



Universidade Federal do ABC

# Aplicações dos Números Complexos à Geometria Euclidiana Plana

Fabio Marques Cordeiro

Dissertação apresentada  
ao PROFMAT, UFABC,  
para obtenção do grau de  
Mestre em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Armando Caputi**

Santo André-SP  
2013



Curso de Pós - Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado

Fabio Marques Cordeiro

Aplicações dos Números Complexos à  
Geometria Euclidiana Plana

Trabalho apresentado como requisito  
parcial para obtenção do título de  
Mestre em Matemática, sob orientação  
do Professor Doutor Armando Caputi.

Santo André-SP  
2013



Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 11 de dezembro de 2013.

Assinatura do autor:

Assinatura do orientador:

## Agradecimentos

À minha mãe Vera Lucia Marques Cordeiro, por estar presente em todos os momentos da minha vida e por sempre ter me incentivado aos estudos.

À minha esposa Denise Pires de Oliveira Cordeiro, pelo companherismo, pelo carinho, pela paciência, pelo amor.

Ao meu orientador Armando Caputi, pelas sugestões e críticas que contribuíram para elaboração deste trabalho.

*"O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, nesse portento do mundo das ideias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa".*

Gottfried Wilhelm Von Leibniz

## Resumo

O ensino dos números complexos no ensino médio é caracterizado quase que exclusivamente com a abordagem algébrica. Os raros momentos onde a geometria se faz presente é na representação trigonométrica de um número complexo. Neste trabalho, apresentaremos algumas aplicações dos números complexos à geometria euclidiana plana com o objetivo de dar um caráter mais geométrico ao ensino do números complexos. Apresentamos a clássica interpretação dos números complexos e suas operações em termos de vetores e transformações do plano, respectivamente, e aplicamos esse ponto de vista em teoremas clássicos e alguns problemas interessantes da geometria euclidiana plana.

**Palavras-chave:** Números complexos, geometria, vetores, equações algébricas.

## Abstract

High school teaching of complex numbers is usually based on an algebraic approach. A geometric approach to such subject is rarely adopted and often limited to the trigonometric representation of complex numbers. In this work we present some applications of complex numbers to Euclidean plane geometry, in order to stimulate the adoption of geometric viewpoint in high school teaching of complex numbers. We introduce the classical understanding of complex numbers and its operations by means of vectors and geometrical transformations, respectively, and apply such viewpoint to classical theorems e some interesting problems of Euclidean plane geometry.

**Keywords:** Complex numbers, geometry, vector, algebraic equations.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Uma Breve História Sobre os Números Complexos</b>	<b>12</b>
<b>2 Números Complexos</b>	<b>16</b>
2.1 O corpo $\mathbb{C}$	16
2.2 Operações entre Complexos	20
2.2.1 Adição e subtração	20
2.2.2 Multiplicação	21
2.2.3 Potenciação. Primeira Fórmula de De Moivre	23
2.2.4 Divisão	24
2.2.5 Raízes n-ésimas de um complexo	26
<b>3 A Geometria e os Números Complexos</b>	<b>29</b>
3.1 Paralelismo e Perpendicularismo	29
3.1.1 Condição de Alinhamento de Três Pontos	29
3.1.2 Equação da Reta	29
3.1.3 Equação da Reta Paralela a uma direção dada	30
3.1.4 Equação da Reta Ortogonal a uma direção dada	31
3.1.5 Equação da Mediatriz de um Segmento	31
3.2 Triângulos	33
3.3 Semelhança de Triângulos	34
3.4 Caracterização de Triângulos Equiláteros	35
3.5 Pontos Notáveis de um Triângulo	37
3.5.1 Circuncentro	37
3.5.2 Ortocentro	38
3.5.3 Incentro	39
3.5.4 Baricentro	41
<b>4 Aplicações à Geometria Plana</b>	<b>42</b>
4.1 Teorema de Napoleão	42
4.2 A Reta de Euler	43
4.3 Círculo dos Nove Pontos	44
4.4 O Teorema de Morley	47

<b>5 Outros Problemas</b>	<b>54</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

## Introdução

A edição de número 47 da Revista do Professor de Matemática trata de um problema geométrico denominado de "problema da ilha do tesouro" cujo enunciado é o seguinte:

*Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de  $90^\circ$ , à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de  $90^\circ$ , e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas. Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui". Repete-se então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: contam-se os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro. A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?*

O problema em si já é bem interessante, mas o que mais nos causou surpresa foi a utilização dos números complexos na sua resolução. Tal surpresa tem origem no formato usual com o qual os números complexos são apresentados nos livros didáticos e nos cursos de ensino médio. Por mais que se tenha uma representação geométrica para um complexo ou até mesmo seu conjugado, acaba-se não dando continuidade a tal abordagem e a interpretação geométrica das operações entre complexos, bem como os problemas de complexos aplicados à geometria, ficam deixados de lado em favor de uma abordagem totalmente algébrica.

O *problema da ilha do tesouro* foi, certamente, o problema que nos motivou a buscar mais informações sobre essa maravilhosa relação entre os números complexos e a geometria e que culminou com a realização desse trabalho, cuja estrutura é a seguinte:

No primeiro capítulo, apresentaremos alguns fatos históricos sobre o surgimento dos números complexos bem como a importância da representação geométrica para a total aceitação dos mesmos. Já no segundo capítulo, partiremos da definição algébrica dos números complexos para então dar uma representação geométrica dos mesmos e para cada uma de suas propriedades. No terceiro capítulo, trataremos de algumas noções geométricas simples nessa representação complexa como, por exemplo, condições de paralelismo e perpendicularismo, equação da reta, semelhança de triângulos e pontos notáveis de um triângulo. Tais noções serão fundamentais para a demonstração de quatro teoremas da geometria plana que constituem o quarto capítulo. A saber: Teorema de Napoleão, A Reta de Euler, o Círculo dos Nove Pontos e o Teorema de Morley. Por fim, no quinto capítulo, apresentaremos cinco problemas de geometria plana que podem ser abordados no ensino médio e resolvidos facilmente com a utilização dos números complexos.

# 1 Uma Breve História Sobre os Números Complexos

Não é incomum que a origem dos números complexos esteja associada, erroneamente, à resolução de equações polinomiais de grau dois cujo discriminante é negativo. Veremos no decorrer do texto que foram as equações de grau três as responsáveis por tal feito.

Historicamente, as equações serviam como um modelo matemático para um problema concreto ou até mesmo geométrico. Dessa forma, se no processo de resolução surgisse uma raiz quadrada de número negativo, a interpretação era que o problema proposto não tinha solução, como o que aparece, por exemplo, na *Arithmetica* de *Diophanto* (275 d.C.).

**Problema 1.1** *Determinar os lados de um triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 unidades.*

**Resolução:** Chamando de  $x$  e  $y$  os comprimentos dos catetos, temos:

$$\frac{xy}{2} = 7 \text{ e } x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$

Desenvolvendo a segunda equação e substituindo nesta  $y = \frac{14}{x}$ , temos:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0 \implies x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Nesse ponto, *Diophanto* observa que só poderia haver solução se  $(\frac{172}{2})^2 \geq 24 \cdot 336$ . Nesse contexto, não se faz necessário introduzir um sentido à expressão  $\sqrt{-167}$ . Concluindo então que tal triângulo não existe.

Ao longo do tempo, vários outros matemáticos se depararam com questões dessa natureza, entre eles, *Cardano*. Em seu livro *Ars Magna*, publicado em 1545, há o seguinte problema:

**Problema 1.2** *Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40.*

**Resolução:** Chamando de  $x$  o comprimento de uma das partes, a outra terá comprimento  $10 - x$ , assim:

$$x(10 - x) = 40 \iff x^2 - 10x + 40 = 0,$$

cujas soluções são  $x = 5 \pm \sqrt{-15}$ .

Assim como seus antecessores, Cardano também considera que o problema não tem solução, porém, nesse caso, ele dá um passo a mais.

"Cardano reconhece que o problema dado não tem solução mas, talvez a título de curiosidade, observa que, trabalhando com essas expressões como se fossem números, *deixando de lado as torturas mentais envolvidas e multiplicando  $5 + \sqrt{-15}$  por  $5 - \sqrt{-15}$ , obtém-se  $25 - (-15)$ , que é igual a 40*. Em consequência, ele chama essas expressões de *raízes sofisticadas* da equação e diz, a respeito delas, que *são tão sutis quanto inúteis*."(MILIES, 1993).

Também em *Ars Magna* há a publicação daquilo que provavelmente, segundo EVES (2008, p.302), "[...] tenha sido o feito matemático mais extraordinário do século XVI, a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas.[...]"

No caso das cúbicas, o livro traz um método para resolver equações da forma  $x^3 + px + q = 0$ . Conhecida como *fórmula de Cardano-Tartaglia*, uma das soluções da cúbica, posta em notação moderna é:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

O fato é que tal fórmula dava a solução para algumas equações, mas no chamado "caso irreduzível", quando a equação possui as três raízes reais, o método acarreta em operar com o que chamamos hoje de números complexos.

"Cardano observou esse problema, mas parece não ter sabido o que fazer a respeito. Ele o menciona duas vezes em seu livro. Na primeira, diz que esse caso precisa ser resolvido usando um método diferente a ser descrito em outro livro (em edição posterior, em vez disso, ele se refere a um capítulo descrevendo artifícios que poderiam ser usados para resolver certas equações). Na segunda vez, ele escreveu: "*Resolvendo  $y^3 = 8y + 3$ , de acordo com a regra precedente, eu obtenho 3*". Isso deve ter intrigado qualquer leitor que tentasse obtê-la "de acordo com a regra", pois o cálculo envolvia  $\sqrt{-\frac{1805}{108}}$ . (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p.182)

Foi Rafael Bombelli (1526 – 1573) o primeiro a propor uma solução para essa questão. Em 1572, Bombelli, que era discípulo de Cardano, publica *L'Álgebra*. Em sua obra de três volumes, ele resgata os mesmos assuntos de *Ars Magna*, porém de uma forma mais clara e organizada. Ao retomar o estudo da equação de grau três, Bombelli considera a equação  $x^3 = 15x + 4$  e, ao aplicar a fórmula de *Cardano-Tartaglia*, obteve:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Assim como Cardano, ele chamou a expressão de *sofística*, porém, percebendo que  $x = 4$  é uma solução da equação proposta, cogita que tal valor está implícito na equação obtida e que é possível dar um sentido à expressão  $2 \pm \sqrt{-121}$ . Pensando nisso, Bombelli propôs um conjunto de regras e, operando com elas, mostrou que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

concluindo que

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

é uma solução da equação.

Nasce então uma situação em que, apesar da presença de radicais negativos, existe uma solução para a equação dada.

Segundo MILIES (1993), "Bombelli percebeu claramente a importância desse achado. Ele diz: *Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. ... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... . Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meios de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos.*

A partir do trabalho de Bombelli, os números complexos passaram a ser usados como "algoritmos que funcionam" para resolver equações polinomiais de grau 3. Porém havia uma grande dificuldade de se admitir a existência dos complexos devido ao fato da ausência de uma representação geométrica ou interpretação física dos mesmos. A representação geométrica dos números complexos mediante pontos do plano foi fundamental para sua aceitação.

A jornada em busca de tal representação foi longa e árdua. Começou em 1673 com o matemático inglês J. Wallis (1616 – 1703) passando por diversos matemáticos, entre eles L. Euler e C.F.Gauss, este último como grande responsável pela aceitação da representação geométrica, e terminando em 1833 com a formalização total dos complexos pelo matemático irlandês W. R. Hamilton (1805 – 1865).

## 2 Números Complexos

### 2.1 O corpo $\mathbb{C}$

**Definição 2.1** Um número complexo  $z$  é um par ordenado de números reais  $z = (x, y)$  satisfazendo as seguintes regras de manipulação para soma e o produto:

- $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .
- $z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$ .

A soma e o produto têm as seguintes propriedades:

- comutatividade:  
 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  e  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ .
- associatividade:  
 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  e  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ .
- $(0, 0)$  é o elemento neutro aditivo:  
 $z + (0, 0) = z$  para todo  $z$  complexo.
- $(1, 0)$  é o elemento neutro multiplicativo:  
 $z \cdot (1, 0) = z$  para todo  $z$  complexo.
- existência do simétrico aditivo:  
Para todo  $z = (x, y)$  existe  $-z = (-x, -y)$  tal que  $z + (-z) = (0, 0)$
- existência do inverso multiplicativo:  
Para todo  $z = (x, y) \neq (0, 0)$  existe  $w = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$  tal que  $zw = (1, 0)$ .
- distributiva do produto em relação à soma:  
 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ .

