	3.332	0,0% (0,017 %)
Total	9.953.549	50,8%	9.641.138	49,2%

Fonte: [https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/webservice/frm_piramide.php?codigo=31\(2010\)](https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/webservice/frm_piramide.php?codigo=31(2010)).

Observemos que os percentuais da população feminina e masculina são bem próximos e, apesar do modelo projetar apenas a população feminina, pode-se dobrar os valores e chegar a uma projeção aproximada da população total.

Para escrever a matriz de Leslie correspondente a essa população, precisamos determinar os parâmetros a_j , número médio de filhas nascidas por mulher em cada faixa etária, e b_j , porcentagem feminina que sobrevive e muda da faixa etária j para a faixa etária $j + 1$.

Para determinar a_j , precisamos conhecer o número de filhas nascidas no intervalo de cinco anos, ou seja, de 2010 até 2014 (Tabela 3.11).

Tabela 3.11 – Filhas nascidas vivas em Minas Gerais de 2010 até 2014.

Faixa etária	Número de filhas
[0, 5)	0
[5, 10)	0
[10, 15)	73.764
[15, 20)	99.413
[20, 25)	157.812
[25, 30)	159.209
[30, 35)	131.501
[35, 40)	64.455
[40, 45)	15.904
[45, 50)	1.024
[50, 55)	65
[55, 60)	0
[60, 65)	0
[65, 70)	0
[70, 75)	0
[75, 80)	0
[80, 85)	0
[85, 90)	0
[90, 95)	0
[95, 100]	0
Total	633.147

Fonte: [https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612#resultado\(2014\)](https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612#resultado(2014)).

Com os dados das Tabelas 3.10 e 3.11 é possível calcular os valores de a_j , com $j = 1, 2, \dots, 20$:

$$\begin{aligned}
[0,5) : a_1 &= \frac{0}{627.206} = 0; \\
[5,10) : a_2 &= \frac{0}{702.961} = 0; \\
[10,15) : a_3 &= \frac{3.764}{830.051} = 0,004535; \\
[15,20) : a_4 &= \frac{99.413}{851.253} = 0,116784; \\
[20,25) : a_5 &= \frac{157.812}{859.390} = 0,183633; \\
[25,30) : a_6 &= \frac{159.209}{853.105} = 0,186623; \\
[30,35) : a_7 &= \frac{131.501}{805.450} = 0,163264; \\
[35,40) : a_8 &= \frac{64.455}{722.116} = 0,089259; \\
[40,45) : a_9 &= \frac{15.904}{702.039} = 0,022654; \\
[45,50) : a_{10} &= \frac{1.024}{666.388} = 0,001537; \\
[50,55) : a_{11} &= \frac{65}{584.829} = 0,000111.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Da faixa etária [55, 60) até a faixa etária [95, 100], o número de filhas nascidas vivas são todos iguais a zero. Assim, $a_{12} = \dots = a_{20} = 0$.

Para determinar a taxa de sobrevivência em cada faixa etária, precisamos conhecer o número de óbitos das mulheres no intervalo de cinco anos, isto é, de 2010 até 2014 (Tabela 3.12).

Tabela 3.12 – Óbitos de mulheres em Minas Gerais de 2010 até 2014.

Faixa etária	Número de óbitos
[0, 5)	1.210
[5, 10)	730
[10, 15)	928
[15, 20)	1.817
[20, 25)	2.234
[25, 30)	2.835
[30, 35)	4.062
[35, 40)	5.152
[40, 45)	7.183
[45, 50)	10.070
[50, 55)	12.971
[55, 60)	15.814
[60, 65)	18.160
[65, 70)	21.404
[70, 75)	26.490
[75, 80)	31.926
[80, 85)	35.870
[85, 90)	30.853
[90, 95)	20.130
[95, 100]	11.899
Total	270.750

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654#resultado> (2014).

Com os valores das Tabelas 3.10 e 3.12 conseguimos calcular os valores de b_j , com $j = 1, 2, \dots, 19$:

$$\begin{aligned}
[0,5) : b_1 &= \frac{627.206 - 1.210}{627.206} = 0,998071; \\
[5,10) : b_2 &= \frac{702.961 - 730}{702.961} = 0,998962; \\
[10,15) : b_3 &= \frac{830.051 - 928}{830.051} = 0,998886; \\
[15,20) : b_4 &= \frac{851.253 - 1.817}{851.253} = 0,997865; \\
[20,25) : b_5 &= \frac{859.390 - 2.234}{859.390} = 0,997400; \\
[25,30) : b_6 &= \frac{853.105 - 2.835}{853.105} = 0,996676; \\
[30,35) : b_7 &= \frac{805.450 - 4.062}{805.450} = 0,994957; \\
[35,40) : b_8 &= \frac{722.116 - 5.152}{722.116} = 0,992865; \\
[40,45) : b_9 &= \frac{702.039 - 7.183}{702.039} = 0,989768; \\
[45,50) : b_{10} &= \frac{666.388 - 10.070}{666.388} = 0,984889; \\
[50,55) : b_{11} &= \frac{584.829 - 12.971}{584.829} = 0,977821; \\
[55,60) : b_{12} &= \frac{479.713 - 12.971}{479.713} = 0,972961; \\
[60,65) : b_{13} &= \frac{376.213 - 18.160}{376.213} = 0,951729; \\
[65,70) : b_{14} &= \frac{290.172 - 21.404}{290.172} = 0,926237; \\
[70,75) : b_{15} &= \frac{233.376 - 26.490}{233.376} = 0,886492; \\
[75,80) : b_{16} &= \frac{168.843 - 31.926}{168.843} = 0,810913; \\
[80,85) : b_{17} &= \frac{112.030 - 35.870}{112.030} = 0,679818; \\
[85,90) : b_{18} &= \frac{56.569 - 30.853}{56.569} = 0,454595; \\
[90,95) : b_{19} &= \frac{24.269 - 20.130}{24.269} = 0,170547.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Usando a expressão $x_i = L^i x_0$ podemos projetar a distribuição etária feminina de Minas Gerais ao longo dos anos.

Nas Tabelas 3.13 a 3.17 podemos comparar as projeções do modelo de Leslie com as projeções feitas pelo IBGE do ano de 2010 até 2060. Vale ressaltar que os valores do ano de 2010 são do censo conforme a Tabela 3.10. Não temos conhecimento de como o IBGE

calcula as projeções, mas no site “<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?=&t=resultados>” temos os indicadores implícitos na projeção, são eles: números de nascimentos e óbitos, saldo migratório interno e internacional, taxa de crescimento geométrico, taxa bruta de natalidade, taxa bruta de mortalidade, taxa líquida de migração, taxa de fecundidade total, esperança de vida ao nascer, taxa de mortalidade infantil, razão de dependência, índice de envelhecimento e idade mediana.

É importante destacarmos que, nas Tabelas 3.13 a 3.17, os dados das projeções do IBGE, na faixa etária [90, 95), contêm a população feminina acima de 90 anos. Por exemplo, na Tabela 3.13 da projeção do IBGE no ano de 2015, o valor 47.751 corresponde às mulheres de noventa anos ou mais, inclusive acima de cem anos.

Tabela 3.13 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2015 - 2020.

Faixa etária	2010 (censo)	2015) (modelo)	2015 (IBGE)	2020 (modelo)	2020 (IBGE)
[0, 5)	627.206	633.147,9	645.337	643.695,1	647.939
[5, 10)	702.961	625.996,1	654.957	631.926,5	646.371
[10, 15)	830.051	702.231,3	733.829	625.346,3	656.087
[15, 20)	851.253	829.126,3	839.336	701.449	732.187
[20, 25)	859.390	849.435,6	855.466	827.356,1	832.670
[25, 30)	853.105	857.155,6	860.356	847.227	845.711
[30, 35)	805.450	850.269,3	856.414	854.306,4	852.856
[35, 40)	722.116	801.388,1	811.052	845.981,4	851.467
[40, 45)	702.039	716.963,7	726.683	795.670,2	805.831
[45, 50)	666.388	694.855,7	703.157	709.627,7	718.962
[50, 55)	584.829	656.318,2	662.745	684.355,8	691.147
[55, 60)	479.713	571.858,1	577.276	641.761,7	646.888
[60, 65)	376.213	466.742	468.546	556.395,6	557.845
[65, 70)	290.172	358.052,8	360.081	444.211,9	444.340
[70, 75)	233.376	268.768	267.631	331.641,8	330.095
[75, 80)	168.843	206.886	202.692	238.260,7	232.097
[80, 85)	112.030	136.917	132.886	67.766,5	160.456
[85, 90)	565.69	76.160	75.168	93.078,6	90.886
[90, 95)	24.269	25.716	47.751	34.622	65.700
[95, 100]	7.576	4.139	-	4.385,8	-
Total	9.953.549	10.332.126,8	10.481.363	10.679.066	10.809.535
$\frac{x_{i+1}}{x_i}$	-	1,0380	1,0530	1,0336	1,0313

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.14 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2025 - 2030.

Faixa etária	2025 (modelo)	2025 (IBGE)	2030 (modelo)	2030 (IBGE)
[0, 5)	628.976,6	629.417	592.396,3	591.343
[5, 10)	642.453,4	648.931	627.763,3	630.361
[10, 15)	631.270,6	647.436	641.786,5	649.908
[15, 20)	624.649,7	654.698	630.567,4	646.195
[20, 25)	699.951,4	726.308	623.316,1	649.490
[25, 30)	825.205	823.837	698.131,6	718.496
[30, 35)	844.410,9	838.979	822.462	817.798
[35, 40)	849.998,1	848.448	840.152,5	835.057
[40, 45)	839.945,3	846.502	843.933,4	843.951
[45, 50)	787.528,9	798.012	831.351	838.920
[50, 55)	698.904,5	707.745	775.628,6	786.518
[55, 60)	669.177,4	675.886	683.403,5	693.215
[60, 65)	624.409,1	626.582	651.083,6	655.946
[65, 70)	529.537,8	530.850	594.268,3	597.939
[70, 75)	411.445,5	409.724	490.477,5	491.776
[75, 80)	293.997,8	289.128	364.743,2	361.664
[80, 85)	193.208,7	186.750	238.406,6	235.783
[85, 90)	114.050,7	112.621	131.346,8	133.981
[90, 95)	42.313,1	85.353	51.846,9	109.727
[95, 100]	5.904,7	-	7.216,4	-
Total	10.957.339	11.087.207	11.140.281,3	11.288.068
$\frac{x_{i+1}}{x_i}$	1,0260	1,0257	1,0167	1,0181

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.15 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2035 - 2040.

Faixa etária	2035 (modelo)	2035 (IBGE)	2040 (modelo)	2040 (IBGE)
[0, 5)	551.051,5	552.000	516.193,8	518.010
[5, 10)	591.253,6	592.331	549.988,5	553.075
[10, 15)	627.111,7	631.309	590.639,9	593.332
[15, 20)	641.071,6	648.743	626.413,1	630.206
[20, 25)	629.221,1	641.260	639.702,9	643.874
[25, 30)	621.695,5	642.265	627.585,1	634.131
[30, 35)	695.811	713.142	619.628,9	637.209
[35, 40)	818.314,4	814.294	692.302	710.206
[40, 45)	834.158	831.005	812.475,7	810.669
[45, 50)	835.298,3	836.927	825.622,9	824.558
[50, 55)	818.788,4	827.608	822.676,1	826.269
[55, 60)	758.425,9	771.371	800.628,5	812.459
[60, 65)	664.925	673.923	737.918,8	750.905
[65, 70)	619.655,1	627.422	632.828,4	645.965
[70, 75)	550.433,3	555.950	573.947,5	585.092
[75, 80)	434.804,4	436.730	487.954,7	496.053
[80, 85)	295.775	297.991	352.588,5	362.733
[85, 90)	162.073,1	172.212	201.073,2	220.640
[90, 95)	59.709,6	136.804	73.677,6	175.854
[95, 100]	8.842,3	-	10.183,3	-
Total	11.218.418,6	11.403.287	11.194.029,4	11.431.240
$\frac{x_{i+1}}{x_i}$	1,0070	1,0102	0,9978	1,0025

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.16 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2045 - 2050.

Faixa etária	2045 (modelo)	2045 (IBGE)	2050 (modelo)	2050 (IBGE)
[0, 5)	493.149,4	492.333	479.297,2	473.117
[5, 10)	515.198,1	519.152	492.198,1	493.525
[10, 15)	549.417,6	554.123	514.663,3	520.236
[15, 20)	589.981,9	592.296	548.805,5	553.143
[20, 25)	652.075,7	625.417	588.722,3	587.589
[25, 30)	638.039,6	636.810	623.450,5	618.436
[30, 35)	625.499	629.202	635.918,8	631.956
[35, 40)	616.504,1	634.671	622.344,6	626.816
[40, 45)	687.62,4	707.332	612.105,4	632.330
[45, 50)	804.162,4	804.735	680.329,3	702.448
[50, 55)	813.146,9	814.550	792.010,7	795.339
[55, 60)	804.429,9	811.810	795.112,1	800.833
[60, 65)	778.90,3	791.716	782.679	791.783
[65, 70)	702.298,7	720.900	741.378,2	760.965
[70, 75)	586.149,1	603.991	650.495,1	675.450
[75, 80)	508.799,9	524.049	519.616,5	542.858
[80, 85)	395.688,8	414.586	412.592,4	440.184
[85, 90)	239.696	271.440	268.996,4	312.791
[90, 95)	91.406,9	227.736	108.964,6	288.167
[95, 100]	12.565,5	-	15.589,2	-
Total	11.077.552,4	11.376.849	10.885.269,3	11.247.966
$\frac{x_{i+1}}{x_i}$	0,9896	0,9952	0,9826	0,9887

Fonte: Da autora (2024).

Tabela 3.17 – Projeção da população feminina de Minas Gerais no período 2055 - 2060.

Faixa etária	2055 (modelo)	2055 (IBGE)	2060 (modelo)	2060 (IBGE)
[0, 5)	465.257,5	453.366	445.341,9	429.366
[5, 10)	478.372,7	474.341	464.360	454.623
[10, 15)	491.678,2	494.627	477.876,1	475.475
[15, 20)	514.090	519.306	491.139,4	493.728
[20, 25)	547.633,8	548.510	512.992,4	514.735
[25, 30)	587.191,6	580.700	546.210	541.698
[30, 35)	621.378,2	613.677	585.239,8	576.055
[35, 40)	632.711,9	629.657	618.244,6	611.493
[40, 45)	617.904,2	624.658	628.197,5	627.581
[45, 50)	605.842,3	628.194	611.581,8	620.737
[50, 55)	670.048,9	694.484	596.687,4	621.255
[55, 60)	774.444,7	782.334	655.187,9	683.416
[60, 65)	773.613,1	781.642	753.504,5	764.003
[65, 70)	744.898,3	761.788	736.270	752.680
[70, 75)	686.691,9	714.016	689.952,3	715.665
[75, 80)	576.658,7	608.722	608.746,9	644.666
[80, 85)	421.363,7	458.121	467.620	515.577
[85, 90)	280.487,7	334.295	286.450,7	350.130
[90, 95)	122.284,4	347.422	127.508,3	393.849
[95, 100]	18.583,6	-	20.855,2	-
Total	11.631.144,4	11.049.860	10.323.966,7	10.786.732
$\frac{x_{i+1}}{x_i}$	0,9767	0,9824	0,9711	0,9762

Fonte: Da autora (2024).

