WILLIAM MASCIA RESENDE

O USO DE FORMULÁRIOS INTERATIVOS:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS

LAVRAS – MG
2024

WILLIAM MASCIA RESENDE

O USO DE FORMULÁRIOS INTERATIVOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Nelson Antonio Silva
Orientador

LAVRAS – MG
2024

Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos da Biblioteca Universitária da UFLA

Resende, William Mascia
O uso de formulários interativos : Uma proposta para o ensino de Sequências / William Mascia Resende. – Lavras : UFLA, 2024.
65 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional)–Universidade Federal de Lavras, 2024.
Orientador: Prof. Dr. Nelson Antonio Silva.
Coorientadores: .
Bibliografia.

1. Formulários. 2. Mídias digitais. 3. Ensino de Matemática. I. Silva, Nelson Antonio. II. Título.

A reprodução e a divulgação total ou parcial deste trabalho são autorizadas, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

WILLIAM MASCIA RESENDE

O USO DE FORMULÁRIOS INTERATIVOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS
THE USE OF INTERACTIVE FORMS: A PROPOSAL FOR TEACHING SEQUENCES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 05 de Julho de 2024.

Profa. Dra. Danielli Ferreira Silva	IFSM
Prof. Dr. Nelson Antonio Silva	UFLA
Profa. Dra. Rita de Cassia Dornelas Sodre	UFLA

Prof. Dr. Nelson Antonio Silva
Orientador

LAVRAS – MG
2024

AGRADECIMENTOS

Ao Supremo Arquiteto do Universo, Deus, por ter me permitido chegar até aqui e, nos momentos mais difíceis, por conceder-me resiliência, energia e tolerância, guiando meus passos.

À minha mãe, pelo presente mais valioso: a vida, e por ser minha inspiração na profissão que tanto amo: a docência. Ser professor é uma arte que inspira, assim como minha mãe me inspirou. Ao meu pai (in memoriam), que me ajudou a discernir entre o correto e o errado, contribuindo para moldar a pessoa que sou hoje.

À minha esposa, meu amor Miriam, que sempre me incentivou em todas as áreas da vida. Uma pessoa singular que me fortalece e inspira, pois juntos somos mais fortes.

Ao meu irmão Alexandre, por me mostrar, através dos seus valores e caráter, o verdadeiro significado da vida. Seu amor à família é inspirador, e junto com minha cunhada Janaina, eles me proporcionaram uma das maiores alegrias da minha vida: meu sobrinho Lorenzo.

Ao meu eterno enteado, Herson, um amigo leal. Saudades sempre!

Aos meus enteados Amilcar e Kegan, que me proporcionaram a felicidade da paternidade. Junto com suas respectivas esposas, eles me deram os netos Amanda, Michael, Kevin e o recém-nascido Clark.

Ao meu sobrinho Felipe e sua esposa Vitória, que me presentearam com a alegria de ter uma sobrinha-neta, Bella.

À toda minha família de Araraquara e Formiga, pela compreensão das minhas ausências durante os anos em que me dediquei a este curso.

Ao meu orientador, Professor Dr. Nelson Antonio Silva, pela dedicação integral e paciência ímpar, que, com sua competência e conhecimento, me orientou neste trabalho. Agradeço especialmente por seu apoio e ajuda nos momentos em que mais precisei ao longo da dissertação.

À Universidade Federal de Lavras, juntamente com o PROFMAT, pela oportunidade concedida e por toda infraestrutura disponibilizada.

Ao corpo docente do programa, pelo valioso aprendizado, dedicação e amizade demonstrados ao longo do curso.

Às minhas colegas Jucimara e Kalita, da turma de 2022 do PROFMAT, pela amizade, cumplicidade e companheirismo. Muitas vezes, sem saberem, vocês me deram forças durante as aulas presenciais.

Enfim, a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste mestrado, minha eterna gratidão!

Sejamos eternos aprendizes, pois a arrogância é a fonte da imaturidade, fecha as portas para a sabedoria e enaltece a inabilidade do ser humano.

William Mascia Resende

RESUMO

Durante a pandemia do Covid-19, o uso de aulas remotas destacou a importância das tecnologias digitais no ensino da matemática. Atualmente, temos uma geração de estudantes profundamente conectada às mídias digitais, com acesso instantâneo a uma vasta quantidade de informações, o que transforma a dinâmica educacional e exige novas abordagens pedagógicas para engajar os alunos e garantir a eficácia do aprendizado. Nesse sentido, esta dissertação tem como objetivo apresentar uma forma de orientar o estudo diário dos alunos por meio do uso de mapas mentais interativos, aqui chamados de formulários interativos. Nesses formulários, conceitos e fórmulas são vinculados a vídeos disponíveis na internet, utilizando hiperlinks de maneira interativa. Esse trabalho apresenta uma sequência para o professor de como criar um formulário, vincular vídeos e estabelecer o *link* de cada fórmula matemática com seu respectivo vídeo, além de uma atividade prática para a construção desse formulário. Também é fornecida uma fundamentação teórica para embasar o material apresentado.

Palavras-chave: formulário; mídias digitais; ensino de matemática; mapas mentais interativos; vídeos educativos.

ABSTRACT

During the Covid-19 pandemic, the use of remote classes highlighted the importance of digital technologies in teaching mathematics. Currently, we have a generation of students deeply connected to digital media, with instant access to a vast amount of information, which is transforming educational dynamics and requiring new pedagogical approaches to engage students and ensure effective learning. In this sense, this dissertation aims to present a way of guiding students' daily study through the use of interactive mind maps, here called interactive forms. In these forms, concepts and formulas are linked to videos available on the internet, using hyperlinks in an interactive way. This work presents a sequence for the teacher on how to create a form, link videos and establish the *link* of each mathematical formula with its respective video, in addition to a practical activity for building this form. A theoretical foundation is also provided to support the material presented.

Keywords: form; digital media; mathematics teaching. interactive mind maps; Educational videos.

INDICADORES DE IMPACTOS

Este trabalho investiga o conceito de mapas mentais interativos com o objetivo de aprimorar o ensino de Matemática no Ensino Médio, beneficiando tanto professores quanto estudantes. A pesquisa é fundamentada em uma revisão teórica sobre a aplicação de tecnologias digitais na educação, abordando mídias digitais, mapas mentais e as necessidades da geração atual em suas interações tecnológicas. O resultado é a criação do produto educacional "Formulários Interativos", que integra a organização e clareza dos mapas mentais com a interatividade dos vídeos educacionais. A introdução desses formulários tem o potencial de transformar a dinâmica das salas de aula, promovendo maior engajamento e participação dos estudantes. Como uma ferramenta pedagógica, eles introduzem a tecnologia digital no ambiente educacional, enriquecendo as práticas dos professores e oferecendo aos estudantes uma nova forma de estudo. Disponibilizados online, esses formulários podem alcançar um público amplo, beneficiando estudantes e professores de diversas redes de ensino.

IMPACT INDICATORS

This work investigates the concept of interactive mind maps with the aim of improving Mathematics teaching in High School, benefiting both teachers and students. The research is based on a theoretical review on the application of digital technologies in education, addressing digital media, mental maps and the needs of the current generation in their technological interactions. The result is the creation of the educational product "Interactive Forms", which integrates the organization and clarity of mind maps with the interactivity of educational videos. The introduction of these forms has the potential to transform the dynamics of classrooms, promoting greater student engagement and participation. As a pedagogical tool, they introduce digital technology into the educational environment, enriching teachers' practices and offering students a new way of studying. Available online, these forms can reach a wide audience, benefiting students and teachers from different education networks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Linha do tempo: evolução da tecnologia na matemática 15
Figura 2.2 – Segunda solução com *Winplot* 16
Figura 2.3 – Mapas Mentais 23
Figura 2.4 – Ferramentas que contribuem para um melhor aprendizado 26
Figura 3.1 – sequências finita 28
Figura 3.2 – sequências infinita 28
Figura 3.3 – Soma de Gauss 36
Figura 4.1 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Início 46
Figura 4.2 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - corpo do formulário . . 47
Figura 4.3 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Disposição das Fórmulas 47
Figura 4.4 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Finalização 48
Figura 4.5 – Exemplo do renderização de um vídeo 49
Figura 4.6 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Identificando o site . . 51
Figura 4.7 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - *Upload* do arquivo . . 51
Figura 4.8 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Identificando a região da fórmula 1ª Parte 52
Figura 4.9 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Identificando a região da fórmula 2ª Parte 52
Figura 4.10 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Colocando o link na região selecionada 53
Figura 4.11 – Razão e classificação de uma PG 53
Figura 4.12 – Razão e classificação de uma PG 54
Figura 4.13 – Razão e classificação de uma PG 54
Figura 4.14 – Razão e classificação de uma PG 54
Figura 4.15 – Razão e classificação de uma PG 55
Figura 4.16 – Razão e classificação de uma PG 55
Figura 4.17 – Uso do Formulário 56
Figura 1 – Apêndice A 63
Figura 2 – Apêndice B 64
Figura 3 – Apêndice C 65

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Tecnologias digitais e suas características 17
Quadro 2.2 – Fases das tecnologias digitais 19

SUMÁRIO

1 Introdução 12

2 O ensino de Matemática e as tecnologias digitais 14

2.1 Tecnologias digitais na Educação Matemática 14

2.2 Mídias Digitais 18

2.2.1 Uso de Vídeos na Matemática 21

2.2.2 Mapas Mentais 23

2.3 As gerações dos estudantes e sua relação com as tecnologias 25

2.4 Formulários Interativos: uma proposta para o ensino atual 27

3 Sequências numéricas 28

3.1 Sequências 28

3.2 Recorrências 29

3.2.1 Recorrência de primeira ordem 30

3.2.2 Recorrência de segunda ordem 31

3.2.3 Progressão Aritmética 33

3.2.4 Progressão Geométrica 39

3.3 Sequência de Fibonacci: uma situação em sala de aula 43

4 Construindo um Formulário Interativo 46

4.1 Passo a passo da Construção de um Formulário 46

4.2 Criação de Vídeos Digitais 48

4.3 Passo a passo fazendo o link de cada fórmula com cada vídeo 50

4.4 Uso de Formulário em sala de aula 55

4.4.1 Como ferramenta de ensino e aprendizagem 56

4.4.2 Confecção de um formulário pelo aluno 56

5 CONCLUSÃO 59

REFERÊNCIAS 61

APENDICE A – Formulário Interativo Progressão Aritmética 63

APENDICE B – Formulário Interativo Fibonacci 64

APENDICE C – Formulário de Progressão Geométrica- PG 65

1 INTRODUÇÃO

As tecnologias da informação e comunicação aplicadas a educação tem sido ferramentas importantes para a difusão do conhecimento em diversas áreas, com destaque para a Matemática. Isso possibilita uma inovação na educação, pois permite a adoção de novas metodologias de ensino. Ao integrar a tecnologia ao processo educacional, os alunos têm acesso a recursos interativos, simulações, vídeos explicativos e ferramentas de aprendizado personalizado, o que enriquece sua experiência de aprendizagem e facilita a compreensão de conceitos matemáticos complexos. Essa abordagem dinâmica e inovadora contribui para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e promove uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, preparando os alunos para os desafios do mundo moderno. Através da experiência do autor, esta dissertação apresenta uma constante evolução na forma de ensinar, baseada nas mudanças que ocorrem naturalmente nas gerações dos alunos. O autor busca sempre se adaptar na sua forma de comunicação, especialmente com o uso de tecnologia.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No Capítulo 2, é estudada a evolução do ensino com o uso da tecnologia na educação e suas fases, destacando-se a 5ª fase, que consiste em uma integração de todas as fases anteriores. Ainda neste capítulo, são analisadas as mídias digitais presentes no ensino, com destaque para o uso de vídeos na matemática e de materiais digitais disponíveis em alguns sites. Além disso, o capítulo oferece uma explicação detalhada sobre o uso de mapas mentais na aprendizagem e as principais características da geração de alunos presente no Ensino Básico atualmente. O capítulo se encerra com a introdução do conceito de formulários interativos, que, resumidamente, são mapas mentais com acesso a vídeos por meio de links clicáveis em determinadas regiões do formulário.

O Capítulo 3 aborda sobre sequências e recorrências, a escolha desse tópico está relacionada a uma experiência prática em sala de aula com o uso de formulários interativos, do autor deste trabalho. Em um caso específico, um aluno trouxe ao professor uma dúvida sobre sequências no Ensino Médio, mais precisamente, sobre a sequência de Fibonacci. Utilizando um formulário interativo que abordava progressão geométrica e Fibonacci, foi possível proporcionar uma experiência mais dinâmica e personalizada para a apresentação e resolução das dúvidas do aluno, explicando os conceitos de recorrência e demonstrando a sequência de Fibonacci. Esta aplicação prática evidenciou a importância desses conceitos em contextos do mundo real, transcendo o ambiente acadêmico.

No Capítulo 4, foi detalhada a criação do formulário interativo, propondo sua apresentação com o uso de softwares de design gráfico, com o objetivo de posicionar fórmulas e conceitos de maneira clara e de alta qualidade. Explicou-se também, o processo de produção de vídeos, desde a captação de imagens e sons até a renderização[1]. Além disso, foi descrito detalhadamente como inserir um *link* de vídeo em cada fórmula. O capítulo se conclui com uma proposta de utilização do formulário interativo em sala de aula, apresentando-o como uma ferramenta de aprendizagem e sugerindo uma atividade prática para os alunos, elaborada pelo professor.

Por fim, foram apresentadas a conclusão, as referências bibliográficas e os apêndices.

Os apêndices foram apresentados como recursos educacionais. No Apêndice A, há um formulário sobre progressão aritmética, no Apêndice B, um formulário interativo sobre a sequência de Fibonacci, e, por último, no Apêndice C, um formulário interativo sobre progressão geométrica.

[1] A renderização de um vídeo consiste na combinação de diversos elementos, como arquivos de áudio, imagens, clipes de animações, legendas, efeitos gráficos e filmagem bruta.

2 O ENSINO DE MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS

O processo de ensino-aprendizagem necessita de estudos, tanto por parte do professor, quanto por parte do aluno. Segundo LIMA (2023, p.148) "A prática educativa é, como diz Freire, algo muito sério."

> Lidamos com gente, com crianças, adolescentes ou adultos. Participamos de sua formação. Ajudamo-los ou os prejudicamos nesta busca. Estamos intrinsecamente a eles ligados no seu processo de conhecimento. Podemos concorrer com a nossa incompetência, má preparação, irresponsabilidade, para o seu fracasso. Mas podemos, também, com a nossa res- ponsabilidade, preparo científico e gosto do ensino, com a nossa seriedade e testemunho de luta contra as injustiças, contribuir para que os educandos vão se tornando presenças marcantes no mundo (FREIRE, 1997 apud LIMA, 2023, p.148).

