UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCINALDO DOMINGOS PEREIRA

ATIVIDADES DE EXPLORAÇÕES MATEMÁTICAS UTILIZANDO MATEMÁGICAS COM BARALHO NO ENSINO DA ÁLGEBRA E DA ARITMÉTICA

CAMPINA GRANDE
2024

FRANCINALDO DOMINGOS PEREIRA

ATIVIDADES DE EXPLORAÇÕES MATEMÁTICAS UTILIZANDO MATEMÁGICAS COM BARALHO NO ENSINO DA ÁLGEBRA E DA ARITMÉTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva

CAMPINA GRANDE
2024

P436a Pereira, Francinaldo Domingos.

Atividades de explorações matemáticas utilizando matemágicas com baralho no ensino da álgebra e da aritmética [manuscrito] / Francinaldo Domingos Pereira. - 2024.

194 p. : il. colorido.

Digitado. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024. "Orientação : Profa. Dra. Maria Isabelle Silva, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Exploração matemática. 2. Baralho. 3. Situação-problema. 4. Matemágica. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Lêda C. D. Andrade - CRB - 15/1032 BC/UEPB

FRANCINALDO DOMINGOS PEREIRA

ATIVIDADES DE EXPLORAÇÕES MATEMÁTICAS UTILIZANDO MATEMÁGICAS COM BARALHO NO ENSINO DA ÁLGEBRA E DA ARITMÉTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 16/08/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
MARIA ISABELLE SILVA
Data: 20/09/2024 15:46:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Maria Isabelle Silva (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Documento assinado digitalmente
LUCIANA ROZE DE FREITAS
Data: 20/09/2024 16:09:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Documento assinado digitalmente
CLAUDILENE GOMES DA COSTA
Data: 20/09/2024 15:27:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa (Membro externo)
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, o qual me abençoa todos os dias com todo seu poder e gloria. Dedico também a minha esposa e filhos, o amor que plantamos e construímos juntos fortalece nossas vidas diariamente, serei eternamente grato.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar o discernimento e capacidade mais que suficiente para alcançar meus objetivos de vida e finalizar este TCC com sucesso. "O temor do Senhor é o princípio da sabedoria"(Provérbios 9:10).

Em seguida, agradeço a minha amorosa esposa, Rita de Cassia Gomes Alves, por estar sempre presente ao meu lado nos momentos bons e também nos momentos de dificuldades e noites de estudos em claro.

Agradeço aos meus filhos, Davi Lucca Gomes Domingos e Maria Liz Gomes Domingos, os quais foram o meu combustível de amor, carinho e perseverança nesta caminhada de estudos até finalizar com chave de ouro o PROFMAT. Agradeço aos meus pais, por me ensinarem os princípios de um homem de bem e pelo suporte e educação fornecidos ao longo da vida.

Gostaria de agradecer também a todos os alunos da Escola Dom Adauto que participaram e se dedicaram ativamente de forma brilhante no decorrer das atividades propostas; os quais foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ainda a todos os colegas de classe do PROFMAT (Ulisses, Paulo, Thiago, Emanuel Carlos, Railson, Gerivaldo, Emanuel Hudson, Edmílson), em Especial a Emerson Souza Silva pelo compartilhamento dos seus conhecimentos ao longo desta trajetória e ao já professor Mestre Bruno Aldo de Oliveira, o qual juntos nos debruçávamos a estudar os conteúdos das disciplinas do PROFMAT nos horários vagos, presencialmente ou remotamente.

Agradeço a Professora Doutora Maria Isabelle Silva Dias Yanes, Orientadora deste TCC, pela sua compreensão, desenvoltura e empenho, assim como a todos os professores do PROFMAT, que contribuíram de alguma forma em minha formação acadêmica.

Gostaria de agradecer a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - (CAPES), a Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e a Universidade Estadual da Paraíba - UEPB pela oportunidade em ingressar e concluir o PROFMAT. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Quero por fim agradecer aos professores que fizeram parte da banca avaliadora deste TCC, por terem aceitado o convite. Desde já, fico grato pelos esforços de cada um em poder participar e contribuir para minha formação.

O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis."

(José de Alencar)

RESUMO

A ideia central desta dissertação foi tentar suprir as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da Matemática através de atividades de exploração matemática unidas a uma dinâmica de ensino por meio de mágicas matemáticas, denominadas de Matemágicas, com a finalidade de despertar nos alunos um maior interesse, participação e aproveitamento em sala de aula, além de contribuir para a melhoria da aprendizagem em matemática estimulando o raciocínio lógico e matemático e a capacidade de resolver problemas. O objetivo geral desta pesquisa foi propor uma sequência didática por meio de Matemágicas com a utilização de um baralho comum, desvendando o truque matemático em cada uma delas para resolver com os alunos atividades de explorações matemáticas evidenciando o conteúdo abordado de modo compreensivo, numa turma do Ciclo VI - EJA do Ensino Médio com o intuito de gerar nos alunos uma melhor compreensão e absorção do conhecimento. As Matemágicas com baralho trabalhadas na pesquisa foram expostas aos alunos, assim como os truques por trás de cada uma delas foram desvendados e explicados evidenciando e detalhando os conteúdos e habilidades matemáticas predominantes em cada Matemágica. Para explicar e desvendar cada truque foram utilizados conteúdos envolvendo álgebra básica e aritmética. A metodologia desenvolvida nas atividades propostas aos alunos teve um caráter qualitativo e quantitativo foi desenvolvida por intermédio de resolução de situações-problemas e demonstrações matemáticas simples que auxiliaram os alunos a obterem os resultados esperados na pesquisa. Essa pesquisa foi realizada no período de outubro a dezembro de 2023, na Escola Cidadã Integral Estadual de Ensino Fundamental e Médio Dom Adauto, localizada no município de Serra Redonda–PB. Os resultados da pesquisa mostraram a eficácia na melhoria da compreensão dos alunos em relação aos conteúdos abordados, com destaque para o ensino através de explorações matemáticas e da Matemágica.

Palavras-chave: exploração matemática; baralho; situação-problema; matemágica.

ABSTRACT

The central idea of this dissertation was to try to overcome the difficulties presented by students in learning mathematics through mathematical exploration activities combined with teaching dynamics through mathematical magic, called Matemagics, with the aim of arousing greater interest, participation and enjoyment in the classroom, as well as contributing to the improvement of learning in mathematics by stimulating logical and mathematical reasoning and the ability to solve problems. The general objective of this of this research was to propose a didactic sequence through Matemagics using a common deck of cards, unveiling the mathematical trick in each of them to solve mathematical exploration activities with the students, highlighting the content covered in a comprehensive way, in a Cycle VI - EJA high school class with the aim of generating a better understanding and absorption of knowledge in the students. The matemagics with playing deck Worked in the research were Exposed to the students as well as the tricks behind each one were explained, highlighting and detailing the predominant mathematical content and skills in each matemagic. Contents involving basic algebra and arithmetic were used to explain and unravel each trick. The methodology developed in the activities proposed to the students was qualitative character and was developed by solving problem-situations and simple mathematical demonstrations that helped the students to obtain the results expected in the research. This research was carried out between October and December 2023, at the Dom Adauto State Comprehensive Citizen School for Primary and Secondary Education, located in the municipality of Serra Redonda-PB. The results of the research showed the effectiveness of improving students understanding of the content covered, with emphasis on teaching through mathematical explorations and Matemagic.

Keywords: mathematical exploration; deck; problem-situation; matemagic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A metodologia tradicional ainda utilizada hoje em dia no ensino da matemática por inúmeros professores é um dos fatores que acarretam no deficit de aprendizagem dos alunos na disciplina de matemática. Trata-se de uma metodologia que aborda os conteúdos de forma mecânica, linear e fragmentada e que não surti um efeito positivo levando a maioria dos alunos a não gostarem de Matemática ou a terem a disciplina como muito complexa. Em contrapartida, os Parâmetros Curriculares Nacionais em Matemática, Brasil (1997), afirmam que o professor deve conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula, pois é fundamental para a construção de sua prática docente.

Sendo assim, utilizar novos métodos no ensino da Matemática é hoje algo essencial para o bom desempenho dos alunos. O professor deve buscar novos caminhos para uma metodologia inovadora que proporcione melhores resultados, tornando a Matemática mais atrativa e de melhor compreensão. Nicola e Paniz (2017) afirmam que a inserção de todo e quaisquer recursos ou métodos diferentes dos habituais utilizados pelo professor são de grande valia, servindo como apoio às aulas. Cunha e Silva (2012) reitera que o lúdico auxilia o professor a superar dificuldades que em sua maioria não são possíveis em aulas tradicionais e possibilita uma diversidade de alternativas na aplicação dos conteúdos trabalhados em sala de aula.

Neste sentido, buscamos nessa pesquisa trabalhar com uma metodologia bastante inovadora, mas ainda pouco utilizada nas aulas de matemática. Trata-se de atividades lúdicas através de mágicas, denominadas de Matemágicas, as quais utilizam truques matemáticos, abordando os mais variados conteúdos na área da álgebra e aritmética com o intuito de despertar o interesse do aluno pelo estudo da matemática e contribuir para a melhoria da aprendizagem matemática. Gardner (2020) define a "**Matemágica**"como a interseção entre matemática e mágica, onde truques e ilusões são baseados em princípios matemáticos. Ele acreditava que a Matemágica poderia ser uma ferramenta poderosa para despertar o interesse das pessoas pela matemática, tornando conceitos abstratos mais acessíveis e divertidos, revelando padrões matemáticos e lógicos.

Lopes, Dantas e Melo (2016) afirmam que a mágica é um meio de estimular o aluno na busca do mistério que está por trás do truque, nesse caso o conhecimento matemático envolvido para justificar o truque, tornando a matemática interessante e divertida. Para Kegler, Fajardo e Feltrin (2012, p.2) as Matemágicas são importantes recursos metodológicos para aprendizagem matemática, uma vez que o truque matemático pode instigar os alunos a analisar e refletir um determinado conteúdo, levando-os a pensar com outra visão e a serem desafiados a reproduzir e investigar como e porquê o truque matemático funciona.

A cada Matemágica trabalhada na pesquisa aplicamos em paralelo uma exploração matemática com o intuito dos alunos desenvolverem habilidades necessárias para compreender os conteúdos abordados por trás dos truques. A junção destes dois métodos auxilia no processo de ensino-aprendizagem da matemática, estimulando a colaboração e interação em grupo, desenvolvendo o raciocínio lógico e possibilitando uma aprendizagem de forma divertida. Para Ponte (2010), tarefas exploratórias e investigativas adequadas criam oportunidades para o envolvimento dos alunos nas aulas de Matemática. No decorrer das atividades propostas trabalhou-se ainda com outras metodologias (situações-problemas, demonstrações matemáticas, pré-teste e pós-teste) auxiliadoras no processo de obtenção do sucesso nos resultados almejados.

As situações-problemas foram trabalhadas no intuito de observar o aspecto qualitativo de nossa pesquisa. Para Dante (2003, p.20) situações-problemas são atividades de aplicação que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos através de conceitos, técnicas e procedimentos organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc.

Os resultados das demonstrações matemáticas serviram para auxiliar alguns conteúdos matemáticos utilizados em nossa pesquisa. Almouloud, Silva e Fusco (2012, p. 25) relatam que as demonstrações matemáticas realizam um papel importante segundo a comunidade matemática em geral, visto que validam propriedades matemáticas garantindo a utilização destas propriedades em diversos outros conteúdos relacionados.

Foram aplicados pré-testes e pós-testes afim de observar o aspecto quantitativo de nossa pesquisa. Araújo *et al* (2019) afirmam que o uso de questões de pré-teste e pós-teste é uma metodologia bastante utilizada, trata-se de um recurso de aprendizagem muito eficaz, visto que compara a qualidade do aprendizado dos alunos após a aplicação das aulas, aumentando o seu rendimento.

O objetivo deste trabalho foi propor uma sequência didática aos alunos por meio de tarefas de explorações matemáticas afim de desvendar o truque por traz de cada matemágica apresentada, evidenciando os conteúdos e conceitos matemáticos envolvidos. Esta pesquisa foi organizada composta pelos tópicos a seguir: Importância da resolução de problemas matemáticos para a aprendizagem, os diferentes tipos de tarefas para a aula de Matemática, a Matemágica como atividade lúdica no ensino da Matemática. Posteriormente explicitamos a descrição das Matemágicas apresentadas e cronograma das atividades realizadas, logo após realizamos a análise das atividades trabalhadas (situações-problemas, pré-testes, explorações matemáticas e pós-testes) e finalizamos com as considerações finais.

2 OS DIFERENTES TIPOS DE TAREFA PARA A AULA DE MATEMÁTICA

No ensino da Matemática há uma grande quantidade de atividades diversificadas que podem auxiliar no processo de ensino aprendizagem trazendo benefícios educacionais contundentes para os alunos. Segundo Ponte (2005), no momento que o aluno está desenvolvendo uma atividade, está na verdade realizando uma tarefa. Desse modo, a tarefa é considerada o objetivo da atividade. O autor descreve que o ensino-aprendizagem da Matemática está direcionado por atividades que os alunos veem em sala de aula e, por sua vez, estas dependem das tarefas apresentadas pelo professor. Para o autor, o professor ao formular tarefas adequadas, poderá assim suscitar a atividade do aluno.

2.1 Exercícios e Problemas

Ponte (2010), afirma que os exercícios são tarefas de complexidade reduzida e com estrutura fechada, sendo assim o exercício é considerado a tarefa mais comum na disciplina de Matemática. Os problemas são tarefas fechadas e com elevado grau de complexidade, são tipos de tarefa que podem gerar atividades mais favoráveis à aprendizagem dos alunos. Um problema possui sempre um grau de dificuldade apreciável. No entanto, se o problema for dito difícil, pode levar o aluno a desistir rapidamente, ou nem sequer chegar a tentar resolvê-lo. Porém, se o problema for bastante acessível, será considerado um exercício. Desse modo, o problema deve conter um nível de complexidade médio, não pode ser relativamente fácil, mas também não pode ser muito difícil.

Para o autor, os exercícios são tarefas matemáticas que servem apenas para o aluno praticar os conhecimentos adquiridos previamente, servindo apenas com o propósito de mentalizar tais conhecimentos, através de uma série de repetição abusiva de questões bastante semelhantes. Na verdade, realizar exercícios em série não é uma atividade muito interessante, no momento em que o ensino da Matemática é apenas exposto através da resolução de exercícios, criam-se grandes problemas de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos. Isso não significa dizer que realizar exercícios não seja relevante para o ensino da Matemática, pelo contrário, os exercícios são fundamentais para o ensino-aprendizagem desde que o professor os utilize de forma correta e de maneira não abusiva utilizando em suas aulas também outros tipos de tarefas matemáticas. É importante ressaltar que o professor deve escolher cuidadosamente tais exercícios de maneira a promover a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos.

Uma das características fundamentais dos problemas e dos exercícios, segundo o autor, é que no enunciado da tarefa em questão é sempre dito o que é pedido e também contém os dados para sua resolução. Quando uma tarefa matemática foge completamente da realidade e do cotidiano dos alunos contendo um contexto extra matemático, não implica dizer que a tarefa é um exercício ou um problema. O essencial para diferenciar um problema de um exercício é saber se os alunos possuem ou não um processo imediato para resolver a tarefa. Caso o aluno conheça e seja capaz de utilizar os conhecimentos para desenvolver a resolução, trata-se então de um exercício. Do contrário a tarefa será definida como um problema.

2.2 Exploração e Investigação

As explorações são tarefas abertas, embora com um nível de complexidade baixo. O que diferencia uma tarefa de exploração e uma tarefa de investigação é exatamente o nível de complexidade, ou seja, o grau de desafio. Se no decorrer da tarefa, o aluno ao começar a trabalhar, demonstrar um bom nível de compreensão, trata-se então de uma tarefa de exploração. Caso contrário, será uma tarefa de investigação. Em contrapartida não se pode distinguir a princípio uma tarefa de exploração de uma tarefa de investigação, sem antes conhecer o grau de complexidade e as dificuldades que uma turma pode apresentar ao trabalhar com uma tarefa aberta. Uma das características fundamentais das explorações e das investigações é que no seu enunciado não é dito o que é pedido e não contém os dados da tarefa.

Entre uma tarefa de exploração e um exercício leva-se em consideração o seu enunciado, visto que um mesmo enunciado pode corresponder a uma tarefa de exploração ou a um exercício, dependendo exclusivamente dos conhecimentos prévios dos alunos.

As investigações têm um grau de complexidade elevado e uma estrutura aberta. Um caso particular da Investigação Matemática é o projeto de investigação. Tanto os projetos como as investigações comportam um caráter aberto. A principal diferença entre as características do projeto de investigação e a tarefa de investigação é o tempo que uma demora em ser finalizado. O projeto pode demorar anos para sua conclusão e as tarefas de investigações demoram pouquíssimo tempo, podendo ser realizadas em uma ou poucas aulas.

Para realizar uma Investigação Matemática é preciso que o professor defina a ideia central da tarefa. Uma vez definida, o objetivo a ser alcançado deve ter um grau de dificuldade considerável visando à procura da metodologia de trabalho, a superação das dificuldades, a organização e análise do material recolhido, as conclusões, etc.

Ponte (2010) afirma que investigar consiste em procurar compreender algo de modo aprofundado, tentar encontrar soluções adequadas para os problemas com que nos deparamos. Seguindo esse enfoque, as características de uma Investigação Matemática envolvem fatores como: a formulação de questões, a qual evolui à medida que o trabalho avança; a produção, a análise e o refinamento de conjecturas sobre essas mesmas questões e a demonstração e comunicação dos resultados. Amado, Amaral e Carreira (2009) salientam isto afirmando que, assim como os problemas, as investigações são contextos privilegiados para desenvolver no aluno o raciocínio matemático na medida em que as investigações promovem experiências de aprendizagem com inúmeras oportunidades para explicar e justificar ideias e resoluções, assim como também para formular, testar e provar conjecturas.

Um dos fatores que diferenciam a importância entre as investigações e explorações matemáticas dos problemas e exercícios, é que as explorações e investigações promovem o envolvimento dos alunos, ocorrendo uma participação ativa desde a primeira fase do processo até a formulação das questões a resolver.

2.3 Resolução de problemas matemáticos na aprendizagem

A aprendizagem da Matemática no ambiente escolar tem sido algo desafiador para os professores ao longo dos tempos. Os resultados obtidos em avaliações nacionais como o ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, o SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica, entre outros, nas questões voltadas para conteúdos matemáticos tem sido algo preocupante e nos mostrado uma aprendizagem insatisfatória na disciplina de matemática. Isso se deve a grande dificuldade que os alunos possuem em ler, interpretar e resolver problemas no decorrer das aulas de Matemática.

Para superar esse problema educacional, novas metodologias de ensino podem fazer com que o conhecimento matemático seja mais eficaz suprindo esse ponto de vista negativo do ensino da matemática. Uma dessas metodologias é a resolução de problemas, a qual vem se tornando ao longo do tempo uma estratégia importante para o desenvolvimento intelectual do aluno. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, BRASIL (1998, p.112) " a resolução de problemas é peça central para o ensino da Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios". Segundo Amado, Amaral e Carreira (2009), "a resolução de problemas matemáticos constitui um grande objetivo quando diz respeito à aprendizagem matemática sendo uma ferramenta muito importante para que alunos aprendam matemática".

Por outro lado, Medeiros (2001, p.1), afirma que "problemas matemáticos são fundamentais no desenvolvimento da Matemática, mas em sala de aula, são trabalhados como exercícios repetitivos, resolvidos por meio de procedimentos padronizados, previsíveis por aluno e professor". Uma parcela de culpa para este problema se deve talvez por conta de um acervo pouco numeroso de livros de Matemática onde o modo como os problemas são introduzidos em sala de aula se enquadram como exercícios meramente repetitivos, os quais servem apenas para levar o aluno a um trabalho mecânico de procedimentos semelhantes entre um exercício e outro e também a resolverem problemas sem que haja envolvimento ou interpretação.