Um conjunto munido de uma soma e de um produto para os quais são válidas as propriedades anteriores é chamado de corpo comutativo. Dessa forma, concluímos que os números complexos formam um corpo comutativo representado pelo símbolo  $\mathbb{C}$ .

Observe que:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

e

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Esse fato nos permite identificar o número complexo  $(x, 0)$  pelo número real  $x$ .

$$(x, 0) = x.$$

Dessa forma o corpo ordenado dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) é visto como um subconjunto dos números complexos ( $\mathbb{C}$ ).

O número complexo  $(0, 1)$  é chamado de **unidade imaginária** e representado pelo símbolo  $i$ .

$$(0, 1) = i.$$

Uma propriedade que o número  $i$  satisfaz é a seguinte:

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Nesse sentido, como  $i^2 = -1$ , podemos escrever  $i = \sqrt[2]{-1}$ .

É fácil verificar também que  $(y, 0)(0, 1) = (0, y)$  e, dessa forma,

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

Essa última notação é conhecida como **forma algébrica** de um número complexo. Chamaremos ao número real  $x$  de **parte real** de  $z$  e ao número real  $y$  de **parte imaginária** de  $z$  e denotaremos, respectivamente

$$Re(z) = x \text{ e } Im(z) = y.$$

Da definição adotada, decorre que também podemos representar o número complexo  $z = x + yi$  como o vetor de origem na origem  $O$  do sistema de coordenadas e extremidade  $(x, y)$ , isto é, o complexo  $z$  é representado pelo vetor  $\vec{Oz}$ , conforme a figura 1.

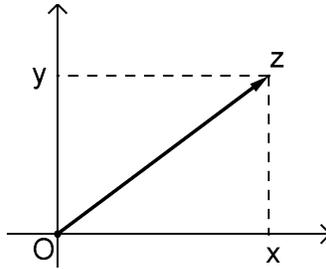


Figura 1: Representação vetorial

**Definição 2.2** Dado um número complexo  $z$ , chama-se *módulo de  $z$*  e representamos por  $|z|$ , o número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geometricamente,  $|z|$  mede a distância de  $z = x + yi$  à origem  $(0, 0)$  do plano cartesiano, ou seja, mede o comprimento do vetor que representa o complexo  $z$ , como se vê facilmente pelo Teorema de Pitágoras na figura 2.

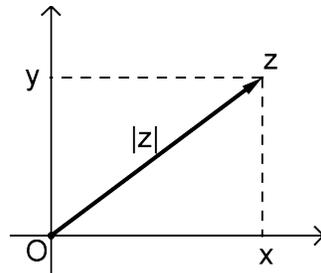


Figura 2: Módulo de um número complexo

**Definição 2.3** Dado o complexo  $z = x + yi$  o conjugado de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = x - yi$ .

Geometricamente, para se encontrar o conjugado de um número complexo basta refletí-lo em torno do eixo das abscissas conforme a figura 3.

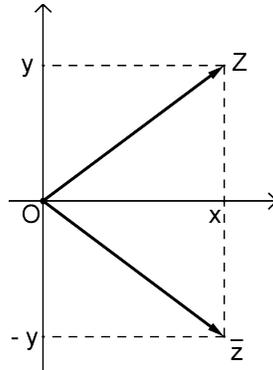


Figura 3: Conjugado de um número complexo

Também é fácil verificar que são válidas as seguintes propriedades:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z \bar{z} = |z|^2$
- $|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$

Todo número complexo  $z = x + yi$  também pode ser representado das seguintes formas:

- forma trigonométrica:  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ ,  
onde  $\rho$  é o módulo de  $z$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , que chamaremos de **argumento** de  $z$  e representaremos por  $\mathbf{arg}(z)$ , é o ângulo que  $z$  forma com o semi-eixo positivo das abscissas medido no sentido anti-horário. Caso  $\theta \in [0, 2\pi[$ , chamaremos  $\theta$  de **argumento principal** de  $z$ .
- forma exponencial:  $z = \rho e^{\theta i}$ , onde  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $\rho$  são, respectivamente, o argumento e o módulo de  $z$ .

## 2.2 Operações entre Complexos

### 2.2.1 Adição e subtração

Ao somarmos ou subtrairmos dois números complexos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , tratando-os como vetores no plano, obteremos como resultado um número complexo  $z$  que, geometricamente, é representado pelo vetor soma  $z_1 + z_2$  ou pelo vetor diferença  $z_1 - z_2$ , respectivamente, como mostram as figuras 4 e 5.

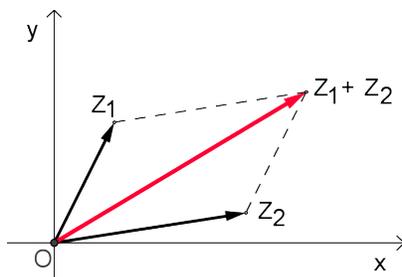


Figura 4: Soma de números complexos

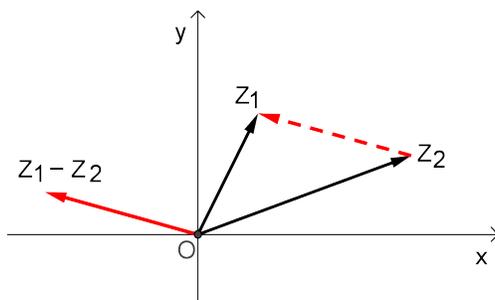


Figura 5: Diferença de números complexos

Uma outra interpretação geométrica que podemos dar para a soma de números complexos é a **translação**. Podemos, por exemplo, olhar para a imagem do complexo  $z_1 + z_2$  como sendo a translação da imagem do complexo  $z_2$  ao longo do vetor  $z_1$ . Assim, para transladar uma figura no plano cartesiano, basta adicionar um mesmo número complexo não nulo a cada número complexo associado aos pontos da figura.

Considere, por exemplo, o triângulo ABC cujos vértices A, B e C são as imagens dos complexos  $z_A, z_B$  e  $z_C$ , respectivamente. Adicionando o número  $z = a + bi$  aos complexos  $z_A, z_B$  e  $z_C$  ocorre que cada ponto do triângulo ABC é deslocado de  $|z|$  unidades na direção e no sentido do vetor que corresponde ao complexo  $z$ , como ocorre, por exemplo, na figura 6.

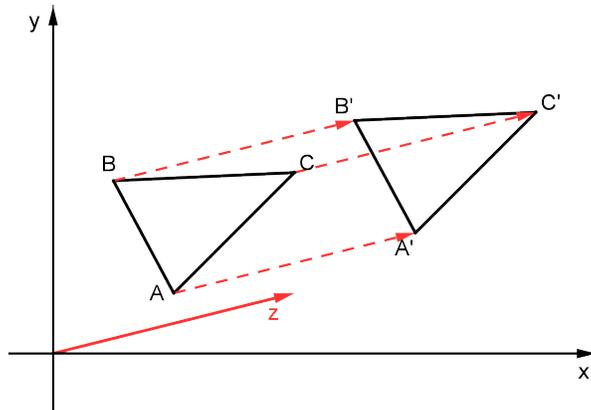


Figura 6: Translação de  $|z|$  unidades na direção e no sentido do vetor  $z$

Observe que, dessa forma, a distância  $d$  entre os pontos A e  $A'$  é dada por:

$$d = |z| = |z_{A'} - z_A|.$$

### 2.2.2 Multiplicação

O produto de  $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$  é dado por

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Observe que o vetor  $z_1 z_2$  tem módulo igual ao produto dos módulos de  $z_1$  e  $z_2$  e argumento igual à soma dos argumentos de  $z_1$  e  $z_2$ . Isso significa que o produto de um número complexo  $z_1 = \rho(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  por um complexo  $z_2 = \rho(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ , com  $\theta_2 > 0$ , representa, geometricamente, uma rotação em torno da origem de um ângulo  $\theta_2$ , no sentido anti-horário, no vetor  $z_1$ , conforme figura 7.

No caso do módulo de  $z_2$  ser igual a um, ou seja, da forma  $z_2 = (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ , com  $\theta_2 > 0$ , representa, geometricamente, uma rotação em torno da origem de um ângulo  $\theta_2$ , no sentido anti-horário, no vetor  $z_1$ , sem alterar

o seu módulo. Um exemplo importante desse fato é a multiplicação de um complexo  $z$  pelo complexo  $i$ . Como  $|i| = 1$  e o argumento principal de  $i$  é igual a  $\frac{\pi}{2}$ , o produto  $zi$  representa, geometricamente, uma rotação em torno da origem do vetor  $z$  de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ , no sentido anti-horário, sem alterar seu módulo, como na figura 8.

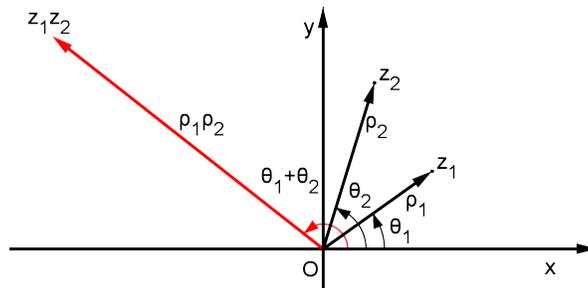


Figura 7: Produto de números complexos

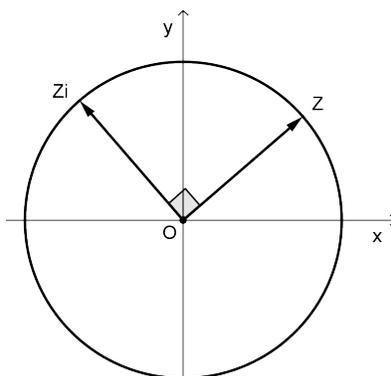


Figura 8: Produto de complexos por  $i$

### 2.2.3 Potenciação. Primeira Fórmula de De Moivre

Usando a fórmula da multiplicação de complexos para  $z = z_1 = z_2$ , com  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , o produto  $z z = z^2$  fica reduzido a

$$z^2 = \rho^2[\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)].$$

Essa igualdade é sugestiva e nos induz a dizer que

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 2.4 (Primeira fórmula de De Moivre)** *Dado o complexo não nulo  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , e o número inteiro  $n$ , temos que*

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

**Demonstração:** Inicialmente provemos que a fórmula é válida para  $n \in \mathbb{N}$ , usando o princípio da indução finita.

i) Se  $n = 0$ , então  $z^0 = 1$  e  $\rho^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$

ii) Admitamos a validade da fórmula para  $n = k - 1$ :

$$z^{k-1} = \rho^{k-1}[\cos(k-1)\theta + i \operatorname{sen}(k-1)\theta]$$

e provemos a validade para  $n = k$ :

$$z^k = z^{k-1}z = \rho^{k-1}[\cos(k-1)\theta + i \operatorname{sen}(k-1)\theta]\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z^k = (\rho^{k-1} \cdot \rho)[\cos((k-1)\theta + \theta) + i \operatorname{sen}((k-1)\theta + \theta)] =$$

$$z^k = \rho^k[\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta]$$

Estenderemos agora a fórmula para  $n \in \mathbb{Z}$ .

Se  $n < 0$ , então  $n = -m$  com  $m \in \mathbb{N}$ ; portanto a fórmula se aplica para  $m$ .

$$\begin{aligned}
z^n = z^{-m} &= \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m [\cos(m\theta) + i\text{sen}(m\theta)]} = \\
&= \frac{1}{\rho^m} \frac{\cos(m\theta) - i\text{sen}(m\theta)}{[\cos(m\theta) + i\text{sen}(m\theta)][\cos(m\theta) - i\text{sen}(m\theta)]} = \\
&= \frac{1}{\rho^m} \frac{[\cos(m\theta) - i\text{sen}(m\theta)]}{[\cos^2(m\theta) + \text{sen}^2(m\theta)]} = \rho^{-m} [\cos(-m\theta) + i\text{sen}(-m\theta)] = \\
&= \rho^n [\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)].
\end{aligned}$$

□

#### 2.2.4 Divisão

A divisão de  $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$  por  $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$  com  $z_2 \neq 0$  é dada por

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

Observe que o vetor  $\frac{z_1}{z_2}$  tem módulo igual ao quociente dos módulos de  $z_1$  por  $z_2$  e argumento igual à diferença dos argumentos de  $z_1$  por  $z_2$ .

