



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**EMANUEL CARLOS ALBUQUERQUE ALVES**

**POR UMA GEOMETRIA PICTÓRICA:  
HISTÓRIAS, USOS E CONEXÕES DAS IMAGENS**

**CAMPINA GRANDE**

**2024**

EMANUEL CARLOS ALBUQUERQUE ALVES

**POR UMA GEOMETRIA PICTÓRICA:  
HISTÓRIAS, USOS E CONEXÕES DAS IMAGENS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática

**Área de concentração:** Matemática na educação básica.

**Orientador:** Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

CAMPINA GRANDE

2024

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

A474p Alves, Emanuel Carlos Albuquerque.

Por uma geometria pictórica [manuscrito] : histórias, usos e conexões das imagens / Emanuel Carlos Albuquerque Alves. - 2024.

101 p. : il. colorido.

Digitado. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024. "Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Departamento de Matemática - CCT. "

1. História da matemática. 2. Ensino de matemática. 3. Ensino de geometria. I. Título

21. ed. CDD 510

**EMANUEL CARLOS ALBUQUERQUE ALVES**

**POR UMA GEOMETRIA PICTÓRICA:  
HISTÓRIAS, USOS E CONEXÕES DAS IMAGENS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática na educação básica.

Aprovada em: 23/08/2024.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

---

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Membro interno)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

---

Prof. Dr. Ion Moutinho Goncalves (Membro externo)  
Universidade Federal Fluminense (UFF)

À minha família, aos professores que a vida me concedeu e aos meus amigos que a Matemática me proporcionou, DEDICO.

## AGRADECIMENTOS

À minha família e amigos pelo apoio e incentivo. Em especial, a meu primo Flavio Silva Santos Albuquerque que me motivou a ingressar junto com ele no PROFMAT.

Ao meu companheiro amado José Ribamar de Farias Lima, devido ao carinho, apoio e incentivo.

Ao professor Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, que me orientou não apenas no desenvolvimento desta dissertação, mas também em outros trabalhos acadêmicos ao longo do mestrado.

Aos colegas que conheci durante o mestrado, que compartilharam seus conhecimentos e me ajudaram na superação de dificuldades.

À Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e todo corpo docente do PROFMAT. Aos professores que tive durante o mestrado, por compartilharam seus conhecimentos, vivências e experiências.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela oportunidade de participar do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Uma séria ameaça para a verdadeira vida da ciência aparece contida na afirmação de que a matemática não é nada mais do que um sistema de conclusões derivadas de definições e axiomais, que pode ser criação da livre vontade do matemático.”

Richard Courant

## RESUMO

Este trabalho examina a possibilidade de incorporar elementos pictóricos e geométricos de forma sistemática no ensino da Matemática, superando a predominância de abordagens algébricas e ampliando o foco além dos conteúdos tradicionais de Geometria. A pesquisa, baseada em revisões bibliográficas, começa destacando a relevância histórica desses elementos na construção da Matemática e como eles foram progressivamente substituídos por métodos algébricos. Em seguida, são analisadas teorias da Educação Matemática que enfatizam a importância dos elementos visuais no desenvolvimento cognitivo. Por fim, são discutidos exemplos práticos de objetos matemáticos com interpretações geométricas, reforçando a viabilidade de uma matemática mais pictórica e geométrica na prática pedagógica.

**Palavras-chave:** história da matemática; ensino de matemática; ensino de geometria.

## ABSTRACT

This work examines the possibility of systematically incorporating pictorial and geometric elements into the teaching of Mathematics, overcoming the predominance of algebraic approaches and expanding the focus beyond traditional Geometry content. The research, based on literature reviews, begins by highlighting the historical relevance of these elements in the construction of Mathematics and how they were progressively replaced by algebraic methods. Next, it analyzes theories of Mathematics Education that emphasize the importance of visual elements in cognitive development. Finally, practical examples of mathematical objects with geometric interpretations are discussed, reinforcing the feasibility of a more pictorial and geometric approach in pedagogical practice.

**Keywords:** history of mathematics; mathematics education; teaching of geometry.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Números triangulares, quadrangulares e pentagonais . . . . .	19
2.2	Relação entre números triangulares e quadrados . . . . .	19
2.3	Relação entre números quadrados e <i>gnomons</i> . . . . .	20
2.4	Tripla pitagórica (3,4,5) . . . . .	20
2.5	Figura que acompanha a demonstração do Teorema de Pitágoras no livro I de “Os Elementos” de Euclides . . . . .	22
2.6	Trisecção de ângulo por Arquimedes utilizando <i>neusis</i> . . . . .	24
2.7	Espiral de Arquimedes . . . . .	24
2.8	Trisecção de ângulo por Arquimedes utilizando a espiral . . . . .	25
2.9	Construção geométrica que explica a resolução da equação $x^2 + 10x = 11$ por Al-Khawarizmi . . . . .	27
2.10	Construção geométrica da resolução da equação $bx + c = x^2$ por Al-Khawarizmi	27
2.11	Operação aritmética de multiplicação com régua e compasso por Descartes . .	29
2.12	Extração da raiz quadrada com régua e compasso por Descartes . . . . .	30
2.13	Solução da equação $z^2 = az + b^2$ por Descartes . . . . .	30
2.14	Representação do problema de Pappus por Descartes . . . . .	32
2.15	Exemplo de hipérbole obtida a partir do problema de Pappus por Descartes .	32
2.16	Lugar geométrico de uma reta de Fermat . . . . .	33
2.17	Solução da equação $x^3 = a^2b$ utilizando hipérbole e parábola . . . . .	35
2.18	Solução da equação $x^4 = 4 + 4x + x^2$ utilizando hipérbole e parábola, com $d = e = 1$	36
2.19	Método com quantidade infinitesimal de Leibniz . . . . .	37
2.20	Método com quantidade infinitesimal de Newton . . . . .	38
3.1	Representações possíveis para a palavra <i>over</i> . . . . .	49
4.1	Operações com números naturais . . . . .	52
4.2	Divisores de 12 . . . . .	53
4.3	MMC de 4 e 6 . . . . .	54
4.4	MMC de 4 e 6 . . . . .	54
4.5	MMC de 4 e 5 . . . . .	55
4.6	MMC de 2 e 4 . . . . .	55
4.7	MDC de 20 e 14 . . . . .	56
4.8	MDC e MMC de 9 e 6 . . . . .	57
4.9	MDC e MMC utilizando um retângulo e pontos inteiros na diagonal . . . . .	57
4.10	Construção da sequência $F_5$ de Farey a partir da $F_4$ . . . . .	59
4.11	Círculos de Ford . . . . .	61

4.12	Círculos de Ford	61
4.13	Círculos de Ford	62
4.14	Círculos de Ford relacionados a sequência $F_4$ de Farey	64
4.15	Adição de $\frac{2}{4}$ com $\frac{1}{4}$	65
4.16	Adição de $\frac{2}{4}$ com $\frac{3}{4}$	65
4.17	Adição de $\frac{1}{5}$ com $\frac{2}{3}$	65
4.18	Adição de $\frac{3}{4}$ com $\frac{1}{6}$	66
4.19	Multiplicação de $\frac{2}{3}$ com $\frac{4}{5}$	66
4.20	Multiplicação de $\frac{4}{3}$ com $\frac{5}{2}$	67
4.21	Raiz quadrada e cúbica	68
4.22	Raiz quadrada na reta real utilizando o Teorema de Pitágoras	68
4.23	Raiz quadrada na reta real utilizando relação métrica no triângulo retângulo	68
4.24	Resolução geométrica de equação quadrática de Al-Khwarizmi	71
4.25	Resolução geométrica da equação $x^2 + 4x = 5$ pelo método de Al-Khwarizmi	71
4.26	Resolução geométrica da equação $x^2 + 10x = 39$ pelo método de Al-Khwarizmi	72
4.27	Interpretação geométrica do quadrado da soma	73
4.28	Interpretação geométrica do quadrado da diferença	73
4.29	Interpretação geométrica do quadrado da soma	74
4.30	Interpretação geométrica do produto da soma pela diferença	74
4.31	Interpretação geométrica do cubo da soma	75
4.32	Interpretação geométrica para o módulo ou valor absoluto de $a$ , com $a \in \mathbb{R}^+$	75
4.33	Interpretação geométrica para o módulo ou valor absoluto de $a$ , com $a \in \mathbb{R}^-$	76
4.34	Interpretação geométrica para $ x - a  = b$	76
4.35	Interpretação geométrica para $ x - a  < b$	76
4.36	Interpretação geométrica para $ x - a  > b$	77
4.37	Interpretação geométrica para $ x - a  =  x - b $	77
4.38	Interpretação geométrica para $ x - a  <  x - b $	77
4.39	Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras de Lecchio (1753)	78
4.40	Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras de Euclides	79
4.41	Extensões retilíneas do Teorema de Pitágoras	80
4.42	Mais extensões retilíneas do Teorema de Pitágoras	81
4.43	Extensões não-retilíneas do Teorema de Pitágoras	82
4.44	Prova do Teorema de Pitágora por Issacs Rufus em 1975 na <i>MAA's Mathematical Magazine</i>	83
4.45	Soma dos cubos por Fry em 1985 na <i>MAA's Mathematical Magazine</i>	84
4.46	Desigualdade das médias por Nelsen em 1987 na <i>MAA's Mathematical Magazine</i>	85

4.47	Quadrilátero qualquer . . . . .	86
4.48	Quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ juntos . . . . .	87
4.49	Quatro quadriláteros congruentes conectados . . . . .	87
4.50	Quatro quadriláteros congruentes conectados . . . . .	88
4.51	Quadrilátero convexo qualquer com ângulos opostos internos $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	89
4.52	Quadrilátero convexo de lados medindo cinco . . . . .	89
4.53	Comparando graficamente a fórmula do Agrimensor com a de Bretschneider para um quadrilátero convexo de lados medindo cinco . . . . .	90
4.54	A fórmula do Agrimensor torna um quadrilátero em um retângulo . . . . .	91
4.55	Média aritmética e geométrica utilizando uma semicircunferência . . . . .	92
4.56	Média harmônica utilizando uma semicircunferência . . . . .	93
4.57	Retângulo de lados medindo $a$ e $b$ e quadrado de lados medindo $x$ . . . . .	93
4.58	Probabilidade envolvendo a grandeza comprimento . . . . .	95
4.59	Probabilidade envolvendo a grandeza área . . . . .	95
4.60	Probabilidade envolvendo a grandeza volume . . . . .	96

## LISTA DE TABELAS

2.1	Termos utilizados por Al-Khwarizmi para se referir a quantidades . . . . .	26
2.2	Resolução de Al-Khwarizmi para a equação $x^2 + 10x = 11$ . . . . .	26
4.1	Resolução de equação quadrática de Al-Khwarizmi . . . . .	70

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	OS PROCEDIMENTOS GEOMÉTRICOS E ELEMENTOS PICTÓRICOS AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	16
2.1	A Matemática empírica . . . . .	16
2.2	Os primeiros conhecimentos matemáticos de natureza abstrata . . . .	17
2.3	Outros conhecimentos geométricos antes do Renascimento . . . . .	23
2.4	A culminância da Geometria analítica . . . . .	28
2.5	O Cálculo de Leibniz e de Newton . . . . .	36
2.6	A Matemática pura . . . . .	39
3	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CURRÍCULO, GEOMETRIA E RECURSOS PICTÓRICOS	42
3.1	Educação Matemática no Brasil . . . . .	42
3.2	Abordagens semióticas . . . . .	45
3.3	Teoria de Van Hiele . . . . .	47
3.4	Image Schemata de Dorfler . . . . .	48
4	POSSIBILIDADES DE UMA MATEMÁTICA MAIS PICTÓRICA	51
4.1	Números . . . . .	51
4.1.1	<i>Operações com números naturais</i> . . . . .	51
4.1.2	<i>Múltiplos e divisores de um número natural</i> . . . . .	52
4.1.3	<i>Mínimo Múltiplo Comum (MMC)</i> . . . . .	53
4.1.4	<i>Máximo Divisor Comum (MDC)</i> . . . . .	55
4.1.5	<i>Outra forma geométrica para o MDC e o MMC</i> . . . . .	56
4.1.6	<i>Frações próprias, sequência de Farey e círculos de Ford</i> . . . . .	58
4.1.6.1	<i>Sequência de Farey</i> . . . . .	58
4.1.6.2	<i>Círculos de Ford</i> . . . . .	60
4.1.7	<i>Frações</i> . . . . .	64
4.1.7.1	<i>Adição e subtração de frações</i> . . . . .	64
4.1.7.2	<i>Multiplificação e divisão de frações</i> . . . . .	66
4.1.8	<i>Radiciação - Raiz quadrada</i> . . . . .	68
4.2	Álgebra . . . . .	70
4.2.1	<i>Equações quadráticas</i> . . . . .	70
4.2.1.1	<i>Outra forma de completar o quadrado</i> . . . . .	71

<b>4.2.2</b>	<b><i>Produtos notáveis</i></b> . . . . .	72
4.2.2.1	<i>Quadrado da soma</i> . . . . .	72
4.2.2.2	<i>Quadrado da diferença</i> . . . . .	73
4.2.2.3	<i>Produto da soma pela diferença</i> . . . . .	74
4.2.2.4	<i>Outros produtos notáveis</i> . . . . .	75
<b>4.2.3</b>	<b><i>Equações e Inequações modulares</i></b> . . . . .	75
<b>4.3</b>	<b>Geometria</b> . . . . .	78
<b>4.3.1</b>	<b><i>Teorema de Pitágoras</i></b> . . . . .	78
4.3.1.1	<i>Solução de Lecchio (1753)</i> . . . . .	78
4.3.1.2	<i>Solução clássica de Euclides</i> . . . . .	79
4.3.1.3	<i>Extensões do Teorema de Pitágoras</i> . . . . .	80
<b>4.3.2</b>	<b><i>Provas sem palavras</i></b> . . . . .	82
<b>4.3.3</b>	<b><i>Uso de contextos históricos</i></b> . . . . .	86
<b>4.4</b>	<b>Probabilidade e Estatística</b> . . . . .	92
<b>4.4.1</b>	<b><i>Médias</i></b> . . . . .	92
4.4.1.1	<i>Interpretação das médias utilizando semicircunferência</i> . . . . .	92
4.4.1.2	<i>Interpretação das médias utilizando retângulo e quadrado</i> . . . . .	93
<b>4.4.2</b>	<b><i>Probabilidade Geométrica</i></b> . . . . .	94
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>97</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>100</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Não é à toa que o ditado de Confúcio (552 a.C. a 479 a.C.), “uma imagem vale mais que mil palavras”, reverbera por séculos. As imagens estão presentes desde os primeiros registros humanos em paredes de cavernas até hoje em dia, na palma da nossa mão, em apenas um deslize de dedo na tela. Servem para provocar e ativar nossa imaginação, como na arte, para entreter como no cinema, para registrar momentos e fatos históricos e, principalmente, transmitir ideias.

Uma pintura, por exemplo, carrega em si não só o que está sendo exposto, mas também um viés filosófico, antropológico, sociológico, da pessoa, movimento artístico ou época na qual foi produzida. Um fluxograma esquematiza determinado conhecimento para ser apresentado de forma mais simples e coesa, carregando e transmitindo informações. Uma propaganda tenta convencer o espectador a consumir determinado produto ou serviço. No que diz respeito à Matemática, as possibilidades de carregar e transmitir informações das imagens são as mais presentes, apesar de também haver nelas poder de convencimento, aproximando-as das demonstrações matemáticas.

Diante desse cenário, surge a questão: é possível planejar, de forma sistemática, atividades docentes baseadas em elementos pictóricos e geométricos, evitando o predomínio excessivo de abordagens algébricas, em conteúdos que vão além dos tradicionais da Geometria na Matemática no ensino básico? Este trabalho, a partir de revisões bibliográficas, tem como objetivo demonstrar que isso é viável, uma vez que os elementos pictóricos e geométricos formaram a base do que hoje conhecemos como Matemática. Além disso, esses elementos contribuem para uma compreensão mais ampla e profunda dos objetos matemáticos, como evidenciado por algumas linhas de pesquisa na Educação Matemática que serão vistas adiante.

Nossa investigação propõe uma abordagem da Matemática sob uma perspectiva pictórica e geométrica, remontando à sua evolução histórica, desde suas fases iniciais, marcadas por uma abordagem quantitativa e empírica, até seu desenvolvimento mais abstrato, que culminou na Geometria euclidiana. Inicialmente, o pensamento matemático abstrato estava intrinsecamente ligado à Geometria, que servia como a principal ferramenta para expressar e compreender conceitos matemáticos. Contudo, ao longo do tempo, essa ênfase foi gradualmente substituída por uma abordagem mais algébrica e simbólica.

Baseando-se em obras como a de Tatiana Roque, *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, e em estudos como o de Regina Maria Pavanello, *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica*, este trabalho analisará a evolução da Matemática em conjunto com o uso de imagens geométricas e como, no século XIX, essas

representações foram sendo suprimidas em favor de uma abordagem puramente algébrica. Essa análise permitirá não apenas compreender a evolução histórica da Matemática, mas também os fatores que levaram à marginalização dos elementos pictóricos.

Além disso, serão apresentadas teorias da Educação Matemática que justificam a importância dos elementos visuais na construção do pensamento e no desenvolvimento cognitivo, como as abordagens semióticas de Raymond Duval, a teoria de Van Hiele e os Image Schemata de Dörfler.

E no último capítulo, nossa pesquisa demonstrará que tanto referências históricas quanto estudos contemporâneos podem fundamentar uma prática docente mais equilibrada, que valorize a perspectiva pictórica e geométrica, evitando o predomínio da abordagem exclusivamente algébrica.

Entre os objetos matemáticos que serão apresentados, seguindo a sistematização da BNCC (2018), estão a interpretação geométrica do mínimo múltiplo comum, segundo Cardoso e Gonçalves (1996) e Polezzi (2004), e do máximo divisor comum, conforme ? e Polezzi (2004), além de operações com frações e frações próprias, abordadas por ? e Oliveira (2014), no campo dos Números.

No campo da Álgebra, serão exploradas referências históricas para a interpretação geométrica da resolução de equações quadráticas, que se expandem para produtos notáveis, bem como equações e inequações modulares. Já no campo da Geometria, o uso de referências históricas e provas sem palavras será destacado, incluindo diferentes abordagens para a demonstração do Teorema de Pitágoras, com perspectivas apresentadas por Silva (2014).

No campo da Probabilidade e Estatística, será considerada a interpretação geométrica das médias, conforme Azevedo (2023), e das probabilidades envolvendo grandezas, como discutido por Gondim (2013).

Por fim, é importante destacar que esses exemplos representam apenas uma parte de um vasto conjunto de trabalhos e ideias que podem enriquecer a perspectiva pictórica e geométrica na Matemática.

## 2 OS PROCEDIMENTOS GEOMÉTRICOS E ELEMENTOS PICTÓRICOS AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Mesmo sendo reconhecida por sua estrutura e rigor, fundamentada em axiomas e com uma linguagem própria e universal, a Matemática não se apresentava assim desde o início. Na verdade, foram necessários muitos séculos para que ela alcançasse a estrutura com a qual se apresenta hoje em dia.

A história da Matemática revela não apenas o surgimento dos conceitos matemáticos, mas também o desenvolvimento da linguagem matemática. Além disso, mostra que tanto os conhecimentos quanto a linguagem matemática foram e continuam sendo influenciados pelas demandas e reflexões filosóficas da sociedade em diferentes épocas, assim como pela constante busca por conhecimento e poder.

A seguir, serão apresentados alguns momentos históricos para analisar a construção do conhecimento matemático e como, na ausência de uma linguagem matemática formal, elementos pictóricos e a Geometria não apenas ilustravam, mas também racionalizavam e transmitiam convincentemente os resultados matemáticos. O conteúdo matemático histórico derivam das referências Roque (2012) e Roque e Carvalho (2012), já em relação aos aspectos sociais e culturais históricos derivam de Pavanello (1989).

### 2.1 A Matemática empírica

De acordo com os livros de história da Matemática, esta começou pela atividade de fazer contagem, associada às atividades da agricultura, do comércio e do artesanato e ao registro de quantidades. Sendo assim, a Matemática era empírica e voltada à resolução de problemas relacionados a atividades do cotidiano.

Inicialmente, ao passar da condição de nômades para se fixar em determinados locais, os humanos, com o desenvolvimento da agricultura e a necessidade de abrigar a si mesmos, alimentos e animais, começaram a desenvolver técnicas que abrangiam conhecimentos empíricos diversos, entre eles, os matemáticos.

Depois, com o processo de organização em sociedade, houve uma sistematização da agricultura para suprir as questões da alimentação coletiva, com consequente desenvolvimento de mais conhecimento, devido à necessidade de represar a água, de irrigação e do manejo das culturas alimentares de acordo com os padrões da natureza, havendo uma gênese de calendários e da astronomia. Essa vivência coletiva também promoveu o surgimento de funções específicas ligadas às atividades artesanais, como cerâmica, tecelagem etc.

Dessa forma, essas atividades humanas contribuíram para o desenvolvimento não só da noção de quantidade, mas também de noções geométricas. Pois era preciso não só organizar as

áreas para produzir, mas também para armazenar e mensurar quantidades. Já as atividades artesanais envolviam simetrias e conhecimentos geométricos.

Dentre as Matemáticas das civilizações antigas, temos a dos egípcios, que utilizavam uma numeração de base decimal a partir de hieróglifos, porém esta não era posicional como a utilizada hoje. A Matemática, considera por Roque (2012) de Matemática empírica, destes pode ser vista na forma como eles sistematizavam a agricultura, principalmente no que se refere às mudanças de área de cultivo devido às enchentes que ocorriam ao longo do ano no rio Nilo, e na construção das famosas pirâmides egípcias, nas quais utilizavam noções relacionadas a retas, ângulos, figuras e sólidos geométricos, desenhos em escala e o cálculo de áreas e volumes.

Por exemplo, se alguém possuísse uma propriedade agrícola ao longo do rio Nilo e ocorresse uma inundação, essa pessoa ainda conservaria o direito sobre uma região de mesma área. Dessa forma, a propriedade seria reorganizada, mantendo a quantidade de área anterior. Além disso, existiam cálculos relacionados a impostos sobre produções agrícolas.

Ademais, é comum encontrar nos livros de história da Matemática acerca dos egípcios as formas de multiplicar e dividir, frações unitárias e o método da falsa posição, que resolvia equações de forma aritmética.

Os babilônios, com sua numeração de base sessenta, cuja utilização conecta-se com a medição de ângulos, possuíam métodos para realizar determinadas operações, como, por exemplo, multiplicações, divisões, raízes, potências, operações com frações, cálculos de perímetro, área e volume. Dentre seus métodos, havia procedimentos geométricos para resolver determinados problemas, como, por exemplo, o cálculo da raiz.

Vale ressaltar que os algoritmos utilizados por essas civilizações ainda não se caracterizavam como fórmulas propriamente ditas, e o número não tinha o sentido abstrato que hoje se lhe atribui. Desse modo, Tatiana Roque (2012), em seu livro “História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas”, caracteriza esses métodos numéricos como cálculos com grandezas, pois ainda não possuíam uma natureza inteiramente abstrata.

## **2.2 Os primeiros conhecimentos matemáticos de natureza abstrata**

É um fato incontestável que as civilizações ocidentais foram profundamente influenciadas pelos gregos. Dentre as notáveis contribuições, destacam-se a democracia, a filosofia e os Jogos Olímpicos. Outros setores também se sobressaem, como a mitologia, a arquitetura e as esculturas gregas. Além disso, os gregos desempenharam um papel fundamental no avanço da ciência, marcando o início do desenvolvimento de conhecimentos universais e abstratos, superando casos isolados e particulares do cotidiano. Houve uma nova busca por uma racionalidade dedutiva, na qual explorava não apenas como as coisas acontecem, mas também o

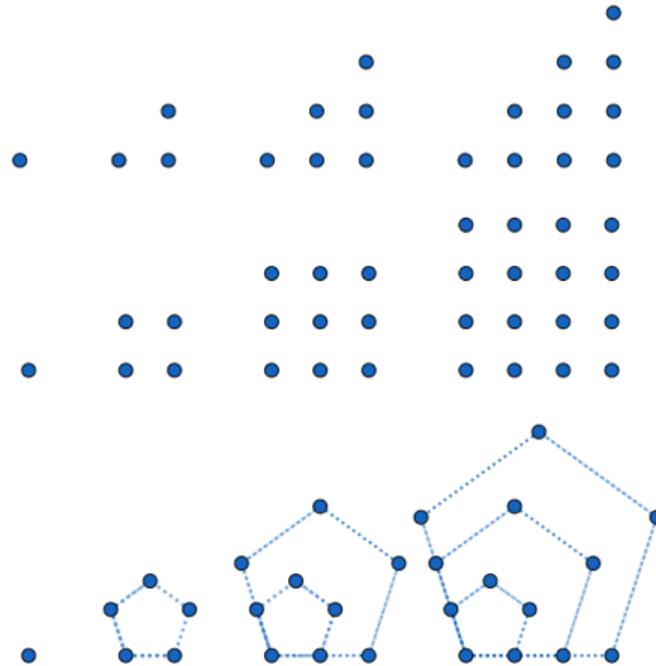
porquê.

No âmbito da matemática, a herança grega se destaca por elementos como o Teorema de Pitágoras, desenvolvido pelos pitagóricos, e o renomado livro "Os Elementos" elaborado por Euclides. Além disso, o alfabeto grego ainda é empregado na linguagem matemática. Contudo, a contribuição primordial dessa civilização para a matemática, bem como para a ciência decorrente da urgência em explicar a razão por trás dos fenômenos, reside na necessidade de fundamentar e demonstrar resultados a partir de definições iniciais.

Em relação aos pitagóricos, apesar de eles serem reconhecidos pela fama do Teorema de Pitágoras, que usualmente está associado a triângulos retângulos, este não teve início por causa dessa característica geométrica. Segundo Tatiana Roque (2012), essa comunidade de matemáticos utilizava uma aritmética de pontinhos e acreditavam em uma cosmologia numérica. Dessa forma, houve um movimento de tratar o número em uma perspectiva teórica e não apenas correlacionada a quantidades do cotidiano. Porém, devido à corrente da cosmologia numérica, que fazia uso dos números para tentar explicar o mundo e tudo presente nele, não se considera que os pitagóricos tinham de fato uma percepção abstrata de número.

Nessa aritmética de pontinhos dos pitagóricos, tem-se os números figurados, que eram caracterizados por elementos pictóricos. A exemplo disto, temos os números triangulares, quadrangulares e pentagonais representados na figura 2.1, a seguir.

Figura 2.1 – Números triangulares, quadrangulares e pentagonais

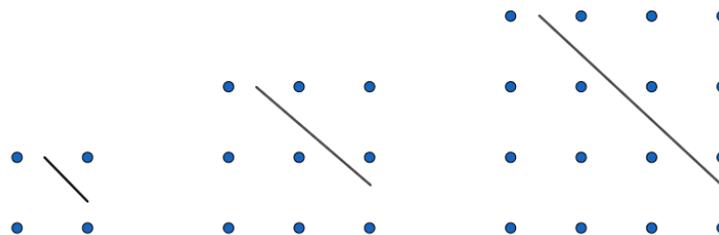


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Atualmente, ao buscar comprovar a construção dessas sequências numéricas mencionadas anteriormente, recorre-se ao método indutivo. No entanto, é notável que os pitagóricos já faziam uso do raciocínio indutivo; basta observar as deduções aritméticas que eles realizavam com base nas representações visuais com pontinhos. A exemplo, temos:

1. Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos; isto equivale em notação atual a  $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$ , com  $n$  maior ou igual que 2.