Segundo Amado, Amaral e Carreira (2009) "a resolução de problemas além de constituir um objetivo da aprendizagem matemática, também é um importante meio pelo qual os alunos aprendem Matemática". No entanto, um problema matemático só se torna uma ferramenta que proporciona o aluno a refletir e pensar naquilo que o professor propõe em sala de aula a partir do momento que o professor organiza sua aula. Tal resolução deve ser realizada por métodos eficazes que favoreçam a aprendizagem do aluno.

Quando o professor põe em prática o que foi planejado previamente para se trabalhar com a resolução de problemas, ele deve fazer com que o aluno possa realizar sozinho suas atividades ocorrendo uma ação por parte do aluno em adquirir o seu conhecimento e refletindo sobre aquilo que está em discussão no problema proposto de tal maneira que ele saiba os caminhos corretos a serem tomados no decorrer do problema. É importante ressaltar que deve existir comunicação entre aluno e professor para que o aluno possa compreender, através de uma interação satisfatória, os conteúdos no decorrer da atividade. O professor deve orientar na medida do possível o melhor a ser feito. Essa interação é muito importante no processo de aprendizagem do aluno. Segundo Ponte (1992), as atividades fundamentais em que se desenvolve o saber matemático são a ação e a reflexão. A ação tem a ver com a manipulação de objetos e, muito especialmente, de representações. A reflexão consiste no pensar sobre a ação, e é estimulada pelo esforço de explicação e pela discussão (daí a importância da comunicação e da interação).

2.3.1 Problemas abertos e Problemas fechados

Medeiros e Silva (2001) analisa a maneira como as atividades de resolução de problemas matemáticos são tratados didaticamente em sala de aula pelo professor e pelo aluno e os classifica em dois tipos de problemas; os *problemas fechados*, os quais limitam a criatividade do aluno pois sua resolução é dada por meio de aplicação repetitiva de algoritmos onde todos os dados necessários para sua resolução estão no enunciado do problema, enunciado o qual foge totalmente da realidade cotidiana dos alunos e as soluções do problema são de um nível de complexidade fácil; e os *problemas abertos* os quais são caracterizados por não terem nada a ver com os conteúdos tratados anteriormente em sala de aula, por apresentarem enunciados curtos que estão no contexto e na realidade vivida pelos alunos provocando-os a refletir e solucionar o problema utilizando o raciocínio lógico incentivando sua criatividade e por possuírem uma ou mais soluções. Schoenfeld (1996) ressalva isto em seu contexto dizendo que prefere problemas que possam ser resolvidos e abordados por diversos caminhos levando o aluno a observar suas múltiplas soluções e relata ainda que os problemas abertos são uma maneira de levar os alunos a fazer Matemática. Em contrapartida, nos problemas fechados o aluno torna-se dependente de uma memorização de conhecimentos aprendendo por reprodução e resolvendo diversos problemas semelhantes e de estratégias idênticas as dos conteúdos anteriores.

A grande diferença de resolução entre problemas fechados e abertos é que nos problemas abertos o professor constrói o problema, tendo em vista provocar situações para que os alunos possam superá-las durante o decorrer do problema. O professor nesse tipo de problema participa como um orientador de modo a facilitar os caminhos a serem seguidos e no final de tal problema é feita uma análise e síntese da atividade juntamente com os alunos. Já no problema fechado, o professor apenas passa uma série de exercícios variados e repetitivos usando apenas aulas expositivas.

2.3.2 O que é uma situação-problema?

Almouloud (2009) define uma situação-problema como sendo uma escolha de questões, sejam elas abertas ou fechadas, em situações matemáticas que utilizem problemas relacionados a um ou mais domínios de saberes e de conhecimentos. Durante a resolução de uma situação-problema são levantadas questões impostas pelos alunos, o que ocorre devido à utilização implícita e explícita de novos objetos matemáticos.

Durante a construção de uma situação-problema o professor deve considerar as seguintes características: Se os alunos compreendem os dados do problema e se eles possuem conhecimentos prévios necessários para resolução e construção do problema, desde que esses conhecimentos sejam insuficientes para a resolução imediata do problema o qual pode envolver vários domínios de conhecimentos: álgebra, geometria, domínio numérico etc.

Almouloud (2009) afirma que as situações-problema que os alunos irão explorar devem ser trabalhadas de maneira que estejam relacionadas aos conceitos referentes ao conteúdo no qual o conhecimento está inserido. Tais conhecimentos devem fornecer as ferramentas adequadas para chegar-se à solução final.

As atividades trabalhadas em uma situação-problema devem estar de acordo com as normas propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Os resultados adquiridos em pesquisas sobre o tema devem permitir aos alunos desenvolver certas competências e habilidades. Os objetivos dessas atividades são ajudar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva e significativa, desenvolver habilidades necessárias para a construção do problema e expandir o raciocínio dedutivo.

Almouloud (2009) relata ainda que o aluno deve realizar as situações-problema agindo de forma espontânea, progredindo e construindo seu próprio conhecimento a partir de atividades propostas e utilizando ferramentas necessárias para o seu cognitivo e assim poder adquirir novos conhecimentos. Desse modo, o papel do professor passa a ser o de mediador e de orientador propiciando condições para o aluno ser o principal responsável na construção de seus conhecimentos, participando apenas no auxílio de dúvidas para não prejudicar a participação do aluno no seu processo de aprendizagem. Nesse ponto de vista, as atividades devem seguir as seguintes condições: Os objetos de saber disponíveis devem ser utilizados pelos alunos como ferramenta que auxilia a resolução, pelo menos parcialmente do problema; o professor deve proporcionar ao aluno no decorrer da aula nas situações-problema uma maneira a provocar um debate entre os alunos para que eles possam analisar e debater entre si os seus resultados com o objetivo de construir e deixar de forma igual os saberes entre todos os alunos envolvidos; O professor após o debate dos alunos deve organizar de forma sucinta as descobertas realizadas pelos alunos colocando em ordem esses conhecimentos com o intuito de promover uma melhor compreensão desses novos objetos matemáticos. Deve também ser realizada uma nova etapa onde serão propostos pelo professor situações-problema com os novos conhecimentos já adquiridos pelos alunos com o objetivo de consolidá-los.

2.3.3 Análise a priori e análise a posteriori em uma situação-problema

Segundo Almouloud (2009), o objetivo de uma análise a priori é determinar antecipadamente o que o aluno pode ou não contextualizar ao resolver uma situação-problema permitindo um controle por parte do professor em relação ao sentido dos comportamentos dos alunos. No entanto, para isso é preciso que o professor descreva as escolhas feitas para o nível da turma e as características da situação didática desenvolvida. Logo após ele deve analisar a importância dessa situação para os alunos prevendo possíveis comportamentos e tentando mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido. Tais comportamentos esperados são resultados do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem, ou seja, a análise a priori permite ao professor controlar a realização das atividades dos alunos, também permite identificar e entender os fatos observados anteriormente às atividades realizadas. Desse modo, os diversos conhecimentos que aparecerão durante a atividade proposta poderão ser debatidos em sala de aula após o termino das atividades. A análise a priori de uma situação-problema é composta por uma análise matemática e uma análise didática.

Almouloud (2009) relata que na análise a posteriori o professor realiza uma análise das atividades propostas por meio das atividades realizadas pelos alunos levando em conta os principais aspectos e as informações coletadas no decorrer das atividades. Esse tipo de análise é realizado levando em consideração a interação entre aluno-aluno e aluno-professor referente à situação proposta. O professor deve estudar as possíveis modificações que podem ser feitas no estudo proposto analisando os principais resultados em relação à questão da pesquisa, às hipóteses e a metodologia adotada em relação aos resultados de outras pesquisas sobre o mesmo assunto. A análise a posteriori depende da qualidade da análise a priori.

Para Finalizarmos este capítulo sobre os diferentes tipos de tarefa para aula de matemática, Ponte (2005) salienta que cada tarefa possui um papel importante para atingir determinados objetivos curriculares. As tarefas mais acessíveis possibilitam aos alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo no desenvolvimento de sua autoconfiança. As atividades mais desafiantes são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática. As tarefas fechadas são ótimas para evoluir o raciocínio matemático dos alunos, uma vez que este raciocínio possui uma relação estrita e rigorosa com os dados e resultados da tarefa. As tarefas abertas são fundamentais para o aluno desenvolver a autonomia e a capacidade de lidar com situações complexas. A partir deste contexto enriquecedor que os diferentes tipos de tarefas matemáticas podem proporcionar ao ensino-aprendizagem da matemática, decidimos trabalhar e desenvolver com os alunos desta pesquisa, a aplicação de tarefas abertas ou fechadas contendo situações-problemas unidas a aplicação de pré-testes seguidos de pós-testes contendo problemas e exercícios e também a aplicação de diversas tarefas de explorações matemáticas. Ponte (2009, p.103) relata que as tarefas não devem ser tomadas isoladamente, sendo o conjunto das tarefas propostas fundamentais para que os objetivos de um determinado conteúdo sejam atingidos. Portanto, as tarefas propostas aos alunos devem estar relacionadas entre si e devem ser apresentadas aos alunos numa sequência coerente proporcionando um trabalho favorável para aprendizagem do aluno.

3 A MATEMÁGICA COMO ATIVIDADE LÚDICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O ensino da Matemática utilizando atividades lúdicas tem sido defendido e utilizado cada vez com maior frequência por professores que se deparam com alunos que possuem bastante dificuldades na disciplina quanto a compreensão e assimilação dos conteúdos, a falta de motivação e a ideia de que a matemática é algo muito difícil de se aprender.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC, BRASIL (2018), enfatiza a importância do ensino por meio de atividades lúdicas como uma estratégia educacional capaz de promover o engajamento e a participação dos alunos no processo de aprendizagem. Segundo a BNCC, o lúdico desempenha um papel fundamental, contribuindo para a formação integral dos estudantes e promovendo uma aprendizagem de forma prazerosa, criativa e participativa, estimulando o desenvolvimento cognitivo, emocional e social dos alunos. Deste modo, escolas e professores devem buscar e utilizar estratégias que promovam a aprendizagem de forma lúdica, considerando os interesses e as habilidades dos estudantes, conforme a BNCC.

O lúdico possui características impactantes no decorrer das atividades trabalhadas prendendo a atenção dos alunos, levando-os a possibilidade de aprender de diversas maneiras e por se tratar de algo divertido e atraente pode ser utilizado pelos professores com o intuito de provocar nos alunos uma aprendizagem mais prazerosa e significativa. Kishimot (1993), afirma que o uso do lúdico na educação é uma ferramenta que torna o ambiente mágico, oferecendo aos alunos experiências únicas e enriquecedoras.

Friedmann (2001, p.36) por sua vez acredita que:

> O jogo (atividade lúdica) é crucial para o desenvolvimento cognitivo, pois o processo de criar situações imaginárias leva ao desenvolvimento do pensamento abstrato. Isso acontece porque novos relacionamentos são criados no jogo entre significados, objetos e ações.

Sendo assim, o ensino por meio de atividades lúdicas é um intermediador do conhecimento, onde os alunos aprendem de forma divertida e descontraída, trabalhando o raciocínio lógico, o cognitivo e o senso crítico de cada um.

Com base nisso, um dos métodos lúdicos utilizados para melhoria do ensino-aprendizagem da Matemática é a utilização de mágicas em sala de aula, onde o truque é realizado por meio de uma manipulação matemática que aborda conteúdos envolvendo aritmética e álgebra em sua maioria. Estes truques são conhecidos como Matemágica, uma atividade lúdica esplêndida que quando bem desenvolvida detém todos os focos e atenções dos alunos em sala de aula.

Bento (2017) enfatiza a importância da mágica afirmando que as Matemágicas são recursos que apresentam truques matemáticos encantando alunos e professores com sua apresentação, descoberta de soluções e respostas para os desafios. Ao citar diversos autores em seu TCC - Trabalho de Conclusão de Curso - Mariotti (2019, p.25) conclui que a inclusão do lúdico em sala de aula, como mágicas e jogos por exemplo, é uma maneira de motivar os alunos a usar sua inteligência, contribuindo para facilitar a assimilação dos conteúdos apresentados e para o desenvolvimento do raciocínio além do aperfeiçoamento de habilidades de comunicação e expressão do pensamento, facilitando sua socialização com o meio em que vivem. Deste modo o aluno se sente favorecido, acolhido e participante, facilitando na obtenção do conhecimento.

A Matemágica é uma metodologia inovadora que pode ser tratada como uma estratégia de ensino onde o professor lança desafios cativantes aos alunos, levando-os a formular e contextualizar problemas e tornando a matemática uma realidade mais próxima do seu cotidiano. Essa metodologia pode ser trabalhada por meio de investigações e explorações matemáticas de alguns conteúdos e conceitos matemáticos.

Para Medeiros e Silva (2001) o professor que trabalha com Matemágica em sala de aula propicia a seus alunos a gostarem de aprender a disciplina permitindo a formulação de problemas desafiantes que os incentivem a aprender mais. Assim, quando o professor ao apresentar uma Matemágica e logo após explicar o truque, os alunos se sentem desafiados a entender aquela Matemágica e compreender o que a justifica. Daí a partir de uma aula dinâmica e lúdica bem planejada eles se tornam capazes de reproduzir o truque realizado e compreender as propriedades aritméticas e algébricas por trás do truque matemático.

3.1 Matemágicas utilizando baralho

As mágicas com cartas têm o poder de encantar o público presente, deixando as pessoas perplexas devido a sua variedade de possibilidades para a mágica acontecer desde a escolha da carta ou até mesmo a quantidade de cartas em um corte, entre outros aspectos no decorrer do truque. Em blog mágico, Ramos (2023), define mágica com cartas de baralho como um tipo divertido de apresentação artística que envolve técnicas especiais para realizar truques de mágica. É uma maneira criativa de surpreender o público, manipulando os baralhos de forma a realizar truques impressionantes.

O principal objetivo de uma mágica com cartas de baralho é divertir o público e surpreendê-lo com a manipulação das cartas. Partindo do contexto enriquecedor e eficaz que a Matemágica exerce nas aulas de Matemática quanto a fixação e compreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos, os professores de matemática podem recorrer a este ramo da Matemágica que utiliza cartas de baralho para realizar os truques. O baralho pode ser uma ferramenta poderosa na realização dos truques matemáticos instigando a curiosidade dos alunos na descoberta de como é possível a realização da Matemágica desenvolvida e a tentar desmistificar o conteúdo matemático por traz do truque, visto que há uma grande quantidade de truques de mágica realizados com cartas de baralho que utilizam propriedades e padrões matemáticos para se obter o resultado final. Fialho (2016, p.1) ao falar sobre Matemágicas com baralho, afirma que:

> Matemática e mágicas compartilham entre si uma relação de contribuição mútua, a partir da Matemática é possível criar bons truques de mágica e a partir de bons truques podemos encontrar princípios que são aplicados em Matemática avançada.

Contudo, para deixar a plateia encantada o uso de truques com cartas de baralho requer do mágico um conjunto de habilidades que podem ser aprimoradas com o passar do tempo com pratica e repetição até que ele possa aprender o truque. Em blog mágico, Ramos (2023), afirma que todo mágico de cartas necessita da habilidade manual e do conhecimento necessário sobre os principais truques de cartas para executá-los com maestria.

Afonso (2010) relata em seu blog que uma das atividades que costuma ter mais impacto na matemática recreativa é a que utiliza um baralho normal de cartas (normalmente, os truques exigem um baralho padrão com 52 cartas, dividido entre 4 naipes: paus, copas, ouros e espadas.), possibilitando a criação de cenários de magia matemática e permitindo que o mágico com ou sem experiência possa realizar estes truques. Sendo assim, tanto professores quanto alunos podem realizar as Matemágicas com baralho.

Algumas mágicas com baralho são tão bem elaboradas que confundem a mente do público levando-os por um momento a acreditar que a magia é realidade, porém são apenas truques simples e fáceis de serem reproduzidos. Afonso (2010) destaca ainda que quando um truque é bem realizado e tem um bom êxito, o público sente uma curiosidade em querer saber a causa do seu sucesso, a qual muitas vezes está atrelada a algum conteúdo matemático. Nesse intuito os truques matemáticos com baralho podem ser trabalhados em várias situações no ambiente escolar, inclusive nas aulas de matemática.

4 DESCRIÇÃO DAS MATEMÁGICAS APRESENTADAS

A nossa pesquisa foi realizada e desenvolvida na Escola Cidadã Integral Estadual de Ensino Fundamental e Médio Dom Adauto, localizada no município de Serra Redonda – PB, numa turma do Ciclo VI - EJA do Ensino Médio no turno da noite, composta por 16 alunos e consistiu em apresentar Matemágicas utilizando o baralho e aplicar uma exploração matemática para cada uma delas na intenção de desvendar o segredo dos truques realizados através do conhecimento matemático envolvido por trás de cada Matemágica. Foram realizadas um total de 15 explorações afim de evidenciar o caráter o qualitativo de nossa pesquisa.

A metodologia utilizada observou também os benefícios trazidos pela realização das Matemágicas e explorações matemáticas através da aplicação de 2 pré-testes e 2 pós-testes, assim como a realização de 3 atividades contendo situações problemas abordando os conteúdos envolvidos nas Matemágicas, enfatizando o caráter quantitativo no decorrer da pesquisa.

As atividades de nossa pesquisa foram divididas em 36 aulas, com duração de 45 minutos cada, dispostas conforme o cronograma disposto no quadro 4.1 abaixo.

Quadro 4.1 – Cronograma das atividades

Total de aulas	Atividade trabalhada
3 Aulas	Apresentação das Matemágicas.
2 Aulas	Aplicação do Pré-teste 1.
3 Aulas	Atividades de Exploração 1 e 2.
2 Aulas	Aplicação do Pós-teste 1.
4 Aulas	Atividades de Exploração 3 e 4 e aplicação das Situações-problemas 1.
3 Aulas	Atividade de Exploração 5 e aplicação das Situações-problemas 2.
4 Aulas	Atividades de Exploração 6 e 7 e aplicação das Situações-problemas 3.
2 Aulas	Aplicação do Pré-teste 2.
4 Aulas	Atividades de Exploração 8, 9 e 10.
3 Aulas	Atividades de Exploração 11 e 12.
4 Aulas	Atividades de Exploração 13, 14 e 15.
2 Aulas	Aplicação do Pós-teste 2.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A princípio o Professor realizou a apresentação para a turma de todas as Matemágicas trabalhadas nesta pesquisa, foi uma espécie de show de mágicas com baralho com o propósito de entusiasmar os alunos nas atividades posteriores.

4.1 Matemágica 1: Confusão em família no hotel

4.1.1 Descrição da Matemágica 1

[1]**Passo 1:** O mágico separa 4 montes com 4 cartas cada. Cada monte representa uma família diferente (as famílias de ouros, copas, paus e espadas) e são compostos por um rei (representando o pai), uma dama (representando a mãe), um valete (representando o filho mais velho) e um Às (representando o filho mais novo) do mesmo naipe, conforme Figura 4.1 abaixo.

Figura 4.1 – 4 montes (famílias).

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Passo 2: O mágico conta uma breve história para o público.

[1]Temporão (2011)

“Num hotel contendo apenas 4 quartos numerados de 0 até 3 (representados pelos quatro montes) havia 4 famílias hospedadas uma em cada quarto, eram eles os pais, as mães, os filhos mais velhos e os filhos mais novos.”

Durante esta parte da história o mágico coloca acima da mesa os 4 reis com as faces viradas para cima, cada um em um quarto (monte). Logo após coloca as damas acima de cada rei com seu respectivo naipe e o mesmo faz-se para os valetes e os ases respectivamente.

