

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Isometrias em Geometrias Euclidianas e não Euclidianas sob o ponto de vista da Geometria Analítica

Carlos Alberto Sato



PROFMAT

Rio Claro/SP
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Carlos Alberto Sato

Isometrias em Geometrias Euclidianas e não Euclidianas sob o ponto de vista da Geometria Analítica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientador
Prof. Dr. Jamil Viana Pereira

Rio Claro/SP
2024

S253i

Sato, Carlos Alberto

Isometrias em Geometrias Euclidianas e não Euclidianas sob o ponto de vista da Geometria Analítica / Carlos Alberto Sato. -- Rio Claro, 2024

135 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Jamil Viana Pereira

1. Geometria Analítica. 2. Geometria Euclidiana. 3. Geometria Não Euclidiana. 4. Isometrias. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Impacto potencial desta pesquisa

Considerar isometrias não apenas no âmbito da Geometria Euclidiana Plana, como também em Geometrias Não Euclidianas. Considerar um tratamento vetorial disciplina Geometria Analítica no âmbito do ensino médio.

Potential impact of this research

Consider isometries not only within the scope of Flat Euclidean Geometry, but also in Non-Euclidean Geometries. Consider a vectorial treatment of the Analytical Geometry discipline in high school.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Carlos Alberto Sato

ISOMETRIAS EM GEOMETRIAS EUCLIDIANAS E NÃO EUCLIDIANAS SOB
O PONTO DE VISTA DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira (Orientador)
UNESP

Prof. Dr. Thiago de Melo
UNESP

Prof. Dr. Willer Daniel da Silva Costa
UFES

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 29 de agosto de 2024

Para Iracema e Isamu (in memoriam).

Agradecimentos

Em primeiro lugar, ao Prof. Dr. Jamil Viana Pereira pelo conselhos, críticas, sugestões e enorme paciência diante de meus lentos progressos ao longo desses anos de mestrado. Uma dívida incomensurável que, espero retribuir, mesmo que de maneira infinitesimal no futuro.

Ao Prof. Dr. Thiago de Melo, Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli, Profa. Dra. Renata Zotin G. de Oliveira e Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso cujas aulas foram sempre estimulantes e tiveram uma contribuição muito importante ao longo não apenas do mestrado, mas também em minha formação matemática.

A todos os técnicos e servidores do campus Rio Claro da UNESP pela acolhida fraterna e carinhosa.

A amiga Adriana Rigobello, por termos divididos angústias, preocupações e algumas listas de exercícios durante esse período de PROFMAT.

A minha esposa Talita Ribeiro de Melo por sempre estar atenta às minhas divagações, nem sempre compreensíveis para ela, sobre o tema da dissertação.

Aos meus ex-alunos, e mais do que isso queridos amigos, Fabrício Kitazawa e Laura Naomi Seto, pelas constantes discussões sobre a prática e o ensino de Matemática no atual ensino médio.

E por último, mas não menos importante, ao Prof. Doutor Márcio Rosa (IMECC-UNICAMP) quem primeiro me orientou nesses caminhos nem sempre simplesmente conexos da Geometria e da Matemática nos tempos da graduação.

Let's pretend there's a way of getting through into it, somehow, Kitty. Let's pretend the glass has got all soft like gauze, so so that we can get through. why, it's turning into a sort of mist now, I declare! It'll be easy enough to get through.

Lewis Carroll

Resumo

Isometrias, como transformações geométricas que não alteram as propriedades métricas de uma figura, têm importância e interesse não apenas para a Matemática, mas também para outros ramos do conhecimento humano. Tomando como base um ponto de vista da geometria analítica, desenvolvemos, a partir de um sistema de coordenadas, as transformações, reflexão por uma reta, translação, rotação e reflexão com deslizamento para a Geometria Euclidiana. Em seguida, adotamos o mesmo método para desenvolvermos os conceitos em duas outras geometrias não euclidianas, a saber, sobre a superfície da esfera e sobre uma folha de um hiperbolóide. Ao final observamos as similaridades e diferenças entre tais geometrias, e, ainda como um desdobramento, desenvolvemos uma sequência didática, aplicando alguns desses conceitos, para uma turma do ensino médio.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Geometria Euclidiana. Geometria Não Euclidiana. Isometrias.

Abstract

Isometries, as geometric transformations that do not change the metric properties of a figure, They are important and interesting not only for Mathematics, but also for other branches of human knowledge. Taking as a basis a point of view of analytical geometry, we developed, from a coordinate system, transformations, reflection by a straight line, translation, rotation and glide reflection for Euclidean Geometry. Then, we adopted the same method to develop the concepts in two other geometries non-Euclidean, namely, on the surface of the sphere and on a sheet of a hyperboloid. In the end, we observed the similarities and differences between such geometries, and, still as a development, we developed a didactic sequence, applying some of these concepts, for a high school class.

Keywords: Analytic Geometry. Euclidean Geometry. Non Euclidean Geometry. Isometries.

Lista de Figuras

1.1	(a) Reta r . (b) Reta orientada.	22
1.2	Segmento de reta \overline{PQ}	23
1.3	Segmento de reta orientado (a) \overrightarrow{AB} e segmento de reta nulo, (b) \overrightarrow{XX}	23
1.4	Segmentos orientados (a) \overrightarrow{PQ} e (b) \overrightarrow{QP}	24
1.5	Segmentos orientados paralelos, \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{RS}	24
1.6	Segmentos orientados (a) de mesmo sentido, (b) sentidos opostos.	24
1.7	Coordenadas cartesianas do ponto P	26
1.8	Vetor com origem em O e extremidade em P	27
1.9	Vetores com origem na origem do plano cartesiano, u , e um outro representante com origem no ponto P	28
1.10	Direção no plano determinada pelo vetor v	34
1.11	A reta \overleftrightarrow{PQ} e o vetor diretor v	35
1.12	Ponto Q , pé da perpendicular.	38
1.13	Ponto Q é o ponto da reta r mais próximo de X	39
1.14	Transformação T	41
1.15	Reflexão do ponto P pela reta r	42
1.16	$\Omega_\alpha \Omega_\beta$ é a translação ao longo de r por uma soma igual a duas vezes $d(\alpha, \beta)$	48
1.17	Feixe de retas paralelas	49
1.18	Reta r que tem $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ por vetor diretor.	50
1.19	$\Omega_r \Omega_s$ é a rotação ao redor de P pelo ângulo 2θ	52
1.20	Reflexão com deslizamento.	54
1.21	Reflexão com deslizamento para os pontos A , B e C	54
1.22	Reflexão por uma reta passando pelo centro do triângulo	56
1.23	Rotação ao redor do centro do triângulo	57
1.24	Figuras no plano.	57
1.25	Diagonal do quadrado	58
1.26	Reflexão por uma diagonal, (a) quadrado original, (b) quadrado após reflexão.	59
1.27	Rotação ao redor do ponto O por um ângulo de (a) $\frac{\pi}{2}$ rad, (b) π rad, (c) $\frac{3\pi}{2}$ rad, (d) $2 \cdot \pi$ rad.	59
1.28	Reflexão pela reta \overleftrightarrow{MN} , (a) quadrado original, (b) quadrado após reflexão.	60
1.29	Um exemplo de ornamento	60
1.30	Um exemplo de roseta	61
1.31	A roseta completa	61
1.32	Roseta contendo apenas rotações	62
1.33	Roseta contendo apenas reflexões por retas passando pela origem	62
1.34	Friso obtido pela translação da figura $ABCD$	63

2.1	Ângulo entre os vetores u e v	69
2.2	Esfera em \mathbb{R}^3	74
2.3	Reta em S^2	75
2.4	Reta r , com pólo $u = (1, 0, 0)$	76
2.5	Reflexão por uma reta, Ω_r	80
2.6	Reflexão pela reta r , com pólo $u = (1, 0, 0)$	81
2.7	Coordenadas esféricas	88
3.1	Plano hiperbólico.	100
3.2	Uma reta no plano hiperbólico.	100
3.3	Retas que se intersectam no plano hiperbólico.	101
3.4	Retas paralelas no plano hiperbólico.	102
3.5	Retas ultraparelas no plano hiperbólico.	103
3.6	Reflexão por uma reta.	106
3.7	Rotação.	110
3.8	Translação ao longo da reta t	113
3.9	Translação ao longo da reta t vista de cima.	113
3.10	Reflexão com deslizamento.	116
3.11	Reflexão com deslizamento.	117
3.12	Cone de luz.	118
3.13	Vetores e cone de luz.	119
3.14	Paradoxo dos gêmeos.	121
4.1	Comparação entre as distâncias entre os pontos P e Q dadas pelas métricas euclidiana (linha tracejada) e do taxista (linha cheia).	123
4.2	Dois possíveis caminhos na geometria do taxista entre os pontos A e B	123
4.3	Circunferência centrada na origem e com raio igual a 1 na métrica cartesiana.	125
4.4	Circunferência centrada na origem e com raio igual a 1 na métrica do taxista.	125
4.5	Elipse com Focos nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ segundo a métrica usual.	126
4.6	Elipse com Focos nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ segundo a métrica do taxista.	126
4.7	Determinação geométrica da reflexão de um ponto por uma reta.	129
4.8	Reflexão aplicada ao triângulo ABC	129
4.9	Translação, $\Omega_r\Omega_s$ ao longo da reta t	130
4.10	Translação, $\Omega_s\Omega_r$ ao longo da reta t	130
4.11	Rotação ao redor da origem no sentido anti-horário.	131
4.12	Rotação ao redor da origem no sentido horário.	132
4.13	Reflexão com deslizamento.	132

Lista de Tabelas

4.1	Semelhanças e diferenças entre as geometrias.	127
-----	---	-----

Sumário

1	Geometria no Plano	21
1.1	Preliminares algébricas	21
1.2	Transformações em \mathbb{R}^2	40
1.3	Frisos e ornamentos	56
2	Geometria Esférica	64
2.1	Preliminares algébricas	64
2.2	A esfera unitária	74
2.3	Geometria em S^2	75
2.4	Transformações em S^2	79
2.5	Geodésicas em S^2	87
3	Geometria Hiperbólica	90
3.1	Preliminares algébricas	90
3.2	Geometria em H^2	99
3.3	Transformações em H^2	106
3.4	O espaço-tempo de Minkowski	118
4	Considerações Finais	122
4.1	Comparando métricas	122
4.2	Semelhantes mas diferentes	125
4.3	Atividade didática	127
4.3.1	Caracterização da turma	127
4.3.2	Sequência Didática	128
4.3.3	Transformações no plano	128
4.3.4	Reflexão por uma reta	128
4.3.5	Translação	130
4.3.6	Rotação	131
4.3.7	Reflexão com deslizamento	132
4.3.8	Comentários	132
	Referências	135

Introdução

Dividimos a introdução desse trabalho em duas partes interdependentes. Em primeiro lugar, situamos, historicamente, uma parte das idéias e conceitos da Matemática relativas a Geometria Euclidiana, e as críticas e questionamentos que surgiram ao longo dos anos, sobre o famoso quinto postulado de Euclides, como exposto em sua grande obra, *Os Elementos*. Tais conceitos passaram pelo surgimento da geometria analítica, até o momento em que, a partir da negação do quinto postulado, os matemáticos de então, foram levados às chamadas geometria não euclidianas.

Na segunda parte dessa introdução, relatamos, do ponto de vista da geometria analítica, as diferentes formas que isometrias surgem na Geometria Euclidiana, na geometria da esfera e na geometria hiperbólica.

Ecos de Euclides

Dentre os muitos matemáticos, e suas respectivas obras, que influenciaram a Matemática ao longo da história da civilização humana, nenhuma supera o alcance, a influência e a importância de **Os Elementos**, escrita por **Euclides** (século III a.C.). Um cânone e modelo para toda a Matemática posterior. Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, sendo que os poucos fatos conhecidos, devem-se ao filósofo neo-platônico *Proclus* (412-485). Dentre as várias obras escritas por Euclides, cinco delas sobreviveram até os dias atuais, a saber, *Os Elementos*, *Os Dados*, *Divisão de Figuras*, *Os Fenômenos* e *Óptica*¹.

Os Elementos era um livro-texto, não o primeiro, mas que sintetizava toda a Matemática elementar conhecida na Grécia Antiga. Em Alexandria, no Egito Antigo, o governante Ptolomeu I (323-283 a.C.), estabeleceu um complexo que era constituído de um museu, uma biblioteca e uma universidade, perdurando até o ano de 391, se tornando um grande centro irradiador da cultura da Grécia antiga. Euclides foi contratado como professor pois tinha, segundo relatos da época uma grande habilidade na exposição. Seus *Elementos* cobriam tópicos desde a Aritmética, Álgebra e Geometria.

Devemos recordar que, o filósofo grego Tales de Mileto (624-546 a.C.) estabeleceu um conceito de demonstrar a veracidade de algumas afirmações baseado em afirmações anteriores, as quais eram verdadeiras. Claro que, os próprios gregos notaram a necessidade de estabelecer um conjunto mínimo de afirmações, que nessa concepção eram verdadeiras, ou evidentes por si só. Tal método encontrou sua melhor e maior concepção na obra *Organon* do filósofo Aristóteles (384-322 a.C.). Estabeleceu-se, então o método dedutivo, o qual foi prontamente incorporado pela matemática grega.

Como não poderia ficar imune a esse movimento, *Os Elementos* é composta de 13 livros, sendo apresentada na abertura do Livro I um conjunto de Definições, Postulados e

¹Exceto quando for indicado, todas as considerações históricas nessa seção são baseadas em [4]

Noções Comuns. Todas as demais afirmações contidas nesse livro, e nos demais, deveriam ser obtidas pelo método dedutivo.

Dentre as definições temos, seguindo [5], por exemplo,

Definição 1: Ponto é aquilo de que nada é parte.

Definição 2: E linha é comprimento sem largura.

Definição 3: E extremidades de uma linha são pontos.

E dentre as noções comuns,

Noção comum 1: As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

Noção comum 2: E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

Já os postulados são em número de cinco, e são eles,

Postulado 1: Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até qualquer ponto.

Postulado 2: Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

Postulado 3: E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

Postulado 4: E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

Postulado 5: E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

E aqui temos o início de uma saga que ressoa até os dias de hoje. Enquanto os quatro primeiros postulados são em sua forma simples e diretos, o quinto postulado, por outro lado, não, pois tem uma construção muito mais rebuscada que os anteriores, e não tão evidente como os demais. Há que se notar ainda que tal postulado será utilizado por Euclides na demonstração da Proposição 29 do Livro I. Ou seja, todos os demais resultados até então obtidos, independem do quinto postulado.

Uma das primeiras críticas que se tem registro é devido a Proclus (ver [9]), onde afirma que,

Este deve ser retirado do conjunto dos postulados. Pois é um teorema – teorema este que coloca muitas questões que Ptolomeu se propôs resolver em um dos seus livros - e requer, para a sua demonstração, várias definições assim como teoremas. E a sua recíproca é provada pelo próprio Euclides como um teorema. Mas talvez algumas pessoas pensem erradamente que esta proposição mereça ser classificada entre os postulados com base em os ângulos serem menores que dois ângulos retos nos faz imediatamente, acreditar na concorrência e intersecção das linhas retas. . . . Logo aqui, apesar da afirmação que linhas retas concorrem quando os ângulos retos são diminuídos ser verdadeira e necessária, no entanto, a conclusão de que, por elas convergirem mais quando são prolongadas para mais longe, elas se encontrarão a certa altura, é plausível, mas não necessária, na ausência de um argumento provando que isto

é verdadeiro para linhas retas. Que existem linhas que se aproximam indefinidamente mas nunca se encontram parece ser implausível e paradoxal. No entanto, é apesar disso verdade e foi verificado para outras espécies de linhas. Não poderá isto, então, ser possível para linhas retas? Até termos demonstrado firmemente que elas se encontram, o que é dito acerca de outras linhas despoja a nossa imaginação da sua plausibilidade. E apesar de os argumentos contra a intersecção dessas linhas poderem conter muito que nos surpreenda, não deveríamos nos recusar a admitir na nossa tradição este apelo sem razão à probabilidade? **Estas considerações tornam claro que devemos procurar uma demonstração do teorema com que nos deparamos e que lhe falta o carácter especial de um postulado.**²

Assim se inicia uma busca pela demonstração do quinto postulado de Euclides.

Com o fim do período helenístico e a ascensão do Império Romano (146 a.C.) e o incêndio da Biblioteca de Alexandria (48 a.C.), o pensamento grego sofreu o seu ocaso. Entretanto, muitas obras, inclusive *Os Elementos*, foram traduzidas para o idioma árabe, e sobreviveram, sendo posteriormente traduzidas do árabe para as línguas europeias.

Nesse ínterim, matemáticos árabes, como Ibn al Haitham (965-1039), Omar Khayyam (1050-122) e Nasir Eddin al Tusi (1201-1274) tentaram demonstrar o quinto postulado, sem sucesso.

O fim do período feudal, a ascensão do Mercantilismo, permitiu a eclosão do Renascimento, período histórico que na Europa foi caracterizado pela recuperação de conceitos originados na Antiguidade Clássica. Nesse contexto, a obra de Euclides foi revisitada, mas agora traduzida do árabe.

O quinto postulado novamente assombrava as mentes dos muitos matemáticos que com ele se defrontavam.

Podemos citar o padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733), o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777), os dois que mais se aproximaram de uma nova geometria, de carácter não euclidiana.

E assim chegamos aos principais personagens dessa saga, os matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Alemanha), Nicolai Lobachevsky (1792-1856, Rússia) e Janos Bolyai (1802-1860, Hungria).

Gauss relutava em publicar qualquer trabalho que não estivesse completamente finalizado. Assim, conhecedor das pesquisas de Saccheri, concluiu que outras geometrias, além da Euclidiana eram possíveis.

Lobachevsky por outro lado, pesquisava intensamente os princípios da geometria. Em 1829, publicou no periódico *Kazan Messenger* o artigo *Sobre os princípios da Geometria*. Convencido de que o quinto postulado de Euclides não poderia ser provado a partir dos quatro primeiros, seu artigo era o primeiro em que um matemático propunha uma geometria em direto conflito com o postulado das paralelas, sendo chamada de *geometria imaginária* pelo próprio autor. Entre 1835 e 1855 publicou três obras contendo uma exposição completa da nova geometria.

Farkas Bolyai era professor de matemática em uma província na Hungria, e quando soube que o filho, Janos, tentava obter uma demonstração do postulado das paralelas, escreveu uma carta ao filho rogando que desistisse de tal intento. Em seus esforços, Janos, como Lobachevsky, consideraram a hipótese de que, dada uma reta e um ponto fora dessa reta existem mais pelo menos duas retas paralelas à reta dada. O que Janos

²Tradução do próprio autor.

denominou de *Ciência absoluta do espaço* surgiu como um apêndice da obra *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi*, de autoria de seu pai, Farkas, mas publicada em 1832.

E assim o quinto postulado de Euclides deveria ser visto como um postulado independente dos demais.

O matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900) em dois trabalhos, publicados em 1868, demonstrou a consistência das geometrias não euclidianas, propondo um modelo para a geometria de Lobachevsky.

Nesse mesmo período de tempo, uma nova abordagem da Geometria estava sendo gestada.

O filósofo francês Rene Descartes (1596-1650) publica em 1637 a sua obra *Discours de la methode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, onde anuncia seu programa de pesquisas em Filosofia. Um dos apêndices dessa obra era intitulado *La géométrie*. Nesse, Descartes procurava aliar processos algébricos na interpretação de problemas geométricos e dotar de significado, operações algébricas interpretando-as geometricamente. Algo que os gregos já haviam feito anteriormente, mas não de forma tão abrangente como Descartes na busca de soluções de uma equação algébrica. Assim, dado um problema geométrico, Descartes obtinha uma equação algébrica que representasse tal problema e, então procurava soluções da mesma por meios geométricos. Retas, círculos, cônicas e outras curvas surgem em seu trabalho, existindo mesmo uma classificação de curvas. Mas em toda essa obra não há o uso, tampouco a sistematização, de coordenadas retangulares. E conseqüentemente nenhuma formulação algébrica para a distância entre pontos ou mesmo ângulo entre retas. Mesmo diante de muitas limitações, essa obra de Descartes marca o início da Geometria Analítica.

Pierre de Fermat (1601-1655), um advogado e magistrado francês, interessado em problemas de Matemática e Física, ocupou-se, durante um período de sua vida em reconstruir uma obra perdida do matemático grego Apolônio de Perga (262-194 a.C.). Mas ao contrário de Descartes, Fermat buscava esboçar soluções de equações gerais. Considerava ainda um sistema de coordenadas arbitrário, mas tendo como eixo das abscissas uma reta. Começou com uma equação linear, e nesse sistema esboçou a solução da mesma. Analisou as equações quadráticas mais gerais, utilizando quando necessário translações ou rotações de eixos coordenados para tornar as equações mais simples. Observou ainda que algumas equações cúbicas ou quárticas poderiam ser resolvidas por meio de cônicas. Mas como Descartes não considerava coordenadas negativas, e como o filósofo francês, percebeu a possibilidade de aplicar tal método em dimensões maiores. O trabalho que sintetiza toda essa pesquisa, *Ad locos planos et solidos isagoge* circulou na forma de manuscritos, tendo sido publicada apenas após sua morte.

Então uma revolução sacudiu a Europa.

Gaspard Monge (1746-1818) um plebeu, oriundo de uma família humilde, destacou-se em uma escola de um ordem religiosa, recebendo um convite para frequentar a *École Militaire de Mézières*, e mais tarde tornando-se professor nessa instituição. Sua experiência em agrimensura, permitiu-lhe estabelecer um novo campo na Matemática, a Geometria Descritiva. Teve um papel ativo na Revolução Francesa (1789), e nos anos posteriores, ocupando o cargo de ministro da marinha, e posteriormente, sendo um dos artífices da criação da *École Polytechnique*. Nessa instituição, atuando como professor, ministrou um curso denominado Aplicação da análise à geometria. Esse curso era essencialmente uma introdução à geometria analítica e à geometria diferencial. Nesse sentido, como um livro texto que pudesse auxiliar seus alunos, Monge publica em 1795 a obra *Feuilles d'analyse*,

onde a geometria analítica em três dimensões toma forma. Além disso, em 1802 publica no *Journal de l'École Polytechnique* o artigo *Application d'algèbre à la géométrie*. Apesar de não ser tão profílico em publicações, Monge inspirou uma série de seus alunos a publicarem obras voltadas para a Geometria Analítica.

Tínhamos, nesse momento, por um lado uma geometria não euclidiana bem fundamentada, e por outro, uma geometria analítica igualmente firmada.

Coube então, em um certo sentido, ao matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) fazer com que essas duas geometrias conversassem. Sua formação acadêmica passa pelas Universidades de Berlin e Gottingen, tornando-se professor nessa última. Em 1854, ministrou a conferência *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen* na qual apresentava uma visão profunda e inédita sobre os próprios fundamentos da Geometria. Nela, Riemann defendia o conceito de que a Geometria não deveria tratar de pontos e retas, mas como coleções de n-uplas que poderiam ser combinadas por determinadas regras. Uma dessas regras, era aquela que permitiria determinar a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos. Na Geometria Euclidiana tal métrica é dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, onde x, y, z são as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer de \mathbb{R}^3 , e dx, dy e dz são variações dessas coordenadas. Para Riemann, entretanto, uma métrica geral deveria ser escrita como,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz \\ &+ g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz \\ &+ g_{31}dzdx + g_{32}dzdy + g_{33}dz^2, \end{aligned}$$

onde os coeficientes g_{ij} são funções de x, y e z . Dessa maneira, o espaço euclidiano é um caso particular no qual $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ e os demais g 's são nulos. Nesse mesmo trabalho Riemann desenvolveu o conceito de curvatura de uma superfície imersa nesse espaço, partindo da métrica do mesmo. Assim, tal geometria riemanniana era uma geometria não euclidiana, em um sentido muito mais amplo do que Lobachevsky e Bolyai imaginaram. Para esses, a grande preocupação se resumia em uma geometria em que o quinto postulado de Euclides não era satisfeito, enquanto que para Riemann, a questão era muito mais profunda e geral. E mais ainda, o estudo de espaços métricos curvos, sugerido por Riemann, foi o que fundamentou a teoria da relatividade geral.

Uma abordagem distinta

Diante desse levantamento histórico, nossa proposta é desenvolver um trabalho que contemple ambas as geometrias, a Euclidiana por um lado, e as não euclidianas por outro, mas de um ponto de vista da Geometria Analítica. Importante ressaltar que a inspiração inicial desse trabalho foram as isometrias no plano e no espaço, analisadas pela ótica da Geometria Analítica. Duas referências básicas e essenciais para esse trabalho, apesar de não aparecerem explicitamente foram os livros *Isometrias* de Elon Lages Lima (ver [7]) e *Linear Algebra Through Geometry* de Thomas Banchoff e John Wermer (ver [1]). O conceito inicial do trabalho era analisar reflexões por retas, rotações, translações tanto no plano euclidiano como no espaço, utilizando as ferramentas que a Geometria Analítica nos proporcionam. Entretanto uma pesquisa no banco de dissertações do PROFMAT nos fez mudar a orientação do mesmo. Isso porque encontramos uma vasta produção que abordava esses temas, particularmente as rotações no plano e no espaço.

Por sugestão do meu orientador, Prof. Dr. Jamil Viana Pereira, procuramos analisar as isometrias em diferentes geometrias, uma Euclidiana e outras duas não euclidianas. Assim a pesquisa por fontes que nos permitissem realizar tal trabalho nos levou ao livro *Euclidean and Non-Euclidean Geometry, An Analytic Approach*, de Patrick J. Ryan (1ª edição, Cambridge University Press, 1986), [10]. Esse foi nossa referência básica, mas não única ao longo dessa dissertação.

Para tal, começamos pela Geometria Euclidiana, abordando todos os aspectos vetoriais e algébricos que fundamentariam o trabalho. Vetores, norma, operações vetoriais, ângulo entre vetores, ortogonalidade de vetores, bases, coordenadas, equação de reta, perpendicularidade e paralelismo de retas, distância entre pontos são elementos discutidos inicialmente para que possamos avançar sobre as transformações no plano.

Superada essa etapa, definimos uma primeira transformação, a reflexão por uma reta, além de analisarmos as propriedades dessa aplicação. Em particular, essa reflexão define uma isometria? E como se comportariam as composições dessa transformação?

Em primeiro lugar, analisamos o caso em que duas reflexões eram compostas, de modo que as retas que definiam tais reflexões eram paralelas, e mostramos que nesse caso, tal composição gerava uma nova transformação denominada translação. Consideramos, então um feixe de paralelas, e analisamos a situação em que combinávamos três reflexões por três retas paralelas, obtendo nesse caso uma única reflexão, a qual era equivalente a composição dessas três reflexões.

Uma outra possibilidade combinava duas reflexões por retas que concorriam em um mesmo ponto P . Tal composição resultava em uma rotação ao redor desse ponto P . Obtivemos inclusive, uma forma matricial associada a essa transformação. E como no caso anterior, a composição de três reflexões dadas por três retas concorrentes em um mesmo ponto, resulta em uma única reflexão por uma quarta reta.

Finalmente, definimos uma nova transformação, a chamada reflexão com deslizamento definida como a composição de uma reflexão por uma reta composta com uma translação.

Encerramos esse primeiro capítulo com uma discussão envolvendo a construção de frisos e ornamentos a partir dessas quatro transformações no plano.

Ao discutirmos a geometria sobre a esfera unitária, entretanto, algumas diferenças devem ser observadas. Enquanto no plano, \mathbb{R}^2 , admitíamos a validade de todos os postulados de Euclides, inclusive o quinto postulado, a esfera unitária foi vista como um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Assim, em primeiro lugar, revisitamos todos os aspectos vetoriais e algébricos necessários a nosso desenvolvimento posterior em \mathbb{R}^3 , mas com alguns acréscimos. Como, por exemplo, o produto vetorial e o produto misto foram definidos, bem como as respectivas propriedades.

A geometria de incidência também necessitou de novos conceitos. A começar pelo de reta, nesse caso definida como um círculo máximo. Como até uma consequência dessa definição, o quinto postulado de Euclides não era satisfeito.

Partimos para as transformações na esfera unitária seguindo o mesmo roteiro daquele em \mathbb{R}^2 . Definimos a reflexão por uma reta, e mostramos que as demais transformações, a saber, translação, rotação e reflexão com deslizamento poderiam ser definidas, e obtidas a partir de composições de reflexões por retas escolhidas adequadamente. Mostramos que todas são isometrias da esfera unitária. Terminamos tal capítulo utilizando a expressão para a distância entre dois pontos sobre a esfera unitária, determinando a distância sobre o globo terrestre entre duas cidades, conhecidas suas coordenadas geográficas.

Finalmente, o último espaço a ser considerado foi o plano hiperbólico. Como no caso da esfera unitária, tal espaço foi definido como um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Em particular

como a folha superior de um hiperbolóide de duas folhas. Mas ao contrário de \mathbb{R}^2 e da esfera unitária, já no início uma grande diferença se apresentava. Para tal espaço, a forma quadrática associado ao mesmo não era positiva definida. Ainda foi possível mimetizar a mesma estrutura que nos capítulos anteriores, mas com algumas adaptações.

Nesse espaço os vetores poderiam ser classificados em três tipos, a saber, tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz. Ainda foi possível definir uma norma para tais vetores, a qual tinha as propriedades usuais de norma. E um produto vetorial particular teve que ser definido, mas que ainda preservava boa parte das propriedades usuais de um produto vetorial. Outra diferença significativa era o fato de que o quinto postulado de Euclides não era satisfeito, surgindo agora além do caso de retas paralelas, as denominadas retas ultra-paralelas.

Terminada essa discussão, passamos propriamente às transformações seguindo a mesma linha que nos capítulos anteriores. Ou seja, definida a reflexão por uma reta, mostramos que as demais, translação, rotação e reflexão com deslizamento eram obtidas por composições de reflexões por retas escolhidas adequadamente, e que constituíam isometrias nesse espaço.

Assim chegamos ao final desse trabalho, abordando diferentes geometrias, uma euclidiana e outras duas não euclidianas, sob o ponto de vista da Geometria Analítica, e determinando as suas respectivas isometrias.

1 Geometria no Plano

Introdução

Nosso ponto de partida é a Geometria Euclidiana. Mas não aquela forma clássica, axiomática como é usual. Vamos abordar os elementos necessários da Geometria Euclidiana de uma forma algébrica, utilizando o conceito de vetores. Para tanto, definimos vetores bem como operações entre os mesmos, tais como adição e diferença de vetores, ângulo entre vetores, produtos escalar e vetorial entre vetores, e suas respectivas propriedades. Em seguida, introduziremos no plano um sistema de coordenadas cartesiano, para então analisarmos uma reta no plano, agora munido de um sistema de coordenadas. Em seguida, vamos discutir as isometrias do plano, definindo e analisando as propriedades das seguintes transformações, a reflexão por uma reta, a rotação ao redor de um ponto, a translação por um vetor e a reflexão com deslizamento. Mais do que simplesmente analisar as características das mesmas, verificaremos que todas essas transformações estão relacionadas entre si. Finalmente, vamos definir ornamentos no plano e mostrar como podemos construir tais ornamentos a partir das isometrias previamente discutidas.

1.1 Preliminares algébricas

Nesse trabalho vamos utilizar a abordagem própria da Geometria Analítica. E, como é de praxe nessa abordagem, vamos introduzir um sistema de coordenadas no plano, de modo a associar a cada ponto do plano um par ordenado que o represente. Tal sistema de coordenadas nos permitirá aplicar propriedades similares às numéricas a objetos de natureza geométrica.

O grande conjunto que abordaremos é o chamado **plano**. Plano aqui visto como o conjunto em que seus elementos são denominados **pontos**, e seus subconjuntos são **retas**, ângulos, figuras, dentre outros.

Como nosso objetivo é tratar todos os objetos com os quais nos depararemos a partir de coordenadas, vamos introduzir alguns postulados, que nos auxiliarão nessa tarefa.

Antes de mais nada, vamos fixar como corpo numérico o conjunto dos números reais, \mathbb{R} , munido das operações soma, $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e produto, \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, bem como suas propriedades usuais.

Postulado 1.1. Dados dois pontos quaisquer no plano, associamos aos mesmos um único número real, maior ou igual a zero, tal que esse número é igual a zero se tais pontos forem coincidentes.

Definição 1.2. Tal número é denominado distância entre os pontos e denotaremos por $d(P, Q)$, onde P e Q são dois pontos quaisquer do plano.

Além disso, não importa a ordem na qual tomamos tais pontos.

Postulado 1.3. Dados os pontos P e Q no plano, temos que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Postulado 1.4. Existe uma correspondência entre os pontos de uma reta e o conjunto dos números reais, \mathbb{R} tal que,

- a) a cada ponto da reta está associado um único número real,
- b) cada número real corresponde a um único ponto da reta.

Definição 1.5. Sejam os pontos P , Q e R , todos pertencentes à uma mesma reta e distintos dois a dois. Se,

$$d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R),$$

diremos que o ponto Q está entre os pontos P e R , e denotaremos tal fato por $P - Q - R$.

É conveniente, dentro desse ponto de vista estabelecer algumas distinções.

Definição 1.6. Considere uma reta qualquer em um plano. Uma reta r diz-se uma **reta orientada** quando se fixa sobre ela um sentido de percurso, considerado positivo e indicado por uma seta. Com tal orientação, tal reta orientada é denominada eixo.

Na Figura 1.1 mostramos uma reta r qualquer no plano, bem como dois pontos A e B pertencentes a essa reta. Quando percorremos a reta r no sentido de A para B , determinamos uma reta orientada no mesmo sentido. Ou simplesmente dizemos que temos um eixo.

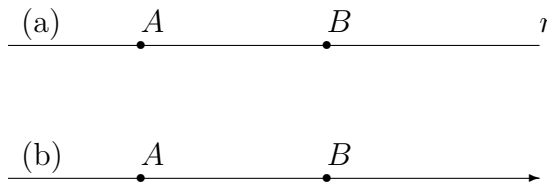


Figura 1.1: (a) Reta r . (b) Reta orientada.

Postulado 1.7. Dados os pontos quaisquer, O , P e Q de uma reta, tais que $Q - O - P$, podemos fixar um **sistema de coordenadas** sobre a reta, da seguinte maneira. Fixado o ponto O , fazemos a correspondência do mesmo ao número real 0 , sendo essa sua coordenada. Tal ponto recebe, a partir de agora a denominação de **origem**. Como o ponto P se situa à direita do ponto O , a coordenada de P será dada por $d(O, P)$. Por outro lado, como o ponto Q se situa à esquerda do ponto O , sua coordenada será dada por $-d(O, Q)$.

Definição 1.8. Sejam P e Q dois pontos distintos do plano. O **segmento de reta** \overline{PQ} é definido como,

$$\overline{PQ} = \{X, P - X - Q\} \cup \{P, Q\}.$$

Caso $P = Q$, temos que $\overline{PP} = \{P\}$, ou seja, um único ponto, P .

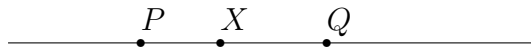


Figura 1.2: Segmento de reta \overline{PQ} .

Ou seja, \overline{PQ} consiste exatamente dos pontos P e Q , bem como todos os pontos entre P e Q .

Observação 1.9. À exemplo do que ocorre com uma reta, um segmento de reta \overline{PQ} pode ser percorrido em dois sentidos opostos. Se o mesmo for percorrido no sentido do ponto P para o ponto Q , denominaremos o ponto P de origem do segmento, enquanto que o ponto Q será denominado a extremidade desse mesmo segmento. Claro que pode-se percorrer esse mesmo segmento no sentido de Q para P . Nesse caso, o ponto Q será a origem do mesmo, ao passo que o ponto P será a extremidade desse segmento.

De posse dos conceitos de reta orientada e de segmento de reta, podemos definir um novo objeto, a saber, o segmento de reta orientado.

Definição 1.10. Sejam P e Q dois pontos pertencentes à uma mesma reta, r , do plano. Definimos o **segmento de reta orientado**, \vec{PQ} , como o segmento com origem em P e extremidade em Q . Caso P e Q sejam coincidentes, teremos o segmento orientado nulo, $\vec{PP} = 0$.

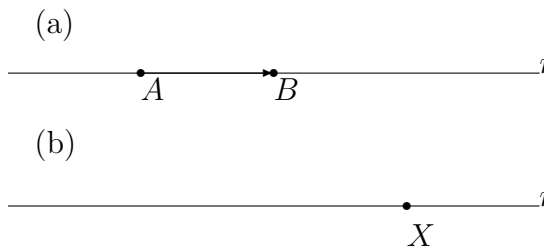


Figura 1.3: Segmento de reta orientado (a) \vec{AB} e segmento de reta nulo, (b) \vec{XX} .

Devemos notar que os segmentos orientados \vec{PQ} e \vec{QP} são distintos, pois o primeiro tem origem no ponto P e extremidade no ponto Q ; enquanto que o segundo tem origem em Q e extremidade em P .

Definição 1.11. O segmento orientado \vec{PQ} tem comprimento dado pelo comprimento do segmento de reta \overline{PQ} .

Definição 1.12. Considere os segmentos orientados não nulos, \vec{PQ} e \vec{RS} . Dizemos que \vec{PQ} e \vec{RS} têm a mesma direção, se as retas suportes \overleftrightarrow{PQ} e \overleftrightarrow{RS} , dos segmentos orientados \vec{PQ} e \vec{RS} , respectivamente, são paralelas. Caso contrário, os segmentos orientados têm diferentes direções.

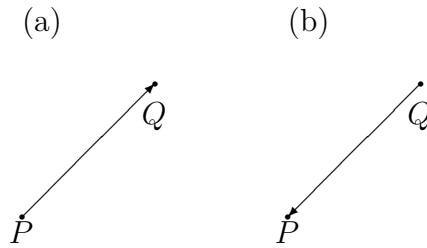


Figura 1.4: Segmentos orientados (a) \vec{PQ} e (b) \vec{QP} .

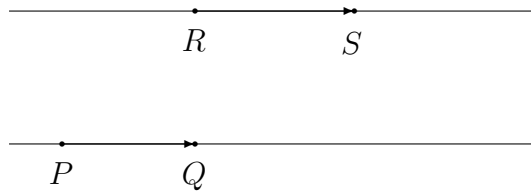


Figura 1.5: Segmentos orientados paralelos, \vec{PQ} e \vec{RS} .

Definição 1.13. Considere que os segmentos orientados \vec{PQ} e \vec{RS} têm mesma direção. Caso os segmentos de reta \overline{PR} e \overline{QS} não se intersectem, diremos que os segmentos orientados \vec{PQ} e \vec{RS} têm mesmo sentido. Caso contrário terão sentidos opostos.

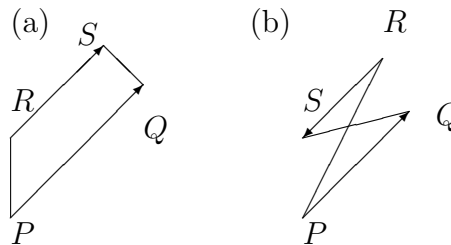


Figura 1.6: Segmentos orientados(a) de mesmo sentido, (b) sentidos opostos.

Definição 1.14. Dados os pontos P, Q, R, S do plano, os segmentos orientados \vec{PQ} e \vec{RS} são ditos **equipolentes** se,

- a) ambos são nulos,
- b) nenhum deles é nulo, e ambos têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Agora, munidos do conceito de segmentos equipolentes, podemos definir um novo elemento em nosso tratamento, o chamado vetor.

Definição 1.15. Um **vetor** é uma classe de equipolência de segmentos orientados do plano. Sejam P e Q dois pontos quaisquer do plano. Temos que o segmento orientado \overrightarrow{PQ} é um dos representantes de uma classe de equipolência, e o vetor correspondente será indicado por \overrightarrow{PQ} . O vetor nulo, denotado por $\vec{0}$, é o vetor cujo representante é um segmento orientado nulo.

Definição 1.16. Dado um vetor \overrightarrow{PQ} chamaremos de **norma** (ou módulo ou comprimento) desse vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes. Denotaremos por $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

Vamos denotar, a partir de agora, um vetor por uma letra latina minúscula. Assim, por exemplo, escreveremos $u = \overrightarrow{PQ}$. Como vetores podem ter diferentes direções no plano, podemos verificar essas diversas orientações, definindo um ângulo entre vetores.

Definição 1.17. Considere os vetores u, v , quaisquer no plano, ambos não nulos, bem como os pontos do plano, O, P e Q . Sejam os representantes da classe de equipolência de u e de v , $u' = \overrightarrow{OP}$ e $v' = \overrightarrow{OQ}$, respectivamente, ambos com origem em um mesmo ponto O . Temos,

- a) Se u' e v' têm mesma direção e mesmo sentido, diremos que o ângulo entre tais vetores tem medida igual a $\theta = 0^\circ$.
- b) Caso u' e v' tenham mesma direção e sentidos opostos, diremos que o ângulo entre tais vetores tem medida igual a $\theta = 180^\circ$.
- c) Caso u' e v' tenham diferentes direções, o ângulo entre tais vetores u e v , de medida θ , será dado pelo menor ângulo formado pelos segmentos \overline{OP} e \overline{OQ} .

Esses elementos básicos sobre vetores nortearão toda a discussão posterior. Entretanto, ao invés de considerarmos vetores em geral, bem como operações envolvendo tais elementos, introduziremos um sistema de coordenadas cartesiano que será muito útil.

Assim, definiremos um sistema de coordenadas em um plano qualquer. Para tanto, consideraremos, arbitrariamente, dois eixos perpendiculares, Ox e Oy , que concorrem no ponto O .

Denominemos esse plano sobre o qual construímos os eixos perpendiculares Ox e Oy por Π . Dado o ponto $P \in \Pi$, projetamos ortogonalmente tal ponto sobre o eixo Ox , obtendo o segmento $\overline{OP'}$, de medida igual a a . Também projetamos o mesmo ponto P , ortogonalmente, sobre o eixo Oy , obtendo o segmento $\overline{OP''}$, cuja medida é igual a b . Agora, associamos o ponto P ao par ordenado (a, b) (veja Figura 1.7).