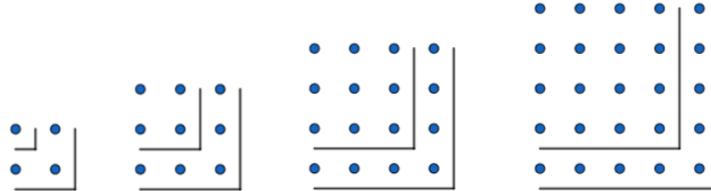
Figura 2.2 – Relação entre números triangulares e quadrados



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

2. É possível passar um número quadrado para outro quadrado consecutivo acrescentando um termo da sequência dos números ímpares. Na notação atual, temos:  $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ .

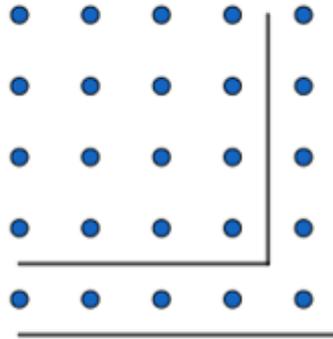
Figura 2.3 – Relação entre números quadrados e *gnomons*



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Nesta última propriedade aritmética, o número de pontinhos ímpar que está contornado por uma linha em formato de L é denominado de *gnomons* dos pitagóricos. Quando esse *gnomon* era um número ímpar quadrado, como é o caso do  $4^2 + 9 = 4^2 + 3^2 = 5^2$ , obtinha-se uma tripla Pitagórica. Assim, apesar de o Teorema de Pitágoras ser notável hoje em dia por sua caracterização de triângulos retângulos, na verdade para os pitagóricos ele era essencialmente aritmético.

Figura 2.4 – Tripla pitagórica (3,4,5)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Quanto ao livro “Os Elementos” de Euclides, uma coleção composta de treze livros, destaca-se o emprego de um raciocínio lógico-dedutivo. Isso se diferencia do pensamento indutivo dos pitagóricos, uma vez que a obra configura uma Matemática verdadeiramente rigorosa e abstrata, apresentando definições, postulados e noções comuns, seguidos por proposições que são, por sua vez, acompanhadas de suas demonstrações.

Entretanto, há ressalvas em relação à autoria de Euclides de todo o conteúdo presente nos livros. Howard Eves (2011), assim como outros historiadores da Matemática, argumenta

que nem todos os resultados da obra foram integralmente mérito dele, cabendo-lhe, antes, o mérito de uma organização do conhecimento de civilizações anteriores por ele sistematizado. Além disso, Tatiana Roque (2012) ressalta que, ao longo de múltiplas traduções século após século, há indícios de acréscimos que resultaram nos treze livros conhecidos. No entanto, todos os historiadores concordam que a obra representa um marco histórico significativo no conhecimento matemático. Dentre eles, Pavanello (1989) nos diz que

É aí (Alexandria) que vive e ensina Euclides – o fundador da Escola Alexandrina de matemática – que escreve, por volta de 300 a.C., os “Elementos”, onde, entre outros assuntos, expõe, de modo tão brilhante, que obscurece todo trabalho anterior a ele, a geometria como um corpo de conhecimento organizado sob a forma de um sistema dedutivo. Sua intenção é que cada afirmação se apresente como a consequência de afirmações previamente estabelecidas, que, por sua vez, derivam de outras, e assim sucessivamente. Todas as afirmações decorrem, porém, de algumas premissas básicas admitidas como verdadeiras. Dessas derivam as demais afirmações (teoremas). (Pavanello, 1989, p. 35).

A seguir, trazemos alguns exemplos de definições contidas no Livro I, em cuja redação nota-se a influência da filosofia dialética.

#### Livro I - Definições

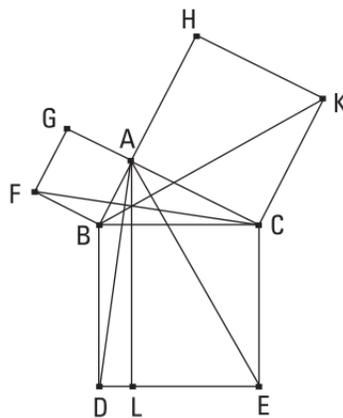
1. Ponto é aquilo de que nada é parte
2. E linha é comprimento sem largura
- ...
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura
- ...
10. E quando uma reta, tendo sido ateadada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
- ...
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois. (Euclides, 2009, p. 97)

Algumas das ideias por trás dessas definições ainda permeiam os livros de Matemática. Além disso, é importante observar que a Matemática axiomática utilizada hoje em dia emprega essa estrutura na qual são admitidos alguns conceitos como válidos e os demais resultados são validados por demonstrações.

É notória a natureza de fato abstrata dos objetos matemáticos tratados nesta obra, desligada de qualquer contextualização comercial, de agricultura ou de situação problema do cotidiano. Além disso, esses objetos são predominantemente de natureza geométrica e são delineados utilizando apenas régua não graduada e compasso colapsante. Apesar da natureza geométrica, as demonstrações não se baseavam na construção de figuras passo a passo para provar as proposições, mas na argumentação lógico-dedutiva, descrevendo as construções com pontos, segmentos, retas e círculos.

Os seis primeiros livros tratam de Geometria Plana, seguido de quatro livros voltados para a Teoria dos Números e os últimos abordando a Geometria Espacial. Especificamente, tem-se o livro I abrangendo as construções elementares, área de polígonos, propriedades em triângulos e teoremas de congruência e de Pitágoras, nesse caso associado ao triângulo retângulo, enunciado como segue: “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto” (sua demonstração é baseada na equivalência de áreas e toma como base a representação geométrica da figura 2.5).

Figura 2.5 – Figura que acompanha a demonstração do Teorema de Pitágoras no livro I de “Os Elementos” de Euclides



Fonte: Euclides (2009, p. 132).

Os demais livros a respeito de Geometria plana trazem respectivamente uma álgebra geométrica, proposições envolvendo círculos e circunferências, construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos, teoria das proporções de Eudoxo e, por último, figuras seme-

lhantes. Vale ressaltar que no sexto livro há proposições que envolvem equações quadráticas. Os livros VII, VIII e IX, de Teoria dos Números, abordam conteúdos como divisibilidade, números primos, algoritmo de Euclides, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, sequências geométricas e proporções da teoria dos números. Quanto ao livro X, tem-se os segmentos incomensuráveis, conhecimento atribuído a Teeteto de Atenas (c. 417 a.C. – 369 a.C.) e atualmente associado aos números irracionais. Por fim, os três últimos livros, de Geometria Espacial, contêm os seguintes conteúdos: o livro XI contempla os elementos da Geometria no espaço e volumes simples; o livro XII, os cálculos de áreas e volumes utilizando o método de exaustão; e o livro XIII, a construção dos cinco poliedros regulares.

Assim, a gênese da natureza abstrata da Matemática registrada formalmente se dá pela Geometria. É interessante destacar também que os livros de “Os Elementos” de Euclides, que datam de 300 a.C., ainda eram referência de estudo da Matemática nas primeiras universidades na Europa no século XII e ainda, posteriormente, quando se dá o Renascimento, no século XVII. Além da Geometria, havia também o estudo da Aritmética que consistia em regras para realizar cálculos. Do Renascimento em diante, a Matemática avança a partir das aplicações entrelaçadas às artes, construção de mapas, astronomia e fenômenos da natureza.

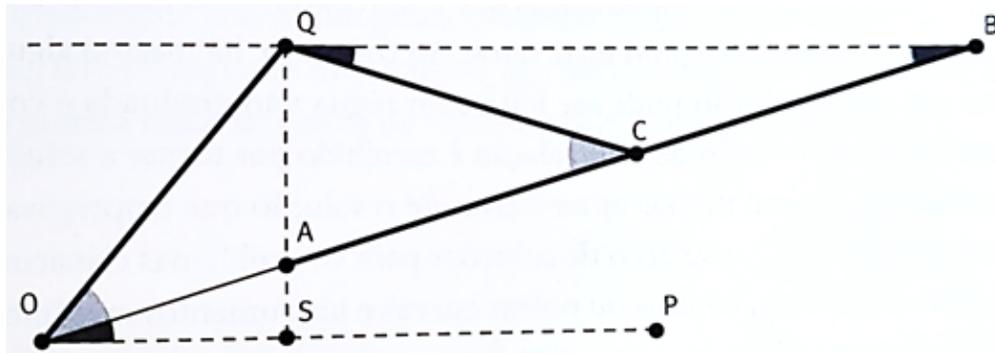
### 2.3 Outros conhecimentos geométricos antes do Renascimento

Ainda antes do Renascimento e distintos da Matemática euclidiana, temos a *neusis* e o método mecânico de Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) e o emprego da Geometria para justificar métodos de natureza algébrica de Al-Khwarismi (780 a.C. – 850 a.C.).

Arquimedes era grego e de uma época pós-euclidiana, porém seus estudos não apresentam uma estrutura euclidiana. Um dos seus métodos, chamado de *neusis*, que significa “intercalação”, isto é, a utilização de segmentos que atendiam certas características para satisfazer a solução. Ademais, esse método fazia uso de régua graduada.

A fim de ficar mais claro, trazemos o exemplo da triseção de ângulo por Arquimedes. Dado o ângulo  $P\hat{O}Q$ , o qual deseja-se triseccionar, trace uma reta paralela a  $OP$  que passa por  $Q$  e um segmento perpendicular a esta paralela que contenha  $Q$  e encontre  $OP$  em  $S$ . Agora, intercala-se, entre os dois segmentos que formam o ângulo dado inicialmente, um segmento partindo de  $O$  até intersectar a paralela num ponto  $B$  tal que  $AB = 2 \cdot OQ$ . O ângulo  $A\hat{O}P$  divide o ângulo inicial em três partes iguais.

Figura 2.6 – Trisecção de ângulo por Arquimedes utilizando *neusis*

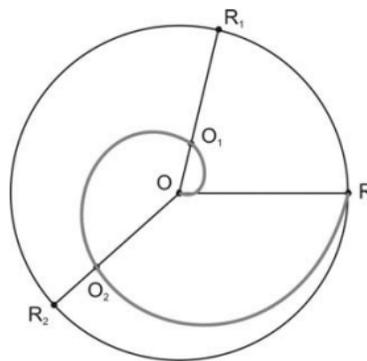


Fonte: Roque (2012, p. 199).

Seja  $C$  o ponto médio de  $AB$ . Como o triângulo  $AQB$  é retângulo e  $QC$  é mediana de  $AB$ , então  $QC = AC$ . Assim,  $QCB$  é isósceles e  $\widehat{ACQ}$  mede o dobro de  $\widehat{CBQ}$ . Por outro lado,  $OQC$  também é isósceles com  $QO = QC$ , logo  $\widehat{QOB}$  e  $\widehat{ACQ}$  têm mesma medida, resultando em  $\widehat{QOB} = 2 \cdot \widehat{CBQ}$ . Como  $OB$  é transversal a duas paralelas, temos  $\widehat{AOP} = \widehat{CBQ}$ . Portanto,  $\widehat{POQ} = \widehat{QOB} + \widehat{CBQ} = 2 \cdot \widehat{CBQ} + \widehat{CBQ} = 3 \cdot \widehat{CBQ}$ .

Já o método mecânico utiliza o movimento de objetos matemáticos. Para exemplificar, tem-se a definição de espiral dada por Arquimedes: “Se uma linha reta traçada em um plano se move uniformemente em torno de uma extremidade fixa e retorna à sua posição de partida, e se ao mesmo tempo em que a reta se move (uniformemente) um ponto, partindo da origem, se move (uniformemente) sobre a reta, esse ponto irá descrever uma espiral no plano”.

Figura 2.7 – Espiral de Arquimedes



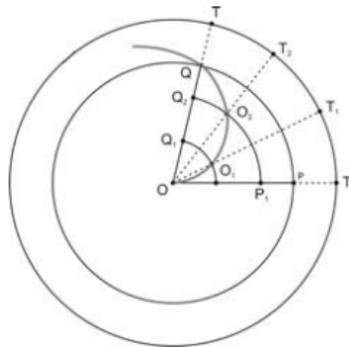
Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 117).

Neste caso, a espiral é uma curva gerada pelo movimento de um ponto que percorre com velocidade uniforme um segmento equivalente ao raio da circunferência, o qual também está se movendo uniformemente girando fixo ao centro. De acordo com a figura 2.7, tem-se

$$\frac{OO_2}{OO_1} = \frac{\text{arco } RR_2}{\text{arco } RR_1}.$$

A vantagem dessa definição é de estabelecer uma relação entre uma medida angular e uma linear, dessa forma, também é possível não só trissecionar um ângulo, mas dividi-lo em quantas partes se queira (Figura 2.8).

Figura 2.8 – Trissecção de ângulo por Arquimedes utilizando a espiral



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 118).

Além disso, Arquimedes utilizou o método de exaustão de Eudoxo (390 a.C. - 340 a.C.) para calcular a área de um círculo, determinando que a área de um círculo era equivalente à área de um triângulo retângulo, no qual um dos catetos era o perímetro da circunferência e o outro o raio desta. Outro resultado conhecido dele que utiliza equivalência de áreas e o método de exaustão é a quadratura da parábola, mensurando a área de uma parábola delimitada por um segmento equivalente a quatro terços do triângulo de base nesse mesmo segmento.

Com respeito a Al-Khwarizmi, donde deriva a palavra “algoritmo” e “algarismo”, temos as primeiras manifestações matemáticas do que mais tarde seria denominado Álgebra, pois foi com os árabes que houve sistematização dos métodos para classificação e resolução de equações. Apesar de não empregar um simbolismo específico, ele utilizava uma linguagem retórica padronizada (Tabela 2.1), e, entre os termos usados, encontrava-se a expressão “coisa” para se referir a uma incógnita, sem distinção entre grandeza geométrica ou número. É relevante notar que os árabes já tinham conhecimento de escritos gregos, como “Os Elementos” de Euclides, e de obras de outros gregos, como Arquimedes.

Tabela 2.1 – Termos utilizados por Al-Khwarizmi para se referir a quantidades

Palavra	Significado	Sentido nos problemas	Notação moderna
Adad	“número”	Quantidade conhecida (número dado)	$c$
Jidhr	“raiz”	Quantidade desconhecida	$x$
Mal	“possessão” ou “tesouro”	Quadrado da quantidade desconhecida	$x^2$

Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 156).

Al-Khwarizmi publicou o livro “Tratado sobre o cálculo de *al-jabr* e *al-muqabala*”, em cujo título o nome ‘álgebra’ tem relação com o termo *al-jabr* e este significa “restauração”, enquanto *al-muqabala* significa “balanceamento”. Nesse livro estão enumerado os seis problemas a seguir que configuram equações quadráticas em formas específicas, já que não se operava com números negativos:

1. quadrados iguais a raízes ( $ax^2 = bx$ );
2. quadrados iguais a um número ( $ax^2 = c$ );
3. raízes iguais a um número ( $bx = c$ );
4. quadrados e raízes iguais a um número ( $ax^2 + bx = c$ );
5. quadrados e um número iguais a raízes ( $ax^2 + c = bx$ );
6. raízes e um número iguais a quadrados ( $ax^2 = bx + c$ ).

Para resolver as equações, havia algoritmos que eram registrados a partir de exemplos. Por exemplo, para resolver a equação  $x^2 + 10x = 11$ , que era do tipo 4, equivalente a “um *Mal* e dez *Jidhr* igualam 11 dinares”, fazia-se:

Tabela 2.2 – Resolução de Al-Khwarizmi para a equação  $x^2 + 10x = 11$ 

Tome a metade da quantidade de <i>Jidhr</i>	$\frac{10}{2} = 5$
Multiplique essa quantidade por si mesma	$5^2 = 25$
Some no resultado os <i>Adad</i>	$25 + 11 = 36$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{36} = 6$
Subtraia desse resultado a metade dos <i>Jidhr</i> , encontrando a solução	$6 - 5 = 1$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Logo em seguida, para justificar o procedimento, havia uma figura equivalente ao algoritmo. Em relação ao exemplo acima, construía-se um quadrado inicial de área equivalente ao *Mal*, isto é,  $x^2$ . Depois, contruía-se dois retângulos adjacentes às laterais do quadrado

de área igual à metade da quantidade de *Jidhr*, no caso retângulos de área  $5x$ . Em seguida completa-se a figura para se tornar um quadrado com o quadrado da metade da quantidade de *Jidhr*, neste caso equivale à segunda linha da tabela acima. Por último, obtém-se um quadrado de área  $25 + 11 = 36$ , cujo lado mede 6; subtraindo disto a metade dos *Jidhr* obtemos a solução procurada 1.

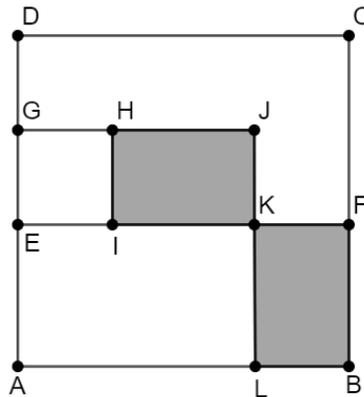
Figura 2.9 – Construção geométrica que explica a resolução da equação  $x^2 + 10x = 11$  por Al-Khawarizmi



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Para equações do tipo  $bx + c = x^2$ , com  $b$  e  $c$  coeficientes positivos, tinha-se a construção da seguinte representação (figura 2.10), utilizando notação atual:

Figura 2.10 – Construção geométrica da resolução da equação  $bx + c = x^2$  por Al-Khawarizmi



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O quadrado  $ABCD$  tem lado igual a  $x$ ; sobre o segmento  $AD$  marca-se o ponto  $E$ , de forma que  $DE$  mede  $p$ . Marcando  $F$  em  $CB$  com  $CF$  também medindo  $p$ , obtemos o retângulo  $EFCD$  com área igual a  $px$  e, conseqüentemente, o retângulo  $ABFE$  com área  $q$ . Em seguida, chama-se de  $G$  o ponto médio de  $DE$ , e constrói-se um quadrado  $ALJG$ , com lado medindo  $x - \frac{p}{2}$  e  $L$  perpendicular a  $AB$ , e outro quadrado  $EIHG$ , com lado medindo  $\frac{p}{2}$  e  $I$  sobre  $EF$ . Chamando de  $K$  a interseção de  $JL$  com  $EF$ , os retângulos  $IKJH$  e  $LBFK$

possuem mesma área, isto é,  $(x - p) \cdot \frac{p}{2}$ . Assim, da área do quadrado  $ALJG$  obtém-se

$$\begin{aligned} A_{ALJG} &= A_{ALKE} + A_{IKJH} + A_{EIHG} \\ &= A_{ALKE} + A_{LBFK} + A_{EIHG} \\ &= A_{ABFE} + A_{EIHG} \end{aligned}$$

daí,

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \implies x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}.$$

Portanto,

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}.$$

## 2.4 A culminância da Geometria analítica

Historicamente, a Idade Média, que se estende do século V ao século XV após a queda do Império Romano, é caracterizada por um período em que não se observaram grandes avanços científicos e os fragmentos de conhecimento produzidos por outras civilizações ficaram em grande parte restrito à esfera eclesiástica. Foi somente nos séculos XI e XII, impulsionada pelas relações comerciais entre europeus e árabes, que a ciência começou a recuperar seu curso. No caso, pela tradução para o latim dos conhecimentos científicos de Alexandria, preservados pelos árabes. Além disso, houve a vinda do papel pelos árabes que ajudou na divulgação do conhecimento.

Na esfera matemática, destaca-se a apropriação da Álgebra árabe e dos números hindu-árabicos. Contudo, somente no século XVI, com o advento do Renascimento, a ciência experimentou um verdadeiro renascimento, impulsionado pelas transformações sociais, econômicas e culturais da época.

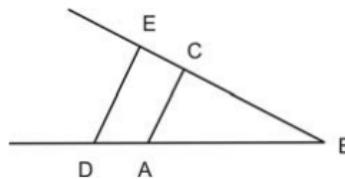
É crucial ressaltar que uma das razões essenciais para a transformação na sociedade decorreu da expansão comercial com o Oriente e, por conseguinte, do aumento da demanda por indivíduos com conhecimentos especializados. As primeiras universidades, surgidas no século XII e inicialmente destinadas ao clero, encarregado das atividades administrativas da época, passaram a ser frequentadas também pelos filhos dos comerciantes. Ademais, vale acrescentar que essas atividades comerciais marítimas, impulsionadas pela bússola e pelo leme, exerceram um papel significativo no avanço da astronomia e, conseqüentemente, da Geometria, essencial para a elaboração de cartas geográficas.

Durante o Renascimento, por volta do século XVII, a Matemática se desenvolve na Álgebra e na Geometria, com mais enfoque nesta última devido à construção de mapas, de ordem

prática, e também devido à Geometria de perspectiva necessária na arte, de ordem abstrata. Ademais, a Matemática se desenvolveu devido à culminância de uma notação específica motivada por François Viète (1540–1603), e, de ordem prática, às construções de máquinas para resolver problemas dinâmicos, como balística e bombas de água, entre outros. Contudo, o principal feito matemático que se destaca nessa época é a culminância da relação entre a Geometria e a Álgebra, a qual denomina-se Geometria Analítica, cujos principais contribuintes foram Descartes (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665).

No início do livro *La Géométrie* de Descartes, há a construção geométrica, com régua não graduada e compasso, das cinco operações aritméticas: a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração de raiz quadrada. A adição e a subtração fazem uso de adicionar ou retirar os segmentos de reta. Quanto à multiplicação e à divisão, são feitas a partir da seguinte representação:

Figura 2.11 – Operação aritmética de multiplicação com régua e compasso por Descartes



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 196).

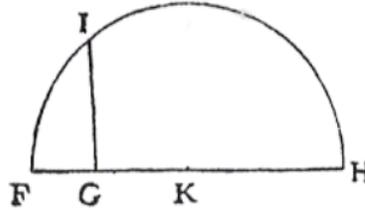
Descartes descreve em *La Géométrie*: “Seja, por exemplo,  $AB$  a unidade, e que deva multiplicar-se  $BD$  por  $BC$ ; tenho apenas que unir os pontos  $A$  e  $C$ , e traçar  $DE$  paralela a  $CA$ ;  $BE$  então é o produto desta multiplicação. Ou então, se se pretende dividir  $BE$  por  $BD$ , tendo unido os pontos  $E$  e  $D$ , traça-se  $AC$  paralela a  $DE$ ;  $BC$  é o resultado desta divisão.”

Concernente à multiplicação, na construção da figura 2.11, onde  $CA$  é paralelo a  $ED$ , tem-se, tomando  $AB$  como unidade, o segmento  $BE$  equivalente ao produto de  $BD$  por  $BC$ . Logo, ao contrário dos gregos, a multiplicação de grandezas lineares ainda era linear e não mais a área, tudo graças à escolha de um segmento de reta arbitrário tomado como “unidade”. Nesse sentido, Roque (2012) destaca que “apesar de construir geometricamente a solução, tal método era absolutamente inovador na geometria, pois permitia ultrapassar a homogeneidade das grandezas e operar com elas como se fossem números, o que implica uma mistura entre gêneros tidos tradicionalmente como distintos: a aritmética e a geometria.”

Já para a extração de raiz quadrada era utilizado um triângulo retângulo inscrito em uma semicircunferência, onde a hipotesusa era o diâmetro. Assim, por simples relações de semelhança de triângulo podia-se obter o segmento equivalente à raiz quadrada de um número

dado. Com efeito, “No caso em que se pretende extrair a raiz quadrada de  $GH$ , adiciona-se ao longo da linha reta  $FG$ , que é igual à unidade, e dividindo  $FH$  em duas partes iguais pelo ponto  $K$ , descrevo a partir de  $K$  o círculo  $FIH$ . Depois, traçando do ponto  $G$  uma reta com ângulos retos sobre  $FH$ , até  $I$ ,  $GI$  é a raiz buscada”, cuja representação é dada pela figura 2.12 .

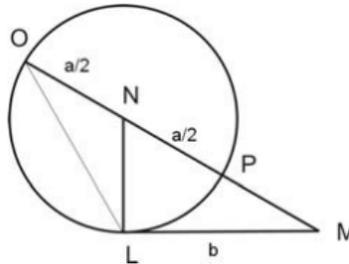
Figura 2.12 – Extração da raiz quadrada com régua e compasso por Descartes



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 196)

Descartes ainda apresenta a solução de equações com termos quadráticos, sugerindo a utilização das últimas letras do alfabeto para designar incógnitas. A exemplo disto, tem-se a construção da solução de forma geométrica da equação  $z^2 = az + b^2$ .

Figura 2.13 – Solução da equação  $z^2 = az + b^2$  por Descartes



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 197).

Deseja-se construir um segmento  $z$  que satisfaça a equação  $z^2 = az + b^2$ . Partindo da construção do triângulo retângulo  $NLM$  com  $LM$  e  $NL$  medindo  $b$  e  $\frac{a}{2}$ , constrói-se uma circunferência de centro  $N$  e raio  $NL$ . Posteriormente, prolonga-se  $MN$  interceptando a circunferência em  $O$ . Dessa forma, obtém-se

$$z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

Isto se justifica, pois chamando de  $P$  a interseção da circunferência com  $MN$ , os triângulos  $PLM$  e  $LOM$  são semelhantes. Pois, primeiramente, compartilham do mesmo ângulo  $\hat{M}$ . Ademais, por  $OLP$  ser um triângulo inscrito na semicircunferência, ele é retângulo, e tem-se

$P\hat{L}M$  igual a  $N\hat{L}O$ . Daí, por  $ONL$  ser isósceles tem-se  $N\hat{L}O$  igual a  $N\hat{O}L$ , congruente a  $M\hat{O}L$ . Assim,  $M\hat{O}L = P\hat{L}M$ . Da semelhança, segue

$$\frac{LM}{OM} = \frac{PM}{LM} \implies LM^2 = OM \cdot PM.$$

Como  $OM = z$  e  $PM = z - a$ , resulta

$$LM^2 = OM \cdot PM \implies b^2 = z \cdot (z - a) = z^2 - az.$$

Portanto, o segmento  $OM$  é uma das raízes da equação. Haveria como deduzir a outra raiz a partir das manipulações algébricas e propriedades geométricas, mas Descartes não considerava devido a esta ser negativa.

Descartes ainda apresenta procedimentos geométricos utilizando circunferência, triângulos e prolongamento de retas para determinar as raízes das equações  $z^2 = -az + b^2$  e  $z^2 = az - b^2$ , onde considerava os coeficientes  $a$  e  $b$  positivos e o sinal de menos uma operação sobre esses coeficientes positivos. Ademais, em seus procedimentos poderia acontecer de não ser possível fazer as construções, mostrando que a equação não possuía raiz, mas nesse caso ele estava se referindo a raízes reais positivas.

Nota-se que os três tipos de equações poderiam ser resumidos na equação quadrática  $z^2 + az + b^2 = 0$ , contudo sua forma analítica a partir de procedimentos geométricos e também a consideração apenas de coeficientes e resultados positivos não permitiram uma generalização maior.

Não foi só seu método analítico através de procedimentos geométricos que contribuíram para o que hoje se chama de Geometria Analítica, mas também o primeiro de uso da noção de eixos coordenados. Estes não necessariamente eram ortogonais, mas escolhidos de forma conveniente para a resolução do problema em questão. A exemplo disto, tem-se a solução de um problema de Pappus por Descartes na qual ele faz uso de eixos coordenados.