Nas Tabelas 3.13 a 3.17, com as projeções do modelo de Leslie e do IBGE para os anos de 2015 a 2060, observamos que os valores totais de cada ano são bem próximos nas duas projeções, sendo os valores do IBGE um pouco maiores que os valores do modelo de Leslie, com exceção do ano de 2055. Nas projeções do modelo de Leslie, a partir do ano de 2040, a população feminina começa a diminuir, e nas projeções do IBGE, a partir do ano de 2045, a população feminina também começa a diminuir. Devido a isto, verificamos que o modelo de Leslie é válido para estudar o crescimento de uma população feminina ao longo do tempo.

As projeções do IBGE vão até o ano de 2060, mas para termos uma noção melhor de como o modelo de Leslie se comporta com o passar dos anos observemos a Tabela 3.18 com mais cinco projeções, de 2065 a 2085.

Tabela 3.18 – Projeção do modelo de Leslie da população de Minas Gerais no período 2065 - 2085.

Faixa etária	2065	2070	2075	2080	2085
[0, 5)	421.632	399.116,7	380.523,8	365.230,6	351.047,6
[5, 10)	444.482,8	420.818,6	398.346,8	379.789,8	364.526
[10, 15)	463.878	444.021,4	420.381,8	397.933,3	379.395,5
[15, 20)	477.343,8	463.361,2	443.526,8	419.913,5	397.490
[20, 25)	490.090,9	476.324,6	462.371,9	442.579,9	419.017
[25, 30)	511.658,6	488.816,6	475.086,2	461.169,8	441.429,1
[30, 35)	544.394,4	509.957,9	487.191,8	473.507	459.636,9
[35, 40)	582.288,4	541.649	507.386,2	484.734,9	471.119,1
[40, 45)	613.833,4	578.133,8	537.784,3	503.766	481.276,3
[45, 50)	621.769,7	607.552,6	572.218,3	532.281,7	498.611,4
[50, 55)	602.340,	612.374,2	598.371,9	563.571,5	524.238,4
[55, 60)	583.453,5	588.980,9	598.792,3	585.100,6	551.072,1
[60, 65)	637.472,2	567.677,5	573.055,4	582.601,6	569.280,1
[65, 70)	717.132,1	606.700,8	540.275,2	545.393,5	554.478,8
[70, 75)	681.960,5	664.234,3	561.948,8	500.422,8	505.163,6
[75, 80)	611.637,2	604.552,6	588.838,4	498.163,1	443.620,8
[80, 85)	493.640,7	495.984,6	490.239,5	477.496,7	403.966,9
[85, 90)	317.896,5	335.585,9	337.179,2	333.273,7	324.610,8
[90, 95)	10.219	144.514,2	152.555,7	153.280	151.504,5
[95, 100]	21.746,2	22.208,5	24.646,5	26.018	26.141,4
Total	9.968.870,2	9.572.565,9	9.150.720,9	8.726.227,8	8.317.626,6
$\frac{x_{i+1}}{x_i}$	0,9656	0,9603	0,9559	0,9536	0,9532

Fonte: Da autora (2024).

O último censo demográfico deveria ter sido realizado no ano de 2020, porém por causa da pandemia Covid-19, foi adiado para 2022. Para termos mais informações, vamos comparar a distribuição etária da população feminina de Minas Gerais usando os dados do censo e a projeção feita pelo IBGE para o ano de 2022 (Tabela 3.19).

Tabela 3.19 – Comparação da população de Minas Gerais no ano 2022.

Faixa etária	Censo 2022	Projeção do IBGE 2022
[0, 5)	583.742	646.960
[5, 10)	617.296	647.313
[10, 15)	618.090	642.759
[15, 20)	670.858	696.753
[20, 25)	758.055	794.830
[25, 30)	772.492	842.643
[30, 35)	781.751	847.033
[35, 40)	810.162	853.975
[40, 45)	833.623	828.771
[45, 50)	717.858	746.964
[50, 55)	690.825	694.282
[55, 60)	664.500	662.745
[60, 65)	590.542	589.255
[65, 70)	478.163	479.903
[70, 75)	357.249	360.645
[75, 80)	246.926	251.830
[80, 85)	168.961	169.724
[85, 90)	99.891	99.440
[90, 95)	46.355	73.069
[95, 100]	13.946	-
Total	10.521.285	10.928.894

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/9606#resultado> (2022).

Podemos observar na Tabela 3.19 que o total da população feminina em 2022 na projeção do IBGE é um pouco acima do total do censo. No período de 2015 a 2060, as projeções do IBGE são também um pouco acima das projeções do modelo de Leslie. Ainda assim, os valores projetados são muito próximos da realidade.

Agora, continuemos a estudar a matriz de Leslie L correspondente à população feminina de Minas Gerais. O polinômio característico de L é dado pela equação (3.7):

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \dots - a_{n-1}b_1b_2\dots b_{n-2}\lambda - a_nb_1b_2\dots b_{n-1}.$$

Substituindo os valores de a_j e b_j obtidos em (3.30) e (3.31), respectivamente, obtemos o polinômio característico da matriz L ,

$$p(\lambda) = \lambda^{20} - 0,004522\lambda^{17} - 0,116308\lambda^{16} - 0,182494\lambda^{15} - 0,184983\lambda^{14} - 0,161292\lambda^{13} - 0,087736\lambda^{12} - 0,022109\lambda^{11} - 0,001485\lambda^{10} - 0,000106\lambda^9.$$

(3.32)

Usando o software Octave para calcular as raízes do polinômio (3.32) obtemos

$$\lambda_1 = 0,9556,$$

$$\lambda_{2,3} = 0,4476 \pm 0,6692i,$$

$$\lambda_{4,5} = -0,0468 \pm 0,6502i,$$

$$\lambda_{6,7} = -0,4005 \pm 0,3617i,$$

$$\lambda_{8,9} = -0,4483 \pm 0,1203i,$$

$$\lambda_{10,11} = -0,0299 \pm 0,0744i,$$

sendo as demais raízes iguais a zero.

O autovalor positivo $\lambda_1 = 0,9556$ é dominante, uma vez que a matriz L tem duas entradas positivas e consecutivas na primeira linha. Pelo Teorema 3.10, temos que a população feminina de Minas Gerais sofrerá, a longo prazo, um decréscimo de 4,44% a cada cinco anos, pois $1 - \lambda_1 = 0,0444$. Observemos na Tabela 3.18 que, em 2085, o modelo prevê um decréscimo da população de $(1 - 0,9532)100 = 4,68\%$, que está próximo ao decréscimo estabelecido pelo Teorema 3.10.

Para calcular o autovetor associado a λ_1 usamos (3.17), obtendo

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,044444 \\ 1,091838 \\ 1,141295 \\ 1,191773 \\ 1,243904 \\ 1,297372 \\ 1,350805 \\ 1,403482 \\ 1,453664 \\ 1,498219 \\ 1,533058 \\ 1,56091 \\ 1,554587 \\ 1,506818 \\ 1,397847 \\ 1,186200 \\ 0,843867 \\ 0,401442 \\ 0,071646 \end{pmatrix} .$$

O autovetor \mathbf{u}_1 associado a λ_1 indica que, a longo prazo, a cada 1.000.000 de mulheres na faixa etária de 0 a 5 anos, haverá 1.044.444 mulheres na faixa etária de 5 a 10 anos, 1.091.838 mulheres na faixa etária de 10 a 15 anos, 1.141.295 mulheres na faixa etária de 15 a 20 anos, e assim por diante.

4 TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo, fazemos uma análise de trabalhos sobre o modelo de Leslie. Apenas o trabalho de Fogliarini Filha (2015), até onde conhecemos, apresenta uma proposta de atividade para o Ensino Médio, mas não foi aplicada em sala de aula e, somente dois trabalhos são do PROFMAT, Fogliarini Filha (2015) e Codeco (2018).

Vieira (2019) faz um estudo detalhado sobre o modelo de Leslie e o aplica no estudo da população feminina do Brasil e dos estados de Goiás e Tocantins.

Macêdo e Ferraço (2019) apresentam, de forma resumida em seu artigo, o modelo de Leslie e o aplicam no estudo da população feminina da cidade de Eunápolis (BA), utilizando os dados do sistema DATASUS (Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde do Brasil).

Codeco (2018) apresenta, de forma detalhada, o modelo de Leslie e o aplica no estudo da população feminina brasileira e dos estados do Acre e Espírito Santo. Codeco ainda faz uma comparação entre os resultados encontrados, as previsões feitas pelo IBGE e os resultados encontrados por Onofre (2017) para o estudo da população feminina do Brasil.

Dourado (2018) discute detalhadamente o modelo de Leslie e o aplica ao estudo da população feminina do estado do Pará utilizando o software Octave.

Onofre (2017) aborda de forma detalhada o modelo de Leslie e o aplica para a população feminina brasileira com o objetivo de analisar a sustentabilidade do sistema previdenciário brasileiro.

Silveira (2015) apresenta o modelo de Leslie de forma geral e utiliza a matriz de Leslie em um estudo sobre “colheita” sustentável da população de ovelhas. “Colheita”, nesse caso, significa remover os animais da população e, não necessariamente, abater os animais.

Fogliarini Filha (2015) apresenta duas propostas didáticas de aplicação do produto matricial para o Ensino Médio. Uma é sobre transformações geométricas (reflexão, rotação, escala e cisalhamento). A outra é para usar o modelo de Leslie e o software Octave. Para a segunda proposta de atividade, a autora apresenta brevemente a construção da matriz de Leslie e fornece três enunciados nos quais apresenta uma matriz de Leslie de ordem 2 e três vetores de distribuição inicial da população, que são os mesmos para as três atividades. A atividade são instruções de comando para utilizar o software Octave a fim de investigar o crescimento populacional de uma “espécie hipotética” para o tempo $t = 10$. As atividades não foram aplicadas em sala de aula.

Barco (2012) faz um estudo teórico do modelo matricial de Leslie.

Com esse estudo bibliográfico ressaltamos a importância deste trabalho, uma vez que ele traz um estudo detalhado do modelo de Leslie, apresenta uma aplicação com dados reais, propõe e aplica uma sequência didática para o Ensino Médio, além de analisar os resultados da aplicação das atividades.

5 O MODELO DE LESLIE NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentamos uma sequência didática com três atividades que foi aplicada em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública no sul de Minas Gerais, e um questionário para saber a opinião dos estudantes sobre as atividades. A sequência didática aborda a matriz de Leslie com o intuito de mostrar uma aplicação de matrizes e motivar a aprendizagem desse conteúdo. De acordo com Peretti e Costa (2013, p. 4),

Conforme passam os anos, os cálculos ganham mais significado para os alunos, com situações mais complexas e conceitos que ultrapassam o eixo dos números e operações devido a muitos outros conteúdos da disciplina da Matemática. Assim, uma sequência didática como recurso para resolução de cálculos faz-se necessária para um melhor entendimento sobre o conteúdo a ser trabalhado, contextualizando-o, gerando um ensino integrado com outras disciplinas, tornando-as com significados que são dados pelas próprias situações didáticas e pela associação aos problemas reais.

Assim, a sequência didática é um dos muitos recursos que os professores podem utilizar como suporte para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A sequência didática apresentada estará associada à utilização do aplicativo Matrix Calculator como uma forma de facilitar os cálculos de produtos de matrizes e torná-los mais interessantes com o uso de uma ferramenta digital.

5.1 Sequência didática

Essa sequência de atividades apresentará ao estudante a matriz de Leslie por meio de exemplos contextualizados e no formato de estudo dirigido. Será usado o aplicativo Matrix Calculator para realizar multiplicação de matrizes, o qual está disponível para download gratuitamente nas lojas de aplicativos dos aparelhos celulares e, depois da instalação, pode ser usado sem conexão com a internet. O professor deve solicitar aos estudantes que façam o download do aplicativo antecipadamente à aula.

No Apêndice A encontra-se o Caderno de Atividades para impressão, pelo professor, das três atividades.

5.1.1 Atividade 1

Público alvo: estudantes do segundo ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: porcentagem.

Tempo estimado: uma aula de cinquenta minutos.

Recurso necessário: folha de atividade.

Objetivo: estudar o crescimento de uma população feminina distribuída em faixas etárias.

Desenvolvimento:

O senhor B.Zerra é um fazendeiro que cria vacas leiteiras. Em sua fazenda Céu Encantado ele possui 470 vacas distribuídas em três faixas etárias. Na primeira faixa etária, de 0 a 2 anos, há 200 bezerras, na segunda faixa etária, de 2 a 4 anos, há 150 vacas e na terceira faixa etária, de 4 a 6 anos, há 120 vacas, como descrito na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Distribuição etária inicial.



Fonte: Da autora (2024).

As vacas da primeira faixa etária são muito jovens e não se reproduzem, enquanto que as vacas da segunda faixa etária têm em média uma bezerra e, as vacas da terceira faixa etária, têm em média duas bezerras a cada dois anos (Figura 5.2).

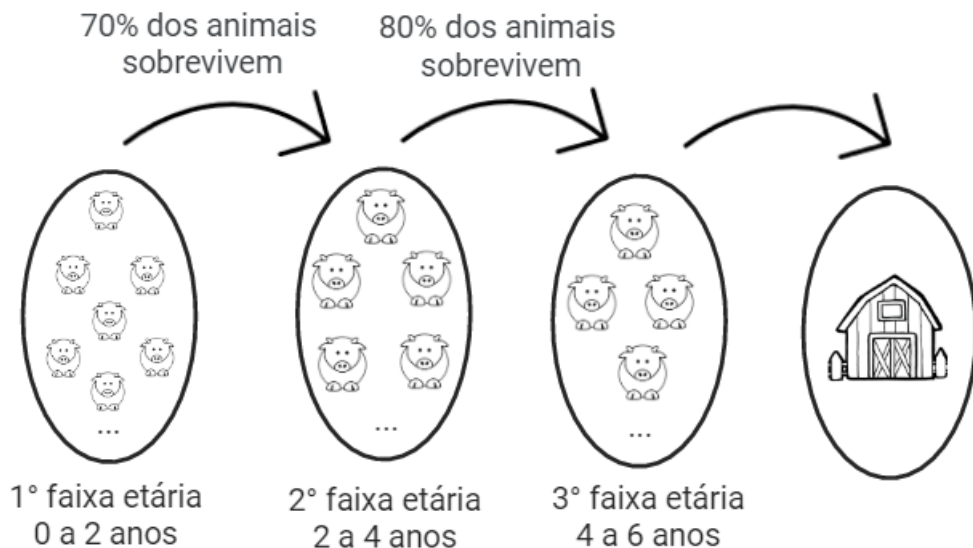
Figura 5.2 – Reprodução em cada faixa etária.



Fonte: Da autora (2024).

Vamos supor que 70% da criação de 0 a 2 anos sobreviva, e passe para a faixa etária de 2 a 4 anos, e 80% da criação de 2 a 4 anos sobreviva, e mude para a faixa etária de 4 a 6 anos. Os animais são transferidos para outra fazenda quando completam seis anos, como descrito na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Taxas de sobrevivência das faixas etárias.



Fonte: Da autora (2024).

O senhor B.Zerra precisa fazer um planejamento financeiro e, para isso, é necessário levantar algumas informações sobre sua criação. Vamos ajudá-lo? Realize a atividade respondendo as questões nos espaços em branco.

- a) Vamos calcular quantas vacas o senhor B.Zerra terá, em cada faixa etária, depois de um ciclo de 2 anos.