Dessa forma, a divisão de um número complexo  $z_1 = \rho(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$  por um número complexo  $z_2 = \rho(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$ , com  $\theta_2 > 0$ , representa, geometricamente, uma rotação em torno da origem de um ângulo  $\theta_2$ , no sentido horário, no vetor  $z_1$ , conforme a figura 9 .

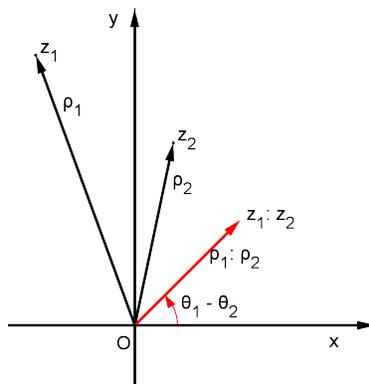


Figura 9: Divisão de complexos

**Definição 2.5** Dados três pontos distintos  $A, B, C$ , a medida do ângulo orientado do vetor  $\vec{AC}$  para o vetor  $\vec{AB}$ , é dado por

$$\arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \arg(\beta - \alpha) - \arg(\gamma - \alpha).$$

Como aplicação da divisão de números complexos, seguem os seguintes teoremas:

**Teorema 2.6**  $z_1$  e  $z_2$  são paralelos se, e somente se,  $\frac{z_1}{z_2}$  é um número real não nulo.

**Demonstração:** De fato, se  $z_1$  e  $z_2$  são paralelos então o ângulo entre eles é da forma  $k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $\theta_1 - \theta_2 = k\pi$  e, portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \implies$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(k\pi) + i \operatorname{sen}(k\pi)] \implies$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cos(k\pi) \in \mathbb{R}^*.$$

Por outro lado, se  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \in \mathbb{R}^*$ , temos que  $\theta_1 - \theta_2 = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Teorema 2.7**  $z_1$  e  $z_2$  são ortogonais se, e somente se,  $\frac{z_1}{z_2}$  é imaginário puro.

**Demonstração:** De fato, se  $z_1$  e  $z_2$  são ortogonais então o ângulo entre eles é da forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$  e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \implies \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) + i\text{sen}(\frac{\pi}{2} + k\pi)] \implies \\ &\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} i\text{sen}(\frac{\pi}{2} + k\pi),\end{aligned}$$

que é imaginário puro.

Por outro lado, se  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$  é imaginário puro, então  $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

### 2.2.5 Raízes n-ésimas de um complexo

Uma das aplicações da primeira fórmula de De Moivre é a determinação das raízes de um número complexo.

**Definição 2.8** *Dado um complexo  $z$  e um natural  $n > 1$ , chama-se **raiz n-ésima** de  $z$  um número complexo  $w$  tal que  $w^n = z$ .*

Se  $z = 0$ , é evidente que  $w = 0$  é a única solução da equação  $w^n = z$ . Já para  $z \neq 0$ , temos que  $w \neq 0$  e para resolver tal equação vamos inicialmente escrever ambos os membros da igualdade na forma trigonométrica.

$$z = \rho_0(\cos \theta_0 + i\text{sen} \theta_0) \text{ e } w = \rho(\cos \theta + i\text{sen} \theta).$$

Como

$$w^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)],$$

ficamos com

$$\rho^n [\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)] = \rho_0(\cos \theta_0 + i\text{sen} \theta_0).$$

Inicialmente perceba que  $|w^n| = |w|^n = |z|$ , ou seja,  $\rho^n = \rho_0$  o que implica em  $\rho = \rho_0^{\frac{1}{n}}$  e a igualdade acima fica reduzida a

$$\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta) = \cos \theta_0 + i\text{sen} \theta_0.$$

Da igualdade de complexos segue que

$$\cos(n\theta) = \cos\theta_0 \text{ e } \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{sen}\theta_0$$

Como as funções seno e cosseno são periódicas de período  $2\pi$ , concluímos que

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  são:

$$w_k = \rho_0^{\frac{1}{n}} \left[ \cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) \right], k \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq k < n. \quad (2.1)$$

### Exemplo: Raízes cúbicas da unidade

Calcularemos agora as raízes cúbicas da unidade. Para isso devemos encontrar os números complexos  $z_k$  que satisfazem  $z_k^3 = 1$ .

Para  $z = 1$ , temos  $\rho = 1$  e  $\theta = 0$ . Assim, pela equação 2.1, temos:

$$z_k = 1^{\frac{1}{3}} \left[ \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right], \text{ com } k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = [\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)] \Rightarrow z_0 = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \Rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right] \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

A partir de agora,  $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  será representada por  $\omega$ . Usando essa notação e observando que  $z_1^2 = z_2$ , as raízes cúbicas da unidade serão  $1$ ,  $\omega$  e  $\omega^2$ .

As raízes cúbicas da unidade representam geometricamente os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo de raio unitário centrado na origem, como mostra a figura 10. Chamaremos esse círculo de  $S^1$  no decorrer do trabalho.

Além disso, são válidas as seguintes relações:

- $\omega^2 = \bar{\omega}$

Basta observar que  $\omega^2$  é simétrico a  $\omega$  com relação ao eixo Ox.

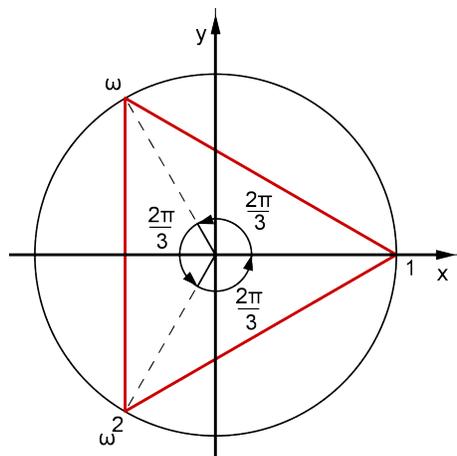


Figura 10: Raízes cúbicas da unidade

- $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

Por definição,  $\omega^3 - 1 = 0$  e, portanto,  $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ .  
 Como  $\omega \neq 1$ , temos  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ .

## 3 A Geometria e os Números Complexos

Apresentaremos nessa seção alguns resultados fundamentais da Geometria Analítica Plana, como equação da reta e alinhamento de três pontos. Denotaremos, até o final do capítulo 4, por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  e  $\eta$  os números complexos associados aos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $H$  respectivamente.

### 3.1 Paralelismo e Perpendicularismo

#### 3.1.1 Condição de Alinhamento de Três Pontos

**Teorema 3.1** *Três pontos distintos  $A, B, C$  do plano são colineares se, e somente se,  $\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \in \mathbb{R}^*$ , que equivale a*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Demonstração:** Para que três pontos distintos  $A, B$  e  $C$  sejam colineares é necessário e suficiente que os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  sejam paralelos, ou seja,

$$(\beta - \alpha) = \lambda(\gamma - \alpha), \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Dessa forma  $\lambda = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \in \mathbb{R}^*$  e, portanto

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} &\Leftrightarrow (\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) - (\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta - \alpha & \bar{\beta} - \bar{\alpha} \\ \gamma - \alpha & \bar{\gamma} - \bar{\alpha} \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta - \alpha & \bar{\beta} - \bar{\alpha} & 0 \\ \gamma - \alpha & \bar{\gamma} - \bar{\alpha} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

#### 3.1.2 Equação da Reta

**Proposição 3.2** *A equação da reta  $r$  que passa por  $A$  e  $B$ , com  $A \neq B$ , é dada por*

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{z}(\alpha - \beta) = \alpha(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{\alpha}(\alpha - \beta), \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Demonstração:** Se  $z$  pertence à reta que passa por  $A$  e  $B$  então, pelo Teorema 3.1,  $\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} \in \mathbb{R}^*$ . Assim:

$$\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} \Leftrightarrow (z - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) = (\bar{z} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} z(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - \alpha(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) &= \bar{z}(\beta - \alpha) - \bar{\alpha}(\beta - \alpha) \iff \\ z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{z}(\alpha - \beta) &= \alpha(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{\alpha}(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.3** *A equação da reta que passa por A e B, tais que  $|\alpha| = |\beta| = 1$  é dada por*

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta.$$

**Demonstração:** Caso  $|\alpha| = |\beta| = 1$ , o que implica  $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$  e  $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$ , a equação da Proposição 3.2 fica reduzida a

$$\begin{aligned} z\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) - \bar{z}(\alpha - \beta) &= \alpha\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{\alpha}(\alpha - \beta) \iff \\ z\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}\right) + \bar{z}(\beta - \alpha) &= \alpha\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{\alpha}(\beta - \alpha) \iff \\ z + \alpha\beta\bar{z} &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

□

### 3.1.3 Equação da Reta Paralela a uma direção dada

**Proposição 3.4** *A equação da reta que passa por A na direção de  $\overrightarrow{OC}$  é dada por*

$$\frac{z}{\gamma} - \frac{\bar{z}}{\bar{\gamma}} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}.$$

**Demonstração:** Dados A e  $\overrightarrow{OC}$ , a equação da reta que passa por A na direção de  $\overrightarrow{OC}$  é dada por  $z - \alpha = \lambda\gamma$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , logo  $\frac{z - \alpha}{\gamma} = \frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}$ , ou seja,

$$\frac{z}{\gamma} - \frac{\bar{z}}{\bar{\gamma}} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}.$$

□

**Proposição 3.5** *A equação da reta paralela ao vetor  $\overrightarrow{AB}$  passando por C é*

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{z}(\alpha - \beta) = \gamma(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{\gamma}(\alpha - \beta).$$

**Demonstração:** De acordo com a Proposição 3.4, a equação da reta que passa por  $C$  na direção de  $\overrightarrow{AB}$  é:

$$\frac{z}{\alpha - \beta} - \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha} - \bar{\beta}} = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha} - \bar{\beta}},$$

que é equivalente a

$$\frac{z - \gamma}{\alpha - \beta} = \frac{\bar{z} - \bar{\gamma}}{\bar{\alpha} - \bar{\beta}} \iff z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{z}(\alpha - \beta) = \gamma(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{\gamma}(\alpha - \beta).$$

□

### 3.1.4 Equação da Reta Ortogonal a uma direção dada

**Proposição 3.6** A equação da reta ortogonal a  $\overrightarrow{OC}$  passando por  $A$  é dada por

$$\frac{z}{\gamma} + \frac{\bar{z}}{\bar{\gamma}} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}$$

**Demonstração:** Dados  $A$  e  $\overrightarrow{OC}$ , a equação da reta  $s$  ortogonal a  $\overrightarrow{OC}$  passando por  $\alpha$  é tal que, se  $z \in s$  então, segundo o Teorema 2.7,  $\frac{z-\alpha}{\gamma}$  é imaginário puro e, portanto,  $\frac{z-\alpha}{\gamma} + \frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}} = 0$ , ou seja,

$$\frac{z}{\gamma} + \frac{\bar{z}}{\bar{\gamma}} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}$$

□

**Proposição 3.7** A equação da reta ortogonal a  $\overrightarrow{AB}$  passando por  $C$  é

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) = \gamma(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta).$$

**Demonstração:** Segundo a Proposição 3.6, dados  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com  $A \neq B$ , a equação da reta ortogonal à

### 3.1.5 Equação da Mediatriz de um Segmento

**Proposição 3.8** A mediatriz de  $\overline{AB}$  é a reta de equação

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

**Demonstração:** A mediatriz de um segmento de extremos  $A$  e  $B$ , é a reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio de  $\overrightarrow{AB}$ . Usando a Proposição 3.7, temos:

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) = \frac{\alpha + \beta}{2}(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2}(\alpha - \beta)$$

que implica

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

□

## 3.2 Triângulos

Estudaremos nas próximas seções deste capítulo alguns resultados fundamentais sobre triângulos, como semelhança e pontos notáveis. Entretanto, antes de iniciarmos tal estudo, definiremos o conceito de triângulo orientado.