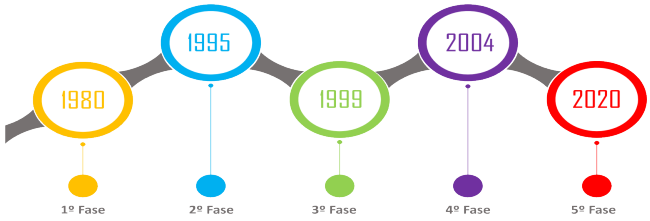
Para BORBA (2012) devido as inovações tecnológicas terem incorporado na nossa sociedades, a tecnologia digital refere-se ao uso de dispositivos eletrônicos, sistemas e ferramentas que processam, armazenam e transmitem informações em formato digital. Isso inclui uma ampla gama de tecnologias como computadores, *smartphones, tablets, internet, software,* redes sociais, aplicativos, entre outros. O uso de tecnologias digitais na Matemática tem como objetivo ampliar os conhecimentos do estudante sobre o uso de diferentes mídias no contexto da linguagem tecnológica. Dessa forma, busca-se desenvolver e apresentar soluções que auxiliem na tomada de decisões, evidenciando um processo mais eficaz de ensino e aprendizagem da matemática.

2.1 Tecnologias digitais na Educação Matemática

Tecnologia digital refere-se a ferramentas, dispositivos e sistemas para criar, armazenar, processar e comunicar informações digitais, incluindo hardware e software. Para BORBA (2012), quando olhamos grande parte das pesquisas em educação matemática desenvolvidas no Brasil nos últimos trinta anos, notamos diversificados contextos, propostas e perspectivas com relação ao uso pedagógico de tecnologias para investigação matemática. No trabalho de BORBA (2020) o uso da tecnologia na educação no Brasil é estruturado em cinco fases, como pode ser observado na Figura 2.1.

Primeira Fase: Na década de 80 já eram discutidos a educação matemática em sala de aula com uso de calculadora simples, científica e de computadores. Essas discussões, de uma forma geral, eram feitas ainda no âmbito do uso de *softwares* no aprendizado da Matemática e, mais especificamente, na forma gráfica. Nessa fase, a expressão "Tecnologias Informática"(TI)

Figura 2.1 – Linha do tempo: evolução da tecnologia na matemática



Fonte: do autor (2024)

ou Tecnologias Computacionais estavam relacionadas ao computador ou ao *software*. Aqui se destaca o *software* LOGO, onde cada comando determina um procedimento a ser executados por uma tartaruga (virtual). Os movimentos da tartaruga possibilitam a construção de objetos geométricos como segmentos de reta e ângulos.

O Ministério da Educação (MEC) teve grande influência na disseminação da informática no sistema educacional brasileiro nesta época, incentivando as escolas públicas a criarem e desenvolverem seus laboratórios de informática. Segundo ALMEIDA (2004, APUD, BORBA (2020), p.21), inicialmente o MEC patrocinou o projeto EDUCOM, que visava o desenvolvimento de pesquisas e metodologias sobre o uso do computador como recurso pedagógico, tendo cinco universidades públicas participantes. Deve-se destacar que o foco do projeto EDUCOM estava concentrado no uso de tecnologias na formação de professores. Tentando fazer o uso da tecnologia como catalizador para uma possível mudança pedagógica, ajudando a formar cidadãos reflexivos no uso desta tecnologia em outras situações que apoiaria na construção de conhecimentos;

Segunda Fase: Teve início na primeira metade da década de 90, com uso dos computadores pessoais. Nessa fase, destacava-se o “ímpeto” do professor em sair de sua zona de conforto, ou buscava o conhecimento que não o tinha sobre o uso de *software*, ou procurava ousar introdução de tecnologias informáticas em ambiente educacional na sua prática. Destacam-se nessa época, alguns *softwares* voltado às múltiplas representações de funções como *Winplot* , *FUN* e o *Graphmatica*, de geometria dinâmica (como *Cabri Géomètre e o Geometricks*) ou uso de sistemas de computação algébrica (*Maple*);

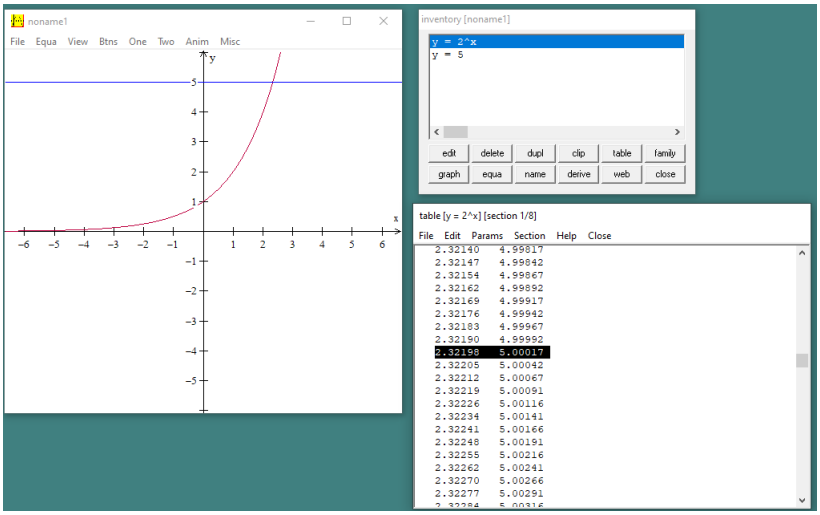
Terceira Fase: Essa fase teve início no final da década de 90, marcada pelo acesso à *internet* de forma geral. Começaram os cursos à distância para formação de professores via *e-mail* bem como fóruns de discussões, é nessa fase que surge as expressões de “tecnologia da informação” e "tecnologia de informação e comunicação”. Para BORBA (2020), um exemplo prático desta terceira fase seria a resolução da equação 2x = 5 utilizando-se o software *Win-*

plot. Com a investigação coletiva realizada a partir de uma interação em um ambiente virtual de aprendizagem com o *Winplot*, permitiu-se, por meio de videoconferências, que, através da utilização de uma ferramenta denominada "lápis virtual"neste aplicativo, um participante tivesse a capacidade de interagir com o *Winplot*, permitindo que todos os participantes acompanhassem as alterações, na janela de visualização, realizadas no *software*. Sob a supervisão dos tutores, essa abordagem visava alcançar a resolução de problemas, ultrapassando os métodos convencionais que envolviam papel e lápis. Através desse recurso chegou-se a solução:

$$2^x = 5 \Longrightarrow \log 2^x = log5 \Longrightarrow x = \frac{log5}{log2}$$

Que plotando no gráfico as funções $y = 5$ e $y = 2^x$, foi identificado o ponto (5; 2,32198) de encontro dessas funções, como observado na Figura 2.2 .

Figura 2.2 – Segunda solução com *Winplot*



Fonte: do autor (2024)

Nesse exemplo, pode-se verificar a perspectiva teórica que enfatiza a construção de inteligências coletivas, nesse evento ilustra a forma como professor e alunos interagiram através do *Winplot*, lápis e papel, produzindo conhecimentos matemáticos em ambiente virtual.

Para SILVA (2000), a interação em ambientes virtuais de aprendizagem oferece aprendizagem diversificadas, enfatizada pela comunicação de hipertextos para educação *on-line*:

> [...] investir em multiplicidade de nós e conexões – no sentido mesmo do hipertexto, do rizoma, utilizando textos, fragmentos de programação da TV, filmes inteiros ou em fragmentos, gravuras, jornais, música, falas, performances, etc. Neste ambiente o professor disponibiliza roteiros em rede oferece ocasião de exploração, de permuta e potenciações (dos temas e dos suportes). Aí ele estimula a coautoria e fala livre e plural. E se não há multimídia ou

> *internet*, bastaria um fragmento em vídeo para detonar uma intrincada rede de múltiplas conexões com alunos e professor interagindo e construindo conhecimento. (SILVA, 2000 apud BORBA, 2020, p.34)

Quarta Fase: Foi marcada pelo uso da *internet* rápida, no início da primeira década do novo milênio, mais precisamente em 2004. Para BORBA (2020), na quarta fase, se tornou comum o uso do termo tecnologias digitais (TD), sendo certo que existem diversos aspectos que o caracterizam, conforme apresentados no quadro 2.1.

Quadro 2.1 – Tecnologias digitais e suas características

Tecnologias Digitais	**Características**
GeoGebra	Integração entre Geometria Dinâmica(GD) e múltiplas representações de funções; cenários inovadores de investigação matemática.
Multimodalidade	Diversificados modos de comunicação passaram a estar presentes no ambiente virtual, uso de vídeos na *internet*, fácil acesso a vídeos em plataforma ou repositórios (*YouTube* e TED *talks*); produção de vídeos com câmeras digitais e softwares de edição com fácil interação.
Novos designs e interatividade	Comunicadores online – tele chamada (*Skype*); ambiente virtuais de aprendizagens (*Moodel, ICZ* e *Second Life*); aplicativos *online (applets)* e objetos virtuais de aprendizagens (*RIVEWD*).
Tecnologias móveis ou portáteis	Celulares inteligentes, *tablets*, *laptops*, dente outros; comunicadores por *short message service (sms)*, multifuncionalidade, câmeras digitais, jogos e outros aplicativos multiconectáveis (*USB*); interação através do toque em tela, e acesso a *internet*.
Performance	Estar *on-line* em tempo integral, *internet* na sala de aula, reorganização de dinâmicas e interação nos ambientes escolares; redes sociais (*Facebook*), compartilhamentos de vídeos (*YouTube*), a matemática dos estudantes passa a ir além da sala de aula, torna-se pública no ambiente virtual e presente em diversos tipos de diálogos e cenários sociais.

Fonte: Adaptado de BORBA (2012) .

Segundo BORBA (2020), a quarta fase mostrou alguns caminhos que a educação matemática *online* tem trilhado, tornando público vídeos de resolução de exercícios através de fotos, utilizando repositórios como *YouTube*, compartilhando links via *Facebook*, possibilitando uma interação síncrona ou assíncrona. Além de uma tendência chamada *blented-learning*, ou *b-learning*, que pode ser traduzido como ensino misto das modalidades presencial e virtual. Nesta fase se ornou muito comum o uso de "Tecnologias Digitais"(TD), sendo caracterizadas e representadas no quadro 2.1.

Quinta Fase: No final da segunda década do novo milênio. Para BORBA (2022), esta fase esta marcada pela pandemia, causada pelo vírus *SARS-CoV-2*, que obrigou a educação, e mais especificamente, a educação em matemática a ser *online*, onde, desde gestores até professores despertaram novos interesses nas tecnologias digitais.

> A hibridização a partir do poder de ação do vírus parece ser irreversível. *Logo*, *Winplot*, *internet*, *internet* rápida e *SAR – CoV-2* parecem ser cinco palavras-chaves das cinco fases das tecnologias digitais na Educação Matemática. A intensificação do uso de tecnologias digitais na Educação Matemática durante a pandemia foi algo extraordinário do ponto de vista quantitativo. Colegas professores, em todos os níveis, foram forçados, devido ao poder de ação de vírus, a pensar em usar mesas digitais, ambientes virtuais de aprendizagem, redes sociais e vídeos para ensinar. Isso é bom ou ruim? Difícil responder, mas certo que a situação pandêmica forçou a utilização das tecnologias digitais por todos praticamente (BORBA, 2020, p.25).

No quadro 2.2 estão apresentados, resumidamente, os aspectos e elementos que caracterizam cada uma das fases das tecnologias digitas.

2.2 Mídias Digitais

Na seção anterior, vimos que a introdução e adaptação de novas tecnologias e mídias digitais no ensino é um processo longo e contínuo. Como já foi dito anteriormente, a tecnologia digital engloba ferramentas, dispositivos e sistemas usados para criar, armazenar, processar e comunicar informações digitais, envolvendo tanto hardware quanto software, ao passo que a mídia digital, por sua vez, são conteúdos e plataformas que utilizam essas tecnologias para criar, distribuir e consumir informações, como redes sociais, *websites, blogs,* vídeos *online, e-books* e *podcasts*.

A integração desses recursos tecnológicos no cenário educacional é fundamental para modernizar o ensino e ampliar as possibilidades de aprendizado. Segundo MELO (2023), mídias digitais são os meios de comunicação que usamos para obter informações através de equipamentos eletrônicos conectados à *internet.*

> Mídias digitais são as formas como nos referimos aos meios de comunicação contemporâneos baseados no uso de equipamentos eletrônicos conectados em rede, portanto referem-se – ao mesmo tempo – à conexão e ao seu suporte material. Há formas muito diversas de se conectar em rede e elas se entrecruzam diversamente segundo a junção entre tipo de acesso e equipamento usado ."(MISKOLCI, 2013 apud MELO, 2023, p.1)

Ainda MELO (2023, *online*), diz que as mídias digitais são "...facilitadoras do processo da aprendizagem de forma colaborativa, assertiva, significativa e positiva", sendo assim uma

Quadro 2.2 – Fases das tecnologias digitais

FASES	**Tecnologias**	**Natureza ou base tecnológicas das atividades**	**Perspectivas ou noções teóricas**	**Terminologia**
PRIMEIRA (1985)	Computadores; Calculadoras simples e científicas.	LOGO e Programação.	Construcionismo; micromundo.	Tecnologias informáticas (TI)
SEGUNDA (início dos anos 1990)	Computadores (popularização) calculadora gráficas).	Geometria dinâmica (*Cabri Géometètre*; *Geometrics*); múltiplas representações de funções (*Winplot*, *Fun*, *Mathematica*); *CAS(Maple)*; Jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista.; seres-humanos-com-mídias	TI; *software* educacional; tecnologia educativa.
TERCEIRA (1999)	computadores, *laptops* e *internet*.	Teleduc; *e-mail*; *chat*; forum; *Google*.	Educação à distância; interação e colaboração *online*; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC).
QUARTA (2004)	Computadores; *laptops; tablets*; telefones celulares, *internet* rápida.	Geogebra; objetos virtuais de aprendizagem; applets, vídeos; *YouTube*; *WoffranAlpha*; *Wikipédia*, *Faceboook*, *ICZ*; *Second Life, Moodle*.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; *Internet* em sala de aula; produção e compartilhamento *on-line* de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.
QUINTA (2019)	Computadores; *laptops*; *tablets*, *Smartphones*, *internet* rápida.	*YouTube*,*WhatsApp*, *Instagram*, *Google Meet*, *Zoom*.	aulas *on-line* ao vivo e gravadas; telepresença.	*Meet*, aulas *on-line*.

Fonte: Adaptado do Quadro dos Aspectos e elementos característicos das fases BORBA (2020).

ferramenta super importante, desenvolvendo a criatividade do professor no processo de aprendizagem, proporcionando um ambiente favorável na construção do conhecimento.

Sendo assim, em um mundo que cada vez mais se torna dependente das mídias digitais:

> " [...] compreender uma das culturas de nosso tempo, ou seja, a cultura midiática, portanto, pode ser uma pista para compreender a sociedade em que vivemos, seus conflitos, lutas internas, jogos de interesses, medos e fantasias"(SETTON, 2015 apud COSTA, 2020, p.2).

Também COSTA (2020), pode-se considerar que o processo ensino-aprendizagem poderá se tornar ajustável e inovador com apoio de tecnologias móveis destacando a integração e visão empreendedora deste processo, e em relação à *internet*, é uma mídia que facilita e motiva os alunos, sendo atrativa pelas novidades e pelas infinitas possibilidades de pesquisas.

Ainda COSTA (2020) diz que a inclusão de recursos tecnológicos em sala pode aprimorar o ensino da Matemática tornando-a mais dinâmica, motivante e atrativa ao aluno e que estas mídias digitais, no ensino dessa disciplina, podem também propiciar o desenvolvimento da autoconfiança, da socialização e do desenvolvimento do raciocínio.