1º faixa etária: a primeira faixa etária contém as bezerras nascidas ao longo dos dois anos. Qual é o número de bezerras nascidas?

Resposta: _____

2º faixa etária: a segunda faixa etária contém as bezerras da primeira faixa etária que sobreviverão, ou seja, 70% de 200 bezerras. Essas bezerras da primeira faixa etária, que sobreviverão, serão as vacas da segunda faixa etária. Quantas vacas o senhor B.Zerra terá na segunda faixa etária?

Resposta: _____

Dizemos que 70% é a taxa de sobrevivência da primeira faixa etária.

3° faixa etária: a terceira faixa etária contém os animais da segunda faixa etária que sobreviverão, isto é, 80% de 150 vacas. Quantas vacas o senhor B.Zerra terá na terceira faixa etária?

Resposta: _____

Qual é a taxa de sobrevivência da segunda faixa etária?

Resposta: _____

b) Qual é o total de vacas o senhor B.Zerra possuirá após dois anos?

Resposta: _____

5.1.2 Atividade 2

Público alvo: estudantes do segundo ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: porcentagem e operações com matrizes.

Tempo estimado: uma aula de cinquenta minutos.

Recurso necessário: folha de atividade.

Objetivo: mostrar a matriz de Leslie como uma aplicação de matrizes.

Desenvolvimento:

Agora, veremos como as matrizes irão nos ajudar a calcular o número de animais nas três diferentes faixas etárias da Fazenda Céu Encantado. Construiremos a matriz L , chamada matriz de Leslie, com as informações do número de nascimentos e taxas de sobrevivência de cada faixa etária.

1ª linha de L : número de nascimentos por animal em cada faixa etária;

2ª linha de L : taxa de sobrevivência dos animais da primeira faixa etária para a segunda;

3ª linha de L : taxa de sobrevivência dos animais da segunda faixa etária para a terceira:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}.$$

O número 0 na primeira linha e primeira coluna da matriz L significa que não há nascimentos de vacas que estão na primeira faixa etária.

O número 1 na primeira linha e segunda coluna da matriz L representa o número médio de nascimentos, por vaca, da segunda faixa etária.

O número 2 na primeira linha e terceira coluna da matriz L representa o número médio de nascimentos, por vaca, da terceira faixa etária.

O número 0,7 na segunda linha e primeira coluna da matriz L é a taxa de sobrevivência da primeira faixa etária.

O número 0,8 na terceira linha e segunda coluna da matriz L é a taxa de sobrevivência da segunda faixa etária.

Os demais elementos da matriz L completamos com zeros.

A quantidade inicial de vacas do senhor B.Zerra pode ser representada por uma matriz X_0 de tamanho 3×1 ,

$$X_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule a multiplicação de L e X_0 .

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

b) Usando as informações do item a) da Atividade 1, vamos representar a quantidade de animais do senhor B.Zerra, depois de dois anos, como uma matriz, assim como fizemos com a quantidade inicial de animais. Chamaremos essa matriz de X_1 ,

$$X_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

c) O que podemos dizer do resultado da multiplicação de L e X_0 ?

Resposta: _____

- d) Podemos encontrar a população de vacas após 4 anos (segundo ciclo) fazendo uma multiplicação de matrizes? Quais matrizes devemos multiplicar?

Resposta: _____

- e) Verifique se a sua resposta no item d) está correta, calculando o número de vacas em cada faixa etária, após 4 anos (dois ciclo de 2 anos), da mesma forma que você fez no item a) da Atividade 1:

1° Faixa Etária: quantas bezerras nascerão no decorrer do segundo ciclo?

Resposta: _____

2° Faixa Etária: quantos animais sobreviverão na primeira faixa etária e passarão para a segunda faixa etária?

Resposta: _____

3° Faixa Etária: quantas vacas sobreviverão na segunda faixa etária e mudarão para a terceira faixa etária?

Resposta: _____

- f) Calcule o total de animais do segundo ciclo, ou seja, após quatro anos.

Resposta: _____

- g) Escreva a matriz X_2 de tamanho 3×1 que representa a quantidade de animais, por faixa etária, depois de 4 anos.

$$X_2 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

- h) Efetue a multiplicação das matrizes L e X_1 :

$$LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \end{pmatrix}$$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

i) O que podemos dizer do resultado da multiplicação de L e X_1 ?

Resposta: _____

j) Como você faria para encontrar a quantidade de animais do senhor B.Zerra após 6 anos (terceiro ciclo)?

Resposta: _____

5.1.3 Atividade 3

Público alvo: estudantes do segundo ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: porcentagem e operações com matrizes.

Tempo estimado: duas aulas de cinquenta minutos.

Recurso necessário: folha de atividade e aparelho celular com o aplicativo Matrix Calculator instalado.

Objetivo: consolidar a aprendizagem acerca da matriz de Leslie e introduzir o aplicativo Matrix Calculator.

Desenvolvimento:

Nesta atividade, vamos aprender a usar o aplicativo Matrix Calculator, que já foi instalado no celular, para fazer algumas multiplicações de matrizes e resolver novos problemas de uma outra fazenda do senhor B.Zerra. Dessa forma, aprenderemos a usar uma ferramenta digital para operar com as matrizes.

O senhor B.Zerra ficou tão entusiasmado em poder levantar informações sobre sua criação de vacas leiteiras estudando a matriz de Leslie, que resolveu investigar a criação de porcas para o abate. Vamos ajudar o senhor B.Zerra?

O senhor B.Zerra também é proprietário da fazenda Sol Nascente que cria porcas para o abate. Sua criação é formada por 25 porcas na faixa etária de 0 a 6 meses, 17 porcas na faixa etária de 6 a 12 meses e nenhuma porca na faixa etária de 12 a 18 meses, como descrito na Figura 5.4.

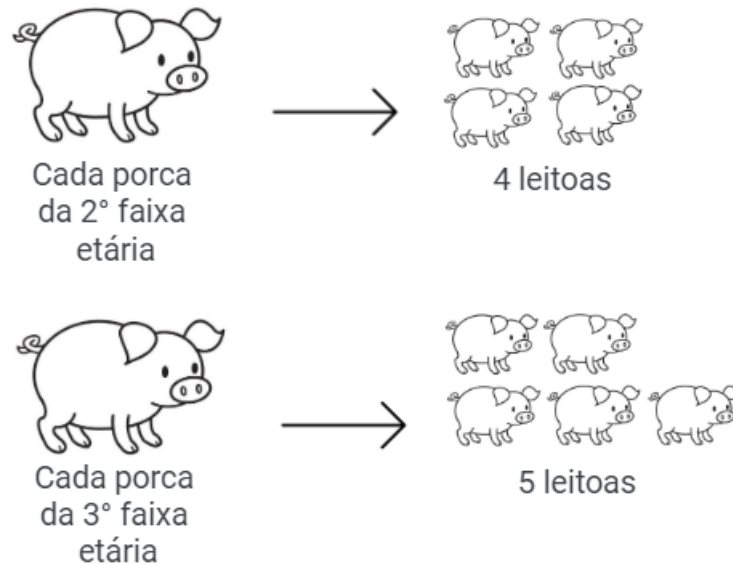
Figura 5.4 – Distribuição etária inicial das porcas.



Fonte: Da autora (2024).

As porcas de 0 a 6 meses ainda são muito jovens e não se reproduzem, enquanto as porcas de 6 a 12 meses têm em média 4 leitões a cada seis meses. O senhor B.Zerra sabe que as porcas de 12 a 18 meses têm em média 5 leitões a cada seis meses (Figura 5.5).

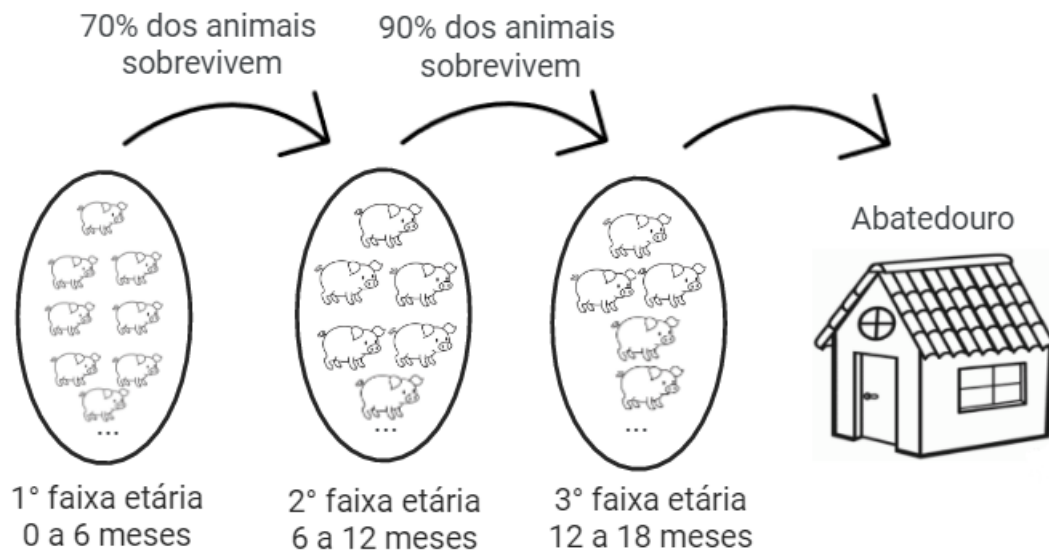
Figura 5.5 – Reprodução das porcas em cada faixa etária .



Fonte: Da autora (2024).

Suponha que 70% da criação de 0 a 6 meses sobreviva e passe para a faixa etária de 6 a 12 meses e 90% da criação de 6 a 12 meses sobreviva e mude para a faixa etária de 12 a 18 meses. Quando os animais completam 18 meses são levados para o abate, como descrito na Figura 5.6.

Figura 5.6 – Taxas de sobrevivência das porcas nas faixas etárias.



Fonte: Da autora (2024).

O senhor B.Zerra está preocupado com o espaço físico que abriga os animais, pois daqui a algum tempo o mesmo não será suficiente. Atualmente, a capacidade máxima é de 1500 animais. Ajude o senhor B.Zerra a descobrir daqui a quantos meses será inevitável fazer uma reforma de ampliação das instalações onde os animais ficam. Para isso, responda as perguntas:

a) Quantas porcas o senhor B.Zerra tem atualmente em sua fazenda?

Resposta: _____

b) Após seis meses, as leitoas da faixa etária de 0 a 6 meses estarão em qual faixa etária?

Resposta: _____

c) As porcas da faixa etária de 6 a 12 meses estarão em qual faixa etária depois de seis meses?

Resposta: _____

d) A Fazenda Sol Nascente terá porcas na faixa etária de 12 a 18 meses após seis meses?

Resposta: _____

e) Depois de seis meses, quantas porcas, em cada uma das três faixas etárias, haverá na fazenda?

Respostas:

Faixa etária de 0 a 6 meses: _____

Faixa etária de 6 a 12 meses: _____

Faixa etária de 12 a 18 meses: _____

f) Qual o total de porcas após seis meses?

Resposta: _____

g) Após seis meses, o espaço físico que o senhor B.Zerra dispõe ainda é suficiente para o número de porcas?

Resposta: _____

h) Agora, como no problema das vacas, construa a Matriz de Leslie para o problema das porcas:

$$L = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix}.$$

i) Represente a quantidade inicial de porcas, nas três diferentes faixas etárias, como uma matriz de tamanho 3×1 :

$$X_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

j) Usando as informações do item e), represente a quantidade de porcas do senhor B.Zerra, depois de seis meses, como uma matriz de tamanho 3×1 :

$$X_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

k) Calcule a multiplicação de L e X_0 :

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \end{pmatrix}$$

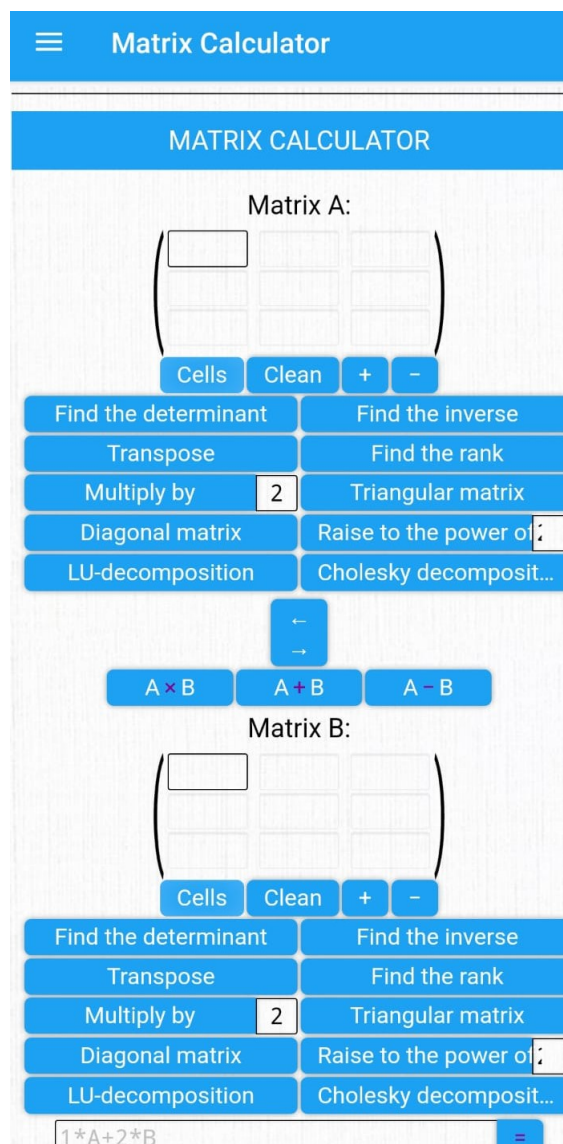
$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

l) O que você pode dizer sobre a matriz LX_0 e a matriz X_1 ?

Resposta: _____

m) Agora, abra o aplicativo Matrix Calculator que você já instalou no seu celular (Figura 5.7).

Figura 5.7 – Tela inicial do aplicativo Matrix Calculator.

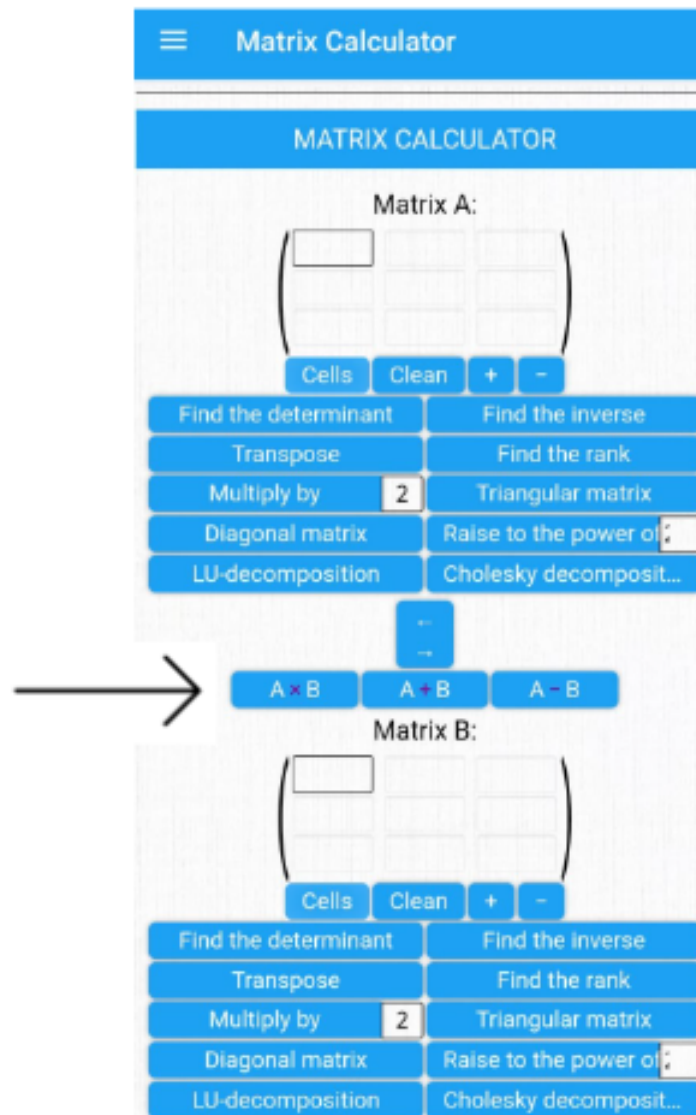


Fonte: Da autora (2024).

n) No aplicativo Matrix Calculator, no lugar da matriz A você deve preencher com os elementos da matriz L . No aplicativo, a primeira matriz é chamada de A , não sendo possível alterar esse nome.