E a história segue: “A noite todas as famílias se trancam em seus quartos e vão dormir”. Nesse momento o mágico coloca os 4 montes um sobre o outro sem alterar a ordem das cartas e vira o monte formado com as 16 cartas com as faces voltadas para baixo.

Passo 3: Continua a história: “A noite neste hotel houve um curto circuito e um barulho muito grande foi ouvido, o hotel ficou sem energia. Todos os hospedes do hotel saíram dos seus quartos assustados e iniciou-se uma confusão ”.

Ao contar esta parte da história o mágico vai improvisando sobre a confusão alastrada no hotel por conta da queda de energia e ao mesmo tempo embaralha as cartas de maneira que o público não perceba que ele esteja apenas cortando o baralho inúmeras vezes.

Logo após continua a história: “Até que cada um dos hospedes começam a se acalmar e entrar nos quartos”. Momento em que o mágico vai distribuindo uma carta por vez, iniciando a primeira carta no quarto 0, a segunda carta no quarto 1, a terceira carta no quarto 2, a quarta carta no quarto 3, a quinta carta no quarto 0 e assim por diante até finalizar todas as 16 cartas.

Após distribuir as cartas o mágico finaliza a história falando que foi estabelecido a energia e revela que algo inusitado aconteceu. No quarto 0 ao virar as cartas estão apenas os pais, no quarto 1 apenas as mães, no quarto 2 apenas os filhos mais velhos e no quarto 3 apenas os filhos mais novos (Esta ordem pode ser alterada a depender dos cortes realizados no passo 2), conforme Figura 4.2 abaixo.

Figura 4.2 – Resultado da Matemágica 1.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4.1.2 Como funciona a Matemágica 1?

No passo 1, vamos representar os reis pela letra K, as damas pela letra Q, os valetes pela letra J e os ases pela letra A. E seja os quartos numerados pelos restos da divisão por 4, isto é, 0, 1, 2 e 3 nesta ordem.

No passo 2 ao juntar todas as cartas em um único monte com a ordem estabelecida no truque teremos a seguinte sequência, independente dos naipes, numerando as posições de cada uma delas conforme o quadro 4.2 abaixo.

Quadro 4.2 – Posições das 16 cartas.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A
Resto na divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note que foi gerada após a distribuição das cartas uma sequência onde a cada 4 cartas tem-se a primeira carta um rei (K), a segunda carta uma dama (Q), logo após um valete (J) e por fim um às (A). Sendo assim:

- O valor dos restos das posições de cada rei (K), na divisão por 4, resultam em 0.
- O valor dos restos das posições de cada dama (Q), na divisão por 4, resultam em 1.
- O valor dos restos das posições de cada valete (J), na divisão por 4, resultam em 2.
- O valor dos restos das posições de cada às (A), na divisão por 4, resultam em 3.

No passo 3 ao embaralhar as cartas (cortar diversas vezes) não será alterado os valores das posições, nem os valores dos restos na divisão por 4. A única mudança que vai ocorrer é a ordem da sequência na distribuição das cartas, porém o valor do resto das divisões das posições de cada um dos reis (K) na divisão por 4 será sempre o mesmo, seja este resto 0, 1, 2 ou 3. O mesmo ocorre para as damas, valetes e ases possibilitando as possíveis 4 sequências após os cortes, conforme os quadros 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 abaixo.

Quadro 4.3 – Possibilidade 1.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A
Resto na divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Quadro 4.4 – Possibilidade 2.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K
Resto na divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Quadro 4.5 – Possibilidade 3.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q
Resto na divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Quadro 4.6 – Possibilidade 4.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J
Resto na divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Observe que ao distribuir as cartas em 4 montes conforme o passo 3, independente do total de cortes realizados no baralho, obteremos as cartas das posições da forma 4k no 1° monte (quarto 0), 4k + 1 no 2° monte (quarto 1), 4k + 2 no 3° monte (quarto 2) e 4k + 3 no 4° monte (quarto 3), com k inteiro, conforme o quadro 4.7 abaixo.

Quadro 4.7 – Distribuição das posições por quartos.

Numeração do Quarto	Quarto 0	Quarto 1	Quarto 2	Quarto 3
Forma euclidiana	4k	4k + 1	4k + 2	4k + 3
Distribuição das cartas por posição	0	1	2	3
	4	5	6	7
	8	9	10	11
	12	13	14	15

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Como o valor do resto nas divisões das posições de cada tipo de carta (K, Q, J ou A) por 4 será sempre o mesmo, acarreta da distribuição conforme o quadro 4.7 acima, que as cartas ficarão ao final distribuídas da seguinte maneira: os 4 ases no quarto W, os 4 reis no quarto X, as 4 damas no quarto Y e os 4 valetes no quarto Z. Onde $W, X, Y, Z = \{0, 1, 2, 3\}$ com $W \neq X \neq Y \neq Z$.

4.1.3 Demonstração do truque da Matemágica 1

Observemos adiante a demonstração matemática por traz do truque na Matemágica 1. No passo 1 após a distribuição das cartas, os reis ficam nas posições $4k$, as damas nas posições $4k+1$, os valetes nas posições $4k+2$ e os ases nas posições $4k+3$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

No passo 2 ao cortar diversas vezes o baralho, o número de cartas correspondentes ao corte pode ser escrito na forma $4q+R$, onde $R \in \mathbb{Z}$ é o resto da divisão euclidiana por 4, com $R = \{0, 1, 2, 3\}$. Assim, sendo $p \in \mathbb{Z}$, segue que:

Os reis irão para as posições:

$$4k + 4q + R = 4(k+q) + R = 4p + R$$

As damas irão para as posições:

$$4k + 1 + 4q + R = 4(k+q) + R + 1 = 4p + R + 1$$

Os valetes irão para as posições:

$$4k + 2 + 4q + R = 4(k+q) + R + 2 = 4p + R + 2$$

E os ases irão para as posições:

$$4k + 3 + 4q + R = 4(k+q) + R + 3 = 4p + R + 3$$

Daí, quando:

- $R = 0$: Todas as cartas manterão as mesmas posições.
- $R = 1$: Os reis irão para as posições $4p+1$, as damas irão para as posições $4p+2$, Os valetes irão para as posições $4p+3$ e os ases irão para as posições $4p+4 = 4(p+1)$.
- $R = 2$: Os reis irão para as posições $4p+2$, as damas irão para as posições $4p+3$, os valetes irão para as posições $4p+4 = 4p_1$ e os ases irão para as posições $4p+5 = 4p_1+1$, com $p_1 \in \mathbb{Z}$.
- $R = 3$: Os reis irão para as posições $4p+3$, as damas irão para as posições $4p+4 = 4p_2$, os valetes irão para as posições $4p+5 = 4p_2+1$ e os ases irão para as posições $4p+6 = 4p_2+2$,

com $p_2 \in \mathbb{Z}$.

Portanto concluímos que os 4 ases, 4 reis, 4 damas e 4 valetes estarão respectivamente nos quartos W, X, Y e Z, onde $W, X, Y, Z = \{0, 1, 2, 3\}$ com $W \neq X \neq Y \neq Z$.

4.2 Matemágica 2: Às misterioso

4.2.1 Descrição da Matemágica 2

[2]**Passo 1**: Bem parecido com a Matemágica 1, o mágico seleciona os 4 ases do baralho e os coloca virados para baixo formando 4 montes numerados de 0 até 3. Logo após o mágico pega 12 cartas aleatórias do baralho e coloca 3 cartas viradas para baixo acima de cada às. Assim cada monte irá possuir 4 cartas.

Passo 2: O mágico mostra ao público que cada monte contém 4 cartas, sendo as 3 primeiras, cartas aleatórias e a última sempre um às, dando ênfase a seguinte sequência em cada monte: carta, carta, carta, às. Por fim ele junta os 4 montes colocando um sobre o outro e ainda virados para baixo, formando um único monte de 16 cartas.

Passo 3: Mais uma vez o mágico mostra ao público a sequência das cartas (carta, carta, carta, às). Feito isto, começa a distribuir todas as cartas do monte na mesa, uma a uma, viradas para baixo formando novamente os 4 montes, numerados de 0 a 3, com 4 cartas cada. A distribuição se dá da seguinte maneira: iniciando do topo, põe a primeira carta no monte 0, a segunda carta no monte 1, a terceira carta no monte 2, a quarta carta (às) no monte 3 e repete o processo até finalizar as 16 cartas. Finalizado o processo o mágico fala ao público que ficou evidente que os 4 ases estão no monte 3 conforme a sequência de distribuição das cartas (carta, carta, carta, às), uma vez que da forma como a distribuição foi feita levou todos os ases para lá, conforme o quadro 4.8 abaixo, representando as cartas aleatórias por C e os ases por A.

Quadro 4.8 – Distribuição dos ases no monte 3.

Monte 0	C	C	C	C
Monte 1	C	C	C	C
Monte 2	C	C	C	C
Monte 3	A	A	A	A

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Passo 4: Ao virar as cartas dos montes 0 e 1 o mágico mostra ao público que lá estão cartas aleatórias do baralho. Porém ao virar um às do monte 3 e uma carta do monte 2 e

[2]Parras (2013)

inverter as suas posições, colocando o às no monte 2 e a carta no monte 3, o mágico fala que todos os ases que estavam no monte 3 passaram de forma misteriosa para o monte 2. Neste momento ele vira as cartas do monte 2 e lá estão todos os ases, vira as cartas do monte 3 e lá estão apenas cartas aleatórias, conforme o quadro 4.9 abaixo.

Quadro 4.9 – Resultado da Matemágica 2.

Monte 0	C	C	C	C
Monte 1	C	C	C	C
Monte 2	A	A	A	A
Monte 3	C	C	C	C

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4.2.2 Como funciona a Matemágica 2?

Representando as cartas aleatórias por C e os ases por A, nos passos 1 e 2 o monte formado com as 16 cartas ficará disposto da seguinte maneira, conforme o quadro 4.10 abaixo, quanto as suas posições representadas por números inteiros de 0 até 15.

Quadro 4.10 – Posições das 16 cartas.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	C	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A
Resto na divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note que as posições dos 4 ases são da forma $4k + 3$, com $k \in \mathbb{Z}$, isto é, deixam resto 3 na divisão por 4.

No passo 3 após distribuir as 4 primeiras cartas com as faces voltadas para baixo, uma em cada monte; o mágico mais uma vez, sem mostrar as cartas, da ênfase que nos três primeiros montes estão as cartas aleatórias e no monte 3 está o primeiro ás. Daí vira a carta do monte 2, mostra ao público que é uma carta aleatória e nesse momento convida algum aluno para virar a carta do monte 3, verificar se esta carta é realmente um ás e a mostre ao público.

É exatamente neste instante que o truque acontece, pois enquanto o aluno confere e mostra a carta do monte 3 ao público, toda a plateia está entretida observando o às mostrado pelo aluno. Daí o mágico que estava com a carta da posição 4 nas mãos apontando para o às do monte 3 antes do aluno mostrá-lo ao público, ao devolve-la no monte em sua outra mão, a coloca para baixo do monte. Com isto, todos os três ases restantes passam a ser da forma

$4k + 2$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, passarão para as posições que deixam resto 2 quando divididos os seus valores por 4. Daí ao continuar a distribuição, ambos os três ases restantes serão distribuídos no monte 2 e ao final só restará um ás no monte 3 e uma carta aleatória no monte 2 conforme o quadro 4.11 abaixo.

Quadro 4.11 – Distribuição real das cartas após o truque.

Monte 0	C	C	C	C
Monte 1	C	C	C	C
Monte 2	C	A	A	A
Monte 3	A	C	C	C

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Por fim no passo 4, o mágico ao virar novamente o às e a carta aleatória já mostrados ao público no passo 3 e logo após realizar a troca de posições de ambas, ele estrala os dedos e faz a seguinte pergunta: "se de repente ao trocarmos de posição estas duas cartas e num estralar de dedos todos os ases trocarem de lugar misteriosamente com as cartas?" Daí, ao virar as cartas do monte 3, lá estão apenas as cartas aleatórias e ao virar as cartas do monte 2, lá estão todos os ases, conforme vimos anteriormente no quadro 4.9, assim finalizando o truque.

4.2.3 Demonstração do truque da Matemágica 2

Vamos representar as cartas aleatórias por C e os ases pela letra A. E sejam os montes numerados pelos restos da divisão por 4, isto é, 0, 1, 2 e 3 nesta ordem.

Ao distribuir as cartas e depois juntar todas elas com a ordem estabelecida na Matemágica formando um único monte, conforme o passo 1, teremos a seguinte sequência, enumerando as posições de cada uma delas com valores inteiros de 0 até 15 conforme o quadro 4.10.

Note que os ases ficarão nas posições cujo resto na divisão por 4 é igual a 3, isto é, o valor das posições dos ases é da forma $4k + 3$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Ao colocar a carta da posição 4 para baixo do monte de cartas, conforme descrito no passo 2, esta carta passará para a posição 15 e todas as outras cartas das posições de 5 até 15 diminuirão uma posição cada. Assim ficamos com a seguinte sequência, conforme o quadro 4.12 abaixo.

Quadro 4.12 – Novas posições dos ases.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	C	C	C	A	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A	C
Resto na divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Daí os 3 ases restantes são deslocados para uma posição anterior, isto é, suas posições passam a ser da forma $4k + 2$. Portanto pela Matemágica 1, ao serem distribuídos, três deles ficarão dispostos no monte 2, conforme o quadro 4.12.

Portanto ao realizar a troca de posições entre o às da posição 3 com a carta da posição 2 no passo 4, o truque estará finalizado com todos os ases nas posições da forma $4k + 2$, conforme o quadro 4.13 abaixo.

Quadro 4.13 – Posições finais dos ases.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A	C
Resto na divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4.3 Matemágica 3: Festa das damas

4.3.1 Descrição da Matemágica 3

[3]**Passo 1**: O mágico retira o baralho da caixa e começa a contar a seguinte história. “As damas resolveram realizar uma festa, e toda a turma foi convidada. No dia da festa eu cheguei a festa atrasado, pois sempre atraso para me arrumar. Por isso preciso da ajuda de vocês para procurar as donas da festa (damas) e as cumprimentar.”

Passo 2: O mágico pede para que algum aluno escolha um número natural compreendido de 11 até 19 referente a um total de cartas. Escolhido o número, o mágico coloca a quantidade de cartas escolhidas uma acima da outra até finalizar o valor. Logo após pede para o público somar os algarismos do número escolhido para que ele retorne essa quantidade de cartas ao baralho, uma a uma. Feito isso o mágico pega a próxima carta e mostra que encontrou a primeira dama. Para encontrar a segunda e terceira dama o mágico repete o mesmo procedimento mais duas vezes.

[3]Parras (2014)

Passo 3: Para encontrar a quarta dama o mágico diz que vai fazer diferente desta vez e pede para que alguém escolha um número de 1 a 10.

• Se o número escolhido for algum de 1 até 9, o mágico passa o total de cartas, uma a uma, referente ao valor do número, e para a surpresa de todos, ao virar a carta, encontra outra carta diferente da dama, porém essa carta serve como auxilio para encontrar a última dama sendo o número na face da carta referente a quantidade de cartas a mais que o mágico deve contar para encontra a última dama.

• Se o número escolhido for 10 basta contar até 10 e mostrar a última dama.

4.3.2 Como funciona a Matemágica 3?

Antes de iniciar a mágica, o baralho é preparado dentro de sua caixa, colocando no topo do baralho, com as cartas viradas para baixo, a seguinte ordem referente as treze primeiras cartas do topo: Oito cartas, sendo elas as cartas com as faces numéricas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e nesta ordem. Logo após coloca três damas (representadas por Q_1, Q_2, Q_3), em seguida coloca-se um às (representado pela letra A) qualquer do baralho e por fim coloca a última dama (representada por Q_4), conforme o quadro 4.14 a seguir.

Quadro 4.14 – Ordenação das 13 cartas.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Carta	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_1	Q_2	Q_3	A	Q_4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4.3.2.1 Encontrando as três primeiras damas

No passo 2, qualquer que seja o número de 11 a 19 escolhido pelo aluno, note que a subtração entre o número escolhido e a soma dos seus algarismos será sempre igual a 9. Vamos demonstrar tal fato a seguir.

Seja xy um número escrito na base dez, com $x, y \in \mathbb{Z}$, onde $0 \leq x \leq 9$ e $0 \leq y \leq 9$. Logo:

$$[xy]_{10} = 10x + y \tag{4.1}$$

Subtraindo de (4.2), a soma dos algarismos do número xy, obtemos:

$$10x + y - (x + y) = 9x \tag{4.2}$$

Portanto o valor encontrado será sempre um múltiplo de 9. E como os números naturais xy estão compreendidos de 11 até 19, então este valor sempre será 9, pois $x = 1$, conforme obtemos abaixo da equação (4.3).

$$10x + y - (x + y) = 9x = 9 \cdot 1 = 9$$

Isto é:

$$11 - 2 = 12 - 3 = 13 - 4 = 14 - 5 = 15 - 6 = 16 - 7 = 17 - 8 = 18 - 9 = 19 - 10 = 9$$

Por outro lado, conforme a preparação das cartas feita pelo mágico antes de iniciar a mágica, note que as três primeiras damas encontradas estarão sempre na posição de número 9, conforme podemos verificar adiante.

Vimos anteriormente que as 13 primeiras cartas no topo do baralho estão dispostas conforme o quadro 4.14, estando a primeira dama encontrada na posição 9.

Após a primeira dama ser encontrada e retirada, as cartas ficarão dispostas conforme o quadro 4.15 abaixo, com a segunda dama encontrada também na posição 9.

Quadro 4.15 – 2ª Dama.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Carta	9	8	7	6	5	4	3	2	Q_2	Q_3	A	Q_4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após a segunda dama ser encontrada e retirada, as cartas ficarão dispostas conforme o quadro 4.16 abaixo e mais uma vez a terceira dama encontrada estará na posição 9.

Quadro 4.16 – 3ª Dama.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Carta	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_3	A	Q_4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4.3.2.2 Encontrando a última dama

Após a terceira dama ser encontrada e retirada, as cartas ficarão dispostas da seguinte forma, conforme o quadro 4.17 abaixo.

Quadro 4.17 – 4ª Dama.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carta	9	8	7	6	5	4	3	2	A	Q_4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Considerando o valor do ás igual a 1, segue no passo 3 que escolhido qualquer um dos números de 1 até 9, a soma entre o valor da face da carta e o número escolhido (posição) sempre resultará em 10, conforme podemos verificar no quadro 4.17 acima.

De fato:

$$9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 5 + 5 = 4 + 6 = 3 + 7 = 2 + 8 = 9 + 1 = 10$$

Exatamente a posição onde se encontra a última dama, uma vez que ela saiu da sua posição inicial 13 e foi para a posição final 10 devido a retirada das três primeiras damas. Mas se o número escolhido pelo aluno for 10, basta contar até 10 e mostrar a dama. Com isto finalizamos o truque.

4.4 Matemágica 4: Os quatro reis policiais (K) e o valete assaltante (J)

4.4.1 Descrição da Matemágica 4

[4]**Passo 1**: O mágico retira o baralho da caixa, chama quatro alunos para participarem e fala que vai encontrar 4 cartas com a ajuda deles.

Passo 2: Logo após, começa a contar a seguinte história: "Precisamos encontrar os 4 reis do baralho, pois eles são policiais de elite e tem um assaltante fugitivo na cidade muito perigoso, o valete de ouros. Para isso preciso da ajuda de vocês."

Passo 3: O mágico pede para que um dos alunos escolha um número natural de 10 até 19.