Definição 1.18. A correspondência biunívoca $\phi : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$, que a cada ponto $P \in \Pi$ associa o par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ define um sistema de coordenadas sobre o plano Π .

Assim, dado o plano Π , cujos elementos são pontos, e o conjunto \mathbb{R}^2 , cujos elementos são pares ordenados de número reais, tal correspondência, ϕ , nos permitirá escrever $P = (a, b)$, sendo P um ponto no plano, cuja abscissa, nesse sistema de coordenadas será a , e cuja ordenada será b .

O plano Π dotado desse sistema de coordenadas será denominado, então plano cartesiano, e assim identificado com \mathbb{R}^2

Seja um ponto, $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, e considere ainda a origem do sistema de coordenadas, $O = (0, 0)$. Podemos construir um segmento de reta orientado, no sentido de O para P , como mostrado na Figura 1.8.

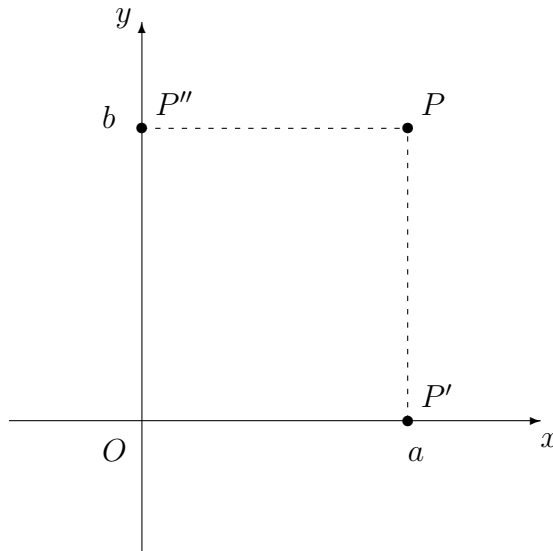


Figura 1.7: Coordenadas cartesianas do ponto P

Definição 1.19. Seja um ponto qualquer em \mathbb{R}^2 , $P = (x, y)$. O segmento de reta orientado, com origem em O e extremidade em P será denominado o vetor $v = (x, y)$ de \mathbb{R}^2 .

Observação 1.20. Para evitar qualquer ambiguidade, um ponto de \mathbb{R}^2 será denotado por uma letra latina maiúscula, enquanto que um vetor por uma letra latina minúscula.

Definido um vetor em \mathbb{R}^2 , devemos também possuir um critério para compararmos tais objetos.

Definição 1.21. Dados os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ de \mathbb{R}^2 , temos que $u = v$ se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Caso contrário, teremos que $u \neq v$.

Vamos definir duas operações com tais vetores.

Definição 1.22. Dados os vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ de \mathbb{R}^2 , definimos a soma dos vetores u e v por,

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Definição 1.23. Sejam $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ e o número real c , definimos a multiplicação do vetor u pelo escalar c , por,

$$c u = (c u_1, c u_2).$$

Observação 1.24. Temos aqui o chamado vetor nulo, ou seja o vetor com ambas as coordenadas nulas, denotado por $0 = (0, 0)$.

Teorema 1.25. *Sejam os vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos as seguintes propriedades para a soma de vetores e para a multiplicação de um vetor por escalar,*

a) $(u + v) + w = u + (v + w)$.

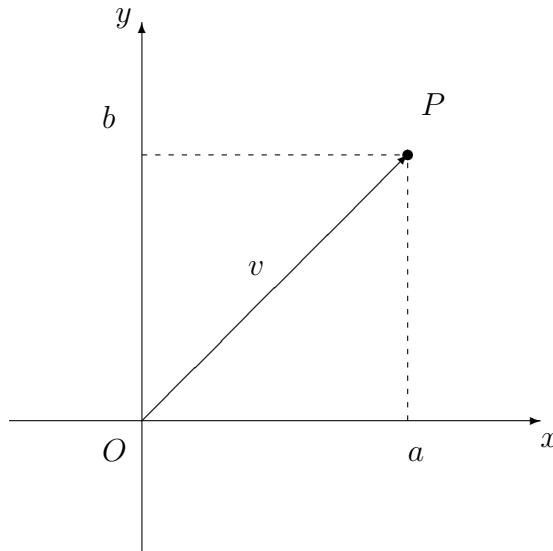


Figura 1.8: Vetor com origem em O e extremidade em P .

- b) $u + v = v + u$.
- c) $u + 0 = u$.
- d) Para u , existe o vetor $-u$ em \mathbb{R}^2 tal que $u + (-u) = 0$.
- e) $1 u = u$.
- f) $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$.
- g) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,
- h) $\alpha(\beta u) = (\alpha \beta)u$.

Para demonstrações ver [3].

Definição 1.26. Um espaço vetorial real é um conjunto V , não vazio, dotado de duas operações; soma,

$$+ : V \times V \rightarrow V,$$

e uma multiplicação por escalar,

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V,$$

tais que para quaisquer $u, v, w \in V$ e para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ as propriedades do Teorema 1.25 são satisfeitas.

Assim, vemos que \mathbb{R}^2 , juntamente com as operações de soma, Definição 1.22, e multiplicação por escalar, Definição 1.23, é um espaço vetorial.

Desde a introdução de um sistema de coordenadas cartesianas para o plano, consideramos um vetor com origem exclusivamente na origem. Podemos entretanto, a partir das operações envolvendo vetores, definir um vetor a partir de dois pontos quaisquer do plano. Para tanto observaremos os seguintes fatos.

Da Definição 1.23, vemos que dado um vetor $v = (v_1, v_2)$, podemos obter o vetor $-v$ tal que $-v = -1v = (-v_1, -v_2)$. Esse vetor $-v$, por sua vez, é tal que $v + (-v) = 0$. Assim, a partir dessa propriedade, podemos definir a seguinte operação.

Definição 1.27. Dados os pontos $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ do plano, temos a **diferença** $P - Q$ definida por,

$$P - Q = (q_1 - p_1, q_2 - p_2).$$

Agora consideremos o ponto $U = (u_1, u_2)$ de modo que temos o vetor $u = (u_1, u_2)$, com origem na origem do plano cartesiano. E sejam ainda os pontos $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$, dois pontos quaisquer do plano. Se para tais pontos tivermos que, $q_1 - p_1 = u_1$ e $q_2 - p_2 = u_2$, teremos determinando um outro representante do vetor u , mas agora com origem no ponto P e extremidade no ponto Q .

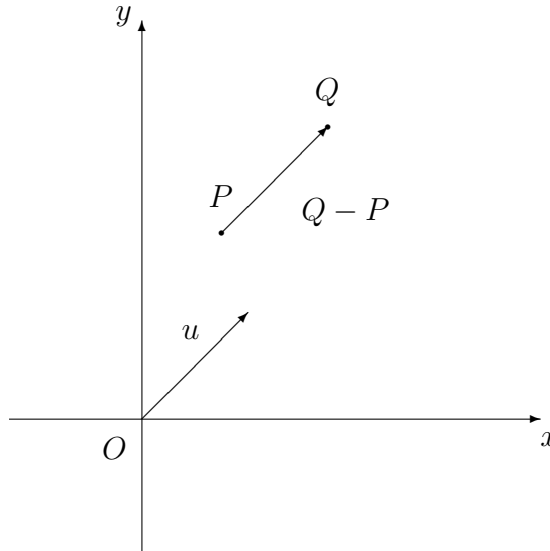


Figura 1.9: Vetores com origem na origem do plano cartesiano, u , e um outro representante com origem no ponto P

Como, nesse espaço vetorial, podemos somar vetores e multiplicar vetores por um escalar, podemos construir novos vetores a partir de um conjunto dado de vetores.

Definição 1.28. Seja V um espaço vetorial, e considere os vetores $v_1, \dots, v_n \in V$. Os vetores da forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, são elementos de V que denominamos uma **combinação linear** de v_1, \dots, v_n .

Observação 1.29. Considerando o espaço vetorial \mathbb{R}^2 , sejam os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Para um outro vetor qualquer desse espaço vetorial, $v = (x, y)$, vemos que,

$$v = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x e_1 + y e_2,$$

o que mostra que v pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores e_1 e e_2 .

Definição 1.30. Sejam V um espaço vetorial qualquer, e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente** se a equação,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0,$$

implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Caso seja possível escrever $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ com algum $\alpha_i \neq 0$, para algum i , dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente**.

Observação 1.31. Consideremos novamente os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Queremos mostrar que $\{e_1, e_2\}$ é um conjunto linearmente independente. Ou seja, queremos mostrar que $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, implicará em $\alpha = \beta = 0$. Da condição $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, temos,

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 &= (0, 0) \\ \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) &= (0, 0) \\ (\alpha, 0) + (0, \beta) &= (0, 0) \\ (\alpha, \beta) &= (0, 0) \end{aligned} \cdot$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Assim $\{e_1, e_2\}$ é linearmente independente. O mesmo não pode ser dito do conjunto $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$. De fato, vemos que, para que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma(e_1 + e_2) = 0$, podemos tomar $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = -1$, e portanto,

$$1e_1 + 1e_2 + (-1)(e_1 + e_2) = e_1 + e_2 - e_1 - e_2 = 0.$$

Assim encontramos α, β, γ não todos nulos tais que é satisfeita a condição $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. Logo o conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente dependente.

Definição 1.32. Seja V um espaço vetorial. Uma **base** para V é um conjunto finito de elementos de V , tal que esse conjunto é linearmente independente e gera o espaço vetorial V , ou seja, qualquer elemento de V pode ser escrito como combinação linear dos elementos desse conjunto.

Observação 1.33. Como já vimos anteriormente, o conjunto $\{e_1, e_2\}$ é um conjunto linearmente independente (Observação 1.31). Também vimos que todo vetor de \mathbb{R}^2 pode ser escrito como uma combinação linear desses dois vetores (Observação 1.29). Logo, o conjunto $\{e_1, e_2\}$ é uma base para \mathbb{R}^2 . E como tal conjunto tem dois elementos, dizemos que a dimensão desse espaço vetorial é 2.

Passemos a definir uma nova operação envolvendo vetores, o chamado produto escalar (ou produto interno) de dois vetores.

Definição 1.34. Seja V um espaço vetorial real. O **produto escalar** sobre V é uma aplicação que, dados dois vetores $u, v \in V$, associa um número real, que denotaremos por $\langle u, v \rangle$, aplicação essa que satisfaz as seguintes propriedades:

- a) $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo vetor $v \in V$, e a igualdade ocorre se, e somente se, $v = 0$.
- b) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para todos $u, v \in V$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- c) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todos $u, v, w \in V$.
- d) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todos $u, v \in V$.

Definição 1.35. Dados dois vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ no plano, definimos a aplicação $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como,

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Tal aplicação satisfaz a Definição 1.34 de espaço vetorial, como mostramos no seguinte teorema.

Teorema 1.36. *Sejam os vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos,*

- a) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.
- b) $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.
- c) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
- d) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Demonstração. a) Denotemos $u = (u_x, u_y)$, $v = (v_x, v_y)$ e $w = (w_x, w_y)$. Temos, então que,

$$\begin{aligned} \langle u, v + w \rangle &= \langle (u_x, u_y), (v_x + w_x, v_y + w_y) \rangle, \\ &= u_x(v_x + w_x) + u_y(v_y + w_y), \\ &= u_xv_x + u_xw_x + u_yv_y + u_yw_y, \\ &= (u_xv_x + u_yv_y) + (u_xw_x + u_yw_y), \\ &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

b) Dados $u = (u_x, u_y)$, $v = (v_x, v_y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos,

$$\begin{aligned} \langle u, \alpha v \rangle &= \langle (u_x, u_y), (\alpha v_x, \alpha v_y) \rangle, \\ &= \alpha u_xv_x + \alpha u_yv_y, \\ &= \alpha(u_xv_x + u_yv_y), \\ &= \alpha \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

c) Para $u = (u_x, u_y)$, $v = (v_x, v_y)$, vemos que,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle (u_x, u_y), (v_x, v_y) \rangle, \\ &= u_xv_x + u_yv_y, \\ &= v_xu_x + v_yu_y, \\ &= \langle v, u \rangle. \end{aligned}$$

d) Sendo $u = (u_x, u_y)$ com $u_x, u_y \in \mathbb{R}$, temos que $\langle u, u \rangle = u_x^2 + u_y^2$. Como $u_x, u_y \in \mathbb{R}$ temos que $u_x^2 \geq 0$ e $u_y^2 \geq 0$. Logo $\langle u, u \rangle = u_x^2 + u_y^2 \geq 0$. Se $u = (0, 0)$ temos $\langle u, u \rangle = u_x^2 + u_y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$. Por outro lado, se $\langle u, u \rangle = 0$, temos $u_x^2 + u_y^2 = 0$, o que implica que $u_x = u_y = 0$.

□

Definição 1.37. Seja u um vetor qualquer no plano. A **norma** de tal vetor, denotada por $\|u\|$, é definida por,

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Observação 1.38. Dado que o vetor $u \in \mathbb{R}^2$ tem coordenadas dadas por $u = (u_1, u_2)$, vemos que a norma desse vetor é dada por,

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Observação 1.39. Vimos anteriormente que, dado um vetor, $u = \overrightarrow{PQ}$ a sua norma é dada pelo comprimento de um dos representantes de sua classe de equipolência (Definição 1.16). Assim, existe um outro representante de u , com origem na origem do sistema de coordenadas, O , e extremidade em um ponto X , tal que \overrightarrow{OX} pertença à classe de equipolência de u . Esse representante, \overrightarrow{OX} , tem como coordenadas o par ordenado (x, y) . Como $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{OX}\|$, pois são dois representantes da mesma classe de equipolência, não há nenhuma incongruência entre a Definição 1.16 e a Definição 1.37 para a norma de vetores. Uma apela para o aspecto geométrico, enquanto que outra, para o algébrico.

Teorema 1.40. Para todos vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ e para todo escalar $c \in \mathbb{R}$ temos,

a) $\|u\| \geq 0$.

b) $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

c) $\|c u\| = |c| \|u\|$.

d) **Desigualdade de Cauchy-Schwarz.** Se u e v são vetores não nulos, temos que,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

sendo que a igualdade é verdadeira se, e somente se u e v são linearmente dependentes.

e) **Desigualdade triangular.** Dados os vetores u e v de \mathbb{R}^2 , temos,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

A igualdade é verdadeira se, e somente se, u e v são linearmente dependentes, isto é, $u = \alpha v$, com $\alpha \geq 0$.

Demonstração. a) Pelo item (d) do Teorema 1.36, temos $\langle u, u \rangle \geq 0$, conseqüentemente $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \geq 0$.

b) Pelo mesmo item (d) do Teorema 1.36, temos $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Vemos que, como $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, temos $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

c) $\|c v\| = \sqrt{\langle c v, c v \rangle} = \sqrt{c^2 \langle v, v \rangle} = |c| \|v\|$.

d) Considere a função real definida por,

$$f(t) = \|u + t v\|^2,$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Usando a parte a), observamos que a função f é não negativa para qualquer t , e que, f assume o valor 0 se, e somente se, $u = -tv$. Por outro lado, f é um polinômio de grau 2,

$$f(t) = \|u\|^2 + 2 t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2$$

e que sabemos não assumir valores negativos, quando,

$$(2 \langle u, v \rangle)^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2 < 0$$

o que nos leva imediatamente a conclusão que,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Além disso, f assume o valor 0 somente se $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|$. Logo $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|$ se, e somente se, u e v são proporcionais.

e) Pelo item anterior,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Se a igualdade é verdadeira, então devemos ter,

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\|.$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que u e v devem ser linearmente dependentes. Assim $u = \alpha v$ leva a,

$$\langle u, v \rangle = \langle \alpha v, v \rangle = \alpha \langle v, v \rangle = \alpha \|v\|^2$$

e,

$$\|u\| \|v\| = |\alpha| \|v\|^2.$$

Assim, α deve ser igual a $|\alpha|$, portanto, $\alpha \geq 0$.

□

Definição 1.41. Dados os pontos $P, Q \in \mathbb{R}^3$, a **distância** entre tais pontos, denotado por $d(P, Q)$ é definida por,

$$d(P, Q) = \|P - Q\|$$

Essa medida da distância entre dois pontos tem as propriedades usuais, como mostrado no seguinte teorema.

Teorema 1.42. *Sejam P, Q pontos de \mathbb{R}^2 . Temos,*

- a) $d(P, Q) \geq 0$.
- b) $d(P, Q) = 0$ se, e somente se, $P = Q$.
- c) $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- d) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$

Demonstração. **a)** Como $d(P, Q) = \|Q - P\|$ segue imediatamente do item (a) do Teorema 1.40 que $d(P, Q) \geq 0$.

b) Novamente, sendo $d(P, Q) = \|Q - P\|$, do item (b) do Teorema 1.40 temos que $\|Q - P\| = 0 \Leftrightarrow Q - P = 0$, e portanto, $P = Q$.

c) Vemos que $d(P, Q) = \|Q - P\| = \|(-1)(P - Q)\|$. Agora pelo item (c) do Teorema 1.40, temos que, $d(P, Q) = |-1| \|P - Q\| = \|P - Q\| = d(Q, P)$.

d) Sabemos que $d(P, Q) + d(Q, R) = \|Q - P\| + \|R - Q\|$. Agora pelo item (e) do Teorema 1.40, temos que,

$$\begin{aligned} d(P, Q) + d(Q, R) &= \|Q - P\| + \|R - Q\| \\ &\geq \|(Q - P) + (R - Q)\| \\ &\geq \|R - P\| = d(P, R). \end{aligned}$$

□

Antes de definirmos uma reta no plano, vamos caracterizar um outro conceito importante, o de direção no plano.

Definição 1.43. *Seja v um vetor não nulo do plano. O conjunto de todos os vetores linearmente dependentes a esse vetor v define uma direção no plano.*

Consideremos o conjunto de todos os vetores do plano linearmente dependentes a um dado vetor não nulo, v . Ou seja, o conjunto,

$$[v] = \{t v, t \in \mathbb{R}\}$$

Definição 1.44. *Sejam P um ponto qualquer do plano e v um vetor não nulo do plano. Então o conjunto,*

$$r = \{X, X - P \in [v]\}$$

é chamado a reta passando por P na direção $[v]$.

Exemplo 1.45. *Consideremos a reta que passa pelo ponto $P = (-2, -2)$ e o vetor não nulo $v = (1, -1)$. Então tal reta é dada pelo conjunto*

$$r = \{X, X - P \in [v]\}.$$

Assim, o ponto,

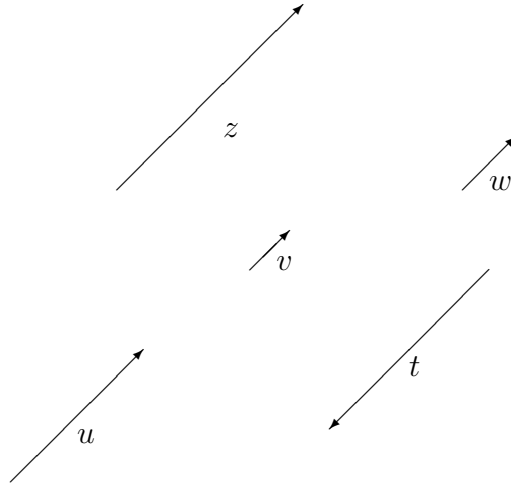


Figura 1.10: Direção no plano determinada pelo vetor v .

i) $X_1 = (2, -6)$ é tal que,

$$X_1 - P = (2, -6) - (-2, -2) = (2 - (-2), -6 - (-2)) = (4, -4) = -4(1, -1) = -4v.$$

Logo $X_1 - P \in [v]$, e portanto, $X_1 \in r$.

ii) $X_2 = (-3, 5)$, por sua vez,

$$X_2 - P = (-3, 5) - (-2, -2) = (-3 - (-2), 5 - (-2)) = (-1, 7) \notin [v],$$

e assim, $X_2 \notin r$.

Observação 1.46. A equação da reta, como descrita na Definição 1.44, pode ser escrita, de maneira abreviada, como,

$$r = P + [v].$$

Também podemos escrever a chamada equação paramétrica para a reta r no plano, por,

$$X = P + t v, t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Exemplo 1.47. Considere, por exemplo, a reta determinada pelo ponto $P = (1, -2)$ na direção do vetor $u = (2, 3)$. Temos que, a equação de tal reta é dada por,

$$X = P + \lambda u = (1, -2) + \lambda(2, 3) = (1 + 2 \cdot \lambda, -2 + 3 \cdot \lambda),$$

onde X é um outro ponto qualquer dessa mesma reta, e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uma característica importante de uma reta no plano é aquela que nos diz que dois pontos distintos no plano determinam uma única reta.

Teorema 1.48. *Sejam P e Q pontos distintos no plano. Então existe uma única reta contendo P e Q , a qual denotaremos por \overleftrightarrow{PQ} .*

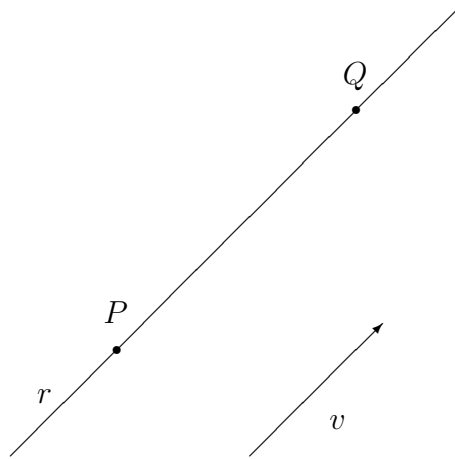


Figura 1.11: A reta \overleftrightarrow{PQ} e o vetor diretor v .

Demonstração. Seja v um vetor do plano não nulo. A reta $P+[v]$ passa por Q se e somente se $Q - P \in [v]$. Como P e Q são distintos, $[Q - P] \in [v]$. Logo, a reta $P + [Q - P]$ é a única reta requerida. \square

Dadas duas retas distintas no plano, teremos duas possibilidades para tais retas, ou têm pontos em comum, ou não existem pontos em comum.

Definição 1.49. Dadas as retas distintas do plano, r e s , temos que,

- a) se as retas r e s se intersectam, são denominadas retas concorrentes;
- b) se $r \cap s = \emptyset$, ou seja as retas não tem pontos em comum, tais retas, r e s , são denominadas paralelas, e representamos por $r \parallel s$.

Teorema 1.50. *Dadas duas retas distintas que se intersectam, seus vetores diretores são linearmente independentes.*

Demonstração. Sejam os pontos P, Q do plano, bem como os vetores u, v . As retas $r = P + [u]$ e $s = Q + [v]$ são distintas, por hipótese. Vamos admitir, por absurdo, que os respectivos vetores diretores, u e v são linearmente dependentes. Como, também por hipótese, r e s se intersectam, existem um ponto do plano X , tal que $X \in r$ e $X \in s$. Assim, como $P, X \in r$, o vetor $\overrightarrow{XP} \in [u]$. De modo similar, o vetor $\overrightarrow{XQ} \in [v]$. Mas como u e v são linearmente dependentes, também o serão os vetores \overrightarrow{XP} e \overrightarrow{XQ} . Claramente um absurdo, pois como $P \neq Q$, e, portanto, vetores \overrightarrow{XP} e \overrightarrow{XQ} são linearmente independentes. \square

Podemos agora enunciar um resultado importante sobre retas concorrentes.

Teorema 1.51. *Duas retas concorrentes intersectam-se em um único ponto.*

Demonstração. Sejam os pontos Q, R do plano bem como u e v dois vetores não nulos, linearmente independentes. Nessas condições, as retas $r = Q + [u]$ e $s = R + [v]$ são concorrentes. Vamos admitir, por absurdo que $r \cap s = \{P_1, P_2\}$, onde P_1, P_2 são dois

pontos distintos do plano. Como $P_1, P_2 \in r$ temos que $\overrightarrow{P_1, P_2}$ e u são vetores linearmente dependentes. Da mesma forma, como $P_1, P_2 \in s$ temos que $\overrightarrow{P_1, P_2}$ e v são vetores linearmente dependentes. E, portanto u e v são linearmente dependentes, o que contraria nossa hipótese inicial. Logo, duas retas concorrentes têm um único ponto em comum. \square

Corolário 1.52. *Se duas retas r e s têm dois pontos em comum, tais retas são coincidentes, ou seja, $r = s$.*

Definição 1.53. Dois vetores u e v do plano são ortogonais se,

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Observação 1.54. Dado o vetor $v = (v_1, v_2)$ do plano, o vetor $v^\perp = (-v_2, v_1)$ é tal que v e v^\perp são ortogonais. De fato, pela Definição 1.53, temos,

$$\langle v, v^\perp \rangle = v_1(-v_2) + v_2v_1 = -v_1v_2 + v_1v_2 = 0.$$

Definição 1.55. Um vetor com norma igual a 1 é chamado um vetor unitário, e um par de vetores $\{u, v\}$ unitários e ortogonais é denominado um par ortonormal.

Teorema 1.56. *Sejam u e v um par de vetores ortonormais do plano. Então para todo $w \in \mathbb{R}^2$ temos,*

$$w = \langle w, u \rangle u + \langle w, v \rangle v.$$

Demonstração. Como u e v são linearmente independentes, formam uma base para \mathbb{R}^2 , de acordo com a Definição 1.32. Assim, para qualquer $w \in \mathbb{R}^2$ existem únicas constantes α e β tais que $w = \alpha u + \beta v$. Usando as propriedades do produto escalar, obtemos,

$$\langle w, u \rangle = \langle \alpha u + \beta v, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \beta \langle u, v \rangle = \alpha,$$

e,

$$\langle w, v \rangle = \langle \alpha u + \beta v, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle v, v \rangle = \beta.$$

\square

Definição 1.57. Se r é uma reta com vetor diretor v , o vetor v^\perp é chamado um vetor normal a reta r . Quaisquer dois vetores normais a uma mesma reta são linearmente dependentes.

Vamos agora derivar a equação de uma reta em termos de seu vetor normal.

Teorema 1.58. *Sejam P um ponto qualquer do plano e $\{v, N\}$ um par de vetores ortonormais. Então,*

$$P + [v] = \{X, \langle X - P, N \rangle = 0\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.56 temos a identidade,

$$X - P = \langle X - P, v \rangle v + \langle X - P, N \rangle N,$$

para qualquer ponto $P \in \mathbb{R}^2$. Mostraremos que X localiza-se sobre a reta $P + [v]$ se e somente se $\langle X - P, N \rangle = 0$. Primeiro, suponha que $X = P + t v$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Então,

$$\langle X - P, N \rangle = \langle t v, N \rangle = t \langle v, N \rangle = 0$$

Reciprocamente, se $\langle X - P, N \rangle = 0$, a identidade se reduz a,

$$X - P = \langle X - P, v \rangle v$$

tal que,

$$X = P + \langle X - P, v \rangle v \in P + [v].$$

□

Corolário 1.59. *Se N é qualquer vetor não nulo, $\{X, \langle X - P, N \rangle = 0\}$ é a única reta passando por P com vetor normal N e, portanto, vetor diretor N^\perp .*

Demonstração. Observamos que $\langle X - P, N \rangle = 0$ se e somente se $\langle X - P, \frac{N}{\|N\|} \rangle = 0$, e, então, podemos aplicar o teorema 1.58. □

Definição 1.60. Duas retas r e s são perpendiculares se têm vetores diretores ortogonais. Denotamos por $r \perp s$.

Teorema 1.61 (Teorema de Pitágoras). *Sejam P, Q e R três pontos distintos de \mathbb{R}^2 . Então,*

$$\|R - P\|^2 = \|Q - P\|^2 + \|R - Q\|^2$$

se, e somente se, as retas \overleftrightarrow{QP} e \overleftrightarrow{RQ} são perpendiculares.

Demonstração. Sabemos do item (e) do Teorema 1.40 que, dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, vale,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Observamos que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ se, e somente se $\langle x, y \rangle = 0$. Agora fazemos $x = Q - P$ e $y = R - Q$. Vemos que $x + y = R - P$, e, portanto,

$$\|R - P\|^2 = \|Q - P\|^2 + \|R - Q\|^2,$$

se, e somente se, $\langle Q - P, R - Q \rangle = 0$. Isso implica que os vetores \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{QR} são perpendiculares. □

Teorema 1.62. *Sejam duas retas r e s tais que $r \perp s$. Então r e s têm um único ponto em comum.*

Demonstração. Seja a reta r dada por $P + [v]$ e a reta s por $Q + [w]$. Podemos assumir que v e w são unitários, de modo que $\{v, w\}$ é um conjunto ortonormal. Escrevemos,

$$P - Q = \langle P - Q, v \rangle v + \langle P - Q, w \rangle w,$$

e, assim,

$$P - \langle P - Q, v \rangle v = Q + \langle P - Q, w \rangle w$$

Tomando,

$$X = P - \langle P - Q, v \rangle v = Q + \langle P - Q, w \rangle w$$

vemos que $X \in r$ e $X \in s$. X é o único ponto em comum, pois se existisse um segundo ponto em comum, pelo Corolário 1.52, as retas deveriam coincidir. □

Teorema 1.63. *Seja um ponto $X \in \mathbb{R}^2$ e r uma reta qualquer. Então existe uma única reta s passando por X e perpendicular a r . Além disso,*

- a) *A reta s é dada por $X + [N]$, onde N é um vetor unitário normal a r .*
- b) *r e s intersectam-se no ponto $Q = X - \langle X - P, N \rangle N$, onde P é qualquer ponto de r .*
- c) $d(X, Q) = \|\langle X - P, N \rangle\|$

Demonstração. Seja a reta r dada por $r = P + [v]$, onde P é um ponto de r e v um vetor unitário, diretor da reta r . Sabemos que existe vetor unitário, N , normal à reta r , dado pela condição $\langle v, N \rangle = 0$. Agora, considerando o ponto X , bem como o vetor N , podemos construir a reta s , passando por X e com vetor diretor N . Como os vetores v e N são ortogonais, as retas r e s são perpendiculares, $r \perp s$. Tal reta é dada por $s = X + [N]$. Do Teorema 1.62, sabemos que tais retas r e s , por serem perpendiculares, têm um único ponto em comum, digamos Q . A reta s , então fica determinada unicamente pelos pontos X e Q . Da demonstração do mesmo Teorema 1.62, sabemos que tal ponto de intersecção se dá em $Q = X - \langle X - P, N \rangle N$. Finalmente, como a distância entre dois pontos é dada pela Definição 1.41, e sabendo que $Q - X = -\langle X - P, N \rangle N$, temos que,

$$d(X, Q) = |Q - X| = |-\langle X - P, N \rangle N| = |\langle X - P, N \rangle|.$$

□

Definição 1.64. No enunciado do Teorema 1.63, o único ponto de intersecção das retas perpendiculares, r e s , será denominado o pé da perpendicular à reta r , passando pelo ponto X .

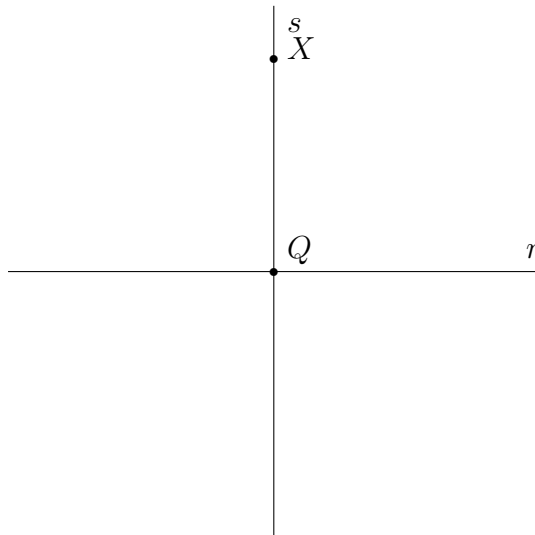


Figura 1.12: Ponto Q , pé da perpendicular.

Teorema 1.65. *Seja r uma reta qualquer, e considere X um ponto que não pertence a r . Seja Q o pé da perpendicular a r por X . Então, Q é o ponto da reta r mais próximo de X .*

Demonstração. Seja P um ponto qualquer de r . Como $\overline{PQ} \perp \overline{QX}$, o Teorema de Pitágoras nos fornece,

$$\|X - P\|^2 = \|X - Q\|^2 + \|Q - P\|^2.$$

Assim, $\|X - P\|^2 \geq \|X - Q\|^2$ com a igualdade verdadeira se, e somente se, $P = Q$. \square

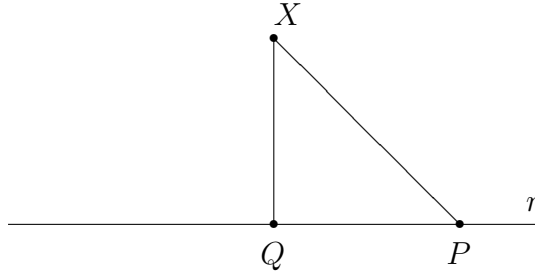


Figura 1.13: Ponto Q é o ponto da reta r mais próximo de X .

Definição 1.66. Sejam r uma reta qualquer e X um ponto qualquer do plano. Seja o ponto Q o pé da perpendicular à reta r , passando pelo ponto X . O número real $d(X, Q)$ é chamado a distância do ponto X à reta r , e será denotado por $d(X, r)$.

Como uma consequência dos Teoremas 1.62 e 1.65 e da Definição 1.66, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.67. Sejam r uma reta com vetor unitário normal N , e X um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 . Se P é um ponto qualquer de r , então,

$$d(X, r) = |\langle X - P, N \rangle|.$$

Definimos anteriormente retas paralelas, como retas distintas que não têm pontos em comum. Podemos agora, introduzir um critério para o paralelismo de retas.

Teorema 1.68. Duas retas distintas r e s são paralelas se, e somente se, têm a mesma direção.

Demonstração. Vamos supor que r e s têm diferentes direções, $[u]$ e $[v]$, respectivamente. Seja P um ponto qualquer de r , e Q um ponto qualquer de s . Como u e v não são linearmente dependentes, existem números reais α e β tais que $P - Q = \alpha u + \beta v$. Isso significa que $P - \alpha u = Q + \beta v$. Seja $X = P - \alpha u = Q + \beta v$. Então X é um ponto comum de r e de s .

Reciprocamente, vamos supor, por absurdo, que as retas r e s têm um ponto em comum, digamos Q . Podemos então escrever $r = Q + [u]$ e $s = Q + [v]$ para dois vetores não nulos. Como as retas r e s são distintas, temos que $[u] \neq [v]$. \square

Teorema 1.69. *Sejam r, s e t retas do plano. Temos,*

- a) *Se $r \parallel s$ e $s \parallel t$, então ou $r = t$ ou $r \parallel t$.*
- b) *Se $r \parallel s$ e $s \perp t$, então $r \perp t$.*
- c) *Se $r \perp t$ e $s \perp t$, então ou $r \parallel s$ ou $r = s$.*

Demonstração. Seja o vetor não nulo v , diretor da reta r . Pela definição 1.53 e pela Observação 1.54, existe um vetor v^\perp , tal que $\langle v, v^\perp \rangle = 0$. Considere ainda os pontos do plano P, Q e R , tais que $P \in r, Q \in s$ e $R \in t$.

- a) Se $r \parallel s$ então podemos escrever, para as retas r e s , que $r = P + [v]$ e que $s = Q + [v]$, e ainda $r \cap s = \emptyset$. Como também temos que $s \parallel t$, podemos escrever que $s = Q + [v]$ e $t = R + [v]$, sendo que $s \cap t = \emptyset$. Assim, das condições, $r = P + [v]$ e $t = R + [v]$, notamos que as retas r e t têm, ambas, a mesma direção. Logo se $r \cap t = \emptyset$ teremos $r \parallel t$. Caso contrário, $r = t$.
- b) Sendo $r \parallel s$, escrevemos que $r = P + [v]$ e que $s = Q + [v]$, e ainda $r \cap s = \emptyset$. Como agora $s \perp t$, temos que $s = Q + [v]$ e $t = R + [v^\perp]$. Assim, como $r = P + [v]$ e $t = R + [v^\perp]$, concluímos que $r \perp t$.
- c) Se $r \perp t$ escrevemos, para as retas r e t que $r = P + [v]$ e $t = R + [v^\perp]$. Sendo $s \perp t$, temos para as retas s e t que $t = R + [v^\perp]$ e $s = Q + [v^\perp]^\perp$. Logo, vemos que $r = P + [v]$ e que $s = Q + [v]$. Ou seja, as retas r e s têm a mesma direção, e portanto se $r \cap s = \emptyset$, então $r \parallel s$. Caso contrário, teremos $r = s$.

□

Teorema 1.70. *Por um ponto não pertencente a uma reta qualquer, teremos uma única reta paralela à reta dada.*

Demonstração. Seja r uma reta qualquer e P um ponto qualquer do plano, tal que $P \notin r$. O Teorema 1.63 nos garante que existe uma única reta s , passando por P e tal que $s \perp r$. Pelo mesmo Teorema 1.63, temos que pelo ponto P existe uma única reta, t , perpendicular à reta s , ou seja $t \perp s$. Como $r \perp s$ e $t \perp s$, pelo Teorema 1.69, temos que ou $r \parallel t$ ou $r = t$. Como $P \in t$ e $P \notin r$, temos que $r \parallel t$. Como essa reta t é a única perpendicular à reta s , e, conseqüentemente, é paralela à reta r , pelos Teorema 1.63 e 1.69, concluímos que a reta t é a única paralela à reta r passando pelo ponto P . □

1.2 Transformações em \mathbb{R}^2

Nessa seção trataremos das chamadas transformações do plano. Aplicações que, dado um ponto qualquer do plano, devolvem um outro também no plano. Discutiremos ao longo dessa parte, algumas transformações particulares, as chamadas isometrias. Mas antes disso, caracterizemos tais transformações.

Definição 1.71. Uma transformação em \mathbb{R}^2 é definida por uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada ponto $P \in \mathbb{R}^2$ associa um ponto $P' = T(P) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.72. Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por,

$$T(x, y) = (x, -y).$$

Temos,

- i) $P_1 = (4, 4) \Rightarrow T(P_1) = (4, -4),$
- ii) $P_2 = (2, 0) \Rightarrow T(P_2) = (2, 0),$
- iii) $P_3 = (0, -2) \Rightarrow T(P_3) = (0, 2),$
- iv) $P_4 = (-2, -3) \Rightarrow T(P_4) = (-2, 3).$

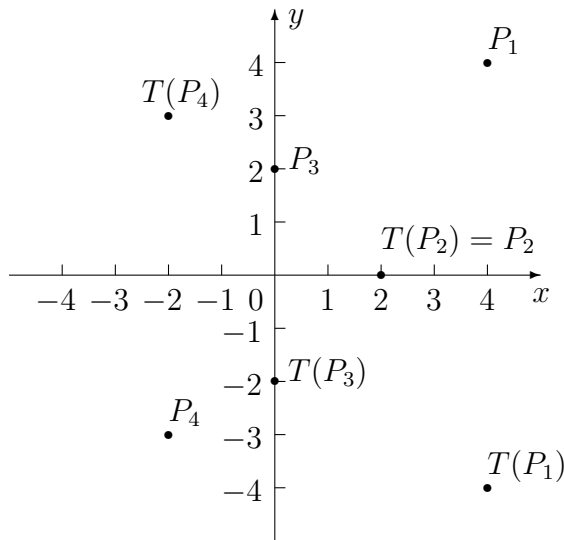


Figura 1.14: Transformação T .

Definimos, então, a primeira dessas transformações no plano que, de fato, nos interessam.

Definição 1.73. Para uma reta r , a **reflexão por uma reta r** é uma aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 definida por,

$$\Omega_r X = X - 2 \langle X - P, N \rangle N,$$

onde N é um vetor unitário normal a r e P é um ponto qualquer de r .

Exemplo 1.74. Considere a reta r que passa pelo ponto $P = (-2, 3)$ e tem como vetor diretor $v = (1, 1)$. Um vetor unitário normal a essa reta é dado por $N = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Considere ainda o ponto $X = (2, 10)$. Vamos determinar a reflexão desse ponto pela reta r . Inicialmente,

$$X - P = (2, 10) - (-2, 3) = (4, 7).$$

Agora,

$$\begin{aligned} \langle X - P, N \rangle &= \left\langle (4, 7), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\Omega_r X &= X - 2 \langle X - P, N \rangle N \\ &= (2, 10) - 2 \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= (2, 10) + (3, -3) \\ &= (5, 7)\end{aligned}$$

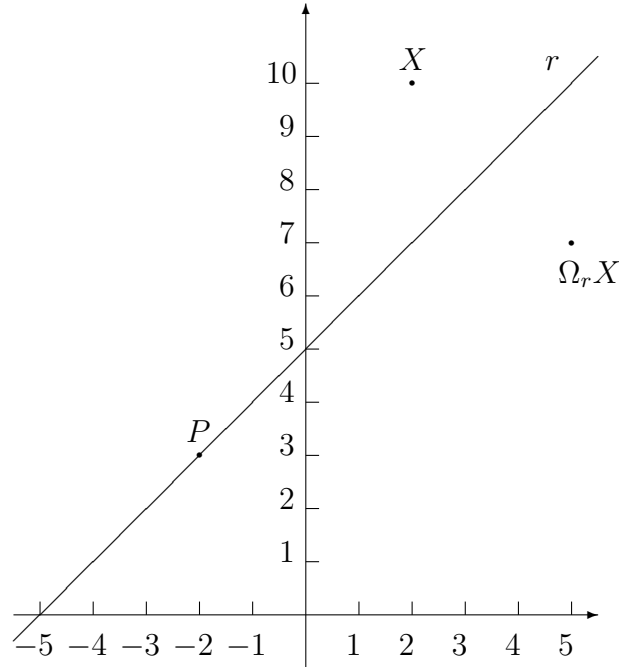


Figura 1.15: Reflexão do ponto P pela reta r .

Essa aplicação, reflexão por uma reta, tem as seguintes propriedades.