- o) No lugar da matriz B , você deve colocar os elementos da matriz X_0 . No aplicativo a segunda matriz é chamada de B , não sendo possível alterar esse nome.
- p) Faça a multiplicação dessas matrizes clicando no botão azul $A \times B$ (Figura 5.8).

Figura 5.8 – Botão para multiplicar.



Fonte: Da autora (2024).

O que você pode dizer sobre os resultados verificados no aplicativo e determinados manualmente no item k)?

Resposta: _____

- q) Calcule a quantidade de porcas depois de doze meses. Para isso, faça a multiplicação LX_1 no aplicativo e chame o resultado de X_2 :

$$LX_1 = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix}$$

$$X_2 = LX_1 = \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix}.$$

r) Após doze meses, quantas porcas haverá na Fazenda Sol Nascente? O espaço físico da fazenda é suficiente para essa quantidade de porcas?

Resposta: _____

s) Após dezoito meses, quantas porcas haverá na Fazenda Sol Nascente? O espaço físico da fazenda é suficiente para esse número de porcas? Use o aplicativo.

Resposta: _____

t) Qual o número máximo de meses que o senhor B.Zerra consegue manter sua criação de porcas, sem fazer a reforma de ampliação das instalações? Use o aplicativo.

Resposta: _____

5.1.4 Questionário - Matriz de Leslie

a) Dê sua opinião sobre as atividades.

Resposta: _____

b) Qual das três atividades você mais gostou? Por quê?

Resposta: _____

c) Qual das três atividades você achou mais fácil? E a mais difícil? Por quê?

Resposta: _____

d) As atividades foram interessantes? Por quê?

Resposta: _____

5.2 Aplicação da sequência didática

A sequência didática foi aplicada em uma turma com 26 estudantes do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública do sul de Minas Gerais. Em uma conversa inicial, os estudantes foram convidados a participar da pesquisa de forma voluntária e anônima. Foram explicados os objetivos e como aconteceria a atividade. Os estudantes assinaram o Termo de Assentimento e seus responsáveis o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para poder dar início a aplicação da sequência didática. Vale ressaltar que a pesquisa foi submetida na Plataforma Brasil e aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Lavras.

Ao desenvolver a sequência didática os estudantes tiveram a liberdade de discutir as ideias e soluções entre eles.

Na Atividade 1, vinte e cinco estudantes estavam presentes. Tal atividade é uma introdução de como trabalhar com uma população distribuída em faixas etárias, com o objetivo dos estudantes perceberem como ocorrem as mudanças de faixa etária. Os estudantes devem entender que as bezerras que nascem no período de dois anos (período de tempo nessa atividade para que toda a população mude de faixa etária) estarão na primeira faixa etária, uma porcentagem do número de bezerras da primeira faixa etária estará na segunda faixa etária e uma porcentagem da segunda faixa etária estará na terceira faixa etária, de acordo com a taxa de sobrevivência da respectiva faixa etária.

Os estudantes conseguiram realizar a Atividade 1 corretamente sem dificuldades, no entanto, alguns se sentiram um pouco inseguros em realizar uma atividade nova e diferente sem a minha ajuda, pois estão acostumados com uma dinâmica em que eu explico e resolvo exemplos no quadro, e, só após isso, eles tentam resolver exercícios similares. Assim, alguns estudantes necessitaram da minha confirmação sobre os cálculos realizados por eles, outros estudantes, mesmo antes de realizarem os cálculos, indagavam-me se estava correto o raciocínio

apresentado. Na maioria das vezes eles estavam corretos, só precisavam que eu passasse uma segurança para continuarem.

No item a), para encontrar quantas vacas o senhor B. Zerra teria na segunda e terceira faixa etária, 18 estudantes (72%) usaram regra de três para calcular a porcentagem de vacas que sobreviveram, 6 estudantes (24%) usaram a definição de porcentagem e 1 estudante (4%) não realizou a atividade. Observe na Figura 5.9 a resolução usando regra de três do estudante A e, na Figura 5.10, a resolução usando a definição de porcentagem do estudante B, ambos para encontrar o número de vacas da segunda faixa etária.

Figura 5.9 – Atividade 1 do estudante A.

• 2º faixa etária: na segunda faixa etária terá as bezerras da primeira faixa etária que sobreviverão, ou seja, 70% de 200 bezerras. Essas bezerras da primeira faixa etária, que sobreviverão, serão as vacas da segunda faixa etária. Quantas vacas o senhor B.Zerra terá na segunda faixa etária?

Resposta: 340

Dizemos que 70% é a taxa de sobrevivência da primeira faixa etária.

$$\begin{array}{r} 200 \times 300 \\ \times \quad 70 \\ \hline 300 \times = 34000 \\ x = \frac{34000}{100} = 340 \\ x = 340 \end{array}$$

Fonte: Da autora (2024).

Figura 5.10 – Atividade 1 do estudante B.

$$\begin{array}{r} a) \quad 120 \quad 240 \\ \times \quad 2 \quad + 160 \\ \hline 240 \quad 390 \end{array}$$

• $70 \cdot 200 = 14000$ • $80 \cdot 150 = 12000$
 $14000 \div 100 = 140$ $12000 \div 100 = 120$

Fonte: Da autora (2024).

Vale ressaltar que os estudantes calcularam corretamente no item a) o valor da primeira faixa etária e o item b).

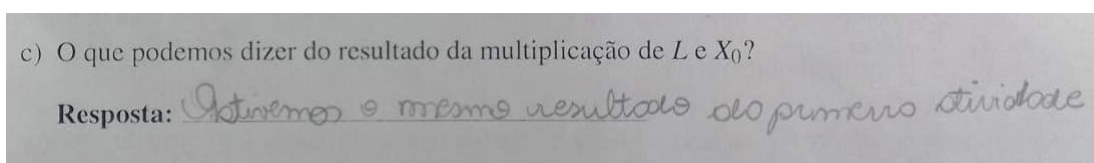
Na Atividade 2, vinte e cinco estudantes estavam presentes, e o estudante ausente nessa atividade não foi o mesmo estudante que faltou na aplicação da Atividade 1. Na Atividade 2 foi apresentada aos estudantes a matriz de Leslie e esperávamos que eles associassem que os cálculos realizados na Atividade 1, para determinar a distribuição etária da população após 2 anos, pudessem ser feitos por meio da multiplicação das matrizes L e X_0 . Além disso, também

esperávamos que eles observassem que para encontrar a distribuição etária em um determinado tempo futuro, bastaria multiplicar L pela matriz que contém a distribuição etária no tempo anterior.

Nos itens a) e b), todos os estudantes acertaram, realizaram com facilidade a multiplicação de matrizes LX_0 e representaram a matriz X_1 corretamente, uma vez que a atividade direcionava o que deveria ser feito.

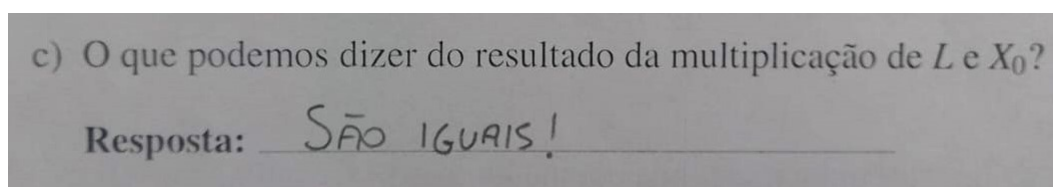
No item c), todos os estudantes também acertaram, eles deveriam comparar os itens a) e b) e compreender que tanto a multiplicação das matrizes quanto os cálculos realizados na Atividade 1 resultavam na matriz X_1 . As respostas que foram dadas pelos estudantes foram “igual ao X_1 ”, “obtivemos o mesmo resultado” e “são iguais”. Entendemos que o raciocínio do estudante estava correto nos três tipos de respostas. Observe as Figuras 5.11, 5.12 e 5.13 com as diferentes respostas ao item c).

Figura 5.11 – Atividade 2 item c) do estudante A.



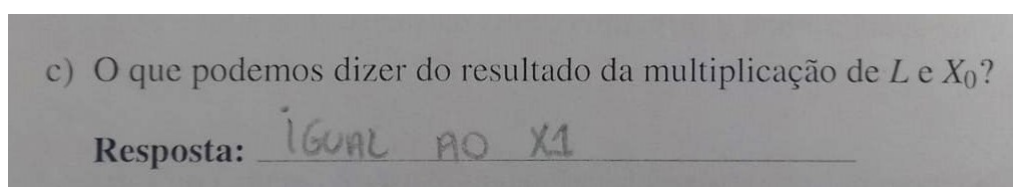
Fonte: Da autora (2024).

Figura 5.12 – Atividade 2 item c) do estudante C.



Fonte: Da autora (2024).

Figura 5.13 – Atividade 2 item c) do estudante D.

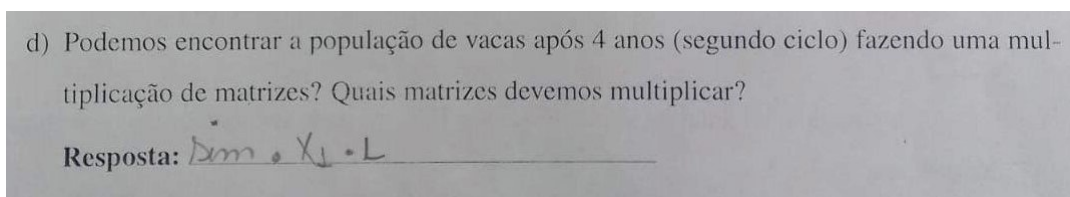


Fonte: Da autora (2024).

É importante destacar que nesta atividade alguns estudantes ficaram um pouco confusos com o que significava faixa etária e ciclo, neste momento, tive que auxiliá-los a distinguir o significado de cada termo.

No item d), a resposta que esperávamos era afirmativa, isto é, que era possível calcular a população de vacas após 4 anos e que para isso deveríamos multiplicar as matrizes L e X_1 . Nesse item, 7 estudantes (28%) responderam erroneamente que as matrizes que devemos multiplicar era L e X_0 , 7 estudantes (28%) responderam corretamente LX_1 e 11 estudantes (44%) responderam X_1L , não observando que o produto de matrizes não é comutativo. Observe a Figura 5.14 com esse erro.

Figura 5.14 – Atividade 2 item d) do estudante A.



Fonte: Da autora (2024).

O item e), pedia aos estudantes para calcularem o número de vacas em cada faixa etária após 4 anos, 21 estudantes (84%) responderam corretamente o número de bezerras que teremos na primeira faixa etária e 4 estudantes (16%) erraram, pois fizeram os cálculos com os valores incorretos, contudo todos os estudantes acertaram os valores da segunda e terceira faixa etária.

Todos os estudantes responderam corretamente o item f). No item g), os estudantes deveriam escrever a matriz X_2 , 2 estudantes (8%) que erraram o item e) também erraram o valor da primeira linha (primeira faixa etária) ao escrever a matriz, os demais 23 estudantes (92%) responderam corretamente. Todos os estudantes acertaram o item h). No item i), 1 estudante (4%) deixou em branco e 24 estudantes (96%) responderam corretamente.

O objetivo do item j) era verificar se os estudantes compreenderam que $LX_0 = X_1$, $LX_1 = X_2$, $LX_2 = X_3$, e assim por diante. A resposta esperada para esse item era a multiplicação LX_2 . Não era necessário realizar a multiplicação, apenas indicar quais matrizes deveriam ser multiplicadas. Obtivemos quatro tipos de respostas, 7 estudantes (28%) responderam apenas “multiplicando as matrizes”, sem especificar quais eram essas matrizes, 1 estudante (4%) respondeu “multiplicando as matrizes L e X_2 ” como o esperado, 6 estudantes (24%) responderam “multiplicando as matrizes L e X_2 ” e realizaram os cálculos como na Atividade 1 (sem utilizar a multiplicação de matrizes) e 11 estudantes (44%) não indicaram quais matrizes deveriam multiplicar, mas responderam fazendo os cálculos como na Atividade 1. Observe a Figura 5.15 com a resposta do estudante A contendo os cálculos.

Figura 5.15 – Atividade 2 item j) do estudante A.

j) Como você faria para encontrar a quantidade de animais do senhor B.Zerra após 6 anos (terceiro ciclo)?

Resposta: 2° faixa = 273 \rightarrow 497
 3° faixa = 224

2° faixa = 380 100%
 \times 30%
 $x = 266$

3° faixa = 273 100%
 \times 80%
 $x = 218,4$

Fonte: Da autora (2024).

Percebemos que o enunciado do item j) não estava escrito de forma adequada, pois não ficou claro para os estudantes que a nossa intenção era que ele respondesse que deveria multiplicar L por X_2 , e que não era necessário a realização dos cálculos. Assim, reescrevemos o item j) de maneira mais clara na proposta final que está no Apêndice C.

Na Atividade 3, vinte e quatro estudantes estavam presentes. Tal atividade tem por objetivo consolidar a aprendizagem e introduzir o aplicativo Matrix Calculator para realizar operações com matrizes. Na Atividade 3 os estudantes estavam mais seguros e fizeram com tranquilidade a atividade, mesmo ela sendo a mais extensa.

Os itens de a) até g) se assemelhavam à Atividade 1. Todos os estudantes responderam corretamente os itens a), b) e c). No item d) era perguntado se existiriam porcas na faixa etária de 12 a 18 meses após seis meses. A resposta esperada era negativa, pois as porcas iriam para o abatedouro. 13 estudantes (54%) não entenderam o problema e responderam erroneamente que sim, 11 estudantes (46%) responderam corretamente.

O item e) solicitava aos estudantes que calculassem o número de porcas em cada faixa etária após seis meses. As respostas corretas eram 68, 17,5 e 15,3 porcas, respectivamente, na primeira, segunda e terceira faixa etária. Nesse item, 17 estudantes (71%) responderam corretamente e 7 estudantes (29%) erraram o valor da primeira faixa etária. É relevante destacar que alguns estudantes arredondaram o valor da segunda e terceira faixa etária para 17 e 15, respectivamente, e essas respostas foram consideradas corretas. Observe a Figura 5.16, que ilustra a resposta do estudante que errou o valor da primeira faixa etária e arredondou os valores da segunda e terceira faixa etária.