Passo 4: Escolhido o número, o mágico retira a quantidade de cartas, referente ao número escolhido, do topo do baralho, contando uma a uma e as colocando uma acima da outra, formando um único monte acima da mesa. Logo após pede para o público somar os algarismos deste número para que ele retorne à quantidade de cartas referente a soma destes algarismos de volta ao baralho em sua mão, também uma a uma. Feito isso, o mágico pega a próxima carta do monte e a mostra para o público, sendo está um rei. Ao final retira o rei encontrado e coloca o monte formado de volta ao topo do baralho.

Passo 5: O mágico pede para que outro aluno escolha um número de 20 até 29 e repete o procedimento realizado no passo 4, encontrando o segundo rei.

[4]elaborada pelo autor, 2023.

Passo 6: O mágico pede para que o terceiro aluno escolha um número de 30 até 39 e repete o procedimento realizado no passo 4, encontrando o terceiro rei.

Passo 7: O mágico pede para que o quarto participante escolha um número de 40 até 49 e repete mais uma vez o procedimento realizado no passo 4, encontrando assim o último rei do baralho.

Passo 8: Encontrados todos os quatro reis do baralho, o mágico ressalva que estes são policiais e estão em busca de um assaltante de bancos (valete de ouros) e convida um outro aluno para que ele ajude os reis a encontrar o valete.

Passo 9: O mágico pede para que este aluno escolha um número de 16 até 26. Desta vez, após a contagem da quantidade de cartas referente ao número escolhido o mágico vira a carta referente a posição deste número e a mostra para a turma.

• Se o número escolhido for o número 16, então a carta será exatamente o valete de ouros e o mágico afirma que o encontrou.

• Caso contrário, ela não será o valete de ouros. Porém, o número exibido na face da carta será exatamente a quantidade de cartas que o mágico deve retornar ao baralho para encontrar o valete de ouros e assim finalizar a mágica.

4.4.2 Como funciona a Matemágica 4?

Antes de iniciar a Matemágica, o baralho é preparado pelo mágico dentro de sua caixa, colocando as cartas do topo do baralho, com as faces voltadas para baixo na seguinte ordem:

• 8 cartas, uma de cada numeração 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 e nesta ordem, logo após um rei (representado por K_1), e em seguida coloca-se três cartas na seguinte ordem, uma carta com o número 2, seguida por um ás (representado por A) qualquer do baralho e por fim o valete de ouros (representado por J), conforme o quadro 4.18 a seguir.

Quadro 4.18 – Distribuição inicial e posição do 1º rei.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Carta	3	4	5	6	7	8	9	10	K_1	2	A	J

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

• Logo após o valete de ouros, coloca-se o restante das cartas do baralho, conforme descrito abaixo na seguinte ordem: 6 cartas aleatórias; o segundo rei (K_2); 9 cartas aleatórias; o terceiro rei (K_3); 9 cartas aleatórias; o último rei (K_4) e por fim as ultimas 13 cartas do baralho.

Podemos observar melhor essa distribuição conforme o quadro 4.19 abaixo.

Quadro 4.19 – Distribuição do restante das cartas.

Posição	13 à 18	19	20 à 28	29	30 à 38	39	40 à 52
Carta	seis cartas	K_2	nove cartas	K_3	nove cartas	K_4	Treze cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Conforme a preparação das cartas realizada pelo mágico antes de iniciar a Matemágica, note que os quatro reis serão encontrados sempre em posições cujos valores são múltiplos de 9, conforme podemos verificar adiante.

4.4.2.1 Encontrando os quatro reis

Dos passos 3 e 4, qualquer que seja o número de 10 até 19 escolhido pelo aluno, note que a subtração entre o número escolhido e a soma dos seus algarismos será sempre igual à um múltiplo de 9 e já provamos na Matemágica 3 que esta diferença resulta em 9. Segue assim, pelo quadro 4.18, que o primeiro rei (K_1) foi encontrado, pois ele está localizado na posição de número 9.

Ao final do passo 4, retira-se o rei (K_1) encontrado, restando 8 cartas no monte formado acima da mesa, as quais retornam com suas posições invertidas de volta ao topo do baralho, pois este monte é posto acima das demais cartas.

As cartas das posições de 10 até 19 retornam ao baralho, uma a uma, na ordem decrescente em relação a ordem que foram distribuídas, o que acarretaria em retornarem para suas respectivas posições, porém todas elas irão reduzir uma posição, devido a retirada do rei (K_1), o que também ocorre com as demais cartas até a posição 52. Logo as 51 cartas restantes, ficam dispostas conforme o quadro 4.20 abaixo.

Quadro 4.20 – Distribuição das cartas após retirada do 1° rei.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 à 17	18	19 à 27	28	29 à 37	38	39 à 51
Carta	10	9	8	7	6	5	4	3	2	A	J	6 cartas	K_2	9 cartas	K_3	9 cartas	K_4	13 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

De maneira análoga ao passo 3, e repetindo o procedimento feito no passo 4 aos passos 5, 6 e 7; quaisquer que sejam os números escolhidos pelos outros três alunos, respectivamente de 20 até 29, de 30 até 39 e de 40 até 49, tem-se sempre que a diferença entre o número escolhido e a soma dos seus algarismos será sempre igual à um múltiplo de 9. Assim essas diferenças resultam respectivamente sempre em 18, 27 e 36. Observe:

- Número escolhido entre 20 e 29:

$$20 - 2 = 21 - 3 = 22 - 4 = 23 - 5 = \cdots = 26 - 8 = 27 - 9 = 28 - 10 = 29 - 11 = 18$$

- Número escolhido entre 30 e 39:

$$30 - 3 = 31 - 4 = 32 - 5 = 33 - 6 = \cdots = 36 - 9 = 37 - 10 = 38 - 11 = 39 - 12 = 27$$

- Número escolhido entre 40 e 49:

$$40 - 4 = 41 - 5 = 42 - 6 = \cdots = 45 - 9 = 46 - 10 = 47 - 11 = 48 - 12 = 49 - 13 = 36$$

Por outro lado, note que o segundo rei (K_2), conforme o quadro 4.20 acima, será encontrado na posição 18. Retirando (K_2), restará 17 cartas no monte formado acima da mesa, as quais mais uma vez retornam com suas posições invertidas ao colocar o monte formado com as 17 cartas de volta ao topo do baralho.

Da mesma forma, as cartas das posições de 20 até 29 retornam ao baralho, uma a uma na ordem decrescente em relação a ordem que saíram e retornariam para suas respectivas posições, porém devido a retirada do rei (K_2) todas elas irão reduzir uma posição, o que também ocorre com as demais cartas até a posição 51. Logo as 50 cartas restantes, ficam distribuídas conforme o quadro 4.21 abaixo.

Quadro 4.21 – Distribuição das cartas após retirada do 2° rei.

Posição	1 à 6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18 à 26	27	28 à 36	37	38 à 50
Carta	6 cartas	J	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9 cartas	K_3	9 cartas	K_4	13 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O terceiro rei (K_3) será encontrado, conforme o quadro 4.21 acima, na posição 27. De maneira análoga, após sua retirada, ficam apenas 49 cartas e ao devolver o monte formado pelas 26 cartas anteriores à K_3, obtemos a seguinte nova distribuição das cartas, conforme o quadro 4.22 abaixo.

Quadro 4.22 – Distribuição das cartas após retirada do 3° rei.

Posição	1 à 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21 à 26	27 à 35	36	37 à 49
Carta	9 cartas	10	9	8	7	6	5	4	3	2	A	J	6 cartas	9 cartas	K_4	13 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O Quarto rei (K_4) será encontrado, conforme o quadro 4.22 acima, na posição 36. Após sua retirada, restarão apenas 48 cartas e ao devolver o monte formado pelas 35 cartas anteriores à K_4, obtemos a seguinte nova distribuição das cartas, conforme o quadro 4.23.

Quadro 4.23 – Distribuição das cartas após retirada do 4° rei.

Posição	1 à 9	10 à 15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27 à 35	36 à 48
Carta	9 cartas	6 cartas	J	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9 cartas	13 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Conforme visto no passo 9, um quinto aluno participante escolhe um número de 16 até 26, referente ao total de cartas colocadas uma sobre a outra acima da mesa. Note pelo quadro 4.23 acima que independente do número escolhido pelo aluno, exceto o número 16, a diferença entre o valor da posição (número escolhido) da carta e o valor de sua face sempre resulta em 16, exatamente onde está localizado o valete de ouros, sendo o número da face da carta correspondente ao total de cartas retornadas ao baralho. Por outro lado, se o número escolhido for o número 16, então a carta será exatamente o valete de ouros e o mágico afirma que o encontrou, finalizando o truque.

4.5 Matemágica 5: As 21 cartas

4.5.1 Descrição da Matemágica 5

[5]**Passo 1**: O mágico chama um aluno e pede para ele selecionar 21 cartas quaisquer do baralho. Logo após pede para escolher uma entre as 21 cartas, mostrar para o público a carta escolhida, devolve-la ao monte de 21 cartas e traça-lo da maneira que desejar.

Passo 2: O mágico pega as 21 cartas e inicia a Matemágica distribuindo as cartas em três blocos com as faces voltadas para cima para que o participante veja em qual bloco caiu a carta escolhida. Ao final da distribuição o participante fala ao mágico em qual bloco a carta está. O mágico junta os três blocos formando novamente um único monte. O processo do passo 2 é repetido mais duas vezes.

Passo 3: Feito isto, o mágico divide as cartas em sete pequenos blocos com três cartas cada, todas elas agora viradas para baixo e pede para que o aluno escolha 3 blocos quaisquer. O mágico exclui os blocos escolhidos ou os blocos não escolhidos e repete este procedimento até que reste apenas um bloco com três cartas.

Do bloco restante, o mágico pede que o aluno escolha uma ou duas cartas, vai excluindo as cartas escolhidas ou as cartas não escolhidas e repetindo este processo até que sobre apenas uma carta, exatamente a carta escolhida pelo participante.

[5]Temporão (2011)

4.5.2 Como funciona a Matemágica 5?

No passo 2 ao distribuir as cartas em três blocos e o participante revelar em qual bloco está a carta escolhida, o mágico coloca este bloco exatamente no meio dos outros dois blocos restantes e repete o mesmo procedimento nas duas distribuições seguintes. Feito isto a carta escolhida pelo participante sempre ficará na posição de número 11 (posição central), independentemente de onde a carta escolhida estava ao início da Matemágica.

Daí no passo 3 ao dividir as cartas em 7 blocos, o mágico observa o bloco onde ficará localizado a carta da posição 11, sabendo que ela ficará localizada no 4º bloco exatamente entre as duas demais cartas de posições 10 e 12. Logo, se o participante selecionar, entre os montes escolhidos, o monte que está a carta escolhida, o mágico retira e exclui os demais montes não escolhidos. Se o participante selecionar montes que não estão a carta escolhida, o mágico retira e exclui estes montes. Assim o mágico vai deixando a carta escolhida para o último monte e faz esse mesmo procedimento para as três cartas do último monte até que reste apenas a carta escolhida, finalizando o truque.

4.5.3 Demonstração do truque da Matemágica 5

Primeira distribuição: Após a primeira distribuição, vamos numerar a posição das cartas que ficam no monte (Monte 2) colocado no meio dos outros dois montes de 8 a 14, pois o primeiro monte (Monte 1) possui 7 cartas (posições de 1 até 7) e o terceiro monte (Monte 3) também possui 7 cartas (posições de 15 até 21) e não vão interessar para a demonstração.

Vamos representar a carta escolhida por C_n e as cartas não escolhidas por x_n, onde $n \in \mathbb{N}$ representa a posição da carta após a primeira distribuição conforme o quadro 4.24 abaixo.

Quadro 4.24 – Posições das cartas após a 1ª distribuição.

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta	1 - x_1	8 - C_8	15 - x_{15}
	2 - x_2	9 - C_9	16 - x_{16}
	3 - x_3	10 - C_{10}	17 - x_{17}
	4 - x_4	11 - C_{11}	18 - x_{18}
	5 - x_5	12 - C_{12}	19 - x_{19}
	6 - x_6	13 - C_{13}	20 - x_{20}
	7 - x_7	14 - C_{14}	21 - x_{21}

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Observe do quadro 4.24 que após a primeira distribuição, a carta escolhida pode ocupar qualquer uma das posições do 2° monte, isto é, pode ser qualquer uma das cartas das posições de 8 até 14.

Vamos agora separar as posições n da primeira distribuição em três grupos:

Grupo 0: Posições cujos valores deixam resto 0 na divisão euclidiana por 3, isto é, são da forma $3k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Grupo 1: Posições cujos valores deixam resto 1 na divisão euclidiana por 3, isto é, são da forma $3k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Grupo 2: Posições cujos valores deixam resto 2 na divisão euclidiana por 3. isto é, são da forma $3k + 2$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Segunda distribuição: Ao realizar a segunda distribuição as cartas do grupo 1, grupo 2 e grupo 3 ficaram localizadas nos montes 1, 2 e 3 respectivamente, conforme o quadro 4.25 abaixo.

Quadro 4.25 – Posições das cartas após a 2ª distribuição.

Grupos	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 0
Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta	1 - x_1	2 - x_2	3 - x_3
	4 - x_4	5 - x_5	6 - x_6
	7 - x_7	8 - C_8	9 - C_9
	10 - C_{10}	11 - C_{11}	12 - C_{12}
	13 - C_{13}	14 - C_{14}	15 - x_{15}
	16 - x_{16}	17 - x_{17}	18 - x_{18}
	19 - x_{19}	20 - x_{20}	21 - x_{21}

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Assim, após a segunda distribuição, as cartas C_9 e C_{12} ficam localizadas no monte 3 (Grupo 0), as cartas C_{10} e C_{13} ficam localizadas no monte 1 (Grupo 1) e as cartas C_8, C_{11} e C_{14} ficam localizadas no monte 2 (Grupo 2). Em outras palavras:

• Se após a primeira distribuição a carta escolhida terminou em uma das posições 9 ou 12 (grupo 0), então após a segunda distribuição ambas ficarão no terceiro monte.

• Se após a primeira distribuição a carta escolhida terminou em uma das posições 10 ou 13 (grupo 1), então após a segunda distribuição ambas ficarão no primeiro monte.

• Se após a primeira distribuição a carta escolhida terminou em uma das posições 8, 11 ou 14 (grupo 2), então após a segunda distribuição ambas ficarão no segundo monte.

Ao final da segunda distribuição, coloca-se o monte referente a carta escolhida no meio dos outros dois montes e realiza-se a terceira distribuição.

Terceira distribuição: Para realizar a terceira distribuição temos três possibilidades para a carta C_n escolhida.

• **Primeira possibilidade**: Se a carta escolhida pertencer ao grupo 1, isto é, sua posição n for da forma $3k+1$ com $k \in \mathbb{Z}$, então o monte 1 referente a localização das cartas na segunda distribuição será colocado no meio dos outros dois. Portanto após a terceira distribuição, as cartas das posições iniciais n fixadas em 10 e 13 serão as quartas cartas dos montes 2 e 3 respectivamente, conforme o quadro 4.26 abaixo.

Quadro 4.26 – 1ª possibilidade após a 3ª distribuição.

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta	2 - x_2	5 - x_5	8 - C_8
	11 - C_{11}	14 - C_{14}	17 - x_{17}
	20 - x_{20}	1 - x_1	4 - x_4
	7 - x_7	10 - C_{10}	13 - C_{13}
	16 - x_{16}	19 - x_{19}	3 - x_3
	6 - x_6	9 - C_9	12 - C_{12}
	15 - x_{15}	18 - x_{18}	21 - x_{21}

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Logo, qualquer que seja a carta (C_{10} ou C_{13}) escolhida, concluímos que ela sempre ficará na posição número 11 ao ser colocado o monte onde ela se encontra no meio dos outros dois montes.

De fato, tem-se 7 cartas em qualquer um dos montes somadas com mais 4 cartas até se chegar a carta escolhida no monte onde a carta escolhida está localizada, resultam em um total de 11 cartas.

• **Segunda possibilidade**: Se a carta escolhida pertencer ao grupo 2, isto é, sua posição n for da forma $3k+2$ com $k \in \mathbb{Z}$, então o monte 2 referente a localização das cartas na segunda distribuição será colocado no meio dos outros dois. Portanto após a terceira distribuição, as cartas das posições iniciais n fixadas em 8, 11 e 14 serão as quartas cartas dos montes 1, 2 e 3 respectivamente, conforme o quadro 4.27 abaixo.

Quadro 4.27 – 2ª possibilidade após a 3ª distribuição.

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta	1 - x_1	4 - x_4	7 - x_7
	10 - C_{10}	13 - C_{13}	16 - x_{16}
	19 - x_{19}	2 - x_2	5 - x_5
	8 - C_8	11 - C_{11}	14 - C_{14}
	17 - x_{17}	20 - x_{20}	3 - x_3
	6 - x_6	9 - C_9	12 - C_{12}
	15 - x_{15}	18 - x_{18}	21 - x_{21}

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Assim, qualquer que seja a carta (C_8, C_{11} e C_{14}) escolhida, concluímos que ela sempre ficará na posição número 11 ao ser colocado o monte onde ela se encontra no meio dos outros dois montes.

• **Terceira possibilidade**: Se a carta escolhida pertencer ao grupo 0, isto é, sua posição n for da forma $3k$ com $k \in \mathbb{Z}$, então o monte 3 referente a localização das cartas na segunda distribuição será colocado no meio dos outros dois. Portanto após a terceira distribuição, as cartas das posições iniciais n fixadas em 9 e 12 serão as quartas cartas dos montes 1 e 2 respectivamente, conforme o quadro 4.28 abaixo.

Quadro 4.28 – 3ª possibilidade após a 3ª distribuição.

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta	1 - x_1	4 - x_4	7 - x_7
	10 - C_{10}	13 - C_{13}	16 - x_{16}
	19 - x_{19}	3 - x_3	6 - x_6
	9 - C_9	12 - C_{12}	15 - x_{15}
	18 - x_{18}	21 - x_{21}	2 - x_2
	5 - x_5	8 - C_8	11 - C_{11}
	14 - C_{14}	17 - x_{17}	20 - x_{20}

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Logo, qualquer que seja a carta (C_9 ou C_{12}) escolhida, concluímos que ela sempre ficará na posição número 11 ao ser colocado o monte onde ela se encontra no meio dos outros dois montes. Assim concluímos nossa demonstração.

4.6 Matemágica 6: As três cartas finais

4.6.1 Descrição da Matemágica 6

[6]**Passo 1**: O mágico convida 3 alunos para participar da Matemágica e solicita que cada um deles escolha e mostre ao público uma carta do baralho, sem que o mágico as veja. Nesse momento o mágico faz quatro montes com o restante do baralho com as faces das cartas viradas para baixo.

Passo 2: Agora o mágico pede para o 1° aluno colocar a carta escolhida por ele acima do 1° monte, logo após retirar uma quantidade qualquer de cartas do 2° monte e as colocar acima do 1° monte.

Passo 3: O mesmo faz com o 2° aluno, manda colocar a carta escolhida por ele acima do 2° monte, logo após pede para ele retirar uma quantidade qualquer de cartas do 3° monte e as colocar acima do 2° monte.

Passo 4: Da mesma forma com o 3° aluno, pede para ele colocar a carta escolhida por ele acima do 3° monte, logo após pede para ele retirar uma quantidade qualquer de cartas do 4° monte e as colocar acima do 3° monte.

Passo 5: O mágico pega o restante das cartas do 4° monte coloca sobre o 3° monte, logo após coloca o 3° monte sobre o 2° monte e por fim pega o 2° monte e coloca sobre o 1° monte, juntando assim todo o baralho.

Passo 6: Nesse momento o mágico fala com o público e ressalta que vai encontrar as cartas dos 3 alunos, faz um pequeno corte no baralho e segue o procedimento realizado no passo 7.