O problema consiste em dadas inicialmente as retas  $AB$ ,  $AD$ ,  $EF$  e  $GH$  (Figura 2.14), determinar um ponto  $C$  do qual se possa contruir segmentos de reta  $CB$ ,  $CD$ ,  $CF$  e  $CH$  que façam ângulos  $C\hat{B}A$ ,  $C\hat{D}A$ ,  $C\hat{F}E$  e  $C\hat{H}G$  dados com as retas dadas. Além disto, o produto dos comprimentos de alguns desses segmentos é proporcional ao produto dos comprimentos dos restantes.

Utilizando seu método analítico, Descartes nos diz que “primeiramente, suponho a coisa como já feita e, para me livrar da confusão de todas estas linhas, considero uma das dadas e uma das que se deve encontrar, por exemplo,  $AB$  e  $CB$ , como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Seja designado  $x$  o segmento da linha  $AB$  compreendido entre

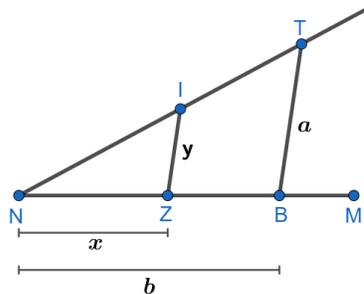


riormente de forma mecânica poderiam ser desenhadas por sucessivas construções de pares ordenados com régua e compasso, mostrando que estas não são de fato mecânicas. Além do mais, classifica as curvas a partir do grau das suas equações; os casos mais simples são as de segundo grau como círculo, parábola, hipérbole e elipse.

Por outro lado, enquanto Descartes tomava primeiramente o lugar geométrico para encontrar a equação que o descrevia, Fermat na mesma época desenvolvia seus trabalhos utilizando o raciocínio inverso. Essa forma de pensar, partindo das equações, fez com que ele operasse de forma mais algébrica, mas os seus resultados ainda faziam uso de recursos geométricos.

Em seu livro *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, Fermat inicia dizendo que “sempre que, em uma equação final, duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva”. Vale salientar que nas equações tratadas nesse livro as variáveis assumem até o segundo grau. A seguir, há seu método mostrando que os pontos que satisfazem uma equação de primeiro grau estão em uma linha reta.

Figura 2.16 – Lugar geométrico de uma reta de Fermat



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Considere a reta NZM dada de posição, assim como N também fixo (Figura 2.16). Seja NZ a quantidade desconhecida  $x$ , ZI a quantidade desconhecida  $y$  e o ângulo entre ZI e NZ fixo. Ora, se  $a \cdot x = b \cdot y$ , então o ponto I estará numa reta dada de posição. Partindo de  $a \cdot x = b \cdot y$ , obtém-se  $a : b = y : x$ . Como  $a$  e  $b$  são quantidade conhecidas (constantes), então a razão  $y : x$  está determinada. Conseqüentemente, por também se conhecer o ângulo NZI, é dado de *espécie* (termo usado para semelhança de triângulo em “Os Elementos” de Euclides) e, assim, o ângulo INZ é conhecido. Dessa forma o lugar geométrico descrito por I é uma reta.

No caso de Fermat, comparando ao sistema de plano cartesiano, tem-se apenas o eixo das abscissas no sentido positivo sendo representado. No caso acima, a reta NZM seira o eixo das abscissas e N a origem (Figura 2.16). O eixo das ordenadas era determinado pelos valores de  $y$ , mas não havia de fato a representação do eixo. Utilizando apenas essa referência de eixo

das abscissas no sentido positivo ele determina o lugar geométrico das seguintes equações:

- $ax = by$  (reta)
- $xy = b$  (hipérbole)
- A razão entre  $x^2 \pm xy$  e  $y^2$  é constante (retas)
- $x^2 = ay$  (parábola)
- $b^2 - x^2 = y^2$  (círculo)
- A razão entre  $b^2 - x^2$  e  $y^2$  é constante (elipse)
- A razão entre  $b^2 + x^2$  e  $y^2$  é constante (hipérbole)

Os estudos de Fermat não chegaram a ser publicados por ele, mas sim por seu filho após seu falecimento. Apesar de manter correspondência com outros matemáticos de sua época, incluindo Descartes, Fermat não costumava citar claramente suas fontes. No entanto, é possível perceber influências das obras gregas em seus escritos, inclusive derivados dos estudos sobre cônicas de Apolônio. Ademais, ele afirmou em relação às equações de segundo grau que o lugar geométrico dos pontos que satisfaziam essas equações eram círculos ou uma cônica.

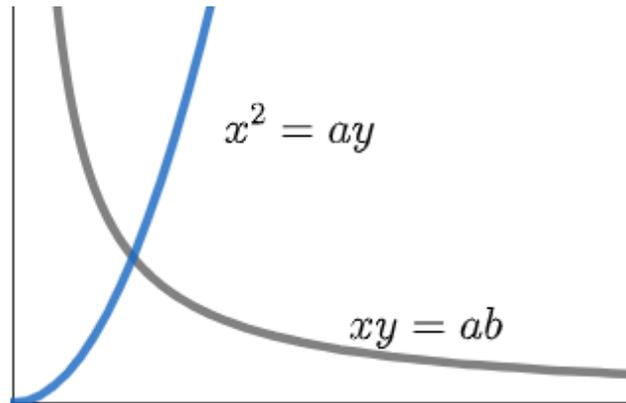
Ainda em seu livro *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos* há um apêndice sobre a “solução de problemas sólidos por lugares geométricos”. Nesses problemas, ele decompunha uma equação de terceiro ou quarto grau em duas equações de cônicas conhecidas. Assim, através da interseção dessas duas cônicas encontrava a solução da equação inicial. Segue um exemplo aplicado a achar duas meias proporcionais entre os segmento  $a$  e  $b$ .

**Exemplo 2.1.** *Dados  $a$  e  $b$ , encontrar  $x$  e  $y$  tais que*

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Ora, para obter-se a meia proporcional, deve-se determinar  $x$  na equação  $x^3 = a^2b$ . Mas a solução dessa equação é a que satisfaz ao mesmo tempo a equação da parábola,  $x^2 = ay$ , e da hipérbole,  $xy = ab$ . Assim, para ele, o problema é resolvido desenhando a parábola e a hipérbole (figura 2.17), pois dessa forma encontra-se o ponto de interseção das duas curvas, determinando o valor de  $x$  e  $y$ .

Figura 2.17 – Solução da equação  $x^3 = a^2b$  utilizando hipérbole e parábola



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Outro exemplo é determinar a solução da equação  $x^4 = a + bx + cx^2$ . Para isso, ele fazia algumas manipulações algébricas para determinar as duas cônicas cuja solução é equivalente à equação dada. Segue o procedimento para resolução:

Primeiramente, adiciona-se  $-2dx^2 + d^2$  em ambos os lados da equação, onde  $d$  será determinado posteriormente. Assim, obtém-se

$$(x^2 - d)^2 = a + bx + (c - 2d)x^2 + d^2.$$

Iguala-se cada lado a  $e^2y^2$ , onde  $e$  será determinado posteriormente. Consequentemente, tem-se agora as equações

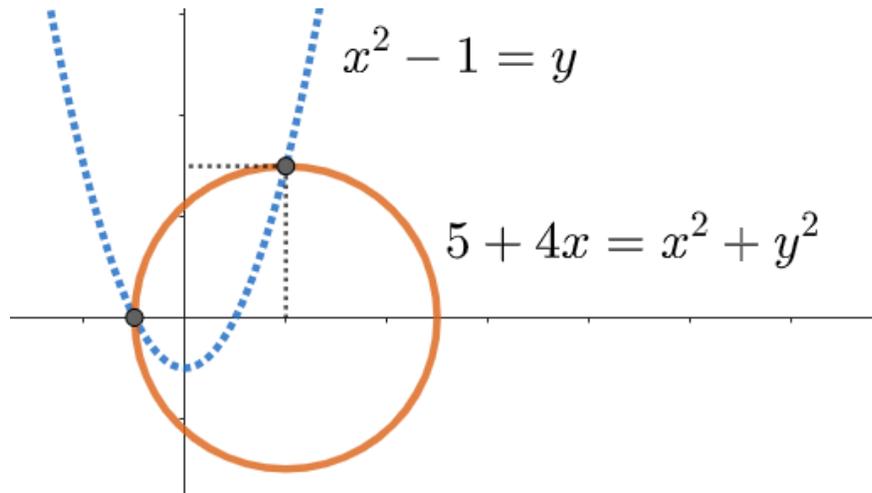
$$x^2 - d = ey,$$

que representa uma parábola, e

$$a + bx + d^2 = (2d - c)x^2 + e^2y^2,$$

que representa um círculo tomando  $d$  e  $e$  de forma que  $2d - c > 0$  e  $e^2 = 2d - c$ , respectivamente. Logo, a solução é dada desenhando a parábola e o círculo.

Figura 2.18 – Solução da equação  $x^4 = 4 + 4x + x^2$  utilizando hipérbole e parábola, com  $d = e = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Por fim, Descartes ainda dedicou-se aos estudos da determinação de retas tangentes, enquanto Fermat explorou não apenas retas tangentes, mas também o cálculo de mínimos e máximos. Essas contribuições foram fundamentais para os pioneiros do cálculo, como Leibniz (1646 - 1716) e Newton (1643 - 1727).

## 2.5 O Cálculo de Leibniz e de Newton

Na construção histórica do Cálculo, as bases foram primeiramente estabelecidas na determinação de áreas e volumes, iniciando assim o estudo do cálculo integral. Posteriormente, o foco se voltou para a análise de tangentes a curvas, máximos e mínimos, avançando assim para o cálculo diferencial. Por último é que foi desenvolvida a noção de função de hoje em dia. Portanto, é interessante notar que o desenvolvimento histórico do Cálculo ocorreu de forma inversa à sequência curricular segundo a qual a disciplina geralmente é abordada.

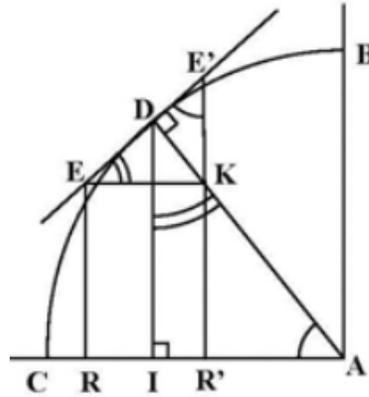
Diversos matemáticos contribuíram significativamente para o desenvolvimento desse ramo da Matemática. Entre eles estão Eudoxo (390 a.C. - 340 a.C.), que introduziu o método de exaustão, Arquimedes, com seu método de equilíbrio, e Cavalieri (1598 - 1647), com o método de indivisíveis. Além desses, figuras como J. Wallis, J. Gregory, Isaac Barrow, Pascal, Descartes e Fermat também deixaram suas marcas. No entanto, os estudos de Leibniz e Newton se destacam pela sua generalidade e potencialidade dos métodos utilizados.

Leibniz, em sua obra “História da Origem do Cálculo Diferencial”, afirma que uma das referências que o inspiraram foi o “Tratado dos Senos do Quarto do Círculo” de Pascal (1623 - 1662). Nesse tratado, Pascal emprega uma semelhança de triângulos, denominada por ele como “triângulo característico”, para calcular a quadratura do quarto do círculo. Enquanto Pascal utilizou essa abordagem para um propósito específico, Leibniz percebeu que poderia

generalizá-la para determinar a área sob outras curvas.

O método de Pascal partia de um quarto do círculo ABC (figura 2.19), juntamente com a tangente EE' a esse círculo no ponto D. Para realizar o método, desenhava-se um segmento perpendicular a AC, passando por D, e denominava-se de I o ponto de interseção. Em seguida, a partir de E, traçava-se EK paralela a AC, e a partir de E', traçava-se E'K paralela a DI, com K pertencente ao segmento do raio AD.

Figura 2.19 – Método com quantidade infinitesimal de Leibniz



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 218).

Dessa forma, os triângulos DIA e EKE' são semelhantes, pois  $\widehat{EDI} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ADI} = \widehat{IAD}$ , logo  $\widehat{DEK} = \widehat{IDA}$  e  $\widehat{EE'K} = \widehat{IAD}$ . Dessa semelhança, obtém-se  $\frac{EE'}{AD} = \frac{EK}{DI}$ . Chamando de R e R' a projeção de E e K em CA, tem-se que  $EK = RR'$ , donde segue que

$$\frac{EE'}{RR'} = \frac{AD}{DI}.$$

Como pode-se tomar E e E' próximos de D, Leibniz enxergou que a razão de EE' por RR', isto é, de termos infinitamente pequenos, estava determinado pela razão de termos conhecidos, no caso, AD e DI. Utilizando esse raciocínio para outras curvas e utilizando a relação entre os catetos, ele obteve

$$\frac{E'K}{RR'} = \frac{AI}{DI},$$

isto é,

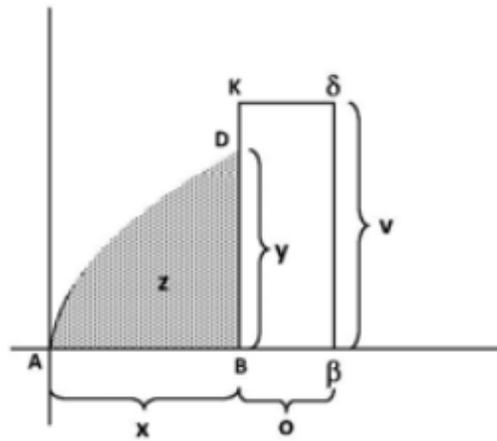
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\textit{subtangente}}{y}.$$

O resultado de Leibniz desencadeou muitas discussões devido ao uso de quantidades infinitamente pequenas, também conhecidas como “elementos infinitesimais” ou “diferenciais”, que ele particularmente denominava como não atribuíveis. Apesar do alvoroço, seu método mostrou-se altamente eficaz em seus cálculos, bem como nas aplicações práticas.

A notação  $dy$  e  $dx$ , ou seja, a introdução do operador  $d$ , também teve origem com Leibniz. Vale destacar que essa simbologia não carrega, em si, a ideia de diferenciabilidade, mas, na verdade, reflete o princípio de especificar a variável em relação à qual se deseja derivar. Dessa forma, já havia uma noção de variável dependente e variável independente muito antes de haver um conceito de função.

Já o método de Newton para o cálculo de tangente era o seguinte: dada uma curva, por exemplo, de acordo com a figura 2.20, tal que a área de  $ABD = z$ ,  $BD$  mede  $y$  e  $AB$  mede  $x$ , escolhe-se  $\beta$  e  $K$ , chamando  $B\beta = o$  e  $BK = v$ , de forma que a área sob a curva entre  $B$  e  $\beta$  seja equivalente à área do retângulo  $BK\delta\beta$ , no caso,  $ov$ .

Figura 2.20 – Método com quantidade infinitesimal de Newton



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 223).

Supondo que a curva seja  $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ , então  $z^2 = \frac{4}{9}x^3$ . Ora,

$$(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3 \Rightarrow z^2 + 2zov + o^2v^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3).$$

Substituindo  $z^2 = \frac{4}{9}x^3$  e eliminando termos equivalentes, obtém-se ao dividir por  $o$

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2).$$

Agora, ao considerar  $B\beta$  infinitamente pequeno, os termos multiplicados por  $o$  desaparecem, bem como obtém-se  $v = y$ . Assim, resulta

$$2zy = \frac{4}{3}x^2.$$

Como  $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ , conclui-se que

$$y = x^{\frac{1}{2}}.$$

O trabalho de Newton também enfrentou resistência devido ao seu tratamento de quantidades infinitamente pequenas, especialmente ao eliminar termos com  $o$  no final, sugerindo que essa quantidade poderia ser equivalente a zero em determinado momento. Assim, observam-se semelhanças nos trabalhos de Leibniz e Newton no que diz respeito à manipulação de quantidades infinitesimais. No entanto, Newton adotava uma abordagem mais voltada para a Geometria sintética, enquanto Leibniz, visando desenvolver um cálculo universal, empregava uma linguagem onde notação e algoritmos eram mais proeminentes, resultando em uma recepção mais favorável por parte da comunidade científica da época.

## 2.6 A Matemática pura

Posteriormente a Newton e Leibniz, devido ao estudo da Análise e equações diferenciais ligadas a contextos da natureza como a propagação de calor, sistema solar, conservação de energia, queda livre, princípio da mínima ação etc, houve bastante avanço na Matemática por sua finalidade prática. Em seguida, observando que as equações e resultados obtidos possuíam certa generalidade nas diversas aplicações, começou-se a observar a Matemática de forma mais “pura”, contudo ainda com a finalidade de obter frutos na aplicação.

Essa forma de pensar estava mais impregnada na França. Contudo, na Alemanha, no início do século XIX, as invasões napoleônicas resultaram na percepção de que o sucesso militar francês estava intrinsecamente ligado ao desenvolvimento científico. Esse entendimento impulsionou substancialmente o investimento em conhecimento científico na Alemanha. Nas universidades, devido a correntes filosóficas da época, a Matemática foi se distanciando de objetos com finalidade prática e começou a ser considerada em uma natureza puramente abstrata.

Nesse contexto, os matemáticos alemães Gauss, Weierstrass, Cantor, Dirichlet, Riemann e Dedekind, a partir de problemas gerados dentro da própria Matemática abstrata, formalizaram o conceito de número, números reais, números naturais, funções e conjuntos.

A Teoria dos Conjuntos desempenhou um papel crucial na organização da Matemática moderna, representando o ápice da busca pelo rigor matemático no século XIX. A perspectiva modernista da Matemática, pautada na busca pela abstração máxima, proibia a racionalização da Geometria ou Análise a partir de objetos do senso comum ou de aplicações físicas. Dessa forma, o estabelecimento de relações entre conjuntos, a habilidade de lidar proficientemente com conceitos complexos como o infinito e a abordagem abstrata de número tornaram a Teoria dos Conjuntos uma ferramenta fundamental para a Matemática moderna. No entanto, é importante salientar que essa teoria não foi diretamente responsável pela for-

mulação da Matemática axiomática centrada em noções de conjuntos; essa contribuição foi atribuída ao movimento Bourbaki.

Antes de entender o movimento Bourbaki, é preciso entender a situação pela qual o ensino de Matemática passava. Neste momento, apesar da disseminação da educação entre a classe trabalhadora, impulsionada pela crescente necessidade de indivíduos mais capacitados na sociedade moderna, a Matemática, considerada essencial não apenas pela sua utilidade prática, mas também por estimular o raciocínio, enfrentava significativas dificuldades por parte dos alunos.

Como resposta a esses desafios, diversos movimentos surgiram para reformular os currículos, não apenas para superar as dificuldades dos alunos, mas também para atender às demandas da sociedade moderna em constante evolução. Nesse contexto também, os primeiros estudos psicológicos voltados para a aprendizagem começaram a se desenvolver para tentar superar essas dificuldades.

Durante os anos 1930, um grupo de matemáticos franceses conhecidos como Bourbaki, reunidos sob o pseudônimo Nicolas Bourbaki, propôs a elaboração de obras abrangentes em todos os ramos da Matemática. O objetivo era criar referências atualizadas para estudantes e pesquisadores.

Assim, surgiu o livro “Elementos da Matemática”, no qual os membros do grupo buscaram unificar a formulação matemática por meio de axiomas, uma ideia já estabelecida na Matemática, com uma abordagem centralizada na teoria dos conjuntos. Subdividiram, assim, a Matemática em subáreas, mas de forma geral subordinadas à linguagem de conjuntos, a qual passou a reger a matemática de forma unificada. Nesse momento oportuno de reformulação do currículo educacional, o grupo Bourbaki aproveitou para, com suas publicações, não apenas orientar o ensino básico, mas também servir como referência em níveis mais avançados.

Os Bourbaki buscavam justificar a aceitação de seus trabalhos argumentando que a organização categorizada e subdividida do conhecimento, aliada a uma linguagem unificada, facilitaria sua aquisição e superaria as dificuldades de aprendizagem dos alunos. Além disso, Roque (2012) destaca que “muitos matemáticos e educadores compartilhavam a crença de que os alunos deveriam ser familiarizados com o pensamento em termos de conjuntos e operações”. Esse pensamento encontrou ampla aceitação, incluindo o respaldo de Jean Piaget (1896 - 1980), que mantinha correspondência com o grupo.

Apesar de anos depois se constatar que apenas a organização do conteúdo não garantia eficácia na aprendizagem, como aponta Pavanello (1989), a imposição de uma linguagem subordinada a Teoria dos Conjuntos na Matemática, a partir da qual a formalidade, o simbolismo e a forma exclusivamente analítica se sobrepujavam à intuição, elementos pictóricos,

geométricos e cinestésicos, persistiu e perdura até os dias atuais.

### 3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CURRÍCULO, GEOMETRIA E RECURSOS PICTÓRICOS

No final do capítulo anterior, discutiu-se como o movimento modernista na Matemática, ao reformulá-la com base na Teoria dos Conjuntos, provocou uma ruptura com a matemática pictórica. Isso ocorreu porque a racionalização algébrica e simbólica foi considerada superior e suficiente para o ensino. No entanto, o fracasso dessa abordagem suscitou no início das pesquisas em Educação Matemática. Desde então, muitas teorias a respeito do ensino-aprendizagem da Matemática foram surgindo, bem como sendo refutadas de forma parcial ou total. Apesar disso, algumas delas ressaltam a importância de elementos pictóricos na compreensão dos conceitos matemáticos.

A seguir, será realizada uma análise da evolução do currículo da disciplina de Matemática no Brasil, destacando a influência do Movimento da Matemática Moderna neste. Em seguida, serão exploradas algumas teorias da Educação Matemática que tratam da Geometria e da Matemática pictórica no processo de ensino e aprendizagem, entre as quais destacam-se a Teoria de Van Hiele, as abordagens semióticas de Raymond Duval e a teoria da *Image Schemata* de Dorfler, investigando como esses elementos pictóricos da Matemática desempenham um papel significativo na melhoria da compreensão dos conceitos matemáticos.

#### 3.1 Educação Matemática no Brasil

Antes, a educação era reservada exclusivamente à elite e ao clero. Foi somente a partir do século XIX, impulsionada pelo desenvolvimento industrial, graças ao qual emergiu a demanda por operários qualificados para operar as máquinas, que a escola começou a incluir as classes sociais populares. No entanto, muitos da elite não viam com bons olhos essa democratização da educação. Apesar disso, a educação para classes populares apresentava um aspecto prático e profissional, deixando as abordagens mais teóricas e filosóficas para a elite.

Dessa forma, nas escolas destinadas às classes sociais mais altas, a matemática na verdade era ensinada em três disciplinas separadas: Geometria, Álgebra e Aritmética. Ademais, o livro “Os Elementos” de Euclides era uma das referências para o curso da Geometria, permanecendo assim uma ideia geral de que a escolarização apresentava bastante aspectos da antiga civilização grega.

Conforme observado por Miorim (1998), “enquanto a Universidade ensinava os últimos progressos da Matemática, ou seja, Matemática Superior, as escolas secundárias continuavam a ensinar a geometria grega, a álgebra elementar e o cálculo aritmético”. Além disso, as escolas secundárias apresentavam o conteúdo de maneira abstrata, axiomática, com demonstrações rigorosas e cálculos extensos.

A necessidade de reformar o ensino não se limitava apenas à discrepância entre o conteúdo universitário e o do ensino secundário, mas também à necessidade de um currículo que acompanhasse o progresso da sociedade moderna e científica. No início do século XX, o primeiro movimento global em prol da Educação Matemática começou com a criação da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática em 1908.

Dentre os aspectos considerados modernos para a Matemática no ensino estavam uma abordagem mais simples, intuitiva e prática, introduzir conteúdos do nível superior no ensino básico e a junção das três disciplinas em uma só denominada Matemática. Dentre os conteúdos novos, tem-se o conceito de função e sua representação gráfica, além de noções do cálculo infinitesimal. Esses conteúdos, em específico, tinham bastante ligação com os avanços científicos da época. Quanto à abordagem mais simples, intuitiva e prática, residia em incentivos da Psicologia de que o ensino devia seguir o nível de desenvolvimento mental, assim a abstração seria alcançada a partir de ideias mais concretas.

Essas ideias modernas começaram a tomar forma na educação brasileira por volta de 1929 com Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, diretor do Colégio Pedro II. Neste ano ele implementou essas ideias nessa escola, que na época era referência nacional de ensino secundário, as quais posteriormente foram adotadas nas demais escolas secundárias do Brasil com a Reforma Francisco Campos, promulgada pelo decreto nº 19.890 em 18 de abril de 1931.

Dentre uma das justificativas, chamadas de considerandos, de Euclides Roxo, destaca-se a citação de Jorge Duclout, professor da Faculdade de Ciências da Escola Normal de Buenos Aires:

À luz das modernas idéias pedagógicas, a ciência matemática sob as suas três faces numérica, simbólica e gráfica - é uma só e não é conveniente, sob o ponto de vista didático separá-la, por divisões estanques ou dogmáticas em aritmética, álgebra e geometria; antes convém tanto quanto possível, expor os mesmos princípios sob os três pontos de vista, dando forma concreta ao ensino, procurando, em uma palavra, fazer entrar a matemática "pelos olhos", até que o aluno se ache bastante exercitado para tratar as questões de um modo abstrato. (Valente, 2004, p. 98).

Apesar da proposta curricular de Roxo ter sido aprovada pelo Congresso e passar a ser válida nacionalmente, muitos colegas de trabalho do Colégio Pedro II ficaram insatisfeitos com a unificação da disciplina, bem como outros profissionais que lecionavam as três disciplinas. Dentre os motivos apresentados, esses profissionais alegavam que tinham sido aprovados nos concursos para cátedras de aritmética ou de álgebra, não de uma matemática unificada. As insatisfações quanto à proposta, bem como respostas a estas por Roxo, eram publicadas

no Jornal do Commercio da época. Alguns chegaram a dizer que o programa curricular de Matemática era uma salada de frutas ou até mesmo a argumentar que, com os avanços teóricos de Cantor e Weierstrass, a divisão da Matemática em ramos deveria ser acentuada, pois trabalhar sem essa distinção era coisa do passado.

Além da insatisfação dos professores com a reforma educacional, grande parte não se sentia devidamente preparada para ensinar de acordo com os novos métodos, bem como ministrar os novos conteúdos. Além disso, devido às limitações tecnológicas da época, grande parte do material didático utilizado nas escolas após a reforma permaneceu o mesmo. Para integrar as três disciplinas, muitas vezes eram feitos simples recortes dos antigos materiais didáticos disponíveis, não havendo de fato uma integração.

Anos depois, com os avanços da Psicologia e da Matemática, as reuniões internacionais sobre Ensino de Matemática formularam outra proposta tanto para a Matemática quanto para o seu ensino, através da Teoria de Conjuntos. Este ficaria conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM). Essa proposta se deu em 1959 no Seminário de Royaumont na França e contou com diversos países e seus representantes educacionais.

Esta proposta, impulsionada pelos Bourbaki, reformulava todo o conhecimento matemático através da linguagem da Teoria de Conjuntos. Ademais, no campo da Psicologia, Piaget defendia essa nova linguagem e, com contribuição de alguns matemáticos como Cantor, e que a Matemática baseada em estruturas de correspondência, classificação, seriação e topológicas iria contribuir para a aprendizagem por parte dos alunos. Devido a essa ênfase em noções topológicas, sugeria-se que a abordagem tradicional da Geometria euclidiana fosse substituída. Em lugar dela, recomendava-se o ensino de conceitos topológicos desde os níveis mais elementares da Educação. Além disso, os conceitos aritméticos de número e operação deveriam ser abordados após o desenvolvimento nas noções de conjuntos.