Teorema 1.75. *Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^2$ e r uma reta do plano. Temos,*

- a) $d(\Omega_r X, \Omega_r Y) = d(X, Y)$.
- b) $\Omega_r \Omega_r X = X$
- c) $\Omega_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma bijeção.

Demonstração. a) Como,

$$\Omega_r X - \Omega_r Y = X - Y - 2 \langle X - Y, N \rangle N$$

temos,

$$\begin{aligned}\|\Omega_r X - \Omega_r Y\|^2 &= \|X - Y\|^2 - 4(\langle X - Y, N \rangle)^2 + 4(\langle X - Y, N \rangle)^2 \langle N, N \rangle \\ &= \|X - Y\|^2 - 4(\langle X - Y, N \rangle)^2 + 4(\langle X - Y, N \rangle)^2 \\ &= \|X - Y\|^2,\end{aligned}$$

pois $\langle N, N \rangle = 1$.

b) Temos que $\Omega_r X = 2\lambda N$, onde $\lambda = \langle X - P, N \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} \Omega_r \Omega_r X &= X - 2\lambda N - 2 \langle X - 2\lambda N - P, N \rangle N \\ &= X - 2\lambda N - 2 \langle X - P, N \rangle N + 4\lambda \langle N, N \rangle N \\ &= X - 2\lambda N - 2\lambda N + 4\lambda N \\ &= X \end{aligned}$$

c) Primeiro observamos que Ω_r é injetiva. Se $\Omega_r X = \Omega_r Y$, então, $\Omega_r \Omega_r X = \Omega_r \Omega_r Y$ e, pelo item (b), $X = Y$. Para mostrar que Ω_r é sobrejetiva, seja $Y \in \mathbb{R}^2$ um ponto qualquer do plano. Seja $X = \Omega_r Y$. Então $\Omega_r X = Y$, de modo que Y está na imagem de Ω_r . □

Definição 1.76. Uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **isometria** se para quaisquer $X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$d(T(X), T(Y)) = d(X, Y).$$

As isometrias têm algumas propriedades importantes que discutiremos agora em detalhes.

Teorema 1.77. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria. T é injetiva.*

Demonstração. De fato, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathbb{R}^2$ temos,

$$T(X) = T(Y) \Rightarrow d(X, Y) = d(T(X), T(Y)) = 0 \Rightarrow X = Y.$$

□

Teorema 1.78. *Sejam os pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria. Sejam ainda $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$ pontos de \mathbb{R}^2 . Se $X \in \overline{PQ}$, então $X' = T(X)$ é tal que $X' \in \overline{P'Q'}$.*

Demonstração. De fato, se $X \in \overline{PQ}$, então, $d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$. Como T é uma isometria temos,

$$d(T(P), T(X)) + d(T(X), T(Q)) = d(T(P), T(Q)),$$

e,

$$d(P', X') + d(X', Q') = d(P', Q').$$

Portanto, $X' \in \overline{P'Q'}$. □

Ou seja, uma isometria leva pontos colineares em pontos colineares. Outra característica, isometrias transformam retas em retas.

Teorema 1.79. *Sejam r uma reta no plano e T uma isometria no plano. O conjunto $s = T(r)$ é uma reta no plano.*

Demonstração. Considere os pontos $P, Q \in r$ com $P \neq Q$. Seja ainda a reta s que passa pelos pontos $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$. Finalmente, considere um ponto $X \in r$ qualquer. Devemos considerar três casos, $X \in \overline{PQ}$, $P \in \overline{XQ}$ e $Q \in \overline{PX}$. Se $X \in \overline{PQ}$, pelo Teorema 1.78 segue que $X' = T(X) \in \overline{P'Q'}$, e, portanto, $X' \in s$. Pela mesma razão, nos casos em que $P \in \overline{XQ}$ e $Q \in \overline{PX}$, podemos concluir que $T(r) \subset s$.

Por outro lado, considere um ponto qualquer $X' \in s$. Se $X' = P'$ ou $X' = Q'$, então $s \in T(r)$. Caso contrário, temos três casos a considerar, $X' \in \overline{P'Q'}$, $P' \in \overline{X'Q'}$ e $Q' \in \overline{P'X'}$. Supondo que $X' \in \overline{P'Q'}$ e ainda que $X \in r \cap \overline{PQ}$, tal que $d(X, Q) = d(X', Q')$. Pelo Teorema 1.78, obtemos que $T(X) \in \overline{P'Q'}$. Como T é uma isometria, temos,

$$d(T(X), Q') = d(T(X), T(Q)) = d(X', Q')$$

e, assim, $X' = T(X)$. Logo, $X' \in T(r)$, ou seja, $s \subset T(r)$. Portanto, como $T(r) \subset s$ e $s \subset T(r)$, concluímos que $s = T(r)$. \square

E também, isometrias preservam o paralelismo de retas.

Teorema 1.80. *Seja T uma isometria em \mathbb{R}^2 . Sejam r, s retas distintas e paralelas em \mathbb{R}^2 . Então, $r' = T(r)$ e $s' = T(s)$ são retas paralelas.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.79, $r' = T(r)$ e $s' = T(s)$ são retas no plano. Considere, por absurdo que existe um ponto $Y \in r' \cap s'$. Nesse caso teríamos $Y = T(X_1) = T(X_2)$, com $X_1 \in r$ e $X_2 \in s$. Como uma isometria é injetiva (Teorema 1.77), isso implicaria que $X_1 = X_2$, um absurdo, pois as retas r e s são retas paralelas e distintas. Logo as retas r' e s' são paralelas. \square

Teorema 1.81. *Toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preserva ângulos.*

Demonstração. Considere os pontos $O, X, Y \in \mathbb{R}^2$, bem como os pontos de \mathbb{R}^2 dados por $O' = T(O)$, $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$. Seja o ângulo \widehat{XOY} com vértice em O . Como T é uma isometria, temos,

i) $d(X, Y) = d(T(X), T(Y)) = d(X', Y')$,

ii) $d(O, X) = d(T(O), T(X)) = d(O', X')$,

iii) $d(O, Y) = d(T(O), T(Y)) = d(O', Y')$.

Vemos então que os triângulos XOY e $X'O'Y'$ são congruentes, e, assim, os ângulos \widehat{XOY} e $\widehat{X'O'Y'}$ são congruentes. \square

Como consequência imediata desse teorema, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.82. *Toda isometria transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Finalmente, toda isometria é bijetora.

Teorema 1.83. *Toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma bijeção, e sua inversa, $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, é também uma isometria.*

Demonstração. Já sabemos do Teorema 1.77 que uma isometria é injetiva. Assim basta provar que uma isometria é sobrejetiva.

Vamos demonstrar, agora, que T é sobrejetora. Para tanto, seja $Y \in \mathbb{R}^2$ um ponto qualquer do plano. Vamos mostrar que existe um ponto $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = Y$. Consideremos, então uma reta qualquer em \mathbb{R}^2 . A imagem de r por T é uma reta $r' = T(r) \in \mathbb{R}^2$ como garante o Teorema 1.79. Se $Y \in r'$, então, por definição, existe um ponto $X \in r$ tal que $T(X) = Y$. Caso contrário, seja a reta s' , perpendicular à reta r' e passando pelo ponto Y . Seja o ponto X' o ponto de intersecção das retas r' e s' . Como $X' \in r'$, existe $Z \in r$ tal que $T(Z) = X'$. Seja s a reta perpendicular à reta r e passando pelo ponto Z . A imagem de s pela isometria T é perpendicular à reta r' pelo Corolário 1.82, e contém o ponto X' . Logo $T(s) = s'$. Como $Y \in s'$, então existe $X \in s$ tal que $T(X) = Y$. Portanto T é sobrejetora, e assim, T é uma bijeção.

Para demonstrar que a inversa é uma isometria, consideremos $X', Y' \in \mathbb{R}^2$. Existem $X, Y \in \mathbb{R}^2$ tais que $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, pois T é uma bijeção, e de modo que $X = T^{-1}(X')$ e $Y = T^{-1}(Y')$. Então,

$$\begin{aligned} d(X', Y') &= d(T(X), T(Y)) \\ &= d(X, Y) \\ &= d(T^{-1}(X'), T^{-1}(Y')). \end{aligned}$$

Logo $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria. □

Teorema 1.84. *Sejam $T, S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrias. Então,*

- a) $T \circ S$ também é uma isometria.
- b) A aplicação identidade, $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é isometria.

Demonstração. a) Dados $X, Y \in \mathbb{R}^2$ temos,

$$\begin{aligned} d(TS(X), TS(Y)) &= d(T(S(X)), T(S(Y))) \\ &= d(S(X), S(Y)) \\ &= d(X, Y) \end{aligned}$$

b) Dados $X, Y \in \mathbb{R}^2$ temos,

$$d(I(X), I(Y)) = d(X, Y)$$

pois $I(X) = X$ para qualquer $X \in \mathbb{R}^2$. □

Diante desses resultados, vemos que a reflexão por uma reta, como dada pela Definição 1.73 define uma isometria, em vista do item (a) do Teorema 1.75. Sabendo ainda que a composição de isometrias também define uma isometria, consideraremos a partir de agora diferentes composições de reflexões por retas.

Vamos considerar, inicialmente, a composição de duas reflexões cujos eixos são paralelos. Sejam r e s duas retas paralelas, e escolhamos um ponto arbitrário P em r , e um

outro ponto, Q como o pé da perpendicular à reta s e que passa por P . Assim, se N é um vetor normal unitário à reta r , e conseqüentemente à s , obtemos,

$$\begin{aligned}\Omega_r\Omega_s X &= \Omega_s X - 2\langle\Omega_s X - P, N\rangle N \\ &= x - 2\langle X - Q, N\rangle N - 2\langle X - P, N\rangle N + 4\langle X - Q, N\rangle\langle N, N\rangle N \\ &= X + 2\langle P - Q, N\rangle N\end{aligned}$$

e, finalmente obtemos,

$$\Omega_r\Omega_s X = X + 2(P - Q). \quad (1.2)$$

Ou seja, a composição $\Omega_r\Omega_s$ aplicada ao ponto X do plano, resulta em um novo ponto do plano, deslocado pelo vetor $2(P - Q)$. É claro que, ao escolhermos duas outras retas paralelas, r' e s' distintas das retas r e s , o deslocamento sofrido pelo ponto será diferente desse último, pois as retas r' e s' terão um espaçamento diferente. De qualquer forma, podemos então definir uma nova operação no plano, a chamada translação.

Definição 1.85. Seja t uma reta qualquer e considere as retas r e s perpendiculares a t . A transformação $\Omega_r\Omega_s$ é chamada a **translação ao longo da reta t** . Se $r \neq s$, a translação é chamada não trivial.

Observação 1.86. A Definição 1.85, de translação, a única condição imposta às retas r e s é que ambas sejam perpendiculares à reta t . Assim duas diferentes retas r' e s' , $r' \neq r$ e $s' \neq s$, mas tais que $r' \perp t$ e $s' \perp t$, teremos uma nova translação ao longo da reta t .

Exemplo 1.87. Consideremos a reta $t = (0, 0) + \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, sejam as retas $r = (0, 0) + \mu\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $s = (1, 1) + \nu\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\nu \in \mathbb{R}$. Temos que as retas r e s são ambas perpendiculares à reta t . Seja ainda $X = (x, y)$ um ponto qualquer do plano.

A reflexão pela reta s é dada por,

$$\Omega_s X = X - 2\langle X - P, N\rangle N,$$

onde $P = (1, 1) \in s$ e $N_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, o vetor unitário normal à reta s . Temos então que,

$$\begin{aligned}\Omega_s X &= X - 2\langle X - P, N\rangle N \\ &= (x, y) - 2\langle(x - 1, y - 1), N\rangle N \\ &= (x, y) - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 2)N \\ &= (-y + 2, -x + 2)\end{aligned}$$

Agora, para a reflexão pela reta r , consideramos o ponto $P = (0, 0) \in R$ e o vetor unitário normal à reta r , dado por $N = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Assim,

$$\begin{aligned}\Omega_r\Omega_s X &= \Omega_s X - 2\langle\Omega_s X - P, N\rangle N \\ &= (2 - y, 2 - x) - 2\langle(2 - y, 2 - x), N\rangle N \\ &= (2 - y, 2 - x) - \frac{2}{\sqrt{2}}(4 - x - y)N \\ &= (2 - y, 2 - x) - (4 - x - y, 4 - x - y) \\ &= (x - 2, y - 2)\end{aligned}$$

Finalmente, considerando os pontos $X = (x, y)$ e $Y = \Omega_r\Omega_s X = (x - 2, y - 2)$, notamos que o vetor \overrightarrow{XY} é tal que,

$$\overrightarrow{XY} = (x - 2 - x, y - 2 - y) = (-2, -2) \in [v]$$

onde $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é o vetor diretor da reta t . Assim, de fato, $\Omega_r\Omega_s X$ é uma translação ao longo da reta t .

Teorema 1.88. *Seja T uma translação ao longo de t . Se t' é qualquer reta paralela a t , então T é também uma translação ao longo de t' .*

Demonstração. Pela Definição 1.85, uma translação ao longo da reta t é definida como a composição das reflexões pelas retas m e n , sendo $m \perp t$ e $n \perp t$. Ou seja $T = \Omega_m \Omega_n$. Agora considere uma outra reta $t' \neq t$ tal que $t' \parallel t$. Pelo Teorema 1.69, as retas m e n são tais que $m \perp t'$ e $n \perp t'$. Ou seja, $T = \Omega_m \Omega_n$ também é uma translação ao longo da reta t' . □

Teorema 1.89. *Seja T uma translação não trivial ao longo da reta r . Então r tem um vetor diretor v tal que,*

$$T(X) = X + v, \tag{1.3}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, se v é qualquer vetor não nulo e r é qualquer reta com vetor diretor v , então a transformação definida pela equação 1.3 é uma translação ao longo de r .

Demonstração. Seja N um vetor unitário diretor para r . Seja P um ponto arbitrário de \mathbb{R}^2 . Sejam α e β duas retas distintas e perpendiculares a r (Ver Figura 1.16). Sejam a e b os únicos números reais tais que $P + aN \in \alpha$ e $P + bN \in \beta$ ¹. Temos, então,

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta X = X + 2(P + aN - P - bN) = X + 2(a - b)N$$

Se $T \neq I$, devemos ter $a \neq b$, de modo que $2(a - b)N$ é o vetor diretor requerido. Reciprocamente, suponha que para cada número real $\lambda = 2(a - b)$ definimos a aplicação T_λ por,

$$T_\lambda X = X + \lambda N.$$

Se a e b são dois reais quaisquer tais que $\lambda = 2(a - b)$, construímos $\alpha = P + aN + [N^\perp]$ e $\beta = P + bN + [N^\perp]$ e observamos que $T_\lambda = \Omega_\alpha \Omega_\beta$. □

Definição 1.90. O conjunto de todas as retas perpendiculares a uma dada reta r de \mathbb{R}^2 é denominado um feixe de retas perpendiculares à reta r . A reta r é a perpendicular comum para o feixe.

Teorema 1.91. *Dadas as translações T_u e T_v , temos que $T_u T_v = T_{u+v}$.*

Demonstração. A partir do Teorema 1.89, podemos escrever que,

$$\begin{aligned} T_u T_v X &= T_u(X + \mu N) \\ &= X + \mu N + \lambda N \\ &= X + (\mu + \lambda)N \\ &= T_{\mu+\lambda} X \end{aligned}$$

Analogamente, $T_\mu T_\lambda = T_{\lambda+\mu}$. □

Corolário 1.92. *Dada a translação T_λ temos que $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$.*

¹Como estamos escrevendo as equações das retas na forma paramétrica, segundo a Observação 1.46, existem tais números reais a e b de modo que os pontos em questão situam-se sobre as respectivas retas.

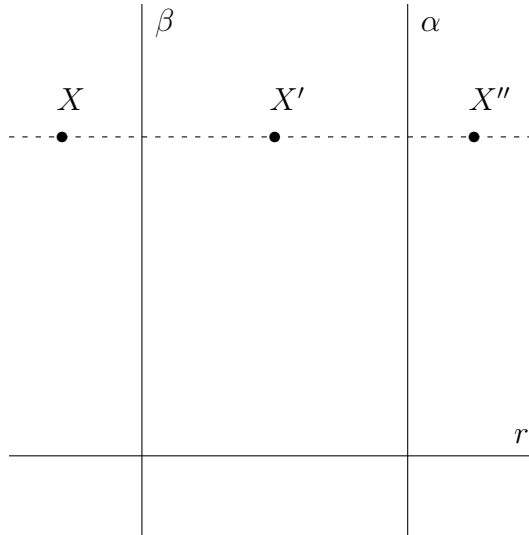


Figura 1.16: $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ é a translação ao longo de r por uma soma igual a duas vezes $d(\alpha, \beta)$.

Demonstração. Se nas condições do Teorema 1.91, fizermos $\lambda = 0$, temos que $T_0 = I$, e como $T_\lambda T_{-\lambda} = T_0 = I$, obtemos que $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$. \square

Teorema 1.93. *Sejam r, s, t três retas de um feixe \mathcal{P} com uma perpendicular comum, m . Nessas condições, existe uma única quarta reta, u desse feixe tal que,*

$$\Omega_r\Omega_s\Omega_t = \Omega_u.$$

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 1.89, a composição de duas reflexões pelas retas s e t poderia ser escrita na forma,

$$\Omega_s\Omega_t X = X + 2(\mu - \nu)N,$$

onde N é um vetor unitário diretor para a reta m . Temos,

$$\Omega_s\Omega_t X = T_{2(\mu-\nu)}X,$$

onde,

$$T_{2(\mu-\nu)}X = X + 2(\mu - \nu)N.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Omega_r\Omega_s\Omega_t X &= \Omega_r T_{2(\mu-\nu)} X \\ &= \Omega_r (X + 2(\mu - \nu)N) \\ &= \Omega_r (X + \omega N) \end{aligned}$$

onde $\omega = 2(\mu - \nu)$. Seguindo, temos,

$$\begin{aligned} \Omega_r\Omega_s\Omega_t &= X + \omega N - 2\langle X + \omega N - P - \lambda N, N \rangle N \\ &= X - 2\langle X - P, N \rangle N + (2\lambda - \mu)N \\ &= X - 2\langle X - P, N \rangle N + 2(\lambda - \mu + \nu)N \\ &= X - 2\langle X - (P + (\lambda - \mu + \nu)N), N \rangle N \end{aligned}$$

Essa última expressão nos fornece a reflexão pela reta $u \in \mathcal{P}$, passando pelo ponto $P + \delta N$, onde $\delta = \lambda - \mu + \nu$. Assim, a composição de três reflexões de retas em \mathcal{P} é uma quarta reflexão ou uma reta do mesmo feixe \mathcal{P} . \square

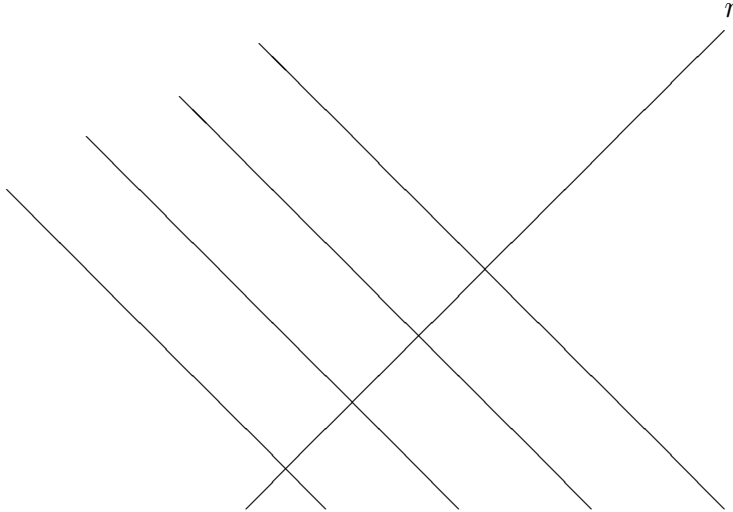


Figura 1.17: Feixe de retas paralelas

Teorema 1.94. *Considere as retas r e s , ambas perpendiculares à reta t . Pela definição (1.85) a composição $T = \Omega_r \Omega_s$ define uma translação. Sejam m e n retas também perpendiculares à reta t . Nesse caso, existem e são únicas as retas m' e n' tais que,*

$$T = \Omega_m \Omega_{m'} = \Omega_{n'} \Omega_n.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema 1.93 as retas m , r e s , obtemos uma única reta m' tal que $\Omega_m \Omega_r \Omega_s = \Omega_{m'}$. Aplicando-se Ω_m a ambos os lados dessa última igualdade, obtemos $\Omega_r \Omega_s = \Omega_m \Omega_{m'}$. A reta n' é obtida de forma análoga. \square

Vejamos, agora, o que ocorre com a composição de duas reflexões dadas por retas que se intersectam. Mas antes, vamos demonstrar um resultado que será importante no decorrer da discussão.

Lema 1.95. *Sejam a e b números reais tais que $a^2 + b^2 = 1$. Então existe um único $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $a = \cos \theta$ e $b = \sin \theta$.*

Demonstração. Seja $u = \arccos a$, ou em outras palavras $a = \cos u$. Temos que,

$$\begin{aligned} \sin^2 u + \cos^2 u &= 1 \\ \sin^2 u &= 1 - \cos^2 u \\ \sin u &= \sqrt{1 - \cos^2 u} \\ |b| &= \sqrt{1 - a^2} \end{aligned}$$

Observamos que $u \in [0, \pi]$. Se $b > 0$ escolhemos $u = \theta$. De outra maneira, $u = -\theta$. Então $\cos \theta = a$ e $\sin \theta = b$. A unicidade vem do seguinte fato. Qualquer solução θ pertence ao intervalo $(-\pi, 0)$, se $b < 0$ ou ao intervalo $(0, \pi)$, se $b > 0$. Como a função cosseno é injetiva em ambos os intervalos, somente um valor de θ é possível. Quando $b = 0$, θ deve ser ou $-\pi$ ou 0 . Um desses é válido para $a = -1$, enquanto que o outro o é para $a = 1$. \square

Seja $m = P + [v]$ uma reta com vetor diretor unitário v , passando pelo ponto $P = (x_1, y_1)$. Agora, de acordo com o Lema 1.95, existe um único número real $\alpha \in (-\pi, \pi]$ tal que,

$$v = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha).$$

O vetor unitário normal pode ser escrito como,

$$N = (-\text{sen } \alpha, \cos \alpha).$$

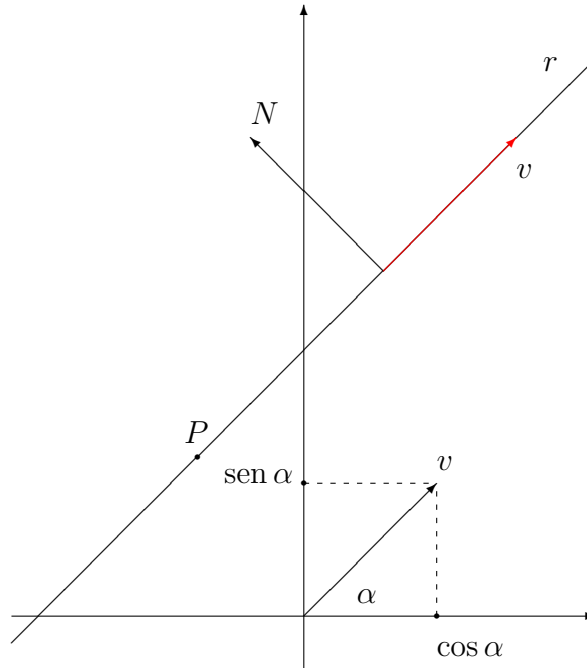


Figura 1.18: Reta r que tem $v = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$ por vetor diretor.

Agora observamos que,

$$\Omega_r X = X - 2 \langle X - P, N \rangle N,$$

$$\Omega_r X - P = X - P - 2 \langle X - P, N \rangle N.$$

Seja agora r_0 uma reta pela origem e com direção $[v]$. Então,

$$\Omega_{r_0} X = X - 2 \langle X, N \rangle N.$$

Logo,

$$\Omega_r X - P = \Omega_{r_0}(X - P),$$

ou,

$$\Omega_r X = \Omega_{r_0}(X - P) + P.$$

Em outras palavras,

$$\Omega_r = T_P \Omega_{r_0} T_{-P}, \tag{1.4}$$

onde T_P , é a translação pelo vetor P , cuja origem coincide com a origem do plano cartesiano.

Observação 1.96. Para qualquer $X \in \mathbb{R}^2$, notamos que,

$$\langle X, N \rangle = -x_1 \operatorname{sen} \alpha + y_1 \operatorname{cos} \alpha.$$

Assim, escrevendo vetores como matrizes coluna, obtemos,

$$\begin{aligned} \Omega_{r_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 2(-x_1 \operatorname{sen} \alpha + y_1 \operatorname{cos} \alpha) \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos} \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)x_1 + (2 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)y_1 \\ (2 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)x_1 + (1 - 2 \operatorname{cos}^2 \alpha)y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\operatorname{cos} 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, vemos que a aplicação $\Omega_{r_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear. Denotaremos a matriz associada a tal aplicação por R_α . Tal matriz representa a reflexão pela reta passando pela origem cujo vetor diretor é $(\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$,

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\operatorname{cos} 2\alpha \end{bmatrix}$$

Vamos observar a álgebra subjacente a tais matrizes. Para tanto, consideraremos outra reta s passando pelo ponto P e a reta associada, passando pela origem s_0 . Se $(\operatorname{cos} \beta, \operatorname{sen} \beta)$ é o vetor diretor de s , temos que,

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\operatorname{cos} 2\beta \end{bmatrix}$$

Agora, para o produto $R_\alpha R_\beta$, vemos que,

$$R_\alpha R_\beta = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2(\alpha - \beta) & \operatorname{sen} 2(\alpha - \beta) \\ \operatorname{sen} 2(\alpha - \beta) & -\operatorname{cos} 2(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

Como essa aplicação linear leva em conta a base canônica, associando e_1 a $v = (\operatorname{cos} \theta, \operatorname{sen} \theta)$ e e_2 a $v^\perp = (-\operatorname{sen} \theta, \operatorname{cos} \theta)$, é razoável pensarmos em R_θ como uma rotação por um ângulo de medida θ (radianos) no sentido anti-horário, onde $\theta = 2 \cdot (\alpha - \beta)$.

Assim, com essa interpretação da composição de duas reflexões por retas concorrentes em um ponto P , podemos definir a rotação ao redor de um ponto P .

Definição 1.97. Se r e s são retas passando pelo ponto P , a aplicação $\Omega_r \Omega_s$ é chamada de **rotação ao redor de P** . Considerando que os vetores diretores unitários dessas retas são, respectivamente $(\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ e $(\operatorname{cos} \beta, \operatorname{sen} \beta)$, o ângulo de rotação, no sentido anti-horário terá medida $\theta = 2 \cdot (\alpha - \beta)$. O caso particular em que $r = s$, temos a aplicação identidade, não importando qual seja o ponto P . Se a rotação não é a identidade, é chamada de não trivial. Se $r \perp s$, a rotação $\Omega_r \Omega_s$ é chamada meia-volta, ou ainda que o ângulo de rotação tem medida igual a $\pi \operatorname{rad}$.

Exemplo 1.98. Consideremos as retas $s : (0, 0) + [u]$, onde $u = (1, 1)$ e $r = (0, 0) + [v]$ com $v = (1, 2)$. Ambas as retas passam pela origem do plano cartesiano. A composição $\Omega_r \Omega_s$ nos dará a rotação ao redor da origem. Para isso consideremos primeiro a reflexão

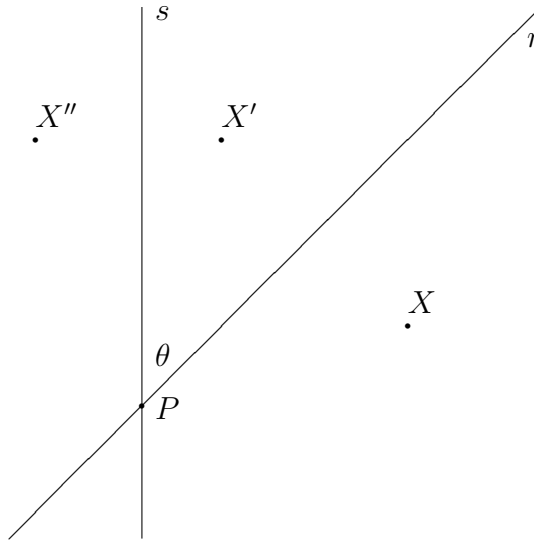


Figura 1.19: $\Omega_r \Omega_s$ é a rotação ao redor de P pelo ângulo 2θ .

pela reta s . Assim sejam $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano, e seja $N_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ um vetor unitário normal à reta s . Temos que,

$$\begin{aligned} \Omega_s X &= X - 2 \langle X - P, N_s \rangle N_s \\ &= (x, y) - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (x, y), (-1, 1) \rangle N_s \\ &= (x, y) - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + y) N_s \\ &= (x, y) - (-x + y) (-1, 1) \\ &= (y, x) \end{aligned}$$

Agora, para a reta r , temos que um vetor unitário normal à mesma é dado por $N_r = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$. Considerando ainda o ponto $P = (0, 0)$, obtemos,

$$\begin{aligned} \Omega_r \Omega_s &= \Omega_r(y, x) \\ &= (y, x) - 2 \langle (y, x), N_r \rangle N_r \\ &= (y, x) - \frac{2}{\sqrt{5}} (-2y + x) N_r \\ &= (y, x) - \frac{2}{5} (-2y + x) (-2, 1) \\ &= \frac{1}{5} (4x - 3y, 3x + 4y) \end{aligned}$$

Teorema 1.99. *Sejam r, s e t três retas passando por P . Então existe uma única reta, u , passando por P tal que,*

$$\Omega_r \Omega_s \Omega_t = \Omega_u$$

Demonstração. Lembrando que T_P define a translação por um vetor P , temos,

$$\Omega_r = T_P R_\theta T_{-P},$$

$$\Omega_s = T_P R_\phi T_{-P},$$

e,

$$\Omega_t = T_P R_\psi T_{-P},$$

Temos, então,

$$\begin{aligned}
 \Omega_r \Omega_s \Omega_t &= (T_P R_\theta T_{-P}) (T_P R_\phi T_{-P}) (T_P R_\psi T_{-P}) \\
 &= T_P R_\theta (T_{-P} T_P) R_\phi (T_{-P} T_P) R_\psi T_{-P} \\
 &= T_P R_\theta R_\phi R_\psi T_{-P} \\
 &= T_P R_\theta R_{\phi+\psi} T_{-P} \\
 &= T_P R_{\theta-\phi+\psi} T_{-P}.
 \end{aligned}$$

Portanto, devemos escolher u tal que,

$$\Omega_u = T_P R_{\theta-\phi+\psi} T_{-P}.$$

Em outras palavras, u é a reta passando por P e com vetor diretor

$$(\cos(\theta - \phi + \psi), \text{sen}(\theta - \phi + \psi)).$$

□

Teorema 1.100. *Seja $T = \Omega_r \Omega_s$ uma rotação qualquer, e considere t uma reta qualquer passando pelo ponto P . Então existem e são únicas, as retas m e m' , passando por P , tais que,*

$$T = \Omega_t \Omega_m = \Omega_{m'} \Omega_t$$

Demonstração. Dadas as retas r , s e t , todas passando pelo ponto P , o Teorema 1.99 nos garante que existe uma única reta m , passando pelo ponto P , tal que $\Omega_t \Omega_r \Omega_s = \Omega_m$. Agora fazemos,

$$\begin{aligned}
 \Omega_t \Omega_r \Omega_s &= \Omega_m \\
 \Omega_t (\Omega_t \Omega_r \Omega_s) &= \Omega_t \Omega_m \\
 (\Omega_t \Omega_t) (\Omega_r \Omega_s) &= \Omega_t \Omega_m \\
 \Omega_r \Omega_s &= \Omega_t \Omega_m
 \end{aligned}$$

De maneira idêntica, dadas as retas r , s e t , passando pelo ponto P , o Teorema 1.99, nos diz que existe a reta m' tal que $\Omega_r \Omega_s \Omega_t = \Omega_{m'}$. Agora,

$$\begin{aligned}
 \Omega_r \Omega_s \Omega_t &= \Omega_{m'} \\
 (\Omega_t \Omega_r \Omega_s) \Omega_t &= \Omega_{m'} \Omega_t \\
 (\Omega_r \Omega_s) (\Omega_t \Omega_t) &= \Omega_{m'} \Omega_t \\
 \Omega_r \Omega_s &= \Omega_{m'} \Omega_t
 \end{aligned}$$

□

Definição 1.101. Seja a reta $r = P + [v]$, onde P é um ponto qualquer do plano e v é um vetor não nulo de \mathbb{R}^2 . A **reflexão com deslizamento dada pela reta r e pelo vetor v** é definida por

$$T_v \Omega_r X = X - 2 \langle X - P, N \rangle N + v$$

onde N é o vetor normal unitário, $\frac{v^\perp}{\|v\|}$, e a reta r é denominada eixo da reflexão com deslizamento.

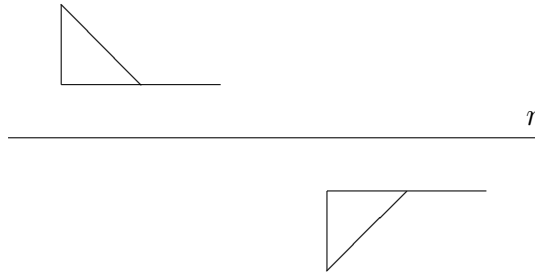


Figura 1.20: Reflexão com deslizamento.

Exemplo 1.102. Considere a reta $r = (0, 0) + [v]$, onde $v = (1, 1)$. Seja ainda o ponto qualquer do plano cartesiano, $X = (x, y)$. Um vetor unitário normal á reta r é dado por $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$. Desse modo, a reflexão com deslizamento tendo como eixo a reta r será dada por $T_v\omega_r X = X - 2\langle X - P, N \rangle N + v$. Considerando o ponto da reta $P = (0, 0)$, temos,

$$\begin{aligned} T_v\omega_r X &= X - 2\langle X - P, N \rangle N + v \\ &= (x, y) - \frac{2}{\sqrt{2}} \langle (x, y), (-1, 1) \rangle N + (1, 1) \\ &= (x, y) - \frac{2}{\sqrt{2}}(-x + y)N + v \\ &= (x, y) - (-x + y)(-1, 1) + (1, 1) \\ &= (y + 1, x + 1) \end{aligned}$$

Se considerarmos os pontos $A = (2, 0)$, $B = (4, 0)$ e $C = (4, 2)$, teremos $T_v\omega_r A = (3, 1)$, $T_v\omega_r B = (5, 1)$ e $T_v\omega_r C = (5, 3)$.

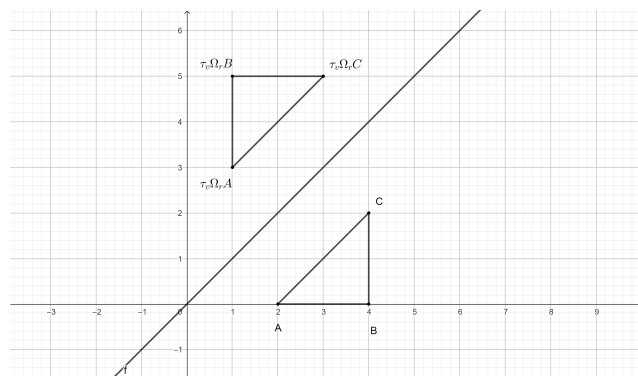


Figura 1.21: Reflexão com deslizamento para os pontos A , B e C .

Observação 1.103. Observamos que a translação, T_v , comuta com a reflexão, Ω_r . De

fato,

$$\begin{aligned}\Omega_r T_v X &= X = v - 2 \langle X + v - P, N \rangle N \\ &= X + v - 2 \langle X - P, N \rangle M\end{aligned}$$

pois $\langle v, N \rangle = 0$. Portanto, não há qualquer ambiguidade na definição da reflexão com deslizamento.

Observação 1.104. Caso $T_v = I$, a reflexão com deslizamento é chamada de trivial.

Teorema 1.105. *Sejam r , s e t três retas distintas que não são, duas a duas, concorrentes ou paralelas. Nessas condições, $\Omega_r \Omega_s \Omega_t$ é uma reflexão com deslizamento não trivial.*

Demonstração. Vamos assumir que r e s intersectam-se no ponto P . Seja u uma reta perpendicular à reta t . Seja Q o ponto de intersecção das retas u e t . Pelo Teorema 1.100, existe uma reta m passando por P tal que,

$$\Omega_r \Omega_s = \Omega_m \Omega_u \Rightarrow \Omega_r \Omega_s \Omega_t = \Omega_m \Omega_u \Omega_t$$

Seja, agora, a reta n passando por Q e perpendicular à reta m , e seja n' a reta passando por Q perpendicular à reta n . Agora,

$$\Omega_u \Omega_t = \Omega_{n'} \Omega_n$$

é uma rotação de π rad ao redor de Q . Como consequência,

$$\Omega_r \Omega_s \Omega_t = \Omega_m \Omega_{n'} \Omega_n.$$

Observamos que $\Omega_m \Omega_{n'}$ é uma translação ao longo de n . Como Q não pertence a m , n' e m são retas distintas. Assim $\Omega_r \Omega_s \Omega_t$ é uma reflexão com deslizamento não trivial. Se r não intersecta s mas, s intersecta t , aplicamos o mesmo argumento a $\Omega_t \Omega_s \Omega_r = (\Omega_r \Omega_s \Omega_t)^{-1}$. Se deduzimos que $\Omega_t \Omega_s \Omega_r = T_v \Omega_u$, então $\Omega_r \Omega_s \Omega_t = (T_v \Omega_u)^{-1} = \Omega_u T_{-v} = T_{-v} \Omega_u$ a qual também é uma reflexão com deslizamento não trivial.

□

Teorema 1.106. *Sejam T uma reflexão com deslizamento, e Ω_r qualquer reflexão. Então $\Omega_r T$ ou é uma translação ou uma rotação.*

Demonstração. Seja m o eixo da reflexão com deslizamento T . Existem dois casos a serem considerados. São eles,

Caso 1. m intersecta r . Seja P o ponto de intersecção. Pelo Teorema 1.93, podemos escrever $T = \Omega_m \Omega_\alpha \Omega_\beta$, onde α passa pelo ponto P e α e β são perpendiculares, ambos a m . Então, $\Omega_r T = \Omega_r \Omega_m \Omega_\alpha \Omega_\beta$. Mas r, m, α passam pelo ponto P . Assim, existe uma reta γ passando por P tal que $\Omega_r T = \Omega_\gamma \Omega_\beta$. Logo $\Omega_r T$ ou é uma translação ou uma rotação.

Caso 2. $m \parallel r$. Nesse caso, temos $\Omega_r T = \Omega_r \Omega_m \Omega_\alpha \Omega_\beta = \Omega_r \Omega_\alpha \Omega_m \Omega_\beta$. Observando que $\alpha \perp r$ e $\beta \perp m$, vemos que $\Omega_r \Omega_\alpha$ e $\Omega_m \Omega_\beta$ são meia-voltas distintas. Logo $\Omega_r T$ é uma translação.

□

Como vimos, a partir dos resultados anteriores, cada uma das operações de translação, rotação e translação com deslizamento são obtidas a partir de uma composição de reflexões por retas adequadas. Assim, podemos afirmar que as mesmas são as isometrias do plano.

Teorema 1.107. *As operações de reflexão por uma reta (Definição 1.73), translação (Definição 1.85), rotação (Definição 1.97) e translação com deslizamento (Definição 1.105) são isometrias do plano.*

Demonstração. A reflexão por uma reta é uma isometria com já demonstrado no item (a) do Teorema 1.75. Como as demais operações são obtidas como composições de reflexões por retas, escolhidas adequadamente, o Teorema 1.84 garante que enquanto composições de isometrias, as mesmas também são isometrias. \square

1.3 Frisos e ornamentos

O conceito de simetria perpassa diversos campos do conhecimento humano. Está presente nas Artes, de modo geral, mas pode ser um critério taxonômico em Biologia, por exemplo.

Em Matemática, e, em particular na Geometria, não seria diferente. Considere, por exemplo, um triângulo equilátero como mostrado na Figura 1.22.

Consideremos o triângulo equilátero ABC , e também a reta que passa pelo vértice C do triângulo e é perpendicular ao lado \overline{AB} , como mostrado na Figura 1.22 (a). Agora, definimos uma operação de reflexão por tal reta, de modo que essa transformação é tal que,

i) $\Omega_r A = B$,

ii) $\Omega_r B = A$,

iii) $\Omega_r C = C$.

Notamos que o triângulo obtido é visualmente idêntico ao original.

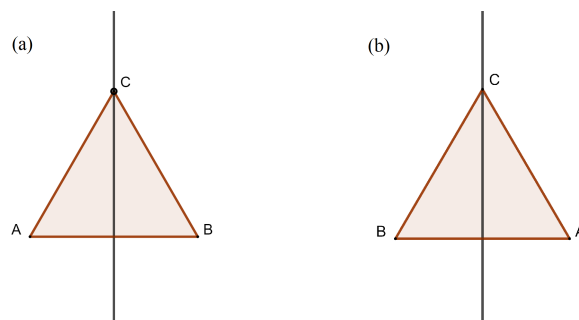


Figura 1.22: Reflexão por uma reta passando pelo centro do triângulo

Finalmente, consideremos, o triângulo equilátero ABC , bem como seu baricentro, o ponto O , como mostrado na Figura 1.23 (a). Consideremos uma rotação por um ângulo de medida $\frac{2\pi}{3}$ rad, ao redor do ponto O e no sentido anti-horário. A figura resultante é mostrada na Figura 1.23 (b). Vemos que,

- i) $\Omega_r A = B$,
- ii) $\Omega_r B = C$,
- iii) $\Omega_r C = A$.