Passo 7: Distribui as cartas em dois montes (representados por monte I e monte II) acima da mesa, o monte I com as faces das cartas voltadas para cima e o monte II com as faces das cartas viradas para baixo. A distribuição ocorre da seguinte maneira: Coloca a primeira carta do topo do baralho acima do monte I, coloca a segunda carta acima do monte II, a terceira carta acima do monte I, a quarta carta acima do monte II e vai repetindo este processo até finalizar todas as cartas. Após isso o mágico elimina as cartas que estão viradas para cima, sobrando assim as 26 cartas do monte II viradas para baixo.

Daí o mágico repete o mesmo processo com as 26 cartas, restando apenas 13 cartas. Repete novamente e restam 6 cartas. E por fim, repete a última vez o processo e ficam exatamente 3 cartas viradas para baixo, as quais o mágico mostra ao público que são exatamente as cartas escolhidas pelos três alunos.

[6] Temporão (2011)

4.6.2 Como funciona a Matemágica 6?

Enquanto os três alunos estão mostrando as cartas escolhidas no passo 1 ao público, o mágico faz os 4 montes com a seguinte quantidade de cartas em cada monte: 10 cartas no primeiro monte, 15 cartas no segundo, 15 cartas no terceiro e 9 cartas no quarto monte.

Após os três alunos devolverem todas as três cartas aos montes e o mágico juntar todas as cartas do baralho conforme descrito nos passos 2, 3, 4 e 5 da Matemágica 6, a posição das três cartas escolhidas, representadas por C_1, C_2 e C_3, ficam dispostas conforme o quadro 4.29, quando contadas de cima para baixo.

Quadro 4.29 – Posições iniciais das cartas C_1, C_2 e C_3

Cartas	Monte 4	C_3	Monte 3	C_2	Monte 2	C_1	Monte 1
Posição	1 até 9	10	11 até 25	26	27 até 41	42	43 até 52
Total de cartas	9	1	15	1	15	1	10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No passo 6, no momento em que o mágico fala com o público e ressalta que vai encontrar as cartas dos 3 alunos, ele está entretendo o público e realiza o corte no baralho colocando as 4 primeiras cartas que estão no topo do baralho, para baixo. Feito isto, perceba que as posições das três cartas C_1, C_2 e C_3 escolhidas são modificadas para as posições 38, 22 e 6 respectivamente, uma vez que cada uma delas diminuem 4 posições devido a retirada das 4 cartas do topo para baixo do baralho, conforme o quadro 4.30 abaixo.

Quadro 4.30 – Posições das cartas C_1, C_2 e C_3 após o corte realizado pelo professor.

Cartas	Monte 4	C_3	Monte 3	C_2	Monte 2	C_1	Monte 1
Posição	1 até 5	6	7 até 21	22	23 até 37	38	39 até 52
Total de cartas	5	1	15	1	15	1	14

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note que as cartas escolhidas ficam em posições pares (posições 6, 22 e 38). Assim no passo 7, na medida que as cartas das posições impares (1, 3, 5, ..., 51) são distribuídas, viradas com as faces para cima no monte I e descartadas, as cartas das posições pares (2, 4, 6, ..., 52) são distribuídas com as faces voltadas para baixo no monte II, uma acima da outra. Daí restam as 26 cartas do monte II viradas para baixo, pois foram descartadas metade delas e as posições das cartas escolhidas (C_1, C_2 e C_3) serão divididas por 2, ao serem contadas de baixo para cima, conforme o quadro 4.31 a seguir.

Quadro 4.31 – Primeira distribuição (posições das cartas com faces voltadas para cima).

<table>
<tr><td>Cartas</td><td>Monte 4</td><td>C_3</td><td>Monte 3</td><td>C_2</td><td>Monte 2</td><td>C_1</td><td>Monte 1</td></tr>
<tr><td>Posição</td><td rowspan="2">2 cartas</td><td>3</td><td rowspan="2">7 cartas</td><td>11</td><td rowspan="2">7 cartas</td><td>19</td><td rowspan="2">7 cartas</td></tr>
<tr><td>Total de cartas</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Porém, observando que as cartas são colocadas uma acima da outra, precisamos contar as novas posições com as faces das cartas voltadas para baixo. Portanto as posições corretas das cartas contadas com as faces voltadas para baixo serão as seguintes, conforme o quadro 4.32 a seguir.

Quadro 4.32 – Primeira distribuição (posições das cartas com faces voltadas para baixo).

Cartas	Monte 1	C_1	Monte 2	C_2	Monte 3	C_3	Monte 4
Posição	1 até 7	8	9 até 15	16	17 até 23	24	25 até 26
Total de cartas	7	1	7	1	7	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Perceba no quadro 4.32 acima que novamente as cartas escolhidas ficaram em posições pares (C_1, C_2 e C_3, respectivamente nas posições 8, 16 e 24). Assim dando continuidade ao passo 7, de maneira análoga a primeira distribuição realizada, após realizar a segunda distribuição teremos as seguintes novas posições, conforme o quadro 4.33 abaixo, ao descartar mais 13 cartas (metade) e conta-las de baixo para cima.

Quadro 4.33 – Segunda distribuição (posições das cartas com faces voltadas para cima).

<table>
<tr><td>Cartas</td><td>Monte 1</td><td>C_1</td><td>Monte 2</td><td>C_2</td><td>Monte 3</td><td>C_3</td><td>Monte 4</td></tr>
<tr><td>Posição</td><td rowspan="2">3 cartas</td><td>4</td><td rowspan="2">3 cartas</td><td>8</td><td rowspan="2">3 cartas</td><td>12</td><td rowspan="2">1 carta</td></tr>
<tr><td>Total de cartas</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Daí segue analogamente que as posições contadas de cima para baixo serão as seguintes, conforme o quadro 4.34 abaixo.

Quadro 4.34 – Segunda distribuição (posições das cartas com faces voltadas para baixo).

Cartas	Monte 4	C_3	Monte 3	C_2	Monte 2	C_1	Monte 1
Posição	1	2	3 até 5	6	7 até 9	10	11 até 13
Total de cartas	1	1	3	1	3	1	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Mais uma vez as cartas escolhidas ficaram localizadas em posições pares (C_3, C_2 e C_1) respectivamente nas posições 2, 6 e 10). E note pelo quadro 4.34 que se tem 7 cartas localizadas em posições impares.

Daí após a terceira distribuição conforme o passo 7, o monte 4 não terá mais cartas, pois sua única carta restante de posição 1 (ímpar) foi descartada assim como a última carta da posição 13. Portanto teremos a seguinte nova configuração para as posições das cartas de baixo para cima ao descartar as 7 cartas das posições impares, conforme o quadro 4.35 a seguir.

Quadro 4.35 – Terceira distribuição (posições das cartas com faces voltadas para cima).

<table>
<tr><td>Cartas</td><td>C_3</td><td>Monte 3</td><td>C_2</td><td>Monte 2</td><td>C_1</td><td>Monte 1</td></tr>
<tr><td>Posição</td><td>1</td><td rowspan="2">1 carta</td><td>3</td><td rowspan="2">1 carta</td><td>5</td><td rowspan="2">1 carta</td></tr>
<tr><td>Total de cartas</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Da mesma forma as posições contadas de cima para baixo seguem conforme o quadro 4.36 abaixo.

Quadro 4.36 – Terceira distribuição (posições das cartas com faces voltadas para baixo).

Cartas	Monte 1	C_1	Monte 2	C_2	Monte 3	C_3
Posição	1	2	3	4	5	6
Total de cartas	1	1	1	1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Finalizando o passo 7, após realizar a última distribuição, o mágico ficará em suas mãos com as cartas escolhidas,C_1, C_2 e C_3, uma vez que as mesmas estarão respectivamente nas posições pares 2, 4 e 6, e as cartas das posições ímpares (1, 3 e 5) serão excluídas. Assim conclui-se o truque mostrando as cartas escolhidas ao público.

4.7 Matemágica 7: Bolso mágico

4.7.1 Descrição da Matemágica 7

[7]**Passo 1**: O mágico convida um aluno e pede para ele retirar 20 cartas quaisquer do baralho. Logo após pede para o aluno embaralhar as cartas, depois abri-las em um leque, de forma que só ele possa ver as cartas. Daí o mágico lhe dá uma carta coringa para que ele a coloque entre duas outras cartas, sem que o mágico as veja. E por fim, solicita que o aluno memorize tais cartas que estão à direita e a esquerda do coringa (acima e abaixo).

Passo 2: O mágico pega as cartas e com todas viradas para baixo começa a distribui-las em dois montes, colocando a primeira carta no primeiro monte, a segunda no segundo monte, a terceira no primeiro monte, a quarta no segundo monte, e assim por diante, até finalizar todas as cartas. Logo após coloca o segundo monte acima do primeiro monte.

Passo 3: O mágico repete o processo do passo 2.

Passo 4: O mágico procura o coringa entre as cartas e logo após acha-lo, o retira da Matemágica e coloca todas as cartas que estavam abaixo dele para cima do monte com as faces das cartas viradas para baixo.

Passo 5: O mágico solicita que o aluno corte e divida o monte de 20 cartas em dois outros montes, mais ou menos ao meio. Daí o mágico pega o monte que estava na parte de cima do baralho e coloca no bolso direito, com as faces das cartas viradas para o seu corpo. E coloca no seu bolso esquerdo o outro monte que estava na parte de baixo do baralho, com as costas das cartas viradas para o seu corpo.

Passo 6: Por fim o mágico põe uma mão no bolso esquerdo e outra no direito e puxa uma carta de cada bolso, exatamente as duas cartas que estavam a direita e a esquerda do coringa.

4.7.2 Como funciona a Matemágica 7?

Seja C_x a representação das cartas na posição inicial x, com $x \in \mathbb{N}$ e $1 \leq x \leq 21$. Note que para uma carta C_x representar o coringa conforme a Matemágica, então $x \neq 1$ e $x \neq 21$, uma vez que o coringa deve ser colocado entre duas outras cartas de modo que ficará disposto em uma das posições x de 2 até 20. Agora sejam C_{x-1} e C_{x+1} as cartas que ficam respectivamente a esquerda e a direita do coringa, observemos o quadro 4.37 abaixo contendo as posições iniciais x de cada uma das 21 cartas.

[7]Temporão (2011)

Quadro 4.37 – Posições iniciais x das 21 cartas.

Posição x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Carta	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{20}	C_{21}

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

• Se o coringa for colocado em uma posição par, as cartas C_{x-1} e C_{x+1} serão localizadas em posições impares da forma $2k+1$, onde $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

• Se o coringa for colocado em uma posição ímpar, as cartas C_{x-1} e C_{x+1} serão localizadas em posições pares da forma $2k$, onde $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

No passo 2, ao distribuir as 21 cartas em dois montes, as cartas da forma $x = 2k+1$ ficarão no primeiro monte e as cartas da forma $x = 2k$ ficarão no segundo monte, gerando novas posições $y \in \mathbb{N}$ para as cartas, conforme o quadro 4.38 abaixo.

Quadro 4.38 – Primeira distribuição das cartas.

MONTE 1	Forma de x	$2k+1$										
	Carta	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{17}	C_{19}	C_{21}
	Nova posição y	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
MONTE 2	Forma de x	$2k$										
	Carta	C_2	C_4	C_6	C_8	C_{10}	C_{12}	C_{14}	C_{16}	C_{18}	C_{20}	
	Nova posição y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note também que após a primeira distribuição, as cartas C_x ficarão com posições invertidas nos dois montes formados, uma vez que são colocadas uma carta acima da outra. Perceba também que as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficarão juntas ao colocar o monte 2 sobre o monte 1, com C_{x-1} abaixo de C_{x+1}, independente se são da forma $x = 2k$ ou $x = 2k+1$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, conforme o quadro 4.39 abaixo.

Quadro 4.39 – Posições das cartas após a Primeira distribuição.

Forma de x	$2k$										$2k+1$										
Carta	C_{20}	C_{18}	C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2	C_{21}	C_{19}	C_{17}	C_{15}	C_{13}	C_{11}	C_9	C_7	C_5	C_3	C_1
Nova posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No passo 3, ao distribuir as cartas novamente em dois montes, segue que C_{x-1} e C_{x+1} ficarão localizadas em montes diferentes, uma vez que no passo anterior, C_{x+1} ficou acima de C_{x-1}. De fato, se C_{x+1} ficou em uma posição y na primeira distribuição, então C_{x-1} ficou na posição $y + 1$, acarretando que C_{x-1} e C_{x+1} terão paridades diferentes após a segunda distribuição.

Daí seja $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a segunda distribuição se dará conforme o quadro 4.40 abaixo, obtendo as novas posições z para as cartas, com $z \in \mathbb{N}$ e novamente considerando que os montes são formados colocando uma carta acima da outra com faces voltadas para baixo.

Quadro 4.40 – Segunda distribuição das cartas.

MONTE 1	Forma de y	$2q + 1$										
	Carta	C_{20}	C_{16}	C_{12}	C_8	C_4	C_{21}	C_{17}	C_{13}	C_9	C_5	C_1
	Posição z	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
MONTE 2	Forma de y	$2q$										
	Carta	C_{18}	C_{14}	C_{10}	C_6	C_2	C_{19}	C_{15}	C_{11}	C_7	C_3	
	Posição z	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Agora após a segunda distribuição, ao colocar novamente o monte 2 acima do monte 1, obteremos a seguinte distribuição das cartas conforme o quadro 4.41 abaixo.

Quadro 4.41 – Posições das cartas após a segunda distribuição.

x e y	$x = 2k + 1$ e $y = 2q$					$x = 2k$ e $y = 2q$					$x = 2k + 1$ e $y = 2q + 1$						$x = 2k$ e $y = 2q + 1$				
Carta	C_3	C_7	C_{11}	C_{15}	C_{19}	C_2	C_6	C_{10}	C_{14}	C_{18}	C_1	C_5	C_9	C_{13}	C_{17}	C_{21}	C_4	C_8	C_{12}	C_{16}	C_{20}
posição z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No passo 4, observe que independentemente da posição z onde esteja o coringa, sabendo que ele não pode ser as cartas C_1 e C_{21}, isto é, o coringa não pode estar localizado nas posições $z = 11$ e $z = 16$. Ao retira-lo, restarão 20 cartas e deve-se colocar as cartas que estavam abaixo dele para cima do monte.

Daí, sendo C_x o coringa, note pelo quadro 4.41 que a distância entre as posições z das cartas C_{x-1} e C_x, assim como a distância entre as posições z das cartas C_x e C_{x+1} são sempre iguais a 5 (considere no decorrer da contagem que ao chegar na carta da posição $z = 21$, deve-se continuar a contagem retornando para carta da posição $z = 1$). Portanto ao colocar as cartas que estavam abaixo do coringa para cima do monte as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficarão localizadas nas novas posições 5 e 16 respectivamente.

O passo 5 não altera a posição das cartas C_{x-1} e C_{x+1} , pois o corte nas cartas feito pelo aluno dividindo o baralho formando dois outros montes, é realizado mais ou menos no meio.

Com isso a quantidade de cartas que cada monte possui será pelo menos maior que 5, o que garante a não mudança das posições de C_{x-1} e C_{x+1}.

No final do passo 5 o mágico coloca a parte de cima do monte no bolso direito, com as faces das cartas viradas para o seu corpo, assim mantendo a posição 5 da carta C_{x-1} e coloca a parte de baixo do monte no seu bolso esquerdo, com as costas viradas para o seu corpo, assim a posição da carta C_{x+1} é alterada da posição 16 para a posição de número 5, quando o monte é virado com as costas para o seu corpo.

Portanto no passo 6 ao puxar de cada bolso uma carta, basta puxar a quinta carta de cada monte (considerando que a primeira carta é a que estiver mais longe do seu corpo). Assim, o mágico estará puxando exatamente as cartas que estavam acima e abaixo do coringa nas posições $(x+1)$ e $(x-1)$ respectivamente, finalizando o truque.

4.7.3 Outra forma de realizar a Matemágica 7

Existe outra forma de tornar o truque realizado na Matemágica 7 ainda mais atraente ao público, sem modificar as posições finais das duas cartas C_{x-1} e C_{x+1}, no passo 6, dentro do bolso do mágico.

Para isto, basta no passo 2 da Matemágica 7, antes do mágico colocar o segundo monte acima do primeiro monte, inverter as posições de todas as cartas em cada um dos dois montes, isto é, distribuir carta por carta uma acima da outra até finalizar as cartas do monte 1 e logo após fazer o mesmo com as cartas do monte 2. Este procedimento irá acarretar na inversão das posições $y \in \mathbb{N}$ das cartas do quadro 4.38, conforme podemos observar no quadro 4.42 abaixo.

Quadro 4.42 – Primeira distribuição com posições das cartas invertidas.

MONTE 1	Forma de x	$2k+1$										
	Carta	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{17}	C_{19}	C_{21}
	Nova posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
MONTE 2	Forma de x	$2k$										
	Carta	C_2	C_4	C_6	C_8	C_{10}	C_{12}	C_{14}	C_{16}	C_{18}	C_{20}	
	Nova posição y	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Portanto ao colocar o monte 2 sobre o monte 1, obtemos a seguinte configuração das posições das cartas, conforme o quadro 4.43 abaixo.

Quadro 4.43 – Posições invertidas das cartas após a primeira distribuição.

Forma de n	$2k$										$2k+1$										
Carta	C_2	C_4	C_6	C_8	C_{10}	C_{12}	C_{14}	C_{16}	C_{18}	C_{20}	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{17}	C_{19}	C_{21}
Nova posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Da mesma forma no passo 3, ao repetir os procedimentos realizados no passo 2, distribuindo as cartas em dois novos montes e logo após invertendo as posições das mesmas em cada monte, obtemos a seguinte nova configuração para as posições $z \in \mathbb{N}$ das cartas, conforme o quadro 4.44 a seguir.

Quadro 4.44 – Segunda distribuição com posições das cartas invertidas.

MONTE 1	Forma de y	$2q+1$										
	Carta	C_2	C_6	C_{10}	C_{14}	C_{18}	C_1	C_5	C_9	C_{13}	C_{17}	C_{21}
	Posição z	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
MONTE 2	Forma de y	$2q$										
	Carta	C_4	C_8	C_{12}	C_{16}	C_{20}	C_3	C_7	C_{11}	C_{15}	C_{19}	
	Posição z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Por fim, ao colocar novamente o monte 2 sobre o monte 1, obtemos a seguinte configuração para as novas posições das cartas, conforme o quadro 4.45 abaixo.

Quadro 4.45 – Posições invertidas das cartas após a segunda distribuição.

x e y	$x = 2k$ e $y = 2q$					$x = 2k+1$ e $y = 2q$					$x = 2k$ e $y = 2q+1$					$x = 2k+1$ e $y = 2q+1$					
Carta	C_4	C_8	C_{12}	C_{16}	C_{20}	C_3	C_7	C_{11}	C_{15}	C_{19}	C_2	C_6	C_{10}	C_{14}	C_{18}	C_1	C_5	C_9	C_{13}	C_{17}	C_{21}
posição z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Da mesma forma realizada na análise do quadro 4.41 feita anteriormente, podemos concluir pelo quadro 4.45 que o coringa não pode estar localizado nas posições $z = 16$ e $z = 21$. Daí, sendo C_x o coringa, obtemos novamente pelo quadro 4.45 que a distância entre as posições z das cartas C_{x-1} e C_x, assim como a distância entre as posições z das cartas C_x e C_{x+1} são sempre iguais a 5, considerando mais uma vez que a contagem ao chegar na carta da posição $z = 21$, deve-se continuar retornando para carta da posição $z = 1$. E assim mais uma vez ao colocar as cartas que estavam abaixo do coringa para cima do monte, obtemos que as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficarão nas posições 5 e 16 respectivamente, acarretando ao final do passo 5 que as posições das cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficaram localizadas ambas nas posições de valor 5 em cada bolso, portanto finalizando o truque, conforme já mostramos anteriormente.