Figura 5.16 – Atividade 3 item e) do estudante E.

e) Depois de seis meses, quantas porcas, em cada uma das três faixas etárias, haverá na fazenda?

Respostas:

Faixa etária de 0 a 6 meses: _____ 25%

Faixa etária de 6 a 12 meses: _____ 17%

Faixa etária de 12 a 18 meses: _____ 15

Handwritten calculations on the right side of the form:

$$\begin{array}{l} 100 \\ 90 \end{array} \times \begin{array}{l} 17 \\ 100 \end{array} = 17,90$$

$$100x = 1530$$

$$x = \frac{1530}{100}$$

$$x = 15$$

Fonte: Da autora (2024).

Reconhecemos que o item e) poderia ser aperfeiçoado em dois aspectos, o primeiro seria especificar um lugar para os estudantes realizarem os cálculos, pois aqueles que erraram não deixaram registradas as contas, o que nos impossibilitou de perceber qual foi o raciocínio utilizado. O segundo aspecto seria ter escolhido a população inicial de forma que os cálculos no primeiro período de tempo resultassem em números inteiros, uma vez que trabalhar somente com números inteiros em todos os períodos de tempo é muito difícil.

No item f) pedia o total de porcas após seis meses, 17 estudantes (71%) responderam corretamente e 7 estudantes (29%) responderam de forma incorreta, sendo estes os mesmos estudantes que erraram o item anterior. O item g) todos responderam corretamente.

Os itens de h) até l) eram semelhantes aos da Atividade 2. No item h), os estudantes deveriam escrever a matriz de Leslie para a população de porcas, 23 estudantes (96%) responderam corretamente e 1 estudante (4%) respondeu a matriz de Leslie da Atividade 2 sobre as vacas.

O item i) solicitava aos estudantes para que representassem a matriz X_0 , 7 estudantes (29%) erraram, pois escreveram os valores que encontraram no item e), que na verdade correspondia a matriz X_1 e 17 estudantes (71%) responderam corretamente. No item j), os estudantes deveriam escrever a matriz X_1 utilizando os valores calculados no item e), 7 estudantes (29%) erraram o valor da primeira faixa etária, porém foram coerentes pois escreveram o que encontraram no item e), e 17 estudantes (71%) responderam certo.

No item k), os estudantes precisavam efetuar a multiplicação LX_0 , 1 estudante (4%) efetuou a multiplicação corretamente, porém como tinha errado o item i), o resultado ficou diferente do esperado, 7 estudantes (29%) erraram ao efetuar a multiplicação e 16 estudantes (67%) acertaram.

O item l) indagava aos estudantes o que podiam dizer sobre a matriz LX_0 e a matriz X_1 . A resposta esperada era que elas eram iguais, 7 estudantes (29%) erraram, mas foram coerentes ao responder, pois também erraram nos itens anteriores, 17 estudantes (71%) responderam corretamente.

Nos itens de m) até t) os estudantes usaram o aplicativo Matrix Calculator. Nos item m), n) e o) os estudantes apenas escreveram as matrizes no aplicativo para aprenderem como usar. No item p), 7 estudantes (29%) responderam errado de acordo com o que era esperado, mas de forma coerente com o que tinham feito nos itens anteriores e 17 estudantes (71%) responderam corretamente.

Nos itens q), r) e s), 4 estudantes (17%) fizeram erroneamente o que era solicitado, 3 estudantes (12%) erraram no valor final esperado, pois usaram o valor errado de X_1 que calcularam nos itens anteriores, mas foram coerentes e 17 estudantes (71%) acertaram.

No item t), esperávamos que os estudantes determinassem a distribuição etária para 24 e 30 meses, ou seja, as matrizes X_4 e X_5 , usando o aplicativo e somassem as entradas de cada uma delas para perceber quando o total da população ultrapassaria 1.500 animais, que é a capacidade máxima da fazenda. Neste item, 7 estudantes (29%) erraram, importante destacar que alguns estudantes responderam corretamente 24 meses, mas não apresentaram nenhum cálculo, então as respostas foram consideradas erradas, e 17 estudantes (71%) responderam de forma correta.

Finalizadas as três atividades, os estudantes responderam ao questionário anonimamente para expressarem suas opiniões sobre a experiência. O questionário foi respondido por 24 estudantes.

No primeiro item do questionário, era para os estudantes opinarem sobre as atividades. A maioria dos estudantes gostou das atividades, pois foi algo diferente do que eles estavam acostumados, alguns estudantes acharam as atividades difíceis e outros comentaram a importância de revisar o conteúdo de matrizes.

O segundo item indagava qual das três atividades o estudante mais gostou e o porquê, 18 estudantes (75%) responderam que gostaram mais da primeira, de modo geral, porque consideraram mais fácil e que melhor compreenderam e 6 estudantes (25%) gostaram mais da terceira atividade porque usaram o aplicativo.

O terceiro item perguntava aos estudantes qual das atividades eles acharam mais fácil e a mais difícil, e o porquê. Em relação a mais fácil, 22 estudantes (92%) responderam que foi a primeira, por ser mais curta e simples, 1 estudante (4%) respondeu a segunda, porque já

tinha visto anteriormente na Atividade 1 e 1 estudante (4%) respondeu a terceira, por causa do aplicativo. Já em relação a mais difícil, 2 estudantes (8%) responderam a segunda, porque os enunciados eram maiores, e 22 estudantes (92%) responderam a terceira, porque era mais extensa e tinha mais cálculos.

No quarto item, perguntava se as atividades foram interessantes e o porquê, todos acharam interessante, pois proporcionou uma dinâmica diferente do que estavam acostumados, puderam interagir com os colegas para resolver as questões, revisaram o conteúdo e aprenderam a usar o aplicativo.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, aplicamos o modelo de Leslie para a população feminina do estado de Minas Gerais considerando, como população inicial, os dados do censo demográfico feito pelo IBGE em 2010. Consideramos que a população vive no máximo até 100 anos e a dividimos em 20 faixas etárias com duração de 5 anos. Comparamos as projeções do modelo de Leslie com as projeções feitas pelo IBGE e verificamos que ambos os resultados são próximos, confirmando o quanto o modelo de Leslie é eficiente para estudar o comportamento de populações femininas no decorrer do tempo.

Como contribuição para o ensino e aprendizagem de matrizes, elaboramos e aplicamos uma sequência didática que introduz a matriz de Leslie como uma aplicação do conteúdo de matrizes para os estudantes do segundo ano do Ensino Médio. Observamos que a maioria dos estudantes gostou das atividades, que trouxeram uma dinâmica diferente para as aulas de Matemática, desenvolvendo autonomia dos estudantes e ampliando o conhecimento matemático para além dos livros didáticos. Além disso, com o uso do aplicativo Matrix Calculator foi possível realizar vários cálculos demorados com matrizes de forma rápida, simples e interessante para os estudantes.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- BARCO, K. V. P. **Modelo matricial de Leslie**: conceitos algébricos no estudo de crescimento populacional por faixa etária. Monografia (Especialização) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2012. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/16989>>. Acesso em: 18 out. 2023.
- CODECO, P. D. F. **Modelo matricial de Leslie**: estudo do crescimento populacional do Brasil e estados do Espírito Santo e Acre. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018. Disponível em: <<https://ime.unicamp.br/pos-graduacao/modelo-matricial-leslie-estudo-crescimento-populacional-brasil-estados-espírito-santo>>. Acesso em: 10 nov. 2022.
- DOURADO, G. C. **Estimativa do crescimento da população feminina paraense usando o modelo matricial de Leslie**. Monografia (TCC) — Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Santana do Araguaia, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unifesspa.edu.br/handle/123456789/1249>>. Acesso em: 21 out. 2023.
- FOGLIARINI FILHA, C. B. O. **Uso de aplicativos computacionais e produto matricial**: duas propostas de aplicação. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1868&id2=74882>. Acesso em: 02 out. 2023.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Banco de Tabelas Estatísticas**. Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <<https://sidra.ibge.gov.br/home/pnadcm>>. Acesso em: 15 jan. 2023.
- LESLIE, P. H. On the use of matrices in certain population mathematics. **Biometrika**, v. 33, n. 3, p. 183–212, 1945.
- MACÊDO, L. V. L.; FERRAÇO, I. B. Utilização da matriz de Leslie para estudar o crescimento populacional feminino da cidade de Eunápolis. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 14 Edição ERMAC, 2019. Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v14a10-utilizacao-da-matriz-de-leslie-para-estudar.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2023.
- MESQUITA, D. Matrizes de Leslie e valores próprios dominantes. **Revista Matemática Universitária**, v. 50/51, 2011. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n50_n51_Artigo03.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2023.
- ONOFRE, M. M. **Matriz de Leslie aplicada aos modelos populacionais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3605&id2=150660434>. Acesso em: 07 ago. 2022.
- PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, v. 8, n. 17, 2013. Disponível em: <https://www.bage.ideau.com.br/wp-content/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c4863731_1.pdf>. Acesso em: 25 out. 2022.
- POOLE, D. **Linear algebra**: a modern introduction. Canada: Cengage Learning, 2011.

SILVEIRA, A. R. **Matriz de Leslie e aplicações**. Monografia (TCC) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/1103/1/ARS06092016.pdf>>. Acesso em: 20 out. 2023.

VIEIRA, L. B. **Uma análise sobre a matriz de Leslie aplicada ao crescimento populacional dos estados de Goiás e Tocantins e do Brasil**. Monografia (TCC) — Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2019. Disponível em: <https://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/1775?locale=pt_BR>. Acesso em: 21 out. 2023.

APÊNDICE A – Sequência didática aplicada aos estudantes para impressão

A sequência didática a seguir foi aplicada em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública no sul de Minas Gerais e estamos deixando disponível para a impressão.

Atividade 1

O senhor B.Zerra é um fazendeiro que cria vacas leiteiras. Em sua fazenda Céu Encantado ele possui 470 vacas distribuídas em três faixas etárias. Na primeira faixa etária, de 0 a 2 anos, há 200 bezerras, na segunda faixa etária, de 2 a 4 anos, há 150 vacas e na terceira faixa etária, de 4 a 6 anos, há 120 vacas.

Figura 1 – Distribuição etária inicial.



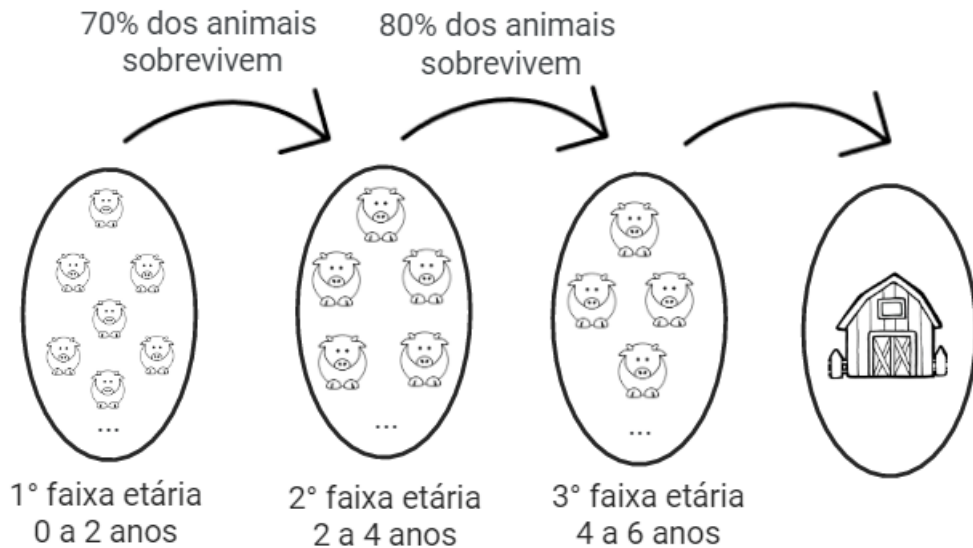
As vacas da primeira faixa etária são muito jovens e não se reproduzem, enquanto que as vacas da segunda faixa etária têm em média uma bezerra e, as vacas da terceira faixa etária, têm em média duas bezerra a cada dois anos.

Figura 2 – Reprodução em cada faixa etária.



Vamos supor que 70% da criação de 0 a 2 anos sobreviva, e passe para a faixa etária de 2 a 4 anos, e 80% da criação de 2 a 4 anos sobreviva, e mude para a faixa etária de 4 a 6 anos. Os animais são transferidos para outra fazenda quando completam seis anos.

Figura 3 – Taxas de sobrevivência das faixas etárias.



O senhor B.Zerra precisa fazer um planejamento financeiro e, para isso, é necessário levantar algumas informações sobre sua criação. Vamos ajudá-lo? Realize a atividade respondendo as questões nos espaços em branco.

- a) Vamos calcular quantas vacas o senhor B.Zerra terá, em cada faixa etária, depois de um ciclo de 2 anos.

1° faixa etária: a primeira faixa etária contém as bezerras nascidas ao longo dos dois anos. Qual é o número de bezerras nascidas?

Resposta: _____

2° faixa etária: a segunda faixa etária contém as bezerras da primeira faixa etária que sobreviverão, ou seja, 70% de 200 bezerras. Essas bezerras da primeira faixa etária, que sobreviverão, serão as vacas da segunda faixa etária. Quantas vacas o senhor B.Zerra terá na segunda faixa etária?

Resposta: _____

Dizemos que 70% é a taxa de sobrevivência da primeira faixa etária.

3° faixa etária: a terceira faixa etária contém os animais da segunda faixa etária que sobreviverão, isto é, 80% de 150 vacas. Quantas vacas o senhor B.Zerra terá na terceira faixa etária?

Resposta: _____

Qual é a taxa de sobrevivência da segunda faixa etária?

Resposta: _____

b) Qual é o total de vacas o senhor B.Zerra possuirá após dois anos?

Resposta: _____

Atividade 2

Agora, veremos como as matrizes irão nos ajudar a calcular o número de animais nas três diferentes faixas etárias da Fazenda Céu Encantado. Construiremos a matriz L , chamada Matriz de Leslie, com as informações do número de nascimentos e taxas de sobrevivência de cada faixa etária.

1^a **linha de L** : número de nascimentos por animal em cada faixa etária;

2^a **linha de L** : taxa de sobrevivência dos animais da primeira faixa etária para a segunda;

3^a **linha de L** : taxa de sobrevivência dos animais da segunda faixa etária para a terceira:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}.$$

O número 0 na primeira linha e primeira coluna da matriz L significa que não há nascimentos de vacas que estão na primeira faixa etária.

O número 1 na primeira linha e segunda coluna da matriz L representa o número médio de nascimentos, por vaca, da segunda faixa etária.

O número 2 na primeira linha e terceira coluna da matriz L representa o número médio de nascimentos, por vaca, da terceira faixa etária.

O número 0,7 na segunda linha e primeira coluna da matriz L é a taxa de sobrevivência da primeira faixa etária.

O número 0,8 na terceira linha e segunda coluna da matriz L é a taxa de sobrevivência da segunda faixa etária

Os demais elementos da matriz L completamos com zeros.

A quantidade inicial de vacas do senhor B.Zerra pode ser representada por uma matriz X_0 de tamanho 3×1 ,

$$X_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule a multiplicação de L e X_0 .