E como no caso anterior, obtivemos um triângulo visualmente idêntico ao original. Em todos esses dois casos, partindo-se de uma mesma figura, no caso um triângulo equilátero, obtivemos, após a aplicação dessas transformações, uma mesma figura e idêntica à figura original. Vamos, no que se segue, explorar figuras planas que, quando submetidas a uma, ou uma combinação das transformações discutidas anteriormente, deixam tal figura invariante.

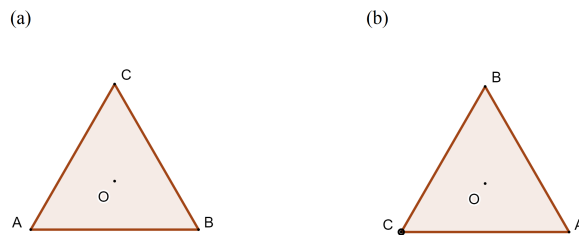


Figura 1.23: Rotação ao redor do centro do triângulo

Primeiramente, vamos formalizar alguns conceitos. Começamos com a seguinte definição.

Definição 1.108. Qualquer subconjunto de pontos do plano define uma **figura**.

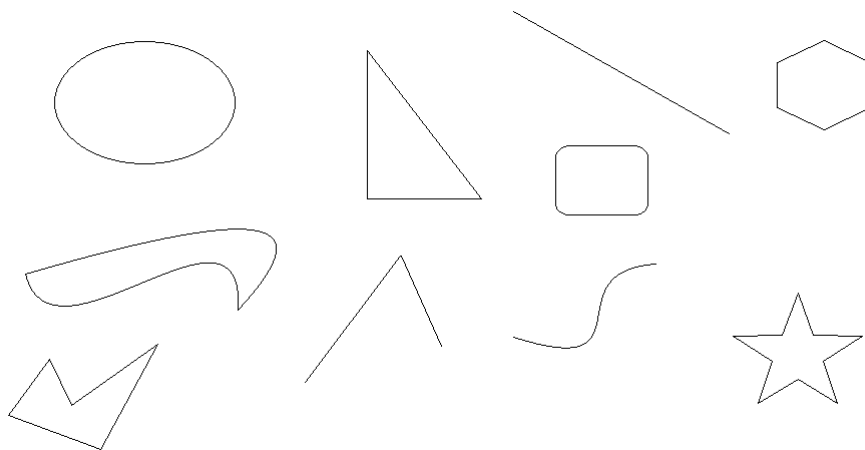


Figura 1.24: Figuras no plano.

Para algumas figuras assim definidas, podemos analisar do ponto de vista estático as propriedades métricas dessas figuras, como por exemplo, medidas das arestas, dos ângulos internos, sua área, e assim por diante. Mas podemos analisar essa figura dinamicamente,

ou seja, determinar quais composições das isometrias do plano que a deixam invariante ou fixa..

Como vimos anteriormente, tais isometrias são quatro, a saber, reflexão por uma reta, translação, rotação e reflexão com deslizamento.

Mais precisamente, definimos uma simetria.

Definição 1.109. Considere uma figura plana \mathcal{F} qualquer. Uma **simetria** de uma figura plana \mathcal{F} é uma isometria, ou uma composição de isometrias, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que deixa a figura invariante, ou seja, $\psi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Ou seja, dada a figura \mathcal{F} , se existe uma transformação qualquer, Ω , tal que $\Omega(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, a figura \mathcal{F} exibe uma simetria, relativa a essa transformação. Assim à luz da Definição 1.109, o triângulo equilátero, como discutido nos parágrafos iniciais dessa seção, exibe, ao menos, duas simetrias, uma relativa à reflexão por uma reta, e uma segunda, relativa à rotação.

Obviamente, a Identidade é uma simetria de qualquer figura, e sendo assim chamada de simetria trivial.

Definição 1.110. Uma figura \mathcal{F} qualquer do plano é chamada simétrica se além da simetria trivial possui uma outra simetria qualquer.

Exemplo 1.111 (Simetrias do quadrado). Vamos determinar para um quadrado, todas as possíveis simetrias do mesmo.. Dado o quadrado $ABCD$, inicialmente, traçamos a diagonal \overline{AC} , como mostrado na figura 1.25.

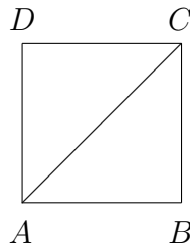


Figura 1.25: Diagonal do quadrado

Pela reta suporte da referida diagonal, \overleftrightarrow{AC} podemos realizar a reflexão do quadrado, a qual o torna invariante. Vamos denotar tal operação por ω_{AC} . É evidente que, se aplicarmos uma segunda vez tal operação, obteremos o quadrado em sua configuração inicial. Ou seja, $\omega_{AC}\omega_{AC} = Id$.

De maneira análoga, podemos definir a reflexão pela reta suporte da diagonal \overline{BD} , ou seja, a transformação ω_{BD} .

Considerando ainda as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , as mesmas se intersectam em um ponto O , centro do quadrado. Podemos agora, definir uma nova transformação, a rotação em sentido anti-horário ao redor do ponto O . Para tanto consideraremos os seguintes ângulos de rotação, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad e $2 \cdot \pi$ rad, como mostrado na Figura 1.27.

Observamos que uma rotação de $2 \cdot \pi$ rad resulta na identidade. Assim aqui temos as transformações, $\theta_{\frac{\pi}{2}}$, θ_{π} e $\theta_{\frac{3\pi}{2}}$.

Finalmente, consideremos os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{CD} , M e N , respectivamente. Consideremos ainda a reta suporte do segmento de reta \overline{MN} . Definimos uma nova transformação, a reflexão pela reta \overleftrightarrow{MN} , como mostrado na Figura 1.28.

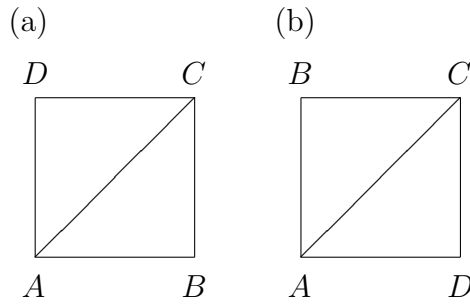


Figura 1.26: Reflexão por uma diagonal, (a) quadrado original, (b) quadrado após reflexão.

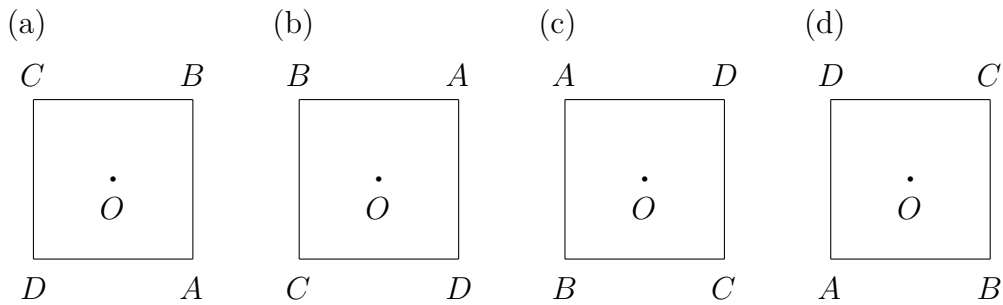


Figura 1.27: Rotação ao redor do ponto O por um ângulo de (a) $\frac{\pi}{2}$ rad, (b) π rad, (c) $\frac{3\pi}{2}$ rad, (d) $2 \cdot \pi$ rad.

Denotando tal transformação por ω_{MN} , notamos que $\omega_{MN}\omega_{MN} = Id$. De maneira análoga, se os pontos S e T representam, respectivamente, os pontos médios dos lados \overline{BC} e \overline{AD} , temos também a reflexão pela reta suporte do segmento \overline{ST} , denotado por ω_{ST} .

Dessa maneira, o conjunto das simetrias do quadrado é o conjunto,

$$\left\{ Id, \omega_{AC}, \omega_{BD}, \omega_{MN}, \omega_{ST}, \theta_{\frac{\pi}{2}}, \theta_{\pi}, \theta_{\frac{3\pi}{2}} \right\}$$

totalizando oito simetrias.

Como vimos, tanto para o triângulo equilátero, como no caso do quadrado, tais figuras apresentavam simetrias,

- i) axiais, ou seja, por uma reflexão por uma reta,
- ii) rotacionais.

Entretanto, como vimos anteriormente, no plano temos outras duas possíveis simetrias, associadas à translação e à reflexão com deslizamento.

A partir dessa observações, podemos definir, então um ornamento.

Definição 1.112. Considere uma figura plana. Se tal figura é simétrica e tal que pode ser composta por outra figura que se repete por meio de alguma isometria (rotação, reflexão, translação, ou reflexão por deslizamento), diremos que tal figura é um **ornamento**.

Como veremos nos seguintes exemplos, o número de repetições dessas composições, pode ser finito, ou infinito

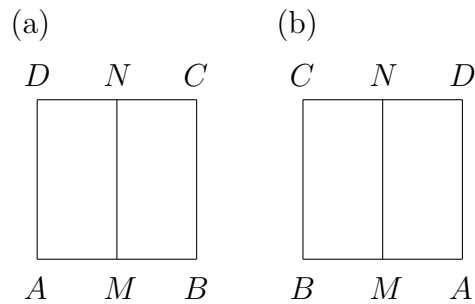


Figura 1.28: Reflexão pela reta \overleftrightarrow{MN} , (a) quadrado original, (b) quadrado após reflexão.

Exemplo 1.113. A Figura 1.29 mostra um típico ornamento. Notamos que o quadrilátero $OABC$ é a unidade básica que compõe os mesmo, pois vemos repetições dessa figura, para compor tal ornamento. Nesse caso, obtemos o ornamento, efetuando a rotação, de um ângulo de medida adequada, desse quadrilátero $OABC$ ao redor da origem do plano cartesiano.

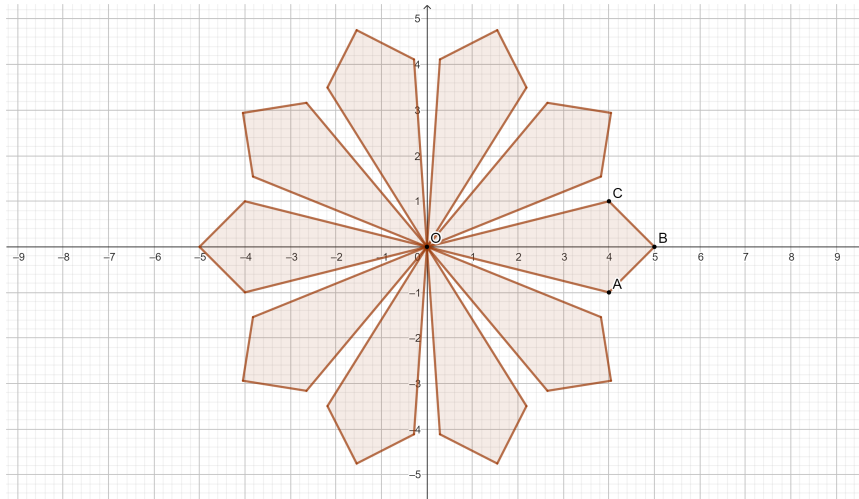


Figura 1.29: Um exemplo de ornamento

Dentre os ornamento, podemos considerar dois subconjuntos. O primeiro deles, o das rosáceas (ou rosetas).

Definição 1.114. Uma **rosácea** é um ornamento que tem um número finito de simetrias ou de rotações ou de reflexões por uma reta. Em ambos os casos, as rotações são ao redor da origem e as reflexões por retas que passam pela origem.

Exemplo 1.115. Considere no plano cartesiano, uma figura qualquer, como mostrada na Figura 1.30. Aplicamos uma rotação, ao redor da origem O , de um ângulo de medida $\frac{\pi}{3}$ rad (ou 60°), no sentido antihorário, obtendo uma cópia da figura original, mas, agora, rotacionada em $\frac{\pi}{3}$.

Assim, realizando também as rotações de $\frac{2\pi}{3}$ rad, π rad, $\frac{4\pi}{3}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad, obtemos o ornamento denominado roseta, como mostrado na Figura 1.31.

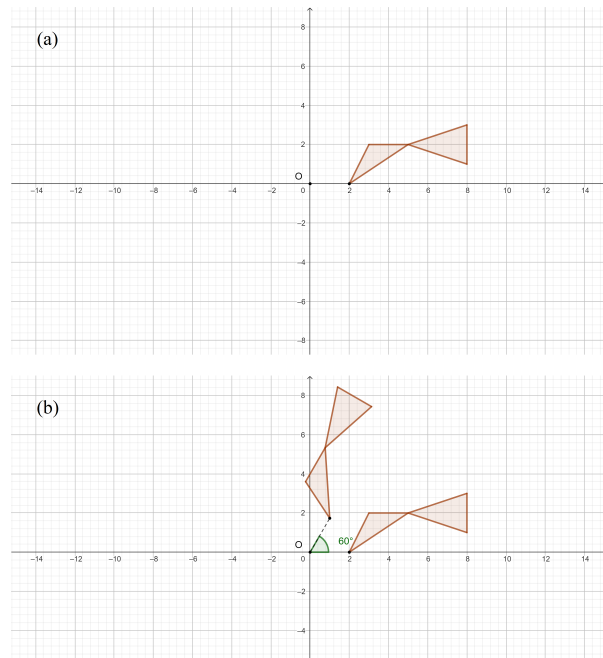


Figura 1.30: Um exemplo de roseta

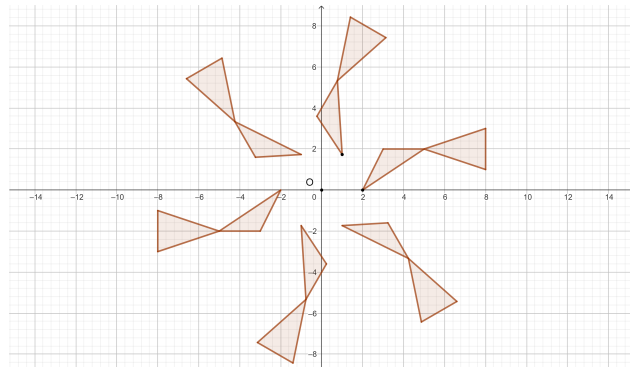


Figura 1.31: A roseta completa

Finalmente, observamos que se realizarmos uma rotação de $\frac{7\pi}{3}$ (ou 420°) não resultará em uma nova figura, mas uma sobreposta àquela obtida a partir da rotação de $\frac{\pi}{3}$ rad (ou 60°). E o mesmo ocorrerá para as demais rotações discutidas.

Exemplo 1.116. Um outro exemplo, agora a forma básica sofre rotações de 72° , 144° , 216° e 288° ao redor da origem (Figura 1.32).

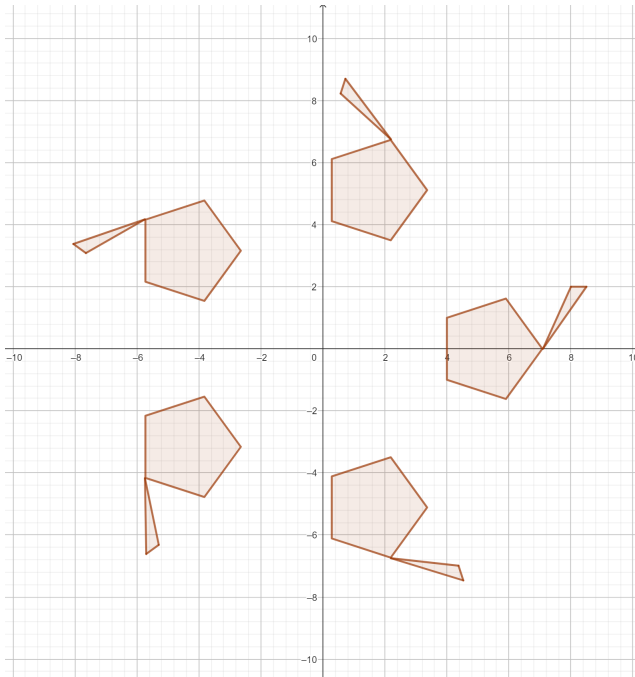


Figura 1.32: Roseta contendo apenas rotações

Exemplo 1.117. E finalmente, uma roseta gerada pela reflexão em retas passando pela origem (Figura 1.33).

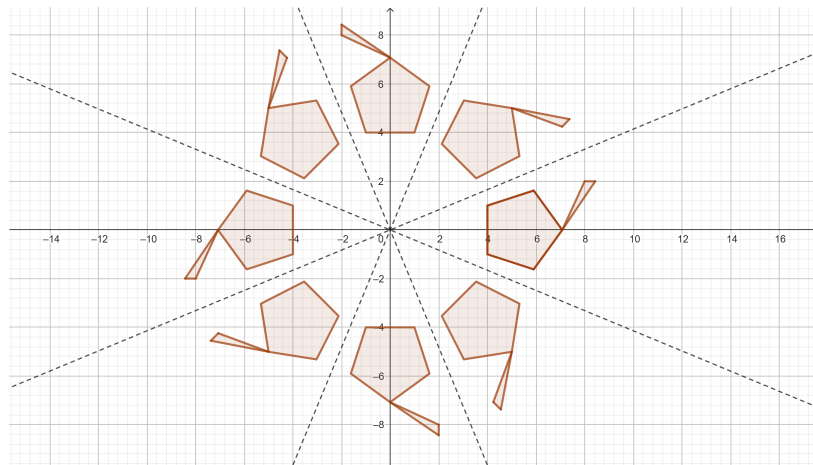


Figura 1.33: Roseta contendo apenas reflexões por retas passando pela origem

Um segundo ornamento é o chamado friso.

Definição 1.118. Um **friso** é um ornamento que possui uma infinidade de simetrias de translação.

Exemplo 1.119. Aqui temos um típico friso. A forma básica, o quadrilátero $ABCD$ é transladado, um infinidade de vezes, pelo vetor u . Isso produz o segundo tipo de ornamento, o friso, como mostrado na Figura 1.34.

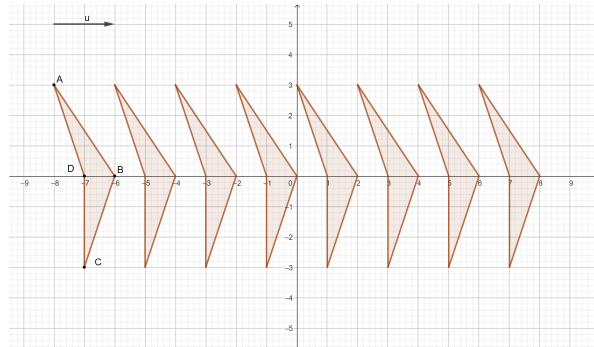


Figura 1.34: Friso obtido pela translação da figura $ABCD$.

Assim, fomos capazes de, a partir das isometrias do plano, construir a partir de figuras simples, objetos muito mais complexos e que apresentavam simetrias as mais diversas.

2 Geometria Esférica

Introdução

Vimos na Geometria Euclidiana alguns resultados importantes, como a determinação de uma reta por dois pontos distintos; a existência de uma única reta paralela por um ponto não pertencente à uma reta dada, a distância entre dois pontos como um resultado do Teorema de Pitágoras, bem como a existência de um família de isometrias no plano.

Vamos agora, adotar uma abordagem semelhante ao analisarmos a geometria e as transformações na Esfera Unitária. Como antes, desenvolveremos um arsenal geométrico e algébrico para primeiro caracterizar a Esfera Unitária. E posteriormente não apenas definir objetos como ponto e reta, mas demonstrar uma série de resultados, culminando com o fato de que nessa nova geometria, dada uma reta e um ponto externo á mesma, não existe uma reta paralela à reta dada.

Em seguida, definiremos transformações na esfera geométrica, todas a partir de uma particular transformação . Finalmente, definida uma isometria, passaremos a classificar tais transformações.

2.1 Preliminares algébricas

Muitos dos resultados apresentados nessa seção, já tiveram seus análogos discutidos em \mathbb{R}^2 . O que faremos aqui é uma extensão desses resultados para \mathbb{R}^3 , sem nos atermos aos detalhes e demonstrações, de modo mais rigoroso. Vamos nos deter, entretanto, quando nos depararmos com algum resultado inédito.

Consideremos o espaço conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$, de todas as ternas ordenadas, com entradas reais. Para tal conjunto podemos definir duas operações, a saber.

Definição 2.1. Sejam $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Definimos a **soma** $u + v$ por

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

E também a chamada multiplicação por escalar.

Definição 2.2. Dados $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, o **produto de u pelo escalar λ** , denotado por λu , é definido por,

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Tais operações têm as seguintes propriedades.

Teorema 2.3. *Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos,*

- a) $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- b) $u + v = v + u$
- c) *Existe $0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $u + 0 = u$.*
- d) *Existe $-u \in \mathbb{R}^3$ tal que $u + (-u) = 0$.*
- e) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
- f) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
- g) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.
- h) $1u = u$.

As demonstrações dessas propriedades são encontradas em [3].

Definição 2.4. Considere um conjunto não vazio V qualquer, sobre o qual estão definidas duas operações, a soma, $+$: $V \times V \rightarrow V$ e a multiplicação por escalar, \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$. Se ambas as operações satisfizerem as propriedades descritas no Teorema 2.3, então, o conjunto V juntamente com as operações de soma e multiplicação por escalar definem um **espaço vetorial** sobre o corpo \mathbb{R} . Um elemento v de V será denominado um **vetor**.

Observação 2.5. Considerando, então, a Definição 2.4, vemos que o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial. Um elemento, $u = (x, y, z)$, de \mathbb{R}^3 será denominado, genericamente, um **vetor**.

Definição 2.6. Sejam V um espaço vetorial, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Nessas condições, o vetor

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

pertence a V e é chamado **combinação linear** de v_1, v_2, \dots, v_n .

Definição 2.7. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente** se a equação,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Caso exista algum $\alpha_i \neq 0$ dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente**.

Uma outra maneira de caracterizar vetores linearmente dependentes é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.8. *O conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente se, e somente se, um desses vetores for uma combinação linear dos outros.*

A demonstração desse teorema encontra-se em [2].

Definição 2.9. Seja V um espaço vetorial qualquer. Um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores de V é uma **base** para V se,

- a) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente,
- b) o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gera V . Ou seja, para todo vetor não nulo $v \in V$, existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$.

Neste caso, dizemos que o espaço vetorial tem dimensão finita n .

Observação 2.10. Existem espaços vetoriais que tem dimensão infinita, os quais não serão abordados aqui.

Definição 2.11. Considere o espaço vetorial V , e uma base para o mesmo, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Se $v \in V$ é escrito como $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$, os números reais a_1, a_2, \dots, a_n são as **coordenadas** do vetor v relativamente à base \mathcal{B} .

Observação 2.12. Para conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ adotaremos a chamada **base canônica**. Para tal espaço vetorial consideremos os elementos $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. O conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente independente. De fato para que $\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 = 0$, devemos ter,

$$\begin{aligned} \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 &= 0 \\ \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (0, 0, 0) \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Além disso, dado um vetor não nulo qualquer $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos,

$$\begin{aligned} v &= (x, y, z) \\ &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3 \end{aligned}$$

ou seja, v é escrito como uma combinação linear dos elementos do conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$. Como tal base possui três vetores, dizemos que a dimensão desse espaço vetorial é 3.

Definição 2.13. Dados os vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$, tais que $u = (u_x, u_y, u_z)$ e $v = (v_x, v_y, v_z)$, o **produto escalar** dos mesmos é definido por uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, em coordenadas cartesianas,

$$\langle u, v \rangle = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$$

Tal produto interno possui as seguintes propriedades.

Teorema 2.14. *Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos,*

- a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- b) $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$;
- c) $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

A demonstração desse teorema é análoga ao caso em \mathbb{R}^2 .
Para esse espaço vetorial, temos a seguinte definição.

Definição 2.15. Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ a **norma** desse vetor é definida por,

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Observação 2.16. Em coordenadas cartesianas, se $v = (x, y, z)$ temos,

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Teorema 2.17 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. Temos*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

A igualdade é verdadeira se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.

Demonstração. Se u e v são linearmente dependentes, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = \alpha v$. Assim,

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| &= |\langle \alpha v, v \rangle| \\ &= |\alpha \langle v, v \rangle| \\ &= |\alpha| |\langle v, v \rangle| \\ &= |\alpha| \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

Por outro lado, se u e v não são linearmente independentes, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $u + \alpha v \neq 0$. Logo $\langle u + \alpha v, u + \alpha v \rangle > 0$. Assim temos,

$$\begin{aligned} \langle u + \alpha v, u + \alpha v \rangle &= \langle u, u \rangle + \langle u, \alpha v \rangle + \langle \alpha v, u \rangle + \langle \alpha v, \alpha v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \alpha \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, v \rangle + \alpha^2 \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\alpha \langle u, v \rangle + \alpha^2 \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

A partir da condição $\langle u + \alpha v, u + \alpha v \rangle > 0$, temos $\alpha^2 \langle v, v \rangle + 2\alpha \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle > 0$, uma equação quadrática em α . Para que a mesma satisfeita devemos ter que,

$$\begin{aligned} 4 \langle u, v \rangle^2 - 4 \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle &< 0 \\ 4 \langle u, v \rangle^2 &< 4 \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \\ \langle u, v \rangle^2 &< \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \\ \sqrt{\langle u, v \rangle^2} &< \sqrt{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle} \\ |\langle u, v \rangle| &< \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ |\langle u, v \rangle| &< \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

□

A norma de um vetor tem as seguintes propriedades.

Teorema 2.18. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos,*

- a) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$.
- b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.
- c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Demonstração. a) Segue imediatamente do item c) do Teorema 2.14. Como $\langle v, v \rangle \geq 0$, logo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$. E como $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$, temos que $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

b)

$$\begin{aligned} \|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= |\lambda| \|v\| \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \sqrt{\langle u + v, u + v \rangle} \\ &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &\leq \langle u, u \rangle + 2 |\langle u, v \rangle| + \langle v, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Definição 2.19. Considere três pontos distintos P, Q e R . Dizemos que os **pontos** são **colineares** se existir uma reta, r , tal que $P, Q, R \in r$. Caso contrário os pontos são não colineares.

Caso tenhamos três pontos não colineares, digamos A, B e C , os pontos A e B determinarão uma única reta, r , enquanto que os pontos B e C , determinarão uma outra reta s , distinta de r . Tais retas se intersectarão no ponto B . E assim teremos duas retas concorrentes, as quais, como já vimos anteriormente, estão contidas em um mesmo plano. Vamos caracterizar, em \mathbb{R}^3 , um plano a partir dessa idéia.

Definição 2.20. Considere os pontos $O, P, Q \in \mathbb{R}^3$, não colineares. Os vetores $u = \overrightarrow{OP}$ e $v = \overrightarrow{OQ}$ são linearmente independentes. Considere um ponto X qualquer, bem como o vetor \overrightarrow{OX} . Se pudermos escrever que $\overrightarrow{OX} = \lambda u + \mu v$, para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, diremos que os vetores \overrightarrow{OX}, u e v são linearmente dependentes. Assim, temos,

$$X = O + \lambda u + \mu v,$$

a **equação vetorial do plano**, passando pelo ponto X e gerado pelos vetores u e v .

Definição 2.21. Considere os vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$, ambos não nulos. Sejam os representantes da classe de equipolência de u e de v , $u' = \overrightarrow{OP}$ e $v' = \overrightarrow{OQ}$, respectivamente, ambos com origem em O . Temos,

- a) Se u' e v' forem linearmente dependentes, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u' = \lambda v'$. Se $\lambda > 0$ o ângulo entre tais vetores é 0° . Por outro lado, se $\lambda < 0$, teremos que tal ângulo será de 180° .
- b) Caso u' e v' sejam linearmente independentes, o ângulo entre tais vetores u e v , de medida θ , será dado por pelo menor ângulo formado pelos segmentos \overline{OP} e \overline{OQ} , medido no plano determinado pelos pontos O , P e Q .

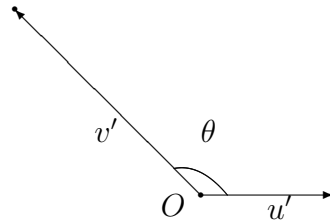


Figura 2.1: Ângulo entre os vetores u e v

Agora podemos caracterizar o produto escalar de dois vetores da seguinte maneira.

Proposição 2.22. *O produto escalar de dois vetores pode ser caracterizado, segundo [3] por,*

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta. \tag{2.1}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores u e v , sendo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Definição 2.23. Dados dois vetores u, v distintos, dizemos que u é perpendicular ao vetor v quando o ângulo entre os mesmos for igual a $\frac{\pi}{2}$. Denotamos tal fato por $u \perp v$.

Temos, então, o seguinte resultado.

Teorema 2.24. *Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$, u e v são perpendiculares se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$.*

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 2.23 □

Definiremos mais alguns objetos que serão muito úteis nas próximas seções. Nesse ponto, novamente seguimos [3]. São eles.

Definição 2.25. Dados $u = (u_x, u_y, u_z)$ e $v = (v_x, v_y, v_z)$ em \mathbb{R}^3 , definimos $u \times v$, o chamado **produto vetorial** de u e v por

$$u \times v = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x) \tag{2.2}$$

Observação 2.26. Como consequência dessa definição, mostra-se ([3]) que, dados $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, o produto vetorial pode ser representado por,

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$$

onde (e_1, e_2, e_3) é a base canônica de \mathbb{R}^3 . Notamos que esse não é um determinante autêntico, mas apenas uma forma de representar o produto vetorial.

Teorema 2.27. *Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Temos as seguintes propriedades do produto vetorial.*

- a) $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$.
- b) $u \times v = -v \times u$.
- c) $\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$.
- d) $u \times v = 0$ se, e somente se, u e v são proporcionais.
- e) Se $u \times v \neq 0$, então $\{u, v, u \times v\}$ é uma base para \mathbb{R}^3 .
- f) $(\alpha u + \beta v) \times w = \alpha(u \times w) + \beta(v \times w)$.
- g) $u \times (\alpha v + \beta w) = \alpha(u \times v) + \beta(u \times w)$.
- h) $\langle u \times v, w \times z \rangle = \langle u, w \rangle \langle v, z \rangle - \langle v, w \rangle \langle u, z \rangle$.
- i) $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$.
- j) $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$, onde θ é a medida do ângulo entre os vetores u e v .

Demonstração. a) Temos,

$$\begin{aligned} \langle u \times v, u \rangle &= \\ &= \langle (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x), (u_x, u_y, u_z) \rangle \\ &= (u_y v_z - u_z v_y)u_x + (u_z v_x - u_x v_z)u_y + (u_x v_y - u_y v_x)u_z \\ &= u_x u_y v_z - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - u_x u_y v_z + u_x u_z v_y - u_y u_z v_x \\ &= u_x u_y v_z - u_x u_y v_z + u_x u_z v_y - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - u_y u_z v_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

A demonstração de $\langle u \times v, v \rangle = 0$ é similar.

b) Temos,

$$\begin{aligned} u \times v &= (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x) \\ &= (-(-u_y v_z + u_z v_y), -(-u_z v_x + u_x v_z), -(-u_x v_y + u_y v_x)) \\ &= -(-u_y v_z + u_z v_y, -u_z v_x + u_x v_z, -u_x v_y + u_y v_x) \\ &= -(v_y u_z - v_z u_y, v_z u_x - v_x u_z, v_x u_y - v_y u_x) \\ &= -v \times u \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \langle u \times v, w \rangle &= \langle (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x), (w_x, w_y, w_z) \rangle \\ &= (u_y v_z - u_z v_y)w_x + (u_z v_x - u_x v_z)w_y + (u_x v_y - u_y v_x)w_z \\ &= u_y v_z w_x - u_z v_y w_x + u_z v_x w_y - u_x v_z w_y + u_x v_y w_z - u_y v_x w_z \\ &= u_x (v_y w_z - v_z w_y) + u_y (v_z w_x - v_x w_z) + u_z (v_x w_y - v_y w_x) \\ &= \langle u, v \times w \rangle \end{aligned}$$

d) Se $v = \alpha u$, $\alpha \in \mathbb{R}$, temos, se e somente se,

$$\begin{aligned} u \times v &= u \times (\alpha u) \\ &= (u_y \alpha u_z - u_z \alpha u_y, u_z \alpha u_x - u_x \alpha u_z, u_x \alpha u_y - u_y \alpha u_x) \\ &= \alpha (u_y u_z - u_z u_y, u_z u_x - u_x u_z, u_x u_y - u_y u_x) \\ &= \alpha (0, 0, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e) Mostraremos que o conjunto de vetores em questão é linearmente independente. Se existirem números reais α, β, γ tais que,

$$\alpha u + \beta v + \gamma(u \times v) = 0$$

podemos tomar o produto escalar com $u \times v$, para obter,

$$\gamma \|u \times v\|^2 = 0$$

e, portanto, $\gamma = 0$. Além disso, do produto escalar com v e u , respectivamente, temos,

$$\alpha(u \times v) = 0 \text{ e } \beta(v \times u) = 0$$

de maneira que,

$$\alpha = \beta = 0.$$

f)

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v) \times w &= ((\alpha u_y + \beta v_y)w_z - (\alpha u_z + \beta v_z)w_y, \\ &\quad (\alpha u_z + \beta v_z)w_x - (\alpha u_x + \beta v_x)w_z, (\alpha u_x + \beta v_x)w_y - (\alpha u_y + \beta v_y)w_x) \\ &= (\alpha u_y w_z + \beta v_y w_z - \alpha u_z w_y - \beta v_z w_y, \\ &\quad \alpha u_z w_x + \beta v_z w_x - \alpha u_x w_z - \beta v_x w_z, \\ &\quad \alpha u_x w_y + \beta v_x w_y - \alpha u_y w_x - \beta v_y w_x) \\ &= (\alpha(u_y w_z - u_z w_y) + \beta(v_y w_z - v_z w_y), \\ &\quad \alpha(u_z w_x - u_x w_z) + \beta(v_z w_x - v_x w_z), \\ &\quad \alpha(u_x w_y - u_y w_x) + \beta(v_x w_y - v_y w_x)) \\ &= \alpha(u \times w) + \beta(v \times w) \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} u \times (\alpha v + \beta w) &= -(\alpha v + \beta w) \times u = \\ &= -\alpha(v \times u) - \beta(w \times u) \\ &= -(-\alpha(u \times v)) - (-\beta(u \times w)) \\ &= \alpha(u \times v) + \beta(u \times w) \end{aligned}$$

h) A partir da Definição 2.25, vemos que,

$$\begin{aligned}
 & \langle u \times v, w \times z \rangle = \\
 & = \langle (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1), (w_2z_3 - w_3z_2, w_3z_1 - w_1z_3, w_1z_2 - w_2z_1) \rangle \\
 & = u_2v_3w_2z_3 - u_2v_3w_3z_2 - u_3v_2w_2z_3 + u_3v_2w_3z_2 + \\
 & \quad + u_3v_1w_3z_1 - u_3v_1w_1z_3 - u_1v_3w_3z_1 + u_1v_3w_1z_3 + \\
 & \quad + u_1v_2w_1z_2 - u_1v_2w_2z_1 - u_2v_1w_1z_2 + u_2v_1w_2z_1 \\
 & = u_1w_1v_1z_1 + u_1w_1v_2z_2 + u_1w_1v_3z_3 + \\
 & \quad + u_2w_2v_1z_1 + u_2w_2v_2z_2 + u_2w_2v_3z_3 + \\
 & \quad + u_3w_3v_1z_1 + u_3w_3v_2z_2 + u_3w_3v_3z_3 \\
 & \quad - v_1w_1u_1z_1 - v_1w_1u_2z_2 - v_1w_1u_3z_3 + \\
 & \quad - v_2w_2u_1z_1 - v_2w_2u_2z_2 - v_2w_2u_3z_3 + \\
 & \quad - v_3w_3u_1z_1 - v_3w_3u_2z_2 - v_3w_3u_3z_3 \\
 & = \langle u, w \rangle \langle v, z \rangle - \langle v, w \rangle \langle u, z \rangle
 \end{aligned}$$

i) Primeiro observamos que,

$$e_1 \times e_2 = e_3, e_2 \times e_3 = e_1 \text{ e } e_3 \times e_1 = e_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 (e_1 \times e_2) \times e_3 &= 0 = \langle e_1, e_3 \rangle e_2 - \langle e_2, e_3 \rangle e_1, \\
 (e_2 \times e_3) \times e_1 &= -e_2 = \langle e_2, e_3 \rangle e_3 - \langle e_3, e_3 \rangle e_2, \\
 (e_3 \times e_1) \times e_2 &= e_1 = \langle e_3, e_3 \rangle e_1 - \langle e_1, e_3 \rangle e_3.
 \end{aligned}$$

Pela linearidade, temos,

$$(u \times v) \times e_3 = \langle u, e_3 \rangle v - \langle v, e_3 \rangle u.$$

Como tal identidade é válida quando e_3 é substituído por e_1 e por e_2 , e também pela linearidade, podemos escrever, finalmente que,

$$(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u.$$

j)

$$\begin{aligned}
 \|u \times v\|^2 &= (u_yv_z - u_zv_y)^2 + (u_zv_x - u_xv_z)^2 + (u_xv_y - u_yv_x)^2 \\
 &= u_y^2v_z^2 - 2u_yv_zu_zv_y + u_z^2v_y^2 + \\
 & \quad + u_z^2v_x^2 - 2u_zv_xu_xv_z + u_x^2v_z^2 + \\
 & \quad + u_x^2v_y^2 - 2u_xv_yu_yv_x + u_y^2v_x^2 \\
 &= u_y^2v_z^2 + u_z^2v_y^2 + u_z^2v_x^2 + u_x^2v_z^2 + u_x^2v_y^2 + u_y^2v_x^2 + \\
 & \quad - 2(u_yv_zu_zv_y + u_zv_xu_xv_z + u_xv_yu_yv_x) \\
 &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \\
 & \quad - (u_x^2v_x^2 + u_y^2v_y^2 + u_z^2v_z^2) + \\
 & \quad - 2(u_yv_zu_zv_y + u_zv_xu_xv_z + u_xv_yu_yv_x) \\
 &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \\
 & \quad - (u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z)^2 \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 \text{sen}^2 \theta
 \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. Lembramos que o termo $(u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)^2$ é, na realidade, o produto escalar $\langle u, v \rangle$. Agora, a partir da Proposição 2.22, podemos escrever,

$$(u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)^2 = \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta.$$

□

Corolário 2.28. *Dados u e v temos,*

$$\|u \times v\| = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$$

Demonstração. Pela propriedade *j*) do Teorema 2.27, temos que $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$ o que implica em $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta$. Agora recordamos que $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, de modo que obtemos,

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta), \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta, \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2. \end{aligned}$$

□

Observação 2.29. A propriedade *(a)* do Teorema 2.27 implica na ortogonalidade de u e $u \times v$, e na ortogonalidade de v e $u \times v$.

Além disso, consideraremos também o produto misto.

Definição 2.30. Dados os vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, o **produto misto** de u, v e w é definido por

$$[u, v, w] = \langle u \times v, w \rangle$$

Observação 2.31. Mais uma vez, na base canônica de \mathbb{R}^3 , temos

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

onde $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$.

Definição 2.32. Uma terna $\{u, v, w\}$ de vetores unitários ortogonais é chamada uma terna ortonormal

Teorema 2.33. *Se $\{u, v, w\}$ é uma terna ortogonal, então para todo $x \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever*

$$x = \langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v + \langle x, w \rangle w$$

A demonstração de tal fato pode ser vista em [3].

Em vista desse resultado tal terna ordenada será denominada uma **base ortonormal**.

Teorema 2.34. *Se u é qualquer vetor unitário, então existem vetores v e w tais que o conjunto $\{u, v, w\}$ define uma base ortonormal.*

Demonstração. Seja z qualquer outro vetor unitário diferente de $\pm u$. Considere o vetor $v = \frac{u \times z}{\|u \times z\|}$. Seja, então o vetor w dado por $w = \frac{u \times v}{\|u \times v\|}$. Vemos que $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$. Além disso, $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| - \langle u, v \rangle^2 = 1$. Assim, a terna $\{u, v, w\}$ é ortonormal. \square

Uma outra propriedade importante do produto vetorial, muitas vezes denominada **duplo produto vetorial** é expressa no seguinte teorema.

Teorema 2.35. *Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Temos que,*

$$(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u.$$

A demonstração desse fato encontra-se em [3].

2.2 A esfera unitária

Definição 2.36. Considere um ponto qualquer, $P \in \mathbb{R}^3$, bem como um número real estritamente positivo, r . A **esfera** de centro em P e raio r é o conjunto de todos os pontos de \mathbb{R}^3 que estão a uma distância igual a r de P .

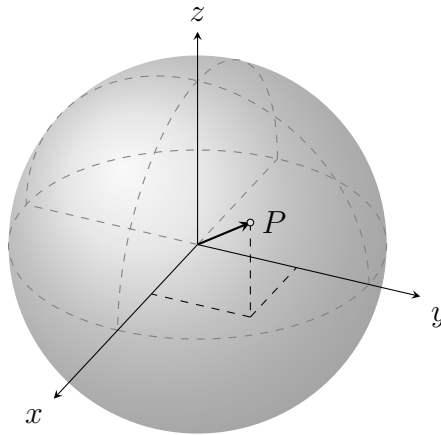


Figura 2.2: Esfera em \mathbb{R}^3

Utilizando agora o conceito de norma, bem como a Definição 2.36 de uma esfera, determinaremos uma equação para a esfera com centro na origem, $(0, 0, 0)$, e raio igual a r . tal esfera será dada por,

$$S_r = \{v \in \mathbb{R}^3, \|v\| = r\} \quad (2.3)$$

Se escrevermos $v = (x, y, z)$ teremos a seguinte equação para tal esfera

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (2.4)$$

Em particular, a **esfera unitária**, com centro na origem, $(0, 0, 0)$ e raio igual a 1 terá equação,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (2.5)$$

É sobre tal superfície que discutiremos o modelo mais simples de uma geometria não euclidiana, a chamada geometria elíptica.