> Mais que a tecnologia, o que facilita o processo de ensino-aprendizagem é a capacidade de comunicação autêntica do professor de estabelecer relações de confiança com os seus alunos, pelo equilíbrio, pela competência e pela simpatia com que a atua (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2013, p.792).

Para MORAN, MASETTO e BEHRENS (2013) uma educação inovadora se apoia em alguns grandes eixos a saber: o conhecimento integrador e inovador; o desenvolvimento de autoestima e do autoconhecimento; a formação de alunos empreendedores (criativos, com iniciativas) e a construção de alunos-cidadãos (com valores individuais e sociais), que são os pilares de uma educação inovadora, com o apoio de tecnologias móveis, poderão tornar o processo de ensino- aprendizagem muito mais flexível, integrador, empreendedor e inovador.

Para SILVA (2023), as tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC),no ambiente educacional, vem assumindo um importante papel na aproximação dos conteúdos abordados juntamente acompanhando a constante evolução da sociedade como um todo, enfatizando o termo "sociedade conectada", independente do processo de ensino-aprendizagem ser modelo presencial ou não.

Ainda, SILVA (2023) enfatiza que um dos problemas na utilização das TDIC é de que uma parte dos professores brasileiros não está totalmente capacitada para desenvolver atividades que integram o uso de tais tecnologias digitais no processo de ensino-aprendizagem, pois durante o curso de licenciatura o professor não teve disciplinas que orientasse o uso destas tecnologias, ou falta de investimentos dos próprios professores em cursos de aperfeiçoamentos, ou ainda, uma política educacional que pudesse gerar formação continuada aos professores gratuitamente.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nos traz diretrizes através das competências específicas e habilidades, com a função de orientar o professor no seu plano de ensino:

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (BRASIL, 2017, p.538).

A evolução tecnológica está ligada à busca de novos desafios no ensino de conceitos da didática do aprendizado. É importante destacar que um problema didático em uma tecnologia

pode não ser relevante em outra. Portanto, é essencial explorar novas possibilidades para grupos de tecnologias digitais que não estavam disponíveis anteriormente, buscando o aprimoramento e atualização do linguajar da gerações dos alunos, fazendo o aprendizado ser mais atrativo.

2.2.1 Uso de Vídeos na Matemática

O uso de vídeos como ferramenta didática não é algo novo. Segundo MORAN (1995), através dos vídeos sentimos o mundo, vivenciamos os mais diversos sentimentos sensoriais e expressamos através da fala, pela linguagem musical ou pela escrita. Unidos por vários sentidos ao mesmo tempo, os vídeos entretêm, projetando outras realidades no espaço-tempo.

> [...] como uma nova forma de comunicação adaptada à sensibilidades principalmente das crianças e de jovens. A produção de vídeos tem uma dimensão moderna, lúdica. Moderna, como meio contemporâneo novo e que integra linguagem lúdica, pela miniaturização da câmera, que permite brincar com a realidade, leva-la junto para qualquer lugar. Filmar é uma das experiências mais envolventes tanto para as crianças como para os adultos (MORAN, 1995, p.31).

De acordo com MORAN (1995) diz que os vídeos devem ser utilizados observando as várias propostas, são elas:

a) vídeos como sensibilização: muito útil na introdução de um novo assunto para despertar a curiosidade e a motivação para novos temas;
b) vídeos como ilustração: ajuda a mostrar o que se diz em aula, compor cenários, trazendo para sala de aula a realidade distantes dos alunos, ampliando assim a sua imaginação;
c) vídeos como simulação: Ilustração mais sofisticada, podendo simular experiências de química que seriam muito perigosas em laboratório ou que exigiriam muito tempo ou recurso;
d) vídeos como conteúdo de ensino: vídeos que mostram determinado assunto de forma direta ou indireta;
e) vídeos como produção: o professor pode fazer um documentário, um resumo do seu trabalho, do que é mais importante saber, como se fosse uma apostila ou um de seus livros. O professor poderá intervir, num determinado programa, ou material já existente, acrescentando uma nova trilha sonora ou editando o material de forma compacta ou introduzindo novas cenas com novos significados, ou ainda, o professor poderá se expressar ou incentivar os alunos se expressar através dos vídeos.

> "A linguagem audiovisual desenvolve múltiplas atitudes perspectivas: solicita constantemente a imaginação e reinveste a afetividade com papel de mediação primordial no mundo, enquanto que a linguagem escrita desenvolve a mais a rigor, a organização e análise lógica."(MORAN, 1995, p.29)

Em BORBA e OECHSLER (2018), identifica-se o vídeo como "material didático", que podem ser explorados em sala de aula, nas mais diversas disciplinas entre elas a Matemática, de onde citamos alguns exemplos:

a) a plataforma TV ESCOLA [2], em que são disponibilizados vários materiais de apoio didáticos, onde o professor utiliza os vídeos da TV Escola em sala de aula para ensinar a Matemática e, em seguida, trabalha com atividades que foram abordadas nos vídeos;
b) o site Coleção M^3 (Matemática Multimídia) [3], financiado pelo governo federal para elaboração de material didático para o Ensino Médio com cinco disciplinas: Matemática, Língua Portuguesa, Física, Química e Biologia, em diferentes mídias: vídeos, áudio, softwares e experimentos, em especial, o projeto de matemática produziu 400 mídias, sendo 180 vídeos, cada um desses vídeos trazia o guia do professor, com sugestões sobre o uso e aprofundamento do conceito matemático explorado;

> [...] proporcionou aos alunos a busca de conexões entre as multimídias e, assim, eles tomaram diferentes percursos enquanto buscavam compreender o conceito de volume de uma pirâmide. As características de um ambiente exploratório e interativo colaboraram para que os alunos pudessem visualizar e interpretar as figuras geométricas espaciais sob vários ângulos. [...] Desta forma, foi possível observar indícios de aprendizagem (BARROS, 2013 apud BORBA; OECHSLER, 2018, p.401).

c) o site Números Complexos [4] com coletâneas de animações interativas, que possui vídeos de números complexos, os quais foram exibidos para uma turma do 3º ano do Ensino Médio durante a realização da pesquisa de MONZO e GRAVINA (2013), que explorava um produto educacional sobre conteúdo de números complexos e funções.

Esses foram alguns exemplos que exploram os vídeos na Matemática. Aqui se deve destacar a importância do professor conhecer esses materiais disponíveis gratuitamente e que podem ser utilizados em sala de aula.

> No entanto, muitas vezes percebemos que o professor tem dificuldades em escolher esse material, pois são vários os aspectos a serem observados, como as características técnicas (áudio, imagem, ...) e pedagógicas (conteúdo, didática, ...) do vídeo (BORBA; OECHSLER, 2018).

[2] Https://tvescola.org.br/tve/home. Acesso: 14 de outubro de 2023.
[3] https://www.ime.unicamp.br/extensao/m3-matematica-multimidia Acesso: 14 de outubro de 2023
[4] Https://www.ufrgs.br/espmat/. Acesso: 14 de outubro de 2023

2.2.2 Mapas Mentais

Após explorarmos a importância dos vídeos como um recurso pedagógico capaz de transmitir uma grande quantidade de informações de maneira dinâmica e engajadora, queremos abordar outra ferramenta que complementa e enriquece o processo do ensino-aprendizagem, o mapa mental, introduzido pelo psicólogo e escritor inglês Tony Buzan, na década de 70.

De acordo com TAVARES, MEIRA e AMARAL (2021 apud BUZAN, 2009), o mapa mental é um método que visa organizar, armazenar e destacar informações utilizando palavras-chave ou imagens-chave. Com isso, facilita a comunicação e conexão entre as ideias, bem como memorização e revisão de conteúdos. Para ALMEIDA (2020), mapas mentais, como recurso de estudo, são resumos no formato de figuras coloridas com setas e frases de efeitos com o objetivo principal de facilitar e organizar as ideias do conteúdo abordado. No mapa mental da Figura 2.3, a autora traz algumas vantagens que a confecção e utilização de mapas mentais podem trazer como recurso de ensino-aprendizagem.

Figura 2.3 – Mapas Mentais

Fonte:ALMEIDA (2020)

Para ALMEIDA (2020), os mapas mentais apoiam a melhor compreensão de um conteúdo a ser estudado, permitindo revisar em pouco tempo esses conteúdos, ativando sua memória.

> O mapa mental ativa a memória de longo prazo, aquela que armazena a informação definitivamente em nosso cérebro, isso para recuperar informações e conhecimento por meio das palavras-chave e imagens chave. Os mapas mentais têm o poder de ativar os dois hemisférios do cérebro, o lado lógico e racional (o esquerdo) e lado criativo e emocional (o direito) e são compostos basicamente por: uma ideia central, palavras-chave (abreviações), imagens, cores, letras grandes e ramificações. (ALMEIDA, 2020, p.35).

A confecção de um mapa mental envolve várias etapas que facilitam a organização das informações de maneira clara, criativa e eficaz. A lista abaixo foi sugerida por ALMEIDA (2020 apud BUZAN, 2009):

a) ideia central: o assunto principal do mapa mental é posicionado no centro da folha, funcionando como o "título"do mapa. A partir dessa ideia central, as informações são distribuídas em todas as direções, formando conexões;
b) ramificações: essas são linhas que conectam diferentes ideias entre si, expandindo a ideia central em tópicos e subtópicos. Não há um limite para o número de ramificações, contanto que a organização do mapa mantenha a clareza das informações;
c) palavras-chave – letras grandes: Utilizam-se palavras-chave, escritas com letras grandes, para resumir e memorizar conceitos importantes. Evita-se o uso de frases longas. As palavras escolhidas devem ser capazes de representar conceitos mais amplos;
d) imagens-chave e símbolos: imagens e desenhos são incorporados para facilitar a associação de ideias e a ativação da memória. Eles podem expressar conceitos de forma mais eficaz do que palavras, sendo especialmente úteis para pessoas com forte inteligência visual;
e) cores: o uso de cores torna o mapa mental mais atraente e facilita a distinção entre diferentes ideias ou níveis de importância. As cores podem ser usadas para destacar, organizar e diferenciar as informações apresentadas.

Em TAVARES, MEIRA e AMARAL (2021), os autores propõe a adição de interatividade nos mapas mentais e apresentam uma implementação de um protótipo em um ambiente web. O protótipo trata de uma página eletrônica com o tema “Segunda Guerra Mundial” onde inicialmente aparece uma figura clicável que expande para um novo bloco contendo outras figuras clicáveis e outras informações. Ao se clicar em todas as figuras obtém-se o mapa mental completo. Além disso, os autores argumentam que:

> Os mapas mentais possuem potencial pedagógico já consolidado e, ao adicionar novas características como tecnologia, diversificação de mídias e interatividade, estabelecemos algumas novas vantagens para a ferramenta: a tecnologia aproxima as práticas escolares da realidade do estudante, que vivencia um universo digital; a diversificação de mídias propicia uma mídia rica, a qual permite atingir estudantes com diferentes perfis e necessidades de aprendizagem; por fim, a interatividade agrega mais dinamismo e interação às atividades escolares, se estabelecendo como uma prática de metodologia ativa de aprendizagem (TAVARES; MEIRA; AMARAL, 2021).

2.3 As gerações dos estudantes e sua relação com as tecnologias

O termo usado para definir a geração atual de estudantes é a geração Z, são as pessoas nascidas entre 1995 a 2010. Uma de suas grandes características é a de mudar rapidamente de uma tarefa para outra ou de uma mídia para outra, da mesma forma que zapeamos por canais de televisão, por isso o termo "Z". Muitas das tecnologias atuais (vídeo games ultramodernos, *internet* ultrarrápida, *smartphones*) que são consideradas extraordinárias para as gerações passadas, são parte do cotidiano desses nativos digitais. A facilidade com que eles conseguem dados em grande quantidade e diversidade traz o desafio de discernir quais informações são de boa qualidade. Uma outra característica dessa geração, é a de não se prender às fronteiras geográficas e ver a globalização como algo natural, pois cresceram em um ambiente interconectado desde a infância, o que reforça a importância de desenvolverem habilidades de maturidade para lidar com a abundância de informações SIQUEIRA, ALBUQUERQUE e MAGALHAES (2012). Em resumo, suas principais características são:

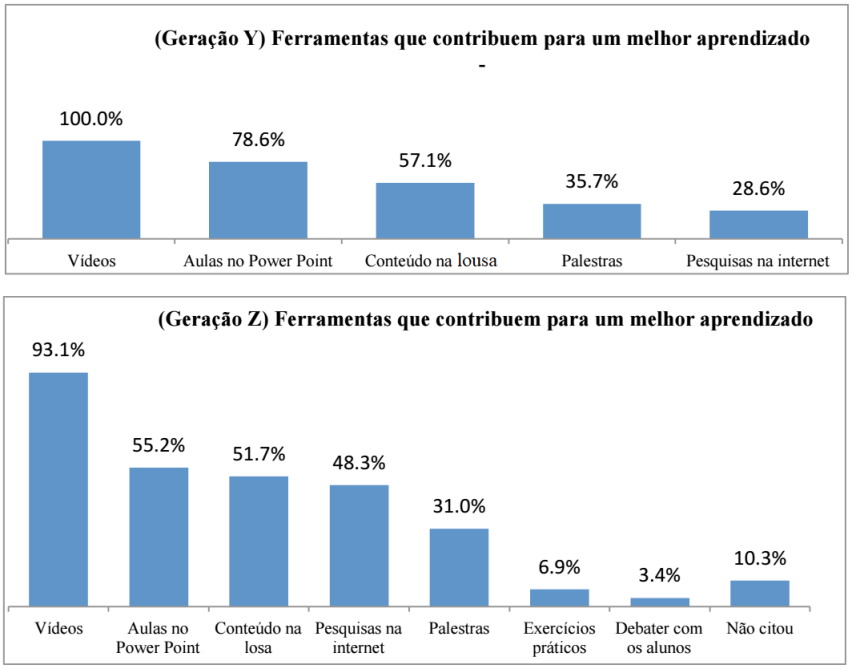
a) dinâmicas inovadoras convivem com as tecnologias e a ciências conhecida como nativos da *internet*;
b) fazem diversas tarefas ao mesmo tempo;
c) são imediatistas, críticos e mudam de opiniões diversas vezes;
d) preocupados com questões ambientais;
e) tendem a ser profissionais mais exigentes versáteis e flexíveis.

Com relação ao ensino-aprendizagem, SIQUEIRA, ALBUQUERQUE e MAGALHAES (2012) destaca que as aulas meramente expositivas, onde os alunos ouvem silenciosamente sem opinar, estão com os dias contados, pois esse tipo de aula não atende as necessidades da geração Z, mesmo que seja intercalado com exercícios sobre o tema abordado. Os jovens pertencentes à Geração Z são questionadores, participativos e multimídias, frequentemente, realizando várias

tarefas simultaneamente, como estudar com seus celulares em mãos. Portanto, a integração da tecnologia é fundamental para atrair e envolver essa geração em ambiente educacional.

Na pesquisa realizada por análise quantitativa por SIQUEIRA, ALBUQUERQUE e MAGALHAES (2012) ,constatou que em um grupo de 53 estudantes universitários, onde 68% eram da geração Z e 32% da geração Y (as pessoas nascidos de 1981 a 2000) e 93,1% da geração Z dos entrevistados, sua maior preferência é por vídeos no aprendizado, conforme Figura 2.4.