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} _ \cdot _ + _ \cdot _ + _ \cdot _ \\ _ \cdot _ + _ \cdot _ + _ \cdot _ \\ _ \cdot _ + _ \cdot _ + _ \cdot _ \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix}.$$

b) Usando as informações do item a) da Atividade 1, vamos representar a quantidade de animais do senhor B.Zerra, depois de dois anos, como uma matriz, assim como fizemos com a quantidade inicial de animais. Chamaremos essa matriz de X_1 ,

$$X_1 = \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix}.$$

c) O que podemos dizer do resultado da multiplicação de L e X_0 ?

Resposta: _____

d) Podemos encontrar a população de vacas após 4 anos (segundo ciclo) fazendo uma multiplicação de matrizes? Quais matrizes devemos multiplicar?

Resposta: _____

e) Verifique se a sua resposta no item d) está correta, calculando o número de vacas em cada faixa etária, após 4 anos (dois ciclo de 2 anos), da mesma forma que você fez no item a) da Atividade 1:

1° Faixa Etária: quantas bezerras nascerão no decorrer do segundo ciclo?

Resposta: _____

2° Faixa Etária: quantos animais sobreviverão na primeira faixa etária e passarão para a segunda faixa etária?

Resposta: _____

3° Faixa Etária: quantas vacas sobreviverão na segunda faixa etária e mudarão para a terceira faixa etária?

Resposta: _____

f) Calcule o total de animais do segundo ciclo, ou seja, após quatro anos.

Resposta: _____

g) Escreva a matriz X_2 de tamanho 3×1 que representa a quantidade de animais, por faixa etária, depois de 4 anos.

$$X_2 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

h) Efetue a multiplicação das matrizes L e X_1 :

$$LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \end{pmatrix}$$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

i) O que podemos dizer do resultado da multiplicação de L e X_1 ?

Resposta: _____

j) Como você faria para encontrar a quantidade de animais do senhor B.Zerra após 6 anos (terceiro ciclo)?

Resposta: _____

Atividade 3

Nesta atividade, vamos aprender a usar o aplicativo Matrix Calculator, que já foi instalado no celular, para fazer algumas multiplicações de matrizes e resolver novos problemas de uma outra fazenda do senhor B.Zerra. Dessa forma, aprenderemos a usar uma ferramenta digital para operar com as matrizes.

O senhor B.Zerra ficou tão entusiasmado em poder levantar informações sobre sua criação de vacas leiteiras estudando a Matriz de Leslie, que resolveu investigar a criação de porcas para o abate. Vamos ajudar o senhor B.Zerra?

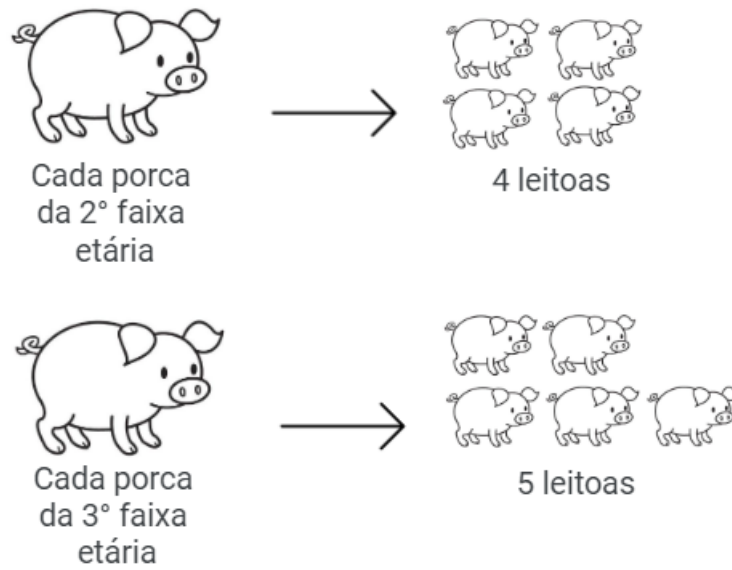
O senhor B.Zerra também é proprietário da fazenda Sol Nascente que cria porcas para o abate. Sua criação é formada por 25 porcas na faixa etária de 0 a 6 meses, 17 porcas na faixa etária de 6 a 12 meses e nenhuma porca na faixa etária de 12 a 18 meses.

Figura 4 – Distribuição etária inicial das porcas.



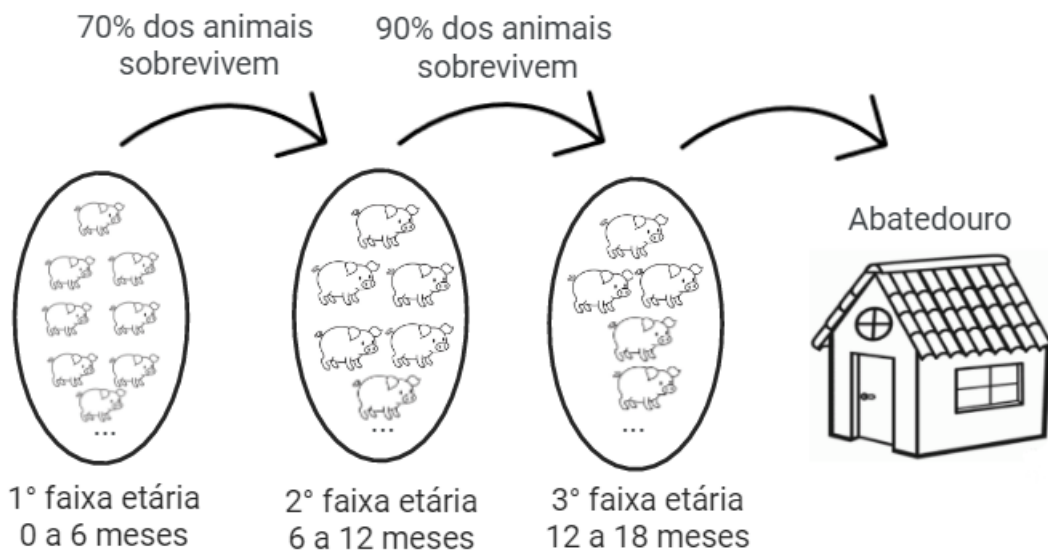
As porcas de 0 a 6 meses ainda são muito jovens e não se reproduzem, enquanto as porcas de 6 a 12 meses têm em média 4 leitões a cada seis meses. O senhor B.Zerra sabe que as porcas de 12 a 18 meses têm em média 5 leitões a cada seis meses.

Figura 5 – Reprodução das porcas em cada faixa etária.



Suponha que 70% da criação de 0 a 6 meses sobreviva e passe para a faixa etária de 6 a 12 meses e 90% da criação de 6 a 12 meses sobreviva e mude para a faixa etária de 12 a 18 meses. Quando os animais completam 18 meses são levados para o abate.

Figura 6 – Taxas de sobrevivência das porcas nas faixas etárias.



O senhor B.Zerra está preocupado com o espaço físico que abriga os animais, pois daqui a algum tempo o mesmo não será suficiente. Atualmente, a capacidade máxima é de 1500 animais. Ajude o senhor B.Zerra a descobrir daqui a quantos meses será inevitável fazer uma reforma de ampliação das instalações onde os animais ficam. Para isso, responda as perguntas:

a) Quantas porcas o senhor B.Zerra tem atualmente em sua fazenda?

Resposta: _____

b) Após seis meses, as leitoas da faixa etária de 0 a 6 meses estarão em qual faixa etária?

Resposta: _____

c) As porcas da faixa etária de 6 a 12 meses estarão em qual faixa etária depois de seis meses?

Resposta: _____

d) A Fazenda Sol Nascente terá porcas na faixa etária de 12 a 18 meses após seis meses?

Resposta: _____

e) Depois de seis meses, quantas porcas, em cada uma das três faixas etárias, haverá na fazenda?

Respostas:

Faixa etária de 0 a 6 meses: _____

Faixa etária de 6 a 12 meses: _____

Faixa etária de 12 a 18 meses: _____

f) Qual o total de porcas após seis meses?

Resposta: _____

g) Após seis meses, o espaço físico que o senhor B.Zerra dispõe ainda é suficiente para o número de porcas?

Resposta: _____

h) Agora, como no problema das vacas, construa a Matriz de Leslie para o problema das porcas:

$$L = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix}.$$

- i) Represente a quantidade inicial de porcas, nas três diferentes faixas etárias, como uma matriz de tamanho 3×1 :

$$X_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

- j) Usando as informações do item e), represente a quantidade de porcas do senhor B.Zerra, depois de seis meses, como uma matriz de tamanho 3×1 :

$$X_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

- k) Calcule a multiplicação de L e X_0 :

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \end{pmatrix}$$

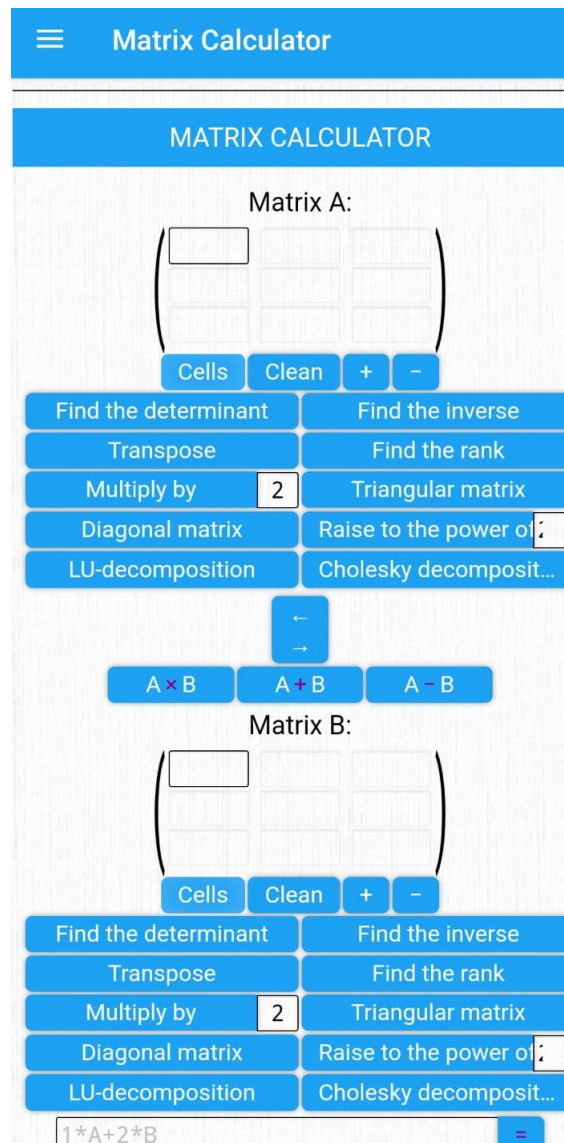
$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

- l) O que você pode dizer sobre a matriz LX_0 e a matriz X_1 ?

Resposta: _____

m) Agora, abra o aplicativo Matrix Calculator que você já instalou no seu celular.

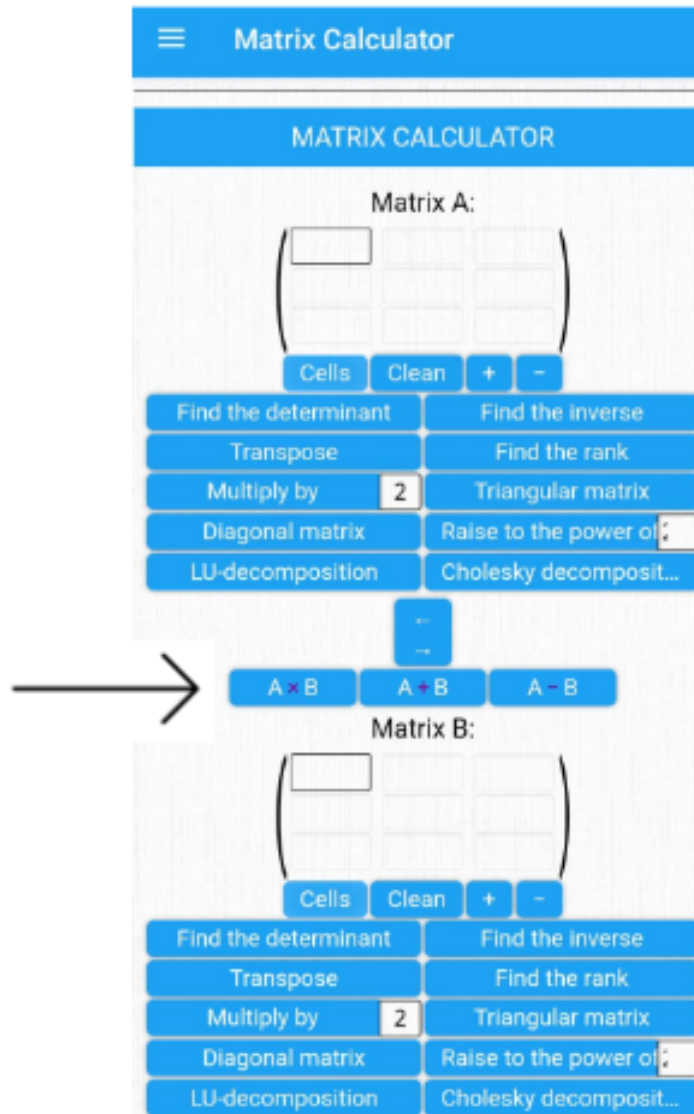
Figura 7 – Tela inicial do aplicativo Matrix Calculator.



- n) No aplicativo Matrix Calculator, no lugar da matriz A você deve preencher com os elementos da matriz L . No aplicativo, a primeira matriz é chamada de A , não sendo possível alterar esse nome.
- o) No lugar da matriz B , você deve colocar os elementos da matriz X_0 . No aplicativo a segunda matriz é chamada de B , não sendo possível alterar esse nome.

p) Faça a multiplicação dessas matrizes clicando no botão azul $A \times B$.

Figura 8 – Botão para multiplicar.



O que você pode dizer sobre o resultado verificados no aplicativo e o resultado encontrado manualmente no item k)?

Resposta: _____

q) Calcule a quantidade de porcas depois de doze meses. Para isso, faça a multiplicação LX_1 no aplicativo e chame o resultado de X_2 :

$$LX_1 = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix}$$

$$X_2 = LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

r) Após doze meses, quantas porcas haverá na Fazenda Sol Nascente? O espaço físico da fazenda é suficiente para essa quantidade de porcas?

Resposta: _____

s) Após dezoito meses, quantas porcas haverá na Fazenda Sol Nascente? O espaço físico da fazenda é suficiente para esse número de porcas? Use o aplicativo.

Resposta: _____

t) Qual o número máximo de meses que o senhor B.Zerra consegue manter sua criação de porcas, sem fazer a reforma de ampliação das instalações? Use o aplicativo.

Resposta: _____

Questionário - Matriz de Leslie

a) Dê sua opinião sobre as atividades.

Resposta: _____

b) Qual das três atividades você mais gostou? Por quê?

Resposta: _____

c) Qual das três atividades você achou mais fácil? E a mais difícil? Por quê?

Resposta: _____

d) As atividades foram interessantes? Por quê?