No Brasil, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) ganhou impulso a partir do Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), fundado em 1961 em São Paulo, representado por Osvaldo Sangiorgi (1921 - 2017). Posteriormente, a reformulação do currículo em nível nacional teve início em 1962, com o IV Congresso Nacional de Ensino da Matemática, realizado em Belém do Pará.

No entanto, essa nova proposta de ensino de Matemática não somente falhou em alcançar seus objetivos, mas também piorou a situação do ensino da disciplina ao concentrar um excessivo foco na linguagem dos conjuntos. A crítica foi tão demasiada que chegou até a ser publicado em 1973 um livro intitulado *Why Johnny can't add: The Failure of the New Math* por Morris Kline criticando a MMM. Este chegou no Brasil traduzido como “O fracasso da Matemática Moderna” em 1976.

A influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil, reconhecida por

estudiosos como Pavanello, resultou na supressão da Geometria, especialmente no que se refere ao pensamento geométrico. A ênfase na linguagem de conjuntos, na álgebra abstrata e na introdução de uma variedade de novos conteúdos no ensino básico, juntamente com a falta de formação adequada dos professores, contribuiu para que a Geometria fosse marginalizada no ensino secundário. Os livros didáticos também desempenharam um papel nisso, frequentemente relegando os conteúdos de Geometria para as últimas unidades, o que levava os professores a usarem a falta de tempo como desculpa para não abordá-los. Assim, a herança principal do MMM na Educação foi uma Matemática simbólica, abstrata e algébrica, deixando pouco ou nenhum espaço para a Geometria ou a matemática pictórica.

### 3.2 Abordagens semióticas

Ao contrário das ciências naturais, nas quais os conceitos muitas vezes se originam de observações e experimentos sobre fenômenos naturais, a Matemática emerge de uma atividade puramente cognitiva. Na perspectiva da teoria dos registros das representações matemáticas desenvolvida pelo psicólogo francês Raymond Duval, as representações semióticas, tais como escritas algébricas, notações simbólicas, figuras geométricas, gráficos cartesianos e outras, não são meramente ferramentas para representar objetos estudados ou para facilitar a comunicação nesta disciplina, elas desempenham um papel fundamental na compreensão e no desenvolvimento da atividade matemática em si.

É importante ressaltar que o objeto matemático não pode ser confundido com sua representação. Portanto, compreender Matemática implica distinguir entre ambos, pois os objetos matemáticos podem ser representados de diversas formas. Ao fixar-se apenas em uma representação específica, corre-se o risco de limitar a compreensão futura do conceito em questão.

Raymond Duval introduz dois termos fundamentais para compreender os conceitos matemáticos e suas representações. Ele define *semíosis* como a capacidade de compreender ou produzir uma representação semiótica, enquanto *noésis* refere-se aos processos cognitivos que envolvem a compreensão conceitual de um objeto. Duval (2009) argumenta que a *noésis* não ocorre sem a *semíosis*, já que é a *semíosis* que estabelece as condições que possibilitam e influenciam o exercício do pensamento.

Nos estudos de Duval as representações são categorizadas em três tipos distintos: mental, computacional e semiótica. Estas categorias se distinguem principalmente pela sua consciência e pela sua natureza externa ou interna.

A representação mental ocorre consciente e internamente. Nesse contexto, o indivíduo reconhece e atribui significados próprios a um objeto, gerando “imagens mentais” que podem ser evocadas sem um referencial perceptível. Esse processo de transição, do desconhecimento

inicial para o entendimento, é denominado objetificação. Dessa forma, a representação mental é dotada da função de objetificação. Vale ressaltar que as “imagens mentais” e significados são oriundos do que foi apresentado, de aspectos sociais e pessoais.

A representação computacional se caracteriza por ser interna, mas não é consciente. Esse tipo de representação é comparado à operação de uma máquina ou um algoritmo, assim, é realizado de forma automática. Dessa forma, ao contrário das representações conscientes, não será evocado um objeto na sua ausência.

Já a representação semiótica, por sua vez, é externa e consciente. Sua natureza externa implica uma capacidade inerente de comunicação. Além disso, por ser consciente, a representação semiótica engaja os processos cognitivos na formação de significado. Dessa forma, estas não apenas permitem a “visualização do objeto”, mas também estimulam a atribuição de significado a ele, contribuindo para a objetificação. Entre as representações semióticas, incluem-se as expressões simbólicas, gráficos, figuras, esquemas, bem como expressões linguísticas, entre outras.

Explorando mais as representações semióticas e suas relações com as demais, Duval investiga a semiósis e identifica três atividades cognitivas fundamentais associadas a ela: formação, tratamento e conversão.

A primeira atividade, que é a formação de representações em um registro semiótico específico, envolve lidar com os signos e registros, seja interpretando-os, seja produzindo-os. Esta atividade cognitiva implica em uma construção ativa ou utilização de representações mentais associadas aos conceitos matemáticos pertinentes. É relevante notar que os signos e registros podem ser variados, partindo da língua materna, representações gráficas, representações simbólicas, entre outros, todos seguindo um sistema semiótico estabelecido.

Em seguida, o tratamento emerge como uma atividade cognitiva dinâmica que lida com a transformação das representações internas originadas pelos signos e registros identificados durante a formação. Por exemplo, o cálculo representa um tratamento interno, que se desenvolve a partir da identificação dos símbolos (sejam letras ou algarismos).

Por último, a conversão implica na transição entre diferentes registros semióticos, o que implica em uma espécie de “tradução” de um sistema semiótico para outro. Duval considera essa atividade como a mais crucial, embora também seja a que apresenta maior dificuldade para os alunos. Vale destacar que cada registro semiótico demanda tratamentos distintos. No entanto, esses diferentes registros contribuem para compreender características e complementar informações sobre os conceitos matemáticos.

### 3.3 Teoria de Van Hiele

A teoria de Van Hiele é derivada das investigações do casal Dina Van Hiele-Geldof (1911-1958) e Pierre Van Hiele (1909 - 2010) a fim de encontrar as causas e suprir as dificuldades de os alunos aprenderem Matemática, em especial, Geometria. Contudo, a maioria das publicações referente à teoria foi feita por Pierre, devido ao falecimento da esposa logo após a conclusão da tese de doutorado realizado em Universidade de Utrech, na Holanda, em 1957.

A teoria de Van Hiele, cuja característica é investigar a aprendizagem de Geometria do ponto de vista cognitivo, categoriza essa experiência em cinco níveis de pensamento. A falha na aprendizagem é destacada a partir dessa categorização de forma hierárquica. Entre as causas apontadas para o fracasso escolar em Geometria, destaca-se a organização do currículo com níveis de conteúdo acima da capacidade compreensiva dos alunos. Além disso, e de maneira subjacente a isso, a linguagem empregada pelo professor muitas vezes não é acessível aos alunos, resultando na reprodução do conhecimento sem a capacidade de realmente compreendê-lo e aplicá-lo a diferentes situações.

Os cinco níveis de pensamento, voltados no caso para o pensamento geométrico, são:

- **Nível 1 - Reconhecimento:** Reconhecimento visual das figuras, sem apresentar de fato conhecimento das suas propriedades. Basicamente o aluno reconhece um quadrado, um triângulo ou outra forma geométrica, por achar parecido com a estrutura visual que lhe foi apresentada;
- **Nível 2 - Análise:** Reconhecimento de forma visual das propriedades e elementos das figuras, porém o aluno ainda não consegue estabelecer relações entre eles para deduzir resultados formais sobre os objetos matemáticos. Essas deduções informais são resultados de observações e experimentações.
- **Nível 3 - Ordenação:** Formulação de conceitos abstratos a partir de deduções informais. Neste caso, o aluno consegue reconhecer não só propriedades, mas também estabelecer relações entre elas, chegando a partir de relações lógicas a formular conjecturas. Contudo, não consegue reconhecer a Geometria a partir dos axiomas, teoremas e demonstrações;
- **Nível 4 - Dedução formal:** Compreensão da Geometria a partir dos axiomas, definições, teoremas e necessidade de demonstrar na Matemática, raciocinando assim de modo formal. Assim, o aluno apresenta um raciocínio abstrato a respeito da Geometria, no qual as deduções lógicas se voltam a conjecturas que devem ser provadas;

- **Nível 5 - Rigor:** Reconhecimento de outras geometrias, partindo para uma análise topológica, dessa forma, cabível a profissionais da Matemática.

Segundo a Teoria de Van Hiele, o pensamento geométrico dos alunos segue uma estrutura de níveis hierárquicos. A transição entre esses níveis ocorre de maneira sequencial por meio de situações didáticas elaboradas pelo professor. Além disso, é possível observar certa semelhança desse modelo com a teoria cognitiva de Piaget, pois inicialmente parte de algo concreto, no caso visual, até chegar à abstração, o formal constituindo o nível superior a ser alcançado. No entanto, é importante destacar que a Teoria de Van Hiele não categoriza nem correlaciona o desenvolvimento cognitivo com a idade.

### 3.4 Image Schemata de Dorfler

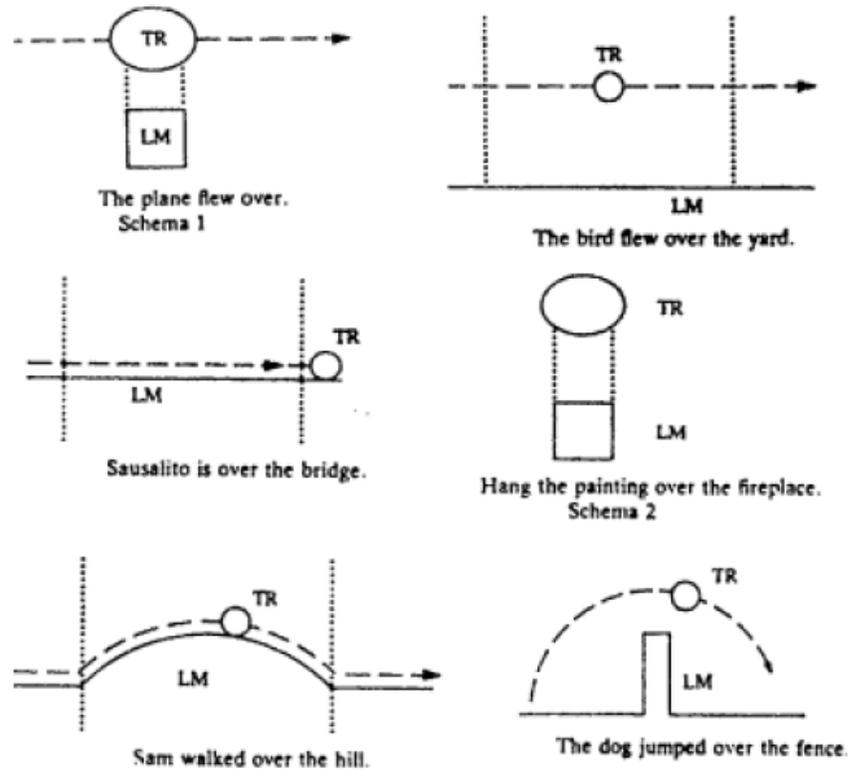
A *Image Schemata* de Dorfler, cuja tradução pode ser feita pelo termo esquemas de imagens, congrega com a Image Schemata de Johnson e Lakoff. Enquanto estes a direcionam para a aquisição linguística, Dorfler analisa em relação à Matemática.

O termo “esquema de imagem” refere-se à construção do pensamento por meio da atribuição de significado derivado de representações, interpretações, projeções ou transformações de estruturas pictóricas, figurativas, concretas, geométricas etc. Além disso, o aprendizado de um indivíduo ocorre durante a construção de significado, em que esse significado se manifesta como imagens mentais próprias do indivíduo, as quais se aproximam do real ou do que é socialmente estabelecido como correto.

Um exemplo linguístico, ilustrado na figura 3.1, fornecido por Lakoff é o uso da palavra “over” (“sobre”).

No contexto apresentado, é importante destacar que os desenhos acima não constituem efetivamente os “esquemas de imagem”, mas, sim, ilustram as representações de significados cabíveis à palavra sobre. Contudo, estes possibilitam uma melhor racionalização do termo e contribuem para que o indivíduo construa significado de forma coerente. Vale acrescentar que geralmente ao se explicar o termo “sobre” se utiliza gestos e elementos pictóricos para sua compreensão.

De forma análoga ao que Lakoff propõe para a Linguística, Dorfler sustenta que os conceitos matemáticos podem ser melhor compreendidos quando são oferecidas representações que vão além da linguagem formal, comumente encontrada não apenas nos ensinamentos dos professores, mas também nos livros didáticos. Embora as várias representações concretas e pictóricas voltadas para a Matemática sejam apenas modelos tangíveis, dado que a Matemática em si lida com objetos abstratos, tais representações auxiliam os indivíduos na construção de significado e de seus “esquemas de imagem”. No entanto, é essencial que

Figura 3.1 – Representações possíveis para a palavra *over*

Fonte: Dorfler (2012, p. 127).

essas representações sejam complementadas por orientações dos professores e por interações individuais e, sobretudo, sociais, para que possam contribuir de forma eficaz.

Ademais, Dorfler acrescenta que “uma *image schemata* é uma interação cognitiva e/ou perceptível com/e manipulação de algum tipo de modelo de objeto semelhante, seja material, um desenho ou apenas imaginado. Estes últimos serão chamados de operadores”. Quando o operador assume a forma de uma figura, objeto concreto ou desenho geométrico, ele classifica os “esquemas de imagem” como figurativos, indicando também que muitos dos conceitos matemáticos serão representados dessa forma. No entanto, essa representação é complementada pelos operativos, relacionais e simbólicos, que enriquecem o raciocínio visual sobre o conceito e acerca dele.

Sobre os quatro tipos de “esquemas de imagem”, tem-se

- ***Figurative Image Schemata (Figurativo)***: Neste caso, o portador é definivamente figurativo; este apresenta características, propriedades, relações etc. A exemplo disto, temos os conceitos de figuras e formas geométricas, contudo não se pode limitar apenas às representações, é preciso iteragir socialmente e reformular as figuras e formas a fim de compreender os conceitos. Ademais, relacionado a funções, tem-se concavidade,

extremos, zero da função, periodicidade, monotonicidade etc.

- ***Operative Image Schemata (Operativo)***: Agora a construção de “esquema de imagem” se dará a partir da relação portador e operações. É preciso agora não só ter uma representação, mas construir significado ao operar sobre esta. A exemplo disto tem-se o procedimento de marcar pontos até a construção do gráfico de funções e posteriormente operações com esses gráficos. Ademais, a construção de tabelas e fluxogramas, rotações, translações, ampliação e redução de objetos geométricos etc.
- ***Relational Image Schemata (Relacional)***: este procede parecido com o operacional, mas destaca-se pelo estabelecimento de relações. A exemplo disto, tem-se a construção de uma circunferência, a construção se dá por um ponto fixo e a rotação de outro em relação a este. Rotações e translações são cabíveis a esse tipo de “esquema de imagem”.
- ***Symbolic Image Schemata (Simbólico)***: Basicamente o portador são as fórmulas algébricas e simbólicas da Matemática. Contudo, estes portadores simbólicos devem se relacionar com os figurativos, operativos e relacionais para contemplar melhor a compreensão do que está representado nessa linguagem simbólica.

É interessante notar que na teoria da *image schemata* de Dorfler as representações visuais dos conceitos, assim como a habilidade de operar e estabelecer relações com elas, complementa o uso da linguagem formal, uma ideia oposta à teoria apresentada por Van Hiele, que colocava esta última como superior. Além disso, há uma valorização da interação entre professor, indivíduo e contexto social para que os conceitos matemáticos sejam aprendidos e validados.

Ademais, Saraiva (1992) nos diz a respeito de Dorfler que “a base de sua teoria assenta na ideia de esquema de imagem que, para muitos dos conceitos matemáticos, compreenderá um componente-figura complementada com componentes-operativos, relacionais e simbólicos. A componente-figura levará, muitas vezes, a uma representação visual do conceito em causa, enquanto que as componente operativas associadas capacitarão o raciocínio visual com e acerca do conceito”.

Vale acrescentar que nessa perspectiva a linguagem formal não é superior às demais representações, mas sim uma forma complementar.

## 4 POSSIBILIDADES DE UMA MATEMÁTICA MAIS PICTÓRICA

A BNCC (2018) no tocante à Matemática divide seus campos da Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade nas cinco seguintes unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e, por último, Probabilidade e Estatística. Adiante serão apresentados alguns objetos de conhecimento da Matemática utilizando a Geometria. Estruturalmente, será seguida a repartição feita pela BNCC, constituindo, destarte, um material de fácil consulta para professores que queiram se apropriar dessa abordagem.

### 4.1 Números

A unidade temática Números abrange em sua maioria objetos matemáticos do campo da Aritmética. Segundo a BNCC, define como "A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades", onde enfatiza a respeito dos registros, usos, significados e operações dos números.

Nas propostas a seguir, será explorado o significado numérico a partir de áreas de retângulos e quadrados. Assim, abordando usos e operações numéricas associados a elementos pictóricos da Geometria.

Dentre os objetos matemáticos e trabalhos explorados nesta sessão têm-se o mínimo múltiplo comum de Cardoso e Gonçalves (1996) e de Polezzi (2004), do máximo divisor comum de Oliveira (1995) e de Polezzi (2004), e as frações próprias de ? e de Oliveira (2014).

#### 4.1.1 Operações com números naturais

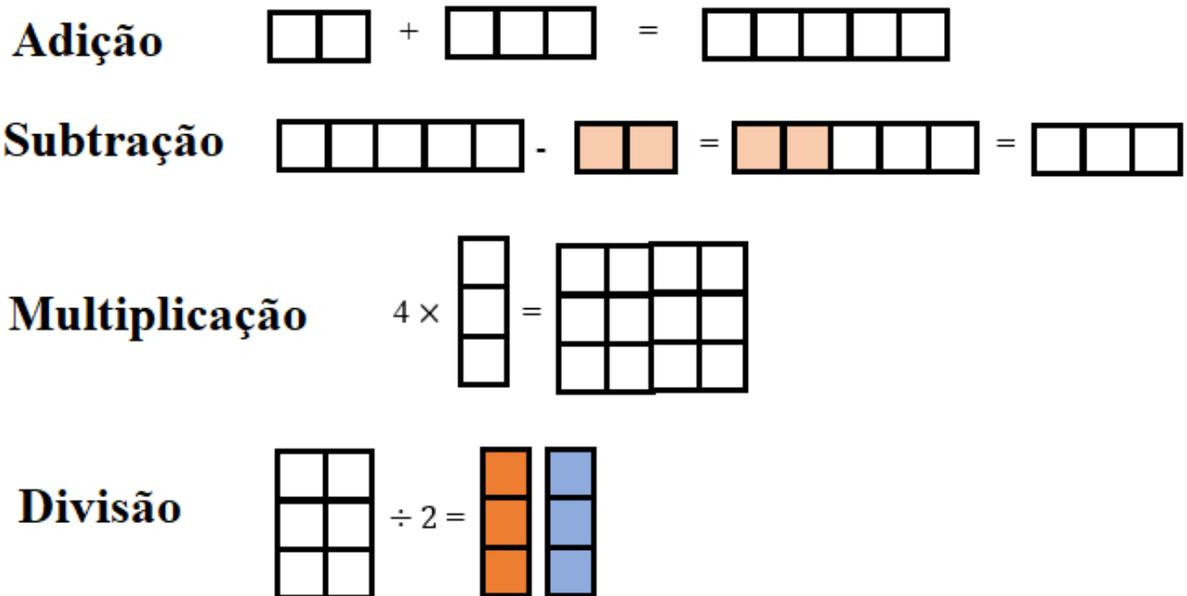
É comum utilizar objetos e suas representações gráficas para representar os números naturais, fazendo uma relação de contagem nos níveis iniciais. Utilizando a Geometria, pode-se fazer uso de quadrados de lados unitários, cuja a área será unitária. Assim, podemos obter essa relação de contagem associando os números aos quadrados de área unitária, em consequência, formando figuras retangulares ou em até outros formatos cuja área é um número natural.

As operações com números naturais podem ser representadas manipulando essas formas geométricas:

- **Adição:** Juntar os dois retângulos para formar outro retângulo ou outro polígono.
- **Subtração:** Retirar do retângulo de área maior o retângulo de área menor. Pode-se até fazer uso de pintar os quadrados a serem retirados.

- **Multiplicação:** Repetir o retângulo quantas vezes foi estabelecido. Depois, juntar esses retângulos.
- **Divisão:** Repartir o retângulo em partes iguais. Pode-se até fazer uso de pintar os quadrados. Ademais, não é necessário serem repartidos em retângulos, poderia ser outros polígonos.

Figura 4.1 – Operações com números naturais



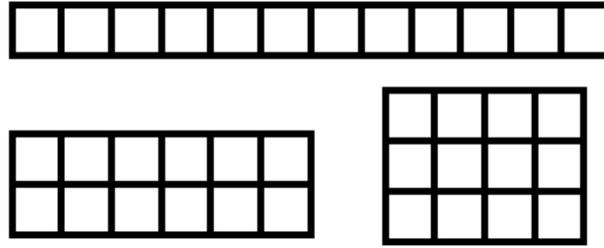
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

#### 4.1.2 Múltiplos e divisores de um número natural

Os múltiplos de um número podem ser obtidos utilizando o mesmo método da multiplicação explicitado anteriormente. Bem como os divisores podem ser obtidos reorganizando os quadrados unitários em retângulos de dimensões diferentes, consequentemente com a mesma área.

**Exemplo 4.1.** *Observe os retângulos a seguir, estes possuem dimensões 1 por 12, 2 por 6 e 3 por 4 que diferem, mas possuem área igual a 12. Assim, os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12.*

Figura 4.2 – Divisores de 12



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

### 4.1.3 *Mínimo Múltiplo Comum (MMC)*

Dados dois números naturais  $m$  e  $n$ , considere um retângulo com essas medidas e subdividido em quadrados unitários. Para ilustrar, considere retângulo  $ABCD$  com o comprimento de  $AB$  igual a  $n$  e o de  $BC$  igual a  $m$ . Agora, desenhe linhas poligonais que coincidem com as diagonais dos quadrados unitários. Inicie do vértice  $A$  e prossiga até intersectar um lado do retângulo. Daí, segue os seguintes passos repetidamente:

- Se a linha poligonal encontrar outro vértice do retângulo o processo encerra-se;
- Caso contrário, inicia-se outra linha poligonal a partir do final da anterior, seguindo a diagonal do quadrado unitário adjacente.

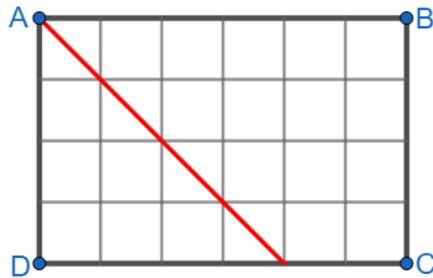
Ao final, a quantidade de diagonais traçadas dos quadrados unitários será o MMC.

Isso acontece porque sempre que uma linha poligonal finaliza no lado  $AB$  ou  $CD$ , a quantidade de diagonais dos quadrados unitários traçados é um número múltiplo de  $m$ . Analogamente, quando a linha poligonal finaliza no lado  $BC$  ou  $DA$ , a quantidade é múltipla de  $n$ . Por isso, quando finaliza em um vértice do retângulo encontra-se o múltiplo comum de  $m$  e  $n$ , neste caso, o menor múltiplo comum.

**Exemplo 4.2.** *Encontre o MMC de 4 e 6 utilizando o método geométrico apresentado.*

**Passo 1.** Desenhe o retângulo  $ABCD$  de lados com comprimento 4 e 6. Trace a primeira linha poligonal a partir do vértice  $A$ .

Figura 4.3 – MMC de 4 e 6

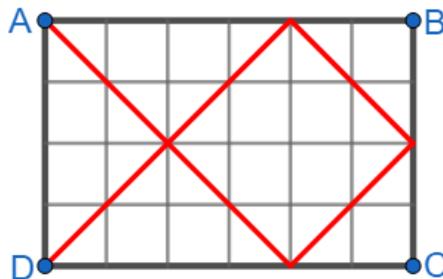


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note que a quantidade de diagonais de quadrados unitários traçadas é múltipla de 4.

**Passo 2.** Trace a segunda linha poligonal a partir do final da linha poligonal anterior, seguindo a diagonal do quadrado unitário adjacente. Repete este processo até encerrar, neste caso, no vértice  $D$ .

Figura 4.4 – MMC de 4 e 6



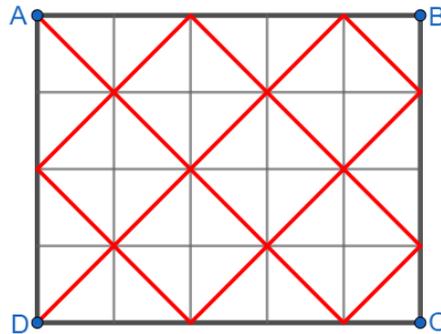
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note que a quantidade de diagonais de quadrados unitários traçadas depois da segunda linha poligonal é múltipla de 6, da terceira linha poligonal é múltipla de 4 e da última, por terminar em um vértice do retângulo, é múltipla de 4 e de 6. Assim, o MMC de 4 e 6 é 12.

Além do exemplo apresentado, no qual os números possuem divisor em comum diferente de um, podemos ter o caso no qual os números são primos entre si e o caso em que um número é múltiplo do outro.

Quando dois números são primos entre si, o MMC será simplesmente o produto deles. Pelo método apresentado, todos os quadrados unitários terão uma diagonal traçada. Um exemplo disso pode ser visto na figura 4.5, que ilustra o MMC de 4 e 5.

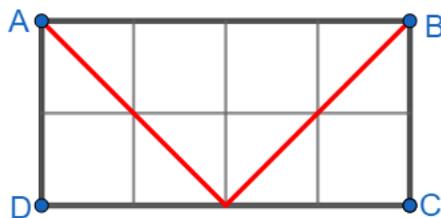
Figura 4.5 – MMC de 4 e 5



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Por fim, no caso em que  $m$  é múltiplo de  $n$ , ou seja, existe um  $a \in \mathbb{N}$  tal que  $m = a \cdot n$ , a quantidade de linhas poligonais será  $a$ , e o número de quadrados unitários com diagonais traçadas será  $m$ . Como exemplo, a figura 4.6 ilustra o MMC de 2 e 4, mostrando duas linhas poligonais e quatro quadrados unitários com diagonais traçadas.

Figura 4.6 – MMC de 2 e 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

#### 4.1.4 Máximo Divisor Comum (MDC)

Para determinar o MDC na proposta a seguir será utilizado o algoritmo de Euclides de divisões sucessivas, onde dados dois números inteiros  $a$  e  $b$  faz uso dos seguintes lemas

- **Lema 1:** Se  $a$  divide  $b$ , então  $mdc(a, b) = a$ .
- **Lema 2:** Se  $a = b \cdot q + r$ , com  $q$  e  $r$  são inteiros, então  $mdc(a, b) = mdc(b, r)$ .

Dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , considere um retângulo com essas dimensões. Construa quadrados com áreas máximas para cobrir esse retângulo. O MDC será a medida do lado do menor quadrado.