Figura 2.4 – Ferramentas que contribuem para um melhor aprendizado



Fonte: SIQUEIRA, ALBUQUERQUE e MAGALHAES (2012)

> A tarefa de prender a atenção desses alunos deve ser buscada na forma como o conteúdo será transmitido, através de discussões com os alunos, promovendo debates, pelas quais eles expõem sua maneira de pensar ou de agir sobre determinado assunto. Além disso, a resolução de exercícios também é importante para a fixação e aprendizado do conteúdo na opinião dos mesmos. O professor deve trabalhar com as ferramentas mais adequadas, ressaltando a importância de vídeos, aulas no data show, sem desfazer-se da lousa que ainda é bem vinda pelos alunos (SIQUEIRA; ALBUQUERQUE; MAGALHAES, 2012).

Em 2018, a empresa de Educação PERSON conduziu uma pesquisa abrangente nos Estados Unidos, visando destacar as distinções e semelhanças entre as Gerações Z e os da geração Y, chamados de *Millennials*. Os resultados revelaram que, na perspectiva dos participantes, os educadores são identificados como a ferramenta mais influente na aprendizagem, seguidos pelo *YouTube*. Em contrapartida, aulas tradicionais, livros didáticos e atividades presenciais ficaram

consideravelmente menos priorizados por ambas as gerações. Notavelmente, a Geração Z demonstrou uma preferência significativa pelo *YouTube* e conteúdos em vídeos em comparação com os *Millennials*.

FELCHER, BIERHALZ e FOLMER (2020) realizaram uma pesquisa abrangente em universidades públicas do Rio Grande do Sul com o propósito de analisar o impacto da integração de vídeos educacionais do *YouTube* no processo de formação inicial de futuros professores. O estudo concentrou-se em alunos matriculados em três programas de licenciatura, incluindo Licenciatura em Matemática. Os resultados revelaram que a grande maioria dos estudantes utiliza ativamente vídeos do *YouTube* para fins educacionais, com os licenciandos em Matemática liderando esse uso. Eles justificaram sua preferência pelo acesso aos vídeos como uma ferramenta eficaz para esclarecer dúvidas e aprimorar seu aprendizado.

2.4 Formulários Interativos: uma proposta para o ensino atual

No contexto atual da educação, vemos uma evolução significativa nas metodologias de ensino, impulsionada por avanços tecnológicos e a integração crescente de mídias digitais. Considerando a demanda da geração atual e a importância de se adaptar às necessidades e preferências desses estudantes, bem como o potencial das tecnologias digitais para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, propomos a integração de um novo recurso: o Formulário [5] Interativo. Este formulário é uma combinação de mídias digitais. Trata-se de um arquivo no formato *Portable Document Format* (PDF) contendo elementos visuais como fórmulas, textos e imagens que resumem e destacam informações de um determinado assunto. Cada elemento do formulário é clicável e conduz a um vídeo explicativo relevante e curto, oferecendo uma experiência de aprendizado rica e multimodal (múltiplas formas de comunicação). Este recurso busca trazer o conteúdo de forma compacta, visualmente atraente, combinando a eficácia da organização e visualização de informações de forma estruturada e intuitiva dos mapas mentais com o dinamismo de conteúdos em vídeos. Essa ferramenta facilita o acesso imediato a explicações detalhadas, atendendo as preferências dos estudantes da geração Z - alunos que são verdadeiros nativos digitais, habituados a um ambiente de aprendizado dinâmico.

No próximo capítulo, será apresentado o conteúdo utilizado para a confecção dos formulários interativos presentes nos apêndice A, apêndice B, apêndice C.

[5] Conjunto de fórmulas matemáticas, organizadas como mapa mental

3 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

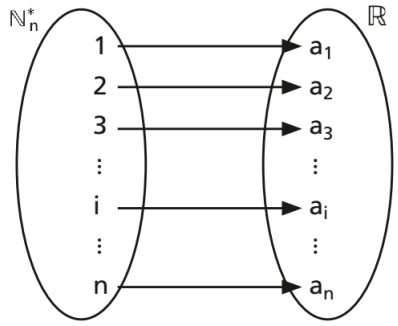
Este capítulo será reservado a uma introdução numéricas e as recorrências, sendo referendadas pelo MORGADO e CARVALHO (2015) e IEZZI (2013). Durante as explanações mostradas neste capítulo foram apresentados alguns teoremas sem as suas respectivas demonstrações por não se tratar do objetivo do material.

3.1 Sequências

Iremos considerar $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$, $\mathbb{N}^* = \{1,2,...\}$ e $\mathbb{N}_n^* = \{1,2,...,n\}$, para $n \in \mathbb{N}^*$.

Definição 3.1 Chama-se sequência finita toda função $f : \mathbb{N}_n^* \longmapsto \mathbb{R}$.

Figura 3.1 – sequências finita



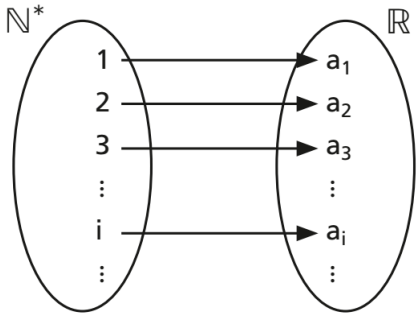
Fonte:IEZZI (2013)

Assim, em toda sequência finita, a cada número natural i $(1 \leq i \leq n)$ está associado um número real a_i, ou seja:

$$f = \{(1,a_1),(2,a_2),(3,a_3),...,(n,a_n)\}.$$

Definição 3.2 Chama-se sequência infinita toda aplicação de f de $\mathbb{N}^*$ *em* $\mathbb{R}$.

Figura 3.2 – sequências infinita



Fonte:IEZZI (2013)

Em toda sequência infinita, a cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado um $a_i \in \mathbb{R}$:

$$f = \{(1,a_1),(2,a_2),(3,a_3),...,(i,a_i),...\}.$$

Podemos indicar uma sequência anotando apenas a imagem de f, ou seja, em que aparecem entre parênteses ordenadamente, da esquerda para direita, as imagens dos naturais,

$$f = (a_1,a_2,a_3,\ldots).$$

Quando queremos indicar uma sequência f qualquer, escrevemos:

$$f = (a_i)_{i\in I},$$

e lemos "sequência f dos termos a_i em que o conjuntos de índices é $I \subset \mathbb{N}$".

3.2 Recorrências

Definição 3.3 Uma sequência é dita uma recorrência, ou recorrente, quando a partir de um certo termo, todos os outros são dados em função dos termos anteriores.

Exemplo 3.4 Qualquer progressão aritmética [6] (x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida por:

$$x_{n+1} = x_n + r \ (n \geq 1), \text{ com } x_1 = a.$$

Para $x_1 = 1$ e $r = 2$ temos a sequências dos números ímpares:

$$x_{n+1} = x_n + 2 \ (n \geq 1), \text{ com } x_1 = 1.$$

Para $x_1 = 2$ e $r = 2$ temos a sequências dos números pares:

$$x_{n+1} = x_n + 2 \ (n \geq 1), \text{ com } x_1 = 2.$$

Neste exemplo, verifica-se que uma recorrência por si só não define a sequência, pois $x_{n+1} = x_n + 2$ é satisfeita não apenas pela sequência dos números ímpares, mas por todas as

[6] ver definição ma seção 2.2.3

progressões aritméticas de razão 2. Para que a sequência fique perfeitamente determinada, é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

3.2.1 Recorrência de primeira ordem

Definição 3.5 Uma recorrência é dita ser de primeira ordem quando x_{n+1} se expressa em função de x_n. Ela é dita linear se essa função for uma função afim, podendo os coeficientes dependerem de n.

Exemplo 3.6 Considere as recorrências abaixo:

a) $x_{n+1} = 2x_n - n^2$;

b) $x_{n+1} = nx_n$;

c) $x_{n+1} = nx_n^2$.

Pode-se classificar em recorrências de primeira ordem lineares os exemplos (a) e (b), enquanto o exemplo (c) é não linear. Ainda, pode-se verificar que (b) e (c) são classificadas em homogêneas, por não possuírem termos independentes de x_n, enquanto que o exemplo (a) seria uma função linear heterogênea, pois tem o termo independente $-n^2$.

Resolver uma recorrência, significa encontrar uma função que representa diretamente os termos da sequencia de forma explicita sem a necessidade dos termos anteriores, ou seja: x_n em termos de x_{n-1} nas condições de seus argumentos inicias, podendo ser representada na forma de combinações de soma, produto ou quociente de polinômios, logaritmos, exponencias, etc

Este exemplo ilustra uma maneira de como encontrar a solução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes.

Exemplo 3.7 Resolva a recorrência linear homogênea de primeira ordem.

Sendo: $x_{n+1} = 5x_n;\ (n \geq 1), \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ e $x_1 = 4$.

Solução:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 5x_1 \\ x_3 &= 5x_2 \\ x_4 &= 5x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= 5x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro cada uma das equações acima, encontramos:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n = 4 \cdot 5x_1 \cdot 5x_2 \cdot 5x_3 \cdot \ldots \cdot 5x_{n-1}.$$

Simplificando e observando que se tem $(n-1)$ fatores iguais a 5, resultará em:

$$x_n = 4 \cdot 5^{n-1}.$$

Veremos na Seção 2.2.4, que esta recorrência representa uma progressão geométrica de razão 5 e primeiro termo 4.

3.2.2 Recorrência de segunda ordem

Definição 3.8 Uma recorrência linear é considerada de segunda ordem quando cada elemento determinado pela equação de recorrência é determinado pelos dois elementos imediatamente anteriores a ele, ou seja, é da forma:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \tag{3.1}$$

com $p, q \in \mathbb{Z}$ e q $\neq 0$. A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma acima, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada equação característica.

Exemplo 3.9 A sequência (F_n), dita de Fibonacci, na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ (n \geq 0), \text{ com } F_0 = F_1 = 1.$$

A equação característica é $r^2 = r + 1$.

O teorema a seguir mostra que se as raízes de uma equação característica são r_1 e r_2, então qualquer sequência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Teorema 3.10 *MORGADO e CARVALHO (2015):* Se as raízes de $r^2+pr+q=0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

O teorema a seguir mostra que se, $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema 3.10.

Teorema 3.11 *MORGADO e CARVALHO (2015):* Se as raízes de $r^2+pr+q=0$ são $r_1 \neq r_2$, então **todas** as soluções da recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ são da forma $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Como aplicação dos teoremas acima, determinemos o número de Fibonacci F_n definido no Exemplo 2.9.

A equação característica é $r^2 = r+1$ e as suas raízes são dadas por:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{3.2}$$

Para determinarmos C_1 e C_2, usamos $F_0 = F_1 = 1$. Daí, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \end{cases}$$

cuja solução será:

$$C_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \text{ e } C_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right).$$

Logo, substituindo na equação (3.2), temos:

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

isto é,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},$$

Essa fórmula é conhecida por Fórmula de Binet.

3.2.3 Progressão Aritmética

Definição 3.12 Seja r um número inteiro, chama-se progressão aritmética (P.A.) de razão r, uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + r, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Assim, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada. Exemplos de progressões aritméticas são:

a) $f_1 = (2,6,10,14,...)$, *em que* $a_1 = 2$ *e* $r = 4$;

b) $f_2 = (1,-1,-3,-5,...)$, *em que* $a_1 = 1$ *e* $r = -2$;

c) $f_3 = (5,5,5,5,...)$, *em que* $a_1 = 5$ *e* $r = 0$;

d) $f_4 = \left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},-\frac{7}{2},5,5,5,...\right)$, *em que* $a_1 = -\frac{1}{2}$ *e* $r = -1$.

O termo geral de uma progressão aritmética, representada genericamente por $(a_1, a_2, a_3, ...)$, é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$. De fato,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Somando essas $(n-1)$ igualdades, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + (n-1)r$$

, então;

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

ou ainda, mais genericamente, no caso de 1 ser m, por:

$$a_n = a_m + (n-m)r.$$

Definição 3.13 Podemos classificar uma P.A. com base em sua razão r como:

a) crescente, se $r > 0$;

b) decrescente, se $r < 0$;

c) constante, se $r = 0$.

Vamos agora apresentar algumas notações específicas em P.A.

- Notação em 3 termos $(a;b;c)$:

  Representam uma P.A. com três termos consecutivos a,b,c. A razão dessa P.A. é $r = b-a = c-b$. Observe também que $b = \frac{a+c}{2}$.

  Podemos reescrever essa notação da seguinte forma:

$$(x-r;x;x+r)\,.$$

  Essa notação é útil para resolvermos alguns exercícios como mostrados a seguir.

Exemplo 3.14 Suponha que a medida dos lados de um triângulo retângulo formam três números que estão em P.A. Sabendo que o perímetro mede 57 cm, determinar o maior cateto.

Solução: Representando os lados do triângulo na forma

$$(x-r;x;x+r)\,,$$

temos que o perímetro é igual a 57 cm. Então

$$x-r+x+x+r = 57 \Rightarrow 3x = 57 \Rightarrow x = 19$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(19+r)^2 = 19^2 + (19-r)^2$$

$$\therefore r = 4,75.$$

As medidas dos lados do triângulo serão: $19+r=23,75cm$ (Hipotenusa); um cateto será $19cm$ (maior cateto) e o outro cateto será $19-r=14,25cm$ (menor cateto).

- Notação em 5 termos em PA:

$$(x-2r;x-r;x;x+r;x+2r)\,.$$

Exemplo 3.15 Suponha que os ângulos internos de um pentágono são os cinco primeiros termos de uma P.A. Determinar o 3º termo, em graus, dessa progressão.

Solução: Sabendo que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados pode ser calculado pela fórmula:

$$S_n=(n-2)180^\circ$$

Tomando n = 5, fica:

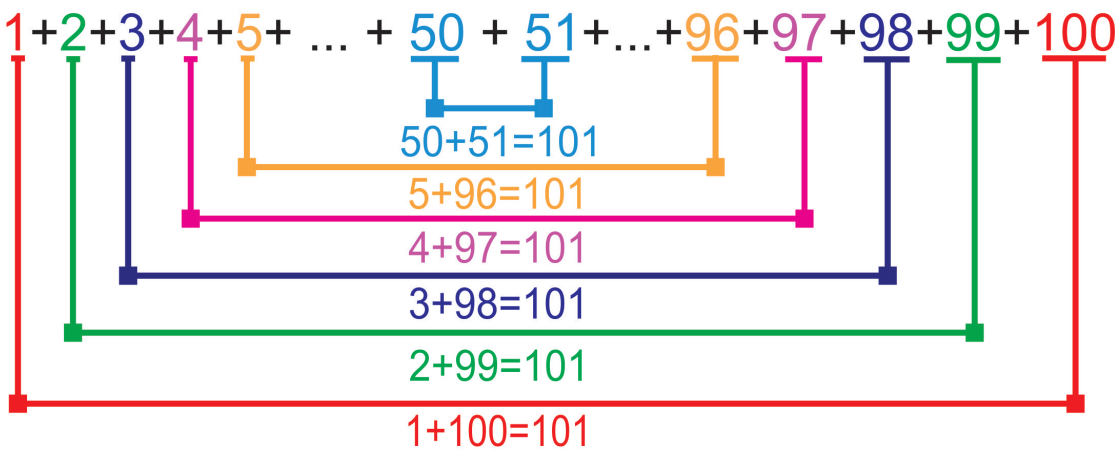
$$x-2r+x-r+x+x+r+x+2r=(5-2)180^\circ$$

$$\therefore x=108^\circ$$

Portanto o seu terceiro termo, $a_3=108^\circ$.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) destacou-se como um prodigioso matemático desde a infância. Segundo a lenda, em uma ocasião, seu professor, que lecionava no equivalente ensino infantil, desafiou a turma a somar todos os números naturais de a a 100. Surpreendentemente, Gauss concluiu a tarefa em pouco tempo e, quando questionado pelo professor sobre sua resposta, explicou da seguinte forma: Ele percebeu que ao somar o primeiro termo com o último, obteríamos uma soma igual a 101, e ao somar o segundo com o penúltimo, também obteríamos uma soma igual a 101. Esse padrão se repetiria para a soma dos termos equidistantes, conforme observado na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Soma de Gauss



Fonte: do autor (2024)

Dessa forma, mediante a brilhante observação de Gauss, chegamos ao seguinte teorema:

Teorema 3.16 *MORGADO e CARVALHO (2015):* A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Essa soma pode ser proposta, também, conforme o próximo teorema.