**Definição 3.9** Um triângulo  $OAB$ , onde  $O$  é a origem, é orientado positivamente se existir um complexo  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , com  $0 < \theta < \pi$ , tal que  $z\alpha = \beta$ . (Figura 11)

Dado um triângulo  $ABC$  qualquer, considere uma translação que leve um dos vértices na origem, por exemplo  $C$ , obtendo então um novo triângulo  $OA'B'$ . O triângulo  $ABC$  será orientado positivamente se o triângulo  $OA'B'$  o for. (Figura 12).

Diremos que um triângulo qualquer é orientado negativamente se não for orientado positivamente.

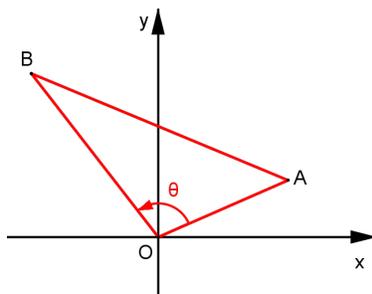


Figura 11: Triângulo  $OAB$  orientado positivamente

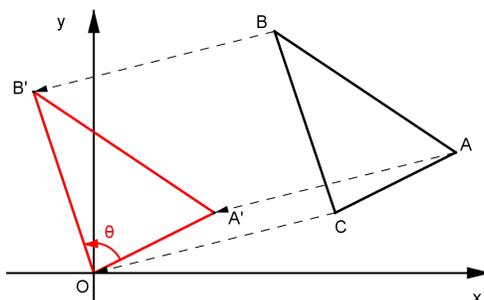


Figura 12: Triângulo  $ABC$  orientado positivamente

### 3.3 Semelhança de Triângulos

**Definição 3.10** *Dois triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  são semelhantes, e denotamos*

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$$

*se, e somente se, o ângulo do vértice  $z_k$  é congruente ao ângulo do vértice  $w_k$ , para  $k = 1, 2, 3$ .*

*Caso os triângulos tenham orientações opostas, denotaremos*

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \Delta w_1 w_2 w_3.$$

**Teorema 3.11**  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \iff$

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Demonstração:** Dois triângulos de mesma orientação são semelhantes se, e somente se, as razões entre dois lados correspondentes são iguais e os ângulos formados por esses lados são congruentes.

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \text{ e } \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \iff$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \iff (z_2 - z_1)(w_3 - w_1) - (z_3 - z_1)(w_2 - w_1) = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & w_2 - w_1 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Corolário 3.12**  $\Delta w_1 w_2 w_3 \sim_{op} \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3.$

**Demonstração:** A reflexão em relação ao eixo  $x$  transforma os números complexos  $w_1, w_2, w_3$  em  $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ . Como a reflexão preserva a medida dos ângulos e segmentos mas inverte a orientação de triângulos, concluímos que  $\Delta w_1 w_2 w_3 \sim_{op} \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$ , conforme a figura 13.

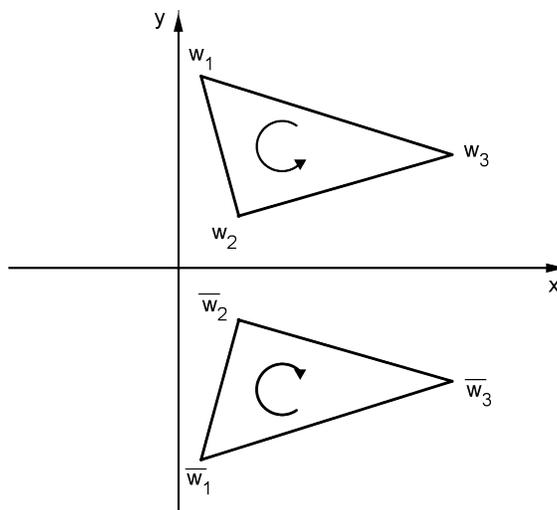


Figura 13:  $\Delta w_1 w_2 w_3 \sim_{op} \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$

**Corolário 3.13**  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \Delta w_1 w_2 w_3 \iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1} \iff$

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Demonstração:**

$$\Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \sim_{op} \Delta w_1 w_2 w_3 \text{ e } \Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \Delta w_1 w_2 w_3 \iff \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3.$$

### 3.4 Caracterização de Triângulos Equiláteros

**Teorema 3.14** *O  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se,*

$$z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0 \tag{3.1}$$

ou

$$z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0. \tag{3.2}$$

**Demonstração:**  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se,

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega \omega^2$$

ou

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \Delta 1 \omega \omega^2 \Rightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega^2 \omega.$$

O primeiro caso de semelhança ocorre se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff z_1(\omega - \omega^2) + z_2(\omega^2 - 1) + z_3(1 - \omega) = 0.$$

Multiplicando-se ambos os membros da igualdade anterior por  $\omega$ , temos

$$z_1(\omega^2 - \omega^3) + z_2(\omega^3 - \omega) + z_3(\omega - \omega^2) = 0,$$

como  $\omega^3 = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} -z_1 - \omega z_2 - \omega^2 z_3 + z_1 \omega^2 + z_2 + z_3 \omega &= 0 \iff \\ -z_1 - \omega z_2 - \omega^2 z_3 + \frac{1}{\omega}(z_1 \omega^3 + z_2 \omega + z_3 \omega^2) &= 0 \iff \\ \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{\omega} - 1 \neq 0$ , seque que

$$z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0.$$

O segundo caso de semelhança ocorre se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff z_1(\omega^2 - \omega) + z_2(\omega - 1) + z_3(1 - \omega^2) = 0.$$

Multiplicando-se ambos os membros da igualdade anterior por  $\omega$ , temos

$$z_1(\omega^3 - \omega^2) + z_2(\omega^2 - \omega) + z_3(\omega - \omega^3) = 0,$$

como  $\omega^3 = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} -\omega^2 z_1 - \omega z_2 - z_3 + z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 &= 0 \iff \\ -\frac{1}{\omega}(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) + (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) &= 0 \iff \\ \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $1 - \frac{1}{\omega} \neq 0$ , seque que

$$z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0.$$

□

## 3.5 Pontos Notáveis de um Triângulo

### 3.5.1 Circuncentro

**Teorema 3.15** *As três mediatrizes de um triângulo se encontram em um único ponto chamado **circuncentro** do triângulo.*

**Demonstração:** Sejam  $A, B, C$  os vértices do triângulo. Então, pela Proposição 3.8, as mediatrizes dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são, respectivamente:

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) = |\alpha|^2 - |\beta|^2; \quad (3.3)$$

$$z(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) + \bar{z}(\gamma - \alpha) = |\gamma|^2 - |\alpha|^2; \quad (3.4)$$

$$z(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\beta - \gamma) = |\beta|^2 - |\gamma|^2. \quad (3.5)$$

Observe que a soma de quaisquer duas das equações anteriores resulta na restante. Isso significa que a solução de duas dessas equações, caso existam, também é solução da terceira. Como duas mediatrizes sempre se interceptam, concluímos que as três mediatrizes se interceptam em um único ponto.

Encontraremos agora o circuncentro do triângulo. Para tanto, resolveremos o sistema obtido com as equações (3.3) e (3.4).

Isolando  $\bar{z}$  na equação (3.4), temos:

$$\bar{z} = \frac{|\gamma|^2 - |\alpha|^2 - z(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}{\gamma - \alpha}.$$

Substituindo-se  $\bar{z}$  em 3.3, obtemos:

$$\begin{aligned} z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \left( \frac{|\gamma|^2 - |\alpha|^2 - z(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}{\gamma - \alpha} \right) (\alpha - \beta) &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 \Rightarrow \\ z(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\gamma - \alpha) + (\alpha - \beta)(|\gamma|^2 - |\alpha|^2) - z(\alpha - \beta)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) &= (\gamma - \alpha)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \Rightarrow \\ z(\bar{\alpha}\gamma - \alpha\bar{\alpha} - \bar{\beta}\gamma + \bar{\beta}\alpha - \alpha\bar{\gamma} + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma} - \beta\bar{\alpha}) &= (\gamma - \alpha)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) - (\alpha - \beta)(|\gamma|^2 - |\alpha|^2) \Rightarrow \\ z[\bar{\alpha}(\gamma - \beta) + \bar{\beta}(\alpha - \gamma) + \bar{\gamma}(\beta - \alpha)] &= (\gamma - \alpha)|\alpha|^2 - (\gamma - \alpha)|\beta|^2 - (\alpha - \beta)|\gamma|^2 + (\alpha - \beta)|\alpha|^2 \Rightarrow \\ z[\bar{\alpha}(\gamma - \beta) + \bar{\beta}(\alpha - \gamma) + \bar{\gamma}(\beta - \alpha)] &= |\alpha|^2(\gamma - \beta) + |\beta|^2(\alpha - \gamma) + |\gamma|^2(\beta - \alpha) \Rightarrow \\ z &= \frac{|\alpha|^2(\gamma - \beta) + |\beta|^2(\alpha - \gamma) + |\gamma|^2(\beta - \alpha)}{\bar{\alpha}(\gamma - \beta) + \bar{\beta}(\alpha - \gamma) + \bar{\gamma}(\beta - \alpha)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

□

### 3.5.2 Ortocentro

**Teorema 3.16** *As retas suportes das três alturas de um triângulo se encontram em um ponto chamado **ortocentro** do triângulo.*

**Demonstração:** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices de um triângulo. De acordo com a Proposição 3.7, a reta suporte da altura relativa ao vértice  $A$  é dada pela equação:

$$z(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\beta - \gamma) = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma). \quad (3.7)$$

Procedendo-se de modo análogo, as retas suportes das alturas relativas aos vértices  $B$  e  $C$  são, respectivamente:

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\alpha - \gamma) = \beta(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{\beta}(\alpha - \gamma); \quad (3.8)$$

$$z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) = \gamma(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta). \quad (3.9)$$

Observe que qualquer uma das três equações é combinação linear das outras duas. Isso significa que a intersecção de duas retas também pertence à terceira, ou seja, as retas suportes das três alturas do triângulo se encontram.

Vamos determinar o ortocentro para o caso particular em que o triângulo está inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio  $r$ . Nesse caso,  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = r$ , logo  $\bar{\alpha} = \frac{r^2}{\alpha}$ ,  $\bar{\beta} = \frac{r^2}{\beta}$ ,  $\bar{\gamma} = \frac{r^2}{\gamma}$ . Usando essas relações e isolando  $\bar{z}$  na equação (3.9), temos:

$$\begin{aligned} z\left(\frac{r^2}{\alpha} - \frac{r^2}{\beta}\right) + \bar{z}(\alpha - \beta) &= \gamma\left(\frac{r^2}{\alpha} - \frac{r^2}{\beta}\right) + \frac{r^2}{\gamma}(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \\ zr^2\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}\right) + \bar{z}(\alpha - \beta) &= \gamma r^2\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}\right) + \frac{r^2}{\gamma}(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \\ (\alpha - \beta)\left(\bar{z} - \frac{zr^2}{\alpha\beta}\right) &= (\alpha - \beta)\left(\frac{r^2\gamma}{\gamma} - \frac{\gamma r^2}{\alpha\beta}\right) \Leftrightarrow \\ \bar{z} &= r^2\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{z}{\alpha\beta}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

De modo análogo, isolando  $\bar{z}$  na equação (3.7), temos:

$$\bar{z} = r^2 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{z}{\beta\gamma} \right). \quad (3.11)$$

Substituindo-se (3.10) em (3.11), obtemos:

$$r^2 \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{z}{\alpha\beta} \right) = r^2 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{z}{\beta\gamma} \right).$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação anterior por  $\frac{\alpha\beta\gamma}{r^2}$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \alpha\beta - \gamma^2 + \gamma z &= \beta\gamma - \alpha^2 + \alpha z \Leftrightarrow \\ (\alpha - \gamma)z &= \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow \\ (\alpha - \gamma)z &= \beta(\alpha - \gamma) + (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) \Leftrightarrow \\ z &= \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned} \quad (3.12)$$

□

### 3.5.3 Incentro

**Teorema 3.17** *As bissetrizes internas de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de **incentro** do triângulo.*

**Demonstração:** Considere, sem perda de generalidade, que o triângulo  $A_1B_1C_1$  esteja inscrito em  $S^1$  e que o vértice  $A_1$  tenha coordenadas  $(1, 0)$  no plano cartesiano. Considere ainda que:

$$\begin{aligned} m(\angle A_1OB_1) &= 2\theta_1, \text{ com } 0 < \theta_1 < \pi; \\ m(\angle A_1OC_1) &= 2\theta_2, \text{ com } -\pi < \theta_2 < 0; \\ m(\angle B_1OC_1) &= 2\theta_3, \text{ com } \theta_3 = \pi + \theta_2 - \theta_1. \end{aligned}$$

Sejam  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$  os pontos de intersecção entre as bissetrizes internas dos ângulos de vértices  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  do triângulo e a circunferência  $S^1$ , respectivamente, conforme a figura 14.