4.8 Matemágica 8: Mágica das 10 cartas

4.8.1 Descrição da Matemágica 8

[8]**Passo 1**: O mágico convida um aluno e solicita que ele escolha 10 cartas do baralho e em seguida trace-as. Logo após solicita que o aluno escolha uma carta entre as 10, mostre a carta ao público e a coloque acima das outras nove cartas, com as faces das cartas viradas para baixo.

Passo 2: O mágico solicita que o aluno escreva em um papel algum número de 1 até 9, de modo que o mágico não veja o valor, em seguida mostre para a turma e passe a quantidade de cartas do topo, referente ao número, para baixo do baralho, uma a uma ou todas de uma única vez. Por fim o aluno devolve as dez cartas ao mágico.

Passo 3: O mágico também escreve um número em um papel a parte para desvenda-lo no passo 6.

Passo 4: O mágico distribui, iniciando do topo, uma carta por vez, colocando uma acima da outra na mesa, até finalizar todas as 10 cartas.

Passo 5: Agora o mágico separa o baralho em dois montes de 5 cartas cada e coloca o monte que estava na parte de baixo para cima do outro monte.

Passo 6: Neste momento, o mágico desvenda o número escrito por ele no papel no passo 3 mostrando ao público e pede para que o aluno também mostre o número escrito no seu papel no passo 2. Daí, soma os dois números e coloca, uma a uma, o total de cartas correspondentes a soma para baixo do baralho.

Passo 7: Por fim, o mágico pega o baralho e vai formando um monte acima da mesa, com as faces das cartas voltadas para cima, da seguinte maneira: vira a primeira carta do topo do baralho iniciando o monte acima da mesa e coloca a próxima carta para baixo do baralho em sua mão. Fala também ao aluno que ele diga a palavra “pare” assim que aparecer a carta escolhida por ele. E continua virando a próxima carta do topo acima do monte formado e coloca a próxima carta para baixo do baralho. Repete esse procedimento até que o monte contenha 9 cartas e reste apenas uma carta em sua mão, exatamente a carta escolhida pelo aluno.

[8]Barbieri (2023)

4.8.2 Como funciona a Matemágica 8?

No passo 1 note que a carta escolhida pelo aluno, representada pela letra C, é colocada no topo do baralho, isto é, na posição 1 de cima para baixo.

Daí, no passo 2 o aluno pensa em um número $x \in \mathbb{N}$ tal que, $1 \leq x \leq 9$, e coloca a quantidade de cartas do topo, correspondentes a este número, para baixo do baralho.

O quadro 4.46 abaixo descreve a nova posição y da carta C, com $y \in \mathbb{N}$, em relação a cada número x escolhido pelo aluno.

Quadro 4.46 – Possíveis posições da carta C após a escolha do número x.

Posição da carta C	Posição 1								
Total de cartas x colocadas para baixo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Posição y da carta C	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note que o total de cartas x colocadas para baixo do baralho somadas com o valor da nova posição y da carta C sempre resulta em 11, isto é, $x + y = 11$ conforme o quadro 4.46 acima. Acarretando que a posição 1 da carta C será alterada para a posição $y = 11 - x$. E perceba que $y \neq 1$, pois $1 \leq x \leq 9$.

No passo 4 ao distribuir as cartas uma acima da outra na mesa, a posição anterior y das cartas somadas com a nova posição z após a distribuição, onde $z \in \mathbb{N}$ e $z \neq 10$, novamente será sempre igual a 11, isto é, $y + z = 11$, conforme o quadro 4.47 abaixo.

Quadro 4.47 – Posições z da carta C.

Posição y da carta C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição z da carta C	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Dessa forma, a carta C escolhida passará para a posição correspondente ao número x escrito no papel pelo aluno. De fato, observe:

$$y + z = 11 \Leftrightarrow 11 - x + z = 11 \Leftrightarrow z = x$$

Assim, como $1 \leq x \leq 9$, então: $1 \leq z \leq 9$, com $z \in \mathbb{N}$. Portanto os possíveis valores naturais para z variam de 1 até 9. Assim a carta C não poderá estar localizada na posição $z = 10$ ao finalizar o passo 4.

No passo 5 ao cortar o baralho exatamente no meio, a posição da carta C escolhida será modificada para a posição:

• $w = x + 5$, com $w \in \mathbb{N}$, se o número x escolhido for menor do que ou igual a 5.

• $w = x - 5$, com $w \in \mathbb{N}$, se o número x escolhido for maior que 5.

Observe o quadro 4.48 abaixo, evidenciando as possibilidades para nova posição $w \in \mathbb{N}$, após o corte realizado.

Quadro 4.48 – Posições w da carta C.

Posição z da carta C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição w da carta C	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Como $1 \leq z \leq 9$, então a carta C no passo 5 não poderá ocupar a posição $w = 5$, uma vez que a carta que ocupava a posição $z = 10$, no passo anterior, não era C.

No passo 6 o mágico revela que o número escrito por ele no papel no passo 3 é o número um, solicita que o aluno mostre o número que escreveu em seu papel no passo 2 e some os dois valores. Logo após solicita que o aluno coloque a quantidade de cartas do topo, referente a soma, para baixo do baralho. Feito isto a carta escolhida sempre ficará na posição de número 4. Observe a demonstração deste fato abaixo.

• Se o valor escolhido pelo aluno for menor do que ou igual a 5, então conforme o quadro 4.48 acima, a posição w da carta será 6, 7, 8, 9 ou 10, isto é:

$$w = x + 5$$

Como $x \leq 5$ e precisamos passar $x+1$ cartas para baixo do baralho, segue que: $x+1 \leq 6$. Daí a nova posição n da carta C, com $n \in \mathbb{N}$, será dada pela diferença entre w e $(x+1)$, uma vez que a carta C escolhida reduzira sua posição em $(x+1)$ posições, Conforme observamos no quadro 4.49 abaixo.

Quadro 4.49 – Posição $n = 4$, quando $w = x + 5$.

Posição w da carta C	6	7	8	9	10
Número x escolhido pelo aluno	1	2	3	4	5
Valor de $(x+1)$	2	3	4	5	6
Posição n da carta C: $n = w - (x+1)$	4	4	4	4	4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

De fato:

$$n = w - (x+1) = x + 5 - (x+1) = 5 - 1 = 4$$

• Por outro lado, se o valor x escolhido for maior que 5, então conforme o quadro 4.48 a posição w da carta C será 1, 2, 3 ou 4, isto é:

$$w = x - 5$$

Como $x > 5$, e precisamos passar $x + 1$ cartas para baixo do baralho. Então: $x + 1 > 6$.

Daí a nova posição n, com $n \in \mathbb{N}$, da carta C será dada retornando $(x + 1)$ cartas do topo do baralho para baixo do baralho, isto é, a posição n será a diferença entre w e $(x + 1)$, uma vez que a carta C escolhida reduzira sua posição em $(x + 1)$ posições.

Ora, $w < x$, logo:

$$\begin{aligned} & w - x < 0 \\ \Rightarrow \quad & w - x - 1 < 0 \\ \Rightarrow \quad & w - (x + 1) < 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Portanto, temos da equação (4.3) que em algum momento a carta C sairá do topo (posição 1) e passará para baixo do baralho (posição 10).

Por outro lado, conforme vimos no quadro 4.46, observamos que ao colocar uma certa quantidade de cartas do topo para baixo do baralho, a carta que estava na posição 1 irá passar para a posição:

- 10, se colocarmos uma carta apenas para baixo do baralho;
- 9, se colocarmos duas cartas para baixo do baralho;
- 8, se colocarmos três cartas para baixo do baralho;
- $\vdots$
- 2, se colocarmos nove cartas para baixo do baralho;
- 1, se colocarmos dez cartas para baixo do baralho.

Daí percebemos que a quantidade de cartas que passamos do topo do baralho para baixo do baralho influenciam diretamente em qual posição irá ficar a carta que estava na posição 1, conforme visto no quadro 4.50 abaixo, com $a, b \in \mathbb{N}$, análogo ao quadro 4.46.

Quadro 4.50 – $a + b = 11$.

Posição da carta	Posição 1									
Total de cartas "a" colocadas para baixo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição b da carta	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Assim a soma da quantidade de cartas "a" passadas para baixo do baralho somadas com o valor da nova posição "b" desta carta sempre resulta em 11, isto é:

$$a + b = 11$$

Agora vamos observar pelo quadro 4.51 abaixo o total de cartas $m \in \mathbb{N}$, que necessitamos passar para baixo do baralho até que a carta C fique exatamente na posição 1.

Quadro 4.51 – Quantidade de cartas colocadas para baixo até C chegar na posição 1.

Posição w da carta C	1	2	3	4
Número x escolhido pelo aluno	7	8	9	10
Quantidade de cartas m colocadas para baixo do baralho até C chegar na posição 1.	0	1	2	3
Total de Cartas restantes que faltam passar para baixo do baralho.	7	7	7	7

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Observe que a nova posição de C (posição 1) é dada por $w - m = 1$, onde $0 \leq m \leq 3$. E vamos mostrar, conforme visto no quadro 4.51, que o total de cartas restantes que ainda faltam passar para baixo do baralho $(x + 1) - m$ será sempre igual a 7.

De fato, das equações $w = x - 5$ e $w - m = 1$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} w = x - 5 \\ w = m + 1 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} & x - 5 = m + 1 \\ \Rightarrow \quad & x - m = 6 \\ \Rightarrow \quad & (x + 1) - m = 7 \end{aligned}$$

Assim, da análise feita anteriormente no quadro 4.50 para as cartas que se encontram na posição 1, tomando $n = a$ e $(x + 1) - m = b$, obteremos que a nova posição n da carta C somada com o total de cartas que restam passar para baixo do baralho $(x + 1) - m = 7$, será:

$$\begin{aligned} & a + b = 11 \\ \Rightarrow \quad & n + (x + 1) - m = 11 \\ \Rightarrow \quad & n + 7 = 11 \\ \Rightarrow \quad & n = 4 \end{aligned}$$

Assim concluímos, conforme visto no quadro 4.50 que a carta C sempre ficará na posição 4 ao finalizar o passo 6.

Agora, conforme o passo 7, ao distribuir as cartas obtemos no primeiro descarte que as cartas que ficarão na mão do mágico serão as cartas de posições pares e como a carta C escolhida estava na posição 4, então passará para a posição 2, uma vez que metade das cartas foram descartas e assim divide-se as posições de cada uma delas por 2.

Após o segundo descarte, a carta C ficaria na posição 1 (impar), porém como restaram 5 cartas após o primeiro descarte (número ímpar de cartas), a última carta (posição 5) é descartada e a próxima carta C é deslocada para baixo, assim C passará para posição 2, restando apenas duas cartas.

Portanto no último descarte, a carta C da posição 2 (par) será a carta que restará na mão do mágico. Concluindo assim a Matemágica.

Vejamos a seguir dois exemplos conforme os quadros 4.52 e 4.53 para os valores 4 e 7 respectivamente escolhidos por alunos participantes na Matemágica.

Seja C_x a carta localizada na posição x, com $x \in \mathbb{N}$. Deste modo C_1 será a carta escolhida pelo aluno, visto que ela é colocada no topo do baralho no passo 1.

• Exemplo com o número 4, escrito no papel.

Quadro 4.52 – Exemplo quando o número 4 for escolhido.

Posição da carta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Passo 1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Passo 2	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_1	C_2	C_3	C_4
Passo 4	C_4	C_3	C_2	C_1	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5
Passo 5	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	C_{10}
Passo 6	C_4	C_3	C_2	C_1	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5
Descarte 1	C_3	C_1	C_9	C_7	C_5					
Destarte 2	C_7	C_1								
Destarte 3	C_1									

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

- Exemplo com o número 7, escrito no papel.

Quadro 4.53 – Exemplo quando o número 7 for escolhido.

Posição da carta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Passo 1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Passo 2	C_8	C_9	C_{10}	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
Passo 4	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	C_{10}	C_9	C_8
Passo 5	C_2	C_1	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3
Passo 6	C_4	C_3	C_2	C_1	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5
Descarte 1	C_3	C_1	C_9	C_7	C_5					
Destarte 2	C_7	C_1								
Destarte 3	C_1									

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4.9 Matemágica 9: A carta que sobrou

4.9.1 Descrição da Matemágica 9

[9]**Passo 1**: O Mágico convida um aluno e solicita que embaralhe as cartas do baralho e retire 10 cartas quaisquer.

Passo 2: Das 10 cartas escolhidas, o mágico solicita para o aluno abrir um leque com as faces das cartas viradas para o seu corpo, escolha uma delas sem que o mágico a veja e mostre-a para o público. Logo após solicita que o aluno devolva a carta ao monte em qualquer posição de 1 até 10, considerando as cartas da direita para a esquerda, isto é, considerando o monte virado com as faces das cartas voltadas para cima e em seguida escreva num papel o valor desta posição. Por fim, o mágico solicita para o aluno fechar o leque e entregar as cartas, com as faces voltadas para baixo.

Passo 3: O mágico pega as dez cartas, faz um corte, e as devolve novamente para o aluno.

Passo 4: O mágico solicita ao aluno que desvende o valor escrito no papel referente a posição da carta escolhida e solicita que ele retire a quantidade de cartas referente ao valor da posição de baixo do monte e as coloque para cima.

Passo 5: Em seguida o mágico solicita para o aluno lhe entregar a primeira carta do topo, e pôr a próxima embaixo do monte, continuando este processo até que reste apenas

[9]Temporão (2011)

uma carta em sua mão. Em seguida, o mágico pede para ele mostrar a carta restante ao público, e esta será exatamente a carta que o aluno escolheu.

4.9.2 Como funciona a Matemágica 9?

No passo 2 o aluno escolhe uma carta C_x, numa posição x, tal que $1 \leq x \leq 10$ com $x \in \mathbb{N}$, considerando o monte virado com as faces das cartas voltadas para cima, e anota este valor em um papel.

Ainda no passo 2, ao devolver o monte ao mágico com as faces das cartas voltadas para baixo, as posições das cartas se alteram, conforme o quadro 4.54 abaixo.

Quadro 4.54 – Posições das cartas com faces voltadas para cima e para baixo.

Carta C_x	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Posição x com as faces para cima	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
posição y com as faces para baixo	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Daí as novas posições y das cartas, com $y \in \mathbb{N}$, ficarão distribuídas conforme o quadro 4.55 abaixo.

Quadro 4.55 – Posições das cartas com faces voltadas para baixo.

Carta C_x	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
Posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note pelo quadro 4.54 que a soma da posição anterior x com a posição atual y é sempre igual a 11. Logo:

$$\begin{aligned} & x + y = 11 \\ \Rightarrow\ & y = 11 - x \end{aligned} \tag{4.4}$$

Portanto a nova posição será dada por $y = 11 - x$.

No passo 3 o mágico ao cortar o monte com as dez cartas voltadas para baixo, na verdade ele retira apenas três cartas de baixo do monte e as coloca para o topo. Daí a configuração das novas posições z das cartas, com $z \in \mathbb{N}$ ficam distribuídas conforme o quadro 4.56 abaixo.

Quadro 4.56 – Posições z das cartas.

Carta C_x	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
Posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nova posição z	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Assim as novas posições z das cartas em relação as posições x iniciais, são dadas conforme o quadro 4.57 abaixo.

Quadro 4.57 – Posições z das cartas em relação a posições x.

Carta C_x	C_3	C_2	C_1	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4
Posição x com as faces para cima	3	2	1	10	9	8	7	6	5	4
Posição z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Do quadro 4.57, observemos que:

• Se a carta C_x escolhida estiver em alguma posição y de 1 até 7, isto é, $1 \leq y \leq 7$, então a nova posição z de C_x, será dada por:

$$z = y + 3 \tag{4.5}$$

Uma vez que as cartas se deslocam 3 posições para baixo e assim aumentam sua posição em 3 unidades.

Por outro lado:

$$\begin{aligned} & 1 \leq y \leq 7 \\ \Rightarrow \quad & 4 \leq y + 3 \leq 10 \\ \Rightarrow \quad & 4 \leq z \leq 10 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Agora, substituindo a equação (4.4) na equação (4.5), obtemos:

$$\begin{aligned} & z = y + 3 = 11 - x + 3 \\ \Rightarrow \quad & z = 14 - x \qquad (4.7) \\ \Rightarrow \quad & x + z = 14 \end{aligned}$$

Da mesma forma substituindo a equação (4.7) na equação (4.6), obtemos:

$$
\begin{aligned}
& 4 \le z \le 10 \\
\Rightarrow\ & 4 \le 14 - x \le 10 \\
\Rightarrow\ & -10 \le -x \le -4 \\
\Rightarrow\ & 4 \le x \le 10
\end{aligned}
$$

Portanto a posição inicial x da carta C_x escolhida quando $1 \le y \le 7$ será alguma posição de 4 até 10 e as somas entre os valores das posições x e z sempre resultam em 14, conforme pode ser percebido no quadro 4.57.

No passo 4 o aluno deverá retirar uma quantidade x de cartas de baixo do baralho, referente a posição escrita no papel, e as colocar para o topo gerando uma nova posição w, com $w \in \mathbb{N}$. Portanto a nova posição w aumentará um valor x em relação a posição z, Assim:

$$
\begin{aligned}
& w &=& \ z + x \qquad \text{Utilizando a equação (4.7)} \\
& &=& \ 14 - x + x \\
\Rightarrow\ & w &=& \ 14
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $w > 10$ e as posições das cartas são apenas da posição 1 até a posição 10, tem-se que ao retirar a última carta, correspondente a posição 10, na parte de baixo do monte e coloca-la para o topo, ela passará para a posição 1. Assim precisamos determinar qual será a nova posição w da carta C_x quando ela estiver na posição 10 e forem colocadas uma quantidade n de cartas, com $n \in \mathbb{N}$, para o topo do monte.

Seja n o total de cartas colocadas para o topo do baralho, então a posição da carta que estava na posição 10 será alterada conforme o quadro 4.58 abaixo.

Quadro 4.58 – Relação entre o total de cartas colocadas para o topo e a carta da posição 10.

Posição da carta	Posição 10									
Total de cartas n colocadas para o topo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nova posição da carta que estava na posição 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Como $w = 14 = 10 + 4 > 10$, segue que a carta C_x ao chegar na posição $w = 10$, restarão 4 cartas para serem colocadas de baixo do monte para o topo. Então pelo quadro 4.58 acima obtemos que $w = 14$ é equivalente a posição $w = 4$.

Agora, de maneira análoga, pelo quadro 4.56, observemos que:

• Se a carta C_x escolhida estiver em alguma posição y de 8 até 10, isto é, $8 \leq y \leq 10$, então a nova posição z de C_x será a posição:

$$z = y - 7 \tag{4.8}$$

Uma vez que as cartas se deslocam 3 posições para baixo e retornam a sua contagem ao topo do monte, sendo suas posições z iguais a 1, 2 ou 3. De fato, observe:

$$\begin{aligned} & 8 \leq y \leq 10 \\ \Rightarrow\ & 1 \leq y - 7 \leq 3 \\ \Rightarrow\ & 1 \leq z \leq 3 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Observemos agora que substituindo a equação (4.4) na equação (4.8), obtemos:

$$\begin{aligned} & z = y - 7 = 11 - x - 7 \\ \Rightarrow\ & z = 4 - x \\ \Rightarrow\ & x + z = 4 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora, substituindo a equação (4.10) na equação (4.9), obtemos:

$$\begin{aligned} & 1 \leq z \leq 3 \\ \Rightarrow\ & 1 \leq 4 - x \leq 3 \\ \Rightarrow\ & -3 \leq -x \leq -1 \\ \Rightarrow\ & 1 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Portanto a posição inicial x da carta C_x escolhida quando $8 \leq y \leq 10$ será alguma posição de 1 até 3 e as somas entre os valores das posições x e z sempre resultam em 4, conforme pode ser percebido no quadro 4.57.