Teorema 3.17 *IEZZI (2013):* Em toda P.A. tem-se:

$$S_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}r.$$

Agora será definido e apresentado resultados sobre progressões aritméticas de ordem superior.

Definição 3.18 Dada uma sequência $(a_n)_n$, o operador $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é chamado de operador diferença.

Da definição, segue imediatamente que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante. O exemplo a seguir estabelece o Teorema Fundamental da Somação.

Exemplo 3.19 Note que $\sum_{i=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$. *De fato:*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta a_k = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \ldots + \Delta a_n =$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

Temos a seguinte observação:

> [...] De forma análoga ao Teorema Fundamental do Cálculo, que estabelece que o cálculo de uma integral definida $\int_a^b f(x)dx$ pode ser feito obtendo uma função F cuja derivada seja f e calculando a diferença F(b) - F(a), o Teorema Fundamental da Somação torna imediato o cálculo da soma dos termos de uma sequência, desde que se identifique esta sequência com sendo obtida pela aplicação do operador diferença outra sequência.. (MORGADO; CARVALHO, 2015)

Exemplo 3.20 Use o Teorema Fundamental da Somação para calcular $\sum_{k=1}^{n} 3^k$.

Solução: Sendo

$$\Delta a_k = 3^k = 2\frac{1}{2}3^k = (3-1)\frac{1}{2}3^k = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 3^k).$$

Temos que $a_k = \frac{1}{2}3^k$, daí:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} 3^k = \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1 = \frac{1}{2}3^{n+1} - \frac{1}{2}3 = \frac{3^{n+1} - 3}{2}.$$

Definição 3.21 Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não estacionária, ou seja, $\Delta a_n \neq 0$. De modo mais geral, uma progressão aritmética de ordem k (k>2) é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem k-1.

Exemplo 3.22 A sequência $(a_n) = (2, 6, 11, 17, 24, 32, \ldots)$ é uma progressão arimética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre cada termo e o anterior, ou seja :

$$(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (4, 5, 6, 7, 8)$$

é uma progressão arimética não-estacionária.

Exemplo 3.23 A tabela abaixo mostra uma sequência $(a_n) = (n^3 - n)$ e suas diferenças (Δa_n), $(\Delta^2 a_n)$, $(\Delta^3 a_n)$, etc.

n	a_n	(Δa_n)	$(\Delta^2 a_n)$	$(\Delta^3 a_n)$
0	0	0	6	6
1	0	6	12	6
2	6	18	18	6
3	24	36	24	6
4	60	60	30	$\diamond$
5	120	90	$\diamond$	
6	210	$\diamond$		
7	$\diamond$			

Se $(\Delta^3 a_n)$, como parece, for constante, $(\Delta^2 a_n)$ será uma progressão aritmética de segunda ordem e (a_n) será uma progressão aritmética de terceira ordem, isto é verdade, pois:

$$a_n = n^3 - n,$$

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - (n+1) - [n^3 + n] = 3n^2 + 3n,$$

$$\Delta^2 a_n = 3(n+1)^2 + 3(n+1) - [3n^2 + 3n] = 6n + 6,$$

$$\Delta^3 a_n = 6(n+1) + 6 - [6n+6] = 6.$$

Sendo $(\Delta^3 a_n)$ realmente constante.

Exemplo 3.24 A sequência cujo termo de ordem n é a soma $S_n = a_1 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem p é uma progressão aritmética de ordem p+1. Basta observar que o operador diferença, aplicado a (S_n), fornece $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ e define, portanto uma progressão aritmética de ordem p.

O teorema a seguir estabelece uma relação fundamental entre progressões aritmética de ordem p, onde p é um número natural, e polinômio de grau p, chamado polinômio característico.

Teorema 3.25 *(MORGADO; CARVALHO, 2015):* Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão aritmética de ordem p e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p, então (a_n) é dado por um polinômio de grau p em n.

Exemplo 3.26 Ver exemplo 2.23.

3.2.4 Progressão Geométrica

Definição 3.27 Chama-se progressão geométrica (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \neq 0, \\ a_n = a_{n-1}q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \end{cases}$$

onde um termo antecessor fica multiplicado por uma constante chamada de razão, que aqui se define pela letra q, sendo calculada como:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Assim, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior com uma constante q dada.

Exemplo 3.28 Exemplos de progressões geométricas:

a) $f_1 = (2, 6, 18, 54, ...)$ em que $a_1 = 2$ e $q = 3$;

b) $f_2 = (-1, -2, -4, -8, ...)$ em que a_1=-1 e q= 2;

c) $f_3 = (5, 5, 5, 5, ...)$ em que a_1=5 e q= 1;

d) $f_4 = \left(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, ...\right)$ *em que* $a_1 = -1$ *e* $r = \frac{1}{3}$.

O termo geral de uma progressão geométrica representada genericamente por $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é dada por $a_n = a_1 q^{n-1}$. Temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} q \end{aligned}$$

Multiplicando essas $(n-1)$ igualdades, temos:

$$a_2 a_3 a_4 \cdots a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots q^{n-1},$$

e então:

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

ou ainda mais genericamente, no caso de 1 ser m, por:

$$a_n = a_m q^{n-m}.$$

Definição 3.29 Podemos classificar um P.G. com relação a sua razão e o primeiro elemento como:

a) crescente $\begin{cases} \text{se } q > 1 \quad e \quad a_1 > 0; \text{ ou} \\ \text{se } 0 < q < 1 \quad e \quad a_1 < 0. \end{cases}$

b) decrescente $\begin{cases} \text{se } q > 1 \quad e \quad a_1 < 0; \text{ ou} \\ \text{se } 0 < q < 1 \quad e \quad a_1 > 0. \end{cases}$

c) constante $q = 1$.

d) oscilante $q < 0$.

Vamos agora apresentar algumas notações específicas em P.G.

Notação em 3 termos: Representam uma P.G. com três termos consecutivos a,b,c. A razão dessa P.G. é $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. Observe também que $b^2 = ac$. Podemos reescrever essa notação da seguinte forma:

$$\left(\frac{x}{q}; x; xq\right)$$

Essa notação é útil para resolvermos alguns exercícios como mostrados a seguir.

Exemplo 3.30 Suponha que os lados de um triângulo retângulo formam uma P.G. crescente. Determine a razão dessa progressão.

Solução: Usando a representação genérica podemos escrever os três lados do triângulo retângulo como:

$$\left(\frac{x}{q}; x; xq\right)$$

Se considerarmos que os lados formam uma progressão geométrica e que a medida dos lados de uma figura é necessariamente positiva, podemos concluir que a hipotenusa terá uma medida xq e, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(xq)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{q}\right)^2$$

$$x^2(q^4 - q^2 - 1) = 0$$

$$q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$q = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

Exemplo 3.31 O produto de 5 termos em Progressão Geométrica (P.G) é 32. Determinar o terceiro termo desta sequência.

Solução: Aprimorando a expressão anterior, é possível representar 5 termos de uma P.G. da seguinte maneira:

$$\left(\frac{x}{q^2}; \frac{x}{q}; x; xq; xq^2\right).$$

Sendo o produto igual a 32 temos:

$$\frac{x}{q^2}\frac{x}{q}xxqxq^2 = 32$$

$$\therefore x = \sqrt[5]{32} = 2.$$

Para IEZZI (2013), sendo dada uma P.G. qualquer e ainda conhecendo-se os valores de a_1 e q, é possível procurar e achar uma fórmula que encontre a somas dos S_n dos n termos iniciais da sequência. Temos:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}. \tag{3.3}$$

Multiplicando ambos os membros por q, obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \tag{3.4}$$

Comparando os segundos membros de (3.3) e (3.4), temos :

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) = a_1q^n - a_1.$$

O resultado da expressão acima, para $q \neq 1$, sugere o seguinte teorema.

Teorema 3.32 *IEZZI (2013):* A soma dos n termos inicias de uma P.G. é:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1.$$

Exemplo 3.33 Um exemplo notável da aplicação desse princípio é encontrado na lenda do jogo de xadrez de Malba Taham. A história descreve como o rei Iadava aprendeu o jogo através das instruções do sábio oriental Lahur Sessa. O rei, cativado pelo xadrez, expressou seu entusiasmo oferecendo diversas formas de pagamento. Contudo, o sábio propôs uma condição peculiar: em troca do ensinamento, solicitou grãos de trigo, começando com 1 grão para a primeira casa do tabuleiro, 2 grãos para a segunda, 4 para a terceira, e assim sucessivamente. Essa narrativa destaca a sabedoria e estratégia, além de proporcionar uma valiosa lição sobre a progressão exponencial. A proposta do formando em engenharia mecânica, inspirada na lenda do jogo de xadrez de Malba Tahan, consiste em um contrato de experiência de 3 anos, sem férias ou 13º salário. No primeiro mês, ele receberia 1 centavo, e a cada mês subsequente, o salário seria dobrado. Para calcular a soma dos salários até o 36º mês, podemos usar a fórmula da progressão geométrica:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r},$$

onde: S_n é a soma dos n ternos, a_1 é o primeiro termo, r é a razão. No caso, $a_1 = 0,01$ (1 centavo), r = 2(dobra a cada mês) e n = 36 (3 anos). Substituindo na fórmula anterior, temos:

$$S_{36} = 0,01 \frac{1-2^{35}}{1-2} = R\$\ 343.597.383,67.$$

Esta será a soma dos salários até o 36º mês.

De fato, a situação apresentada na entrevista destaca como a aplicação criativa da matemática pode desempenhar um papel interessante na busca por emprego. A proposta do formando em engenharia mecânica, inspirada na lenda do jogo de xadrez de Malba Tahan, ilustra como a lógica matemática pode ser utilizada de maneira inovadora na negociação de termos contratuais. Embora o desfecho não seja conhecido, a história ressalta a importância das habilidades analíticas e estratégicas, além de mostrar como a abordagem pode influenciar positivamente o resultado de uma entrevista de emprego.

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito, quanto $n \to \infty$. Como nesse caso $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Um exemplo de aplicação do cálculo de distâncias pode ser visto no caso de um giz na mão de um professor, que está a 2 metros de uma parede. Ao lançar o giz em direção à parede, de modo a percorrer a menor distância possível, ele inicialmente percorre 1 metro. Observando a distância restante, o giz então percorre 0,5 metros (metade de 1 metro). Continuando a observar a nova distância restante, o giz percorre a metade desta distância, ou seja, 0,25 metros (metade de 0,5 metros), e assim sucessivamente. Eventualmente, a distância entre o giz e a parede se torna nula, pois o giz toca a parede. A sequência de distâncias percorridas pelo giz é a seguinte:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + 0.$$

Ora, essa sequência se trata de uma progressão geométrica em que $|q| < 1$, daí sua soma poderá ser calculada por:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Logo, seja o giz percorreu 2m.

3.3 Sequência de Fibonacci: uma situação em sala de aula

Será narrado um episódio vivenciado pelo autor em sala de aula, o qual influenciou a seleção dos temas abordados nos Formulários Interativos apresentados no Capítulo 3 e no Anexo C. Durante a aula, de modo a incentivar os alunos, foi dito que existem várias sequências na Matemática e citada a sequência de Fibonacci, onde os números de Fibonacci F_n são definidos pela recorrência dada por

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, com\ F_1 = F_2 = 1. \tag{3.5}$$

E que existe uma fórmula, chamada Fórmula de Binet, que gera todos os números, independentemente dos números antecessores, que é definida por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{3.6}$$

As perguntas do aluno foram:

1º) Como se chegou nesta fórmula?

2º) Essa fórmula é válida para qualquer número natural n?

A primeira pergunta foi respondida anteriormente, mais precisamente, no Teorema 2.7, da subseção 2.2.2.

A segunda pergunta foi respondida ao aluno, provando pelo princípio da indução completa. Considere a sentença relativa ao natural n, na equação (3.6). Ela é verdadeira para n =1 e 2. De fato:

i) F(1), pois:

$$F(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{+1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5}) - 1 + \sqrt{5}\right] = 1.$$

ii) F(2), pois:

$$F(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1+1}$$

$$F(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)$$

$$F(2) = \frac{1}{4\sqrt{5}}\left(1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5\right) = 1.$$

iii) Agora, supondo válida para algum $n \in \mathbb{N}$, a validez de $F(n)$ e $F(n-1)$, ou seja, são verdadeiras as seguintes expressões:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

e

$$F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

queremos mostrar que implica na validez de $F(n+1)$, da recorrência (3.5), temos que:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{F(n)} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}_{F(n-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

$$= F(n+1).$$

Dessa forma conseguimos mostrar que a equação (3.6) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

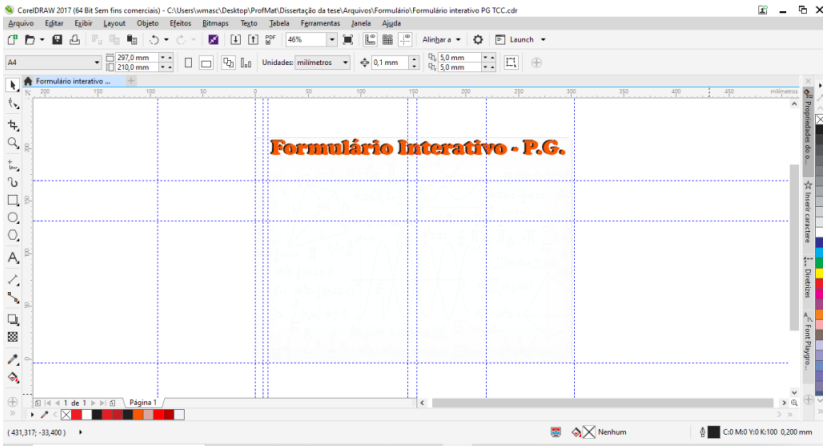
4 CONSTRUINDO UM FORMULÁRIO INTERATIVO

Primeiramente, é essencial definir o assunto a ser abordado no formulário e, em seguida, criar sua arte. Aqui utilizaremos como material, parte do conteúdo do Capitulo 2. Para a criação da arte sugerimos os *softwares CorelDRAW, Canva, Adobe Illustrator, Phothoshop* ou outro *software* de *design* gráfico. Não há uma regra básica para a elaboração de um formulário, mas pretendemos fornecer orientações com base na experiência na confecção de diversos formulários, alguns dos quais estão disponíveis no anexo desta dissertação.