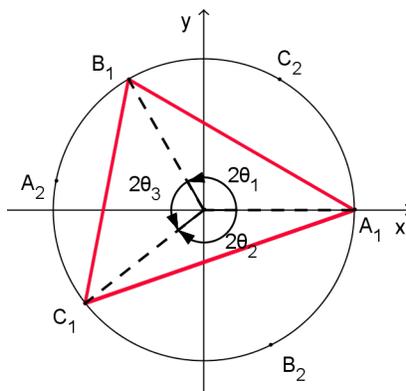


Figura 14:  $\triangle A_1B_1C_1$  inscrito em  $S^1$

Observe que:

$$m(\angle A_1OC_2) = m(\angle C_2OB_1)$$

e

$$m(\angle C_1OB_2) = m(\angle B_2OA_1).$$

Esse fato nos permite usar a interpretação geométrica do produto de números complexos e concluir que  $\beta = (\gamma_2)^2$  e  $\gamma = (\beta_2)^2$ .

Como  $\arg(\alpha_2) = m(\angle A_1OA_2) = 2\theta_1 + \theta_3 = \pi + \theta_2 - \theta_1$  e  $|\alpha_2| = 1$ , temos que:

$$\alpha_2 = \cos(\pi + \theta_2 - \theta_1) + i\sin(\pi + \theta_2 - \theta_1) \iff \alpha_2 = -\beta_2\gamma_2.$$

Utilizando a Proposição 3.3, as equações das retas que contém as bissetrizes internas do triângulo ABC são:

$$z - \beta_2\gamma_2\bar{z} = 1 - \beta_2\gamma_2; \tag{3.13}$$

$$z - (\beta_2)^2\gamma_2\bar{z} = (\beta_2)^2 + \gamma_2; \tag{3.14}$$

$$z - \beta_2(\gamma_2)^2\bar{z} = \beta_2 + (\gamma_2)^2; \tag{3.15}$$

Mostraremos agora que as três retas se intersectam em um único ponto. Para tanto, vamos mostrar que a solução de duas delas também é solução da terceira.

Subtraindo as equações (3.15) e (3.14), temos:

$$\bar{z} = \frac{\beta_2 + \gamma_2 + 1}{\beta_2 \gamma_2} \iff z = \frac{\overline{\beta_2} + \overline{\gamma_2} + \overline{1}}{\overline{\beta_2 \gamma_2}}.$$

Como  $|\beta_2| = |\gamma_2| = 1$ , temos que  $\overline{\beta_2} = \frac{1}{\beta_2}$  e  $\overline{\gamma_2} = \frac{1}{\gamma_2}$ . Assim,  $z$  é dado por:

$$\bar{z} = \frac{\beta_2^{-1} + \gamma_2^{-1} + 1}{\beta_2^{-1} \gamma_2^{-1}} \iff z = \beta_2 + \gamma_2 - \beta_2 \gamma_2.$$

Substituindo em (3.13) os valores encontrados para  $z$  e  $\bar{z}$ , temos:

$$z - \beta_2 \gamma_2 \bar{z} = \beta_2 + \gamma_2 - \beta_2 \gamma_2 - \frac{\beta_2 \gamma_2 (\beta_2 + \gamma_2 + 1)}{\beta_2 \gamma_2} = 1 - \beta_2 \gamma_2.$$

□

### 3.5.4 Baricentro

**Teorema 3.18** *As três medianas de um triângulo se encontram em um ponto chamado **baricentro** do triângulo.*

**Demonstração:** Considere um  $\triangle ABC$  qualquer. As equações paramétricas das medianas relativas aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com  $0 \leq t \leq 1$ , são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} z &= (1-t)\alpha + t\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right); \\ z &= (1-t)\beta + t\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right); \\ z &= (1-t)\gamma + t\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

Fazendo  $t = \frac{2}{3}$  para cada uma das equações anteriores, obtemos

$$z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}. \tag{3.16}$$

Dessa forma, concluímos que as três medianas se interceptam em um único ponto. □

## 4 Aplicações à Geometria Plana

Nesse capítulo, utilizaremos alguns resultados obtidos anteriormente para demonstrar quatro teoremas da geometria euclidiana plana. Nos Teoremas 4.1 e 4.4 usaremos novamente o número complexo  $\omega$ , definido no final do segundo capítulo.

### 4.1 Teorema de Napoleão

**Teorema 4.1 (Teorema de Napoleão)** *Se sobre cada lado de um triângulo qualquer traçarmos um triângulo equilátero, externamente ao triângulo dado, então os centros desses três triângulos equiláteros determinam os vértices de um triângulo equilátero.*

**Demonstração:** Sejam  $A_1, A_2, A_3$  os vértices do triângulo dado e  $\triangle B_1A_3A_2$ ,  $\triangle A_3B_2A_1$  e  $\triangle A_2A_1B_3$  todos triângulos equiláteros com a mesma orientação que  $\triangle 1\omega\omega^2$ . Sejam também  $C_1, C_2, C_3$ , respectivamente, os centros desses triângulos equiláteros, conforme a figura 15.

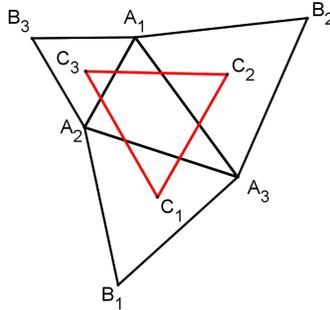


Figura 15: Teorema de Napoleão

De acordo com o Teorema 3.14, são válidas as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\beta_1 + \omega\alpha_3 + \omega^2\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 + \omega\beta_2 + \omega^2\alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 + \omega\alpha_1 + \omega^2\beta_3 &= 0\end{aligned}$$

Ainda segundo o Teorema 3.14, para que  $\triangle C_1C_2C_3$  seja equilátero, os complexos  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  devem satisfazer  $\gamma_1 + \omega\gamma_2 + \omega^2\gamma_3 = 0$ . Usando a equação (3.16), temos:

$$\begin{aligned}\gamma_1 + \omega\gamma_2 + \omega^2\gamma_3 &= \frac{1}{3}(\beta_1 + \alpha_3 + \alpha_2) + \frac{\omega}{3}(\alpha_3 + \beta_2 + \alpha_1) + \frac{\omega^2}{3}(\alpha_2 + \alpha_1 + \beta_3) = \\ &= \frac{1}{3}[(\beta_1 + \omega\alpha_3 + \omega^2\alpha_2) + (\alpha_3 + \omega\beta_2 + \omega^2\alpha_1) + (\alpha_2 + \omega\alpha_1 + \omega^2\beta_3)] = 0.\end{aligned}$$

□

## 4.2 A Reta de Euler

**Teorema 4.2 (A Reta de Euler)** *Em todo triângulo não equilátero, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro estão alinhados.*

**Demonstração:** Inicialmente, suponha que o triângulo  $ABC$  esteja inscrito em uma circunferência  $\lambda$  de centro na origem e raio  $r$ . Dessa forma, de acordo com a equação (3.12), o ortocentro  $D$  desse triângulo é dado por:

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma.$$

Passemos agora para o caso geral. Sejam  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  o ortocentro, o circuncentro e o baricentro, respectivamente, de um triângulo  $ABC$  inscrito em uma circunferência de raio  $r$ . Transladando os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pelo vetor  $\overrightarrow{D_2O}$ , onde  $O$  é a origem do plano cartesiano, obtemos os complexos  $\alpha - \delta_2$ ,  $\beta - \delta_2$  e  $\gamma - \delta_2$ , que pertencem a uma circunferência  $\lambda$  de centro na origem e raio  $r$ .

Como a translação é uma isometria, ou seja, preserva as distâncias e os ângulos, o ponto correspondente ao complexo  $\delta_1 - \delta_2$  será o ortocentro do triângulo cujos vértices correspondem aos complexos  $\alpha - \delta_2$ ,  $\beta - \delta_2$  e  $\gamma - \delta_2$ . Dessa forma, de acordo com o resultado anterior, temos:

$$\delta_1 - \delta_2 = \alpha - \delta_2 + \beta - \delta_2 + \gamma - \delta_2 \iff \delta_1 - \delta_2 = \alpha + \beta + \gamma - 3\delta_2$$

Como, de acordo com a equação (3.16),  $3\delta_3 = \alpha + \beta + \gamma$ , temos:

$$\delta_1 - \delta_2 = 3\delta_3 - 3\delta_2 \iff \delta_1 - \delta_2 = 3(\delta_3 - \delta_2),$$

ou ainda,

$$\overrightarrow{D_2D_1} = 3\overrightarrow{D_2D_3}.$$

Dessa forma, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro estão alinhados.

□

### 4.3 Círculo dos Nove Pontos

**Teorema 4.3 (Círculo dos Nove Pontos)** *O círculo que passa pelos pés das alturas de qualquer triângulo passa também pelos pontos médios dos lados e pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ortocentro desse triângulo.*

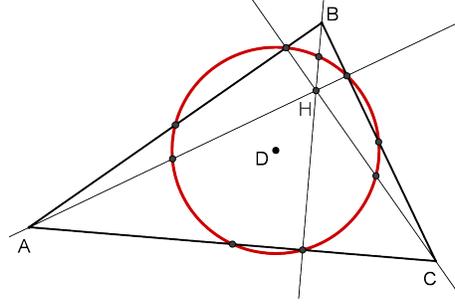


Figura 16: Círculo dos nove pontos

**Demonstração:** Dado um triângulo ABC qualquer, podemos supor, por semelhança e sem perda de generalidade, que o mesmo esteja inscrito em  $S^1$ . Dessa forma, temos que  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ .

Inicialmente, vamos utilizar a equação (3.6) para determinar o centro D do círculo que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo ABC. Como os pontos médios em questão são representados por  $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ,  $\frac{\beta+\gamma}{2}$  e  $\frac{\gamma+\alpha}{2}$ , substituindo-os na equação (3.6), obtemos que o complexo associado ao ponto D é:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{|\frac{\alpha+\beta}{2}|^2(\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\alpha+\gamma}{2}) + |\frac{\beta+\gamma}{2}|^2(\frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}) + |\frac{\alpha+\gamma}{2}|^2(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2})}{(\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2})(\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\alpha+\gamma}{2}) + (\frac{\bar{\beta}+\bar{\gamma}}{2})(\frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}) + (\frac{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}{2})(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2})} \Leftrightarrow \\ \delta &= \frac{(\frac{\alpha+\beta}{2})(\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2})(\frac{\beta-\alpha}{2}) + (\frac{\beta+\gamma}{2})(\frac{\bar{\beta}+\bar{\gamma}}{2})(\frac{\gamma-\beta}{2}) + (\frac{\alpha+\gamma}{2})(\frac{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}{2})(\frac{\alpha-\gamma}{2})}{(\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2})(\frac{\beta-\alpha}{2}) + (\frac{\bar{\beta}+\bar{\gamma}}{2})(\frac{\gamma-\beta}{2}) + (\frac{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}{2})(\frac{\alpha-\gamma}{2})} \Leftrightarrow \\ \delta &= \frac{1}{2} \frac{(\bar{\alpha} + \bar{\beta})(\beta - \alpha)(\alpha + \beta) + (\bar{\beta} + \bar{\gamma})(\gamma - \beta)(\beta + \gamma) + (\bar{\alpha} + \bar{\gamma})(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma)}{(\bar{\alpha} + \bar{\beta})(\beta - \alpha) + (\bar{\beta} + \bar{\gamma})(\gamma - \beta) + (\bar{\alpha} + \bar{\gamma})(\alpha - \gamma)} \Leftrightarrow \\ \delta &= \frac{1}{2} \frac{(\alpha + \beta + \gamma)[(\bar{\alpha} + \bar{\beta})(\beta - \alpha) + (\bar{\beta} + \bar{\gamma})(\gamma - \beta) + (\bar{\alpha} + \bar{\gamma})(\alpha - \gamma)]}{(\bar{\alpha} + \bar{\beta})(\beta - \alpha) + (\bar{\beta} + \bar{\gamma})(\gamma - \beta) + (\bar{\alpha} + \bar{\gamma})(\alpha - \gamma)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

Observe que, conforme a equação 3.12, o complexo  $\eta = \alpha + \beta + \gamma$  representa o ortocentro  $H$  do triângulo  $ABC$  e portanto  $\delta = \frac{\eta}{2}$ .