2.3 Geometria em S^2

Consideremos, então, a esfera unitária em \mathbb{R}^3 ,

$$S^2 = \{u \in \mathbb{R}^3, \|u\| = 1\}$$

Seccionando-se tal esfera por um plano que contém o centro da mesma, mostraremos que tal interseção é uma circunferência de raio igual a 1, a qual será uma reta nessa geometria.

Definição 2.37. Seja $u \in S^2$ um vetor unitário. O conjunto

$$r = \{v \in S^2, \langle u, v \rangle = 0\}$$

é denominado uma **reta**, r , com pólo u

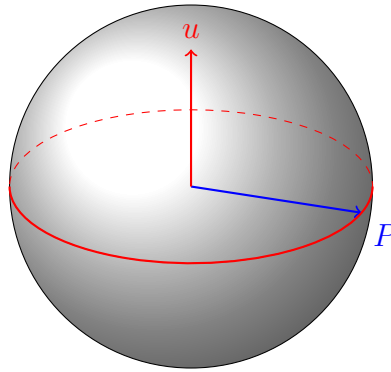


Figura 2.3: Reta em S^2

Proposição 2.38. O lugar geométrico dado pela definição 2.37 é a intersecção de S^2 com o plano que passa pela origem, e tem u como vetor normal.

Demonstração. Admitindo-se $u = (a, b, c)$, temos $r = \{(x, y, z) \in S^2, ax + by + cz = 0\}$. Logo, se π é o plano $ax + by + cz = 0$, temos $r = S^2 \cap \pi$. \square

Exemplo 2.39. Consideremos o vetor $u = (1, 0, 0)$. Claramente tal vetor tem módulo igual a 1. Assim, podemos tomá-lo como pólo de uma reta em S^2 . Considere ainda, um ponto $P \in S^2$ tal que $P = (x, y, z)$. Temos que,

$$\langle P, u \rangle = \langle (x, y, z), (1, 0, 0) \rangle = x.$$

Logo a reta r , seguindo a definição 2.37, será dada por,

$$\langle P, u \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Mas como $P \in S^2$ temos,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 0^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow y^2 + z^2 = 1$$

Tal reta é mostrada na figura 2.4.

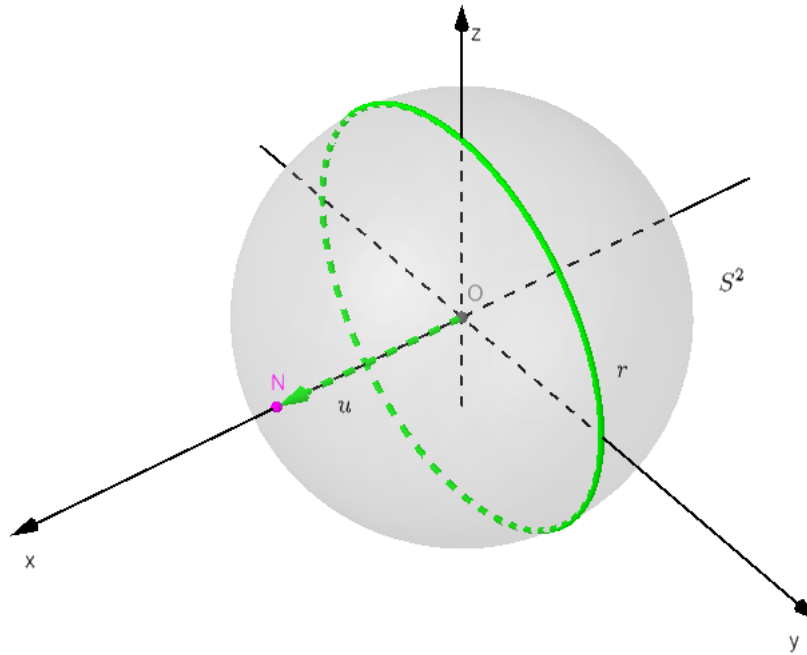


Figura 2.4: Reta r , com pólo $u = (1, 0, 0)$

Definição 2.40. Dois pontos P e Q são denominados **antípodas** se $P = -Q$.

Como vimos já vimos, na Geometria Euclidiana, dadas duas retas distintas, r e s , podemos ter dois casos distintos: ou as retas concorrem em um único ponto, ou seja, $r \cap s = \{P\}$; ou, r e s são paralelas, $r \cap s = \emptyset$. Entretanto, para a geometria em S^2 , mostraremos que, ao contrário da geometria euclidiana,

- i) existem apenas retas paralelas coincidentes em S^2 ;
- ii) dadas duas retas, elas se intersectarão em dois pontos antípodas.

Começamos mostrando que nessa geometria, pontos antípodas pertencem à uma mesma reta.

Teorema 2.41. a) Se u é um pólo de uma reta r , então seu antípoda, $-u$, também o é.

b) Se P pertence à reta r , seu antípoda, $-P$, também pertence à mesma reta.

Demonstração. a) Se u é pólo de r , então temos que $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in S^2$. Agora,

$$\langle -u, v \rangle = -\langle u, v \rangle = -0 = 0$$

o que mostra que $-u$ também é pólo de r .

b) Dado o ponto $P \in r$, temos que $\langle P, u \rangle = 0$ implicando em $\langle -P, u \rangle = -\langle P, u \rangle = 0$, e, portanto $-P \in r$. \square

Em seguida, observamos que dois pontos antípodas determinam infinitas retas, o que é ligeiramente diferente da Geometria Euclidiana em que dois pontos distintos quaisquer determinam uma única reta.

Teorema 2.42. *Sejam P e Q pontos distintos em S^2 os quais não são antípodas. Então existe uma única reta contendo P e Q , a qual denotaremos por \overleftrightarrow{PQ} .*

Demonstração. Para determinarmos uma possível reta \overleftrightarrow{PQ} , precisamos antes de mais nada de um pólo. Ou seja, necessitamos de um vetor unitário e ortogonal a P e a Q . Para tanto tomamos o vetor $u = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|}$. A reta r com pólo u contém os pontos P e Q . Para mostrarmos a unicidade, consideremos que exista um outro pólo, v para a reta \overleftrightarrow{PQ} . Temos que $\langle v, P \rangle = \langle v, Q \rangle = 0$. Como $v \times (P \times Q) = 0$, e, portanto, temos, pela propriedade (i) do Teorema 2.27, que v é um múltiplo do vetor não nulo $P \times Q$. Como $\|v\| = 1$ obtemos que $v = \pm u$. Assim, \overleftrightarrow{PQ} é única. \square

Teorema 2.43. *Sejam r e s duas retas distintas em S^2 , com pólos u e v , respectivamente. Então $u \neq \pm v$.*

Demonstração. Vamos considerar que dados dois vetores $u, v \in S^2$ tais que $u \neq \pm v$, vamos supor que as retas determinadas por ambos sejam iguais. Assim, existe um ponto $P \in S^2$ tal que $\langle P, u \rangle = 0$ e $\langle P, v \rangle = 0$. Logo, vemos que,

$$\begin{aligned} \langle P, u \rangle = \langle P, v \rangle &\Rightarrow \langle P, u \rangle - \langle P, v \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle P, u - v \rangle = 0 \end{aligned}$$

Como $u \neq \pm v$ temos que $u - v \neq 0$ e, portanto, $P = 0$, um absurdo, pois $P \in S^2$, e, consequentemente $P \neq 0$. \square

Teorema 2.44. *Sejam r e s duas retas distintas em S^2 . As retas r e s se intersectam em exatamente dois pontos, e os mesmos são antípodas.*

Demonstração. Suponha que u e v são pólos de r e de s , respectivamente. Como r e s são distintas, $u \neq \pm v$, e, portanto, $u \times v \neq 0$. Assim, os pontos $P = \frac{u \times v}{\|u \times v\|}$ e $P' = -\frac{u \times v}{\|u \times v\|}$ estão na intersecção das retas. Consideremos que existe um terceiro ponto, Q , na intersecção de r e s . Como Q e P não são antípodas, a reta fica unicamente determinada pelo Teorema 2.42, ou seja $r \neq s$, uma contradição. \square

E assim, temos a primeira e grande diferença com a Geometria Euclidiana. Duas retas distintas, em S^2 , têm dois pontos em comum, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana. O mesmo fato utilizado na demonstração do Teorema 2.44, também nos mostrará que, dadas duas retas distintas, tais retas não poderão ser paralelas, no sentido em que não terão pontos em comum.

Corolário 2.45. *Duas retas distintas em S^2 não podem ser paralelas.*

Definição 2.46. Duas retas são **perpendiculares** se seus pólos são ortogonais.

Denotaremos tal fato por $r \perp s$ se $u \perp v$, u e v pólos de r e s , respectivamente.

Teorema 2.47. *Sejam r e s retas distintas em S^2 . Então existe uma única reta t , distinta de r e de s , tal que $t \perp r$ e $t \perp s$. A intersecção das retas r e s se dá nos pólos de t .*

Demonstração. Como as retas r e s são distintas, o Teorema 2.44 garante que tais retas se intersectam em pontos antípodas, P e $-P$. Se u e v são pólos das retas r e s , respectivamente, temos que $\langle P, u \rangle = \langle P, v \rangle = 0$. Assim $P \perp u$ e $P \perp v$. Logo podemos considerar o vetor $w = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP} \neq u$ e $\overrightarrow{OP} \neq v$, como o pólo de uma nova reta t , a qual satisfaz as condições $t \perp r$ e $t \perp s$.

Vamos supor, por absurdo, que exista uma outra reta, t' tal que $t' \neq t$ e que $t' \perp r$ e $t' \perp s$. Como $t' \neq t$, temos que $w' \neq w$, sendo w' e w os pólos de t' e t , respectivamente. Temos ainda que w' satisfaz as condições $\langle w', u \rangle = 0 = \langle w', v \rangle$. O pólo da reta t , w , também satisfaz condições análogas, ou seja, $\langle w, u \rangle = 0 = \langle w, v \rangle$, podemos escrever,

$$\langle w', u \rangle = \langle w, u \rangle \Rightarrow (w' \times w) \times u = 0,$$

e, portanto $w' = \pm w$. Uma contradição, pois, como suposto inicialmente $w' \neq w$. Assim, somos levados à conclusão que $t' = t$, o que demonstra a unicidade. \square

Teorema 2.48. *Sejam r uma reta de S^2 e P um ponto qualquer também em S^2 . Se P não é um pólo de r , então há uma única reta s passando por P e perpendicular a r .*

Demonstração. Considere que a reta r tem u como pólo. Os pólos da reta s são dados por $\pm \frac{u \times P}{\|u \times P\|}$. Os pontos de intersecção de tais retas são dados por $\pm \frac{P - \langle P, u \rangle u}{\sqrt{1 - \langle P, u \rangle^2}}$ \square

Definição 2.49. Dados dois pontos $P, Q \in S^2$, a **distância** entre os mesmos é definida por

$$d : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

tal que,

$$d(P, Q) = \arccos \langle P, Q \rangle,$$

Tal distância tem as propriedades usuais como mostrado no seguinte

Teorema 2.50. *Se P, Q e R são pontos de S^2 , então,*

- a) $d(P, Q) \geq 0$.
- b) $d(P, Q) = 0$ se, e somente se, $P = Q$.
- c) $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- d) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$

Demonstração. a)

$$\begin{aligned} |\langle P, Q \rangle| \leq \|P\| \|Q\| &\Leftrightarrow |\langle P, Q \rangle| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq \langle P, Q \rangle \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \arccos \langle P, Q \rangle \leq \pi \\ &\Leftrightarrow 0 \leq d(P, Q) \leq \pi \\ &\Rightarrow d(P, Q) \geq 0 \end{aligned}$$

- b) Se $P = Q$ então $\langle P, Q \rangle = 1$, pois $\|P\| = \|Q\| = 1$. Como $d(P, Q) = \arccos \langle P, Q \rangle$, temos nesse caso que $d(P, Q) = \arccos 1$, o que implica que $d(P, Q) = 0$.

- c) Como $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ é imediato que $\arccos \langle P, Q \rangle = \arccos \langle Q, P \rangle$, e, portanto $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- d) Sejam $r = d(P, Q)$, $p = d(Q, R)$ e $q = d(P, R)$. Pela desigualdade de **Cauchy-Schwarz** temos

$$\langle P \times R, Q \times R \rangle^2 \leq \|P \times R\|^2 \|Q \times R\|^2$$

Pela propriedade (h) do Teorema 2.27, o primeiro membro dessa desigualdade pode ser reescrito como,

$$(\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle - \langle P, R \rangle \langle R, Q \rangle)^2 = (\cos r - \cos q \cos p)^2$$

Por outro lado, o segundo membro da desigualdade toma a forma,

$$\begin{aligned} (1 - \langle P, R \rangle^2) (1 - \langle Q, R \rangle^2) &= (1 - \cos^2 q)(1 - \cos^2 p), \\ &= \sin^2 q \sin^2 p. \end{aligned}$$

Assim

$$\cos r - \cos q \cos p \leq \sin q \sin p$$

e, portanto,

$$\cos r \leq \cos(q - p)$$

Sendo a função cosseno decrescente no intervalo $[0, \pi]$, temos $r \geq q - p$, e, assim $r + p \geq q$, desde que $0 \leq q - p \leq \pi$. Mas, por outro lado, se $q - p < 0$, então $q < p \leq r + p$. Assim, concluímos, de fato, que $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$. \square

2.4 Transformações em S^2

Como já fizemos no caso da geometria no plano, iniciamos a análise das transformações na esfera pela reflexão por uma reta.

Definição 2.51. Para qualquer reta r , a **reflexão por r** é a aplicação Ω_r é definida por

$$\Omega_r X = X - 2 \langle X, u \rangle u$$

onde $X \in S^2$ e u é um pólo de r .

Mesmo assim definida, não temos certeza que o ponto $\Omega_r X$ pertence a S^2 . Para tanto, vamos demonstrar o seguinte teorema que, nos garante que a reflexão por uma reta produz um ponto em S^2 .

Teorema 2.52. Seja $\langle u, u \rangle = 1$ e definamos a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$Tx = x - 2 \langle x, u \rangle u$$

Então,

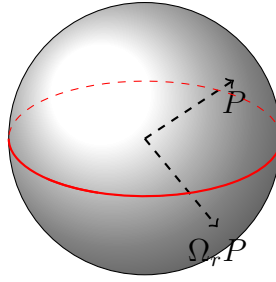


Figura 2.5: Reflexão por uma reta, Ω_r

a) T é linear.

b) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Demonstração. a) Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que:

i)

$$\begin{aligned} T(x + y) &= (x + y) - 2 \langle x + y, u \rangle u \\ &= (x + y) - 2 (\langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle) u \\ &= (x - 2 \langle x, u \rangle u) + (y - 2 \langle y, u \rangle u) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} T(\lambda x) &= \lambda x - 2 \langle \lambda x, u \rangle u \\ &= \lambda x - 2\lambda \langle x, u \rangle u \\ &= \lambda (x - 2 \langle x, u \rangle u) \\ &= \lambda T(x). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \langle Tx, Ty \rangle &= \langle x - 2 \langle x, u \rangle u, y - 2 \langle y, u \rangle u \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2 \langle x, u \rangle \langle u, y \rangle - 2 \langle x, u \rangle \langle y, u \rangle + 4 \langle x, u \rangle \langle y, u \rangle \langle u, u \rangle \\ \langle Tx, Ty \rangle &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

Uma aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfazendo as condições do Teorema 2.52 é dita ser uma **transformação ortogonal**.

Ainda pelo Teorema 2.52 se $\|x\| = 1$, então $\|Tx\| = 1$. Assim, $\Omega_r X \in S^2$ sempre que $X \in S^2$.

Exemplo 2.53. Como vimos no exemplo 2.39, a reta, em S^2 , com pólo dada pelo vetor $u = (1, 0, 0)$ é descrita pela equação $y^2 + z^2 = 1$. Consideremos um ponto $P \in S^2$ tal que

$P = (a, b, c)$, e determinemos sua reflexão por tal reta. Temos, pela definição 2.51 que,

$$\begin{aligned} \Omega_r P &= P - 2 \langle P, u \rangle u \\ &= (a, b, c) - 2 \langle (a, b, c), (1, 0, 0) \rangle u \\ &= (a, b, c) - 2a(1, 0, 0) \\ &= (-a, b, c) \end{aligned}$$

E como já mostramos, dado que $P \in S^2$, ou seja $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, vemos que $\|\Omega_r P\| = \sqrt{(-a)^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1} = 1$, o que mostra que $\Omega_r P \in S^2$. Para o ponto particular $P = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$, vemos que $\Omega_r P = \left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$, situação mostrada na figura 2.6.

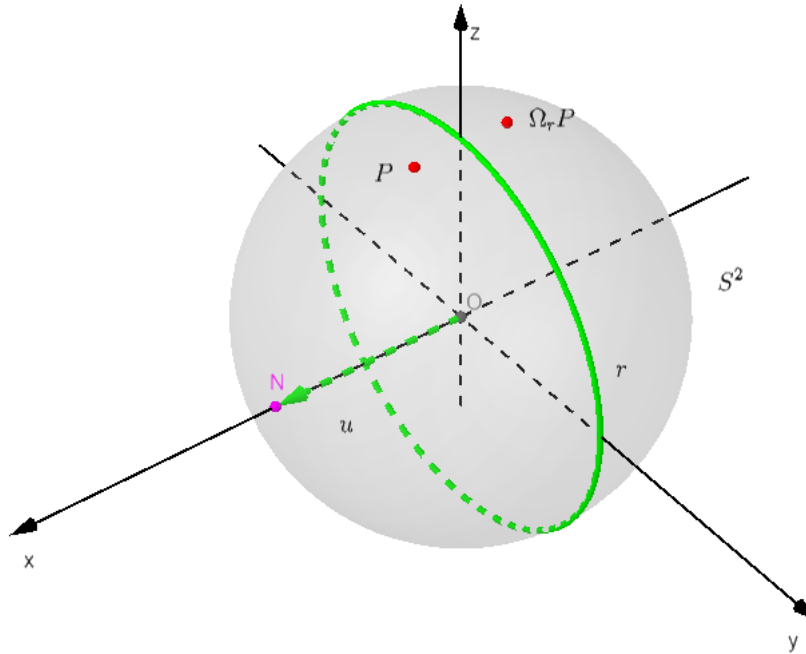


Figura 2.6: Reflexão pela reta r , com pólo $u = (1, 0, 0)$

Teorema 2.54. *Seja r uma reta qualquer em S^2 , $X, Y \in S^2$ e a aplicação Ω_r como na Definição 2.51. Temos:*

- a) $d(\Omega_r X, \Omega_r Y) = d(X, Y)$ para todos $X, Y \in S^2$.
- b) $\Omega_r \Omega_r X = X$ para todo $X \in S^2$.
- c) $\Omega_r : S^2 \rightarrow S^2$ é uma bijeção.

Demonstração. a) Dados $X, Y \in S^2$, temos que $\Omega_r X = X - 2 \langle X, u \rangle u$ e $\Omega_r Y = Y - 2 \langle Y, u \rangle u$. Agora,

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega_r X, \Omega_r Y \rangle &= \langle X - 2 \langle X, u \rangle u, Y - 2 \langle Y, u \rangle u \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle + \langle X, -2 \langle Y, u \rangle u \rangle + \langle -2 \langle X, u \rangle u, Y \rangle + \\
 &\quad + \langle -2 \langle X, u \rangle u, -2 \langle Y, u \rangle u \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle - 2 \langle Y, u \rangle \langle X, u \rangle - 2 \langle X, u \rangle \langle u, Y \rangle + \\
 &\quad + 4 \langle X, u \rangle \langle Y, u \rangle \langle u, u \rangle
 \end{aligned}$$

Como $\langle u, u \rangle = \|u\| = 1$, temos finalmente que,

$$\langle \Omega_r X, \Omega_r Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 d(\Omega_r X, \Omega_r Y) &= \arccos \langle \Omega_r X, \Omega_r Y \rangle \\
 &= \arccos \langle X, Y \rangle \\
 &= d(X, Y)
 \end{aligned}$$

b) Novamente $\Omega_r X = X - 2 \langle X, u \rangle u$. Agora,

$$\begin{aligned}
 \Omega_r(\Omega_r X) &= \Omega_r(X - 2 \langle X, u \rangle u) \\
 &= X - 2 \langle X, u \rangle u - 2 \langle X - 2 \langle X, u \rangle u, u \rangle u \\
 &= X - 2 \langle X, u \rangle u - 2 \langle X, u \rangle u + 4 \langle X, u \rangle \langle u, u \rangle u
 \end{aligned}$$

Como $\langle u, u \rangle = 1$, obtemos, finalmente,

$$\Omega_r(\Omega_r X) = X$$

c) Sejam $X, Y \in S^2$ tais que $\Omega_r X = \Omega_r Y$. Temos,

$$\begin{aligned}
 \Omega_r X &= \Omega_r Y \\
 X - 2 \langle X, u \rangle u &= Y - 2 \langle Y, u \rangle u \\
 X - Y &= 2 \langle X - Y, u \rangle u
 \end{aligned}$$

Agora tomando o produto escalar com u , em ambos os lados dessa última igualdade, vemos que,

$$\begin{aligned}\langle X - Y, u \rangle &= 2 \langle X - Y, u \rangle \langle u, u \rangle \\ \langle X - Y, u \rangle &= 2 \langle X - Y, u \rangle \\ \langle X - Y, u \rangle &= 0\end{aligned}$$

Portanto, $X - Y = 0$, e assim, $X = Y$. Logo, tal aplicação é injetora.

Agora considere um ponto qualquer $Y \in S^2$. Seja $X = \Omega_r Y$. Então,

$$\begin{aligned}X &= \Omega_r Y \\ \Omega_r X &= \Omega_r \Omega_r Y \\ \Omega_r X &= Y\end{aligned}$$

o que mostra que Y está na imagem de Ω_r . Logo tal aplicação é sobrejetora. Sendo injetora e sobre, concluímos que a mesma é uma bijeção. □

Teorema 2.55. $\Omega_r X = X$ se, e somente se, $X \in r$.

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\Omega_r X = X$, então, como $\Omega_r X = X - 2 \langle X, u \rangle u = X$, temos que $\langle X, u \rangle = 0$, e, portanto $X \in r$.

(\Leftarrow) Se $X \in r$, então $\langle X, u \rangle = 0$, e, assim $\Omega_r X = X - 2 \langle X, u \rangle u = X - 0 = X$. □

Consideremos agora a composição de duas reflexões. Sejam r e s duas retas distintas com pólos u e v , respectivamente. Considere ainda, P um dos pontos de intersecção das retas r e s . Fixemos uma base ortonormal, $\{u_1, u_2, u_3\}$ com $u_3 = P$. Nessas condições, u e v são vetores unitários expressos como combinações lineares de $\{u_1, u_2\}$. Assim, podemos escolher reais θ e ϕ tais que:

$$\begin{aligned}u &= (-\text{sen } \theta)u_1 + (\text{cos } \theta)u_2, \\ v &= (-\text{sen } \phi)u_1 + (\text{cos } \phi)u_2.\end{aligned}$$

Aplicando-se a reflexão pela reta r , como definida pela equação 2.51, vemos que,

$$\begin{aligned}\Omega_r e_1 &= (\text{cos } 2\theta)e_1 + (\text{sen } 2\theta)e_2, \\ \Omega_r e_2 &= (\text{cos } 2\phi)e_1 - (\text{sen } 2\phi)e_2, \\ \Omega_r e_3 &= e_3.\end{aligned}$$

Dessa maneira, em relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$, a reflexão Ω_r tem a seguinte matriz,

$$\begin{bmatrix} \text{cos } 2\theta & \text{sen } 2\theta & 0 \\ \text{sen } 2\theta & -\text{cos } 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizaremos para tal matriz a seguinte notação,

$$\begin{bmatrix} \text{rot } \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde, $\text{rot } \theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$.

Similarmente, para a reflexão Ω_s , escrevemos,

$$\begin{bmatrix} \text{rot } \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, vemos que a composição dessas duas reflexões, produz a seguinte matriz,

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta & 0 \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \text{sen } 2\phi & 0 \\ \text{sen } 2\phi & -\cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2(\theta - \phi) & -\text{sen } 2(\theta - \phi) & 0 \\ \text{sen } 2(\theta - \phi) & \cos 2(\theta - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a qual pode ser reescrita como,

$$\begin{bmatrix} \text{rot } 2(\theta - \phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.56. Se r e s são retas passando pelo ponto P , então a composição $\Omega_r\Omega_s$ define uma **rotação em torno de P** . O caso particular em que $r = s$, define a identidade. Denotamos o conjunto de todas as rotações em torno de P por $\Theta(P)$.

Teorema 2.57. *Sejam r, s, t três retas passando pelo ponto P . Então existe uma única reta m , passando por P tal que,*

$$\Omega_r\Omega_s\Omega_t = \Omega_m.$$

Demonstração. Considere um $X \in S^2$, e calculemos $\Omega_r\Omega_s\Omega_t X$, onde as retas r, s, t têm pólos u, v, w , respectivamente. Em primeiro lugar, temos,

$$\Omega_t X = X - 2 \langle X, w \rangle w$$

Agora,

$$\begin{aligned} \Omega_s\Omega_t X &= \Omega_s (X - 2 \langle X, w \rangle w) \\ &= X - 2 \langle X, w \rangle w - 2 \langle X - 2 \langle X, w \rangle w, v \rangle v \\ &= X - 2 \langle X, w \rangle w - 2 \langle X, v \rangle v + 4 \langle X, w \rangle \langle w, v \rangle v \\ &= X - 2 \langle X, w \rangle w - 2 (\langle X, v \rangle - 2 \langle X, w \rangle \langle w, v \rangle) v \\ &= X - 2 \langle X, w \rangle w - 2 (\langle X, v \rangle + \langle -2 \langle X, w \rangle w, v \rangle) v \\ &= X - 2 \langle X, w \rangle w - 2 \langle X - 2 \langle X, w \rangle w, v \rangle v \end{aligned}$$

Definimos,

$$Y = X - 2 \langle X, w \rangle w$$

de modo que,

$$\Omega_s \Omega_t X = Y - 2 \langle Y, v \rangle v$$

Agora,

$$\begin{aligned} \Omega_r \Omega_s \Omega_t X &= \Omega_r (Y - 2 \langle Y, v \rangle v) \\ &= Y - 2 \langle Y, v \rangle v - 2 \langle Y - 2 \langle Y, v \rangle v, u \rangle u \end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, temos,

$$\Omega_r \Omega_s \Omega_t X = Y - 2 \langle Y, v \rangle v - [\langle Y - 2 \langle Y, v \rangle v, u \rangle] u$$

Assim, definimos $Z = Y - 2 \langle Y, v \rangle v$ de modo que, obtemos finalmente,

$$\Omega_r \Omega_s \Omega_t X = Z - 2 \langle Z, u \rangle u$$

□

Teorema 2.58. *Sejam $T = \Omega_r \Omega_s \in \Theta(P)$ e m um outra reta qualquer passando por P . Então existem, e são únicas as retas n e n' passando por P tais que,*

$$T = \Omega_m \Omega_n = \Omega_{n'} \Omega_m$$

Demonstração. Sejam as retas r, s, m, n, n' , como no enunciado do teorema. Pelo Teorema 2.57 podemos escrever $\Omega_m \Omega_r \Omega_s X = \Omega_n X$. Agora, fazemos

$$\Omega_m (\Omega_m \Omega_r \Omega_s X) = \Omega_m \Omega_n X \Rightarrow (\Omega_m \Omega_m) \Omega_r \Omega_s X = \Omega_m \Omega_n X$$

Agora pelo item (b) do Teorema 2.54 vemos que $\Omega_m \Omega_m$ é a identidade, logo,

$$\Omega_r \Omega_s X = \Omega_m \Omega_n X.$$

Da mesma forma, temos $\Omega_r \Omega_s \Omega_m X = \Omega_{n'} X$, o que nos leva a,

$$\begin{aligned} (\Omega_r \Omega_s \Omega_m) \Omega_m X &= \Omega_{n'} \Omega_m X, \\ \Omega_r \Omega_s (\Omega_m \Omega_m) X &= \Omega_{n'} \Omega_m X, \\ \Omega_r \Omega_s X &= \Omega_{n'} \Omega_m X. \end{aligned}$$

□

Definição 2.59. Seja m uma reta qualquer, e sejam r e s perpendiculares a m . A aplicação $\Omega_r \Omega_s$ é chamada uma **translação ao longo de m** .

Teorema 2.60. a) *Toda translação de S^2 é também uma rotação.*

b) *Toda rotação de S^2 é também uma translação.*

Demonstração. a) Como vimos pela Definição 2.59, a translação é definida como a composição $\Omega_r \Omega_s$, onde r, s são perpendiculares à uma reta qualquer m . O Teorema 2.47 nos garante que as retas r e s intersectam-se nos pólos da reta m . Ou seja, $r \cap s = \{P, -P\}$, onde $P, -P$ são os pólos de m . Nessas condições, de acordo com a Definição 2.56, tal translação também é uma rotação, pois as retas r e s intersectam-se nos pontos P e $-P$, condição que define a rotação.

b) Da mesma forma, dada uma rotação, $\Omega_r\Omega_s$, as retas r e s intersectam-se no ponto P , e também em seu antípoda, $-P$. Como o ponto $P \in r$ então $\langle P, v \rangle = 0$, onde v é um pólo para a reta r . Similarmente, o ponto $P \in s$ então $\langle P, u \rangle = 0$, onde u é um pólo para a reta s . Ou seja, o vetor \overrightarrow{OP} é ortogonal as duas retas, r e s . Logo, a reta m cujo pólo é o vetor \overrightarrow{OP} , é perpendicular a ambas as retas, r e s , o que caracteriza a transformação $\Omega_r\Omega_s$ como uma translação. □

Definição 2.61. Sejam r e s retas perpendiculares à reta t . Então a transformação $\Omega_r\Omega_s\Omega_t$ é chamada uma **reflexão com deslizamento** com eixo t .

Observação 2.62. Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal com u_3 um pólo de t , então

$$\Omega_t u_1 = u_1, \Omega_t u_2 = u_2, \Omega_t u_3 = -u_3.$$

Observação 2.63. Com respeito a uma base ortonormal como descrita na Observação 2.62, uma reflexão com deslizamento com eixo t é representada matricialmente por

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda & -\text{sen } \lambda & 0 \\ \text{sen } \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.64. Uma aplicação $T : S^2 \rightarrow S^2$ é uma **isometria** se

$$d(T(X), T(Y)) = d(X, Y),$$

para todos $X, Y \in S^2$.

Observação 2.65. Como vimos no Teorema 2.54, $d(\Omega_r X, \Omega_r Y) = d(X, Y)$. Assim a reflexão por uma reta em S^2 é uma isometria da esfera unitária.

Observação 2.66. Consideremos a seguinte composição de reflexões, $\Omega_r\Omega_s$. Sejam $X, Y \in S^2$. Podemos escrever que

i) $\Omega_r\Omega_s X = \Omega_r Z_1$, onde $Z_1 = \Omega_s X$;

ii) $\Omega_r\Omega_s Y = \Omega_r Z_2$, onde $Z_2 = \Omega_s Y$.

Assim,

$$\begin{aligned} d(\Omega_r\Omega_s X, \Omega_r\Omega_s Y) &= d(\Omega_r Z_1, \Omega_r Z_2), \\ &= d(Z_1, Z_2), \\ &= d(\Omega_s X, \Omega_s Y), \\ &= d(X, Y). \end{aligned}$$

Observação 2.67. O mesmo vale para uma composição de três reflexões. Para tanto sejam $X, Y \in S^2$ e as reflexões $\Omega_r, \Omega_s, \Omega_t$. Temos,

$$d(\Omega_r \Omega_s \Omega_t X, \Omega_r \Omega_s \Omega_t Y) = d(\Omega_r \Omega_s Z_1, \Omega_r \Omega_s Z_2),$$

onde $Z_1 = \Omega_t X$ e $Z_2 = \Omega_t Y$.

Mas, pela observação 2.66, temos,

$$\begin{aligned} d(\Omega_r \Omega_s \Omega_t X, \Omega_r \Omega_s \Omega_t Y) &= d(\Omega_r \Omega_s Z_1, \Omega_r \Omega_s Z_2), \\ &= d(Z_1, Z_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(\Omega_r \Omega_s \Omega_t X, \Omega_r \Omega_s \Omega_t Y) &= d(Z_1, Z_2), \\ &= d(\Omega_t X, \Omega_t Y), \\ &= d(X, Y). \end{aligned}$$

Logo, a aplicação $\Omega_r \Omega_s \Omega_t$ também é uma isometria.

Finalmente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.68. *As transformações em S^2 , reflexão por uma reta (Definição 2.51), rotação (Definição 2.56), translação (Definição 2.59) e reflexão com deslizamento (Definição 2.61) são isometrias em S^2 .*

2.5 Geodésicas em S^2

Em qualquer espaço que se considere, torna-se interessante determinar a distância entre dois pontos desse mesmo espaço. Não é diferente no caso da esfera unitária, S^2 . Já determinamos tal distância, como mostrado na Definição 2.49. Também já vimos que a intersecção entre S^2 e um plano passando pela origem é uma circunferência de raio máximo (Proposição 2.38), bem como tal circunferência de raio máximo define uma reta em S^2 (Definição 2.37). Vamos agrupar todos esses fatos para mostrar que, de fato, em S^2 um arco dessa circunferência máxima, ou ainda um segmento de reta, é a curva de menor comprimento conectando dois pontos em S^2 .

Para tratarmos de comprimentos de curvas em S^2 é conveniente introduzirmos coordenadas esféricas. Assim dado um ponto $P \in S^2$, com coordenadas cartesianas (x, y, z) que satisfazem à condição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, consideraremos as coordenadas esféricas para tal ponto, ou seja $P(r, \theta, \phi)$. Mas como $P \in S^2$, então $r = 1$. Logo $P(1, \theta, \phi)$.

A relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas esféricas (veja Figura 2.7) é dada por,

$$\begin{aligned} x &= \text{sen } \phi \cos \theta, \\ y &= \text{sen } \phi \text{sen } \theta, \\ z &= \cos \phi. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Utilizando tais coordenadas, podemos enunciar o seguinte teorema.

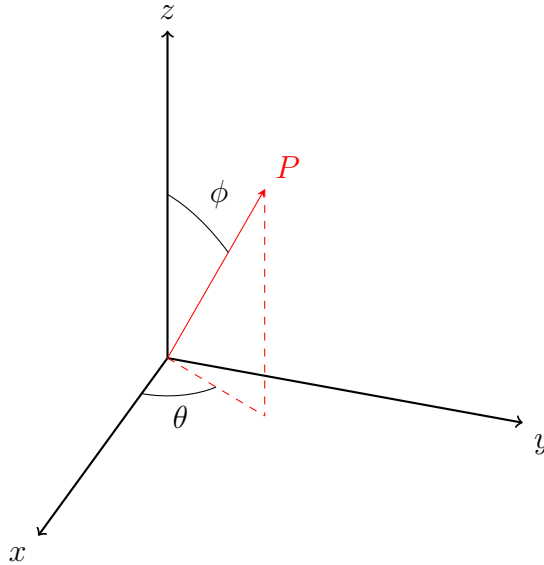


Figura 2.7: Coordenadas esféricas

Teorema 2.69. *A curva com o menor comprimento entre dois pontos, P e Q , em S^2 é um arco de circunferência máxima.*

Demonstração. Os pontos P e Q determinam uma única reta pelo Teorema 2.42, e vamos denotar o pólo dessa reta por u . Também sabemos que a distância entre tais pontos é dada por $d(P, Q) = \arccos \langle P, Q \rangle$ (Definição 2.49). Nessas condições, a parametrização dessa reta é dada por $\gamma(t) = (\cos t)P + (\sin t)Q$, com $t \in \mathbb{R}$. Agora, a partir dessa parametrização, e com o auxílio das coordenadas esféricas, dado que $\gamma(a) = P$ e $\gamma(b) = Q$. Escrevemos $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, e o comprimento dessa curva é dado por,

$$L_\sigma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

Das equações 2.6, obtemos,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos \phi(t) \cos \theta(t) \phi'(t) - \sin \phi(t) \sin \theta(t) \theta'(t), \\ y'(t) &= \cos \phi(t) \sin \theta(t) \phi'(t) + \sin \phi(t) \cos \theta(t) \theta'(t), \\ z'(t) &= -\sin \phi(t) \phi'(t). \end{aligned}$$

Assim, o comprimento de tal curva é agora dado por,

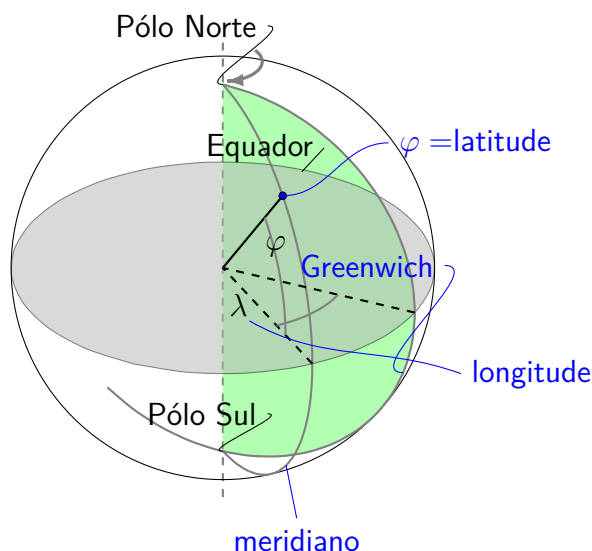
$$\begin{aligned} L_\sigma &= \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + \sin^2 \phi(t) (\theta'(t))^2} dt, \\ &\geq \int_a^b \phi'(t) dt, \\ &= \phi(b) - \phi(a), \\ &= \widehat{POQ}, \\ &= \widehat{PQ}. \end{aligned}$$

com a desigualdade estrita mantendo-se a menos que $\phi'(t) = 0$ ou $\sin^2 \phi(t) = 0$ para todo t . Isto é, a menos que σ nunca deixe o arco \widehat{PQ} . □

Assim a curva com menor comprimento entre dois pontos em S^2 é dada por um segmento de reta unindo tais pontos.

Como uma aplicação desse resultado, vamos considerar o cálculo da distância entre duas cidades na superfície terrestre, conhecidas as coordenadas geográficas, latitude e longitude, das mesmas. Consideremos:

- i) Rio Claro (SP) com latitude $-22,4^\circ$ e longitude $-47,6^\circ$;
- ii) Recife(PE) com latitude $-8,0^\circ$ e longitude $-34,5^\circ$



Latitude e longitude

Para utilizarmos coordenadas esféricas, faremos a seguinte convenção. Tomaremos o Meridiano de Greenwich como a referência para a medida do ângulo ϕ , no sentido de rotação do eixo x em direção ao eixo y (ver figura 2.7), bem como o Pólo Norte como referência para o ângulo θ . Assim para as cidades citadas teremos,

- i) Rio Claro (SP): $\theta_1 = 337,6^\circ$ e $\phi_1 = 137,6^\circ$;
- ii) Recife (PE): $\theta_2 = 352^\circ$ e $\phi_2 = 124,5^\circ$.

Assim, a partir das equações 2.6, as coordenadas, sobre a esfera unitária S^2 , seriam,

- a) Rio Claro (SP): $P_1 = (\text{sen } \phi_1 \cos \theta_1, \text{sen } \phi_1 \text{sen } \theta_1, \cos \phi_1) = (0.62, -0.26, -0.74)$;
- b) Recife (PE): $P_2 = (\text{sen } \phi_2 \cos \theta_2, \text{sen } \phi_2 \text{sen } \theta_2, \cos \phi_2) = (0.82, -0.11, -0,57)$.

Assim,

$$\langle P_1, P_2 \rangle = 0.958 \Rightarrow d(P_1, P_2) = \arccos \langle P_1, P_2 \rangle = 0,093\pi.$$

Portanto, a distância entre Rio Claro e Recife é, sobre a superfície terrestre igual a,

$$D = 0,093 \cdot \pi \cdot 6371 = 1884km.$$

3 Geometria Hiperbólica

Introdução

Como vimos no capítulo anterior, a geometria na esfera apresenta um primeiro exemplo de uma geometria não euclidiana. Nessa geometria, o quinto postulado de Euclides não é satisfeito, pois, dada uma reta na esfera unitária e um ponto não pertencente a essa mesma reta, não existe uma reta passando por esse ponto e paralela à reta dada. Veremos agora uma segunda geometria na qual esse postulado também não é satisfeito. Entretanto agora, dada uma reta e um ponto fora dessa reta, existem mais do que uma reta paralela à reta dada.

Esse tipo de geometria, chamada de geometria hiperbólica tem origem no trabalho independente de dois matemáticos, Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) e Janos Bolyai (1802-1860).

Interessante observar que a geometria hiperbólica, surgindo como uma especulação matemática acerca do famoso quinto postulado de Euclides, encontrou sua realização no mundo físico, com o advento da Teoria da Relatividade Especial (Henri Poincaré (1854-1912) e Albert Einstein (1879-1955)).

O matemático alemão Hermann Minkowski (1864-1909) percebeu que um conjunto de transformações que envolviam as coordenadas espaciais e temporais de um dado evento no universo, poderia ser melhor analisada se se considerasse um espaço quadridimensional, três dimensões espaciais e uma temporal. Tal construção ficou conhecida como espaço-tempo de Minkowski. Nessa geometria dado um ponto desse espaço, (x, y, z, t) , associa-se ao mesmo um escalar da forma $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Dentre os vários modelos disponíveis para tal geometria, como, por exemplo, o Modelo do disco de Poincaré, ou o modelo do semi-plano de Poincaré, adotamos o modelo de Minkowski, ou seja, a folha superior de um hiperbolóide de duas folhas com o eixo ao longo do eixo z .

3.1 Preliminares algébricas

Nosso modelo de geometria esférica foi definido como um subconjunto de \mathbb{R}^3 , juntamente com o produto escalar usual de \mathbb{R}^3 . Vamos adotar a mesma abordagem para desenvolvermos um modelo da geometria hiperbólica. Para tanto, consideraremos um elemento desse conjunto, uma terna ordenada da forma (x, y, z) , com $x, y, z \in \mathbb{R}$, mas adotaremos uma aplicação diferente como produto escalar nesse espaço.