Resposta: _____

APÊNDICE B – Solução da sequência didática aplicada aos estudantes

Atividade 1

a) $150 \cdot 1 = 150$
 $120 \cdot 2 = 240$
 $150 + 240 = 390.$
 $200 \cdot \frac{70}{100} = 140.$
 $150 \cdot \frac{80}{100} = 120.$
 $80\%.$

b) $390 + 140 + 120 = 650.$

Atividade 2

a) $LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 200 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 120 \\ 0,7 \cdot 200 + 0 \cdot 150 + 0 \cdot 120 \\ 0 \cdot 200 + 0,8 \cdot 150 + 0 \cdot 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

b) $X_1 = \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}.$

c) $LX_0 = X_1$, obtemos o mesmo resultado da Atividade 1.

d) sim, LX_1 .

e) $140 \cdot 1 = 140$
 $120 \cdot 2 = 240$
 $140 + 240 = 380.$
 $390 \cdot \frac{70}{100} = 273.$
 $140 \cdot \frac{80}{100} = 112.$

f) $380 + 273 + 112 = 765.$

g) $X_2 = \begin{pmatrix} 380 \\ 273 \\ 112 \end{pmatrix}$

h) $LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 390 + 1 \cdot 140 + 2 \cdot 120 \\ 0,7 \cdot 390 + 0 \cdot 140 + 0 \cdot 120 \\ 0 \cdot 390 + 0,8 \cdot 140 + 0 \cdot 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} 380 \\ 273 \\ 112 \end{pmatrix}.$$

i) $LX_1 = X_2.$

j) Deve-se multiplicar as matrizes $LX_2.$

Atividade 3

a) 42.

b) 2ª Faixa Etária.

c) 3ª Faixa Etária.

d) Não, pois estarão no abatedouro.

e) Faixa etária de 0 a 6 meses: $17 \cdot 4 = 68$

$$0 \cdot 5 = 0$$

$$68 + 0 = 68.$$

$$\text{Faixa etária de 6 a 12 meses: } 25 \cdot \frac{70}{100} = 17,5.$$

$$\text{Faixa etária de 12 a 18 meses: } 17 \cdot \frac{90}{100} = 15,3.$$

f) $68 + 17,5 + 15,3 = 100,8.$

g) Sim.

$$\text{h) } L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{i) } X_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{j) } X_1 = \begin{pmatrix} 68 \\ 17,5 \\ 15,3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{k) } LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 25 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 0 \\ 0,7 \cdot 25 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 25 + 0,9 \cdot 17 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 68 \\ 17,5 \\ 15,3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{l) } LX_0 = X_1.$$

m) Aplicativo.

n) Aplicativo.

o) Aplicativo.

p) Os resultados são iguais.

$$\text{q) } LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 17,5 \\ 15,3 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = LX_1 = \begin{pmatrix} 146,5 \\ 47,6 \\ 15,75 \end{pmatrix}.$$

r) $146,5 + 47,6 + 15,75 = 209,85$, sim.

$$\text{s) } X_3 = LX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 146,5 \\ 47,6 \\ 15,75 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = LX_2 = \begin{pmatrix} 269,15 \\ 102,55 \\ 42,84 \end{pmatrix}, \text{ total} = 269,15 + 102,55 + 42,84 = 414,54, \text{ sim.}$$

$$\text{t) } X_4 = LX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 269,15 \\ 102,55 \\ 42,84 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = LX_3 = \begin{pmatrix} 624,4 \\ 188,41 \\ 92,3 \end{pmatrix}, \text{ total} = 624,4 + 188,41 + 92,3 = 905,11,$$

$$X_5 = LX_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 624,4 \\ 188,41 \\ 92,3 \end{pmatrix}$$

$$X_5 = LX_4 = \begin{pmatrix} 1215,14 \\ 437,08 \\ 169,57 \end{pmatrix}, \text{ total} = 1215,14 + 437,08 + 169,57 = 1821,79, \text{ logo 24 me-}$$

ses.

APÊNDICE C – Sequência didática com correções para impressão

Com a aplicação da sequência didática e a análise dos resultados, percebemos que era necessário fazer alguns ajustes nas atividades, para ficar mais claro o que o enunciado deseja do estudante. Na Atividade 2 reescrevemos o enunciado dos itens c), i) e j). Na atividade aplicada aos estudantes estava:

- c) O que podemos dizer do resultado da multiplicação de L e X_0 ?
- i) O que podemos dizer do resultado da multiplicação de L e X_1 ?
- j) Como você faria para encontrar a quantidade de animais do senhor B.Zerra após 6 anos (terceiro ciclo)?

Modificamos para:

- c) O que podemos dizer do resultado da multiplicação LX_0 e a matriz X_1 ?
- i) O que podemos dizer do resultado da multiplicação LX_1 e a matriz X_2 ?
- j) Quais matrizes você deve multiplicar para encontrar a quantidade de animais do senhor B.Zerra após 6 anos (terceiro ciclo)?

Na Atividade 3 trocamos a distribuição etária inicial $X_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$ para $X_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$,

pois queremos que ao encontrar a distribuição etária após 6 meses (X_1) os valores das três faixas etárias sejam números inteiros.

Além disso, nas três atividades acrescentamos espaço para a realização dos cálculos com a frase **“Faça seus cálculos aqui:”**.

Também nas três atividades trocamos as palavras “ciclo” por “período”, “B.Zerra” por “B. Zerra” e “1º, 2º ou 3º faixa etária” por “1ª, 2ª ou 3ª faixa etária”.

Atividade 1

O senhor B. Zerra é um fazendeiro que cria vacas leiteiras. Em sua fazenda Céu Encantado ele possui 470 vacas distribuídas em três faixas etárias. Na primeira faixa etária, de 0 a 2 anos, há 200 bezerras, na segunda faixa etária, de 2 a 4 anos, há 150 vacas e na terceira faixa etária, de 4 a 6 anos, há 120 vacas.

Figura 9 – Distribuição etária inicial.



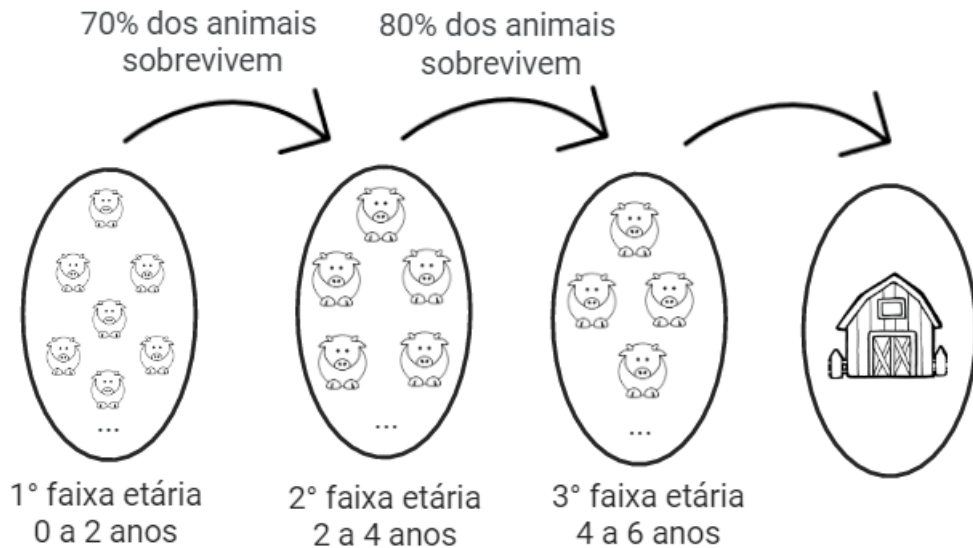
As vacas da primeira faixa etária são muito jovens e não se reproduzem, enquanto que as vacas da segunda faixa etária têm em média uma bezerra e, as vacas da terceira faixa etária, têm em média duas bezerra a cada dois anos.

Figura 10 – Reprodução em cada faixa etária.



Vamos supor que 70% da criação de 0 a 2 anos sobreviva, e passe para a faixa etária de 2 a 4 anos, e 80% da criação de 2 a 4 anos sobreviva, e mude para a faixa etária de 4 a 6 anos. Os animais são transferidos para outra fazenda quando completam seis anos.

Figura 11 – Taxas de sobrevivência das faixas etárias.



O senhor B. Zerra precisa fazer um planejamento financeiro e, para isso, é necessário levantar algumas informações sobre sua criação. Vamos ajudá-lo? Realize a atividade respondendo as questões nos espaços em branco.

- a) Vamos calcular quantas vacas o senhor B. Zerra terá, em cada faixa etária, depois de um período de 2 anos.

1ª faixa etária: a primeira faixa etária contém as bezerras nascidas ao longo dos dois anos. Qual o número de bezerras nascidas?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

2ª faixa etária: a segunda faixa etária contém as bezerras da primeira faixa etária que sobreviveram, ou seja, 70% de 200 bezerras. Essas bezerras da primeira faixa etária, que sobreviveram, serão as vacas da segunda faixa etária. Quantas vacas o senhor B. Zerra terá na segunda faixa etária?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

Dizemos que 70% é a taxa de sobrevivência da primeira faixa etária.

3ª faixa etária: na terceira faixa etária contém os animais da segunda faixa etária que sobreviverão, isto é, 80% de 150 vacas. Quantas vacas o senhor B. Zerra terá na terceira faixa etária?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

Qual é a taxa de sobrevivência da segunda faixa etária?

Resposta: _____

b) Qual é o total de vacas o senhor B. Zerra possuirá após dois anos?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

Atividade 2

Agora, veremos como as matrizes irão nos ajudar a calcular o número de animais nas três diferentes faixas etárias da Fazenda Céu Encantado. Construiremos a matriz L , chamada Matriz de Leslie, com as informações do número de nascimentos e taxas de sobrevivência de cada faixa etária.

1^a **linha de L** : número de nascimentos por animal em cada faixa etária;

2^a **linha de L** : taxa de sobrevivência dos animais da primeira faixa etária para a segunda;

3^a **linha de L** : taxa de sobrevivência dos animais da segunda faixa etária para a terceira:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}.$$

O número 0 na primeira linha e primeira coluna da matriz L significa que não há nascimentos de vacas que estão na primeira faixa etária.

O número 1 na primeira linha e segunda coluna da matriz L representa o número médio de nascimentos, por vaca, da segunda faixa etária.

O número 2 na primeira linha e terceira coluna da matriz L representa o número médio de nascimentos, por vaca, da terceira faixa etária.

O número 0,7 na segunda linha e primeira coluna da matriz L é a taxa de sobrevivência da primeira faixa etária.

O número 0,8 na terceira linha e segunda coluna da matriz L é a taxa de sobrevivência da segunda faixa etária.

Os demais elementos da matriz L completamos com zeros.

A quantidade inicial de vacas do senhor B. Zerra pode ser representada por uma matriz X_0 de tamanho 3×1 ,

$$X_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule a multiplicação de L e X_0 .

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

b) Usando as informações do item a) da Atividade 1, vamos representar a quantidade de animais do senhor B. Zerra, depois de dois anos, como uma matriz, assim como fizemos com a quantidade inicial de animais. Chamaremos essa matriz de X_1 ,

$$X_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

c) O que podemos dizer do resultado da multiplicação LX_0 e a matriz X_1 ?

Resposta: _____

d) Podemos encontrar a população de vacas após 4 anos (segundo período) fazendo uma multiplicação de matrizes? Quais matrizes devemos multiplicar?

Resposta: _____

e) Verifique se a sua resposta no item d) está correta, calculando o número de vacas em cada faixa etária, após 4 anos (dois período de 2 anos), da mesma forma que você fez no item a) da Atividade 1:

1ª Faixa Etária: quantas bezerras nascerão no decorrer do segundo período?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

2ª Faixa Etária: quantos animais sobreviverão na primeira faixa etária e passarão para a segunda faixa etária?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

3ª Faixa Etária: quantas vacas sobreviverão na segunda faixa etária e mudarão para a terceira faixa etária

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

f) Calcule o total de animais do segundo período, ou seja, após quatro anos.

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

- g) Escreva a matriz X_2 de tamanho 3×1 que representa a quantidade de animais, por faixa etária, depois de 4 anos.

$$X_2 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

- h) Efetue a multiplicação das matrizes L e X_1 :

$$LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \end{pmatrix}$$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

- i) O que podemos dizer do resultado da multiplicação LX_1 e a matriz X_2 ?

Resposta: _____

- j) Quais matrizes você deve multiplicar para encontrar a quantidade de animais do senhor B. Zerra após 6 anos (três período)?

Resposta: _____

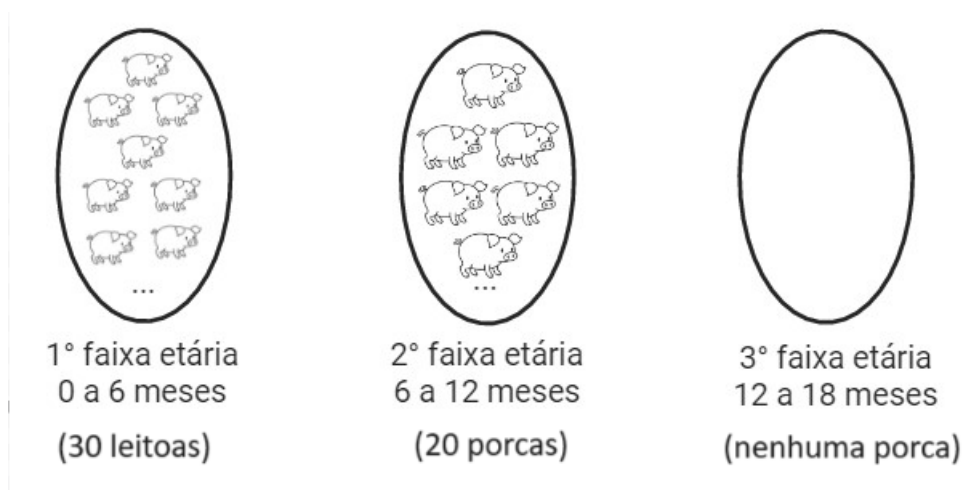
Atividade 3

Nesta atividade, vamos aprender a usar o aplicativo Matrix Calculator, que já foi instalado no celular, para fazer algumas multiplicações de matrizes e resolver novos problemas de uma outra fazenda do senhor B. Zerra. Dessa forma, aprenderemos a usar uma ferramenta digital para operar com as matrizes.

O senhor B. Zerra ficou tão entusiasmado em poder levantar informações sobre sua criação de vacas leiteiras estudando a Matriz de Leslie, que resolveu investigar a criação de porcas para o abate. Vamos ajudar o senhor B. Zerra?

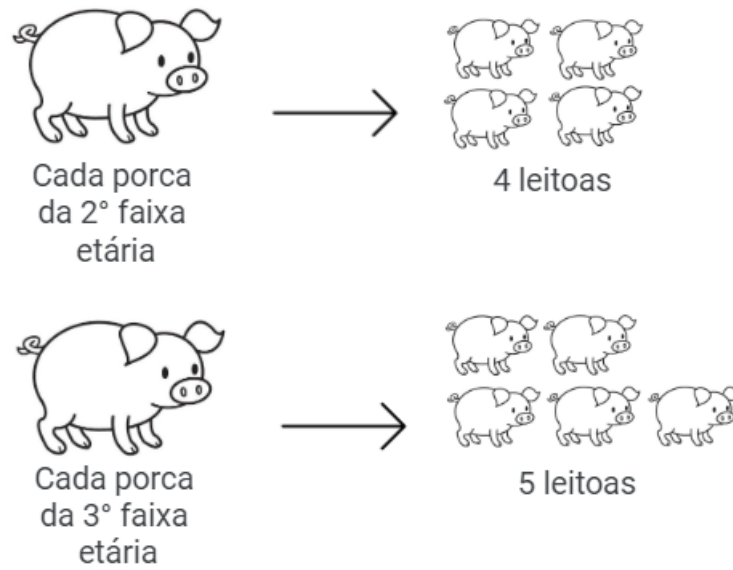
O senhor B. Zerra também é proprietário da fazenda Sol Nascente que cria porcas para o abate. Sua criação é formada por 30 porcas na faixa etária de 0 a 6 meses, 20 porcas na faixa etária de 6 a 12 meses e nenhuma porca na faixa etária de 12 a 18 meses.