Calcularemos agora as distâncias  $d_1, d_2, d_3$  do ponto  $D$  aos respectivos pontos médios de  $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ . Essas distâncias são:

$$d_1 = \left| \frac{\alpha + \eta}{2} - \frac{\eta}{2} \right| = \frac{|\alpha|}{2} = \frac{1}{2};$$

$$d_2 = \left| \frac{\beta + \eta}{2} - \frac{\eta}{2} \right| = \frac{|\beta|}{2} = \frac{1}{2};$$

$$d_3 = \left| \frac{\gamma + \eta}{2} - \frac{\eta}{2} \right| = \frac{|\gamma|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Resta agora determinar a distância de  $D$  aos pés das alturas do triângulo  $ABC$  e, para tanto, devemos determinar inicialmente esses pontos.

O pé  $A_2$  da altura relativa ao vértice  $A$  é dada pela intersecção da reta suporte de  $\overline{BC}$  com sua perpendicular passando por  $A$ . As equações dessas duas retas são dadas respectivamente por:

$$z(\overline{\beta} - \overline{\gamma}) - \overline{z}(\beta - \gamma) = \gamma(\overline{\beta} - \overline{\gamma}) - \overline{\gamma}(\beta - \gamma) \quad (4.1)$$

$$z(\overline{\beta} - \overline{\gamma}) + \overline{z}(\beta - \gamma) = \alpha(\overline{\beta} - \overline{\gamma}) + \overline{\alpha}(\beta - \gamma) \quad (4.2)$$

Somando (4.1) e (4.2), obtemos:

$$\begin{aligned} 2z(\overline{\beta} - \overline{\gamma}) &= (\alpha + \gamma)(\overline{\beta} - \overline{\gamma}) + (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})(\beta - \gamma) \iff \\ z &= \frac{1}{2}[(\alpha + \gamma) + (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})\left(\frac{\beta - \gamma}{\overline{\beta} - \overline{\gamma}}\right)] = \frac{1}{2}[(\alpha + \gamma) + \left(\frac{\gamma - \alpha}{\alpha\gamma}\right)\left(\frac{\beta\gamma(\beta - \gamma)}{\gamma - \beta}\right)] \iff \\ z &= \frac{1}{2}[(\alpha + \gamma) + \left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\gamma}\right)(\beta\gamma)] = \frac{1}{2}[(\alpha + \gamma) + \beta\left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha}\right)] \iff \\ z &= \frac{1}{2}\left[\alpha + \beta + \gamma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right] = \frac{1}{2}\left[\eta - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right] = \alpha_2. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que os pés  $B_2$  e  $C_2$  das alturas relativas aos vértices  $B$  e  $C$  são, respectivamente:

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\left[\eta - \frac{\alpha\gamma}{\beta}\right];$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\left[\eta - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right].$$

Finalmente, calcularemos as distâncias  $d_4$ ,  $d_5$ ,  $d_6$  do ponto  $D$  aos pontos  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$ , respectivamente. Essas distâncias são:

$$d_4 = \left|\alpha_2 - \frac{\eta}{2}\right| = \left|\frac{\eta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2\alpha} - \frac{\eta}{2}\right| = \left|-\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right| = \frac{1}{2};$$

$$d_5 = \left|\beta_2 - \frac{\eta}{2}\right| = \left|\frac{\eta}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2\beta} - \frac{\eta}{2}\right| = \left|-\frac{\alpha\gamma}{2\beta}\right| = \frac{1}{2};$$

$$d_6 = \left|\gamma_2 - \frac{\eta}{2}\right| = \left|\frac{\eta}{2} - \frac{\alpha\beta}{2\gamma} - \frac{\eta}{2}\right| = \left|-\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right| = \frac{1}{2};$$

Como os nove pontos citados no Teorema são equidistantes do ponto  $D$ , concluímos que existe um círculo que passa por esses nove pontos.  $\square$

## 4.4 O Teorema de Morley

**Teorema 4.4 (Morley)** *A intersecção dos pares adjacentes das trissectrizes dos ângulos de um triângulo são vértices de um triângulo equilátero.*

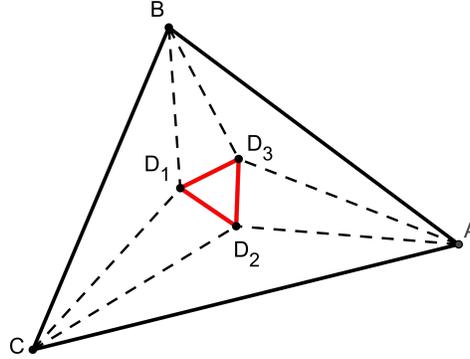


Figura 17: Teorema de Morley para o caso das trissectrizes internas

**Demonstração:** Primeiro vamos provar o teorema no caso das trissectrizes internas. Para tanto, vamos considerar, sem perda de generalidade, que o triângulo ABC esteja inscrito em  $S^1$ , que o vértice A tenha coordenadas  $(1, 0)$  e que  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  são os pontos onde as trissectrizes internas do triângulo ABC intersectam a circunferência  $S^1$ , conforme a figura 18. Considere ainda que:

$$m(\angle AOB) = 3\theta_1, \text{ com } 0 < \theta < \frac{2\pi}{3};$$

$$m(\angle AOC) = 3\theta_2, \text{ com } -\frac{2\pi}{3} < \theta_2 < 0;$$

$$m(\angle BOC) = 3\theta_3, \text{ com } \theta_3 = \frac{2\pi}{3} + \theta_2 - \theta_1 > 0.$$

Observe que os argumentos dos complexos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são:

$$\arg(\alpha_1) = \theta_3 + 3\theta_1 = \theta_2 + 2\theta_1 + \frac{2\pi}{3}$$

e

$$\arg(\alpha_2) = 2\theta_3 + 3\theta_1 = 2\theta_2 + \theta_1 + \frac{4\pi}{3}.$$

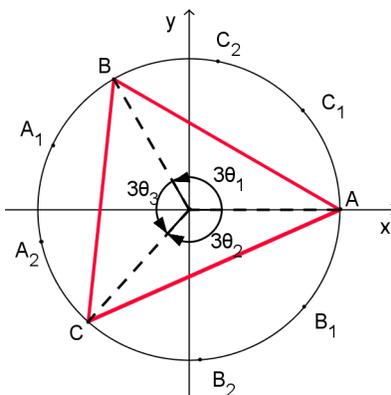


Figura 18: Intersecção das trissectrizes dos ângulos internos do  $\triangle ABC$  com o círculo  $S^1$

Assim, usando a interpretação geométrica da multiplicação, podemos concluir que  $\gamma_2 = \gamma_1^2$  e  $\beta_2 = \beta_1^2$ . Dessa forma os complexos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , ficam expressos por:

$$\alpha_1 = \beta_1 \gamma_1^2 \omega$$

e

$$\alpha_2 = \beta_1^2 \gamma_1 \omega.$$

De fato,

$$\gamma_1 = \cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1,$$

$$\gamma_1^2 = \cos 2\theta_1 + i \operatorname{sen} 2\theta_1,$$

$$\beta_1 = \cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2,$$

$$\beta_1^2 = \cos 2\theta_2 + i \operatorname{sen} 2\theta_2.$$

Assim:

$$\alpha_1 = \cos\left(\theta_2 + 2\theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta_2 + 2\theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \iff \alpha_1 = \beta_1 \gamma_1^2 \omega.$$

$$\alpha_2 = \cos\left(2\theta_2 + \theta_1 + \frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(2\theta_2 + \theta_1 + \frac{4\pi}{3}\right) \iff \alpha_2 = \beta_1^2 \gamma_1 \omega.$$

Sejam  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  os pontos onde as trissectrizes internas do triângulo  $ABC$  se intersectam, conforme a figura 19.

Utilizando a Proposição 3.3, as equações das trissectrizes adjacentes dos ângulos  $B$  e  $C$  são:

$$z + \beta_1^2 \gamma_1^3 \bar{z} = \beta_1^2 + \gamma_1^3 \quad (4.3)$$

e

$$z + \beta_1^3 \gamma_1^2 \bar{z} = \beta_1^3 + \gamma_1^2 \quad (4.4)$$

Fazendo (4.4) – (4.3), obtemos:

$$\bar{z} = \frac{\beta_1^3 + \gamma_1^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^3}{\beta_1^3 \gamma_1^2 - \beta_1^2 \gamma_1^3} \iff z = \frac{\overline{\beta_1^3 + \gamma_1^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^3}}{\overline{\beta_1^3 \gamma_1^2 - \beta_1^2 \gamma_1^3}}.$$

Como  $|\beta_1| = |\gamma_1| = 1$ , temos que  $\overline{\beta_1} = \frac{1}{\beta_1}$  e  $\overline{\gamma_1} = \frac{1}{\gamma_1}$ . Assim, o ponto  $D_1$  é representado por

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\beta_1^{-3} + \gamma_1^{-2} - \beta_1^{-2} - \gamma_1^{-3}}{\beta_1^{-3} \gamma_1^{-2} - \beta_1^{-2} \gamma_1^{-3}} \iff \delta_1 = \frac{\gamma_1^3 + \beta_1^3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_1^3 - \beta_1^3}{\gamma_1 - \beta_1} \iff \\ \delta_1 &= \frac{(\gamma_1 - \beta_1)(\beta_1^2 + \beta_1 \gamma_1 + \gamma_1^2) - \beta_1 \gamma_1 (\gamma_1^2 - \beta_1^2)}{\gamma_1 - \beta_1} \iff \\ \delta_1 &= (\beta_1^2 + \beta_1 \gamma_1 + \gamma_1^2) - \beta_1 \gamma_1 (\beta_1 + \gamma_1). \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos  $\delta_2$  e  $\delta_3$ .

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{1 + \beta_1^{-2} \gamma_1^{-1} \omega^{-2} - \beta_1^{-3} - \gamma_1^{-1}}{\beta_1^{-2} \gamma_1^{-1} \omega^{-2} - \beta_1^{-3} \gamma_1^{-1}} \iff \delta_2 = \frac{\beta_1^3 \gamma_1 + \beta_1 \omega - \gamma_1 - \beta_1^3}{\beta_1 \omega - 1} \iff \\ \delta_2 &= \frac{\gamma_1 (\beta_1^3 - 1) - \beta_1 (\beta_1^2 - \omega)}{\omega (\beta_1 - \omega^2)} \iff \\ \delta_2 &= \frac{\gamma_1 (\beta_1 - \omega^2) (\beta_1^2 + \beta_1 \omega^2 + \omega) - \beta_1 (\beta_1 + \omega^2) (\beta_1 - \omega^2)}{\omega (\beta_1 - \omega^2)} \iff \\ \delta_2 &= \omega^2 [\gamma_1 (\beta_1^2 + \beta_1 \omega^2 + \omega) - \beta_1 (\beta_1 + \omega^2)], \end{aligned}$$

e

$$\delta_3 = \frac{1 + \beta_1^{-1} \gamma_1^{-2} \omega^{-1} - \beta_1^{-1} - \gamma_1^{-3}}{\beta_1^{-1} \gamma_1^{-2} \omega^{-1} - \beta_1^{-1} \gamma_1^{-3}} \iff \delta_3 = \frac{\beta_1 \gamma_1^3 + \gamma_1 \omega^2 - \gamma_1^3 - \beta_1}{\gamma_1 \omega^2 - 1} \iff$$

$$\begin{aligned}\delta_3 &= \frac{\beta_1(\gamma_1^3 - 1) - \gamma_1(\gamma_1^2 - \omega^2)}{\omega^2(\gamma_1 - \omega)} \iff \\ \delta_3 &= \frac{\beta_1(\gamma_1 - \omega)(\gamma_1^2 + \gamma_1\omega + \omega^2) - \gamma_1(\gamma_1 - \omega)(\gamma_1 + \omega)}{\omega^2(\gamma_1 - \omega)} \iff \\ \delta_3 &= \omega[\beta_1(\gamma_1^2 + \gamma_1\omega + \omega^2) - \gamma_1(\gamma_1 + \omega)].\end{aligned}$$