Definição 3.1. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Definimos a aplicação

$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, denominada **produto escalar**, por,

$$\psi(u, v) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2$$

Tal produto escalar tem as seguintes propriedades.

Teorema 3.2. *Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos,*

- a) $\psi(u, v) = \psi(v, u)$;
- b) $\psi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\psi(u, w) + \beta\psi(v, w)$;
- c) $\psi(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$, se, e somente se, $u = 0$.

Demonstração. a)

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2 \\ &= x_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot y_1 - z_2 \cdot z_1 \\ &= \psi(v, u). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \psi(\alpha u + \beta v, w) &= (\alpha x_1 + \beta x_2)x_3 + (\alpha y_1 + \beta y_2)y_3 - (\alpha z_1 + \beta z_2)z_3 \\ &= \alpha x_1 x_3 + \beta x_2 x_3 + \alpha y_1 y_3 + \beta y_2 y_3 - \alpha z_1 z_3 - \beta z_2 z_3 \\ &= \alpha x_1 x_3 + \alpha y_1 y_3 - \alpha z_1 z_3 + \beta x_2 x_3 + \beta y_2 y_3 - \beta z_2 z_3 \\ &= \alpha(x_1 x_3 + y_1 y_3 - z_1 z_3) + \beta(x_2 x_3 + y_2 y_3 - z_2 z_3) \\ &= \alpha\psi(u, w) + \beta\psi(v, w) \end{aligned}$$

c) $\psi(0, v) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 0 \cdot v_3 = 0$.

□

Diante desse novo produto escalar, podemos classificarmos um vetor de \mathbb{R}^3 , da seguinte maneira.

Definição 3.3. Seja v um vetor não nulo em \mathbb{R}^3 . O vetor v é dito ser,

- a) do tipo espaço se $\psi(v, v) > 0$;
- b) do tipo tempo se $\psi(v, v) < 0$;
- c) do tipo luz se $\psi(v, v) = 0$.

Observação 3.4. Consideremos a base canônica de \mathbb{R}^3 , tal que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Temos, a partir das Definições 3.1 e 3.3, que,

- i) $\psi(e_1, e_1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 1 > 0$ e $\psi(e_2, e_2) = 1 > 0$ são vetores do tipo espaço;
- ii) $\psi(e_3, e_3) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$ é um vetor do tipo tempo;

iii) o vetor $u = e_1 - e_3 = (1, 0, -1)$ é um vetor do tipo luz, pois

$$\psi(u, u) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) = 0.$$

Definição 3.5. Dado $v \in \mathbb{R}^3$, consideremos a seguinte aplicação, $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por,

$$\rho(v) = \sqrt{|\psi(v, v)|}.$$

Teorema 3.6. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. A aplicação $\rho(v)$ tem as seguintes propriedades,*

- a) $\rho(v) \geq 0$.
- b) $\rho(\lambda v) = |\lambda| \rho(v)$.
- c) $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$

Demonstração. a) Como vimos no Definição 3.1, a aplicação assume valores reais. Logo $|\psi(v, v)| > 0$, o que implica que $\rho(v) = \sqrt{|\psi(v, v)|} > 0$. Agora se $v = 0$, temos $\rho(0) = \sqrt{|\psi(0, 0)|} = \sqrt{0} = 0$.

b)

$$\begin{aligned} \rho(\lambda v) &= \sqrt{|\psi(\lambda v, \lambda v)|} \\ &= \sqrt{|\lambda v_1 \lambda v_1 + \lambda v_2 \lambda v_2 - \lambda v_3 \lambda v_3|} \\ &= \sqrt{|\lambda^2 (v_1 v_1 + v_2 v_2 - v_3 v_3)|} \\ &= |\lambda| \sqrt{|\psi(v, v)|} \\ &= |\lambda| \rho(v). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \rho^2(u + v) &= \left(\sqrt{|\psi(u + v, u + v)|} \right)^2 \\ &= |\psi(u + v, u + v)| \\ &= |\psi(u, u) + \psi(u, v) + \psi(v, u) + \psi(v, v)| \\ &= |\psi(u, u) + 2\psi(u, v) + \psi(v, v)| \\ &\leq \psi(u, u) + 2\sqrt{|\psi(u, u)|} \sqrt{|\psi(v, v)|} + \psi(v, v) \\ &\leq \rho^2(u) + 2\rho(u)\rho(v) + \rho^2(v) \\ &\leq (\rho(u) + \rho(v))^2, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado.

□

Como tal aplicação ρ tem as propriedades usuais de norma, vamos defini-la como a norma para esse espaço.

Definição 3.7. Dado um vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ definimos uma ψ norma para esse vetor como

$$\|v\|_\psi = \sqrt{|\psi(v, v)|}$$

Introduzimos aqui um índice para assegurar que tal norma é obtida a partir do produto escalar como na Definição 3.1. Entretanto, por uma simplicidade de notação, no restante do capítulo, vamos utilizar a norma sem tal notação,

Assim, de fato, e_1, e_2, e_3 , elementos da base canônica de \mathbb{R}^3 , são vetores unitários, como se pode ver da Observação 3.4

A partir dessa mesma aplicação ψ podemos definir a ortogonalidade de dois vetores em \mathbb{R}^3 .

Definição 3.8. Dados $u, v \in \mathbb{R}^3$, dizemos que u e v são ortogonais, segundo ψ , se

$$\psi(u, v) = 0.$$

À exemplo do que ocorreu com a norma de um vetor, definiremos o produto vetorial de dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ de modo que seja compatível com a aplicação ψ (Definição 3.1).

Definição 3.9. Sejam os vetores $u = (u_x, u_y, u_z)$ e $v = (v_x, v_y, v_z)$ em \mathbb{R}^3 . O produto vetorial, $(u \times v)_\psi$ é definido por,

$$(u \times v)_\psi = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, -u_z v_y + u_y v_x)$$

Esse produto vetorial apresenta as seguintes propriedades.

Teorema 3.10. *Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos:*

- a) $(u \times u)_\psi = 0$
- b) $(u \times v)_\psi = -(v \times u)_\psi$.
- c) $((\alpha u + \beta v) \times w)_\psi = \alpha (u \times w)_\psi + \beta (v \times w)_\psi$.
- d) $(u \times (\alpha v + \beta w))_\psi = \alpha (u \times v)_\psi + \beta (u \times w)_\psi$.
- e) *Sendo $u \neq 0$ e $v \neq 0$, $(u \times v)_\psi = 0$ se, e somente se, u e v são proporcionais.*
- f) $\psi((u \times v)_\psi, u) = \psi((u \times v)_\psi, v) = 0$.
- g) $\psi((u \times v)_\psi, w) = \psi(u, (v \times w)_\psi)$.

Demonstração. a)

$$\begin{aligned} (u \times u)_\psi &= (u_y u_z - u_z u_y, u_z u_x - u_x u_z, -u_x u_y + u_y u_x) \\ &= (0, 0, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (u \times v)_\psi &= (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, -u_z v_y + u_y v_x) \\ &= (-u_z v_y + u_y v_z, -u_x v_z + u_z v_x, u_y v_x - u_z v_y) \\ &= -(u_z v_y - u_y v_z, u_x v_z - u_z v_x, -u_y v_x + u_z v_y) \\ &= -(v \times u)_\psi \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} ((\alpha u + \beta v) \times w)_\psi &= ((\alpha u_y + \beta v_y)w_z - (\alpha u_z + \beta v_z)w_y, \\ &\quad (\alpha u_z + \beta v_z)w_x - (\alpha u_x + \beta v_x)w_z, \\ &\quad (\alpha u_x + \beta v_x)w_y - (\alpha u_y + \beta v_y)w_x) \\ &= (\alpha(u_y w_z - u_z w_y) + \beta v_y w_z - v_z w_y, \\ &\quad \alpha(u_z w_x - u_x w_z) + \beta v_z w_x - v_x w_z, \\ &\quad \alpha(-u_x w_y + u w_x) + \beta v_x w_y + v_y w_x) \\ &= \alpha(u_y w_z - u_z w_y, u_z w_x - u_x w_z, -u_x w_y + u_y w_x) \\ &\quad + \beta(v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, -v_x w_y + v_y w_x) \\ &= \alpha(u \times w)_\psi + \beta(v \times w)_\psi \end{aligned}$$

d) Similar ao item c)

e) Se $v = \alpha u$, temos $(u \times v)_\psi = (u \times (\alpha u))_\psi = \alpha(u \times u)_\psi = 0$. Por outro lado, se $(u \times v)_\psi$, para quaisquer u, v não nulos, temos que,

$$(u \times v)_\psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_y v_z - u_z v_y = 0 \Rightarrow \frac{u_y}{u_z} = \frac{v_y}{v_z} \Rightarrow u_y = \frac{u_z}{v_z} v_y \\ u_z v_x - u_x v_z = 0 \Rightarrow \frac{u_x}{u_z} = \frac{v_x}{v_z} \Rightarrow u_x = \frac{u_z}{v_z} v_x \end{cases}$$

De onde concluímos que $u = \alpha v$, com $\alpha = \frac{u_z}{v_z} \in \mathbb{R}$.

f)

$$\begin{aligned} \psi((u \times v)_\psi, u) &= (u_y v_z - u_z v_y)u_x + (u_z v_x - u_x v_y)u_y + (-u_x v_y + u_y v_x)u_z \\ &= u_y v_z u_x - u_z v_y u_x + u_z v_x u_y - u_x v_z u_y - u_x v_y u_z + u_y v_x u_z \\ &= u_x u_y v_z - u_x u_y v_z + u_y u_z v_x - u_y u_z v_x - u_x u_z v_y + u_x u_z v_y \\ &= 0 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \psi((u \times v)_\psi, w) &= (u_y v_z - u_z v_y)w_x + (u_z v_x - u_x v_z)w_y + (-u_x v_y + u_y v_x)w_z \\ &= u_x(v_y w_z - v_z w_y) + u_y(v_z w_x - v_x w_z) - u_z(-v_x w_y + v_y w_x) \\ &= \psi(u, (v \times w)_\psi) \end{aligned}$$

□

Antes de proseguirmos com nosso desenvolvimento, apresentaremos dois resultados que serão úteis posteriormente. Ambos se referem ao produto vetorial e a aplicação ψ .

Proposição 3.11. *Dados os vetores $u, v, w, z \in \mathbb{R}^3$ temos,*

$$\psi(u \times v, w \times z) = -\psi(u, w)\psi(v, z) + \psi(v, w)\psi(u, z).$$

Demonstração. Temos,

$$\begin{aligned}
 \psi(u \times v, w \times z) &= (u_2v_3 - u_3v_2)(w_2z_3 - w_3z_2) \\
 &\quad + (u_3v_1 - u_1v_3)(w_3z_1 - w_1z_3) \\
 &\quad - (u_2v_1 - u_1v_2)(w_2z_1 - w_1z_2) \\
 &= u_2v_3w_2z_3 - u_2v_3w_3z_2 - u_3v_2w_2z_3 + u_3v_2w_3z_2 + \\
 &\quad + u_3v_1w_3z_1 - u_3v_1w_1z_3 - u_1v_3w_3z_1 + u_1v_3w_1z_3 + \\
 &\quad - u_2v_1w_2z_1 - u_2v_1w_1z_2 - u_1v_2w_2z_1 + u_1v_2w_1z_2 \\
 &= -u_1w_1v_1z_1 - u_1w_1v_2z_2 - u_1w_1v_3z_3 + \\
 &\quad - u_2w_2v_1z_1 - u_2w_2v_2z_2 - u_2w_2v_3z_3 + \\
 &\quad - u_3w_3v_1z_1 - u_3w_3v_2z_2 - u_3w_3v_3z_3 + \\
 &\quad + v_1w_1u_1z_1 + v_1w_1u_2z_2 - v_1w_1u_3z_3 \\
 &\quad + v_2w_2u_1z_1 + v_2w_2u_2z_2 - v_2w_2u_3z_3 \\
 &\quad - v_3w_3u_1z_1 - v_3w_3u_2z_2 + v_3w_3u_3z_3 \\
 &= -\psi(u, v)\psi(v, z) + \psi(v, w)\psi(u, z).
 \end{aligned}$$

□

Proposição 3.12. *Dados os vetores $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$ em \mathbb{R}^3 , temos que,*

$$u \times (v \times w) = -\psi(u, w)v + \psi(u, v)w.$$

Demonstração. Da Definição 3.9 temos que,

$$(v \times w)_\psi = (v_yw_z - v_zw_y, v_zw_x - v_xw_z, -v_zw_y + v_yw_x).$$

Mais uma vez, aplicando a mesma definição de produto vetorial, agora ao produto $u \times (v \times w)$, encontramos que,

$$\begin{aligned}
 u \times (v \times w) &= (u_y(-v_xw_y + v_yw_x) - u_z(v_zw_x - v_xw_z), \\
 &\quad u_z(v_yw_z - v_zw_y) - u_x(-v_xw_y + v_yw_x), \\
 &\quad -u_x(v_zw_x - v_xw_z) + u_y(v_yw_z - v_zw_y)).
 \end{aligned}$$

Vamos analisar, em detalhe a primeira componente desse duplo produto vetorial. Temos,

$$\begin{aligned}
 u_y(-v_xw_y + v_yw_x) - u_z(v_zw_x - v_xw_z) &= v_x(-u_yw_y + u_zw_z) + w_x(u_yv_y - u_zv_z), \\
 &= v_x(-u_xw_x - u_yw_y + u_zw_z) + w_x(u_xv_x + u_yv_y - u_zv_z).
 \end{aligned}$$

O termo que surge no primeiro parênteses é, pela Definição 3.1, $-\psi(u, w)$, enquanto que o termo no segundo parênteses é $\psi(u, v)$. Assim, essa primeira componente, toma a forma,

$$-\psi(u, w)v_x + \psi(u, v)w_x.$$

De maneira análoga encontramos que, para a segunda e terceira componentes do duplo produto vetorial, $-\psi(u, w)v_y + \psi(u, v)w_y$ e $-\psi(u, w)v_z + \psi(u, v)w_z$, respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned}
 u \times (v \times w) &= (-\psi(u, w)v_x + \psi(u, v)w_x, -\psi(u, w)v_y + \psi(u, v)w_y, -\psi(u, w)v_z + \psi(u, v)w_z), \\
 &= -\psi(v, w)(v_x, v_y, v_z) + \psi(u, v)(w_x, w_y, w_z),
 \end{aligned}$$

de onde segue o resultado.

□

Como temos três tipos de vetores, vamos determinar em que condições teremos uma base para tal espaço, considerando a aplicação ψ (Definição 3.1).

Teorema 3.13. a) *Todo conjunto ortonormal, segundo ψ , de três vetores é uma base para \mathbb{R}^3 .*

b) *Toda base ortonormal, segundo ψ , têm dois vetores do tipo espaço e um vetor do tipo tempo.*

c) *Para cada par de vetores ortonormais, $\{u, v\}$, o conjunto $\{u, v, u \times v\}$ é uma base ortonormal, segundo ψ .*

d) *Para cada vetor unitário do tipo espaço ou do tipo tempo, v , há uma base ortonormal, segundo ψ , contendo v .*

Demonstração. a) Precisamos mostrar que um conjunto ortonormal é linearmente independente. Ou seja, se o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é ortonormal, a equação

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0,$$

implica que cada λ_i , $i = 1, 2, 3$ é nulo. De fato, se fizermos,

$$\psi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, u_1) = \psi(0, u_1) = 0.$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, u_1) &= 0, \\ \psi(\lambda_1 u_1, u_1) + \psi(\lambda_2 u_2, u_1) + \psi(\lambda_3 u_3, u_1) &= 0, \\ \lambda_1 \psi(u_1, u_1) &= 0, \\ \lambda_1 &= 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga obtemos que $\lambda_2 = 0$ e que $\lambda_3 = 0$, e, portanto, o conjunto ortonormal dado é linearmente independente.

b) Consideremos como base, um conjunto ortonormal linearmente independente da forma $\{u_1, u_2, u_3\}$, tal que todos os vetores desse conjunto são do tipo espaço, ou seja, $\psi(u_i, u_i) > 0$ para $i = 1, 2, 3$. Seja $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor qualquer, escrito, nessa base, como $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Temos,

$$\begin{aligned} \psi(v, v) &= \psi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3), \\ &= \alpha_1^2 \psi(u_1, u_1) + \alpha_2^2 \psi(u_2, u_2) + \alpha_3^2 \psi(u_3, u_3). \end{aligned}$$

E como $\psi(u_i, u_i) > 0$ para $i = 1, 2, 3$, vemos que $\psi(v, v) > 0$, para qualquer vetor v . Logo v é do tipo espaço. De maneira análoga, se todos os u_i , $i = 1, 2, 3$, forem do tipo tempo, ou seja, $\psi(u_i, u_i) < 0$ para $i = 1, 2, 3$, teremos que um vetor qualquer $v \in \mathbb{R}^3$ somente será do tipo tempo. Assim, concluímos que para que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ seja uma base, pelo menos um desses vetores, digamos u_1 , deve ser tipo espaço, enquanto que um outro, por exemplo u_3 , deve ser do tipo tempo. Considerando que $(u_1 \times u_3) \times u_2 = 0$, vemos que u_2 e $u_1 \times u_3$ são linearmente dependentes. Agora, a partir da Proposição 3.11, vemos que,

$$\psi(u_1 \times u_3, u_1 \times u_3) = -\psi(u_1, u_1) \psi(u_3, u_3) = 1.$$

Assim, $u_1 \times u_3$ é um vetor do tipo espaço, e conseqüentemente, u_2 também o é.

c) A partir da Proposição 3.11, escrevemos,

$$\psi(u \times v, u \times v) = -\psi(u, u)\psi(v, v) + \psi(u, v)\psi(u, v)$$

Como o conjunto $\{u, v\}$ é ortonormal, temos que $\psi(u, v) = 0$ e, portanto,

$$\psi(u \times v, u \times v) = -\psi(u, u)\psi(v, v)$$

Sendo o conjunto dado ortonormal $\psi(u, u)$ e $\psi(v, v)$ podem assumir os valores $+1$ e -1 . Portanto,

$$\psi(u \times v, u \times v) = \pm 1$$

e, conseqüentemente, o conjunto $\{u, v, u \times v\}$ é ortonormal.

d) Vamos supor que o vetor v é do tipo espaço. Seja w qualquer vetor unitário do tipo tempo. Se $\psi(v, w) = 0$, podemos usar $\{v, w, v \times w\}$ como base. Caso contrário, escolhamos $u' = v + \lambda w$, onde $\lambda = -\frac{1}{\psi(v, w)}$. Então,

$$\begin{aligned} \psi(u', u') &= 1 + 2\lambda\psi(v, w) - \lambda^2 \\ &= 1 - 2 - \lambda^2 \\ &= -(1 + \lambda^2). \end{aligned}$$

Se tomarmos

$$u = \frac{v + \lambda w}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

então $\{u, v, u \times v\}$ é uma base ortonormal. Supondo, por outro lado, que v é um vetor do tipo tempo, uma construção similar, usando um vetor unitário do tipo espaço, w , leva a uma base ortonormal $\{u, v, u \times v\}$, onde $u = \frac{v - \lambda w}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$ e $\lambda = \frac{1}{\psi(v, w)}$.

□

Teorema 3.14. a) Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal, para todo $v \in \mathbb{R}^3$, temos que,

$$v = \sum_{i=1}^3 \psi(v, u_i)\psi(u_i, u_i)u_i$$

b) Seja $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor do tipo tempo. Suponha que $w \times v \neq 0$ e $\psi(v, w) = 0$. Então w é um vetor do tipo espaço.

Demonstração. a) Vamos supor que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal. Do item (b) do Teorema 3.13, sabemos que, u_1 e u_2 são vetores unitários do tipo espaço, enquanto que u_3 é um vetor unitário do tipo tempo. Agora, consideremos $v \in \mathbb{R}^3$, o qual pode ser escrito, a partir dessa base como $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Vemos que,

$$\psi(v, u_1) = \psi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, u_1) = \alpha_1 \psi(u_1, u_1) + \alpha_2 \psi(u_2, u_1) + \alpha_3 \psi(u_3, u_1).$$

Como $\psi(u_2, u_1) = \psi(u_3, u_1) = 0$, temos, $\psi(v, u_1) = \alpha_1\psi(u_1, u_1)$. Agora,
 $\psi(v, u_1) = \alpha_1\psi(u_1, u_1) \Rightarrow \psi(v, u_1)\psi(u_1, u_1) = \alpha_1\psi(u_1, u_1)\psi(u_1, u_1) \Rightarrow \alpha_1 = \psi(v, u_1)\psi(u_1, u_1)$,
 pois $\psi(u_1, u_1)\psi(u_1, u_1) = 1$. De maneira análoga obtemos $\alpha_2 = \psi(v, u_2)\psi(u_2, u_2)$ e
 $\alpha_3 = \psi(v, u_3)\psi(u_3, u_3)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \\ &= \psi(v, u_1)\psi(u_1, u_1)u_1 + \psi(v, u_2)\psi(u_2, u_2)u_2 + \psi(v, u_3)\psi(u_3, u_3)u_3, \\ &= \sum_{i=1}^3 \psi(v, u_i)\psi(u_i, u_i)u_i. \end{aligned}$$

b) Nas condições do Teorema, consideremos os vetores v , do tipo tempo, e w um vetor qualquer, satisfazendo as condições, $w \times v \neq 0$ e $\psi(v, w) = 0$. Pela Proposição 3.11, podemos escrever,

$$\psi(w \times v, w \times v) = -\psi(w, w)\psi(v, v) + \psi(v, w)\psi(w, v).$$

Como $\psi(v, w) = 0$ e v é um vetor do tipo luz, ou seja $\psi(v, v) < 0$, temos,

$$\psi(w, w) = \psi(w \times v, w \times v).$$

Devemos, então, considerar as seguintes situações,

- i) se $\psi(w \times v, w \times v) < 0$ então $\psi(w, w) < 0$, e conseqüentemente, w é um vetor do tipo tempo. Mas isso não pode ocorrer, pois nesse caso teríamos que $\psi(v, w) \neq 0$, o que contraria nossa hipótese inicial;
- ii) se $\psi(w \times v, w \times v) > 0$ então $\psi(w, w) > 0$, e conseqüentemente, w é um vetor do tipo espaço;
- iii) se $\psi(w \times v, w \times v) = 0$, teríamos que também $\psi(v, v) = 0$, e, conseqüentemente, v é um vetor do tipo luz.

Assim, nas condições do Teorema 3.14, w é um vetor do tipo espaço. □

Teorema 3.15. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ vetores do tipo espaço tais que $u \times v$ é um vetor do tipo tempo. Então,*

$$\psi^2(u, v) < \psi(u, u)\psi(v, v).$$

16

Demonstração. Seja P um vetor unitário do tipo tempo na direção $[u \times v]$. Consideremos a função,

$$f(t) = \psi(u + t v, u + t v),$$

com $t \in \mathbb{R}$. Tal função é uma função quadrática na variável t , como podemos ver de,

$$\begin{aligned} f(t) &= \psi(u + t v, u + t v), \\ &= \psi(u, u) + 2t\psi(u, v) + t^2\psi(v, v). \end{aligned}$$

Temos $\psi(u + t v, P) = 0$, de acordo com o item (f) do Teorema 3.10, pois $P \in [u \times v]$, e, além disso $P \times (u + t v) \neq 0$. Podemos, então, aplicar o item (b) do Teorema 3.14 para concluir que $u + t v$ é um vetor do tipo espaço. Ou seja $\psi(u + t v, u + t v) > 0$, o que implica que $f(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} (2\psi(u, v))^2 - 4\psi(u, u)\psi(v, v) &< 0, \\ 4\psi(u, v) - 4\psi(u, u)\psi(v, v) &< 0, \end{aligned}$$

de onde segue que,

$$\psi^2(u, v) < \psi(u, u)\psi(v, v).$$

□

Teorema 3.16. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ dois vetores do tipo tempo. Temos que*

$$\psi^2(u, v) \geq \psi(u, u)\psi(v, v).$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.14, $u \times v$ é um vetor do tipo espaço ou um vetor nulo. Assim,

$$\psi(u \times v, u \times v) \geq 0$$

Em outras palavras,

$$\psi(u, u)\psi(v, v) - \psi^2(u, v) \geq 0$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, u e v são proporcionais.

□

3.2 Geometria em H^2

Começamos definindo nosso modelo de plano hiperbólico.

Definição 3.17. Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ qualquer. O plano hiperbólico, H^2 é definido por,

$$H^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, x_3 > 0, \psi(x, x) = -1\}$$

Em coordenadas cartesianas, se tomarmos $x = (x_1, x_2, x_3)$, a Definição 3.32 resulta em,

$$\psi(x, x) = -1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1 \Rightarrow -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

que juntamente com a condição $x_3 > 0$ nos mostra que temos apenas a folha superior de um hiperbolóide de duas folhas.

Definição 3.18. Seja u um vetor unitário do tipo espaço. Então,

$$r = \{P \in H^2, \psi(u, P) = 0\}$$

é chamada, em H^2 , uma reta com vetor unitário normal (ou pólo) u .

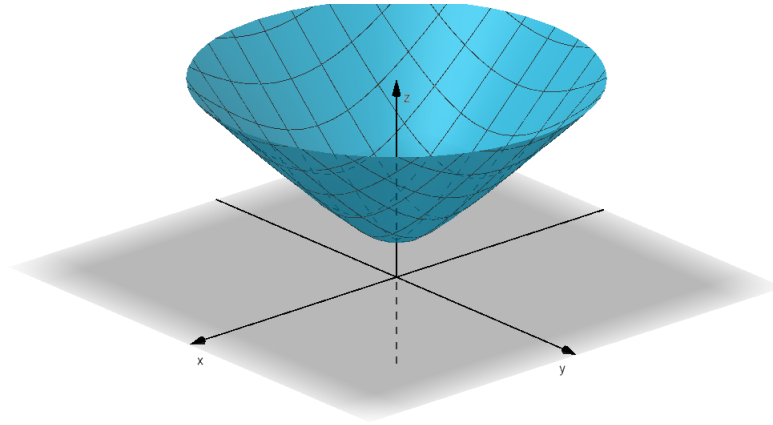


Figura 3.1: Plano hiperbólico.

Observação 3.19. Como ocorre em geometria esférica, uma reta de H^2 é dada pela intersecção de H^2 com um plano que contém a origem. Mas, agora, nem todos os planos que passam pela origem têm uma intersecção não vazia com H^2 . Entretanto, se um vetor u é do tipo tempo, podemos obter uma base ortonormal relativamente a ψ (Teorema 3.13). Em particular, existem pontos $P \in H^2$ tais que $\psi(u, P) = 0$. Vamos analisar em detalhes o comportamento de retas em H^2 , mas antes um exemplo.

Exemplo 3.20. Considere o vetor unitário dado por $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$. Esse vetor é do tipo espaço, pois,

$$\psi(u, u) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left((\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 - (1)^2\right) = 1 > 0.$$

Segundo a Definição 3.18, a reta r com pólo u é dada pela condição $\psi(u, P) = 0$, onde $P = (x, y, z) \in H^2$. Essa, por sua vez, resulta em,

$$\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - z = 0,$$

a equação de um plano. Da intersecção desse com H^2 temos a reta r , como mostrado na figura 3.2.

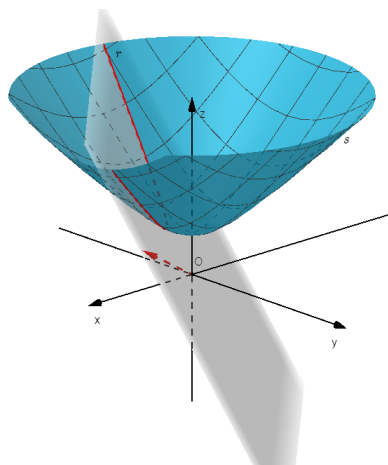


Figura 3.2: Uma reta no plano hiperbólico.

Teorema 3.21. *Sejam P e Q pontos distintos de H^2 . Então existe uma única reta contendo P e Q , a qual denotaremos por \overleftrightarrow{PQ} .*

Demonstração. Aplicamos o item (b) do Teorema 3.14 com $v = P$ e $w = (P \times Q)$ não nulo. Temos então que $(P \times (P \times Q)) \neq 0$ e, portanto, $P \times Q$ é do tipo espaço. Seja u um vetor unitário na direção de $P \times Q$. Então a reta cujo vetor unitário é u deve conter P e Q . Essa é a única reta por P e por Q pois o vetor unitário normal a tal reta dever ser ortogonal a P e a Q e, portanto, deve ser um múltiplo de $P \times Q$. \square

Como no caso da geometria na esfera, o produto vetorial é utilizado para determinarmos o ponto de intersecção de duas retas. Entretanto, se u e v são vetores unitários do tipo espaço, $u \times v$ não necessariamente será do tipo temporal, e, portanto, as retas podem não se intersectarem em H^2 . De fato, há três possibilidades distintas.

Definição 3.22. Sejam r e s duas retas com vetores unitários normais u e v , respectivamente. Dizemos que r e s são,

- a) retas concorrentes se $u \times v$ é do tipo tempo,
- b) retas paralelas se $u \times v$ é do tipo luz,
- c) retas ultraparalelas se $u \times v$ é do tipo espaço.

Exemplo 3.23. Seja o vetor unitário do tipo espaço dado por $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1)$. Tal vetor define uma reta em H^2 , que pela Definição 3.18 é obtida pela intersecção do plano $-\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + z = 0$ com H^2 . Assim teremos a reta s , como mostrado na Figura 3.3.

No Exemplo 3.20 obtivemos a reta r , mostrada também nessa mesma figura. Notamos que, as retas r e s intersectam-se no ponto $X = (1, 0, \sqrt{2})$. De fato, se calcularmos o vetor $u \times v$, dos pólos das retas r e s , respectivamente, obteremos $u \times v = (0, -2\sqrt{2}, 4)$. Assim, $\psi(u \times v, u \times v) = -8 < 0$. Ou seja, $u \times v$ é um vetor do tipo tempo, e, à luz da Definição 3.22, de fato, as retas r e s são concorrentes.

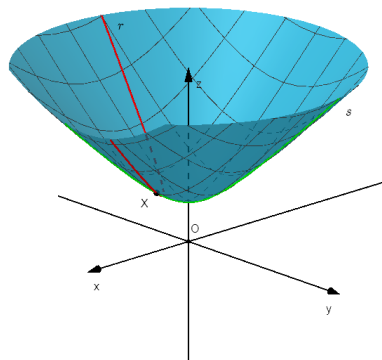


Figura 3.3: Retas que se intersectam no plano hiperbólico.

Exemplo 3.24. Seja a reta $m \in H^2$ que tem por pólo, o vetor unitário do tipo espaço dado por $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, -1 \right)$. Novamente, consideraremos a reta r do Exemplo 3.20, cujo pólo é dado pelo vetor $u = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$. Vemos que,

$$u \times z = \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}, \sqrt{12} \right).$$

Como,

$$\psi(u \times z, u \times z) = 0,$$

esse vetor $u \times z$ é do tipo luz. Assim as retas u e m são denominadas retas paralelas, como podemos ver da Figura 3.4.

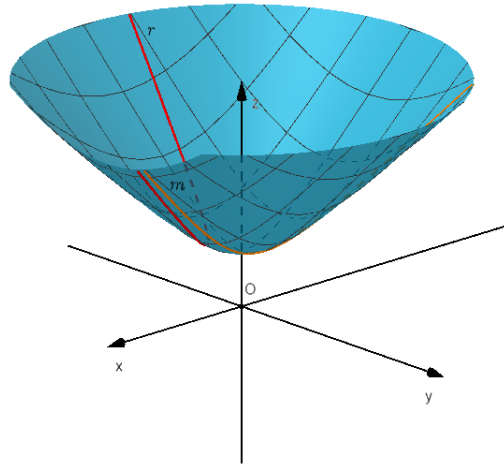


Figura 3.4: Retas paralelas no plano hiperbólico.

Exemplo 3.25. Consideremos ainda a reta r do Exemplo 3.20, e também a reta t cujo pólo é o vetor unitário do tipo espaço, $w = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1)$. Ao calcularmos o produto vetorial $u \times w$, por sua vez, encontramos o vetor $u \times w = \frac{1}{3} (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$. Agora, vemos,

$$\psi(u \times w, u \times w) = \frac{1}{9} \left((2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 0^2 \right) = \frac{16}{9} > 0,$$

o que mostra que tal vetor é do tipo espaço, e, assim, as retas u e t são ultra-paralelas, como podemos ver na figura 3.5.

Teorema 3.26. *Sejam r e s duas retas, com vetores unitários normais u e v , respectivamente. Se tais se intersectam, o fazem exatamente em um ponto. Esse é o único ponto de H^2 que é um múltiplo de $u \times v$.*

Demonstração. Sejam as retas r e s de H^2 , de pólos u e v , respectivamente, e o ponto $P \in H^2$, tal que $r \cap s = \{P\}$. Como $P \in r$ temos que $\psi(u, P) = 0$, e, similarmente, como $P \in s$, $\psi(v, P) = 0$. Agora, a partir da Proposição 3.12, podemos escrever,

$$P \times (u \times v) = -\psi(v, P)u + \psi(u, P)v.$$

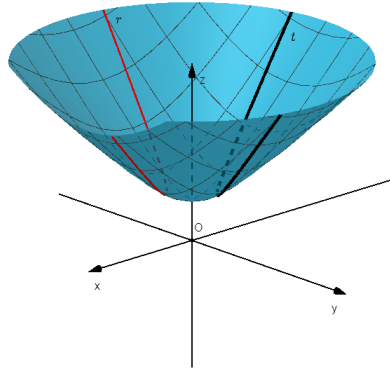


Figura 3.5: Retas ultraparalelas no plano hiperbólico.

Como $\psi(v, P) = \psi(u, P) = 0$, temos que $P \times (u \times v) = 0$, e, assim, os vetores P e $u \times v$ são linearmente dependentes. Ou sejam existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não nulos, tais que $\alpha P + \beta(u \times v) = 0$, o que implica em $P = -\frac{\beta}{\alpha}(u \times v)$, de onde segue o resultado. \square

Definição 3.27. Duas retas r e s , com vetores unitários normais u e v , respectivamente, são perpendiculares se $\psi(u, v) = 0$

Teorema 3.28. Se duas retas, r e s são ultraparalelas, existe uma única reta, t que é perpendicular a ambas. Reciprocamente, se duas retas tem um perpendicular comum, então essas retas são ultraparalelas.

Demonstração. Sejam u e v os vetores unitários normais das retas ultraparalelas, r e s , respectivamente. Seja w o vetor unitário (do tipo espaço) que é múltiplo de $u \times v$. Então $\psi(u, w) = \psi(v, w) = 0$, de modo que a reta com vetor unitário normal w é uma perpendicular comum às duas retas dadas.

Reciprocamente, se duas retas têm uma perpendicular comum, seu vetor unitário normal, w , é um vetor do tipo espaço, satisfazendo $w \times (u \times v) = 0$, e, assim, é um múltiplo de $u \times v$. Isso significa que $u \times v$ é um vetor do tipo espaço, e as retas são ultraparalelas. \square

Teorema 3.29. a) Se r e s são duas retas perpendiculares em H^2 , então r intersecta s .

b) Sejam P um ponto e r uma reta em H^2 . Então existe uma única reta passando por P e perpendicular a r .

Demonstração. a) Sejam as retas r e s de pólos u e v , respectivamente. Tanto u como v , pela Definição 3.18 são vetores do tipo espaço. Consideremos, agora, um terceiro vetor, $u \times v$. pelo item (f) do Teorema 3.10, temos que $\psi(u \times v, u) = \psi(u \times v, v) = 0$. Ou seja, pela Definição 3.8, o vetor $u \times v$ é perpendicular tanto ao vetor u como ao vetor v . Assim o conjunto $\{u, v, u \times v\}$ forma uma base para H^2 de acordo com o item (c) do Teorema 3.13. Finalmente, pelo item (b) do mesmo Teorema 3.13, como u e v são do tipo espaço, o vetor $u \times v$ deve ser do tipo tempo. Assim as retas r e s , pela Definição 3.22 se intersectam.

- b) Seja u um vetor unitário normal a r . Considere v um vetor unitário proporcional a $u \times P$. Isso é possível pois $u \times P$, sendo um vetor não nulo ortogonal a P , deve ser do tipo espaço. A reta s , cujo vetor unitário normal v claramente passa por P e é perpendicular a r . Existe uma única reta com essa propriedade pois um vetor unitário normal a tal reta deve ser ortogonal a u e P , e, portanto, um múltiplo de seu produto vetorial.

□

Definição 3.30. O ponto F onde a reta s intersecta a reta r é chamado o pé da perpendicular, relativamente à reta r , passando pelo ponto P .

Definição 3.31. Sejam r e s um par de retas distintas com vetores unitários normais u e v , respectivamente. Então, o conjunto \mathcal{P} de todas as retas cujos vetores unitários normais são ortogonais a $u \times v$ é chamado um feixe de retas. \mathcal{P} é denominado,

- a) um feixe de retas intersectantes se $u \times v$ é do tipo tempo,
 b) um feixe de retas paralelas se $u \times v$ é do tipo luz,
 c) um feixe de retas ultraparalelas se $u \times v$ é do tipo espaço.

A parametrização de uma reta em H^2 é realizada da seguinte maneira. Seja e_3 um ponto arbitrário de H^2 . Sejam ainda u_1 e u_2 vetores de \mathbb{R}^3 tais que $\{u_1, u_2, u_3\}$ constitui uma base ortonormal. Um típico ponto no plano através da origem gerado por $\{u_1, u_3\}$ é dado por $\lambda u_1 + \mu u_3$, onde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Esse ponto pertence a H^2 se, e só se, $\lambda > 0$ e,

$$\psi(\lambda u_1 + \mu u_3, \lambda u_1 + \mu u_3) = -1,$$

isto é, se,

$$\lambda^2 = 1 + \mu^2$$

Podemos chamar $\lambda = \cosh t$ e $\mu = \sinh t$, e assim, t assume qualquer valor real. Logo $(\cosh t)u_3 + (\sinh t)u_1$ percorre todos os pontos da reta. Podemos agora, definir uma expressão para a distância entre dois pontos em H^2 .

Definição 3.32. Para $x, y \in H^2$ definimos,

$$d(x, y) = \cosh^{-1}(-\psi(x, y)).$$

Teorema 3.33. Seja $\alpha(t) = (\cosh t)u_3 + (\sinh t)u_1$. Então,

$$d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |t_1 - t_2|.$$

Demonstração. Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha(t_1) = (\cosh t_1)u_3 + (\sinh t_1)u_1$ e $\alpha(t_2) = (\cosh t_2)u_3 + (\sinh t_2)u_1$. Temos,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) &= \psi((\cosh t_1)u_3 + (\sinh t_1)u_1, (\cosh t_2)u_3 + (\sinh t_2)u_1) \\ &= -\cosh t_1 \cosh t_2 + \sinh t_1 \sinh t_2 \\ &= -(\cosh t_1 \cosh t_2 - \sinh t_1 \sinh t_2) \\ &= -\cosh(t_2 - t_1) \\ -\psi(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) &= \cosh(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) &= \cosh^{-1}(-\psi(\alpha(t_1), \alpha(t_2))) \\ &= \cosh^{-1}(\cosh(t_2 - t_1)) \\ &= |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

□

Definição 3.34. Se $t_1 < t < t_2$, então $\alpha(t)$ está entre $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$.

Teorema 3.35. Se os pontos P e Q estão em H^2 , então,

- a) $d(P, Q) \geq 0$,
- b) $d(P, Q) = 0$ se, e somente se, $P = Q$,
- c) $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Demonstração. Sejam $P = (x_1, x_2, x_3)$ e $Q = (y_1, y_2, y_3)$ ambos em H^2 . Temos em primeiro lugar que,

- i) Como $P \in H^2, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$,
- ii) e, também $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -1$, pois $Q \in H^2$.

Feitas essas observações, temos,

- a) Primeiro notamos que $-\psi(P, Q) \in \mathbb{R}$. Quando restrita ao intervalo $[0, \infty)$ a função $\cosh(x)$ é uma bijeção desse intervalo em $[1, \infty)$. Logo $d(P, Q) \geq 0$.
- b) Se $P = Q$, temos, $\psi(P, Q) = x_1^2 = x_2^2 - x_3^2 = -1$. Logo,

$$d(P, Q) = \cosh^{-1}(-\psi(P, Q)) = \cosh^{-1}(1) = 0$$

c)

$$\begin{aligned} \psi(P, Q) &= x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 - y_3x_3 \\ &= \psi(Q, P) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \cosh^{-1}(-\psi(P, Q)) \\ &= \cosh^{-1}(-\psi(Q, P)) \\ &= d(Q, P) \end{aligned}$$

□

3.3 Transformações em H^2

Definição 3.36. Seja r uma reta em H^2 , com vetor unitário normal u . Dado um ponto $X \in H^2$, a **reflexão de X pela reta r** é definida por,

$$\Omega_r X = X - 2\psi(X, u)u.$$

Exemplo 3.37. Considere o ponto $X = (-2, -2, 3)$ em H^2 , bem como o vetor $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$. Vemos que tal vetor é um vetor do tipo espaço, pois,

$$\psi(u, u) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left((\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 - 1^2\right) = \frac{1}{3}(2 + 2 - 1) = 1 > 0.$$

Podemos então, a partir da Definição 3.18, construir a reta r que tem o vetor unitário u como pólo. Assim, dado $P \in H^2$ qualquer, temos que essa reta é o conjunto $r = \{P \in H^2, \psi(P, u) = 0\}$. Tal reta é mostrada na Figura 3.6. Agora tomando o ponto X , vamos determinar as coordenadas da reflexão por essa reta r do ponto dado. Segundo a Definição 3.36, temos,

$$\begin{aligned} \Omega_r X &= X - 2\psi(X, u)u, \\ &= X - 2\psi\left((-2, -2, 3), \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)}\right)u, \\ &= X - 2\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)u, \\ &= (-2 + 2\sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2}, 5). \end{aligned}$$

Também na Figura 3.6 mostramos tanto o ponto X , como sua imagem, $\Omega_r X$, resultante da reflexão pela reta r .