A justificativa para este método resulta no MDC é simples, pois segue o algoritmo de Euclides. Considere, sem perda de generalização,  $a$  maior que  $b$ . Daí, os maiores quadrados

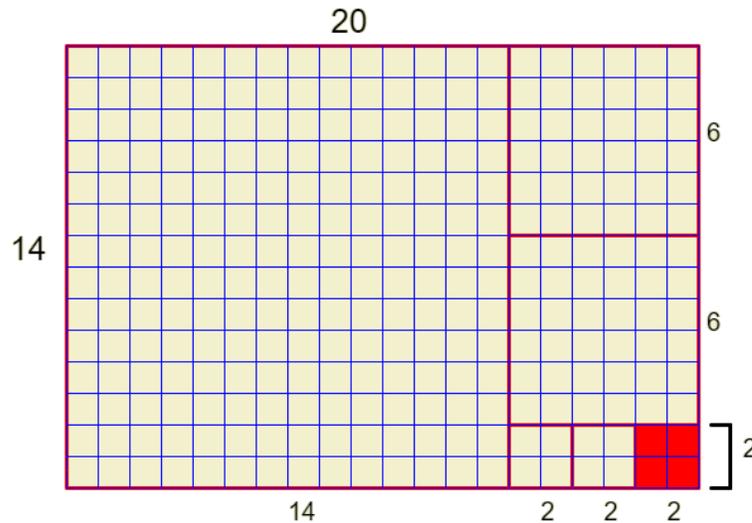
que pode-se construir terão lado medindo  $b$ . Constrói-se o máximo de quadrados de lado medindo  $b$ , denote esta quantidade de  $q_1$ . Assim,  $a = q_1 \cdot b + r_1$  e resta cobrir um retângulo de dimensão  $b$  por  $r_1$ . Por seguinte,  $r_1$  é menor que  $b$ . Consequentemente, os maiores quadrados que podem ser contruídos são de aresta medindo  $r_1$ . De forma análoga, contrói-se o máximo de quadrados de lado medindo  $r_1$  e obtemos  $b = q_2 \cdot r_1 + r_2$ . Repete-se este processo até o  $n$ -ésimo  $r$  ser igual a zero.

Neste processo, tem-se  $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \dots = \text{mdc}(r_{n-2}, r_{n-1}) = r_{n-1}$ , onde  $r_n = 0$  e  $r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n = q_n \cdot r_{n-1}$ , devido aos lemas 1 e 2. Portanto, pelo algoritmo de Euclides, o MDC de  $a$  e  $b$  é  $r_{n-1}$ .

**Exemplo 4.3.** *Encontre o MDC de 20 e 14 utilizando o método geométrico apresentado.*

Desenhe o retângulo de lados com comprimento 20 e 14. Depois, cubra com quadrados de lado 14, obtendo  $20 = 1 \cdot 14 + 6$ . Por seguinte, cubra a área restante com quadrados de lado 6, resultando em  $14 = 2 \cdot 6 + 2$ . Por fim, cubra a área restante em quadrados de lado 2, no qual  $6 = 3 \cdot 2$ . Portanto, o MDC de 20 e 14 é 2. Segue a figura 4.7 ilustrando o procedimento.

Figura 4.7 – MDC de 20 e 14



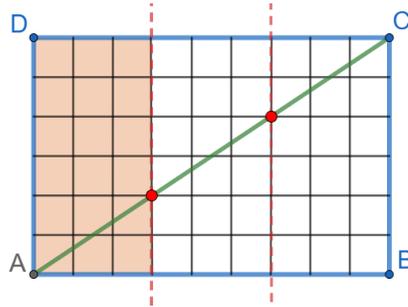
Fonte: <https://www.atractor.pt/mat/mdcEuclides/Euclides/euclides.html>

#### 4.1.5 Outra forma geométrica para o MDC e o MMC

Dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , considere um retângulo com essas dimensões formado por quadrados unitários. Para ilustrar, considere o retângulo  $ABCD$  com o comprimento de  $AB$  igual a  $a$  e o de  $BC$  igual a  $b$ . Traçando a diagonal  $AC$ , marque os pontos em que a diagonal passa por algum vértice dos quadrados unitários. Traçando retas verticais, ou

também podendo ser horizontais, por esses pontos obtemos retângulos menores de mesma área. A quantidade desses retângulos equivale ao  $mdc(m, n)$  e a área destes equivale ao  $mmc(m, n)$ .

Figura 4.8 – MDC e MMC de 9 e 6

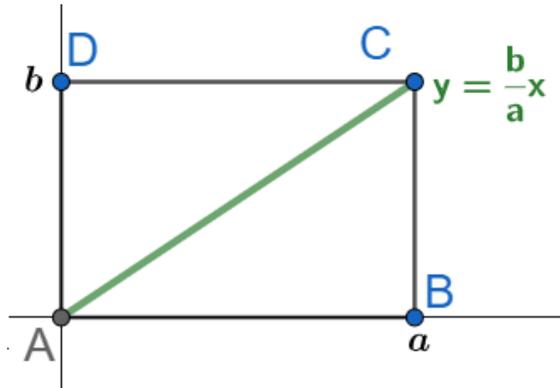


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Para o exemplo acima (Figura 4.8), contrói-se um retângulo  $ABCD$ , com  $AB$  e  $BC$  medindo 9 e 6, respectivamente. A partir daí ao traçar retas verticais pelos os pontos que intersectam a diagonal  $DC$  e os vértices dos quadrados unitários forma-se três retângulos de área igual a 18. Desse modo, o  $mdc(9, 6) = 3$  e o  $mmc(9, 6) = 18$ .

Tomando o retângulo  $ABCD$ , com  $AB$  e  $BC$  medindo  $a$  e  $b$ , repectivamente, e  $d = mdc(a, b)$ , existem  $u$  e  $v$  naturais primos entre si, tais que  $a = du$  e  $b = dv$ . Considerando também o plano cartesiano, com  $A$  coincidindo com a origem,  $B$  com  $(0, a)$  e  $D$  com  $(b, 0)$ , tem-se que a diagonal  $AC$  coincide com a reta  $r : y = \frac{b}{a}x$ , com  $x \in [0, a]$  e  $y \in [0, b]$ .

Figura 4.9 – MDC e MMC utilizando um retângulo e pontos inteiros na diagonal



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Os pontos da diagonal  $AC$  que intersectam os vértices dos quadrados unitários, nesse plano cartesiano, será os pontos pertencentes a reta  $r$  com coordenadas inteiras. Dessa maneira, supondo  $(p, q)$  pontos da diagonal com as coordenadas inteiras, tem-se

$$q = \frac{b}{a}p = \frac{du}{dv}p = \frac{u}{v}p \implies qv = up.$$

Mas  $\text{mdc}(u, v) = 1$ , então  $v|p$  e  $u|q$ . Donde segue que existem inteiros  $r$  e  $s$ , tais que  $vr = p$  e  $us = q$ . Substituindo na equação anterior, obtém-se

$$(us).v = u.(vr) \implies s = r.$$

Assim,  $vr = p$  e  $ur = q$  com  $0 \leq r \leq d$ . Conseqüentemente os pontos da diagonal com as coordenadas inteiras serão  $(0, 0), (u, v), (2u, 2v), \dots, (du, dv) = (a, b)$ . A partir desses  $d + 1$  pontos a diagonal  $AC$  será dividida em  $d$  partes iguais. Ao traçar linhas verticais, ou horizontais, a partir desses pontos obtém-se  $d$  retângulos menores de mesma área.

Por seguinte, sendo  $m$  a área desses retângulos, então  $d.m = a.b$ . Pela propriedade que  $\text{mdc}(a, b).mmc(a, b) = a.b$ , então a área  $m$  desses retângulos equivale ao  $\text{mmc}(a, b)$ .

#### 4.1.6 Frações próprias, sequência de Farey e círculos de Ford

Os números racionais são caracterizados pelas razões entre números inteiros. Eles também podem ser representados tanto por números decimais finitos quanto por decimais infinitos, neste último caso, na forma de uma dízima periódica. Para um número racional  $\frac{a}{b}$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros e  $b$  é diferente de zero,  $a$  é denominado numerador e  $b$  é o denominador.

Quando o numerador é menor que o denominador, nomea-se essa fração de própria, caso contrário, de imprópria. Além disso, é sempre possível representar uma fração por outra equivalente denominada irredutível, na qual o numerador e o denominador são primos entre si, ou seja, o máximo divisor comum entre eles é igual a um.

##### 4.1.6.1 Sequência de Farey

Partindo do universo das das frações próprias e irredutíveis no intervalo  $[0, 1]$  define-se a sequência de Farey  $F$ , onde o  $n$ -ésimo termo constitui-se de uma sequência crescente dessas frações com o denominador menor ou igual a  $n$ .

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}, \end{aligned}$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}, \dots$$

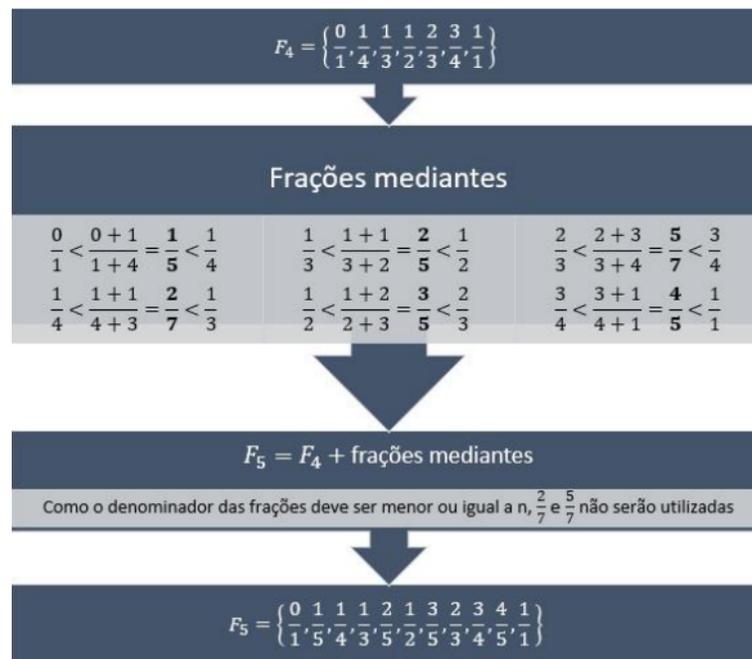
Outra forma de definir a sequência de Farey é utilizando frações mediantes e recursividade. Será utilizado esse método a fim de estabelecer uma linha de raciocínio mais intuitiva e com demonstrações mais simples.

Desta forma, dada a sequência  $F_1$  de Farey, isto é,  $F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$ , as próximas sequências  $F_{n+1}$  de Farey são formadas pelas frações de  $F_n$  e pelas frações mediantes, cujo denominador seja menor ou igual a  $n + 1$ , originadas pelas frações consecutivas de  $F_n$ .

Frações mediantes são frações cuja o numerador e denominador são a soma dos numeradores e a soma dos denominadores, respectivamente, de outras duas. Isto é, dadas as frações irredutíveis  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , com  $a, b, c$  e  $d$  inteiros positivos, define-se  $\frac{a+c}{b+d}$  a fração mediante de  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ .

Assim a sequência de Farey se caracteriza como recursiva porque os novos termos que aparecem na sequência  $F_{n+1}$  dependem dos termos da  $F_n$ , onde esses termos são frações mediantes originadas dos termos consecutivos de  $F_n$  que possuem denominador menor que ou igual a  $n + 1$ . Para ilustrar, segue a construção de  $F_5$  a partir de  $F_4$  na figura .

Figura 4.10 – Construção da sequência  $F_5$  de Farey a partir da  $F_4$



Fonte: Azevedo (2021, p. 29).

Devido a definição, uma fração mediante está sempre entre as frações que a originam, isto é,  $\frac{a+c}{b+d}$  está entre  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ . A demonstração está a seguir.

Supondo, sem perda de generalidade,  $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . Ora,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{ad+ab}{b(b+d)} < \frac{bc+ab}{b(b+d)} \Leftrightarrow \frac{a(b+d)}{b(b+d)} < \frac{b(c+a)}{b(b+d)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c+a}{b+d}$$

e

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{ad+cd}{d(b+d)} < \frac{bc+cd}{d(b+d)} \Leftrightarrow \frac{d(a+c)}{d(b+d)} < \frac{c(b+d)}{d(b+d)} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} < \frac{c+a}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Outro resultado interessante é que a diferença entre dois termos consecutivos  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  de qualquer sequência de Farey é  $\frac{1}{bd}$ , ou melhor,  $bc - ad = 1$ . Isto será feito por indução a partir de  $p(n) : bc - ad = 1$  e supondo, sem perda de generalidade,  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ .

Ora, para o caso inicial onde  $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$ , tem-se  $p(1)$  verdadeira, pois  $1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$ .

Agora, supondo  $p(n)$  verdadeiro para um  $n$  natural qualquer, tome  $\frac{x}{y}$  e  $\frac{w}{z}$  termos consecutivos da sequência  $F_{n+1}$ , com  $\frac{x}{y} < \frac{w}{z}$ .

Caso os denominadores  $y$  e  $z$  sejam menores que ou igual a  $n$ , então o resultado é imediato devido a hipótese de indução. Caso contrário, então  $y = n + 1$  ou  $z = n + 1$ . Considerando  $y = n + 1$ , tem-se que  $\frac{x}{y}$  não é termo de  $F_n$ , porém é fração mediante de dois termos consecutivos,  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , de  $F_n$ . Assim,  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$  e  $\frac{x}{y} = \frac{c+a}{b+d}$ .

Percebe-se que não é cabível para  $y = n + 1$  ter  $z = n + 1$ , pois como  $\frac{x}{y} < \frac{w}{z}$ , teríamos por estas serem consecutivas que  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{w}{z} \leq \frac{c}{d}$ . Daí, se  $z = n + 1$ , então  $\frac{w}{z}$  seria também fração mediante de  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , implicando em  $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$ , um absurdo. Logo, pode-se concluir que  $\frac{w}{z} = \frac{c}{d}$ .

Assim,  $\frac{x}{y}$  é fração mediante de  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{w}{z}$  e  $\frac{x}{y} = \frac{w+a}{z+b}$ . Consequentemente, por hipótese de indução, tem-se  $bw - az = 1$ . Donde segue

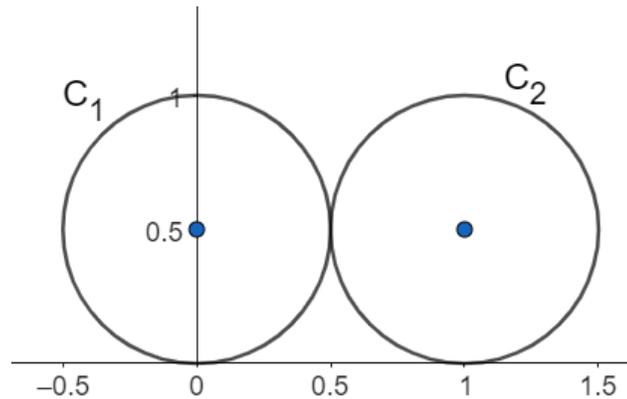
$$wy - xz = w(z+b) - z(w+a) = wz + bw - zw - az = bw - az = 1.$$

Caso parti-se de  $z = n + 1$  o raciocínio seria análogo. Portanto,  $p(n) : bc - ad = 1$  é verdadeira para todo  $n$  natural.

#### 4.1.6.2 Círculos de Ford

Os círculos de Ford foram apresentados pela primeira vez como uma interpretação geométrica da sequência de Farey, no artigo *Fractions* de Lester Randolph Ford, publicado em 1938. Para tal construção, parte-se de duas circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , de raios  $r_1$  e  $r_2$  medindo  $\frac{1}{2}$  e centros  $(0, \frac{1}{2})$  e  $(1, \frac{1}{2})$ , respectivamente. É notório que ambas circunferências são tangentes ao eixo  $x$ , além de entre si.

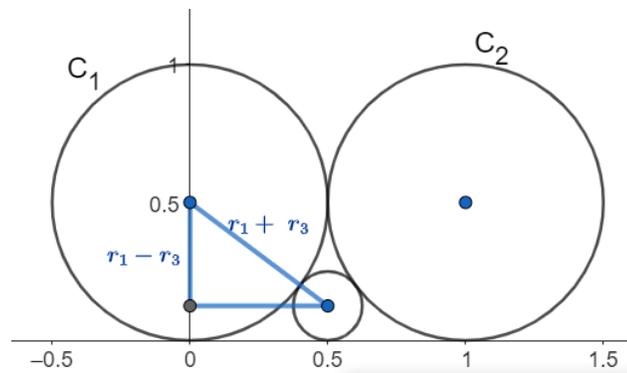
Figura 4.11 – Círculos de Ford



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Em seguida, deseja-se construir uma terceira circunferência  $C_3$  de raio  $r_3$  tangente a  $C_1$ ,  $C_2$  e ao eixo  $x$ . Por questões de simetria, é notório que o centro de  $C_3$  terá abscissa igual a  $\frac{1}{2}$  e tangenciará o eixo  $x$  em  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

Figura 4.12 – Círculos de Ford



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Tomando o triângulo retângulo formado pelos centros de  $C_1$  e de  $C_3$  junto com a interseção do eixo  $y$  com a reta paralela ao eixo  $x$  que passa pelo centro de  $C_3$  e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtém-se

$$(r_1 + r_3)^2 = (r_1 - r_3)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2$$

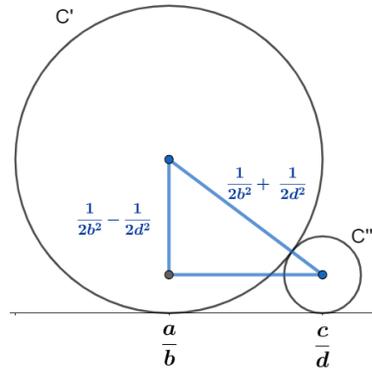
$$\implies 4r_1 \cdot r_3 = \frac{1}{4}.$$

Como  $r_1 = \frac{1}{2}$ , resulta em  $r_3 = \frac{1}{8}$ . Logo, o centro de  $C_3$  é  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ . Nota-se que as abscissas dos círculos de Ford equivalem a sequência  $F_2$  de Farey.

Os próximos círculos de Ford serão construídos tangenciando os demais e o eixo x, contudo será que os pontos de tangência com o eixo x seguirá a sequência de Farey?

Para avaliar a consistência desse padrão, será considerado que os círculos de Ford cuja a interseção com o eixo x seja a fração irredutível  $\frac{h}{k}$  possui raio medindo  $\frac{1}{2k^2}$ .

Figura 4.13 – Círculos de Ford



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Daí, supondo  $C'$  e  $C''$  círculos de ford tangentes entre si e intersectam o eixo x em  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , respectivamente, sendo estas irredutíveis. Logo, seus raios serão  $r' = \frac{1}{2b^2}$  e  $r'' = \frac{1}{2d^2}$ . Sem perda de generalidade, toma-se  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos centros de  $C'$  e  $C''$ , e pela interseção das retas paralelas aos eixos que passam pelos centros dessas circunferências, obtém-se

$$(r' + r'')^2 = (r' - r'')^2 + \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2$$

$$\implies 4r'r'' = 4\frac{1}{2b^2}\frac{1}{2d^2} = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 \implies \frac{1}{b^2d^2} = \left(\frac{cb - ad}{db}\right)^2 \implies (cb - ad)^2 = 1.$$

Donde segue que  $cb - ad = 1$ , já que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ .

Desse resultado, pode-se concluir também que

$$cb - ad = 1 \implies cb + cd - cd - ad = 1 \implies c(b + d) - d(a + c) = 1$$

implicando em  $b + d$  e  $a + c$  serem primos entre si.

Agora, construindo-se a circunferência  $C'''$ , de raio  $r'''$ , tangente a  $C'$  e  $C''$  e ao eixo x em  $\alpha$ , temos de forma análoga ao procedimento anterior pelo Teorema de Pitágoras que

$$4r'r''' = \left(\frac{a}{b} - \alpha\right)^2 \text{ e } 4r''r''' = \left(\frac{c}{d} - \alpha\right)^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} 4r'\left(\frac{c}{d} - \alpha\right)^2 &= 4r''\left(\frac{a}{b} - \alpha\right)^2 \\ \implies \left(r'\frac{c^2}{d^2} - r''\frac{a^2}{b^2}\right) + 2\alpha\left(r''\frac{a}{b} - r'\frac{c}{d}\right) + \alpha^2(r' - r'') &= 0. \end{aligned}$$

Caso  $r' = r''$  recaí no caso inicial utilizado inicialmente para falar dos círculos de Ford. Supondo  $r' \neq r''$  segue

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2b^2} \frac{c^2}{d^2} - \frac{1}{2d^2} \frac{a^2}{b^2}\right) + 2\alpha\left(\frac{1}{2d^2} \frac{a}{b} - \frac{1}{2b^2} \frac{c}{d}\right) + \alpha^2\left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right) &= 0 \\ \implies \frac{c^2 - a^2}{2b^2d^2} + \alpha\left(\frac{ab - cd}{2b^2d^2}\right) + \alpha^2\left(\frac{d^2 - b^2}{2b^2d^2}\right) &= 0 \\ \implies \frac{c^2 - a^2}{d^2 - b^2} + \alpha\left(\frac{ab - cd}{d^2 - b^2}\right) + \alpha^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ora,

$$\frac{c-a}{d-b} \cdot \frac{c+a}{d+b} = \frac{c^2 - a^2}{d^2 - b^2}$$

e

$$\frac{c-a}{d-b} + \frac{c+a}{d+b} = \frac{ab + ad - cb - cd + ab - ad + cb - cd}{d^2 - b^2} = 2\frac{ab - cd}{d^2 - b^2}.$$

Portanto,  $\alpha = \frac{c-a}{d-b}$  ou  $\alpha = \frac{c+a}{d+b}$ .

Para  $\alpha = \frac{c-a}{d-b}$ , temos  $\frac{a}{b} < \frac{c-a}{d-b} < \frac{c}{d}$ , um absurdo. Pois ao calcular a fração mediante de  $\frac{c-a}{d-b}$  e de  $\frac{c}{d}$ , resulta em  $\frac{a}{b}$ , logo a fração mediante não está entre as que a origina.

Portanto,  $\alpha = \frac{c+a}{d+b}$ .

Sabendo o valor de  $\alpha$  resta calcular o valor de  $r'''$ .

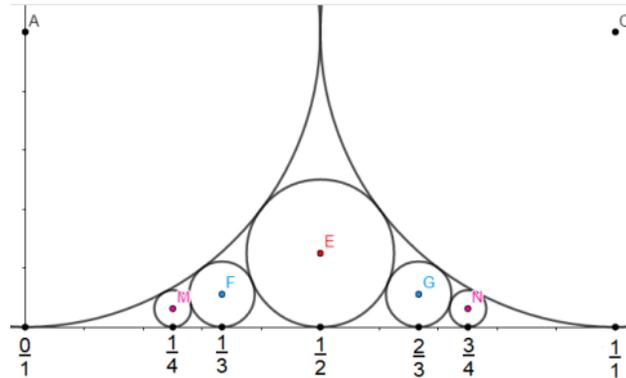
Ora,

$$4r'r''' = \left(\frac{a}{b} - \alpha\right)^2$$

$$\implies r''' = \frac{\left(\frac{a}{b} - \alpha\right)^2}{4r'} = \frac{\left(\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}\right)^2}{4\frac{1}{2b^2}} = \frac{\left(\frac{da-bc}{b(b+d)}\right)^2}{\frac{2}{b^2}} = \frac{(da-bc)^2 b^2}{b^2(b+d)^2 \cdot 2} = \frac{1}{2(b+d)^2},$$

pois  $cb - ad = 1$ .

Figura 4.14 – Círculos de Ford relacionados a sequência  $F_4$  de Farey



Fonte: Azevedo (2021, p. 33).

Assim, temos que os círculos de Ford são uma interpretação geométrica das sequências de Farey, no caso, das frações próprias.

#### 4.1.7 Frações

Em relação ao ensino de frações é comumente introduzido com figuras de pizza e barra de chocolate e, em seguida, utilizado polígonos divididos em partes iguais onde essa quantidade total de partes representa o denominador e a quantidade de partes pintadas o numerador. Porém essa representação geométrica é deixada de lado ao tratar das operações, salvo em raros casos em que o livro didático traz a adição e subtração de frações com denominadores iguais ou um múltiplo do outro.

##### 4.1.7.1 Adição e subtração de frações

Em relação a adição e subtração de frações as técnicas envolvidas para realizar estas operações serão parecidas, diferindo apenas no sentido de acrescentar para a adição e de retirada para a subtração. Lembrando que para este método, em ambos os casos, o resultado deverá ser um número positivo.

A partir dos seguintes exemplos, veja como funciona a soma de frações utilizando área de retângulos. O interessante de utilizar esta representação é o fato de os elementos a serem somados possuírem a mesmas dimensões.

- **Mesmo denominador:** Nesse caso, pode-se utilizar retângulos com mesmas dimensões repartidos em partes iguais ao do denominador das frações e as partes pintadas referentes aos numeradores.

Figura 4.15 – Adição de  $\frac{2}{4}$  com  $\frac{1}{4}$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Caso a soma dos numeradores exceda a quantidade do denominador, basta repetir a figura quantas vezes necessária para colorir a quantidade referente ao numerador.

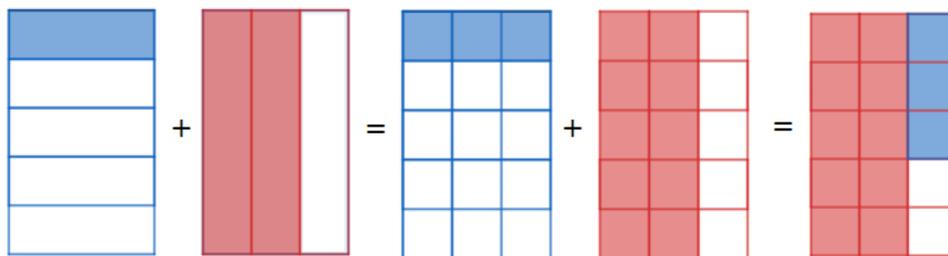
Figura 4.16 – Adição de  $\frac{2}{4}$  com  $\frac{3}{4}$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

- **Denominadores primos entre si:** Sejam  $\frac{a}{b}$  com  $\frac{c}{d}$ , com  $a, b, c$  e  $d$  números naturais com  $mdc(b, d) = 1$ . Nesse caso, é interessante utilizar retângulos com mesmas dimensões onde um estará dividido em  $b$  linhas com  $a$  linhas pintadas e outro estará dividido em  $d$  colunas com  $c$  colunas pintadas. Posteriormente, divide o primeiro em  $d$  colunas e o segundo em  $b$  linhas, obtendo representações de frações equivalentes agora de mesmo denominador. Por fim, procede a soma feita com denominadores iguais.