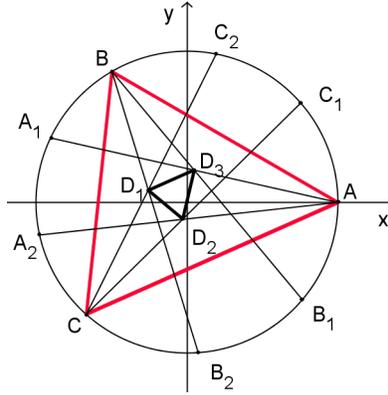


Figura 19: Intersecção das trissectrizes internas do  $\triangle ABC$

Resta agora mostrar que os pontos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  são vértices de um triângulo equilátero. Para isso, segundo o Teorema 3.14, basta mostrar que  $\delta_1 + \omega\delta_2 + \omega^2\delta_3 = 0$  ou  $\delta_1 + \omega^2\delta_2 + \omega\delta_3 = 0$ .

$$\begin{aligned}\delta_1 + \omega\delta_2 + \omega^2\delta_3 &= \\ (\beta_1^2 + \beta_1\gamma_1 + \gamma_1^2 - \beta_1^2\gamma_1 - \beta_1\gamma_1^2) &+ (\gamma_1\beta_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega^2 + \gamma_1\omega - \beta_1^2 - \beta_1\omega^2) + \\ + (\beta_1\gamma_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega + \beta_1\omega^2 - \gamma_1^2 - \gamma_1\omega) &= \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1\omega + \beta_1\gamma_1\omega^2 &= \beta_1\gamma_1(1 + \omega + \omega^2).\end{aligned}$$

Como  $1 + \omega + \omega^2 = 0$ , concluímos que  $\delta_1 + \omega\delta_2 + \omega^2\delta_3 = 0$  e o teorema fica demonstrado para o caso das trissectrizes internas.

Para o caso das trissectrizes externas, vamos observar inicialmente que a trissectriz externa adjacente a um lado forma um ângulo de medida  $\frac{\pi}{3}$  com a trissectriz interna adjacente a esse mesmo lado. De fato, pois se  $\theta_1$  for a

medida do ângulo e  $\theta_2$  a medida do ângulo externo adjacente, temos, por definição, que

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi \iff \frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Usando esse fato e lembrando que em um círculo a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito, temos que a trissectriz do ângulo externo com vértice em  $B$ , adjacente a  $\overline{AB}$ , intersecta  $S^1$  no ponto  $H$  tal que  $\eta = \beta_1\omega$ .

De fato,  $m(\angle B_1BH) = \frac{\pi}{3} \iff m(\angle B_1OH) = \frac{2\pi}{3}$ . Dessa forma, usando o significado geométrico da multiplicação de números complexos, temos que

$$\eta = \beta_1(\cos \frac{2\pi}{3} + \text{sen} \frac{2\pi}{3}) = \beta_1\omega.$$

De modo análogo, temos que:

- a trissectriz do ângulo externo com vértice em  $B$ , adjacente a  $\overline{BC}$ , intersecta  $S^1$  em  $\beta_1^2\omega^2$ ;
- as trissectrizes dos ângulos externos com vértice em  $A$ , adjacente a  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , intersectam  $S^1$ , respectivamente, em  $\beta_1\gamma_1^2$  e  $\beta_1^2\gamma_1\omega$ ;
- as trissectrizes dos ângulos externos com vértice em  $C$ , adjacente a  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , intersectam  $S^1$ , respectivamente, em  $\gamma_1\omega^2$  e  $\gamma_1^2\omega$ .

Sejam  $D_1, D_2, D_3$  os pontos de intersecção dos pares de trissectrizes externas adjacentes dos ângulos de vértices B e C, C e A e A e B, respectivamente.

Utilizando a Proposição 3.3, as equações das trissectrizes adjacentes dos ângulos externos com vértices B e C são:

$$z + \gamma_1^3\beta_1^2\omega^2\bar{z} = \gamma_1^3 + \beta_1^2\omega^2 \quad (4.5)$$

e

$$z + \beta_1^3\gamma_1^2\omega\bar{z} = \beta_1^3 + \gamma_1^2\omega. \quad (4.6)$$

Fazendo (4.6) – (4.5), obtemos:

$$\bar{z} = \frac{\beta_1^3 + \gamma_1^2\omega - \beta_1^2\omega^2 - \gamma_1^3}{\beta_1^3\gamma_1^2\omega - \beta_1^2\omega^2\gamma_1^3} \iff z = \frac{\overline{\beta_1^3 + \gamma_1^2\omega - \beta_1^2\omega^2 - \gamma_1^3}}{\overline{\beta_1^3\gamma_1^2\omega - \beta_1^2\omega^2\gamma_1^3}}.$$

Como  $|\beta_1| = |\gamma_1| = |\omega| = 1$ , temos que  $\bar{\beta}_1 = \frac{1}{\beta_1}$ ,  $\bar{\gamma}_1 = \frac{1}{\gamma_1}$  e  $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$ . Assim,  $D$  é dado por

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\beta_1^{-3} + \gamma_1^{-2}\omega^{-1} - \beta_1^{-2}\omega^{-2} - \gamma_1^{-3}}{\beta_1^{-3}\gamma_1^{-2}\omega^{-1} - \beta_1^{-2}\omega^{-2}\gamma_1^{-3}} \iff \delta_1 = \frac{\gamma_1^3 - \beta_1^3 + \beta_1^3\gamma_1\omega^2 - \beta_1\gamma_1^3\omega}{\gamma_1\omega^2 - \beta_1\omega} \iff \\ &= \frac{(\gamma_1 - \beta_1\omega)(\gamma_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega + \beta_1^2\omega) - \beta_1\gamma_1(\gamma_1^2\omega - \beta_1^2\omega)}{\omega^2(\gamma_1 - \beta_1\omega^2)} \iff \\ \delta_1 &= \frac{(\gamma_1 - \beta_1\omega)(\gamma_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega + \beta_1^2\omega) - \beta_1\gamma_1\omega(\gamma_1 - \beta_1\omega^2)(\gamma_1 + \beta_1\omega^2)}{\omega^2(\gamma_1 - \beta_1\omega^2)} \iff \\ &= \gamma_1^2\omega + \beta_1\gamma_1 + \beta_1^2\omega^2 - \beta_1\gamma_1^2\omega^2 - \beta_1^2\gamma_1\omega. \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos que  $\delta_2$  e  $\delta_3$  são:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{1 + \beta_1^{-2}\gamma_1^{-1} - \beta_1^{-3} - \gamma_1 - 1\omega^{-2}}{\beta_1^{-2}\gamma_1^{-1} - \beta_1^{-3}\gamma_1^{-1}\omega^{-2}} \iff \delta_2 = \frac{\beta_1^3\gamma_1 + \beta_1 - \gamma_1 - \beta_1^3\omega}{\beta_1 - \omega} \iff \\ &= \frac{\gamma_1(\beta_1^3 - 1) - \beta_1\omega(\beta_1^2 - \omega^2)}{\beta_1 - \omega} \iff \\ \delta_2 &= \frac{\gamma_1(\beta_1 - \omega)(\beta_1^2 + \beta_1\omega + \omega^2) - \beta_1\omega(\beta_1 - \omega)(\beta_1 + \omega)}{\beta_1 - \omega} \iff \\ &= \gamma_1\beta_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega + \gamma_1\omega^2 - \beta_1^2\omega - \beta_1\omega^2. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \frac{1 + \beta_1^{-1}\gamma_1^{-2} - \gamma_1^{-3} - \beta_1^{-1}\omega^{-1}}{\beta_1^{-1}\gamma_1^{-2} - \gamma_1^{-3}\beta_1^{-1}\omega^{-1}} \iff \delta_3 = \frac{\beta_1\gamma_1^3 + \gamma_1 - \beta_1 - \gamma_1^3\omega^2}{\gamma_1 - \omega^2} \iff \\ \delta_3 &= \frac{\beta_1(\gamma_1^3 - 1) - \gamma_1(\gamma_1^2\omega^2 - 1)}{\gamma_1 - \omega^2} \iff \delta_3 = \frac{\beta_1(\gamma_1^3 - 1) - \gamma_1\omega^2(\gamma_1^2 - \omega^4)}{\gamma_1 - \omega^2} \iff \\ &= \frac{\beta_1(\gamma_1 - \omega^2)(\gamma_1^2 + \gamma_1\omega^2 + \omega) - \gamma_1\omega^2(\gamma_1 - \omega^2)(\gamma_1 + \omega^2)}{\gamma_1 - \omega^2} \iff \\ &= \beta_1\gamma_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega^2 + \beta_1\omega - \gamma_1^2\omega^2 - \gamma_1\omega. \end{aligned}$$

Resta agora demonstrar que os pontos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  são vértices de um triângulo equilátero. Para isso, segundo o Teorema 3.14, basta mostrar que  $\delta_1 + \omega\delta_2 + \omega^2\delta_3 = 0$  ou  $\delta_1 + \omega^2\delta_2 + \omega\delta_3 = 0$ .

$$\begin{aligned} & \delta_1 + \omega\delta_2 + \omega^2\delta_3 = \\ & (\gamma_1^2\omega + \beta_1\gamma_1 + \beta_1^2\omega^2 - \beta_1\gamma_1^2\omega^2 - \beta_1^2\gamma_1\omega) + (\beta_1^2\gamma_1\omega + \beta_1\gamma_1\omega^2 + \gamma_1 - \beta_1^2\omega^2 - \beta_1) + \\ & \quad + (\beta_1\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1\gamma_1\omega + \beta_1 - \gamma_1^2\omega - \gamma_1) = \\ & \beta_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1\omega + \beta_1\gamma_1\omega^2 = \beta_1\gamma_1(1 + \omega + \omega^2) = 0. \end{aligned}$$

□

## 5 Outros Problemas

Neste capítulo resolveremos, via números complexos, mais alguns problemas da Geometria Euclidiana Plana, entre eles o "Problema da Ilha do Tesouro" e uma variação do mesmo. Nos problemas que seguem, denotaremos por  $z_P$  o número complexo associado ao ponto  $P$ .

**Problema 5.1 (Problema da Ilha do Tesouro)** *Um pirata escondeu um tesouro em uma praia e desenhou um esquema em seu diário, sem registro de distância, que mostrava o lugar onde o tesouro havia sido escondido. De acordo com o esquema, naquela praia haviam duas rochas,  $A$  e  $B$ , e uma palmeira. Para esconder o tesouro o pirata procedeu da seguinte maneira:*

- *Partindo da palmeira ele andou até a rocha  $A$ , fez uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário e caminhou nessa direção uma distância correspondente à última distância que havia percorrido, marcando um ponto  $A'$ .*
- *Voltando para a palmeira, ele andou até a rocha  $B$ , fez uma rotação de  $90^\circ$  no sentido horário e caminhou nessa direção a mesma distância que havia percorrida da palmeira até a segunda rocha. Marcou, então, o ponto  $B'$ .*
- *O tesouro foi escondido no lugar correspondente ao ponto médio do segmento com extremos em  $A'$  e  $B'$ .*

*Anos mais tarde, uma pessoa encontrou o diário do pirata e foi até a praia para desenterrar o tesouro, porém a palmeira que constava no mapa havia desaparecido. Como essa pessoa pode proceder, caso seja possível, para determinar a localização exata desse tesouro?*

**Resolução:** Como não sabemos qual era a localização da palmeira, vamos supor uma localização qualquer no plano cartesiano. Identificaremos por  $X$  a palmeira,  $A$  e  $B$  as rochas e por  $M$ , localização do tesouro, o ponto médio de  $\overline{A'B'}$ , conforme a figura 20.