4.1 Passo a passo da Construção de um Formulário

As figuras abaixo servem como guia para a montagem de um formulário sobre progressão geométrica, feito no *CorelDRAW*. Após a confecção do formulário, é necessário converter a arte em um arquivo no formato PDF. A posição do título do formulário deve ser definida de acordo com a apresentação das fórmulas, podendo ser do centro para fora (conforme apêndice A, apêndice B, apêndice C) ou no cabeçalho, como na Figura 4.1. A escolha dependerá da criatividade de cada autor.

Figura 4.1 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Início

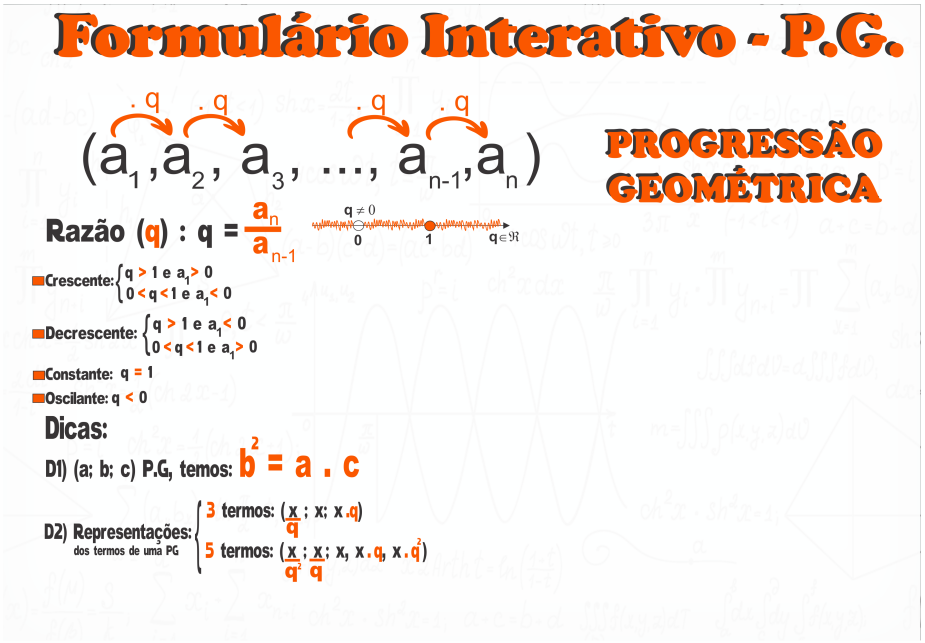


Fonte: Do autor(2024)

O corpo do formulário, que contém os conceitos e as fórmulas em si, pode ser apresentado de duas maneiras: utilizando fórmulas diretas, com conceitos resumidos, conforme ilustrado, na Figura 4.2.

As disposições das fórmulas seguem uma lógica ou conceito mnemônico específico. As fórmulas mais recorrentes ou mais difíceis de serem memorizadas devem ser colocadas no centro ou destacadas pelo seu tamanho ou cor diferente, como ilustrado na Figura 4.3.

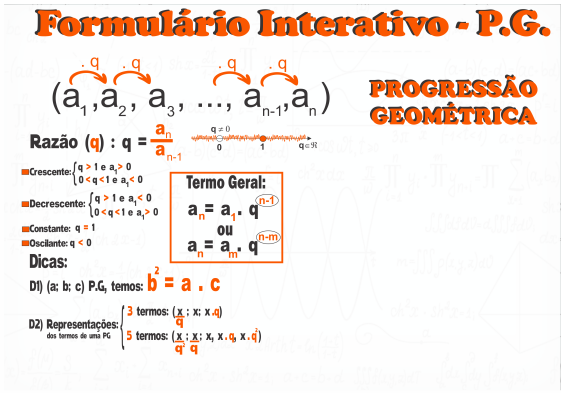
Figura 4.2 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - corpo do formulário



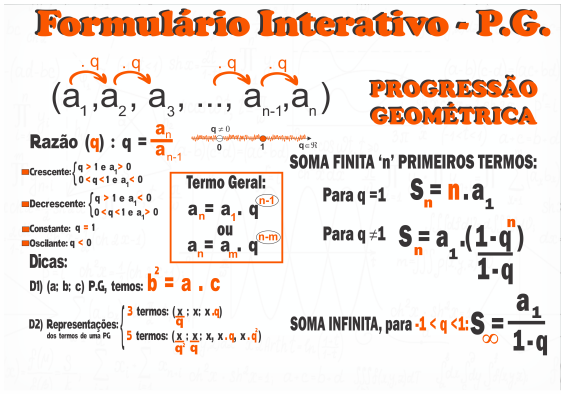
Fonte: Do autor(2024)

Figura 4.3 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Disposição das Fórmulas

(a) Parte 1



(b) Parte 2

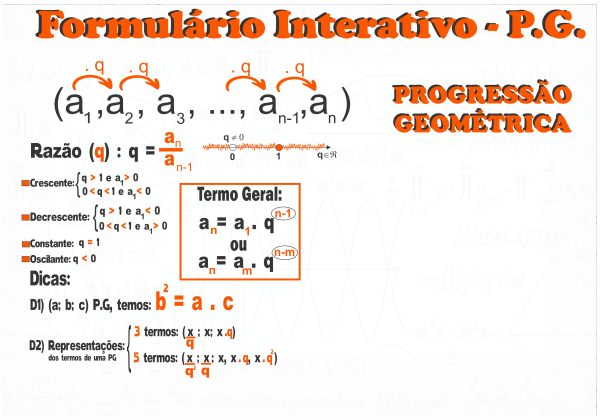


Fonte: Do autor(2024)

É crucial lembrar aos alunos que o documento em questão não se resume apenas a um conjunto de fórmulas em um design moderno, mas sim a um formulário interativo. Além disso, é importante destacar que cada fórmula está vinculada a um vídeo autoexplicativo, como será detalhado na próxima seção. Para garantir que os alunos estejam cientes dessa funcionalidade, é inserido um lembrete no rodapé 1, conforme ilustrado na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Finalização

(a) rodapé 1



(b) Formulário PG

Fonte: Do autor(2024)

4.2 Criação de Vídeos Digitais

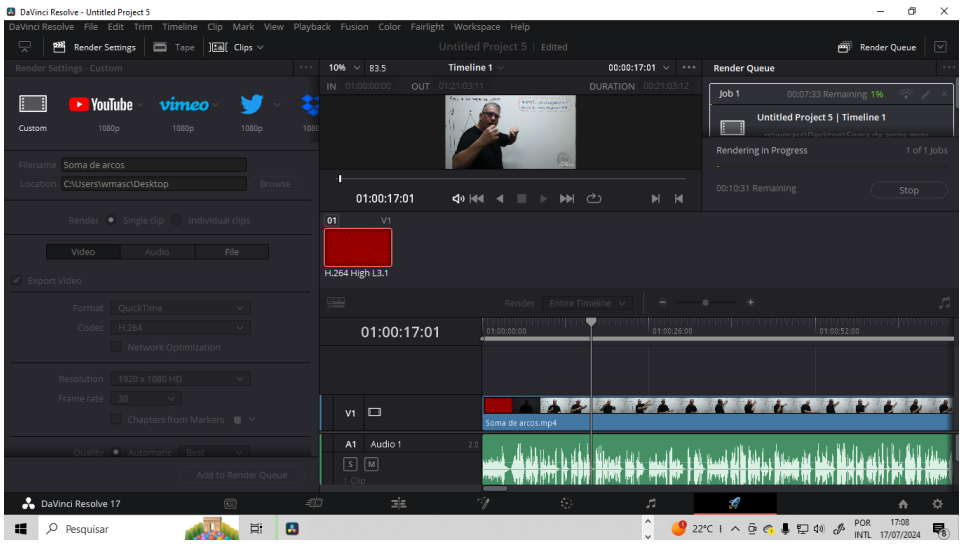
Cada fórmula presente no formulário demanda a criação de um vídeo explicativo sucinto, que transmita o conteúdo de maneira clara. A produção desses vídeos envolve diversas etapas e requer o uso de equipamentos específicos. O autor desta monografia utilizou vários equipamentos, incluindo uma câmera *Canon Rebel T7*, um kit de iluminação para estúdio *Soft-Box Estúdio Profissional*, um microfone sem fio e uma mesa de equalização de som.

Antes de iniciar a gravação, é fundamental elaborar um roteiro detalhado do vídeo, delineando os passos que serão abordados, incluindo as falas e o que será escrito na lousa. Em seguida, realize um teste de luminosidade com a câmera e verifique a qualidade do som com o microfone, certificando-se de que ambos estejam adequadamente configurados e funcionando corretamente.

Para a captura eficiente de imagens e sons, recomendamos a utilização do *software* *ObsStudio*, conhecido por sua versatilidade e por ser de uso gratuito.

Após a gravação de todos os vídeos de cada fórmula, o próximo passo é a edição, que é realizada por meio de um software gratuito chamado *DaVinci Resolve*. Para cada vídeo, é necessário fazer alguns cortes, adicionar elementos como logos do canal do *YouTube* e figuras para explicação do vídeo, entre outros. A renderização, que é o processamento feito pela *CPU* combinando o material bruto digitalizado, como imagens, vídeos, áudios e recursos incorporados ao *software*, como transições, legendas e efeitos, em um único vídeo, pode levar mais de uma hora, dependendo do vídeo e da quantidade de partes e cortes. O tempo de renderização está diretamente relacionado ao tipo de equipamento utilizado. Por exemplo, para produzir um vídeo de 11 minutos e 11 segundos, com 3 cortes, uma introdução de 7 segundos, uma logo do canal do *YouTube* que aparece durante todo o vídeo e uma saída de 16 segundos, a renderização durou aproximadamente 38 minutos. O equipamento utilizado foi um *desktop Intel Core* i7-4790CPU4GHz de 32 GB *RAM*, com placa de vídeo *NVIDIA GeForce GTX* 1080Ti de 12Gb.

Figura 4.5 – Exemplo do renderização de um vídeo



Fonte: do autor (2024)

Aqui deixaremos um resumo das etapas:

a) equipamentos Necessários:

Câmera (pode ser um *smartphone* com boa qualidade de vídeo), tripé para estabilizar a câmera ou similar e uma lousa;

b) preparação:

Elabore roteiro detalhado do vídeo. Escolha um local com boa iluminação e baixo nível de ruídos. Posicione a câmera de maneira que a lousa esteja no enquadramento desejado. Ajuste o foco para garantir que a escrita na lousa seja legível;

c) gravação:

Comece a gravação e verifique a qualidade do áudio. Verifique a luminosidade e escreva na lousa, certificando-se de que a escrita esteja legível;

d) edição:

Transfira o vídeo para um computador caso tenha utilizado câmera externa. Use software de edição como, por exemplo, o *software DaVinci Resolve*, para cortar partes desnecessárias. Adicionar títulos, legendas ou outras figuras, se necessário. Renderize o vídeo. Esta etapa pode demorar, dependendo do seu equipamento e tamanho do vídeo;

e) publicação:

Carregue o vídeo em plataformas como *YouTube* ou sites educacionais.

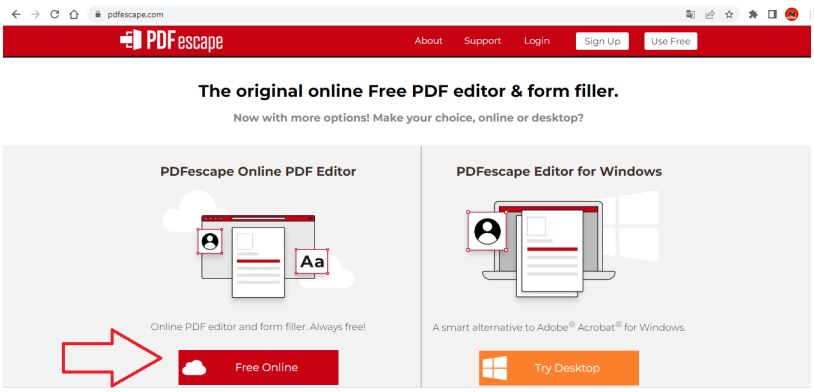
Alternativamente, existem outras maneiras de construir vídeos que não necessitam de câmera, mas sim da captura de tela do computador. Além da gravação de aula com lousa. É também comum, a gravação de aula com mesa digitalizadora utilizando ferramentas digitais para escrever e desenhar enquanto explica os conceitos. A gravação de tela com apresentações de slides, permitindo que o professor navegue por slides preparados previamente enquanto faz a narração, facilitando a organização e clareza do conteúdo; animações educacionais, utilizando softwares de criação de animações para ilustrar conceitos de maneira visualmente atraente.

4.3 Passo a passo fazendo o link de cada fórmula com cada vídeo

Podemos utilizar a plataforma de vídeos da *internet*, o *YouTube*, para fazer o upload de cada vídeo após a edição do passo anterior. Com os *links* dos vídeos e do formulário em arquivo formato PDF em mãos, é chegada a hora de uni-los nas respectivas áreas do formulário. Isso pode ser feito utilizando o site: www.pdfescape.com, seguindo os seguintes passos:

a) clicar em *Free on line* na seta vermelha na Figura 4.6;

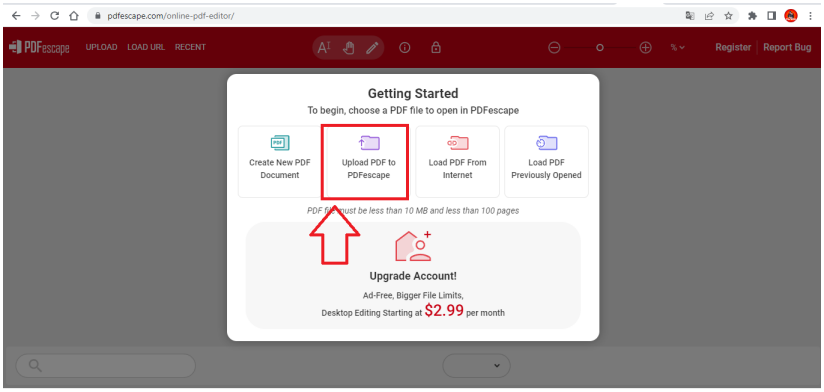
Figura 4.6 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Identificando o site



Fonte: Do autor(2024)

b) fazer o *upload* do formulário salvo no formato PDF, clicando em *Upload pdf to PDFescape*, na seta vermelha, na Figura 4.7;

Figura 4.7 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - *Upload* do arquivo

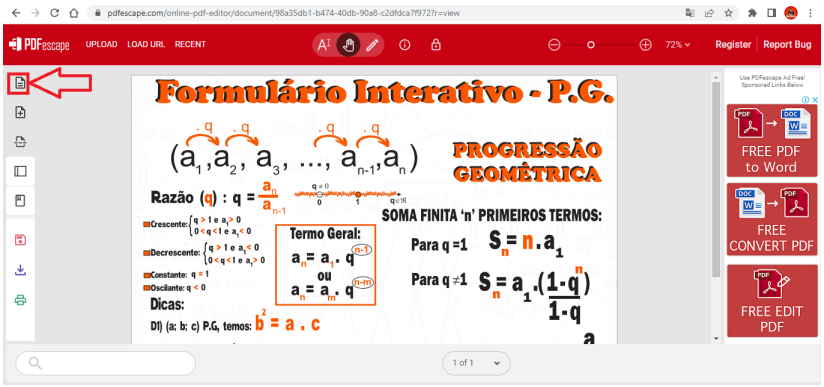


Fonte: Do autor(2024)

c) clicar em um ícone indicado pela seta vermelha, como mostrado na figura 4.8;

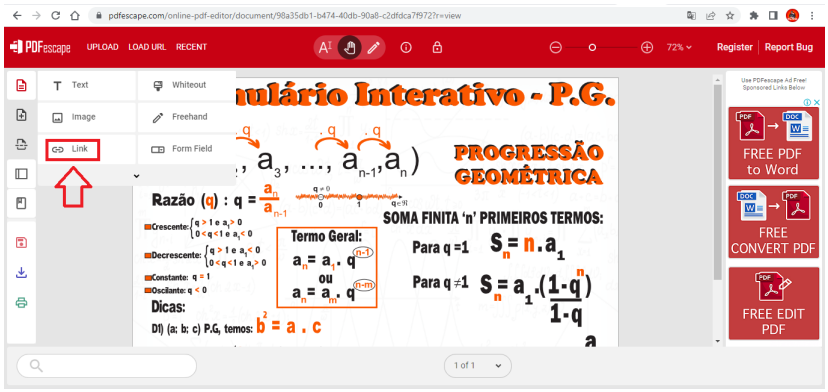
d) clicar no botão *link*, como mostrado pela seta vermelha na figura 4.9.