Figura 4.17 – Adição de  $\frac{1}{5}$  com  $\frac{2}{3}$

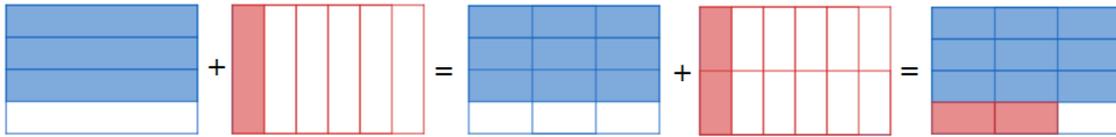


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

- **Denominadores que não sejam primos entre si:** Sejam  $\frac{a}{b}$  com  $\frac{c}{d}$ , com  $a, b, c$  e  $d$  números naturais com  $mdc(b, d) \neq 1$ . Primeiramente, utilizar retângulos com mesmas dimensões onde um estará dividido em  $b$  linhas com  $a$  linhas pintadas e outro estará dividido em  $d$  colunas com  $c$  colunas pintadas. Em seguida, divide o primeiro em  $mmc(b, d)/b$  colunas e o segundo em  $mmc(b, d)/d$  linhas, obtendo representações de

frações equivalentes agora de mesmo denominador. Por fim, procede a soma feita com denominadores iguais.

Figura 4.18 – Adição de  $\frac{3}{4}$  com  $\frac{1}{6}$



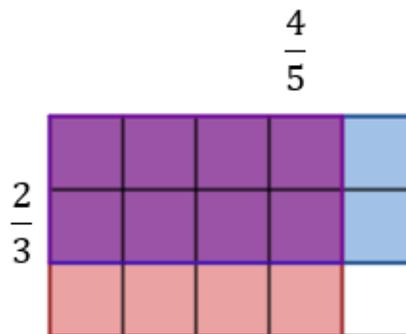
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

#### 4.1.7.2 Multiplicação e divisão de frações

Em relação a multiplicação e divisão de frações será apresentado apenas a multiplicação, pois a divisão de frações é realizada a partir de uma multiplicação. No tocante a multiplicação pode-se analisar em dois casos, um envolvendo apenas frações próprias e outro onde aparece frações impróprias.

- **Multiplicação apenas com frações próprias:** Sejam  $\frac{a}{b}$  com  $\frac{c}{d}$ , com  $a, b, c$  e  $d$  números naturais e  $a < b$  e  $c < d$ . Para efetuar a multiplicação dessas frações utiliza-se um retângulo dividido em  $b$  linhas, com  $a$  linhas pintadas, e em  $d$  colunas, com  $c$  colunas pintadas. O resultado da multiplicação destas é a razão entre a quantidade de partes ao qual o retângulo formado pela interseção das duas cores foi subdividido sobre o total de partes a qual o retângulo inicial foi repartido, isto é,  $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ .

Figura 4.19 – Multiplicação de  $\frac{2}{3}$  com  $\frac{4}{5}$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Observe que a figura 4.19 representa o multiplicação de  $\frac{2}{3}$  com  $\frac{4}{5}$ , onde

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

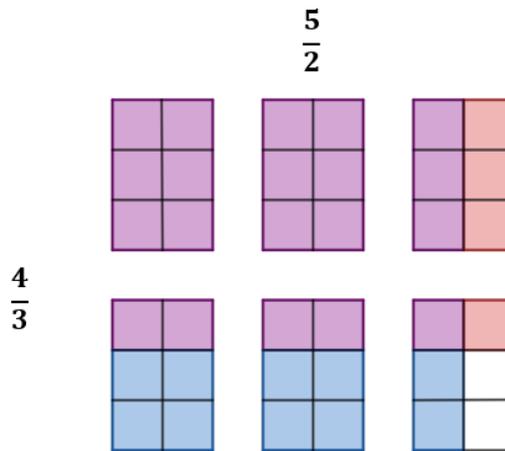
- **Multiplicação envolvendo frações impróprias:** Utilizando uma ideia distributiva, considere  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , com  $a, b, c$  e  $d$  números naturais e  $a = bx + a'$  e  $c = dy + c'$ , onde  $x$  e  $y$  são naturais. Assim,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{bx + a'}{b}\right) \cdot \left(\frac{dy + c'}{d}\right) = \left(x + \frac{a'}{b}\right) \cdot \left(y + \frac{c'}{d}\right) = xy + \frac{xc'}{d} + \frac{ya'}{b} + \frac{a'c'}{bd} = xy \frac{bd}{bd} + x \frac{c'b}{bd} + y \frac{a'd}{bd} + \frac{a' \cdot c'}{b \cdot d}$$

.

A representação geométrica segue de forma similar ao de frações próprias, mas fazendo uso de mais retângulos. Observe o exemplo a seguir:

Figura 4.20 – Multiplicação de  $\frac{4}{3}$  com  $\frac{5}{2}$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

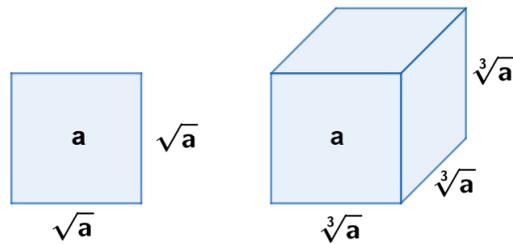
Observe na figura 4.20 que a multiplicação será dada por

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{6}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{12}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{20}{6}. \end{aligned}$$

#### 4.1.8 Radiciação - Raiz quadrada

No Ensino Fundamental, a radiciação é apresentada como operação inversa da potenciação e feitos exemplos de raiz quadradas e cúbicas. Em relação a isso, pode-se associar a raiz quadrada de um número a aresta de um quadrado de área equivalente a este. Já a raiz cúbica de um número a aresta de um cubo de volume equivalente a este.

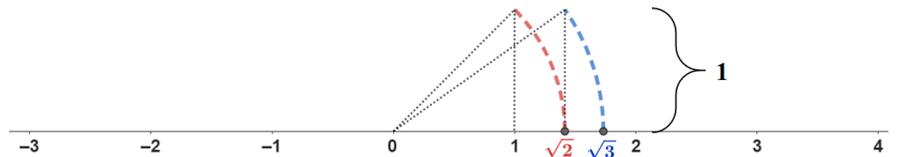
Figura 4.21 – Raiz quadrada e cúbica



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Posteriormente, ao se tratar de números reais é utilizado raízes quadradas não exatas para exemplificar números irracionais. Nesse sentido, é utilizado o Teorema de Pitágoras e triângulos retângulos para fazer a localização desses números na reta numérica.

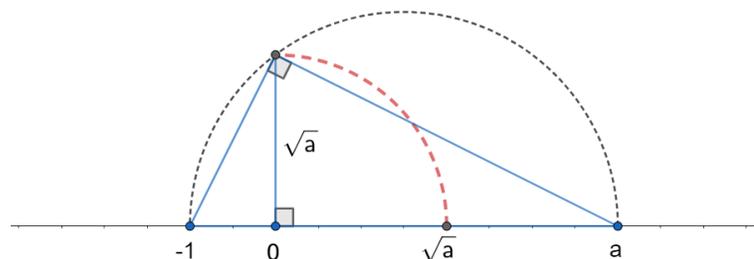
Figura 4.22 – Raiz quadrada na reta real utilizando o Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Em relação a raiz quadrada pode-se implementar outra representação geométrica explorando uma das relações métricas do triângulo retângulo.

Figura 4.23 – Raiz quadrada na reta real utilizando relação métrica no triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na figura 4.23, tem-se um triângulo retângulo inscrito em uma semicircunferência, com a hipotenusa igual ao diâmetro. Considerando que  $x$  é a altura em relação à hipotenusa, pela semelhança de triângulos retângulos, temos a relação:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1} \implies x^2 = a \implies x = \sqrt{a}.$$

## 4.2 Álgebra

A unidade temática Álgebra tende a estimular o pensamento algébrico, pensamento esse que, segundo a BNCC, "é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos". Ademais, acrescenta a importância de "criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas". Dessa forma, associar expressões algébricas com representações geométricas é estimulado pela BNCC.

### 4.2.1 Equações quadráticas

O método que será apresentado aqui é o de completar quadrados de Al-Khwarizmi. Como não havia linguagem algébrica na época, o método para resolver certos tipos de equações quadráticas se dava por seguir certas regras e a justificativa para tal era dada geometricamente, como dito no primeiro capítulo. As regras estabelecidas por Al-Khwarizmi se aproxima à fórmula de resolução para equação quadrática utilizada nos dias de hoje, porém devido a se tratar de quantidades ou grandezas se limitava ao uso de números positivos.

O procedimento resolve a equação quadrática do tipo  $x^2 + bx = c$ , com  $b$  e  $c$  números positivos. O procedimento se dá seguindo as linhas da tabela da figura 4.1, onde *Jidhr* era a quantidade  $b$  e *Adad* era a quantidade  $c$ .

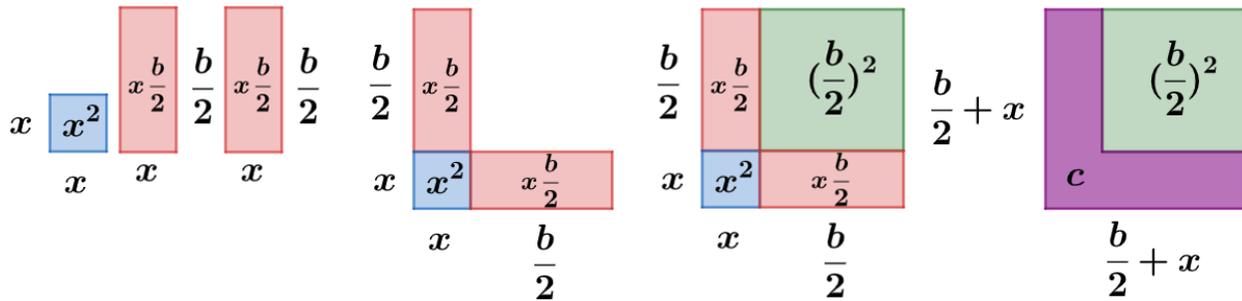
Tabela 4.1 – Resolução de equação quadrática de Al-Khwarizmi

Solução dada por al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna, para uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$
Tome a metade da quantidade de <i>jidhr</i> .	$\frac{b}{2}$
Multiplique esta quantidade por si mesma.	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Some no resultado os <i>adad</i> .	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado.	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
Subtraia deste resultado a metade dos <i>jidhr</i> , encontrando a solução.	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Fonte: Roque (2012, p. 252).

De forma geométrica, constrói-se um quadrado de área  $x^2$  e dois retângulos de dimensões  $\frac{b}{2}$  por  $x$ . Por seguinte, justapõe os lados medindo  $x$  dos retângulos a dois lados consecutivos do quadrado. Assim, para completar o quadrado de lado  $\frac{b}{2} + x$  precisará de um quadrado de lado  $\frac{b}{2}$ , isto é,  $(\frac{b}{2} + x)^2 = x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = c + (\frac{b}{2})^2$ . Portanto, a solução será  $\sqrt{c + (\frac{b}{2})^2} - \frac{b}{2}$ .

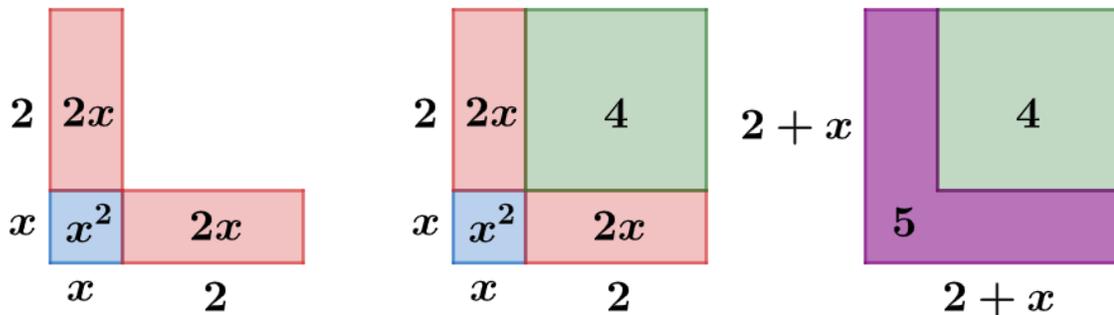
Figura 4.24 – Resolução geométrica de equação quadrática de Al-Khwarizmi



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Veja o procedimento para resolver a equação  $x^2 + 4x - 5 = 0$ , isto é,  $x^2 + 4x = 5$ .

Figura 4.25 – Resolução geométrica da equação  $x^2 + 4x = 5$  pelo método de Al-Khwarizmi



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

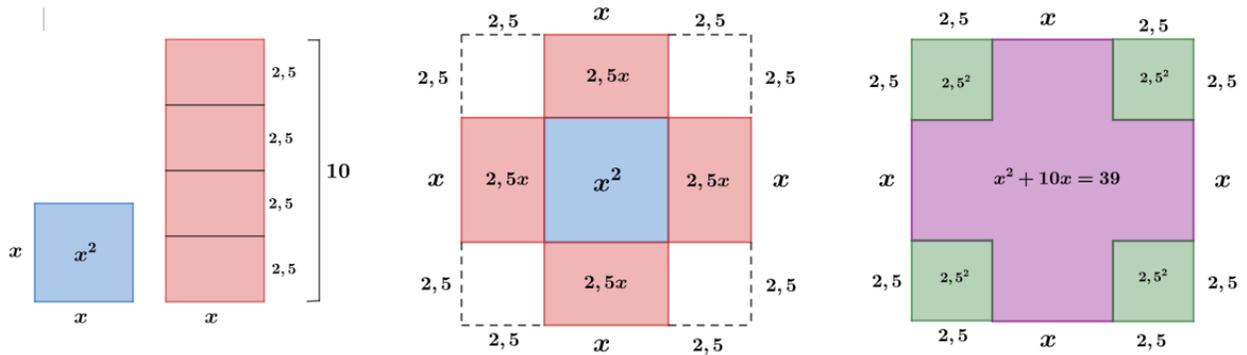
Assim, como  $(2 + x)^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2$ , então  $2 + x = 3$ , isto é,  $x = 1$ .

#### 4.2.1.1 Outra forma de completar o quadrado

Alguns trabalhos apresentam a forma geométrica de completar quadrado de Al-Khwarizmi construindo um quadrado de área  $x$  e quatro retângulos de dimensões  $\frac{b}{4}$  por  $x$ . Por seguinte, justapõe os lados medindo  $x$  dos retângulos aos quatro lados do quadrado. Assim, para completar o quadrado de lado  $2\frac{b}{4} + x$  precisará de quatro quadrados de lado  $\frac{b}{4}$ . O resultado se obtém analogamente ao anterior.

Vejam o procedimento para resolver a equação  $x^2 + 10x - 39 = 0$ , ou seja,  $x^2 + 10x = 39$ .

Figura 4.26 – Resolução geométrica da equação  $x^2 + 10x = 39$  pelo método de Al-Khwarizmi



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Assim, como  $(2,5 + 2,5 + x)^2 = 39 + 4.(2,5)^2 = 39 + 25 = 64 = 8^2$ , então  $5 + x = 8$ , isto é,  $x = 3$ .

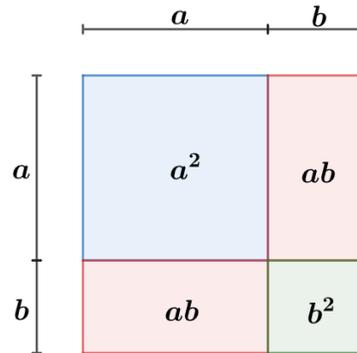
#### 4.2.2 Produtos notáveis

Produtos notáveis são identidades algébricas bem recorrentes na matemática, por isso possuem nomes específicos e é objeto de conhecimento do currículo de matemática no Ensino Básico. Dentre eles, os principais são com dois termos, nomeados de quadrado da soma, o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença, mas é possível encontrar em alguns livros o quadrado da soma de três termos, o cubo da soma de dois termos e o cubo da diferença de três termos.

##### 4.2.2.1 Quadrado da soma

Por meio das propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação de números reais obtém-se que  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , para  $a$  e  $b$  reais. Contudo, pelo viés geométrico é possível compreender visualmente, através de áreas de retângulos, essa identidade algébrica e as manipulações algébricas no processo.

Figura 4.27 – Interpretação geométrica do quadrado da soma



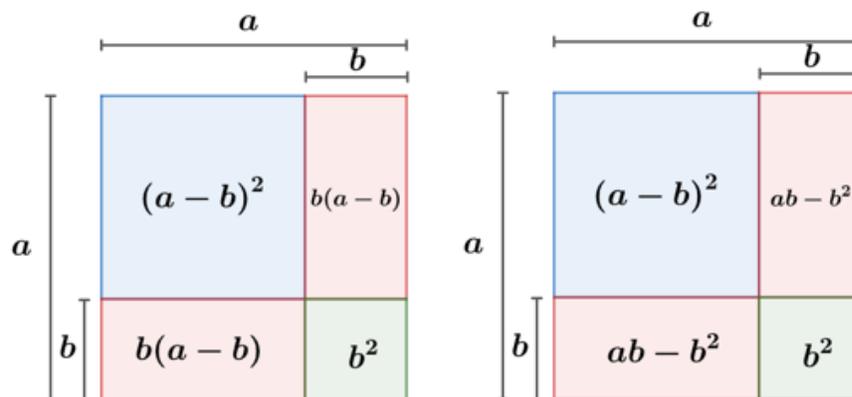
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O quadrado da soma pode ser interpretado como a área de um quadrado de lado medindo  $a + b$ . Dessa forma, a área desse quadrado será  $(a + b)^2$  e isto é composto de dois retângulos de área  $ab$ , um quadrado de área  $a^2$  e outro de área  $b^2$ , como pode-se observar em figura 4.27.

#### 4.2.2.2 Quadrado da diferença

No caso do quadrado da diferença parte-se de um quadrado de lado medindo  $a$ , depois decompõe este em dois retângulos de área  $b(a - b)$ , um quadrado de área  $(a - b)^2$  e outro de área  $b^2$ , como na figura 4.28. A partir de uma outra interpretação geométrica de áreas, obtém-se que  $a^2 = (a - b)^2 + (ab - b^2) + (ab - b^2) + b^2$ , isto é,  $a^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2$ , concluindo o quadrado da diferença,  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

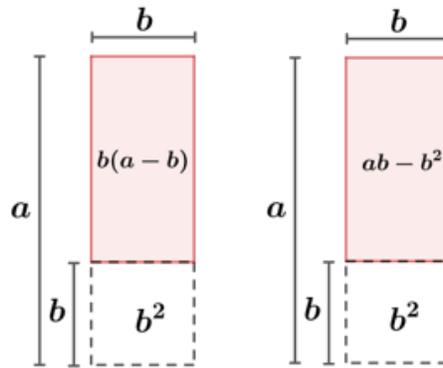
Figura 4.28 – Interpretação geométrica do quadrado da diferença



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

É possível verificar geometricamente que o retângulo de área  $b(a - b)$  possui área  $ab - b^2$ , já que a área do retângulo de lado  $a - b$  por  $b$  é equivalente a área do retângulo  $a$  por  $b$  menos o quadrado de área  $b^2$  (Figura 4.29).

Figura 4.29 – Interpretação geométrica do quadrado da soma

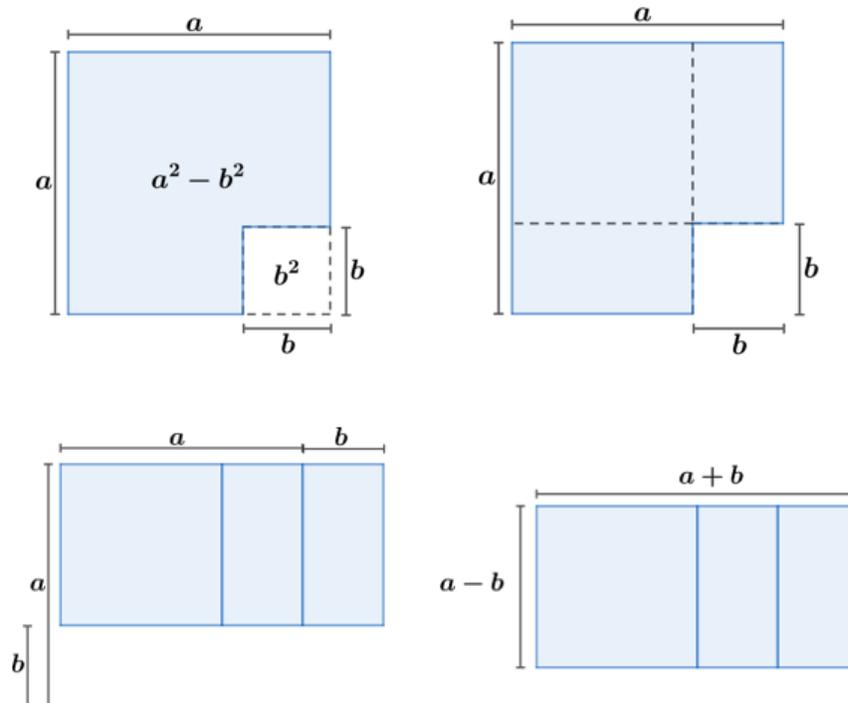


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

#### 4.2.2.3 Produto da soma pela diferença

A partir de um quadrado de lado medindo  $a$ , retira-se um quadrado de lado medindo  $b$ , logo a área desta figura é  $a^2 - b^2$ . Pela figura 4.30, temos que essa área equivale a um quadrado de lado  $a$  e dois retângulos de lados  $a - b$  por  $b$ . Rearranjando esses retângulos ao lado do quadrado de lado medindo  $a$ , obtém-se o retângulo de lados  $a - b$  por  $a + b$ , concluindo que  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

Figura 4.30 – Interpretação geométrica do produto da soma pela diferença



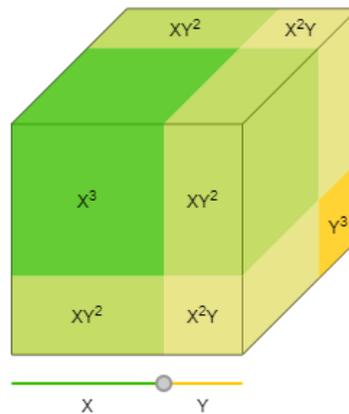
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

#### 4.2.2.4 Outros produtos notáveis

A interpretação geométrica do quadrado da soma de três termos ou mais pode ser obtido com raciocínio análogo ao quadrado da soma, partindo de um quadrado de lado medindo a soma dos termos.

Em relação a soma do cubo também utiliza-se um raciocínio análogo ao quadrado da soma, porém a figura agora é um cubo de lado medindo a soma dos termos. Nesse caso, os termos algébricos não tratam de áreas, mas sim de volume de paralelepípedos e cubos (Figura 4.31).

Figura 4.31 – Interpretação geométrica do cubo da soma

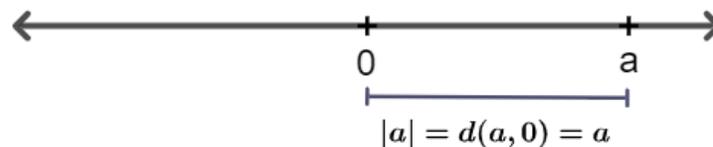


Fonte: <https://portaldabmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=14>

#### 4.2.3 Equações e Inequações modulares

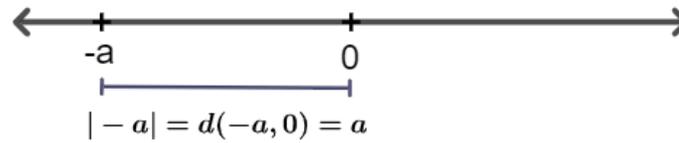
A definição de módulo ou valor absoluto de um número dado é atrelado ao conceito de distância na reta numérica desse número até o zero, porém ao passar para equações e inequações modulares há um tratamento apenas algébrico. Contudo estes também podem ser explorados a partir da interpretação geométrica de distância na reta numérica.

Figura 4.32 – Interpretação geométrica para o módulo ou valor absoluto de  $a$ , com  $a \in \mathbb{R}^+$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

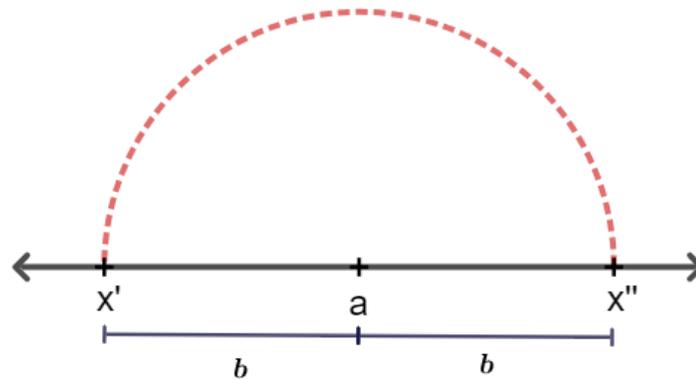
Figura 4.33 – Interpretação geométrica para o módulo ou valor absoluto de  $a$ , com  $a \in \mathbb{R}^-$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Dada a equação modular  $|x - a| = b$ , pode-se ser visto como determinar qual número está a uma distância  $b$  de  $a$  na reta numérica. Dessa forma, basta traçar uma circunferência de centro em  $a$  e raio  $b$  na reta numérica, determinando as soluções  $x'$  e  $x''$  (Figura 4.34).

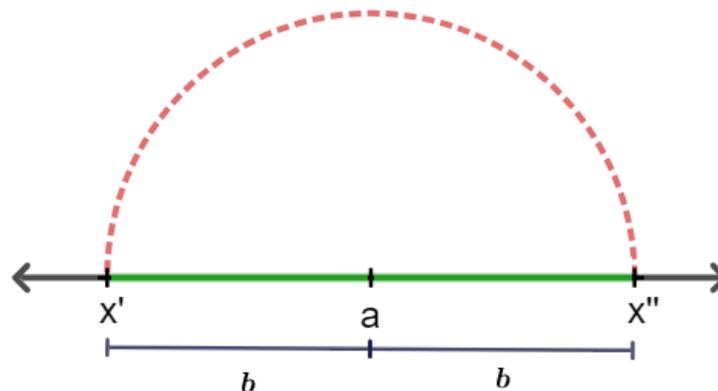
Figura 4.34 – Interpretação geométrica para  $|x - a| = b$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Caso seja a inequação  $|x - a| < b$ , então deseja-se encontrar um número que cuja distância de  $a$  seja menor que  $b$ , logo esse valor estará entre  $x'$  e  $x''$  (Figura 4.35).

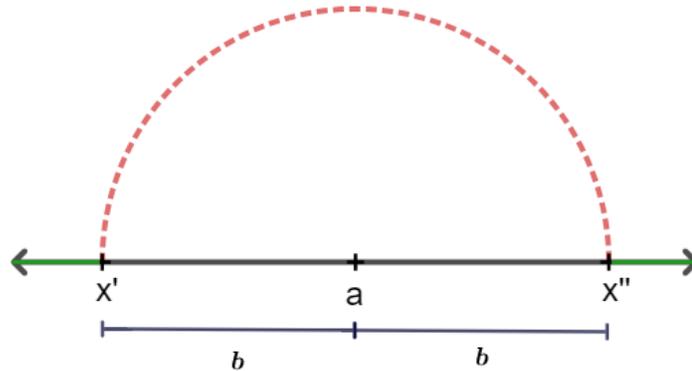
Figura 4.35 – Interpretação geométrica para  $|x - a| < b$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Caso seja a inequação  $|x - a| > b$ , então deseja-se encontrar um número que cuja distância de  $a$  seja maior que  $b$ , logo esse valor estará entre  $(-\infty, x')$  ou  $(x'', +\infty)$  (Figura 4.36).