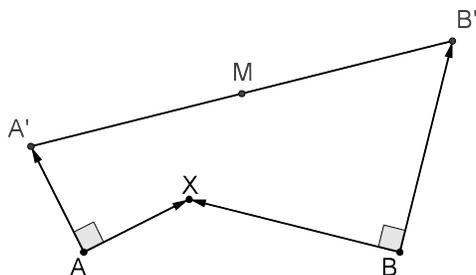


Figura 20: Localização do tesouro

Considerando que os pontos estão no plano cartesiano, não sendo relevante onde se localiza a origem, temos:

$$z_{A'} - z_A = (z_X - z_A)i$$

e

$$z_{B'} - z_B = (z_X - z_B)(-i).$$

O que implica que  $z_{A'}$  e  $z_{B'}$  são:

$$z_{A'} = (z_X - z_A)i + z_A = z_X i - z_A i + z_A$$

e

$$z_{B'} = (z_X - z_B)(-i) + z_B = -z_X i + z_B i + z_B.$$

Dessa forma, o ponto M que representa a localização do tesouro é dado pelo seguinte número complexo:

$$z_M = \frac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = \frac{z_X i - z_A i + z_A - z_X i + z_B i + z_B}{2} = \frac{z_A + z_B}{2} + \frac{z_B - z_A}{2} i$$

Esse resultado mostra que a localização do tesouro não depende da localização da palmeira e sim da localização das rochas. Dessa forma, basta supor uma localização qualquer para a palmeira e seguir os passo descritos no esquema deixado pelo pirata.

**Problema 5.2 (Variação do Problema a Ilha do Tesouro)** *Um pirata escondeu um tesouro em uma praia e desenhou um esquema em seu diário, sem registro de distância, que mostrava o lugar onde o tesouro havia sido escondido. De acordo com o esquema, naquela praia haviam duas rochas, A e B, e uma palmeira P. Para esconder o tesouro o pirata procedeu da seguinte maneira:*

- *Partindo da palmeira ele andou até a rocha A, fez uma rotação de um ângulo  $\theta$  e caminhou nessa direção uma distância correspondente à última distância que havia percorrido, marcando um ponto  $A'$ .*
- *Voltando para a palmeira, ele andou até a rocha B, fez uma rotação de um ângulo  $\theta$  no mesmo sentido de rotação feito na rocha A e caminhou nessa direção a mesma distância que havia percorrido da palmeira até a segunda rocha. Marcou, então, o ponto  $B'$ .*
- *O tesouro foi escondido no lugar correspondente ao ponto médio do segmento com extremos em  $A'$  e  $B'$ .*

*Anos mais tarde, uma pessoa encontrou o diário do pirata e foi até a praia para desenterrar o tesouro. Determine, em função de  $\theta$ , o lugar geométrico obtido a partir das possíveis localizações do tesouro.*

**Resolução:**

Considerando que os pontos estão no plano cartesiano, não sendo relevante onde se localiza a origem e sendo  $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , temos que:

$$z_{A'} - z_A = (z_P - z_A)z$$

e

$$z_{B'} - z_B = (z_P - z_B)z.$$

O que implica que  $z_{A'}$  e  $z_{B'}$  são:

$$z_{A'} = (z_P - z_A)z + z_A \iff z_{A'} = z_P z - z_A z + z_A$$

e

$$z_{B'} = (z_P - z_B)z + z_B \iff z_{B'} = z_P z - z_B z + z_B.$$

Dessa forma, o ponto  $M$  que representa a localização do tesouro é dado pelo seguinte número complexo:

$$z_M = \frac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = \frac{z_P z - z_A z + z_A + z_P z - z_B z + z_B}{2} \iff$$

$$z_M = \left(z_P - \frac{z_A + z_B}{2}\right)z + \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Observe que  $z_D = \frac{z_A + z_B}{2}$  é o complexo associado ao ponto médio de  $\overline{AB}$ . Assim:

$$z_M - z_D = (z_P - z_D)z.$$

Isso significa que, conforme  $\theta$  assume valores reais, as possíveis localizações do tesouro estão sobre uma circunferência de centro em D e raio  $|z_P - z_D|$ , como mostra a figura 21.

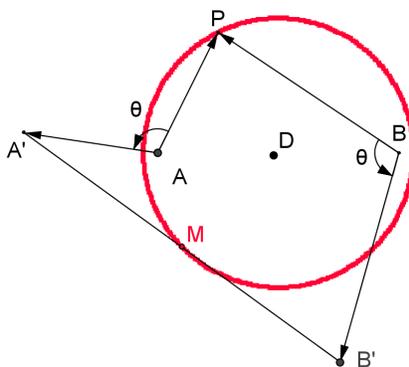


Figura 21: Possíveis localizações do tesouro.

**Problema 5.3** *Determine o centro O de um quadrado ABCD sabendo das coordenadas dos pontos consecutivos A e B.*

**Resolução:** Inicialmente percebemos que há duas soluções para o problema. Podemos obter o ponto D através de uma rotação do vetor  $\overrightarrow{AB}$  em torno de sua origem tanto no sentido horário quanto no anti-horário.

Rotacionando, em  $\frac{\pi}{2}$  e no sentido anti-horário, o vetor  $\overrightarrow{AB}$  com relação ao ponto A, temos:

$$z_D - z_A = (z_B - z_A)i \iff z_D = z_A + (z_B - z_A)i.$$

Assim, o ponto O fica representado pelo complexo

$$z_O = \frac{z_B + z_D}{2} \iff z_O = \frac{z_A + z_B + (z_B - z_A)i}{2}. \quad (5.1)$$

Caso o vetor  $\overrightarrow{AB}$  seja rotacionado em  $-\frac{\pi}{2}$  com relação ao ponto A, temos:

$$z_D - z_A = (z_B - z_A)(-i) \iff z_D = z_A + (z_A - z_B)i.$$

Assim, o ponto O fica representado pelo complexo

$$z_O = \frac{z_B + z_D}{2} \iff z_O = \frac{z_A + z_B + (z_A - z_B)i}{2}.$$

**Problema 5.4** *Sobre cada lado de um quadrilátero ABCD construímos quadrados, externamente ao quadrilátero dado, de centros  $O_1, O_2, O_3$  e  $O_4$ , respectivamente.*

*Mostre que*

$$\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4} \text{ e } O_1O_3 = O_2O_4.$$

**Resolução:** Sejam ABMM', BCNN', CDPP' e DAQQ' os quadrados construídos com centros  $O_1, O_2, O_3$  e  $O_4$ , respectivamente, conforme a figura 22.

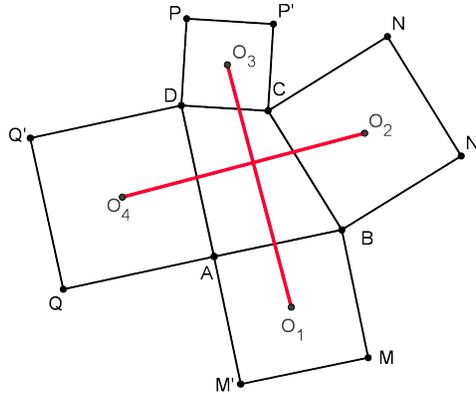


Figura 22: Quadrados construídos externamente sobre os lados do quadrilátero ABCD

Rotacionando, em  $\frac{\pi}{2}$  e no sentido anti-horário, os vetores:  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  e  $\overrightarrow{AD}$  com relação as suas respectivas origens, obtemos:

$$z_M - z_B = (z_A - z_B)i \Leftrightarrow z_M = z_B + (z_A - z_B)i$$

$$z_N - z_C = (z_B - z_C)i \Leftrightarrow z_N = z_C + (z_B - z_C)i$$

$$z_P - z_D = (z_C - z_D)i \Leftrightarrow z_P = z_D + (z_C - z_D)i$$

$$z_Q - z_A = (z_D - z_A)i \Leftrightarrow z_Q = z_A + (z_D - z_A)i$$

Dessa forma:

$$z_{O_1} = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{z_A + z_B + (z_A - z_B)i}{2},$$

$$z_{O_2} = \frac{z_B + z_N}{2} = \frac{z_B + z_C + (z_B - z_C)i}{2},$$

$$z_{O_3} = \frac{z_C + z_P}{2} = \frac{z_C + z_D + (z_C - z_D)i}{2},$$

$$z_{O_4} = \frac{z_Q + z_D}{2} = \frac{z_D + z_A + (z_D - z_A)i}{2}.$$

Segundo o Teorema 2.7, para mostrar que  $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$  basta que  $\frac{z_{O_3} - z_{O_1}}{z_{O_4} - z_{O_2}}$  seja imaginário puro.

De fato:

$$\frac{z_{O_3} - z_{O_1}}{z_{O_4} - z_{O_2}} = \frac{(z_C + z_D - z_A - z_B) + (-z_A - z_D + z_B + z_C)i}{(z_A + z_D - z_B - z_C) + (z_C + z_D - z_A - z_B)i} = -i.$$

Portanto  $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ .

Além disso,  $|\frac{z_{O_3} - z_{O_1}}{z_{O_4} - z_{O_2}}| = |-i| = 1$ ; portanto  $O_1O_3 = O_2O_4$ , conforme o desejado.

**Problema 5.5** *Sobre cada lado de um paralelogramo ABCD construímos quadrados externos à figura. Prove que os centros dos quadrados construídos são vértices de um quadrado.*

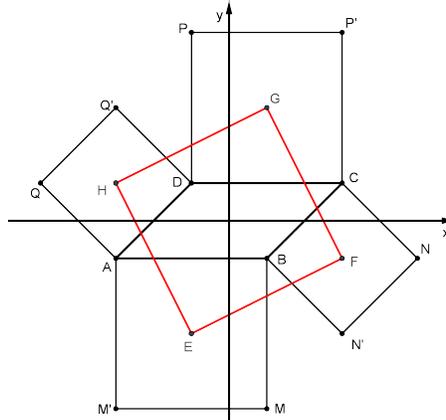


Figura 23: Quadrados construídos externamente sobre os lados do paralelogramo ABCD

**Resolução** Considere o plano cartesiano com a origem coincidindo com o ponto de intersecção entre as diagonais do paralelogramo. Dessa forma,  $z_C = -z_A$  e  $z_D = -z_B$ . Considere também que os pontos E, F, G, H sejam, respectivamente, os centros dos quadrados ABMM', BCNN', CDPP' e DAQQ' como mostra a figura 23.

Pelo problema 22,  $\overline{EG} \perp \overline{FH}$  e  $EG = FH$ . Dessa forma, basta mostrar que  $\overline{EG}$  e  $\overline{FH}$  se intersectam em seus respectivos pontos médio para concluir que E, F, G, H são vértices de um quadrado.

Utilizando a equação (5.1) do problema 5.3, os complexos que representam os centros dos quadrados são:

$$z_E = \frac{z_A + z_B + (z_A - z_B)i}{2},$$

$$z_F = \frac{z_B - z_A + (z_A + z_B)i}{2},$$

$$z_G = \frac{-z_A - z_B + (-z_A + z_B)i}{2},$$

$$z_H = \frac{-z_B + z_A + (-z_A - z_B)i}{2}.$$

Assim, como

$$\frac{z_E + z_G}{2} = \frac{z_F + z_H}{2} = 0,$$

concluimos que as diagonais do quadrilátero EFGH se intersectam em seus respectivos pontos médios e, portanto, E, F, G, H são vértices de um quadrado.

## Referências

- [1] BERLINGHOFF, WILLIAM P.; GOVÊA, FERNANDO Q. *A matemática Através dos Tempos*. 2ª edição. Blucher, São Paulo, 2010.
- [2] Cantoni, A. C. L. *Números complexos e Alguns Resultados Clássicos da Geometria Plana*. 2008. 59f. Monografia (Especialização em Matemática). Universidade federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: [http : //www.mat.ufmg.br/ ~ pgmat/monografias/Mono007.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~pgmat/monografias/Mono007.pdf), acessado em 01/05/2013.
- [3] CARMO, MANFREDO P.; MORGADO, AUGUSTO C.; WAGNER, EDUARDO. *Trigonometria Números Complexos*. Coleção do Professor de Matemática, 3ª edição. SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [4] EVES, HOWARD. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, Ed Da Unicamp, 2008.
- [5] MILIES, CESAR POLCINO. *A Emergência dos Números Complexos*. Revista do Professor de Matemática. N° 24, SBM, Rio de Janeiro, 1993.
- [6] SOARES, MARCIO GOMES. *Cálculo em uma Variável Complexa*. Coleção Matemática Universitária, 3ª edição. SBM, Rio de Janeiro, 2003.