Figura 4.8 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Identificando a região da fórmula 1ª Parte



Fonte: Do autor(2024)

Figura 4.9 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Identificando a região da fórmula 2ª Parte

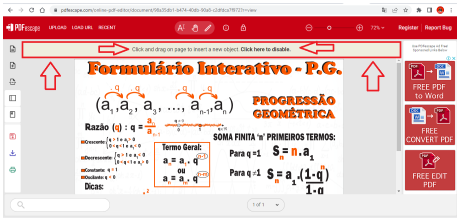


Fonte: Do autor(2024)

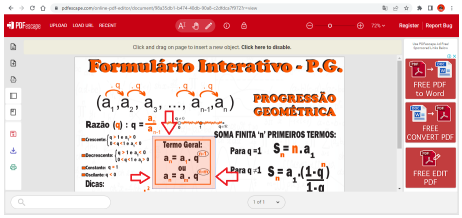
Aparecerá uma mensagem na Figura 4.10(a), neste momento, em qualquer região do seu arquivo, você pode clicar com o botão esquerdo do mouse e arrastar, para a formar um retângulo sobre a área de interesse. Ao selecionar uma fórmula exemplo, como mostrado na Figura 4.10(b), irá aparecer uma mensagem para copiar o *link*, conforme ilustrado na Figura 4.10(c), onde você deve colocar o endereço do *link* do vídeo referente a explicação daquela fórmula, conforme mostrado na Figura 4.10(d).

Figura 4.10 – Passo a passo da criação do Formulário Interativo - Colocando o link na região selecionada

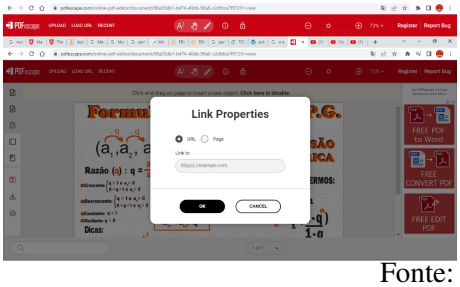
(a) Selecionado um arquivo



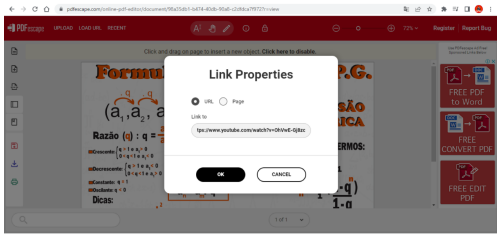
(b) Exemplo de Fórmula



(c) Local do Link



(d) Local do Link



Fonte: Do autor(2024)

Segue abaixo uma descrição dos vídeos empregados neste formulário ao clicar na fórmula ou numa região correspondente:

a) razão e classificação;

Figura 4.11 – Razão e classificação de uma PG

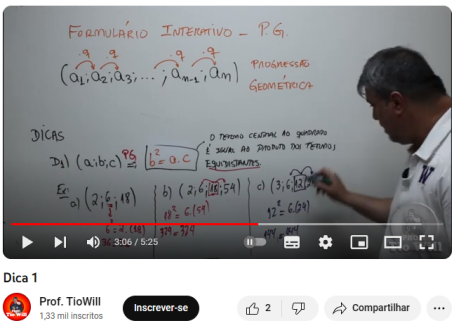
Fonte: Do autor(2024)

Explicação da razão de uma PG e a sua classificação (Figura 4.11) observando os termos dela, com duração de 7 minutos e 13 segundos.

b) dica 1;

Com o objetivo de explicar que um termo central (Figura 4.12) é a média geométrica dos termos equidistantes dos elementos escritos numa PG, com duração de 5 minutos e 25 segundos.

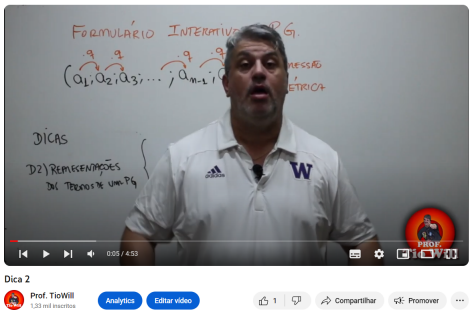
Figura 4.12 – Razão e classificação de uma PG



Fonte: Do autor(2024)

c) dica 2;

Figura 4.13 – Razão e classificação de uma PG



Fonte: Do autor(2024)

Uma dica de escrever de forma simples 3 termos e 5 termos de uma progressão geométrica (Figura 4.13) , com duração de 4 minutos e 53 segundos.

d) termo geral;

Figura 4.14 – Razão e classificação de uma PG

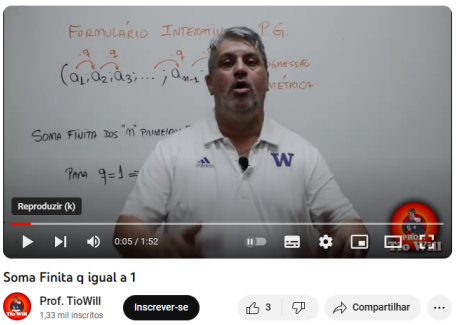
Fonte: Do autor(2024)

A representação de um termo geral da PG(Figura 4.14) , com duração de 4min19segundos

.

e) soma finita dos termos de uma P.G;

Figura 4.15 – Razão e classificação de uma PG

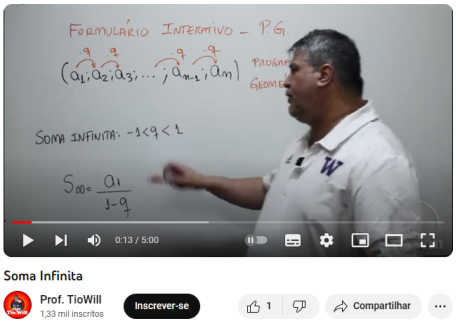


Fonte: Do autor(2024)

Explica a fórmula da soma de termos finita de uma PG (Figura 4.15) com duração de 1 minuto e 52 segundos .

f) soma infinita dos termos de uma P.G.

Figura 4.16 – Razão e classificação de uma PG



Fonte: Do autor(2024)

Explica a fórmula da soma de termos infinita de uma PG (Figura 4.16) com duração de 5 minutos 0 segundos.

4.4 Uso de Formulário em sala de aula

Nesta seção, serão abordados dois tópicos: o primeiro trata da melhor forma de utilizar formulários interativos em sala de aula, sugerindo aos professores sua aplicação; o segundo tópico propõe uma atividade na qual os alunos irão confeccionar um formulário próprio.

4.4.1 Como ferramenta de ensino e aprendizagem

Após a finalização do formulário interativo, no qual cada fórmula está devidamente vinculada a um vídeo de uma plataforma como o *YouTube*, é hora de disponibilizá-lo aos alunos. Ao concluir o conteúdo, o professor pode compartilhar o formulário através do *whatsApp* do grupo de alunos, por *e-mail* ou ainda utilizar um *QR CODE* [7], como ilustrado na figura 4.17, para que os alunos possam apontar seus celulares e serem automaticamente direcionados ao arquivo, previamente armazenado em um *drive* [8] do professor. É interessante destacar que todo o conteúdo visto em várias aulas agora cabe na palma da mão do aluno, e que a explicação de como funciona uma determinada fórmula ou conceito permanece acessível em tempo integral, apoiada na definição apresentada em vídeos feitos pelo próprio professor ou selecionados de plataformas como o *YouTube* ou similares.

Figura 4.17 – Uso do Formulário

Fonte: Do autor(2024)

Uma maneira para o professor monitorar o acesso ao formulário é registrar o número de visualizações de cada vídeo e fórmula antes de permitir o acesso dos alunos. Após alguns dias, o professor pode verificar novamente esses números. Como os vídeos são exclusivos para os alunos do formulário, é fácil acompanhar o desempenho do formulário em si. Para turmas posteriores, podem ser consideradas outras técnicas de acompanhamento, como a seleção das datas de acesso.

4.4.2 Confecção de um formulário pelo aluno

Aqui propomos uma atividade na qual o aluno confecciona seu próprio formulário. Ele pode utilizar alguns *softwares* ou ainda, o aluno pode optar por criar o formulário em papel e

[7] Quick Response ou "reposta rápida"
[8] por exemplo, *GoogleDrive*

depois tirar uma foto, convertendo-a em um arquivo no formato PDF. O objetivo é que o aluno tenha a oportunidade de criar um material de estudo personalizado, organizando e destacando os conceitos mais importantes da matéria de acordo com suas necessidades individuais. Segue uma atividade sugerida observado este pontos.

Atividade: Elaboração de Formulário Interativo pelos Alunos para Explorar e Consolidar o Conhecimento.

Tarefa 1 - resumo teórico: Nesta etapa, o professor instrui os alunos a sintetizarem os principais tópicos estudados sobre um determinado assunto. Os alunos são desafiados a criar um formulário interativo, semelhante a um mapa mental, no qual devem elaborar a sua própria diagramação das fórmulas ou conceitos resumidos;

Orientação para o professor: O aluno tem total liberdade para organizar as fórmulas como preferir na folha, sem inibir sua criatividade. Isso pode ser feito utilizando os *softwares* mencionados no início desta seção, como: *CorelDRAW*, *Canva, Adobe Illustrator, Phothop* ou qualquer outro *software* de *design* gráfico disponível. Alternativamente, o aluno pode optar por criar o formulário manualmente em papel.

Tarefa 2 - digitalização do Formulário: Ao final deste processo o arquivo deverá estar no formato em PDF;

Orientação para o professor: O professor pode sugerir outras formas de digitalização. Aqui segue algumas sugestões:

a) online: Existem muitos sites que permitem converter imagens em arquivo no formato PDF gratuitamente. Basta pesquisar por "converter imagem para PDF *on-line*"e você encontrará várias opções. Normalmente, esses sites permitem que você faça o *upload* da imagem e depois baixe o arquivo em PDF resultante;
b) software de edição de imagens: Muitos *softwares* de edição de imagens, como o *Adobe Photoshop* ou o *GIMP*, permitem salvar imagens em formato PDF. Basta abrir a imagem no *software*, ir até a opção de salvar ou exportar e escolher o arquivo PDF como o formato de saída;
c) aplicativos móveis: Há também aplicativos disponíveis em lojas de aplicativos para dispositivos móveis que podem converter imagens em PDF diretamente do seu telefone celular ou *tablet*. Alguns exemplos são o *Adobe Scan, CamScanner*, entre outros;

d) printar para PDF: Se estiver usando um computador com *Windows 10 ou MacOS*, você pode imprimir a imagem e selecionar a opção de imprimir para PDF em vez de imprimir em papel. Essa opção geralmente está disponível no menu de impressão.

Tarefa 3 - pesquisa de vídeos na *internet*: O aluno deverá procurar vídeos relacionados ao conteúdo dos formulários.

Orientação para o professor: O professor pode sugerir uma lista de canais confiáveis nos quais os alunos possam encontrar vídeos que expliquem melhor um determinado conteúdo. Entre vários canais disponíveis no *YouTube*, alguns destaques são:

a) professor Ferreto: graduado em Matemática pela Universidade Federal Santa Catarina, seu canal tem cerca de 992 vídeos de matemática e possui mais de três milhões e duzentos mil inscritos. [9];

b) professor Paulo Pereira: mestre em Matemática pelo IMPA, seu canal tem cerca de 2 mil vídeos de matemática e possui mais de um milhão e seiscentos mil inscritos. [10];

c) professor Sandro Curió: graduado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, seu canal tem cerca de 1.200 vídeos de matemática e possui mais de um milhão e novecentos mil inscritos. [11];

d) professora Gisleine Correa Bezera: mestre em avaliação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina, seu canal tem cerca de 1.600 vídeos e possui mais de três milhões e oitocentos mil inscritos. [12].

Tarefa 4 - inserir os links dos vídeos pertinentes nas fórmulas específicas - O aluno deverá seguir os passos do item 4.10.

Isso permite que os alunos acessem conteúdos complementares e tirem dúvidas sobre as fórmulas e conceitos apresentados no formulário. Essa integração entre o material didático utilizado pelo aluno e recursos digitais pode enriquecer a experiência de aprendizado e oferecer aos alunos diferentes formas de assimilação do conteúdo.

[9] https://www.youtube.com/@professorferretto. Acesso: 22 de abril de 2024
[10] https://www.youtube.com/@equacionamatematica. Acesso: 22 de abril de 2024
[11] https://www.youtube.com/@sandrocuriodicasdemat. Acesso: 22 de abril de 2024
[12] https://www.youtube.com/@Giscomgiz. Acesso: 26 de abril de 2024

5 CONCLUSÃO

Primeiramente deve-se ressaltar que nunca o trabalho de um professor deveria, deve ou deverá ser substituído por qualquer meio eletrônico.

O ensino de hoje nas salas de aula tem sido um desafio diário, muito devido a pandemia que sabida o fez os alunos se distanciarem dos conteúdos elementares, das interatividades entre eles mesmos e principalmente com o professor em sala de aula. E foi a pandemia que evidenciou a importância do uso de tecnologias digitais no aprendizado da Matemática. Além disso, tirou muitos educadores da inércia quanto ao uso dessas tecnologias.