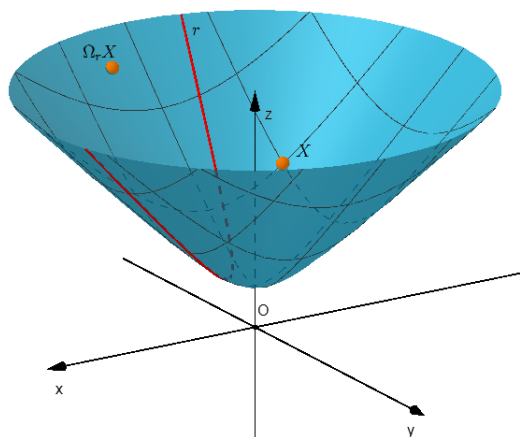


Figura 3.6: Reflexão por uma reta.

Tal transformação tem as seguintes propriedades.

Teorema 3.38. *Seja r uma reta em H^2 , com vetor unitário normal u e Ω_r a respectiva reflexão em torno dessa mesma reta e $X, Y \in \mathbb{R}^3$. Temos,*

- a) $\Omega_r^2 = I$.
- b) Ω_r é uma bijeção de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 .
- c) $\psi(\Omega_r X, \Omega_r Y) = \psi(X, Y)$ para todos $X, Y \in \mathbb{R}^3$.

Demonstração. a)

$$\begin{aligned} \Omega_r \Omega_r X &= \Omega_r X - 2\psi(\Omega_r X, u)u \\ &= X - 2\psi(X, u)u - 2\psi(X, u)u + 4\psi(X, u)\psi(u, u) \\ &= X. \end{aligned}$$

b) Segue a partir de a).

c)

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_r X, \Omega_r Y) &= \psi(X - 2\psi(X, u)u, Y - 2\psi(Y, u)u), \\ &= \psi(X, Y) + \psi(X, -2\psi(Y, u)u) + \psi(-2\psi(X, u)u, Y) + \\ &\quad + \psi(-2\psi(X, u)u, -2\psi(Y, u)u), \\ &= \psi(X, Y) - 2\psi(Y, u)\psi(X, u) - 2\psi(X, u)\psi(Y, u) + \\ &\quad + 4\psi(X, u)\psi(Y, u)\psi(u, u). \end{aligned}$$

Como o vetor u é pólo da reta r , temos que $\psi(u, u) = 1$, e assim,

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_r X, \Omega_r Y) &= \psi(X, Y) - 4\psi(Y, u)\psi(X, u) + 4\psi(X, u)\psi(Y, u), \\ &= \psi(X, Y). \end{aligned}$$

□

Corolário 3.39. *Para qualquer reta r em H^2 e $X \in \mathbb{R}^3$ temos,*

- a) *Se X é do tipo tempo, $\Omega_r X$ também o é.*
- b) *Se X é do tipo luz, $\Omega_r X$ também o é.*
- c) *Se X é do tipo espaço, $\Omega_r X$ também o é.*
- d) *Se X é um vetor unitário, $\Omega_r X$ também o é.*
- e) *Se $X \in H^2 \Rightarrow \Omega_r X \in H^2$.*

Demonstração. Consideremos o item c) do Teorema 3.38. Temos que se $X = Y$, tal resultado nos diz que $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = \psi(X, X)$. Assim, se,

- a) *X é do tipo tempo, então $\psi(X, X) < 0$. Como $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = \psi(X, X)$, temos que $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = \psi(X, X) < 0$, logo $\Omega_r X$ também é do tipo tempo.*

- b) X é do tipo luz, então $\psi(X, X) = 0$. Como $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = \psi(X, X)$, temos que $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = \psi(X, X) = 0$, logo $\Omega_r X$ também é do tipo luz.
- c) X é do tipo espaço, então $\psi(X, X) > 0$. Como $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = \psi(X, X)$, temos que $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = \psi(X, X) > 0$, logo $\Omega_r X$ também é do tipo espaço.

d) $\|X\| = 1$, então $\sqrt{|\psi(X, X)|} = 1$. Como $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = \psi(X, X)$, temos,

$$\|\Omega_r X\| = \sqrt{|\psi(\Omega_r X, \Omega_r X)|} = \sqrt{|\psi(X, X)|} = 1$$

e) Como $X \in H^2$ então $\psi(X, X) = -1$. Também temos que para a reta r seu pólo é o vetor unitário tipo espaço tal que $\psi(u, u) = 1$, sendo a reflexão por essa reta dada por $\Omega_r X = X - 2\psi(X, u)u$. Vamos calcular então $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X)$. Temos,

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_r X, \Omega_r X) &= \psi(X - 2\psi(X, u)u, X - 2\psi(X, u)u), \\ &= \psi(X, X) - 2\psi(X, u)\psi(X, u) - 2\psi(X, u)(\psi(X, u) \\ &\quad + 4\psi(X, u)\psi(X, u)\psi(u, u)). \end{aligned}$$

Como $\psi(u, u) = 1$, temos,

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_r X, \Omega_r X) &= \psi(X, X) - 4\psi(X, u)\psi(X, u) + 4\psi(X, u)(\psi(X, u)), \\ &= \psi(X, X). \end{aligned}$$

Como, por hipótese $\psi(X, X) = -1$, temos que $\psi(\Omega_r X, \Omega_r X) = -1$, e, portanto, $\Omega_r X \in H^2$. □

Definição 3.40. Dada uma reta r de H^2 , a restrição de Ω_r a H^2 é chamada a reflexão por r .

Teorema 3.41. *Toda reflexão é uma isometria de H^2 .*

Demonstração. Para $X, Y \in H^2$ temos,

$$\begin{aligned} d(\Omega_r X, \Omega_r Y) &= \cosh^{-1}(-\psi(\Omega_r X, \Omega_r Y)) \\ &= \cosh^{-1}(-\psi(X, Y)) \\ &= d(X, Y). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.42. *Sejam r e s retas em H^2 com vetores unitários normais u e v , respectivamente. Então,*

$$\Omega_r s = \{X \in H^2, \psi(X, \Omega_r v) = 0\};$$

isto é, se r têm um vetor unitário v , então $\Omega_r s$ é uma reta com vetor unitário normal $\Omega_r v$.

Demonstração. Considere $Y \in \Omega_r s$. Assim, para algum $X \in s$, temos $Y = \Omega_r X$, e,

$$\psi(Y, \Omega_r v) = \psi(\Omega_r X, \Omega_r v) = \psi(X, v) = 0$$

Reciprocamente, se $\psi(X, \Omega_r v) = 0$, então $\psi(\Omega_r X, v) = \psi(\Omega_r \Omega_r X, \Omega_r v) = 0$. Em outras palavras, $\Omega_r X \in s$ e $X \in \Omega_s$. □

Teorema 3.43. *Seja r uma reta com vetor unitário normal u em H^2 .*

a) *Seja X um ponto de H^2 . Então $\Omega_r X = X$ se, e somente se, $X \in r$.*

b) *Seja s uma reta em H^2 . Então $\Omega_r s = s$ se, e somente se, $r = s$ ou $r \perp s$.*

Demonstração. a) Seja a reta $r = \{X \in H^2, \psi(X, u) = 0\}$, onde $\psi(u, u) = 1$. Seja agora $Y \in H^2$. Temos que,

$$\Omega_r Y = Y \Leftrightarrow Y - 2\psi(Y, u)u = Y \Leftrightarrow \psi(Y, u) = 0 \Leftrightarrow Y \in r.$$

b) Consideremos agora além da reta r como descrita no item anterior, a reta s dada por $s = \{X \in H^2, \psi(X, v) = 0\}$, onde $\psi(v, v) = 1$. Para que $\Omega_r s = s$, devemos ter, $v - 2\psi(v, u)u = \pm v$. Agora são duas possibilidades a considerar,

i) ou $\psi(v, u) = 0$, o que mostra que $u \perp v$, e, portanto as retas r e s são perpendiculares;

ii) ou $v = \pm u$, pois assim, se $v = u$, $u - 2\psi(u, u)u = u - 2u = -u$, e se $v = -u$, $-u - 2\psi(-u, u)u = -u + 2u = u$. Em qualquer caso, as retas r e s são iguais. \square

Definição 3.44. Sejam r e s duas retas em H^2 . Se r e s intersectam-se em um ponto $P \in H^2$, então a aplicação $\Omega_r \Omega_s$ é chamada uma **rotação ao redor de P** .

Exemplo 3.45. Consideremos os vetores unitários do tipo espaço, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ e $v = (0, 1, 0)$. Tais vetores são pólos das retas r e s dadas, respectivamente, por $r = \{X \in H^2, \psi(X, u) = 0\}$ e $s = \{X \in H^2, \psi(X, v) = 0\}$. Vemos que tais retas são concorrentes, pois, $u \times v = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, e, $\psi(u \times v, u \times v) = -\frac{1}{2} < 0$, um vetor do tipo tempo. Vemos ainda que o ponto de concorrência de tais retas é o ponto $V = (0, 0, 1)$.

Vamos aqui considerar a composição das reflexões pela reta s e depois pela reta r , resultando, segundo a Definição 3.44 em uma rotação ao redor do ponto V . Assim, dado o ponto de H^2 , $P = (x, y, z)$, consideramos inicialmente a reflexão pela reta r ,

$$\begin{aligned} \Omega_r P &= P - 2\psi(P, u)u \\ &= P - \frac{2}{\sqrt{2}}(x - y)u \\ &= (x, y, z) - \frac{2}{\sqrt{2}}(x - y)\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \\ &= (x, y, z) - (x - y)(1, -1, 0) \\ &= (y, x, z). \end{aligned}$$

Em seguida, a esse resultado, aplicando a reflexão pela reta s , temos,

$$\begin{aligned} \Omega_s \Omega_r P &= \Omega_s P - 2\psi(\Omega_s P, v)v \\ &= (y, x, z) - 2x(0, 1, 0) \\ &= (y, -x, z). \end{aligned}$$

Considerando o ponto $P = \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, obtemos $\Omega_s\Omega_r P = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, como mostrado na Figura 3.7.

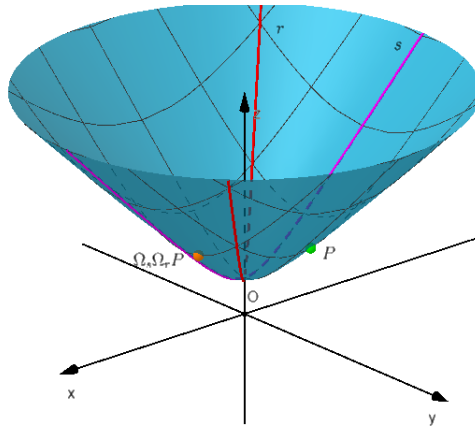


Figura 3.7: Rotação.

Observação 3.46. Considere uma base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ e um ponto $P \in H^2$ de modo que tomamos $u_3 = P$. Seja ainda r uma reta que passa por P e com pólo v , de maneira que podemos escrever para tal reta,

$$r = \left\{ X \in H^2, \psi(X, v) = 0 \right\},$$

onde,

$$u = (-\operatorname{sen} \theta)u_1 + (\cos \theta)u_2.$$

Assim, temos,

i)

$$\begin{aligned} \Omega_r u_1 &= u_1 - 2\psi(u_1, v)v \\ &= u_1 - 2\psi(u_1, (-\operatorname{sen} \theta)u_1 + (\cos \theta)u_2)v \\ &= u_1 - 2\psi(u_1, (-\operatorname{sen} \theta)u_1)v - 2\psi(u_1, (\cos \theta)u_2)v \\ &= u_1 - 2(-\operatorname{sen} \theta)\psi(u_1, u_1)v - 2\cos \theta\psi(u_1, u_2)v \\ &= u_1 - 2(-\operatorname{sen} \theta)(-\operatorname{sen} \theta)u_1 + (\cos \theta)u_2 \\ &= (1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta)u_1 + 2\operatorname{sen} \theta \cos \theta u_2 \\ &= \cos(2\theta)u_1 + \operatorname{sen}(2\theta)u_2. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \Omega_r u_2 &= u_2 - 2\psi(u_2, u)v \\ &= u_2 - 2\psi(u_2, (-\operatorname{sen} \theta)u_1 + (\cos \theta)u_2)v \\ &= u_2 - 2\psi(u_2, (-\operatorname{sen} \theta)u_1)v - 2\psi(u_2, (\cos \theta)u_2)v \\ &= u_2 - 2(-\operatorname{sen} \theta)\psi(u_2, u_1)v - 2\cos \theta\psi(u_2, u_2)v \\ &= u_2 - 2(\cos \theta)(-\operatorname{sen} \theta)u_1 + (\cos \theta)u_2 \\ &= (2\operatorname{sen} \theta \cos \theta)u_1 + (1 - 2\cos^2 \theta)u_2 \\ &= \operatorname{sen}(2\theta)u_1 \cos(2\theta)u_2. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
 \Omega_r u_3 &= u_3 - 2\psi(u_3, v)v \\
 &= u_3 - 2\psi(u_3, (-\operatorname{sen} \theta)u_1 + (\operatorname{cos} \theta)u_2) \\
 &= u_3 - 2\psi(u_3, (-\operatorname{sen} \theta)u_1) - 2\psi(u_3, (\operatorname{cos} \theta)u_2) \\
 &= u_3 - 2(-\operatorname{sen} \theta)\psi(u_3, u_1) - 2\operatorname{cos} \theta\psi(u_3, u_2) \\
 &= u_3.
 \end{aligned}$$

Nessas condições, a matriz associada à reflexão Ω_r relativamente à base $\{u_1, u_2, u_3\}$ é dada por,

$$\begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta & 0 \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\operatorname{cos} 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja s uma outra reta passando também pelo ponto p , com pólo w dado por,

$$v = (-\operatorname{sen} \phi)u_1 + (\operatorname{cos} \phi)u_2.$$

A matriz, relativamente à base $\{u_1, u_2, u_3\}$, é dada por,

$$\begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\phi & \operatorname{sen} 2\phi & 0 \\ \operatorname{sen} 2\phi & -\operatorname{cos} 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos considerar, então, a aplicação composta, $\Omega_r\Omega_s$, cuja matriz será dada por,

$$\begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2(\theta - \phi) & \operatorname{sen} 2(\theta - \phi) & 0 \\ \operatorname{sen} 2(\theta - \phi) & -\operatorname{cos} 2(\theta - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.47. *Sejam r, s, t retas que passam por $P \in H^2$. Então existe uma quarta reta m , também passando por P tal que,*

$$\Omega_r\Omega_s\Omega_t = \Omega_m.$$

Demonstração. Considere um ponto $X \in H^2$, e sejam as retas r, s e t de pólos u, v e w , respectivamente. Temos, inicialmente que,

$$\Omega_t X = X - 2\psi(X, w)w$$

Em seguida, fazemos,

$$\begin{aligned}
 \Omega_s\Omega_t X &= \Omega_s(X - 2\psi(X, w)w, v)v \\
 &= X - 2\psi(X, w)w - 2\psi(X - 2\psi(X, w)w, v)v \\
 &= X - 2\psi(X, w)w - 2\psi(X, v)v + 4\psi(X, w)\psi(w, v)v \\
 &= X - 2\psi(X, w)w - 2(\psi(X, v) - 2\psi(X, w)\psi(w, v))v \\
 &= X - 2\psi(X, w)w - 2(\psi(X, v) + \psi(-2\psi(X, w)w, v))v \\
 &= X - 2\psi(X, w)w - 2\psi(X - 2\psi(X, w)w, v)v
 \end{aligned}$$

Definimos agora

$$Y = X - 2\psi(X, w)w,$$

de modo que,

$$\Omega_2\Omega_t X = Y - 2\psi(Y, v)v.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \Omega_r\Omega_s\Omega_t X &= \Omega_r(Y - 2\psi(Y, v)v) \\ &= Y - 2\psi(Y, v)v - 2\psi(Y - 2\psi(Y, v)v, u)u. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.48. *Seja ρ uma rotação ao redor de P . Seja ainda m uma reta passando por P . Então existe uma reta n , também passando pelo ponto P tal que,*

$$\rho = \Omega_m\Omega_n.$$

Demonstração. Considere as retas r e s que passam pelo ponto P . Da composição $\Omega_r\Omega_s$, pela Definição 3.44, temos a rotação, ρ , ao redor do ponto P . Considere ainda, uma terceira reta m , também passando pelo ponto P . Vamos analisar a composição $\Omega_m\Omega_r\Omega_s$. Pelo Teorema 3.47, existe uma reta n , também passando pelo ponto P tal que $\Omega_m\Omega_r\Omega_s = \Omega_n$. Agora,

$$\begin{aligned} \Omega_m\Omega_r\Omega_s &= \Omega_n \\ \Omega_m\Omega_m\Omega_r\Omega_s &= \Omega_m\Omega_n \\ \Omega_r\Omega_s &= \Omega_m\Omega_n \\ \rho &= \Omega_m\Omega_n \end{aligned}$$

□

Definição 3.49. Sejam α e β duas retas ultraparalelas com uma reta perpendicular comum γ . Então $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ é uma **translação ao long de γ** .

Exemplo 3.50. Consideremos as retas $r = \{X \in H^2, \psi(X, u) = 0, u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)\}$ e $s = \{X \in H^2, \psi(X, v) = 0, v = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1)\}$. Vemos que $u \times v = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, e como $\psi(u \times v, u \times v) = \frac{16}{9} > 0$, e, portanto r e s são retas ultraparalelas.

Considere reta $t = \{X \in H^2, \psi(X, w) = 0, w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\}$. Como,

i) $\psi(u, w) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 0,$

ii) $\psi(v, w) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 1 - (-1) \cdot 0) = 0,$

a reta t é uma perpendicular comum a ambas as retas r e s . Agora, dado o ponto $X = (0, 2, \sqrt{5})$ de H^2 , vamos considerar, inicialmente a reflexão pela reta s , dada por,

$$\begin{aligned} \Omega_s X &= X - 2\psi(X, v)v, \\ &= X - \frac{2}{3}(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})v, \\ &= (-k\sqrt{2}, 2 + k\sqrt{2}, k + \sqrt{5}), \end{aligned}$$

onde $k = \frac{2}{3}(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$. Em seguida, aplicamos a reflexão pela reta r ,

$$\begin{aligned} \Omega_r \Omega_s X &= \Omega_s X - 2\psi(\Omega_s, u)u, \\ &= (-k\sqrt{2} - m\sqrt{2}, 2 + k\sqrt{2} + m\sqrt{2}, \sqrt{5} + k - m), \end{aligned}$$

onde $m = \frac{2}{3}(-5k - 2\sqrt{2} - \sqrt{5})$.

Na Figura 3.8 podemos ver tanto o ponto X , como sua imagem pela translação ao longo da reta t .

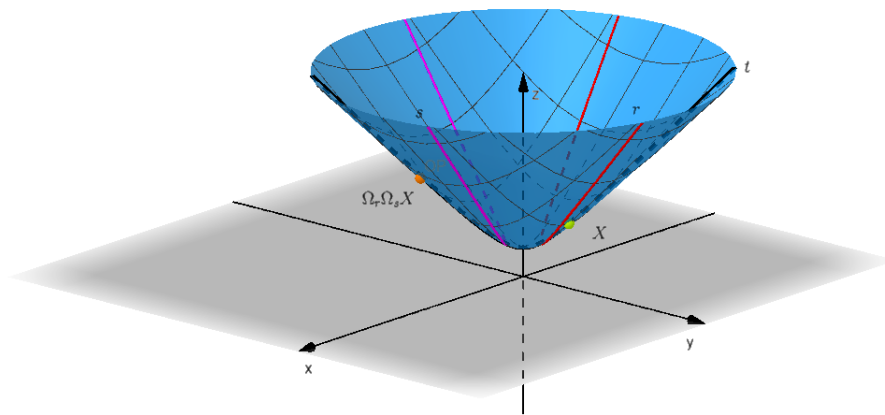


Figura 3.8: Translação ao longo da reta t .

Na Figura 3.9, podemos ver a mesma operação de translação ao longo da reta t , mas agora por um ponto de vista diferente.

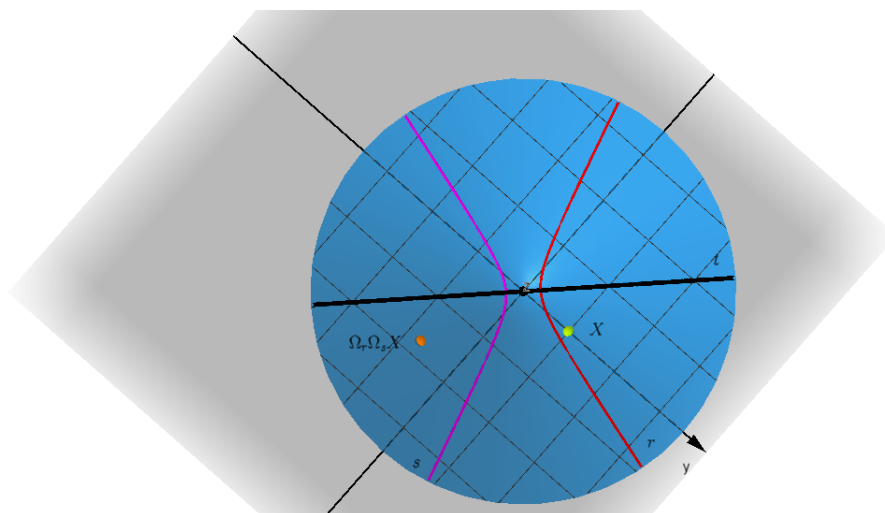


Figura 3.9: Translação ao longo da reta t vista de cima.

Seja \mathcal{P} um feixe de ultraparalelas com uma reta perpendicular comum, t . Seja u_1 um pólo de t . Escolhemos u_2 do tipo espaço e u_3 do tipo tempo, de modo que $\{u_1, u_2, u_3\}$ define uma base ortonormal.

Seja r uma reta arbitrária do feixe. Um pólo dessa reta pode ser escrito como,

$$\alpha = (\cosh k)u_2 + (\sinh k)u_3$$

‘para algum real k .

Assim

$$\Omega_r u_1 = u_1 - 2\psi(u_1, \alpha) = u_1,$$

$$\Omega_r u_2 = u_2 - (\cosh k)((\cosh k)u_2 + (\sinh k)u_3) = -(\cosh 2k)u_2 - (\sinh 2k)u_3,$$

$$\Omega_r u_3 = (\sinh k)u_2 + (\cosh k)u_3.$$

de maneira que obtemos a seguinte matriz,

$$\Omega_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh 2k & \sinh 2k \\ 0 & -\sinh 2k & \cosh 2k \end{bmatrix}.$$

Se s é uma segunda reta desse mesmo feixe cujo pólo é parametrizado por m , temos,

$$\Omega_r \Omega_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2n & \sinh 2n \\ 0 & \sinh 2n & \cosh 2n \end{bmatrix} = T_n$$

onde $n = k - m$. Tais matrizes têm a seguinte propriedade.

Proposição 3.51. *Dados $k, m \in \mathbb{R}$ temos que,*

$$T_k T_m = T_{k+m}$$

Demonstração. De fato, dadas as matrizes $T_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2k & \sinh 2k \\ 0 & \sinh 2k & \cosh 2k \end{bmatrix}$ e

$$T_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2m & \sinh 2m \\ 0 & \sinh 2m & \cosh 2m \end{bmatrix}, \text{ temos,}$$

$$\begin{aligned} T_k T_m &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh k & \sinh k \\ 0 & \sinh k & \cosh k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh m & \sinh m \\ 0 & \sinh m & \cosh m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2k \cosh 2m + \sinh 2k \sinh 2m & \cosh 2k \sinh 2m + \sinh 2k \cosh 2m \\ 0 & \cosh 2k \sinh 2m + \sinh 2k \cosh 2m & \cosh 2k \cosh 2m + \sinh 2k \sinh 2m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2(k+m) & \sinh 2(k+m) \\ 0 & \sinh 2(k+m) & \cosh 2(k+m) \end{bmatrix} \\ &= T_{k+m} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.52. *Sejam r, s e t retas de um feixe de ultraparalelas. Então existe uma reta m também no feixe tal que,*

$$\Omega_r \Omega_s \Omega_t = \Omega_m$$

Demonstração. Considere as retas r, s e t , ultraparalelas de pólos u, v e w , respectivamente. As reflexões por tais retas têm matrizes dadas por,

$$\Omega_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh 2u & \sinh 2u \\ 0 & -\sinh 2u & \cosh 2u \end{bmatrix}.$$

$$\Omega_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh 2v & \sinh 2v \\ 0 & -\sinh 2v & \cosh 2v \end{bmatrix}.$$

e,

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh 2w & \sinh 2w \\ 0 & -\sinh 2w & \cosh 2w \end{bmatrix}.$$

Agora, também já sabemos que, para a composição $\Omega_s \Omega_t$, temos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2(v-w) & \sinh 2(v-w) \\ 0 & \sinh 2(v-w) & \cosh 2(v-w) \end{bmatrix}$$

Finalmente, a matriz associada a composição $\Omega_r \Omega_s \Omega_t$, por sua vez, será dada por,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh 2u & \sinh 2u \\ 0 & -\sinh 2u & \cosh 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2(v-w) & \sinh 2(v-w) \\ 0 & \sinh 2(v-w) & \cosh 2(v-w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh 2z & \sinh 2z \\ 0 & -\sinh 2z & \cosh 2z \end{bmatrix}$$

onde $z = u - v + w$. Assim a quarta reta desse feixe, será a reta m cujo pólo é dado por $z = u - v + w$.

□

Teorema 3.53. *Seja ρ uma translação ao longo da reta m . Seja n qualquer reta perpendicular a m . Então existe uma reta r perpendicular a m tal que,*

$$\rho = \Omega_n \Omega_r.$$

Demonstração. Sejam as retas s e t ultraparalelas com uma perpendicular comum, m . A composição $\rho = \Omega_s \Omega_t$ é a translação ao longo de m . Considere ainda a reta n , perpendicular a m . Seja agora a composição $\Omega_n \Omega_s \Omega_t$. Pelo Teorema 3.52, existe uma reta r , do feixe de ultraparalelas de s e t tal que $\Omega_n \Omega_s \Omega_t = \Omega_r$. Agora

$$\Omega_n \Omega_s \Omega_t = \Omega_r \Rightarrow \Omega_n (\Omega_n \Omega_s \Omega_t) = \Omega_n \Omega_r \Rightarrow \rho = \Omega_n \Omega_r.$$

□

Finalmente, a última das transformações.

Definição 3.54. Uma **reflexão com deslizamento** é a composta de uma reflexão por uma reta α com uma translação ao longo de γ . A reta γ é chamada de eixo da reflexão com deslizamento.

Exemplo 3.55. Retomemos as retas descritas no Exemplo 3.50. Ou seja, as retas ultraparálelas, $r = \{X \in H^2, \psi(X, u) = 0, u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)\}$ e $s = \{X \in H^2, \psi(X, v) = 0, v = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1)\}$, bem como a perpendicular comum, $t = \{X \in H^2, \psi(X, w) = 0, w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\}$. Seja ainda o ponto $X = (0, 2, \sqrt{5})$.

Consideremos inicialmente a translação $\Omega_r\Omega_s$ aplicada ao ponto $X = (0, 2, \sqrt{5})$. Tal operação resultou em $\Omega_r\Omega_s X = (-\sqrt{2}(k+m), 2 + \sqrt{2}(k+m), \sqrt{5} + k - m)$, onde $k = \frac{2}{3}(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$ e $m = \frac{2}{3}(-5k - 2\sqrt{2} - \sqrt{5})$.

Finalmente, consideremos a reflexão do ponto $\Omega_r\Omega_s X$ pela reta t . Temos,

$$\begin{aligned} \Omega_t(\Omega_r\Omega_s X) &= \Omega_r\Omega_s X - 2\psi(\Omega_r\Omega_s X, w)w, \\ &= \Omega_r\Omega_s X - \frac{4}{\sqrt{2}}w, \\ &= (-\sqrt{2}(k+m) - 2, \sqrt{2}(k+m), \sqrt{5} + k - m). \end{aligned}$$

Nas Figuras 3.10 e 3.11 podemos ver a reflexão com deslizamento de eixo t , aplicada ao ponto $X = (0, 2, \sqrt{5})$.

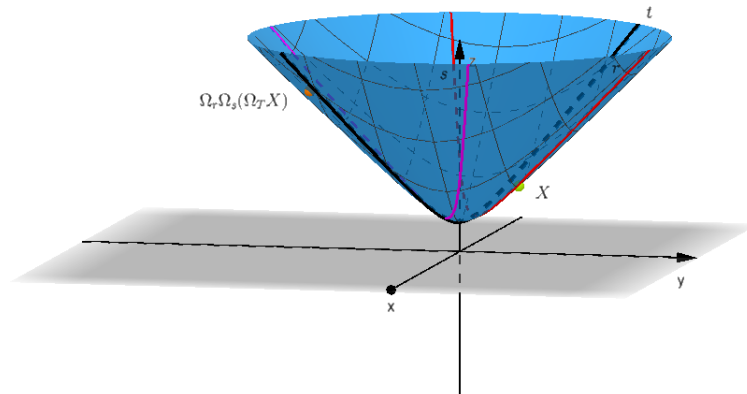


Figura 3.10: Reflexão com deslizamento.

Até o presente momento, temos trabalhado com composições de duas ou três reflexões por uma reta, e como já foi demonstrado anteriormente, obteremos sempre as demais transformações. Para a reflexão com deslizamento não será diferente. Entretanto devemos observar primeiramente alguns fatos.

Teorema 3.56. *Sejam P um ponto de H^2 e \mathcal{P} um feixe de retas. Então existe uma reta passando por P e pertencente ao feixe \mathcal{P} . Exceto no caso do feixe de retas passando por P , essa reta é única.*

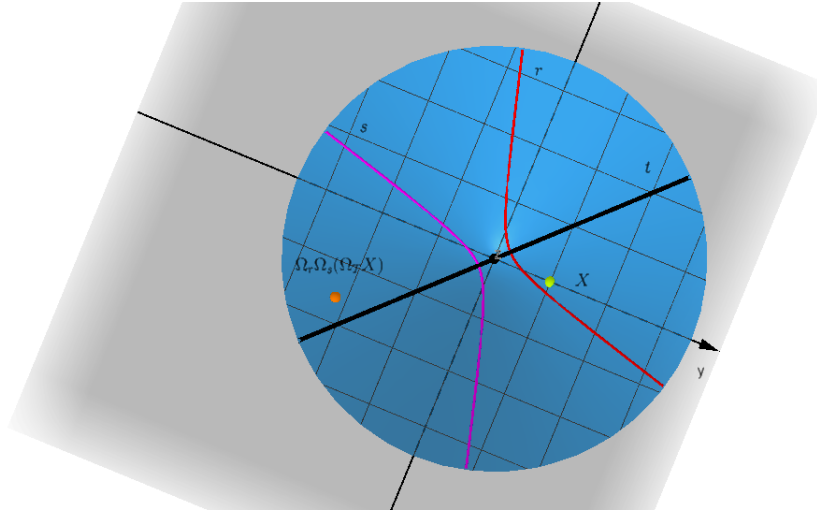


Figura 3.11: Reflexão com deslizamento.

Demonstração. Se \mathcal{P} é um feixe de retas concorrentes ou um feixe de ultraparalelas, as conclusões são dadas pelo Teorema 3.16 e o item (ii) do Teorema 3.29, respectivamente.

Agora seja \mathcal{P} um feixe de retas paralelas determinadas por retas com pólo ξ e η . Então, $\xi \times \eta$ é tipo luz, e $P \times \xi \times \eta$ é não nulo. Pelo item (ii) do Teorema 3.14, $P \times \xi \times \eta$ é do tipo espaço. A reta cujo pólo está nessa direção pertence a \mathcal{P} e passa por P e é a única satisfazendo essas condições.

Teorema 3.57. *Seja \mathcal{P}_1 um feixe de retas paralelas. Seja \mathcal{P}_2 um feixe consistindo de todas as retas perpendiculares a uma reta t . Se $t \notin \mathcal{P}_1$, existe uma única reta pertencente a ambos os feixes.*

Demonstração. Vamos construir uma base ortonormal da seguinte maneira. Seja u_2 um vetor unitário normal a t . Seja ainda w um vetor do tipo luz tal que os vetores unitários normais, ξ , a retas de \mathcal{P}_1 são exatamente aqueles vetores unitários do tipo espaço satisfazendo a condição $\psi(\xi, w) = 0$. Desejamos escolher $u_3 \in H^2$ de modo que o mesmo pertença ao conjunto $[w, u_2]$. Para fazer isso, observamos que,

$$\psi(w \times u_2, w \times u_2) = \psi(w, u_2)^2 > 0,$$

pois $t \notin \mathcal{P}_1$. Escolhemos u_1 como o vetor unitário na direção $[w \times u_2]$, e $u_3 = u_1 \times u_2$. Aqui há duas escolhas possíveis para u_1 , mas somente uma assegurará que u_3 está em H^2 . Agora que temos essa base ortonormal, é fácil ver que a reta com vetor unitário normal u_1 é a única reta pertencente a ambos os feixes. \square

Teorema 3.58. *Dois feixes distintos de retas paralelas têm uma única reta em comum.*

Demonstração. Sejam v e w dois vetores do tipo luz determinando dois feixes distintos. Então,

$$\psi(v \times w, v \times w) = \psi(v, w)^2 > 0.$$

A reta cujo vetor unitário normal é um múltiplo de $v \times w$ é a única reta comum a ambos os feixes. \square

Teorema 3.59. *Sejam r, s, t e m retas. Então existem retas p e q tais que,*

$$\Omega_r \Omega_s \Omega_t \Omega_m = \Omega_p \Omega_q.$$

Demonstração. Se $r = s$ ou $t = m$ nada há para provar. Assumimos que r e s determinam um feixe \mathcal{P}_1 , enquanto que t e m determinam um outro feixe \mathcal{P}_2 . Como já observamos, o resultado é verdadeiro se \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 têm uma reta comum. A partir dos Teoremas 3.56, 3.57 e 3.58, consideraremos os seguintes casos:

- i) Se r e s têm a reta t como perpendicular comum, e m é paralela a t . Nesse caso Ω_s comuta com Ω_t , e o Teorema 3.56 se aplica.
- ii) Se r e s têm uma perpendicular comum, α ; t e m têm uma perpendicular comum β , e α intersecta β no ponto P . A partir do Teorema 3.53, podemos substituir a representação dada por $\Omega_{r'}\Omega_{s'}\Omega_{t'}\Omega_{m'}$, onde s' e t' passam pelo ponto P . Então $\Omega_{s'}\Omega_{t'}$ pode ser substituída por $\Omega_l\Omega_n$ para alguma reta n passando por P . Como r' é perpendicular a l , aplicamos o Teorema 3.56.
- iii) Se r e s têm uma perpendicular comum α , e t e m têm uma perpendicular comum β , mas α é paralela a β . Nesse caso seja Q o ponto onde α intersecta a t , e seja s' a reta passando por Q e perpendicular a α . Então a composição pode ser escrita como $\Omega_{r'}\Omega_{s'}\Omega_{t'}\Omega_{m'}$ para alguma reta $r' \perp \alpha$. Como no caso anterior, podemos escrever $\Omega_{s'}\Omega_{t'} = \Omega_n\Omega_m$, para alguma reta n , e novamente aplicamos o Teorema 3.56.

□

3.4 O espaço-tempo de Minkowski

Em \mathbb{R}^3 um cone com vértice na origem e eixo coincidindo com o eixo z , tem por equação,

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

e é mostrado na Figura 3.12.

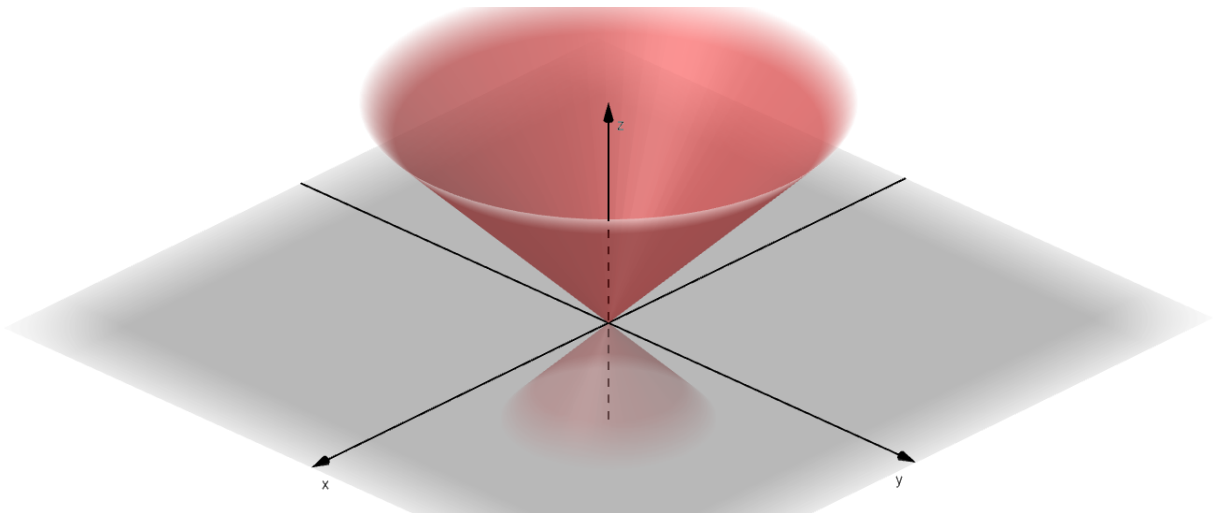


Figura 3.12: Cone de luz.

Tal equação, por sua vez, pode ser reescrita na forma,

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Agora, se considerarmos um vetor qualquer $v \in \mathbb{R}^3$, a partir da Definição 3.1, a equação desse cone toma a forma,

$$\psi(v, v) = 0 \quad (3.1)$$

onde $v = (x, y, z)$.

De acordo com a classificação estabelecida pela Definição 3.3, o vetor v satisfazendo é um vetor do tipo luz. Assim, vamos denominar tal cone de um **cone de luz**. Mas essa mesma definição nos diz que existem vetores do tipo espaço e do tipo tempo.

Observação 3.60. Como vetores do tipo espaço, ou do tipo tempo se situam, relativamente a esse cone de luz? Consideremos os seguintes vetores de \mathbb{R}^3 , $u = (1, 4, 2)$, $v = (-1, 0, 3)$ e $w = (3, -4, 5)$. Inicialmente vemos que,

- i) $\psi(u, u) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 1 + 16 - 4 = 13 > 0$, e, portanto, u é um vetor do tipo espaço;
- ii) $\psi(v, v) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = 1 + 0 - 9 = -8 < 0$, e, portanto, v é um vetor do tipo tempo;
- iii) $\psi(w, w) = 3 \cdot 3 + (-4) \cdot (-4) - 5 \cdot 5 = 9 + 16 - 25 = 0$, e, portanto, w é um vetor do tipo luz.

Como podemos ver da Figura 3.13, o vetor u , do tipo espaço, situa-se no exterior do cone de luz. Já o vetor v , do tipo tempo, situa-se no interior do cone de luz, ao passo que o vetor w , do tipo luz, situa-se sobre a superfície do cone.

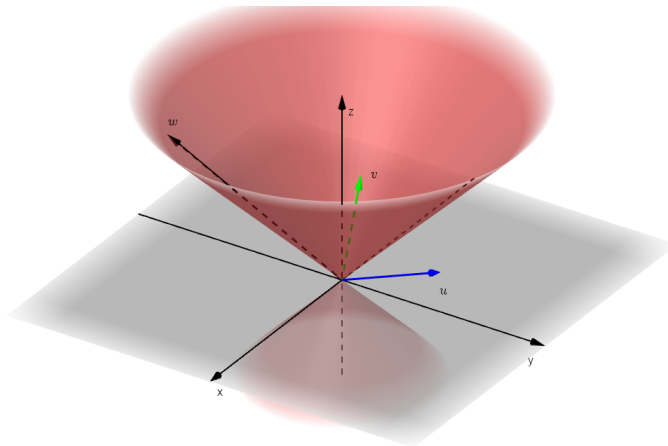


Figura 3.13: Vetores e cone de luz.

Como também já observamos anteriormente, um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\psi(v, v) = -1$ é um vetor unitário do tipo tempo. Essa condição em \mathbb{R}^3 dá origem a um hiperbolóide duas folhas, separado pelo plano $z = 0$. Em nosso estudo da geometria hiperbólica nos restringimos à folha com $z > 0$, e foi possível, então analisarmos os aspectos geométricos e das transformações envolvidas nesse modelo. Esse mesmo modelo da geometria hiperbólica nos auxiliará, em parte, na compreensão do conceito de espaço-tempo quadridimensional desenvolvida por Minkowski.

Em um congresso na cidade de Colônia (Alemanha) no ano de 1908, Minkowski¹ afirma (ver [8]),

¹Space and Time, 80th Assembly of German Scientists and Physicians, Colônia, Alemanha, 21 de setembro de 1908.

"Em primeiro lugar, gostaria de mostrar como seria possível, partindo da mecânica aceita nos dias de hoje, e fazendo uso de uma linha de pensamento puramente matemática, chegar a uma nova concepção de espaço-tempo."²

Vamos a esses conceitos.

Minkowski parte das coordenadas cartesianas, x , y e z , em \mathbb{R}^3 , e o tempo, t , para considerar a quádrupla (x, y, z, t) . O conjunto de todas as quádruplas dessa forma, Minkowski deu o nome de mundo, e um para um ponto específico desses valores, ponto-mundo (ou evento). Nesse mundo, as coordenadas, tanto espacial, como temporal, de um objeto qualquer podem variar. Nesse mundo, a curva descrita por essas variações nas coordenadas desse objeto é denominada linha-mundo. E aqui convém dizer que a coordenada temporal, t , pode variar de $-\infty$ a $+\infty$. Sob esse ponto de vista, um objeto que permanecesse em repouso teria como linha-mundo uma reta paralela ao eixo t . Já um outro objeto dotado de um movimento uniforme, teria como linha-mundo uma reta formando um determinado ângulo com o eixo t , mas limitado pelo cone de luz.