No passo 4 o aluno deverá retirar uma quantidade x de cartas de baixo do monte, referente a posição escrita no papel, e as colocar para o topo. Portanto a nova posição w da carta C_x aumentará um valor x em relação a posição z, logo:

$$\begin{aligned} w &= z + x \qquad \text{Utilizando a equação (4.10)} \\ &= 4 - x + x \\ \Rightarrow\ w &= 4 \end{aligned}$$

Assim concluímos que independentemente da carta C_x e a posição x escolhida pelo aluno, a sua nova posição ao final do passo 4 sempre será $w = 4$.

Daí segue, analogamente ao passo 7 da Matemágica 8, que ao distribuir as cartas conforme o passo 5 desta mágica, no primeiro descarte as cartas que ficarão na mão do mágico serão as cartas de posições pares, onde a carta C_x escolhida que estava na posição 4 passará para a posição 2 uma vez que se divide as posições pela metade, conforme o quadro 4.59 abaixo, considerando as demais cartas representadas pela letra X.

Quadro 4.59 – Passo 5 da Matemágica 9.

Posição da carta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Passo 5	X	X	X	C_x	X	X	X	X	X	X
Descarte 1	X	C_x	X	X	X					
Destarte 2	X	C_x								
Destarte 3	C_x									

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após o segundo descarte, a carta C_x ficaria na posição 1 (impar), porém como restaram 5 cartas após o descarte 1 (número ímpar de cartas) a última carta (posição 5) é descartada e a próxima carta C_x é deslocada para baixo, assim C_x passará para posição 2, restando apenas duas cartas. Portanto no último descarte a carta C_x da posição 2 (par) será a carta que restará na mão do aluno, assim finalizando o truque.

4.10 Matemágica 10: A carta ajudante

4.10.1 Descrição da Matemágica 10

[10]**Passo 1**: O mágico convida um aluno, solicita que escolha 16 cartas do baralho e as trace da maneira que desejar. Logo após finalizar o traçado, o mágico pede para ele escolher uma carta e coloca-la na base do baralho (posição 16), isto é, na parte de baixo e logo após mostrar a carta ao público sem retira-la da posição 16. Esta será a carta a ser desvendada ao final da mágica.

Passo 2: O mágico distribui ou pede para o aluno distribuir as cartas da seguinte forma: Colocar a primeira carta para baixo do baralho em sua mão e colocar a próxima carta na mesa, repetindo esse procedimento até que reste apenas uma carta em sua mão. Todas as cartas colocadas acima da mesa devem ser postas uma acima da outra formando um monte

[10]Brito (2021)

com 15 cartas. Por fim, o mágico pega a carta restante em sua mão e fala ao público que ela será uma carta ajudante para encontrar a carta decorada pelo aluno no passo 1.

Passo 3: O mágico coloca a carta ajudante com a face voltada para cima, acima das demais 15 cartas. Logo após separa as cartas em dois montes da seguinte forma: a primeira carta no primeiro monte, a segunda carta no segundo monte, a terceira no primeiro monte, a quarta no segundo monte e assim por diante até finalizar as 16 cartas. Dentre os dois montes com 8 cartas, o mágico descarta o monte que não possui a carta ajudante, pega o outro monte que contém a carta ajudante e repete o procedimento para separar este em dois outros montes com 4 cartas cada. Repete o processo novamente com o monte de 4 cartas que contém a carta ajudante e assim restará apenas 2 cartas, uma será a carta ajudante e a outra será exatamente a carta decorada pelo aluno no passo 1.

4.10.2 Como funciona a Matemágica 10?

Seja C_x a carta na posição x, onde x é o valor da posição das cartas após finalizar o passo 1, com $x \in \mathbb{N}$, $1 \leq x \leq 16$. Daí as cartas ficam dispostas conforme o quadro 4.60 abaixo.

Quadro 4.60 – Posições das cartas no passo 1.

Cartas C_x	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
Posição x das cartas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note, pelo quadro 4.60 que C_{16} é a carta escolhida pelo aluno e colocada na parte de baixo das cartas.

No passo 2 ao realizar a primeira distribuição com as 16 cartas, conforme solicitado pelo mágico, as primeiras 8 cartas colocadas uma acima da outra na mesa serão as cartas das posições pares, isto é, $x = 2q$, com $q \in \mathbb{N}$. Tais cartas ficam dispostas conforme o quadro 4.61 abaixo, gerando novas posições $y \in \mathbb{N}$.

Quadro 4.61 – Posições das cartas acima da mesa após a primeira distribuição.

Cartas na mesa								
Cartas	C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2
Posição y	9	10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Daí, na mão do mágico ficam apenas as cartas das posições impares, isto é, $x = 2q + 1$, com $q \in \mathbb{N}$. Como estas cartas foram colocadas para baixo do baralho, uma a uma, então foram distribuídas também em novas posições $x' \in \mathbb{N}$, conforme o quadro 4.62 abaixo.

Quadro 4.62 – Cartas restantes na mão após a 1ª distribuição.

Continuam na mão								
Cartas	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}
Posição x'	1	2	3	4	5	6	7	8

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note pelo quadro 4.61 que a carta escolhida pelo aluno ficou na posição $y = 9$ quando distribuída acima da mesa.

Agora, levando em consideração as novas posições x' das 8 cartas que ficaram nas mãos do mágico. Ao continuar a distribuição, as quatro cartas de posições x' pares do quadro 4.62 serão distribuídas acima das 8 cartas que já estão na mesa, aumentando a quantidade de cartas do quadro 4.61 para 12 cartas, conforme o quadro 4.63 abaixo.

Quadro 4.63 – Posições das cartas acima da mesa após a segunda distribuição.

Cartas na mesa												
Cartas	C_{15}	C_{11}	C_7	C_3	C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2
Posição y	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Assim restarão 4 cartas ainda nas mãos do mágico, exatamente as cartas que estavam localizadas em posições x' impares no quadro 4.62. Daí após a segunda distribuição, tais cartas irão assumir novamente outros valores $x'' \in \mathbb{N}$ para suas posições, conforme o quadro 4.64 abaixo.

Quadro 4.64 – Cartas restantes na mão após a 2ª distribuição.

Continuam na mão				
Cartas	C_1	C_5	C_9	C_{13}
Posição x''	1	2	3	4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Continuando a distribuição das quatro cartas restantes do quadro 4.64, note mais uma vez que as duas próximas cartas nas posições pares x'' irão ser distribuídas acima das cartas que estão na mesa e obteremos mais duas posições y para estas cartas aumentando para 14 a quantidade de cartas do quadro 4.63. Observe abaixo a distribuição destas 14 cartas acima da mesa, conforme o quadro 4.65.

Quadro 4.65 – Posições das cartas acima da mesa após a terceira distribuição.

Cartas na mesa														
Cartas	C_{13}	C_5	C_{15}	C_{11}	C_7	C_3	C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2
Posição y	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Ao final restarão apenas as duas cartas que estavam nas posições x'' impares, as quais ficam distribuídas em novas posições 1 e 2, conforme o quadro 4.66 abaixo.

Quadro 4.66 – Cartas restantes na mão após a 3ª distribuição.

Continuam na mão		
Cartas	C_1	C_9
Posição y	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Por fim ao distribuir as últimas duas cartas do quadro 4.66 acima, obteremos que a carta ajudante é exatamente a carta C_1, pois ela fica localizada na posição 1 (impar). Daí o mágico põe C_9, que estava na posição 2 (par), acima das cartas sobre a mesa, mostra ao público que a carta C_1 é a carta ajudante e logo após a coloca, com a face virada para cima, acima do monte sobre a mesa, na posição $y = 1$.

Portanto após colocar as últimas duas cartas acima do monte sobre a mesa, teremos a seguinte distribuição das cartas, conforme o quadro 4.67 abaixo.

Quadro 4.67 – Distribuição de todas as cartas.

Cartas na mesa																
Cartas	C_1	C_9	C_{13}	C_5	C_{15}	C_{11}	C_7	C_3	C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2
Posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No passo 3, vamos levar em consideração as novas posições y adquiridas pelas cartas no passo anterior. Daí ao distribuir as cartas, uma a uma, em dois montes e ir eliminando o monte que não contém a carta ajudante, ao final restarão apenas as cartas C_1 e C_{16}, conforme podemos ver adiante. Vamos renomear as cartas C_x, com $x \neq 1$ e $x \neq 16$, por X para facilitar a demonstração adiante.

Do quadro 4.67 acima vamos distribuir as cartas conforme o passo 3 em dois montes (monte 1 e monte 2). No monte 1 serão distribuídas as cartas das posições impares, isto é,

$y = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$ e no monte 2 serão distribuídas as cartas das posições pares, isto é, $y = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo após a primeira distribuição, as cartas ficarão distribuídas conforme o quadro 4.68 abaixo e mais uma vez modificando a posição das cartas que estão no monte 1 para novas posições $z \in \mathbb{N}$.

Quadro 4.68 – 1ª distribuição do monte formado.

Primeira distribuição (Dois montes com 8 cartas cada)								
Monte 1 (posições y impares)	X	X	X	C_{16}	X	X	X	C_1
Monte 2 (posições y pares)	X	X	X	X	X	X	X	X
Posições z das cartas	1	2	3	4	5	6	7	8

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Considerando as novas posições z no quadro 4.68 acima, obtemos que C_1 e C_{16} ficarão respectivamente nas posições $z = 8$ e $z = 4$ do monte 1. Daí o mágico descarta o monte 2.

Agora, realizando a segunda distribuição com as 8 cartas que ficaram no monte 1 em dois novos montes (monte 3 e monte 4), note que as cartas C_1 e C_{16} ficarão no monte 4, pois os valores de suas posições z são pares, conforme o quadro 4.69 abaixo.

Quadro 4.69 – 2ª distribuição do monte formado.

Segunda distribuição (Dois montes com 4 cartas cada)				
Monte 3 (posições z impares das cartas)	X	X	X	X
Monte 4 (posições z pares das cartas)	C_1	X	C_{16}	X
Novas posições w	1	2	3	4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Considerando as novas posições $w \in \mathbb{N}$ do quadro 4.69 acima, obtemos que C_1 e C_{16} ficaram respectivamente nas posições $w = 1$ e $w = 3$ do monte 4. Daí descarta-se o monte 3 o qual não possui a carta ajudante.

Por fim, ao realizar a terceira e última distribuição em dois novos montes (monte 5 e monte 6), conforme podemos ver no quadro 4.70 adiante, a carta ajudante (posição $w = 3$) ficará no mesmo monte que a carta escolhida (posição $w = 1$) no início pelo aluno, pois ambas estão em posições w impares no quadro 4.69. Portanto descartando o monte 6, monte com cartas em posições w pares, obtemos que a carta ajudante ficará ao lado da carta escolhida pelo aluno e assim finalizando o truque, conforme o quadro 4.70.

Quadro 4.70 – 3ª distribuição do monte formado.

3ª distribuição (Dois montes)		
Monte 5 (posições w impares)	C_{16}	C_1
Monte 6 (posições w pares)	X	X

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4.11 Matemágica 11: Valor das cartas

4.11.1 Descrição da Matemágica 11

[11]**Passo 1**: A Matemágica é realizada com 36 cartas. Para isso, retira-se do baralho 16 cartas, sendo elas: as cartas com valores dez, os valetes, as damas e os reis de cada naipe.

Passo 2: O mágico convida e pede para um aluno escolher uma carta qualquer, memorizá-la e mostra-la ao público.

Passo 3: Daí o mágico solicita que o aluno, com o auxílio de uma calculadora, multiplique por dois o valor da carta. Logo após some cinco ao resultado e depois multiplique por cinco, obtendo outro resultado. Por fim pede para ele escrever o resultado final em um papel.

Passo 4: Agora, o mágico solicita que o aluno escolha outra carta e some o valor dela com o resultado escrito no papel.

Passo 5: Por fim o aluno revela o valor total da soma obtida no passo 4 e assim o mágico descobre os valores das duas cartas escolhidas aleatoriamente pelo aluno, finalizando o truque.

4.11.2 Como funciona a Matemágica 11?

Ao falar o valor da soma obtida no passo 4, basta o mágico subtrair 25 do resultado obtido nesta soma e o resultado final será um número de dois algarismos. São exatamente a unidade e a dezena deste resultado final os valores das duas cartas escolhidas pelo aluno e reveladas pelo mágico.

Por exemplo: Se o valor total foi 97, subtraindo 25, resulta em 72. Logo a primeira carta escolhida pelo aluno foi o número 7, e a segunda carta escolhida foi o número 2.

4.11.3 Demonstração da Matemágica 11

Ao retirar as 16 cartas, conforme o passo 1, restarão apenas as cartas com numeração de 1 até 9 para o aluno escolher, sendo os valores iguais a 1 representados pelos ases.

[11]Temporão (2011)

Seja x o valor da primeira carta escolhida pelo aluno no passo 2, com $x \in \mathbb{N}$ e $1 \leq x \leq 9$. Realizando as operações descritas no passo 3, obtemos:

$$(2x + 5) \cdot 5 = 10x + 25 \tag{4.11}$$

Agora, seja $y \in \mathbb{N}$, com $1 \leq y \leq 9$, o valor da segunda carta escolhida pelo aluno no passo 4. Somando y ao resultado encontrado na equação (4.11), obtemos:

$$10x + 25 + y \tag{4.12}$$

Por fim o aluno ao falar o valor total no passo 5, basta o mágico subtrair exatamente 25 da equação (4.12) e tem-se o seguinte:

$$10x + 25 + y - 25 = 10x + y$$

Como $1 \leq x \leq 9$ e $1 \leq y \leq 9$, concluímos que o valor final obtido será formado na base 10 exatamente pelos algarismos x e y, isto é:

$$10x + y = [xy]_{10}$$

Assim finalizando o truque.

4.12 Matemágica 12: Ajuda do barulho

4.12.1 Descrição da Matemágica 12

[12]**Passo 1**: O mágico pede para o aluno traçar o baralho, escolher uma carta qualquer e mostrar ao público.

Passo 2: Em seguida o mágico pega o baralho, põe um pequeno monte de cartas com as faces viradas para baixo sobre a mesa e pede para que o aluno coloque a carta escolhida acima deste monte. Logo após coloca o restante das cartas da mão acima do monte e traça mais uma vez o baralho.

Passo 3: Neste momento o mágico começa a distribuir carta por carta, com as faces voltadas para cima, formando 4 montes.

Cada monte é formado da seguinte maneira: O mágico realiza uma contagem regressiva iniciando pelo número 10, onde para cada número da contagem ele vai colocando uma carta com a face voltada para cima formando cada um dos 4 montes até chegar no número 1. Se

[12]Almeida (2019)

o valor da face de alguma carta coincidir com o número da contagem, o mágico finaliza a contagem nesta carta e inicia o monte seguinte. Caso contrário, se não houver a coincidência entre o número da face da carta e o número da contagem, o mágico coloca mais uma carta da mão, virada para baixo, acima deste monte e inicia o próximo.

Passo 4: Ao final dos 4 montes restarão algumas cartas com o mágico e ele fala que as cartas dos montes que coincidiram irão ajudar a encontrar a carta escolhida pelo aluno, sendo a soma dos valores dessas cartas coincidentes exatamente a quantidade de cartas a serem descartadas uma a uma das que restaram na mão do mágico, sendo a última carta da contagem exatamente a carta escolhida pelo aluno.

4.12.2 Como funciona a Matemágica 12?

No passo 2 enquanto o aluno mostra a carta C escolhida ao público, o mágico separa 8 cartas e as coloca separadas acima da mesa, viradas suas faces para baixo, formando um pequeno monte. Logo após, solicita que o aluno coloque a carta escolhida acima deste monte. Em seguida, o mágico coloca o restante do baralho acima das 9 cartas juntando todo o baralho e por fim traça o baralho sem modificar a posição das 9 cartas que estão na base do baralho.

Feito isso a carta escolhida ficará localizada na posição 44 do baralho de cima para baixo, conforme o quadro 4.71 a seguir.

Quadro 4.71 – Distribuição das cartas.

Total de carta acima de C	43 cartas
Posição da Carta C escolhida	44
Total de carta abaixo de C	8 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note que a soma das cartas que coincidem o valor da face com o valor da contagem feita no passo 3 é exatamente a quantidade de cartas que restaram na mão do mágico para serem descartadas até encontrar a carta escolhida, ou seja, até chegar na posição 44.

4.12.3 Demonstração da Matemágica 12

Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ os valores da contagem regressiva, iniciando em 10, que coincidem respectivamente com os valores das faces das cartas nos montes 1, 2, 3 e 4 formados no passo 3.

Agora observemos no quadro 4.72 abaixo a relação existente entre um número natural a, com $1 \leq a \leq 10$, a ser contado em ordem decrescente iniciando pelo número 10 e o total de cartas b viradas com a face voltada para cima até ocorrer a coincidência de a com o valor n da face da carta, sendo $b, n \in \mathbb{N}$.

Quadro 4.72 – Relação entre número e total de cartas viradas.

Número a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Total de cartas b viradas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Perceba que independentemente do momento onde ocorrer a coincidência descrita acima, tem-se sempre que a soma entre o número a com o total de cartas b viradas é sempre igual a 11, isto é:

$$a + b = 11$$

Assim sempre serão descartadas 11 cartas de cada monte onde houver a coincidência entre a e n, pois no passo 3 já foram descartadas b cartas viradas para cima e no passo 4 serão descartadas o total de cartas correspondentes ao valor de a referente ao número da face da carta que ficou voltada para cima.

Portanto ao final dos 4 montes restarão algumas cartas com o mágico, destas serão descartadas exatamente os valores de x, y, z e w naturais que coincidirem respectivamente com os números das contagens nos montes 1, 2, 3 e 4, até se chegar ao valor 44.

Por outro lado, quando os valores da contagem regressiva iniciando em 10 não coincidem com o valor das faces das cartas em qualquer um dos montes 1, 2, 3 e 4 formados no passo 3, o mágico coloca uma carta acima deste monte com a face voltada para baixo e o descarta.

Observe que em qualquer um dos montes que não ocorrer a coincidência, o monte será composto por 11 cartas sendo dez cartas da contagem regressiva e uma carta colocada acima dele.

Portanto, havendo a coincidência ou não entre número e face da carta, sempre serão descartadas 11 cartas de cada monte. E como há 4 montes, logo serão descartadas 44 cartas no total. Assim ao descartar a carta da posição 44, o mágico mostrará exatamente a carta escolhida pelo aluno, finalizando o truque.

4.13 Matemágica 13: A carta mágica

4.13.1 Descrição da Matemágica 13

[13]**Passo 1**: O mágico convida e pede a um aluno que embaralhe o baralho com 52 cartas e as coloque com as faces voltadas para baixo acima da mesa, formando um monte denominado

[13] Rigonato (2020)

de monte principal. Em seguida pede para ele retirar no máximo doze cartas de cima deste monte e ficar com elas nas mãos. Essa quantidade de cartas é desconhecida pelo mágico.

Passo 2: Agora, das cartas restantes do monte principal, o aluno memoriza a carta referente a posição equivalente ao total de cartas que ele retirou do baralho no passo 1, contadas de cima para baixo e a mostra ao público. Chamaremos essa carta de "carta mágica", também desconhecida pelo mágico.

Passo 3: Em seguida o mágico solicita que o aluno fale um número maior que 12 e menor que 30, número este correspondente ao total de cartas que o mágico retira do monte principal, uma a uma, formando um segundo monte acima da mesa com a face voltada para baixo. Por fim o mágico pega o segundo monte e põe acima do monte principal.