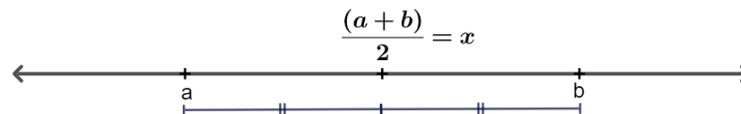
Figura 4.36 – Interpretação geométrica para  $|x - a| > b$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Já em relação a equação modular  $|x - a| = |x - b|$ , quer se determinar o valor que equidista de  $a$  e  $b$  na reta numérica. Assim, basta determinar o ponto médio entre  $a$  e  $b$  na reta numérica, determinando a solução  $x$  (Figura 4.37).

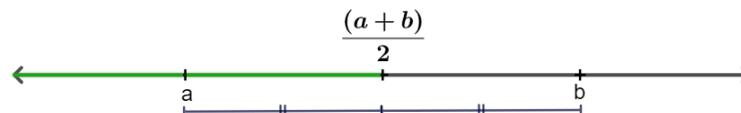
Figura 4.37 – Interpretação geométrica para  $|x - a| = |x - b|$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Se for a inequação modular  $|x - a| < |x - b|$ , então quer se determinar o valor cuja a distância de  $x$  até  $a$  seja menor que a distância de  $x$  até  $b$ . Logo, será qualquer número que esteja a esquerda do ponto médio de  $a$  e  $b$  na reta numérica (Figura 4.38). Caso seja  $|x - a| > |x - b|$ , o raciocínio é análogo e a solução será qualquer número que esteja a direita do ponto médio de  $a$  e  $b$  na reta numérica.

Figura 4.38 – Interpretação geométrica para  $|x - a| < |x - b|$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

### 4.3 Geometria

A unidade temática de Geometria favorece o pensamento geométrico, onde desenvolvem-se as ideias fundamentais da matemática de construção, representação e interdependência dos objetos geométricos. A BNCC destaca que "a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume, nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou ao Teorema de Pitágoras". Dessa forma, é apresentada a seguir uma possibilidade mais geométrica ao se trabalhar o Teorema de Pitágoras, fugindo assim de se limitar apenas à aplicação dessas fórmulas. Ademais, a utilização de provas sem palavras, que faz uso de manipulação de objetos geométricos para provar relações.

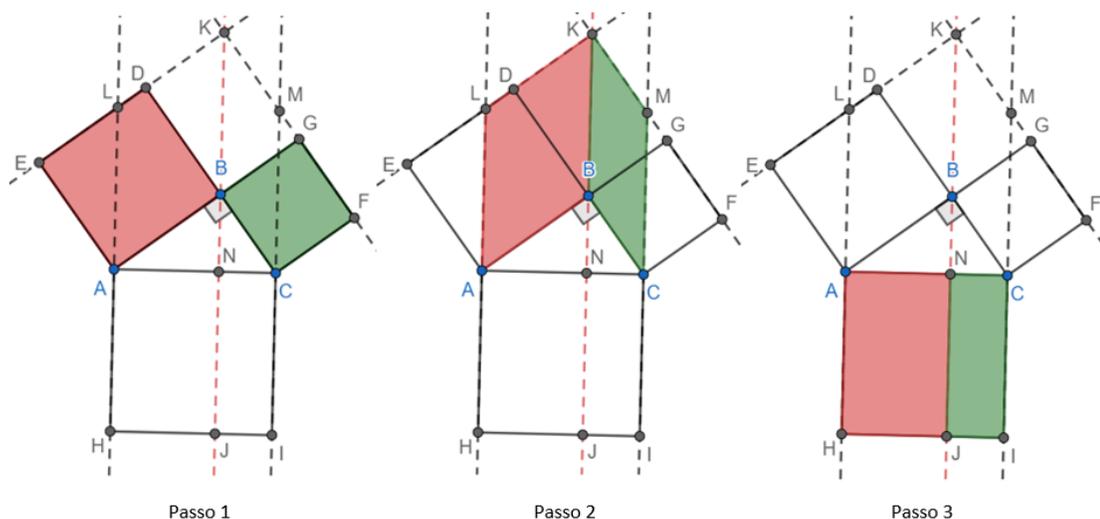
#### 4.3.1 Teorema de Pitágoras

As demonstrações a seguir do famoso Teorema de Pitágoras foram selecionadas, do trabalho de Silva (2014), devido a seu teor geométrico, onde se faz recurso de preservação de áreas de polígonos como o retângulo e o triângulo, não sendo necessário recorrer a elementos algébricos na demonstração.

##### 4.3.1.1 Solução de Lecchio (1753)

Dado o triângulo retângulo  $ABC$ , com o ângulo  $\hat{A}BC$  medindo  $90^\circ$ . Construa os quadrados  $ABDE$ ,  $BCFG$  e  $ACIH$  sob os respectivos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  do triângulo  $ABC$ .

Figura 4.39 – Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras de Lecchio (1753)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Trace uma perpendicular ao segmento  $HI$  que passe por  $B$ . Chame a interseção desta com  $HI$  de  $J$  e com  $AC$  de  $N$ . Por seguinte, prolongue  $ED$  e  $FG$  intersectando a reta  $BJ$  em  $K$ . Prolongue também  $AH$  intersectando  $EK$  em  $L$  e  $IC$  intersectando  $KG$  em  $M$ .

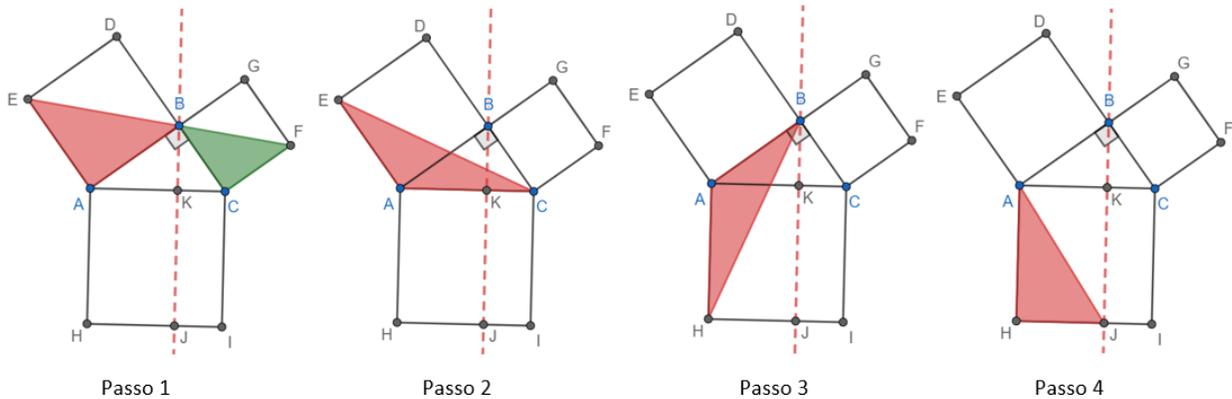
Por construção,  $AB$  é paralelo a  $LK$ , bem como  $AL$  a  $BK$ . Assim, a área do quadrado  $ABDE$  é equivalente a área do paralelogramo  $ABKL$ . Analogamente,  $BCFG$  possui a mesma área de  $BCM K$ .

Ademais, devido ao paralelismo nas construções realizadas,  $BG$  possui a mesma medida de  $BC$ ,  $KG$  a mesma medida de  $AB$  e  $BG$  é perpendicular a  $KG$ . Por congruência lado, ângulo e lado, temos que  $BGK$  é congruente a  $CBA$ . Portanto,  $KB$  e  $AC$  possuem a mesma medida.

Novamente devido ao paralelismo nas construções e  $\overline{KB} = \overline{AC} = \overline{NJ}$  resulta que  $ANJH$  e  $NCJO$  possuem áreas equivalentes a  $LKNA$  e  $KMCB$ , respectivamente. Assim, validando o Teorema de Pitágoras.

#### 4.3.1.2 Solução clássica de Euclides

Figura 4.40 – Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras de Euclides



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Dado o triângulo retângulo  $ABC$ , com o ângulo  $\hat{A}BC$  medindo  $90^\circ$ . Construa os quadrados  $ABDE$ ,  $BCFG$  e  $ACIH$  sob os respectivos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  do triângulo  $ABC$  (Figura 4.40).

Trace uma perpendicular ao segmento  $HI$  que passe por  $B$ . Chame a interseção desta com  $HI$  de  $J$  e com  $AC$  de  $K$ . Agora, perceba que por  $EA$  ser paralelo a  $DC$ , então o triângulo  $EAB$  e  $EAC$  possuem a mesma área (Passo 2).

Por seguinte,  $\overline{EA} = \overline{AB}$ ,  $\overline{AC} = \overline{AH}$  e  $\hat{E}AC = \hat{B}AH$  garantem, por congruência, que  $EAC$  e  $BAH$  possuem a mesma área (Passo 3).

Por fim, devido a  $BJ$  ser paralela a  $AH$  temos que  $BAH$  e  $JAH$  possuem a mesma área (Passo 4), isto é, a metade da área do quadrado cujo o lado tem a mesma medida do cateto  $AB$  equivale a metade área quadrado cujo o lado tem medida igual ao da hipotenusa  $AC$ . De forma análoga, obtemos que o triângulo  $BCF$  equivale a metade da área do retângulo  $CKJI$ . Assim, podemos concluir o Teorema de Pitágoras.

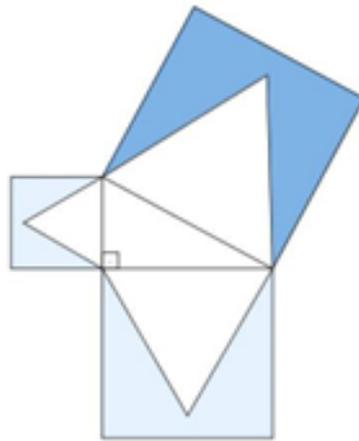
#### 4.3.1.3 Extensões do Teorema de Pitágoras

Além de se verificar para área de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo, pode-se verificar essa relação de área para outros polígonos, entre eles triângulos equiláteros, triângulos semelhantes, polígonos regulares e polígonos semelhantes.

Além disso, há outros que Silva (2014) menciona e estão representados alguns a seguir, separados pelo próprio autor em retilíneos e não-retilíneos.

Figura 4.41 – Extensões retilíneas do Teorema de Pitágoras

#### 1) Complementares dos triângulos equiláteros construídos no interior dos quadrados e tendo como base os lados do triângulo retângulo.

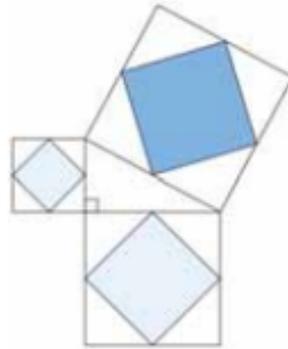


Fonte: Silva (2016, p. 30)

Figura 4.42 – Mais extensões retilíneas do Teorema de Pitágoras

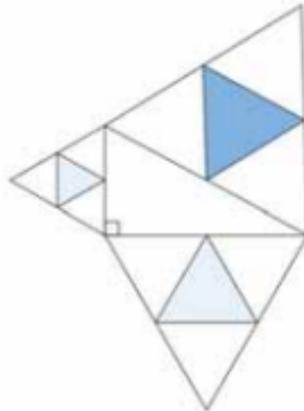
- 2) Quadrados inscritos tomando os pontos médios dos quadrados dos lados do triângulo retângulo.

Figura 49 – Quadrados inscritos nos pontos médios.



- 3) Triângulos equiláteros inscritos considerando os pontos médios dos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo.

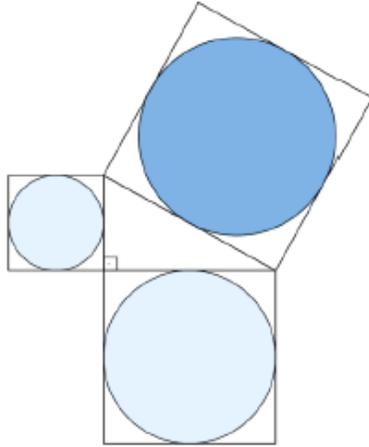
Figura 50 – Triângulos equiláteros inscritos nos pontos médios.



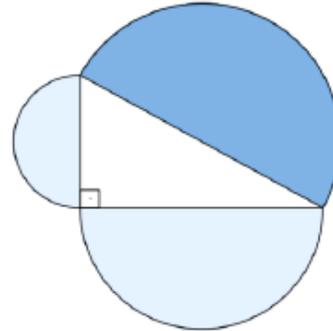
Fonte: Silva (2016, p. 30)

Figura 4.43 – Extensões não-retilíneas do Teorema de Pitágoras

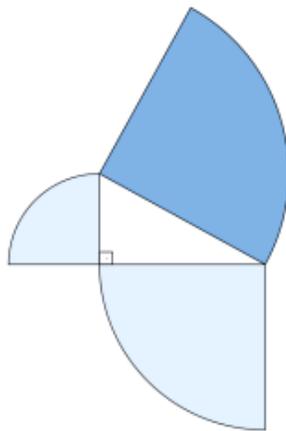
1) Círculos inscritos nos quadrados



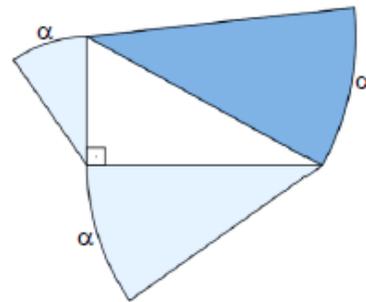
2) Semicírculos com diâmetro sobre os lados do triângulo.



3) Quadrantes sobre os lados do triângulo.



4) Setores angulares sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Silva (2016, p. 34)

Nos casos acima é interessante o uso do GeoGebra para as construções e uso da forma algébrica para justificar a veracidade das construções de forma genérica.

#### 4.3.2 Provas sem palavras

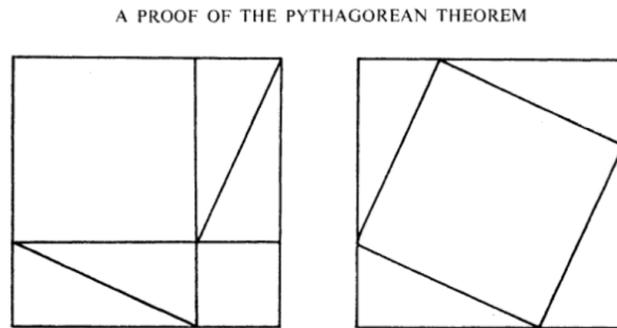
O termo "provas sem palavras" vem do inglês *proof without words (PWW)* que hoje em dia está registrado em livros com esse mesmo nome, em três volumes, por Roger B. Nelsen publicados em 1993, 2000 e 2006. Este termo é utilizado quando diagramas ou figuras são empregados para persuadir o leitor e fornecer uma validação visual de um enunciado matemático, dispensando ou minimizando o uso de vocabulário lexical.

A noção de usar diagramas para demonstrar a validade de um resultado matemático re-

monta à própria história do desenvolvimento da matemática, como visto no primeiro capítulo. No entanto, a conceptualização das "provas sem palavras", adquirindo uma forma de demonstração viável, surgiu na década de 70 através da revista de divulgação científica de matemática da *Mathematical Association of America (MAA)*, que apresentava a seção *proof without words* dedicada a publicações desse tipo.

Dentre as primeiras publicações, tem-se a prova do Teorema de Pitágoras por Isaacs Rufus em 1975 (Figura 4.44), porém há registro desse mesmo diagrama em um texto chinês que data 200 a.C..

Figura 4.44 – Prova do Teorema de Pitágora por Issacs Rufus em 1975 na *MAA's Mathematical Magazine*



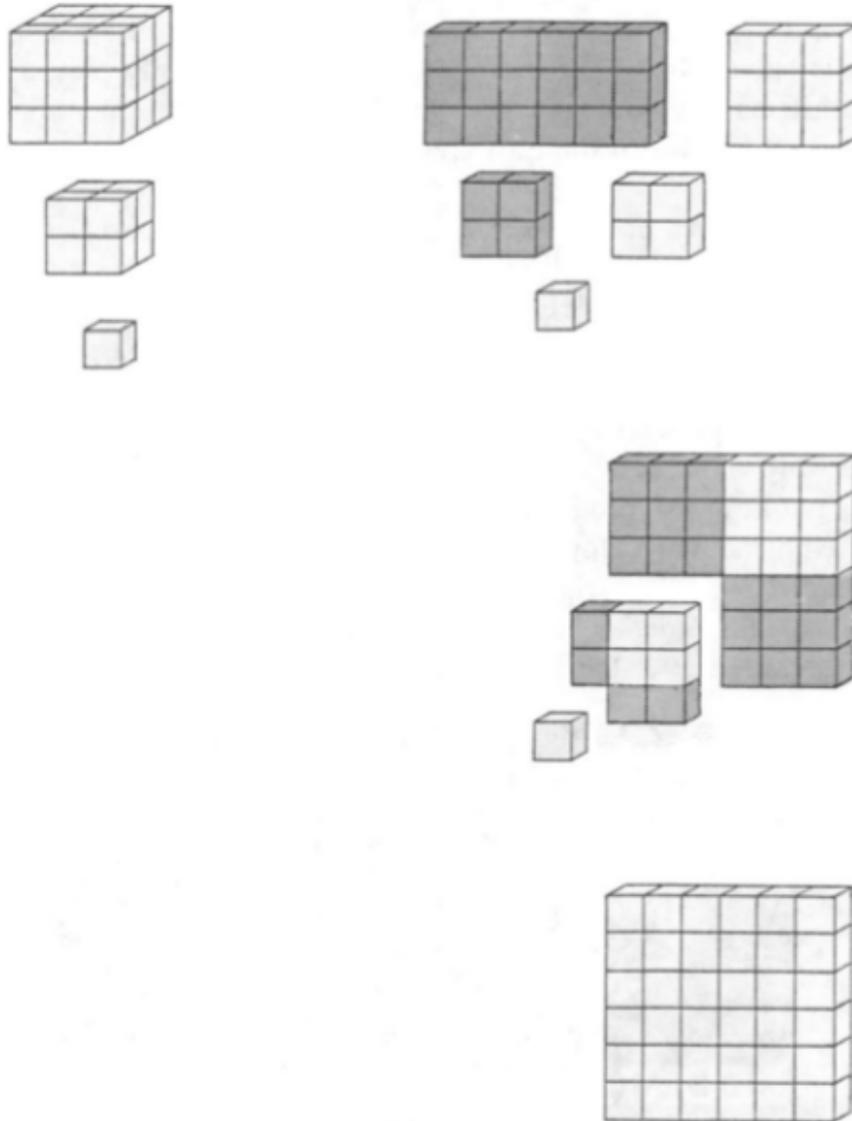
Fonte: [https://](https://maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-introduction)

[maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-introduction](https://maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-introduction)

Algumas demonstrações sem palavras empregam diagramas para ilustrar o conceito que se deseja provar, como é o caso da prova sem palavras de Alan F. Fry da soma do  $n$  cubos (Figura 4.45), também conhecido por Teorema de Nicomachu. No entanto, muitas outras têm um caráter predominantemente geométrico e generalizado, exigindo conhecimento prévio de definições e propriedades da geometria, como é o caso da desigualdade das médias por Nelsen (Figura 4.46).

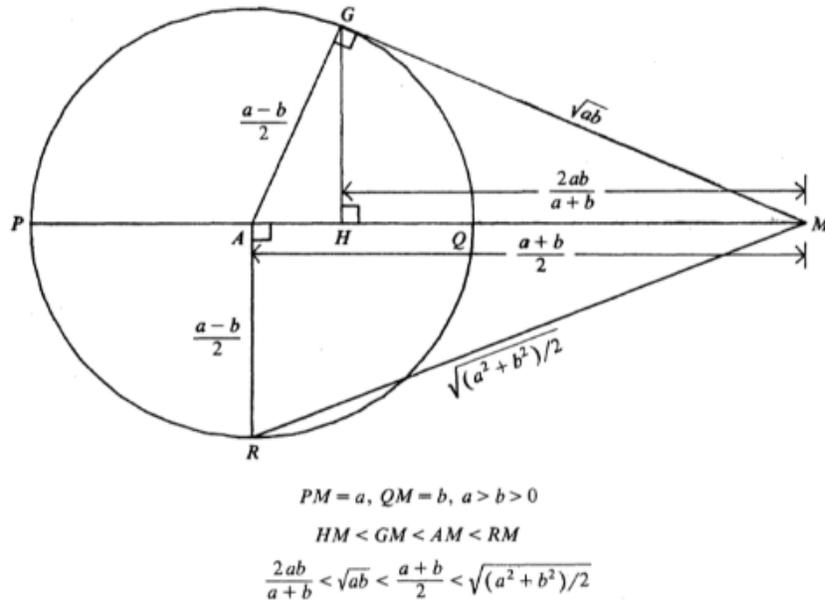
Figura 4.45 – Soma dos cubos por Fry em 1985 na *MAA's Mathematical Magazine*

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$



Fonte: <https://maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-pwvs-and-mathematical-proof>

Figura 4.46 – Desigualdade das médias por Nelsen em 1987 na *MAA's Mathematical Magazine*



Fonte: <https://maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-a-brief-history-of-proofs-without-words>

Existem diversas discussões sobre a validade das provas sem palavras como uma verdadeira prova matemática. Esses debates surgem a partir de questões como a generalização, especialmente em relação a provas que oferecem apenas exemplos específicos, como no caso da prova de soma de cubos de Fry, e a ausência de fundações em axiomas, hipóteses e teoremas bem estabelecidas, uma vez que alguns consideram os diagramas apenas como uma representação visual desprovidas de alicerces matemáticos e podendo ser ilusória.

Embora que aqui não se mergulhe profundamente nessa discussão, pois haveria de discutir do ponto de vista filosófico de uma prova matemática, é relevante lembrar que, mesmo para linguistas, os diagramas dotados de significado constituem textos e desempenham um papel crucial na comunicação.

Dessa forma, é importante reconhecer o valor das provas sem palavras na persuasão do estudante quanto à credibilidade matemática, muitas vezes elucidando o procedimento de uma prova teórica. Assim, tornam-se valiosas ferramentas pedagógicas e acessíveis para os alunos compreenderem como se constitui uma demonstração matemática.

Por último, o emprego de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, oferece diversas oportunidades para abordar as "provas sem palavras" de maneira mais dinâmica e interativa, auxiliando na melhor compreensão e generalização dos resultados matemáticos que estejam sendo trabalhados.

### 4.3.3 *Uso de contextos históricos*

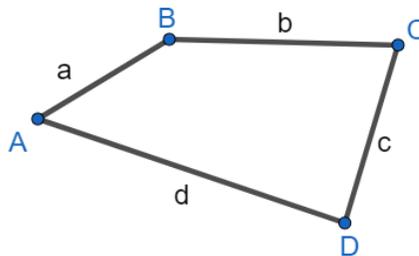
Como visto no primeiro capítulo, a geometria desempenhou um papel crucial na construção do conhecimento matemático ao longo da história. Esse legado histórico pode ser incorporado no ensino, demonstrando que a matemática se desenvolveu ao longo do tempo através de erros e acertos, em vez de ser um conhecimento pronto e acabado, como muitas vezes é apresentado. Dessa forma, abre-se espaço para entender que erros fazem parte do processo de aprendizagem e explorá-los conduzem há um pensamento mais coerente, ampliando a compreensão.

Um exemplo disso é a mensuração da área de quadriláteros pelos egípcios. Eles calculavam a área de retângulos e triângulos de maneira similar à utilizada atualmente. No entanto, para quadriláteros quaisquer, os egípcios empregavam um método particular que, embora não válido de forma geral, pode ser interpretado como uma desigualdade, onde estabelece uma cota superior para a área de um quadrilátero qualquer.

A forma de eles calcularem a área de um quadrilátero qualquer é denominada como fórmula do Agrimensor, por Tou (2014), e está registrada em inscrições do Templo de Hórus, em Edfu, Egito. É dado esse nome porque o cálculo da área dos terrenos estava diretamente ligado à determinação dos impostos sobre a produção agrícola. Ela estabelece que a área é dada pelo produto das médias dos lados opostos do quadrilátero. Assim, dado um quadrilátero qualquer  $ABCD$ , com medidas  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ,  $\overline{CD} = c$  e  $\overline{DA} = d$ , tem-se que

$$A_{ABCD} = \frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}.$$

Figura 4.47 – Quadrilátero qualquer



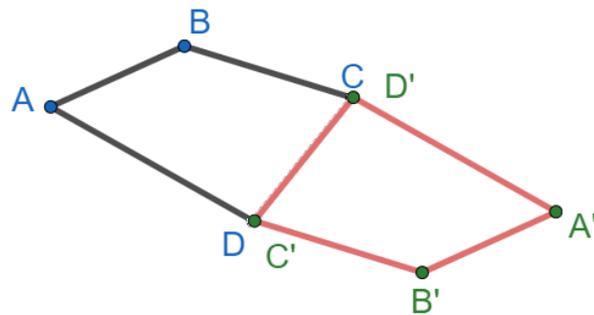
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A fórmula do Agrimensor funciona bem para retângulos, mas ao aplicá-la a trapézios, losangos ou paralelogramos, percebe-se que ela não é válida de forma geral. No entanto, como mencionado anteriormente, o produto das médias dos lados opostos do quadrilátero pode ser usado como uma cota superior para a área de um quadrilátero qualquer. A demonstração

utilizando um enfoque geométrico dessa desigualdade de Wilson e Wilson (1991) é dada a seguir.

Dado um quadrilátero  $ABCD$  qualquer, gere um quadrilátero  $A'B'C'D'$  congruente ao inicial e faça um giro de  $180^\circ$ , isto pode ser visto também com uma reflexão horizontal e depois vertical. Em seguida, sobreponha  $D$  em  $C'$  e  $C$  em  $D'$  (Figura 4.48).

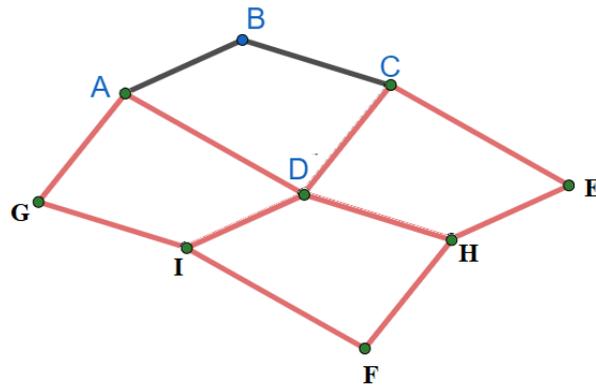
Figura 4.48 – Quadriláteros  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  juntos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Repita o processo mais duas vezes, obtendo assim uma figura composta de quatro quadriláteros congruentes, onde os vértices são nomeados de acordo com a figura 4.49.

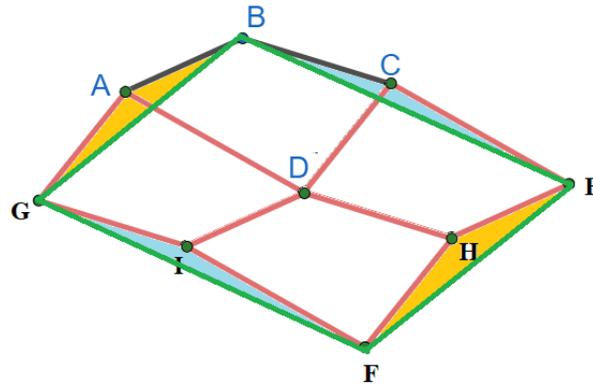
Figura 4.49 – Quatro quadriláteros congruentes conectados



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Ao traçar os segmentos  $BE$ ,  $EF$ ,  $FG$  e  $GB$ , forma-se um paralelogramo devido às congruências dos triângulos  $ABG$  com  $HEF$  e  $CBE$  com  $GIF$ .