Quando Minkowski conjectura sobre a ortogonalidade dessas coordenadas, é levado a considerar a estrutura dada pela equação,

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1,$$

onde c é uma constante positiva, e a variável t é tal que $t > 0$. Nesse ponto, o matemático alemão faz a analogia com o hiperbolóide de duas folhas em \mathbb{R}^3 . Prosseguindo em sua linha de raciocínio, Minkowski conclui que tal constante positiva, c , é, na realidade, a velocidade da luz no vácuo.

Uma distância entre dois pontos mundo nesse espaço-tempo de Minkowski é dada pela expressão,

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

a qual sempre assumirá um valor positivo, ou nulo, pois qualquer objeto terá uma velocidade menor do que velocidade da luz, c , assumindo um dos postulados básicos da Teoria da Relatividade Especial.

Os desdobramentos, tanto do ponto de vista da Matemático como da Física, apontados por Minkowski nessa palestra são muito mais amplos e profundos e fogem do escopo desse trabalho.

Para encerrar esse capítulo, vamos discutir um exemplo apresentado pelo físico-matemático Roger Penrose, no artigo *The Geometry of the Universe* presente na obra [11].

Exemplo 3.61 (Paradoxo dos gêmeos.). Em primeiro lugar, Penrose fixa para a velocidade da luz o valor $c = 1$, e considera como medida de distância o chamado *ano-luz*. Ou seja, a distância que uma partícula dotada da velocidade da luz no vácuo percorreria em um ano. Assim o cone de luz, no espaço-tempo de Minkowski seria dado pela equação

$$t^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

e o mesmo teria duas folhas, uma representada por $t > 0$, denominado *cone de luz futuro*; e outra, dada por $t < 0$, o *cone de luz passado*. Dados dois pontos-mundo (ou eventos com Penrose os denomina) de coordenadas $O = (0, 0, 0, 0)$ e $Q = (x, y, z, t)$, a distância entre os mesmos será dada por:

$$d^2(O, Q) = (t - 0)^2 - (x - 0)^2 - (y - 0)^2 - (z - 0)^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

²Tradução do próprio autor.

Se $d^2(O, Q) = 0$, então Q se situa sobre o cone de luz. Caso $d^2(O, Q) > 0$, o evento Q está no interior do cone de luz.

Como interpretamos tal "distância", $d(O, Q)$? Ela mede o intervalo de tempo medido por um relógio deslocando-se entre os eventos O e Q segundo uma linha-mundo dada pelo segmento OQ .

Vamos considerar uma simplificação para nosso exemplo, o que não descaracteriza, em essência, a situação discutida. Consideraremos um mundo tridimensional, e não quadridimensional, para nosso exemplo. Assim, um ponto-mundo terá coordenadas (x, y, t) e a distância entre dois pontos-mundo será determinada por $d^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2$.

Considere então dois irmãos gêmeos. Um deles permanece em repouso na origem do sistema de coordenadas, $O = (0, 0, 0)$, enquanto que o segundo desloca-se para um ponto situado nas coordenadas $S = (5, 0, 6)$. Ou seja, um ponto situado a 6 anos-luz da origem, e de modo que foram necessários 6 anos para atingí-lo. Em seguida, inicia uma jornada de retorno, durante 8 anos, para encontrar seu irmão no ponto de coordenadas $T = (0, 0, 14)$. Lembrando que esse primeiro irmão permaneceu em repouso na origem do sistema de coordenadas. A Figura 3.14 representa tal situação.

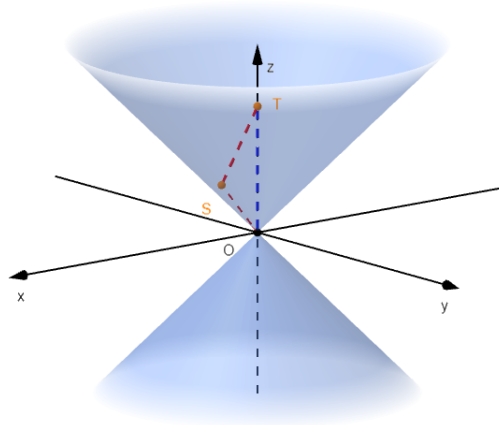


Figura 3.14: Paradoxo dos gêmeos.

Vamos calcular as distâncias entre esses diferentes pontos-mundo. Temos:

$$\text{i) } d(O, S) = \sqrt{(6 - 0)^2 - (0 - 5)^2 - (0 - 0)^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11} \approx 3,3;$$

$$\text{ii) } d(S, T) = \sqrt{(14 - 6)^2 - (0 - 5)^2 - (0 - 0)^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} \approx 6,2,$$

$$\text{iii) } d(O, T) = \sqrt{(14 - 0)^2 - (0 - 0)^2 - (0 - 0)^2} = 14.$$

Observamos que $d(O, T) > d(O, S) + d(S, T)$, claramente em desacordo com a desigualdade triangular usual da Geometria Euclidiana.

Mas como interpretar tal fato?

Entendendo que essas distâncias representam na realidade intervalos de tempo, o irmão que permaneceu em repouso na Terra, experimentou um intervalo de tempo de 14 anos, ao passo que aquele que se deslocou no espaço-tempo teve experimentado um intervalo de tempo menor, igual a $3,3 + 6,2 = 9,5$ anos.

4 Considerações Finais

Introdução

Após termos discutidos as isometrias em três diferentes geometrias, vamos pontuar algumas diferenças entre as mesmas. Também vamos discutir que, mesmo a geometria no plano pode apresentar alguns resultados inesperados, ao considerarmos uma métrica distinta daquela originada no Teorema de Pitágoras.

Além disso, a partir das isometrias definidas no plano euclidiano, apresentamos um conjunto de atividades didáticas, direcionadas aos alunos do Ensino Médio explorando essas transformações no plano.

4.1 Comparando métricas

Como já vimos anteriormente, dados dois pontos quaisquer do plano, P e Q , a distância entre os mesmos é dada por,

$$d(P, Q) = \|P - Q\|.$$

Se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, temos,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Consideremos uma formulação alternativa para a distância entre dois pontos do plano.

Definição 4.1. Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ dois pontos em \mathbb{R}^2 . Definimos a distância entre P e Q por,

$$d_c(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Observação 4.2. Ao tomarmos dois pontos, por exemplo, $P = (-2, 1)$ e $Q = (2, -2)$, observamos que, em geral, tais expressões para a distância entre os mesmos terão valores distintos. De fato, temos,

$$d(P, Q) = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5,$$

enquanto que,

$$d_c(P, Q) = |2 - (-2)| + |-2 - 1| = |4| + |-3| = 7.$$

Entretanto, se $A = (-2, 0)$ e $B = (3, 0)$, teremos que $d(A, B) = 5 = d_c(A, B)$, como vemos de,

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5,$$

e de,

$$d_c(A, B) = |3 - (-2)| + |0 - 0| = |5| + |0| = 5.$$

Se $C = (0, 3)$ e $D = (0, 7)$, também teremos $d(C, D) = 4 = d_c(C, D)$.

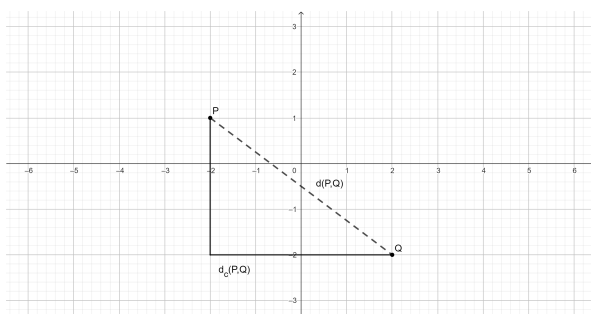


Figura 4.1: Comparação entre as distâncias entre os pontos P e Q dadas pelas métricas euclidiana (linha tracejada) e do taxista (linha cheia).

Essa nova maneira de se medir distância entre dois pontos do plano origina uma nova geometria, denominada geometria do taxista. Tal sistema pode ser modelado por taxistas transitando em uma cidade cujas ruas formam uma rede de quadrados unitários. Assim, como podemos ver na figura 4.2, para um taxista para se deslocar do ponto A ao ponto B deve seguir, dentre as muitas possibilidades, as rotas designadas por Γ_1 ou Γ_2 .

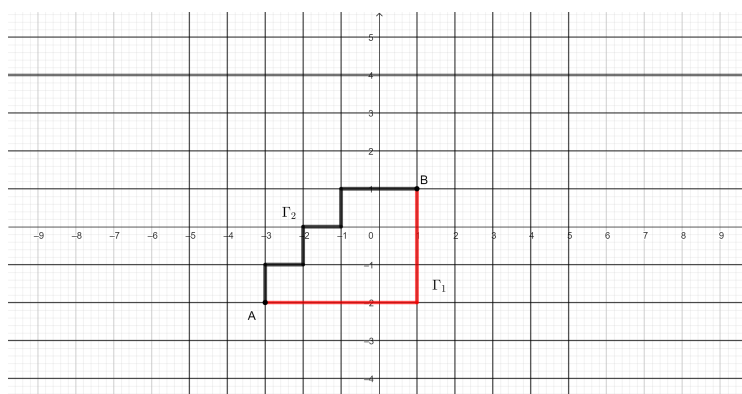


Figura 4.2: Dois possíveis caminhos na geometria do taxista entre os pontos A e B .

Observação 4.3. Estamos falando abertamente em distância entre pontos, dada pela Definição 4.1, sen nos atermos ao fato de que tal expressão pode, ou não ter as propriedades necessárias e suficientes para de fato ser uma medida da distância entre pontos. Consideremos, então, os pontos do plano $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$. Vemos que,

i) Como $|x_2 - x_1| \geq 0$ e $|y_2 - y_1| \geq 0$, temos que,

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \geq 0 \Rightarrow d(P, Q) \geq 0.$$

ii) Se $P = Q$, então $x_2 = x_1$ e $y_2 = y_1$. Logo $|x_2 - x_1| = 0$ e $|y_2 - y_1| = 0$, o que implica que $d(P, Q) = 0$. Reciprocamente, se $d(P, Q) = 0$ temos que $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 0$, e assim, $|x_2 - x_1| = -|y_2 - y_1|$. E como $|x_2 - x_1| \geq 0$ e $|y_2 - y_1| \geq 0$, somos levado à conclusão que $|x_2 - x_1| = 0$ e $|y_2 - y_1| = 0$. Ou seja, $x_2 = x_1$ e $y_2 = y_1$ e, portanto, $P = Q$.

iii)

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\ &= |(-1)(x_1 - x_2)| + |(-1)(y_1 - y_2)| \\ &= |-1| |x_1 - x_2| + |-1| |y_1 - y_2| \\ &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= d(Q, P) \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} d(P, Q) + d(Q, R) &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| \\ &= |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| \\ &\geq |x_2 - x_1 + x_3 - x_2| + |y_2 - y_1 + y_3 - y_2| \\ &= |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1| \\ &= d(P, R) \end{aligned}$$

Dessa maneira, concluímos que $d_c(P, Q)$ é, efetivamente, uma expressão alternativa para a distância entre dois pontos no plano.

Munidos dessas duas expressões para a distância entre dois pontos do plano, vamos analisar alguns objetos característicos no plano.

Definição 4.4. Sejam C um ponto qualquer do plano e $r \in \mathbb{R}$, tal que $r > 0$. A circunferência \mathcal{C} , de centro C e raio r , é o lugar geométrico de todos os pontos P do plano que estão a uma mesma distância, r do ponto C .

Entretanto, qual será a representação desse objeto, no plano cartesiano, dadas as duas métricas que dispomos? Consideremos, uma circunferência, \mathcal{C} , centrada na origem e com raio igual a 1.

Pela métrica cartesiana usual, temos que um ponto qualquer $P \in \mathcal{C}$ é tal que $d(P, C) = 1$. Sendo $P = (x, y)$, temos que,

$$d(P, C) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Assim, no plano cartesiano, a figura 4.3 mostra tal circunferência.

Mas, ao considerarmos a nova métrica, temos que a condição, $d_c(P, C) = 1$, resulta em,

$$|x| + |y| = 1.$$

Assim, no plano cartesiano, obtemos uma representação muito distinta daquela quando usamos a métrica usual, como podemos ver da figura 4.4.

Consideremos um outro objeto, a elipse.

Definição 4.5. Elipse é lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a outros dois pontos, chamados focos, é constante.

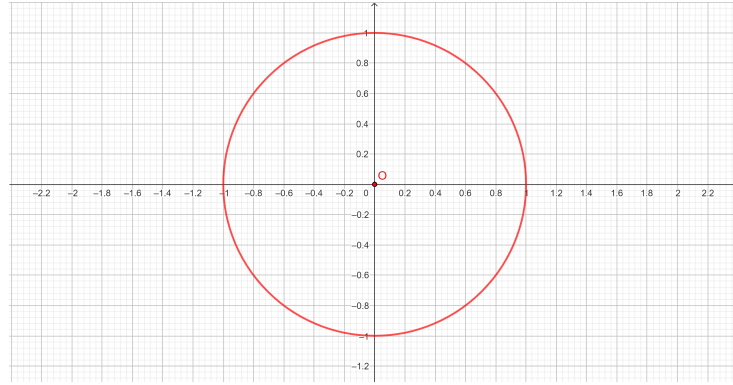


Figura 4.3: Circunferência centrada na origem e com raio igual a 1 na métrica cartesiana.

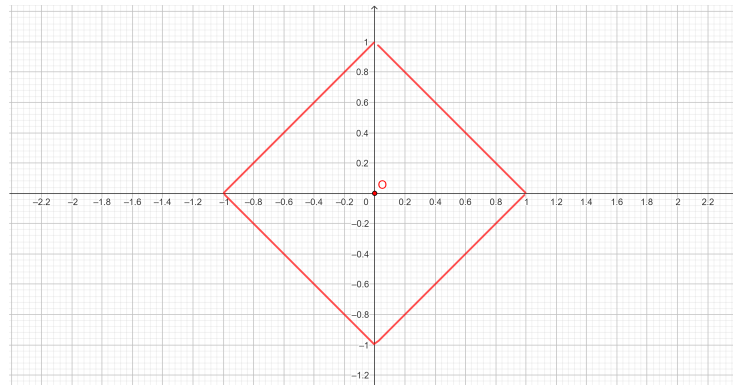


Figura 4.4: Circunferência centrada na origem e com raio igual a 1 na métrica do taxista.

Assim, se tivermos os pontos F_1 e F_2 , focos da elipse \mathcal{E} , e o número real $2 \cdot a > 0$, a elipse é obtida a partir da condição,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2 \cdot a,$$

onde P é um ponto qualquer pertencente à elipse \mathcal{E} .

Consideremos uma elipse cujos focos são os pontos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ e ainda $2 \cdot a = 4$. Na métrica usual, a condição $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2 \cdot a$, resulta na tradicional equação para tal elipse,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

cuja representação no plano cartesiano pode ser vista na figura 4.5.

Ao utilizarmos a métrica do taxista, a condição $d_c(P, F_1) + d_c(P, F_2) = 2 \cdot a$, implica na equação,

$$|x + 1| + |y| + |x - 1| + |y| = 4$$

A figura 4.6 mostra a representação dessa elipse segundo a métrica do taxista.

4.2 Semelhantes mas diferentes

Ao discutirmos essas três geometrias, partimos de alguns mesmos pontos básicos, relativos a geometria de incidência (ponto, reta, concorrência e paralelismo de retas, perpendicularidade), passando pela formulação de uma distância entre pontos, e avançando em

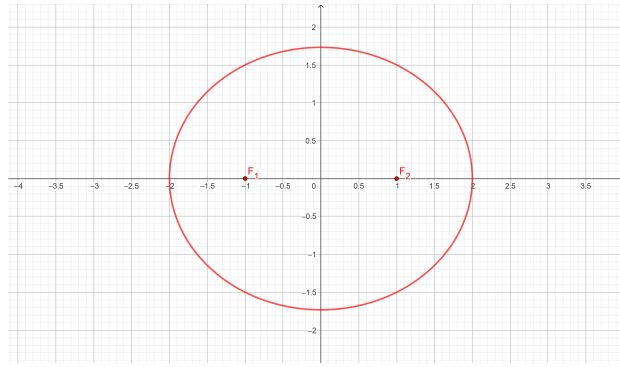


Figura 4.5: Elipse com Focos nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ segundo a métrica usual.

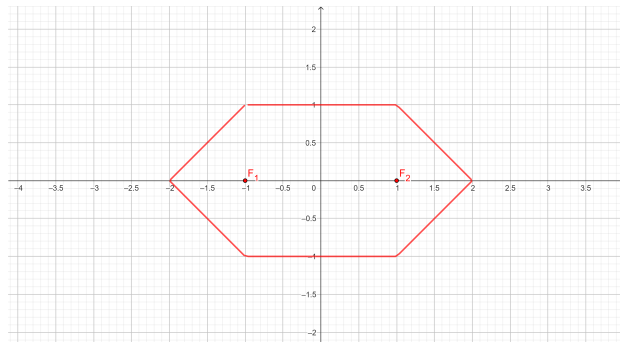


Figura 4.6: Elipse com Focos nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ segundo a métrica do taxista.

direção às chamadas isometrias, tendo por base transformações definidas nessas mesmas geometrias.

Vale ressaltar que além dos pontos de contato, relativos não apenas aos objetos em si, bem como sobre o método empregado, existiam além dessas semelhanças, alguns diferenças significativas, as quais apontaremos na Tabela 4.1.

Um dos primeiros fatos que nos chamam a atenção refere-se a um dos objetos primitivos em qualquer geometria, o conceito de reta. No plano cartesiano, reta é aquele objeto que conhecemos desde há muito tempo. Entretanto na esfera, uma reta é definida como a intersecção entre a esfera unitária e um plano passando pela origem, originando um círculo máximo. Já na geometria hiperbólica, novamente a intersecção entre a folha superior de um hiperbolóide e um plano passando pela origem, dá surgimento a uma curva, que nessa geometria será uma reta.

O próximo ponto que observamos, refere-se também a um ponto crítico para a geometria. Em quais condições determinamos uma reta? Tanto no plano cartesiano como no plano hiperbólico, dois pontos distintos determinam uma única reta. O que não é verdadeiro no caso da geometria na esfera. Se tais pontos forem antípodas, os mesmos determinam infinitas retas. Assim, nessa geometria dois pontos distintos e não antípodas determinam uma única reta.

O quinto postulado por sua vez é satisfeito apenas no Geometria Euclidiana. Já na geometria na esfera, dada uma reta e um ponto fora dessa reta, não existe reta paralela à reta dada. Situação muito distintas da geometria hiperbólica, onde dada uma reta e um ponto não pertencente à reta, existem pelo menos duas retas paralelas à reta dada.

Tanto na Geometria Euclidiana como na geometria na esfera, existe uma forma qua-

	\mathbb{R}^2	S^2	H^2
Objeto Reta	Reta	Círculo máximo	Curva
Dois pontos distintos determinam uma única reta?	Sim	Não	Sim
Quinto postulado satisfeito?	Sim	Não	Não
Distância entre pontos	ilimitada	limitada	ilimitada

Tabela 4.1: Semelhanças e diferenças entre as geometrias.

drática positiva definida, enquanto que na geometria hiperbólica não.

Finalmente, se considerarmos a distância entre dois pontos, vemos que tanto na Geometria Euclidiana, como na geometria hiperbólica, tal distância pode assumir qualquer valor real positivo ou nulo, sendo ilimitada. Já para a geometria na esfera, vemos que a distância entre dois pontos é limitada ao intervalo $[0, \pi]$.

4.3 Atividade didática

Finalmente, realizamos uma série de atividades com alunos do terceiro ano do ensino médio do curso Técnico em Eletrônica Integrado ao Ensino Médio, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Campinas (IFSP CMP), ao longo do segundo semestre de 2023.

Nesse momento, em particular, como prevê o currículo da disciplina Matemática, para tal turma estavam sendo abordados os conceitos de Geometria Analítica. Assim, estudar as isometrias do plano se mostrou um complemento para tal abordagem. Deve-se observar também que todas as atividades foram realizadas utilizando a plataforma *online* Geogebra (geogebra.org/classic).

4.3.1 Caracterização da turma

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia São Paulo (IFSP), antigo Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo (CEFET/SP) e antiga Escola Técnica Federal de São Paulo (ETFSP), é uma instituição pública federal que compõe a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, vinculada a Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica (Setec) do Ministério da Educação (Lei 11892 publicada no DOU em 30 de dezembro de 2008).

Dentre os vários *campi* que compõem o IFSP, a cidade de Campinas (SP), abriga, desde 2013, um campus do IFSP. Atualmente entre outras modalidades da educação básica, são ofertados os cursos de Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio e Técnico em Eletrônica Integrado ao Ensino Médio, com duração de quatros anos.

Dentre os mesmos, foi selecionada uma turma do curso Técnico em Eletrônica Integrado ao Ensino Médio, em particular o terceiro ano. Essa turma tem 29 alunos matriculados, com idades entre 16 e 19 anos, sendo 11 alunos do sexo feminino e 18 do sexo

masculino, moradores de diversos bairros de Campinas, e, em particular, um desses alunos morador da cidade de Valinhos (SP), distante 30 km de Campinas.

Tal turma foi selecionada pois, sendo alunos do 3º ano do Ensino Médio, já possuíam um conhecimento prévio de vetores e operações vetoriais, bem como de Geometria Analítica, conteúdo programático dessa turma.

Assim a abordagem que utilizamos nessa sequência didática, ou seja, tratar as transformações do plano, bem como as isometrias, via Geometria Analítica não causou um grande estranhamento.

4.3.2 Sequência Didática

As atividades foram realizadas, quinzenalmente, em aulas de 100 minutos, em um dos laboratórios de informática do *campus* Campinas do IFSP, entre os meses de agosto e outubro de 2023. Para tal utilizamos o Geogebra, um aplicativo computacional livre de Matemática dinâmica, em sua plataforma online (*geogebra.org/classic*).

Entretanto, antes de iniciarmos a sequência didática entretanto, foi necessário definirmos o produto escalar entre dois vetores, e o de transformações no plano, pois o currículo não abordava tais temas. Outros conteúdos necessários para o desenvolvimento, por sua vez, constavam desse mesmo currículo.

4.3.3 Transformações no plano

A primeira aula foi utilizada para ambientar os alunos com a plataforma Geogebra. Assim, desenvolvemos a sintaxe própria da plataforma para,

- a) definirmos um vetor a partir de dois pontos dados, e calcularmos sua norma;
- b) realizarmos operações com vetores, como soma, diferença, produto por escalar e produto escalar de dois vetores, além de determinarmos o ângulo entre vetores;
- c) escrevermos equações de reta, e conseqüentemente, obtermos tanto o vetor diretor da reta, bem como um vetor unitário normal à reta dada;
- d) utilizarmos ferramentas próprias da plataforma Geogebra para medirmos segmentos de retas e ângulos;
- e) construirmos figuras geométricas no plano, em particular, triângulos;
- f) e, finalmente, para definirmos e operarmos com transformações no plano.

Ainda observamos que, em todas as atividades subsequentes, sempre tomávamos como ponto de partida um triângulo retângulo adequadamente construído, para então aplicarmos as respectivas transformações, e posteriormente, compararmos as figuras antes de após as transformações.

4.3.4 Reflexão por uma reta

Diante de todo o ferramental discutido na aula anterior, definimos, nessa segunda aula, a reflexão por uma reta. Iniciamos, na realidade, com a construção geométrica da reflexão por uma reta. Ou seja, dada uma reta qualquer, r , e um ponto, A fora dessa reta,

- i) traçamos a reta, s , perpendicular à reta dada passando pelo ponto A ,
- ii) em seguida determinamos o ponto, Q de intersecção das retas r e s ,
- iii) finalmente, determinamos o ponto A' da reta s que está a mesma distância do ponto Q que o ponto A está de Q .

Aqui fixamos os pontos $A(3,1)$, $B(7,1)$ e $C = (7,4)$, os quais determinavam um triângulo retângulo, e a reta r tinha pro equação, $y = m_r \cdot x$, onde $m_r = \text{tg } 60^\circ$.

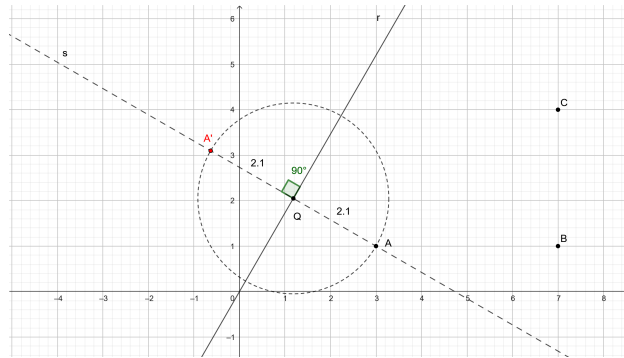


Figura 4.7: Determinação geométrica da reflexão de um ponto por uma reta.

Mas tal procedimento, apesar de tornar possível visualizar todas as construções concretamente, era um tanto quanto demorado e tortuoso. Assim, fizemos uso das definições e propriedades estudadas no corpo do trabalho para determinar a reflexão por uma reta por meio da expressão:

$$\Omega_r X = X - 2 \langle X - P, N \rangle N,$$

onde X é o ponto em questão, P é um ponto da reta, que nesse caso, adotamos como sendo a origem, e N um vetor unitário normal á reta. Aqui consideramos os pontos A , B e C , e, como afirmamos anteriormente, $P = (0,0)$. Para calcularmos o produto escalar $\langle X, N \rangle$, bem como as coordenadas do ponto $\Omega_r X$ utilizamos as ferramentas do próprio Geogebra.

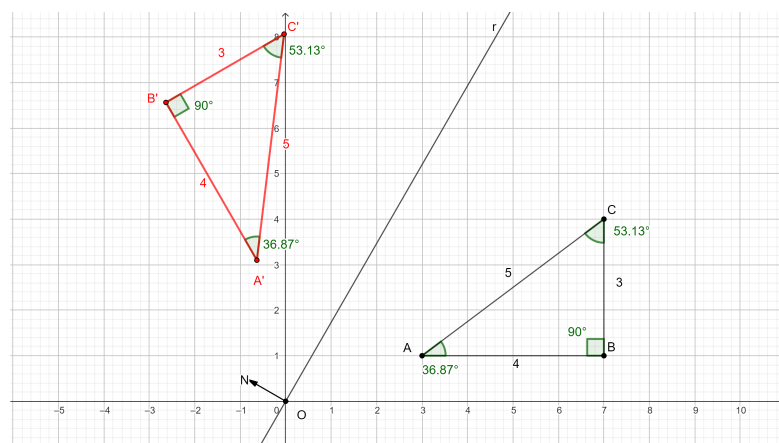


Figura 4.8: Reflexão aplicada ao triângulo ABC

Comparamos, então, os triângulos ABC e $A'B'C'$ a partir de ferramentas do Geogebra, determinando medidas de lados e ângulos correspondentes para determinarmos que

os triângulos em questão são congruentes. Ou seja, essa transformação preserva tanto distâncias como medidas de ângulos.

4.3.5 Translação

Na terceira aula da sequência, abordamos a translação. Tomamos os pontos $A(-1, 0)$, $B(-5, 0)$ e $C(-1, -3)$, também determinando um triângulo retângulo. Também consideramos a reta t , de equação $y = x$. Mas agora, tomamos as retas s e r , de equações $y = -x$ e $y = -x + 2$, respectivamente, de modo que $s \perp t$ e $r \perp t$.

Aplicamos primeiro a reflexão pela reta s , e em seguida, a reflexão pela reta r , como mostra a Figura 4.9.

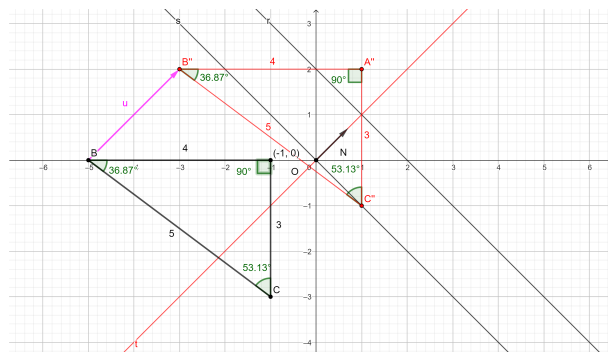


Figura 4.9: Translação, $\Omega_r\Omega_s$ ao longo da reta t .

As retas s e r tem a reta t como perpendicular comum a reta t , e, portanto, são paralelas. Logo o vetor N é um vetor unitário normal, comum a ambas as retas, r e s . Como observamos da figura 4.9, o vetor u , o qual tem origem no ponto B e extremidade no ponto B' , é paralelo ao vetor N . Tanto para o ponto A e sua imagem A' , como para o ponto C e sua imagem C' , o mesmo acontece. Dessa maneira o triângulo $A'B'C'$ é congruente ao triângulo ABC , e, fica determinado pelo deslocamento do triângulo original por esse vetor u .

Mas aqui surgiu uma outra questão levantada pelos próprios alunos. E se considerássemos a transformação composta $\Omega_s\Omega_r$? OU seja, se aplicássemos primeiro a reflexão pela reta r , e posteriormente pela reta s ? O resultado seria diferente?

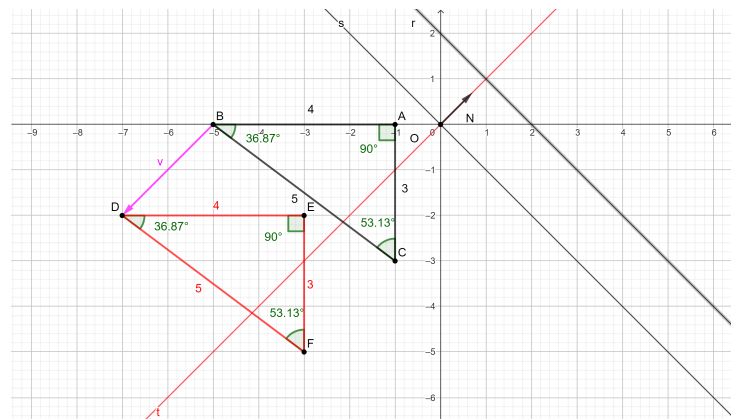


Figura 4.10: Translação, $\Omega_s\Omega_r$ ao longo da reta t .

Da figura 4.10 vemos que o resultado é diferente, mas apenas o sentido de deslocamento do triângulo DEF , o qual é imagem, pela translação $\Omega_s\Omega_r$ do triângulo ABC . Mas, ainda assim tais triângulos são congruentes.

4.3.6 Rotação

Para tratarmos a rotação, consideramos as retas r e s , de equações $y = \text{tg}(30^\circ) \cdot x$ e $y = \text{tg}(75^\circ) \cdot x$, respectivamente. Além disso, tomamos os pontos $A(3,0)$, $B(7,0)$ e $C(7,-3)$, os quais determinavam, mais uma vez, um triângulo retângulo.

Consideramos inicialmente a reflexão pela reta s , e em seguida aplicamos a reflexão pela reta r , para cada um dos pontos A , B e C , como mostrado na figura 4.11

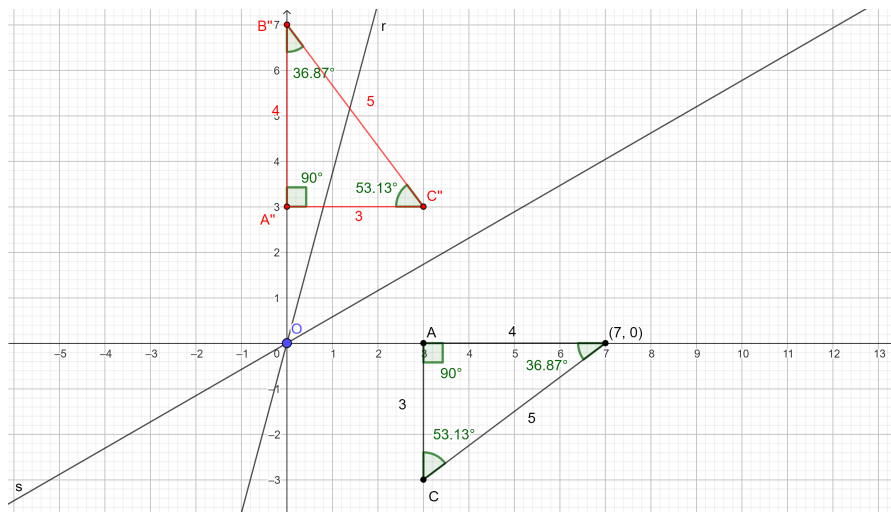


Figura 4.11: Rotação ao redor da origem no sentido anti-horário.

Mais uma vez, o triângulo obtido, $A''B''C''$ é congruente ao triângulo ABC , mas apresenta-se rotacionado, no sentido anti-horário de um ângulo de medida dada por $2 \cdot (75^\circ - 30^\circ) = 90^\circ$.

Como no caso da translação, as reflexões foram aplicadas em ordem inversa, ou seja, primeiro a reflexão pela reta r , para em seguida a reflexão pela reta s . Obtivemos, agora, um triângulo, DEF , congruente ao triângulo dado, ABC , mas agora rotacionado de 90° no sentido horário, como mostrado na figura 4.12

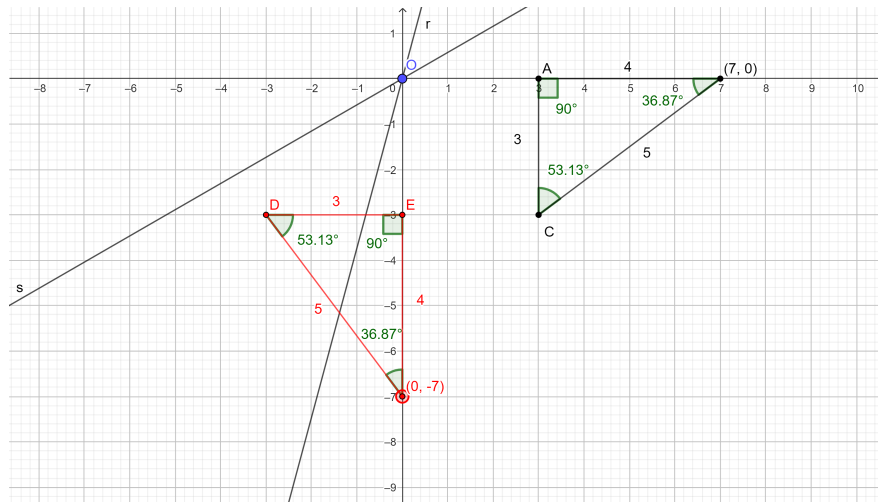


Figura 4.12: Rotação ao redor da origem no sentido horário.

4.3.7 Reflexão com deslizamento

Finalmente a última transformação, a reflexão com deslizamento. Para essa transformação, consideramos mais uma vez as retas t , r e s , cujas equações são dadas por $y = x$, $y = -x + 2$ e $y = -x$, respectivamente. Além disso, consideramos o triângulo retângulo ABC , de vértices $A(-4, -2)$, $B(-4, 1)$ e $C(-8, -2)$.

Para essa transformação, devemos primeiro considerar a reflexão pela reta t , e, em seguida aplicarmos a translação dada pela composição $\Omega_s \Omega_r$. Como nos casos anteriores, o triângulo, $A'''B'''C'''$, obtido após essas operações, é congruente ao triângulo ABC , como mostrado na figura 4.13. Dessa mesma figura, além de observarmos a congruência dos triângulos, observamos que $A'''B'''C'''$ encontra-se refletido pela reta t e deslocado pelo vetor u , paralelo ao vetor unitário normal às retas r e s .

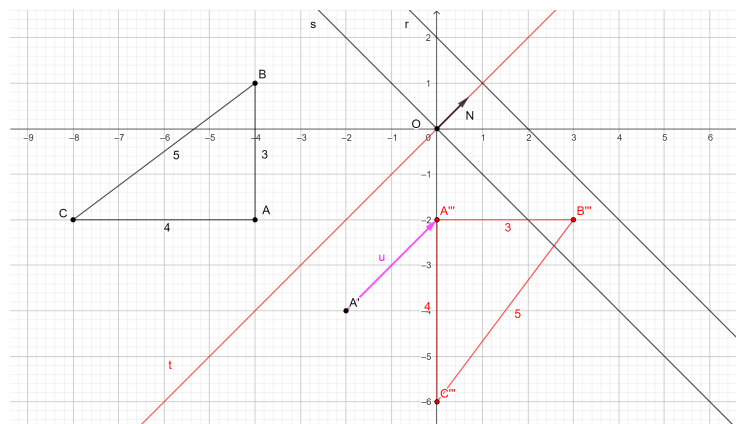


Figura 4.13: Reflexão com deslizamento.

4.3.8 Comentários

Realizadas tais atividades ficaram algumas observações sobre as mesmas.

Em primeiro lugar, ao contrário da abordagem tradicional de Geometria Analítica presente nos mais diversos currículos de Matemática do Ensino Médio, a utilização de vetores, dando um tratamento vetorial a temas da Geometria Analítica tornou mais atraente, para os alunos, os conteúdos abordados. Não apenas os envolvidos nas transformações abordadas, mas em tópicos próprios de Geometria Analítica, como a determinação de ângulos entre retas e a determinação da distância entre um ponto e uma reta, entre outros.

Segundo, a introdução do conceito de transformação no plano, ou de aplicação como uma extensão do conceito de função. E também um conceito que os alunos já conhecem do Ensino Médio, o de composição de funções. Aqui aplicado para expressar todas as transformações como composições de apenas uma delas.

Terceiro, o conceito de isometria. Uma transformação, ou um conjunto de transformações que deixa invariante a distância entre pontos, e a medida de ângulos. Uma breve discussão ao final dessa atividade, levou à idéia de simetria, tão presente em vários objetos geométricos, bem como em algumas obras de arte, particularmente, em pinturas.

Como a própria sequência analisada no Capítulo 1, começamos com a reflexão por uma reta. Eram dados uma reta, r , passando pela origem e um ponto qualquer, P . Efetuada a reflexão por essa reta, e obtida a imagem da mesma, $\Omega_r P$, utilizando ferramentas próprias do Geogebra, os alunos mediam a distância entre o ponto dado e a reta, e a imagem e a reta, para determinarem se tais distâncias eram de fato iguais. Além disso, também a partir de ferramentas da própria plataforma, verificavam que o segmento de reta $\overline{P\Omega_r P}$ era perpendicular à reta r .

Em seguida, apresentamos a rotação ao redor da origem, como a composição de duas reflexões, relativas a duas retas passando pela origem. Para tanto, novamente, a partir de um ponto, P fixado no plano cartesiano, e de duas retas, r e s , passando pela origem, determinávamos a primeira reflexão, relativa a reta r , e posteriormente, a reflexão relativa a reta s . Feito isso, com ferramentas próprias do Geogebra, medíamos, primeiramente o ângulo, relativamente ao eixo x , do ponto inicial P , e, em seguida a imagem da composição de ambas as reflexões. A diferença entre tais ângulos nos fornecia a rotação sofrida pelo ponto. Nesse ponto, é importante salientar que alguns alunos questionaram se a ordem das reflexões produziria um resultado diferente. Assim, repetimos o processo, para observarmos que o resultado final era o mesmo. Após essas construções, apresentamos a forma matricial da rotação para a classe.

Passamos então para a translação. Para tanto foi dada uma reta, t qualquer no plano e foi pedido aos alunos que determinassem duas retas distintas, r e s , perpendiculares à reta dada. Obtidas tais retas, e dado um ponto qualquer do plano, determinaram a imagem da composição das reflexões pelas retas r e s . Em seguida, determinaram a reta passando pelo ponto inicial dado e a imagem após a composição das reflexões para observarem que tal reta era paralela à reta dada.

Por último, analisamos a reflexão com deslizamento. Para tanto era dado um ponto qualquer no plano e uma reta qualquer. Era realizada a reflexão do ponto por essa reta, e, então aplicava-se uma translação para obtermos a imagem do ponto dado originalmente.

Em cada uma dessas atividades, consideramos inicialmente as transformações aplicadas a um único ponto, para que os alunos se familiarizassem com a linguagem e a técnica das transformações. Passada essa etapa inicial, outros dois pontos distintos eram fornecidos aos alunos de modo que os três pontos dados constituíam um triângulo, e assim, obtivessem um outro triângulo ao final das transformações.

Isso foi feito com o intuito de mostrar que tais transformações constituíam isometrias do plano. Utilizando ferramentas próprias da plataforma Geogebra, era possível medir

lados e ângulos internos desses triângulos, e, assim, determinar se os mesmos eram, ou não congruentes, evidenciando que essas transformações eram isometrias do plano.

Referências

- [1] Banchoff, T., Wermer, J., *Linear Algebra Through Geometry*, 2nd edition, Springer-Verlag New York, 1992.
- [2] Boldrini, J., Costa, S., Figueiredo, V., Wetzler, H., *Álgebra Linear*, 3ª edição, Harbra, São Paulo, 1980.
- [3] Boulos P., Camargo I., *Geometria Analítica, um tratamento vetorial*, 2ª edição, McGraw Hill, São Paulo, 1987.
- [4] Boyer, C.B., *História da Matemática*, 2ª edição, Tradução de Elza Gomide (IME USP), Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1996.
- [5] Euclides, *Os Elementos*, Tradução de Irineu Bicudo (IGCE UNESP), Editora da Unesp, São Paulo, 2009.
- [6] Herstein, I.N., *Topics in Algebra*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [7] Lima, E.L., *Isometrias*, SBM, Rio de Janeiro, 1996.
- [8] Lorentz, H.A., Einstein, A., Minkowski, H., Weyl, H., *The principle of relativity: a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, Dover, New York, 1952.
- [9] Morrow, G.E., *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [10] Ryan, P.J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometry, An Analytic Approach*, Cambridge University Press, Meulbourne, 1986.
- [11] Steen, L.A., *Mathematics Today: Twelve Informal Essays*, Springer Verlag, New York, 1978.