Figura 12 – Distribuição etária inicial das porcas.



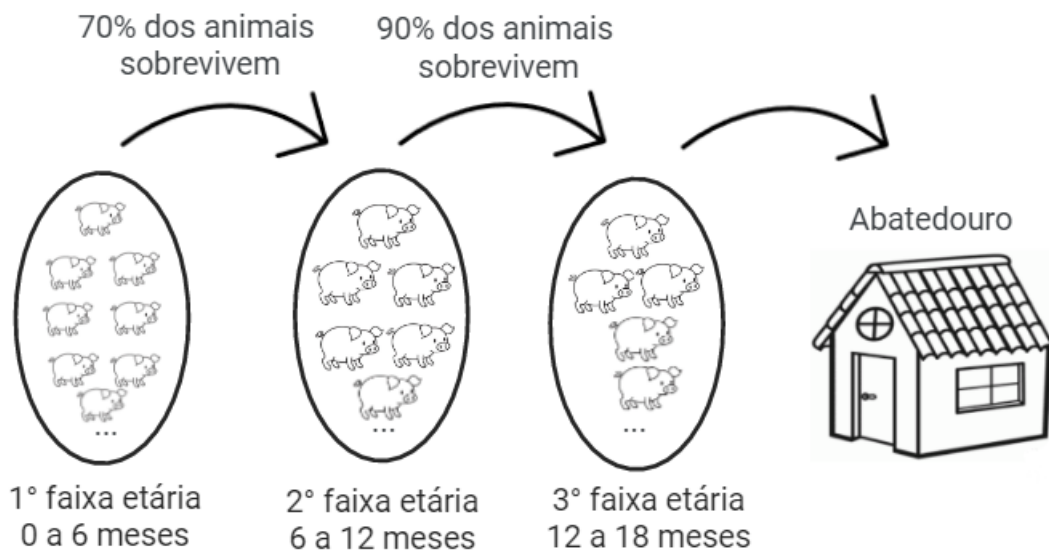
As porcas de 0 a 6 meses ainda são muito jovens e não se reproduzem, enquanto as porcas de 6 a 12 meses têm em média 4 leitões a cada seis meses. O senhor B. Zerra sabe que as porcas de 12 a 18 meses têm em média 5 leitões a cada seis meses.

Figura 13 – Reprodução das porcas em cada faixa etária.



Suponha que 70% da criação de 0 a 6 meses sobreviva e passe para a faixa etária de 6 a 12 meses e 90% da criação de 6 a 12 meses sobreviva e mude para a faixa etária de 12 a 18 meses. Quando os animais completam 18 meses são levados para o abate.

Figura 14 – Taxas de sobrevivência das porcas nas faixas etárias.



O senhor B. Zerra está preocupado com o espaço físico que abriga os animais, pois daqui a algum tempo o mesmo não será suficiente. Atualmente, a capacidade máxima é de 1500 animais. Ajude o senhor B. Zerra a descobrir daqui a quantos meses será inevitável fazer uma reforma de ampliação das instalações onde os animais ficam. Para isso, responda as perguntas:

a) Quantas porcas o senhor B. Zerra tem atualmente em sua fazenda?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

b) Após seis meses, as leitões da faixa etária de 0 a 6 meses estarão em qual faixa etária?

Resposta: _____

c) As porcas da faixa etária de 6 a 12 meses estarão em qual faixa etária depois de seis meses?

Resposta: _____

d) A Fazenda Sol Nascente terá porcas na faixa etária de 12 a 18 meses após seis meses?

Resposta: _____

e) Depois de seis meses, quantas porcas, em cada uma das três faixas etárias, haverá na fazenda?

Faça seus cálculos aqui:

Respostas:

Faixa etária de 0 a 6 meses: _____

Faixa etária de 6 a 12 meses: _____

Faixa etária de 12 a 18 meses: _____

f) Qual o total de porcas após seis meses?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

g) Após seis meses, o espaço físico que o senhor B. Zerra dispõe ainda é suficiente para o número de porcas?

Resposta: _____

h) Agora, como no problema das vacas, construa a Matriz de Leslie para o problema das porcas:

$$L = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix}.$$

i) Represente a quantidade inicial de porcas, nas três diferentes faixas etárias, como uma matriz de tamanho 3×1 :

$$X_0 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

j) Usando as informações do item e), represente a quantidade de porcas do senhor B. Zerra, depois de seis meses, como uma matriz de tamanho 3×1 :

$$X_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

k) Calcule a multiplicação de L e X_0 :

$$LX_0 = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} _ \cdot _ + _ \cdot _ + _ \cdot _ \\ _ \cdot _ + _ \cdot _ + _ \cdot _ \\ _ \cdot _ + _ \cdot _ + _ \cdot _ \end{pmatrix}$$

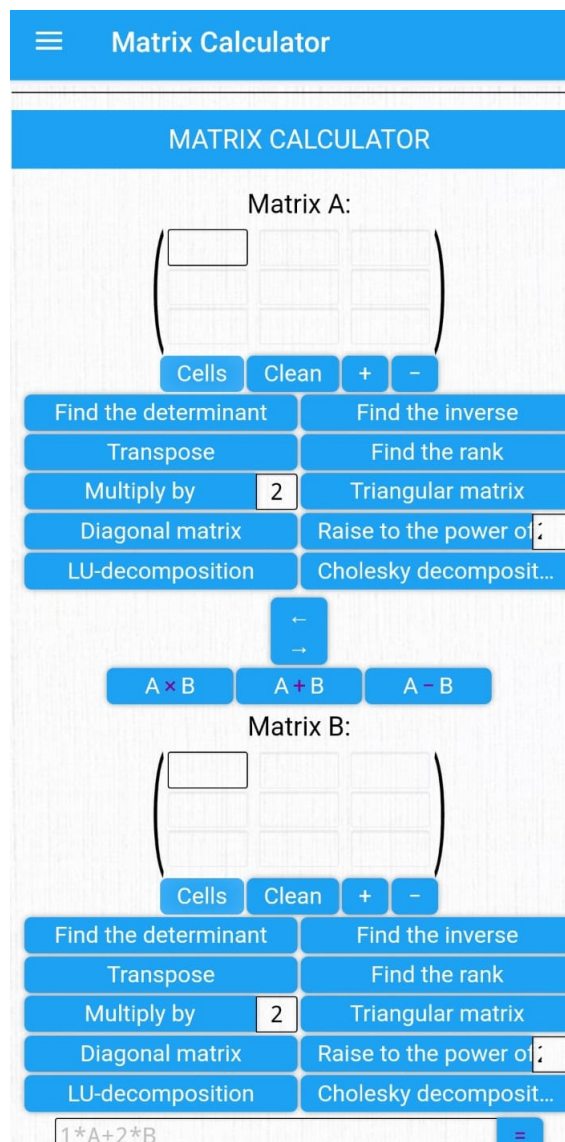
$$LX_0 = \begin{pmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{pmatrix}.$$

l) O que você pode dizer sobre a matriz LX_0 e a matriz X_1 ?

Resposta: _____

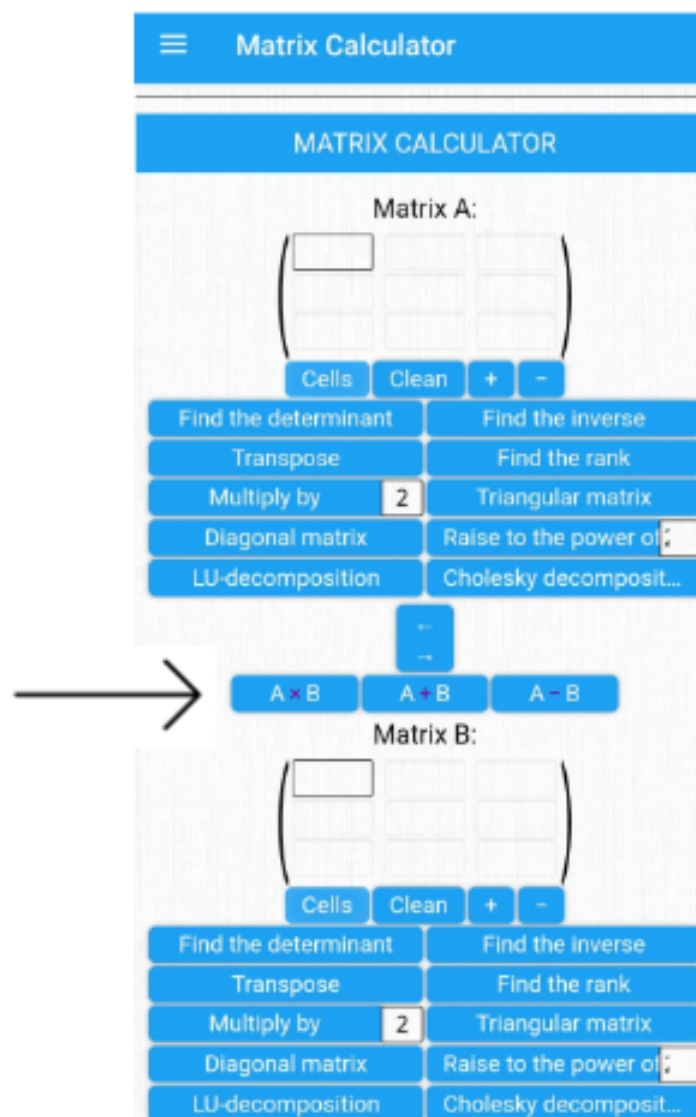
m) Agora, abra o aplicativo Matrix Calculator que você já instalou no seu celular.

Figura 15 – Tela inicial do aplicativo Matrix Calculator.



- n) No aplicativo Matrix Calculator, no lugar da matriz A você deve preencher com os elementos da matriz L . No aplicativo, a primeira matriz é chamada de A , não sendo possível alterar esse nome.
- o) No lugar da matriz B , você deve colocar os elementos da matriz X_0 . No aplicativo a segunda matriz é chamada de B , não sendo possível alterar esse nome.
- p) Faça a multiplicação dessas matrizes clicando no botão azul $A \times B$.

Figura 16 – Botão para multiplicar.



O que você pode dizer sobre o resultado verificados no aplicativo e o resultado encontrado manualmente no item k)?

Resposta: _____

- q) Calcule a quantidade de porcas depois de doze meses. Para isso, faça a multiplicação LX_1 no aplicativo e chame o resultado de X_2 :

$$LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

$$X_2 = LX_1 = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}.$$

- r) Após doze meses, quantas porcas haverá na Fazenda Sol Nascente? O espaço físico da fazenda é suficiente para essa quantidade de porcas?

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

- s) Após dezoito meses, quantas porcas haverá na Fazenda Sol Nascente? O espaço físico da fazenda é suficiente para esse número de porcas? Use o aplicativo.

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

- t) Qual o número máximo de meses que o senhor B. Zerra consegue manter sua criação de porcas, sem fazer a reforma de ampliação das instalações? Use o aplicativo.

Faça seus cálculos aqui:

Resposta: _____

Questionário - Matriz de Leslie

a) Dê sua opinião sobre as atividades.

Resposta: _____

b) Qual das três atividades você mais gostou? Por quê?

Resposta: _____

c) Qual das três atividades você achou mais fácil? E a mais difícil? Por quê?

Resposta: _____

d) As atividades foram interessantes? Por quê?

Resposta: _____

APÊNDICE D – Solução da sequência didática com correções

Atividade 1

a) $150 \cdot 1 = 150$
 $120 \cdot 2 = 240$
 $150 + 240 = 390.$
 $200 \cdot \frac{70}{100} = 140.$
 $150 \cdot \frac{80}{100} = 120.$
 80%.

b) $390 + 140 + 120 = 650.$

Atividade 2

a) $LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 200 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 120 \\ 0,7 \cdot 200 + 0 \cdot 150 + 0 \cdot 120 \\ 0 \cdot 200 + 0,8 \cdot 150 + 0 \cdot 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

b) $X_1 = \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}.$

c) $LX_0 = X_1$, obtemos o mesmo resultado da Atividade 1.

d) sim, LX_1 .

e) $140 \cdot 1 = 140$
 $120 \cdot 2 = 240$
 $140 + 240 = 380.$
 $390 \cdot \frac{70}{100} = 273.$
 $140 \cdot \frac{80}{100} = 112.$

f) $380 + 273 + 112 = 765$.

g) $X_2 = \begin{pmatrix} 380 \\ 273 \\ 112 \end{pmatrix}$

h) $LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 390 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 390 + 1 \cdot 140 + 2 \cdot 120 \\ 0,7 \cdot 390 + 0 \cdot 140 + 0 \cdot 120 \\ 0 \cdot 390 + 0,8 \cdot 140 + 0 \cdot 120 \end{pmatrix}$$

$$LX_1 = \begin{pmatrix} 380 \\ 273 \\ 112 \end{pmatrix}.$$

i) $LX_1 = X_2$.

j) Deve-se multiplicar as matrizes LX_2 .

Atividade 3

a) $30 + 20 + 0 = 50$.

b) 2ª Faixa Etária.

c) 3ª Faixa Etária.

d) Não, pois estarão no abatedouro.

e) Faixa etária de 0 a 6 meses: $20 \cdot 4 = 80$

$$0 \cdot 5 = 0$$

$$80 + 0 = 80.$$

$$\text{Faixa etária de 6 a 12 meses: } 30 \cdot \frac{70}{100} = 21.$$

$$\text{Faixa etária de 12 a 18 meses: } 20 \cdot \frac{90}{100} = 18.$$

f) $80 + 21 + 18 = 119$.

g) Sim.

$$\text{h) } L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{i) } X_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{j) } X_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 21 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

$$\text{k) } LX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$LX_0 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 30 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 0 \\ 0,7 \cdot 30 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 30 + 0,9 \cdot 20 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 21 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

$$\text{l) } LX_0 = X_1.$$

m) Aplicativo.

n) Aplicativo.

o) Aplicativo.

p) Os resultados são iguais.

$$\text{q) } LX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 21 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = LX_1 = \begin{pmatrix} 174 \\ 56 \\ 18,9 \end{pmatrix}.$$

r) $174 + 56 + 18,9 = 248,9$, sim.

$$\text{s) } X_3 = LX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 174 \\ 56 \\ 18,9 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = LX_2 = \begin{pmatrix} 318,5 \\ 121,8 \\ 50,4 \end{pmatrix}, \text{ total} = 318,5 + 121,8 + 50,4 = 490,7, \text{ sim.}$$

$$\text{t) } X_4 = LX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 318,5 \\ 121,8 \\ 50,4 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = LX_3 = \begin{pmatrix} 739,2 \\ 222,95 \\ 109,62 \end{pmatrix}, \text{ total} = 739,2 + 222,95 + 109,62 = 1071,77,$$

$$X_5 = LX_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 739,2 \\ 222,95 \\ 109,62 \end{pmatrix}$$

$$X_5 = LX_4 = \begin{pmatrix} 1439,9 \\ 517,44 \\ 200,66 \end{pmatrix}, \text{ total} = 1439,9 + 517,44 + 200,66 = 2158, \text{ logo 24 meses.}$$