Figura 4.50 – Quatro quadriláteros congruentes conectados



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Pela desigualdade dos triângulos, tem-se

$$GB \leq GA + AB \text{ e } BE \leq BC + CE,$$

de onde segue que

$$GB \cdot BE \leq (GA + AB) \cdot (BC + CE).$$

Mas, como a área do paralelogramo é quatro vezes a do quadrilátero inicial, devido à construção geométrica, tem-se

$$4 \cdot A_{ABCD} = A_{BEFG} = GB \cdot BE \cdot \text{sen} GBE \leq GB \cdot BE.$$

Logo,

$$A_{ABCD} \leq \frac{(GA + AB)}{2} \cdot \frac{(BC + CE)}{2}.$$

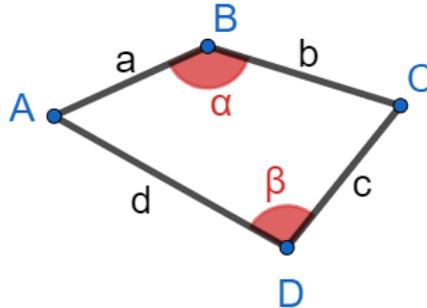
A fórmula do Agrimensor perdurou por bastante tempo, apesar de sua imprecisão. Historicamente, outra fórmula para a área de quadriláteros quaisquer só surgiu com o indiano Brahmagupta (598 - 668), que hoje se sabe ser aplicável apenas a quadriláteros cíclicos. A fórmula mais atual e geral para o cálculo da área de quadriláteros convexos foi apresentada pelo alemão Carl Anton Bretschneider em 1842, que generalizou a fórmula de Brahmagupta.

A fórmula de Bretschneider é dada por, considerando um quadrilátero qualquer  $ABCD$ , com medidas  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ,  $\overline{CD} = c$  e  $\overline{DA} = d$ , tem-se

$$\text{Área}_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)},$$

onde  $p$  é o semi-perímetro, e  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos opostos desse quadrilátero (Figura 4.51).

Figura 4.51 – Quadrilátero convexo qualquer com ângulos opostos internos  $\alpha$  e  $\beta$

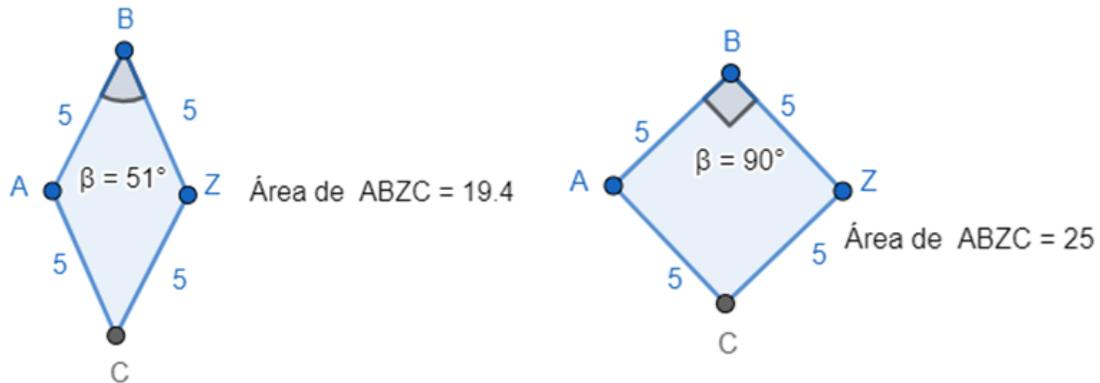


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A fórmula de Brahmagupta é similar a esta, mas o termo com o cosseno é eliminado. Isso ocorre porque, em um quadrilátero cíclico, a soma dos ângulos internos opostos é  $180^\circ$ .

Ao comparar a fórmula do Agrimensor com a de Bretschneider usando um exemplo, é possível explorar o propósito original da fórmula do Agrimensor, bem como o contexto em que era utilizada. Além disso, essa comparação pode esclarecer por que a fórmula do Agrimensor não foi questionada por tanto tempo, até a chegada da fórmula de Brahmagupta.

Figura 4.52 – Quadrilátero convexo de lados medindo cinco



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

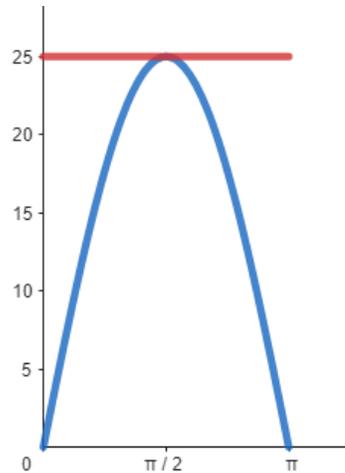
Considere, por exemplo, um quadrilátero  $ABCD$  com todos os lados medindo cinco (Figura 4.53). Nesse caso, os ângulos internos opostos serão iguais e serão denominados de  $\beta$ . Segundo a fórmula do Agrimensor, a área será sempre 25, independentemente da variação dos ângulos internos deste quadrilátero. No entanto, pela fórmula de Bretschneider, a área é dada por:

$$A = \sqrt{(10-5)(10-5)(10-5)(10-5) - 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos^2\left(\frac{\beta + \beta}{2}\right)} = \sqrt{5^4 \cdot (1 - \cos^2(\beta))}$$

$$\Rightarrow A = 25 \cdot \sin(\beta).$$

Assim, analisando a variação de  $\beta$  nas duas fórmulas, obtemos o seguinte gráfico apresentado na figura 4.53, onde a fórmula do Agrimensor é constante.

Figura 4.53 – Comparando graficamente a fórmula do Agrimensor com a de Bretschneider para um quadrilátero convexo de lados medindo cinco

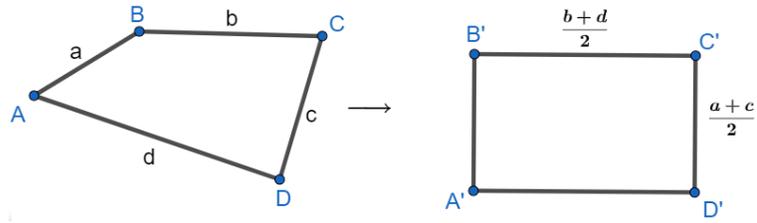


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Observa-se que quanto mais o ângulo  $\beta$  se afasta de um ângulo reto, o quadrilátero tende a se tornar mais achatado, resultando em uma área que difere bastante de 25. Ou seja, o erro da fórmula do Agrimensor será maior. Por outro lado, quando o ângulo se aproxima do ângulo reto, forçando todos os ângulos deste exemplo a também se aproximarem de  $90^\circ$ , o resultado se mostra mais coerente. Em outras palavras, quando o quadrilátero apresenta um formato próximo ao retangular, a fórmula se torna mais precisa.

Isso faz total sentido ao analisar os problemas registrados no Templo de Hórus, onde os quadriláteros possuem lados de (22, 4, 23, 4) e (15, 3.5, 16, 4) e apresentam um formato similar ao de um retângulo, conforme descrito por Tou (2014). Além disso, a fórmula do Agrimensor pode ser interpretada como uma forma de forçar o quadrilátero a se tornar um retângulo (Figura 4.54), cujos lados medem a média dos lados opostos, justificando assim a fórmula ser o produto dessas médias. Assim, é possível concluir que a fórmula era usada em casos onde o Agrimensor sabia que a região não era exatamente um retângulo, mas algo próximo. Por isso, ele calculava a área utilizando a média dos lados opostos.

Figura 4.54 – A fórmula do Agrimensor torna um quadrilátero em um retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

## 4.4 Probabilidade e Estatística

A unidade temática Probabilidade e Estatística contempla o estudo de eventos não determinísticos, bem como a coleta e tratamento de dados. No tocante a Estatística é de grande relevância as representações gráficas, donde a proporcionalidade entre representações geométricas são importantes, porém em relação a proposta desse trabalho será tratado uma interpretação geométrica de médias e a probabilidade geométrica.

Dentre os objetos matemáticos e trabalhos explorados nesta sessão têm-se as médias de Azevedo (2023) e as probabilidades com grandezas de Gondim (2013).

### 4.4.1 Médias

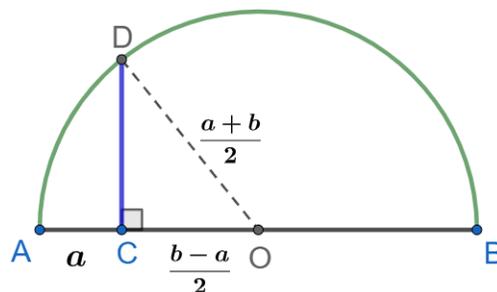
As médias surgiram com a ideia de um número que possa representar uma lista de números preservando certa característica em relação a essa lista. Quando se quer preservar a soma dos números da lista, tem-se a média aritmética, se for o produto é a média geométrica, a soma dos inversos é a média harmônica e a soma dos quadrados é a média quadrática.

A interpretação geométrica das médias, referente a dois números, remonta a registros antigos, como o Livro III da *Coleção matemática* de Paapus segundo Eves (2011), que descreve a desigualdade entre as médias aritmética, geométrica e harmônica. Vale ressaltar que a desigualdade é válida para uma lista com mais de dois números.

#### 4.4.1.1 Interpretação das médias utilizando semicircunferência

Dados os números reais positivos  $a$  e  $b$ , supondo  $a < b$ , traça-se o diâmetro de uma semicircunferência medindo  $a+b$ . É imediato que a localização do centro dessa semicircunferência é o ponto médio do diâmetro, ou seja, o raio mede justamente a média aritmética de  $a$  e  $b$ .

Figura 4.55 – Média aritmética e geométrica utilizando uma semicircunferência

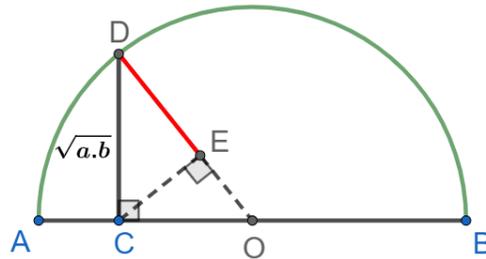


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Denominando  $AB$  o diâmetro da semicircunferência e  $O$  o centro, marca-se o ponto  $C$  em  $AB$  cuja distância de  $AC$  mede  $a$  e o ponto  $D$  é o encontro da semicircunferência com a reta

ortogonal partindo de  $C$  no segmento  $AB$ . Daí,  $OD$  mede  $\frac{a+b}{2}$  e  $OC$  mede  $\frac{b-a}{2}$ , donde segue pelo Teorema de Pitágoras que  $CD$  tem medida  $\sqrt{a \cdot b}$ , ou seja, a média geométrica de  $a$  e  $b$ .

Figura 4.56 – Média harmônica utilizando uma semicircunferência



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Agora, traçando a altura do triângulo  $OCD$  em relação ao lado  $OD$  e chamando o pé dessa altura de  $E$ , tem-se por  $OCD$  ser um triângulo retângulo que  $OCD$  e  $CED$  são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} \implies \overline{ED} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{DO}}.$$

Donde conclui-se

$$\overline{ED} = \frac{(\sqrt{a \cdot b})^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

É interessante notar que ao utilizar essa interpretação pode-se concluir a desigualdade dessas médias. Pois  $OCD$  é um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede a média aritmética e um dos catetos mede a média geométrica, logo a média aritmética é maior que a média geométrica. De forma análoga, no triângulo  $CDE$  conclui-se que a média geométrica é maior que a média harmônica. Assim,

$$\text{média aritmética} > \text{média geométrica} > \text{média harmônica}.$$

#### 4.4.1.2 Interpretação das médias utilizando retângulo e quadrado

Figura 4.57 – Retângulo de lados medindo  $a$  e  $b$  e quadrado de lados medindo  $x$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Considere um retângulo de lados medindo  $a$  e  $b$  (Figura 4.57). Caso se construa uma quadrado preservando a soma dos lados desse retângulo, isto é, o perímetro, obtem-se que o lado  $x$  desse quadrado mede a média aritmética de  $a$  e  $b$ . Pois,

$$2(a + b) = 4x \implies x = \frac{a + b}{2}.$$

Quando a construção do quadrado preserva o produto de  $a$  por  $b$ , ou seja, a área do retângulo, então o lado  $x$  terá medida igual à média geométrica de  $a$  e  $b$ . Isso ocorre porque,

$$a \cdot b = x^2 \implies x = \sqrt{a \cdot b}.$$

Quando a construção do quadrado preserva a medida da diagonal do retângulo, então o lado  $x$  medirá a média quadrática de  $a$  e  $b$ . Já que,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2} \implies x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Por último, quando a construção do quadro preserva a proporção entre área e perímetro do retângulo, então o lado  $x$  medirá a média harmônica de  $a$  e  $b$ . Neste caso, tem-se

$$\frac{a \cdot b}{2(a + b)} = \frac{x^2}{4x} = \frac{x}{4} \implies x = \frac{2ab}{a + b}.$$

É possível estender esses resultados geométricos para três dimensões, neste caso parte-se de um paralelepípedo em busca da construção de um cubo cuja aresta irá depender da média referente a grandeza preservada. Em Azevedo (2023) há mais informações a respeito.

#### 4.4.2 Probabilidade Geométrica

A probabilidade geométrica quase não é mencionada nos livros didáticos do ensino básico. Ela na verdade é um caso particular da probabilidade, onde os espaços amostrais e eventos se detém a grandezas de comprimento, área ou volume. Lembrando que a probabilidade de um determinado evento é dada pela razão entre a quantidade casos do evento acontecer pela quantidade de casos possíveis do espaço amostral.

Um exemplo no qual o espaço amostral está relacionado a grandeza comprimento é quando dados um segmento  $AB$  e outro  $XY$ , com  $X$  e  $Y$  pertencentes ao segmento  $AB$ , deseja-se calcular a probabilidade de escolher um ponto aleatoriamente no segmento  $AB$  que também esteja em  $XY$ . Dessa forma, a probabilidade desse evento acontecer é dada por

$$P = \frac{\text{Comprimento do segmento } XY}{\text{Comprimento do segmento } AB}.$$

Figura 4.58 – Probabilidade envolvendo a grandeza comprimento

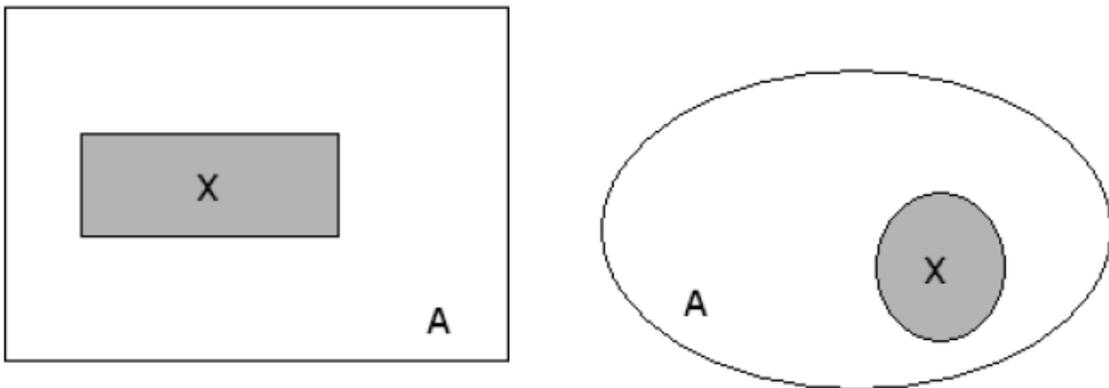


Fonte: Gondim (2013, p. 14).

Ao tratar-se de áreas, supondo que o espaço amostral seja representado pela área de uma região A e os casos favoráveis para um determinado evento acontecer seja dado pela área da região x, a qual está contida em A. Portanto, a probabilidade desse evento pode ser expressa por

$$P = \frac{\text{Área da região } X}{\text{Área da região } A}.$$

Figura 4.59 – Probabilidade envolvendo a grandeza área

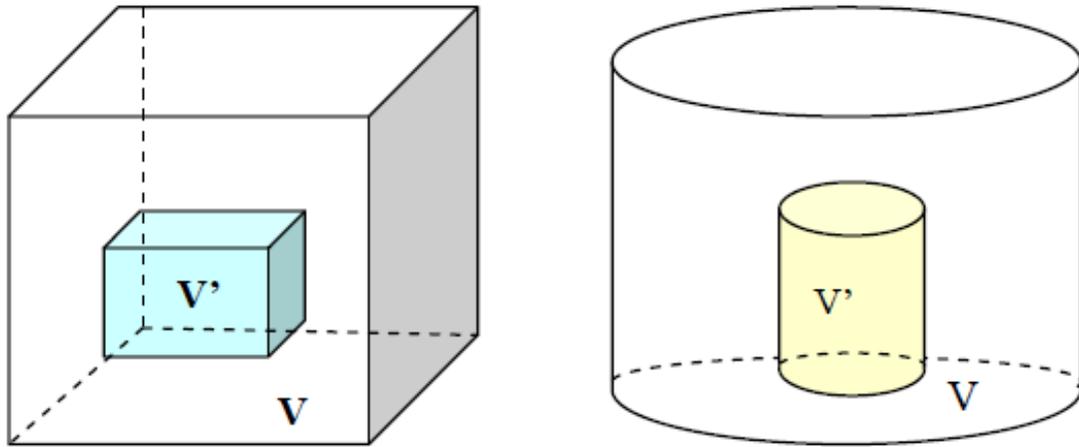


Fonte: Gondim (2013, p. 15).

Por último, quando o espaço amostral é representado pelo volume de um corpo V e os casos favoráveis de um evento estão contidos no volume de um corpo V' que, por sua vez, está dentro de V, então a probabilidade desse evento ocorrer é

$$P = \frac{\text{Volume do copor } V'}{\text{Volume do corpo } V}.$$

Figura 4.60 – Probabilidade envolvendo a grandeza volume



Fonte: Gondim (2013, p. 17).

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho observou-se que o avanço do conhecimento matemático ao longo da história frequentemente germinou de atividades práticas, concretas e a partir de elementos pictóricos. A priori, essas atividades estavam ligadas a necessidade de atender às demandas do comércio e da produção alimentar. Contudo, os estudos de natureza física, especialmente os cinestésicos, desempenharam um papel crucial. Esses estudos não apenas buscavam satisfazer a curiosidade humana em encontrar padrões e estabelecer relações entre grandezas físicas, mas também tinham o objetivo de impulsionar as indústrias e fortalecer o poderio armamentista.

Ademais, a propensão para o raciocínio abstrato na matemática foi evidenciada desde cedo, particularmente a partir da geometria, com a publicação de Euclides. No entanto, a introdução da linguagem simbólica, motivada por Viète, representou um marco significativo na produção de conhecimento. Essa linguagem não apenas facilitou a disseminação das ideias, mas também destacou a capacidade da matemática para abstração e generalização. Com o tempo, essa linguagem foi se refinando cada vez mais, consolidando sua hegemonia junto à Teoria dos Conjuntos. Essa teoria possibilitou não apenas a remodelagem de todo o conhecimento matemático produzido, mas também suscitou uma ruptura definitiva entre as pesquisas em matemática e os conhecimentos práticos, pictóricos ou físicos.

No entanto, a geometria e os elementos pictóricos ao longo da história foram a base para maioria dos objetos matemáticos a qual se deseja que os alunos ao concluir o ensino básico possuam. Apesar de se enfatizar a visão algébrica e a linguagem simbólica no ensino matemática, não só a história mostra que para construir esses conhecimentos a geometria e os elementos pictóricos são importantes, mas também alguns teorias de ensino-aprendizagem da matemática congregam com essa ideia.

Por exemplo, a teoria das abordagens semióticas de Duval afirma que tanto a linguagem algébrica e simbólica da matemática quanto as representações geométricas e pictóricas são representações semióticas que desempenham um papel crucial na compreensão e no desenvolvimento da atividade matemática pelo indivíduo. Ademais, essa teoria destaca que os conceitos matemáticos são melhor compreendidos quando o sujeito é capaz de transitar entre diferentes registros semióticos, demonstrando não apenas habilidade para interpretar esses registros, mas também para produzi-los em diversas formas.

Por outro lado, a teoria de *Image Schemata* de Dorfler, se concentra na análise do papel das diversas representações visuais ou concretas na compreensão matemática além da linguagem formal e simbólica, onde estas servem para o sujeito projetarem internamente seus "esquemas de imagem", implicando na construção de significado por parte deste e ocor-

rendo aprendizagem. Isso tudo permeado por orientação do professor e iterações individuais e sociais com essas representações.

Enquanto as teorias de Dorfler e Duval reconhecem a complementaridade entre a linguagem algébrica e simbólica e os elementos pictóricos e concretos na compreensão dos conceitos matemáticos, a abordagem de Van Hiele, especialmente direcionada para a geometria, hierarquiza os níveis de pensamento, seguindo uma lógica que remete à história da matemática. Nessa hierarquia, a linguagem formal é considerada um estágio final e superior em relação às representações concretas e pictóricas. No entanto, é essencial passar por essas representações para alcançar esse nível superior. Ainda assim, essa teoria também enfatiza a importância de adotar uma abordagem matemática que integre elementos pictóricos e concretos para uma compreensão completa e formal da matemática.

Assim, a integração de uma abordagem matemática pictórica e geométrica ao ensino-aprendizagem de certos conceitos matemáticos, indo além da abordagem algébrica e simbólica, encontra justificativa não apenas na evolução histórica da matemática, mas também nas ideias fornecidas pelas referidas teorias de aprendizagem. Em consequência disso, advêm as propostas de abordagens tratadas no último capítulo.

Foi seguida a divisão estabelecida pela BNCC para os objetos de estudo da matemática. Propôs-se trabalhar a unidade temática "Números" explorando as representações pictóricas da geometria, como retângulos e quadrados, para representar quantidades e realizar operações com números naturais e frações. Onde conceito de áreas congruentes é fortemente utilizado, juntamente com o raciocínio de quantificar, medir e representar quantidades. Além disso, essa representação para números naturais possibilita o estudo numa perspectiva geométrica do MDC e do MMC.

No que diz respeito à unidade temática "Álgebra", é válido revisitar a história da matemática para explorar as representações geométricas juntamente com as notações simbólicas e algébricas. Isso inclui também a associação dos algoritmos de resolução de equações a manipulações geométricas.

Na unidade temática "Geometria", é fundamental não se restringir apenas à notação simbólica e aos raciocínios puramente algébricos ou de cálculos de área e volume. É necessário explorar as propriedades geométricas, como paralelismo, perpendicularidade, proporção, simetria e conservação de área, entre outras. Além das várias demonstrações do Teorema de Pitágoras e suas expansões, as "provas sem palavras" são especialmente interessantes, pois estimulam o pensamento geométrico e o uso das propriedades geométricas, facilitando também a transição entre diferentes representações e demonstrações matemáticas.

Por último, mas não menos importante, na unidade temática "Probabilidade e Estatística", é viável explorar a matemática pictórica para além dos gráficos frequentemente utilizados na

estatística. Nas representações gráficas, as proporções das figuras desempenham um papel fundamental na transmissão coerente das informações contidas ali. Contudo, como visto, há a possibilidade de trabalhar a ideia de médias conservando certa característica e isto pode ser associado há certas grandezas, como comprimento e área. Além disso, no campo da Probabilidade, há também a oportunidade de explorar essas mesmas grandezas, bem como a de volume.

Além das abordagens já discutidas, há uma ampla gama de possibilidades para explorar a matemática de forma pictórica e geométrica. Essas possibilidades abrangem desde elementos mais tangíveis e concretos até os mais abstratos, que podem ser visualizados de forma mais prática por meio de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra. É importante destacar também o potencial da abordagem pictórica e geométrica na gamificação, na resolução de problemas e na investigação matemática, os quais podem ser integrados às atividades didáticas, aos softwares e aos sites da internet, proporcionando uma nova dimensão de interatividade ao ensino e aprendizado da matemática.

## REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, A.N. **Média ponderada: interpretação geométrica e relações com outras médias**. Orientador: Alejandro Caicedo Roque. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - UFSE. São Cristovão, 2023. Disponível em:  
[https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/18050/2/ALIKSON\\_NASCIMENTO\\_AZEVEDO.pdf](https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/18050/2/ALIKSON_NASCIMENTO_AZEVEDO.pdf). Acesso em: 18 mar. 2024.
- BRASIL, M.E. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- CARDOSO, M.L.; GONÇALVES, O.A. **Uma interpretação geométrica do MMC**. Revista do Professor de Matemática, c2023. Disponível em:  
<https://rpm.org.br/cdrpm/32/5.htm>. Acesso em: 10 set. 2023.
- DORFLER, W. **Meaning: Image Schemata and protocols**. 1991.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. São Paulo: Editora da Unicamp. 2011.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP. 2009.
- GONDIM, H.F. **Probabilidade e Probabilidade Geométrica: Conceitos e exemplos aplicáveis no Ensino Básico**. Orientador: Jair da Silva. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - UFMS. Campo Grande, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/2243>. Acesso em: 14 mar. 2024.
- LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?**. Educação Matemática em Revista, SBEM, n. 4, p. 3-13, 1995.
- MIORIM, M. Â. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual. 1998.
- NELSEN, R.B. **Proofs Without Words - Exercices in Visual Thinking**. MAA, 1993.
- OLIVEIRA, Z.C. **Uma interpretação geométrica do MDC**. Revista do Professor de Matemática, c2023. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/29/5.htm>. Acesso em: 10 set. 2023.

- OLIVEIRA, M.C. **Florestas racionais e círculos tangenciais**. Orientador: Samuel Antônio de Sousa Dias Lopes. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - FCUP. Campo Alegre, 2014. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/78286/2/34265.pdf>. Acesso em: 26 mar. 2024.
- PAVANELLO, R.M. **O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica**. Orientador: Lafayette de Moraes. Dissertação (Mestrado em Educação) - Univesidade Estadual de Campinas. Campinas, 1989. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/Acervo/Detailhe/45263>. Acesso em: 04 jan. 2024.
- POLEZZI, M. **Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas?**. Revista do Professor de Matemática, c2024. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/51/6.htm>. Acesso em: 30 mar. 2024.
- ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zaha, 2012.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- SARAIVA, M.J.F.S. **Raciocínio visual: Parente pobre do raciocínio matemático?**. Educação e Matemática, Lisboa, n. 21, p. 3–5, 31 mar. 1992.
- SILVA, J.E.B. **Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações**. Orientador: Ermínia de Lourdes Campello Fanti. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Unesp. São José do Rio Preto, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/a75ab8e8-7c43-43f9-b280-050abc478d2a>. Acesso em: 10 out. 2023.
- TOU, E. **Measuring the Accuracy of an Ancient Area Formula**. SIAS Faculty Publications. 2014. Disponível em: [https://digitalcommons.tacoma.uw.edu/ias\\_pub/848](https://digitalcommons.tacoma.uw.edu/ias_pub/848). Acesso em: 01 de jun. 2024.
- TULANA, N. **Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos**. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, 1995. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/20/5.htm>. Acesso em: 20 out. 2023.
- VALENTE, W.R. (Org). **O nascimento da matemática do ginásio**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.
- WILLSON, W.W.; WILSON, G.L. **An ancient Egyptian approximation**. The Mathematical Gazette, 1991. p. 89-90.