A crescente importância no ensino e da tecnologia na educação indica que o ensino é uma prática educativa em constante evolução, adaptando-se, reformulando-se e atualizando-se com as crescentes fases do desenvolvimento tecnológico. As mídias digitais desempenham um papel fundamental nesse desenvolvimento e são "[...] facilitadoras do processo da aprendizagem de forma colaborativa, assertiva, significativa e positiva" MELO (2023). Podemos citar o uso de vídeos na Matemática, que sensibilizam, ilustram e simulam os mais diversos conteúdos estudados. Usar vídeo não é novidade, mas recentes pesquisas constatam que atualmente os alunos dão mais preferência a essas mídias do que livros PERSON (2018 apud FELCHER; BIERHALZ; FOLMER, 2020). A geração dos alunos de hoje, conhecida como geração Z, está profundamente ligada ao uso das muitas mídias digitais, incluindo videogames e *smartphones*, que, conectados à internet, proporcionam acesso instantâneo a qualquer informação. Hoje, mais do que nunca, existe muita informação disponível. Uma ferramente para organizar e sintetizar essa informação é o mapa mental introduzido por Tony Buzan. Através dos mapas mentais, é possível organizar, armazenar e destacar informações usando palavras-chave, imagens ou fórmulas, facilitando a memorização e revisão dos conteúdos. Como uma forma de entender as preferências dos estudantes da geração Z, unindo a eficiência dos mapas mentais na organização e visualização de informações de maneira estruturada e intuitiva com a interatividade dos conteúdos em vídeo, propomos a criação do Formulário Interativo.

Nesse sentido o uso do formulário pelos alunos consiste em um resumo da matéria ministrada pelo professor em sala de aula. Ele deve ser utilizado sempre que o aluno precisar lembrar-se do uso de uma fórmula ou de um conceito estudado. É importante ressaltar que o aluno deve ser orientado a estudar antes de dormir, pois é durante o sono que todo o conteúdo estudado durante o dia, armazenado na memória temporária, se converte em memória fixa.

Conforme mencionado por PIAZZI (2008), estudar pouco, mas todos os dias, é a fórmula do sucesso no aprendizado.

Durante a aula, o aluno pode compreender os conceitos, mas é em casa, intrinsecamente, que ocorre a verdadeira aprendizagem. Por isso, é comum em alguns cursinhos adotarem a máxima: "Aula dada, aula estudada, no dia". Isso ressalta a importância de revisar e consolidar o conhecimento adquirido logo após a aula, maximizando a retenção e compreensão do conteúdo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, D. N. d. O exame nacional do ensino médio (enem) e a utilização de mapas mentais como recurso didático para as aulas de matemática da 3a série do ensino médio. **Educação, Ciência e Cultura**, Artigo de revista, Jun 2020. Disponível em: <https://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/7093>. Acesso em: 10 set. 2023.

BARROS, A. P. R. M. d. **Contribuições de um micromundo composto por recursos do GeoGebra e da coleção M³ para a aprendizagem do conceito de volume de pirâmide**. [S.l.], 2013. v. 1, n. 1. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1622239.> Acesso em: 14 out. 2023.

BORBA, M. C. **Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments**. [S.l.], 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0436-8>. Acesso em: 10 nov. 2023.

BORBA, M. d. C. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BORBA, M. d. C. **Vídeos na educação matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

BORBA, M. D. C.; OECHSLER, V. Tecnologias na educação: o uso dos vídeos em sala de aula. **Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia**, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, v. 11, n. 2, 2018. Acesso em: 15 jul. 2023.

BRASIL, M. d. E. M. **Base Nacional Comum Curicular - BNCC**. 1. ed. DF: Brasília, 2017.

BUZAN, T. **Mapas mentais**. 1. ed. Brasil: Sextante, 2009.

COSTA, P. R. M. e E. A. D. S. Ensino da matemÁtica e a utilizaÇÃo de mÍdias digitais. **Anais do CIET:EnPED:2020 - (Congresso Internacional de Educação e Tecnologias | Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância)**, 2020. ISSN 2316-8722. Disponível em: <https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2020/article/view/1619>. Acesso em: 17 nov. 2023.

FELCHER, C. D. o.; BIERHALZ, C. D. K.; FOLMER, V. A importância de vídeos educacionais do youtube na formação inicial de professores. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, RBECT, v. 13, n. 2, p. 43–60, 2020. ISSN 1982-873X. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/9557>. Acesso em: 5 set. 2023.

FREIRE, P. **Professora sim, tia não Cartas a quem ousa ensinar**. S-ap Paulo: Olho D'água, 1997.

IEZZI, S. H. G. **Fundamentos de matemática elementar, 4**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, L. C. Sobre a educação cultural e ético-política dos professores. **Educar em Revista**, n. 61, p. 143–156, Dezembro 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/0104-4060.46864>.

MELO, V. N. d. O. Mídias na educação: impactos, contribuições e desafios no processo de aprendizagem. Julho 2023. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/23/26/midias-na-educacao-impactos-contribuicoes-e-desafios-no-processo-de-aprendizagem#:~:text=O%20uso%20das%20m%C3%ADdias%20digitais,mentais%20adaptados%20ao%20uso%20educacional>. Acesso em: 3 dez. 2023.

MISKOLCI, R. Novas conexões: notas teórico-metodológicas para pesquisas sobre o uso de mídias digitais. **Revista Cronos**, v. 12, n. 2, jun. 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufrn.br/cronos/article/view/3160>. Acesso em: 1 set. 2023.

MONZO, L. W.; GRAVINA, M. A. Uma introdução às funções de variável complexa no ensino médio: uma possibilidade através do uso de animações interativas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, v. 27, n. 46, p. 645–661, Aug 2013. ISSN 0103-636X. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300020>. Acesso em: 22 out. 2023.

MORAN, J. M. O vídeo na sala de aula. **Comunicação e Educação**, n. 2, p. 27–35, abr. 1995. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/comueduc/article/view/36131>. Acesso em: 25 set. 2023.

MORAN, J. M.; MASETTO, M.; BEHRENS, M. A. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógicas**. 21. ed. São Paulo: Papirus, 2013.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. RJ: SBM, 2015.

PERSON. *New Research Finds YouTube, Video Drives Generation Z Learning Preference*. Person, 2018. Disponível em: <https://plc.pearson.com/en-GB/news/new-research-finds-youtube-video-drives-generation-z-learning-preference>. Acesso em: 10 dez. 2023.

PIAZZI, P. **Aprendendo inteligência**. 2. ed. São Paulo: Aleph, 2008.

SETTON, M. da G. **Mídia e educação**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2015.

SILVA, A. d. P. C. Vídeo aulas e *YouTube* no curso de licenciatura em matemática. **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí**, p. 17, Março 2023. Disponível em: <http://bia.ifpi.edu.br:8080/jspui/handle/123456789/1550>. Acesso em: 28 jul. 2023.

SILVA, M. **Sala de Aula Interativa**. Rio de Janeiro: Quartet, 2000.

SIQUEIRA, R.; ALBUQUERQUE, R. F.; MAGALHAES, A. R. Método de ensino adequados para o ensino da geração z – uma visão dos discentes: um estudo realizado no curso de graduação em administração de uma universidade federal. p. 16, 2012. Disponível em: <https://docplayer.com.br/12934784-Xxiii-enangrad-ensino-pesquisa-e-capacitacao-docente-em-administracao-epd.html>. Acesso em: 10 dez. 2023.

TAVARES, L. A.; MEIRA, M. C.; AMARAL, S. F. D. Mapa mental interativo: a concepção de uma mídia rica para a aprendizagem. **Educação, Ciência e Cultura**, Artigo de revista, v. 26, Abril 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.18316/recc.v26i1.6645>.

Incluindo anexos numerados com letras maiúsculas.

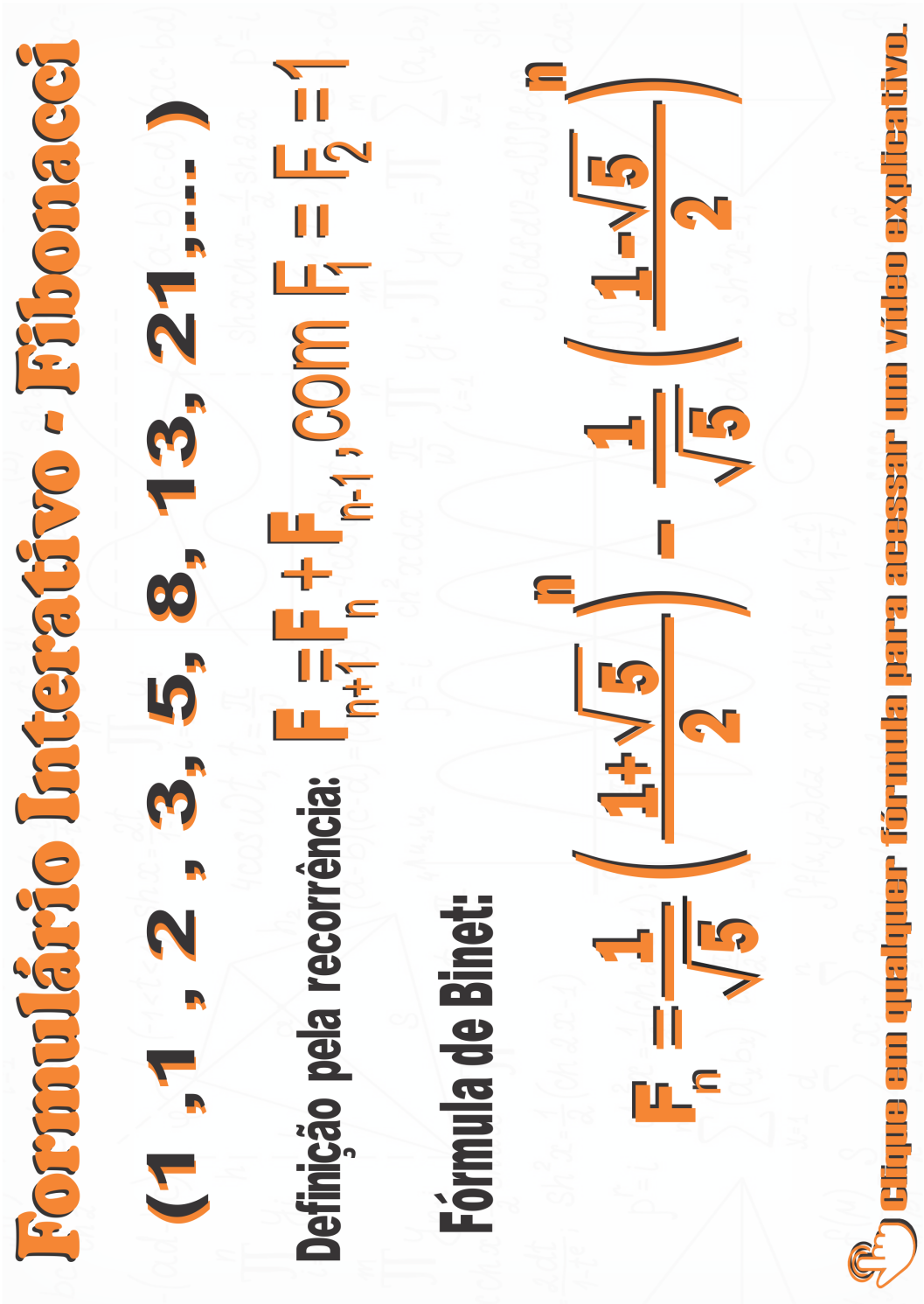
APÊNDICE A – Formulário Interativo Progressão Aritmética

Figura 1 – Apêndice A

Fonte: do autor

APÊNDICE B – Formulário Interativo Fibonacci

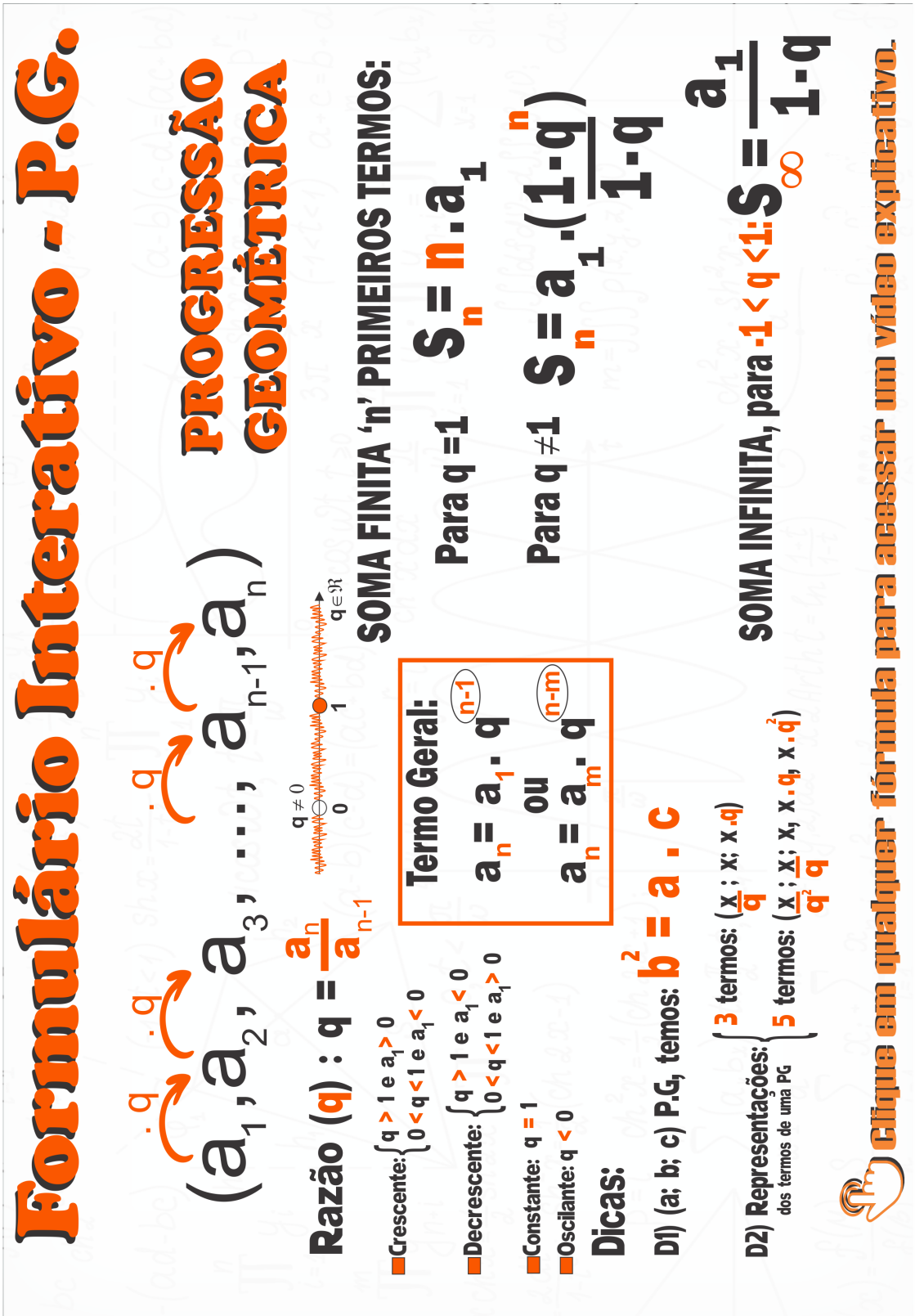
Figura 2 – Apêndice B



Fonte: do autor

APÊNDICE C – Formulário de Progressão Geométrica- PG

Figura 3 – Apêndice C



Fonte: do autor