Passo 4: A seguir, o mágico instrui que o aluno coloque as cartas que estavam com ele sobre o monte principal e logo após solicita que retire o total de cartas referentes ao número dito no passo 3. Assim, ao retirar a última carta, o mágico pega a próxima carta acima do monte principal, mostra ao público e esta será exatamente a "carta mágica".

4.13.2 Como funciona a Matemágica 13?

Considere n o número de cartas retiradas do baralho pelo aluno no passo 1, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 12$. Daí segue que o monte principal ficará com $52 - n$ cartas.

No passo 2, o aluno ver e decora a n-ésima carta (carta mágica C) do monte principal, isto é, a carta localizada na posição n de cima para baixo.

No passo 3 o aluno retira uma quantidade $m \in \mathbb{N}$ de cartas, com $12 \leq m \leq 30$. Desse modo, a "carta mágica" C será necessariamente retirada, pois $m > n$.

Note que ao retirar n cartas das m possíveis e ir colocando uma acima da outra formando um outro pequeno monte acima da mesa, a carta C passará para posição 1 deste monte. Porém ainda faltará retirar $m - n$ cartas para completar as m cartas retiradas. Assim, ao completar a retirada das m cartas e as repor sobre o monte principal, a carta C ficará na $(m - n + 1)$-ésima posição do monte, de cima para baixo, pois C estava na posição 1 e foram colocadas acima dela $m - n$ cartas, aumentando este valor em sua posição.

Daí, quando o aluno repuser as n cartas que estavam na mão dele, conforme o passo 4, a "carta mágica" C será a $(m + 1)$-ésima carta do monte de cima para baixo. De fato, a carta C estava anteriormente na posição $m - n + 1$ e foram colocadas n cartas acima dela. Algebricamente sua posição é determinada pela expressão abaixo:

$$(m - n + 1) + n = m + 1$$

Portanto, quando o aluno retirar m cartas do monte principal, referente a quantidade de cartas do número m dito pelo aluno no passo 3, segue que a "carta mágica"C passará a ser localizada na posição 1. Algebricamente é simples de perceber o fato da carta C se deslocar para a posição 1, observe:

$$(m + 1) - m = 1$$

Portanto, basta o mágico pegar a próxima carta da posição 1 e mostrar que esta é a carta mágica C, finalizando o truque.

4.14 Matemágica 14: Os 4 ases

4.14.1 *Descrição da Matemágica 14*

[14]**Passo 1**: O mágico retira o baralho da caixa e convida um aluno para que o corte em 4 montes numerados de 1 até 4.

Passo 2: O mágico aponta para o monte 1 e pede para que o aluno remova as três primeiras cartas do topo desse monte e as coloque para baixo. Em seguida solicita que distribua as três próximas cartas do topo respectivamente em cima dos montes 2, 3 e 4.

Passo 3: Na sequência, o mágico pede para fazer o mesmo procedimento com os demais montes, na seguinte ordem: monte 2, monte 3 e por fim monte 4.

Passo 4: O mágico mostra as primeiras cartas de cada monte, e elas serão todos ases.

4.14.2 *Como funciona a Matemágica 14?*

No passo 1, o baralho precisa estar preparado dentro da caixa com os 4 ases no topo do baralho. Ainda no passo 1, o mágico enumera os montes feitos pelo aluno de 1 a 4, sendo o monte 4, aquele onde estão localizados os quatro ases.

No passo 2 ao distribuir as três cartas do monte 1, uma em cada monte, o monte 4 ficará com a seguinte configuração no topo:

- Uma carta aleatória e logo após os 4 ases.

Ao distribuir as três cartas do monte 2, uma em cada monte, o monte 4 ficará com a seguinte configuração no topo:

- Duas cartas aleatórias e logo após os 4 ases.

Ao distribuir as três cartas do monte 3, uma em cada monte, o monte 4 ficará com a seguinte configuração no topo:

- Três cartas aleatórias e logo após os 4 ases.

Por fim ao realizar o procedimento no monte 4, as três cartas que serão colocadas para baixo, serão exatamente as cartas que estavam nos montes 1, 2 e 3 respectivamente. Restando

[14]Temporão (2011)

no seu topo os 4 ases, onde três deles serão distribuídos respectivamente nos montes 1, 2 e 3, com o último ás ficando acima do monte 4. Assim obtém-se o resultado esperado pela Matemágica.

4.15 Matemágica 15: Baralhamento especial

4.15.1 Descrição da Matemágica 15

[15]**Passo 1**: O mágico divide o baralho em dois montes com 26 cartas cada, convida um aluno, solicita que ele escolha um dos montes (vamos nomear este monte de monte 1) e realize um corte, separando as cartas do corte em sua mão.

Passo 2: Agora o mágico solicita que o aluno escolha uma carta do outro monte (monte 2), mostre-a para o público, memorize a carta e coloque acima do monte 1, o qual foi realizado o corte. Por fim o mágico põe o monte 2 acima do monte 1 juntando as cartas em um único monte.

Passo 3: O mágico realiza um baralhamento especial com o monte formado no passo 2 da seguinte maneira: pega uma carta da base e uma carta do topo, com a carta do topo acima da carta da base e vai repetindo este baralhamento especial formando um novo monte acima da mesa até finalizar todas as cartas.

Passo 4: Por fim, o mágico solicita que o aluno fale a quantidade de cartas que ele ficou na mão ao cortar o monte 1 no passo 1. Daí retira essa quantidade de cartas do monte acima da mesa, sendo a última carta exatamente a carta escolhida pelo aluno no passo 2, finalizando o truque.

4.15.2 Como funciona a Matemágica 15?

Seja n o total de cartas que o aluno pegou ao cortar um dos montes no passo 1, com $n \in \mathbb{N}$ e $n < 26$. Logo neste monte (monte 1) restarão $26 - n$ cartas.

Ao colocar a carta escolhida do monte 2, representada por C, acima do monte 1 e logo após colocar também o monte 2 acima do monte 1, a carta C na verdade ficará localizada na posição 26 do monte formado, pois restaram 25 cartas no monte 2 e foram todas colocadas acima da carta C.

Seja $m \in \mathbb{N}$ o total de cartas restantes no monte 1, com $m < n$. Note que a carta C da posição 26 ficará a uma distância m da última carta do monte 1, uma vez que neste monte restaram apenas m cartas. E como foram retiradas n cartas das 26 cartas do monte 1 e

[15] Brito (2022)

restaram m cartas, então $m + n = 26$, isto é:

$$n = 26 - m \tag{4.13}$$

Ao realizar o baralhamento conforme descrito no passo 3, como são retiradas duas cartas por vez sendo uma do topo e outra da base do monte. Ao retirar m cartas do topo e m cartas da base, segue que o monte 1 não possuirá mais cartas a serem retiradas pois possuía exatamente m cartas. Por outro lado, no monte 2 ainda restarão $26 - m$ cartas, sendo C a última carta a qual passou da posição 26 para a posição $26 - m$.

Portanto ao continuar o baralhamento até sua conclusão, obtemos que a carta C continuará na posição $26 - m$, pois ao serem retiradas a primeira e a última carta (carta C), segue que a carta do topo fica acima da carta da base e logo após distribuir as demais $24 - m$ cartas restantes, todas elas irão ficar acima de C.

Ora, no passo 4 o aluno deve retirar n cartas do monte acima da mesa, onde n é o total de cartas que o aluno ficou na mão no passo 1. Por outro lado, Pela equação (4.13), $n = 26 - m$, exatamente o valor da posição da carta C após o passo 3. Portanto, basta o mágico realizar a contagem equivalente as n cartas que estão na mão do aluno, conforme o passo 4 para finalizar a mágica encontrando a carta C.

5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES TRABALHADAS

Neste capítulo, iremos apresentar de forma sucinta os resultados obtidos pelos alunos no decorrer das atividades de explorações matemáticas envolvendo as Matemágicas propostas e trabalhadas em sala de aula, assim como o desempenho da turma em relação as situações problemas aplicadas, observando o grau de aprendizagem e as dificuldades apresentadas nos conteúdos abordados e por fim vamos realizar uma análise dos dados referente a aplicação de dois pré-testes precedidos de dois pós-teste evidenciando a evolução dos alunos quanto a quantidade de acertos e erros nas questões dos pós-testes em relação aos pré-testes, comprovando que os mesmos adquiriram habilidades necessárias em desenvolver questões matemáticas e obtiveram uma melhor compreensão dos conteúdos trabalhados.

5.1 Análise das explorações matemáticas

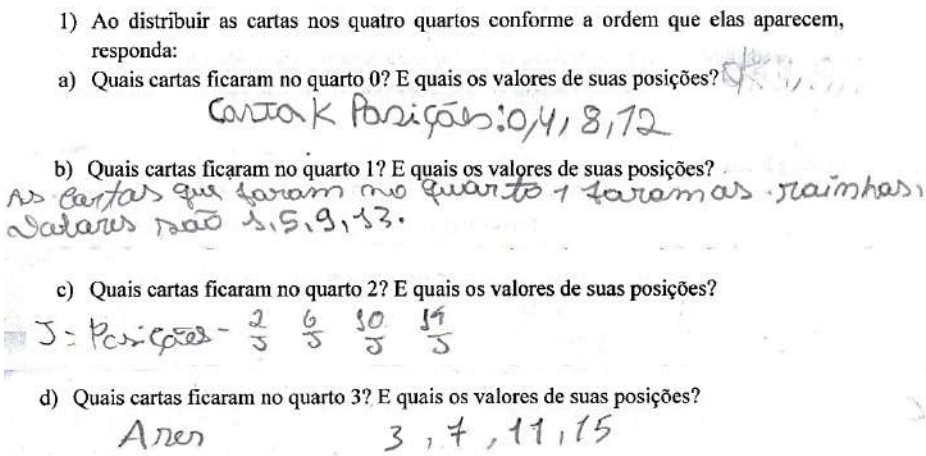
Foram desenvolvidas com a turma 15 atividades de explorações matemáticas, uma para cada Matemágica. Antes de cada exploração matemática, o professor realizava a Matemágica referente a abordagem da exploração para a turma, o que sempre despertava o interesse e entusiasmo dos alunos e logo após explicava como era realizado os truques utilizados para se obter o sucesso na Matemágica, afim de facilitar a compreensão dos alunos quanto a aplicação dos conteúdos matemáticos.

5.1.1 Explorações matemáticas 1 e 2

As explorações matemáticas 1 e 2 tiveram como objetivo principal caracterizar algebricamente a forma da divisão euclidiana por 4, dados a, q e r inteiros, respectivamente o dividendo, o quociente e o resto da divisão, isto é, $a = 4q + r$, com $0 \leq r < 4$.

A exploração matemática 1 foi composta por três questões. Os itens (a), (b), (c) e (d) da primeira questão propôs aos alunos analisarem um quadro dado no enunciado, o qual disponibilizava as cartas em suas respectivas posições, para descreverem quais cartas ficaram respectivamente nos quartos 0, 1, 2 e 3 conforme Matemágica 1 e quais os valores das posições de cada uma delas. Tais itens foram resolvidos de forma satisfatória, pois bastava retirar os dados do quadro fornecido, conforme podemos observar pela figura 5.1 abaixo retratando as respostas de 4 alunos diferentes, uma para cada item.

Figura 5.1 – Soluções da Exploração 1 - Questão 1, itens (a), (b), (c) e (d).


1) Ao distribuir as cartas nos quatro quartos conforme a ordem que elas aparecem, responda:

a) Quais cartas ficaram no quarto 0? E quais os valores de suas posições?

Carta K Posições: 0, 4, 8, 12

b) Quais cartas ficaram no quarto 1? E quais os valores de suas posições?

As cartas que foram no quarto 1 foram as rainhas, valores são 1, 5, 9, 13.

c) Quais cartas ficaram no quarto 2? E quais os valores de suas posições?

J = Posições - 2 J 6 J 10 J 14 J

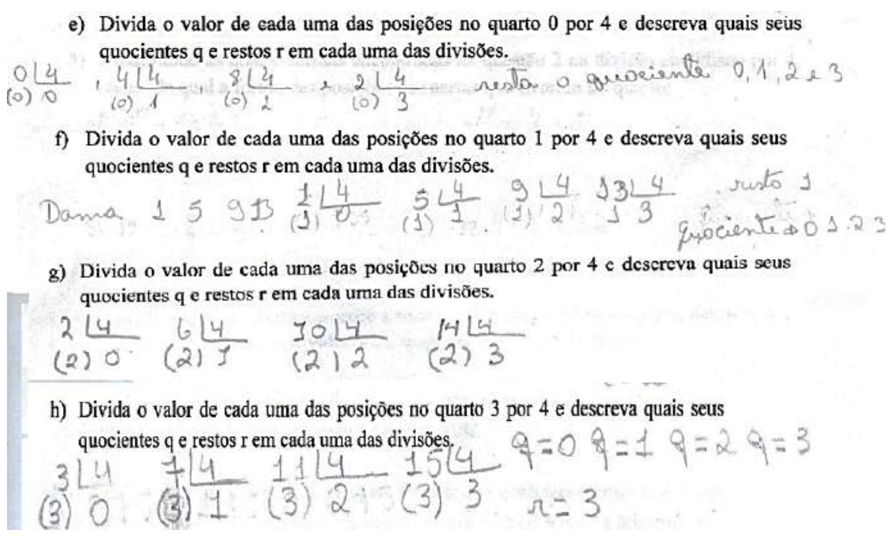
d) Quais cartas ficaram no quarto 3? E quais os valores de suas posições?

Ases 3, 7, 11, 15

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Nos itens (e), (f), (g) e (h) pedia-se para realizar a divisão por 4 de cada um dos valores das posições encontradas respectivamente nos quartos 0, 1, 2 e 3 descrevendo os valores dos quocientes e restos encontrados. Mais uma vez estes itens foram resolvidos com clareza pelos alunos por se tratarem de divisões simples. Observe a figura 5.2 abaixo com a resolução realizada por 4 alunos diferentes, onde cada um resolveu um dos itens de maneira satisfatória.

Figura 5.2 – Soluções da Exploração 1 - Questão 1, itens (e), (f), (g) e (h).


e) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 0 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

resto 0 quociente 0, 1, 2 e 3

f) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 1 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

Dama 1 5 9 13 resto 1 quociente 0 1 2 3

g) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 2 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

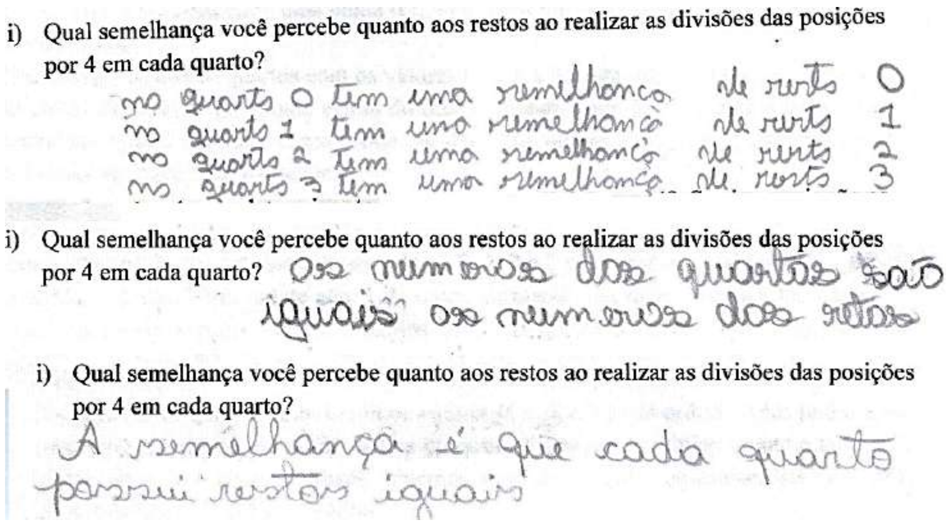
h) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 3 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

q = 0 q = 1 q = 2 q = 3 r = 3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O item (i) solicitava para os alunos descreverem a semelhança existente quanto aos restos encontrados na divisão das posições das cartas por 4 em cada quarto. Neste item os alunos, em sua maioria, perceberam o fato de em cada quarto os restos serem todos iguais e além disso, alguns alunos conseguiram perceber que o número do quarto era idêntico ao resto destas divisões, conforme podemos observar nas respostas pela figura 5.3 abaixo.

Figura 5.3 – Soluções da Exploração 1 - Questão 1, item (i).


i) Qual semelhança você percebe quanto aos restos ao realizar as divisões das posições por 4 em cada quarto?
no quarto 0 tem uma semelhança de resto 0
no quarto 1 tem uma semelhança de resto 1
no quarto 2 tem uma semelhança de resto 2
no quarto 3 tem uma semelhança de resto 3

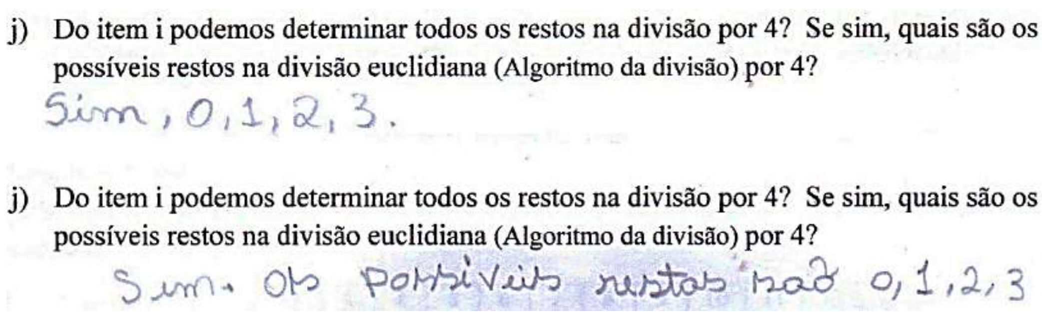
i) Qual semelhança você percebe quanto aos restos ao realizar as divisões das posições por 4 em cada quarto? Os numeros dos quartos são iguais os numeros dos restos

i) Qual semelhança você percebe quanto aos restos ao realizar as divisões das posições por 4 em cada quarto?
A semelhança é que cada quarto possui restos iguais

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O item (j) pedia para os alunos responderem, de forma geral, quais os possíveis restos numa divisão por 4. Este item foi resolvido de forma satisfatória por todos os alunos após uma discussão realizada entre os alunos tendo o professor como intermediador do conhecimento. Observe as respostas de dois alunos na figura 5.4 abaixo.

Figura 5.4 – Soluções da Exploração 1 - Questão 1, item (j).


j) Do item i podemos determinar todos os restos na divisão por 4? Se sim, quais são os possíveis restos na divisão euclidiana (Algoritmo da divisão) por 4?
Sim, 0, 1, 2, 3.

j) Do item i podemos determinar todos os restos na divisão por 4? Se sim, quais são os possíveis restos na divisão euclidiana (Algoritmo da divisão) por 4?
Sim. Os possiveis restos são 0, 1, 2, 3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No item (k) foi dado a definição do algoritmo da divisão (divisão euclidiana) e pedia para os alunos descreverem a forma euclidiana numa divisão quando o divisor for 4. Na questão 2, partindo do algoritmo da divisão encontrado no item (k) da questão 1, foi pedido aos alunos para descreverem a forma euclidiana de um número inteiro a para cada um dos possíveis restos 0, 1, 2 ou 3. Da mesma forma na questão 3, foi pedido para os alunos descreverem a forma euclidiana das posições das cartas em cada quarto. Tais questões foram debatidas entre grupos de alunos e resolvidas em sua maioria corretamente, conforme podemos perceber nas respostas de dois alunos nas figuras 5.5 e 5.6 abaixo.

Figura 5.5 – Soluções da Exploração 1 - Questões 1(k), 2 e 3. - I

k) Algoritmo da divisão: Sejam a e d inteiros, com $d \neq 0$. Existem únicos q e r, também inteiros, tais que:

$$a = d \cdot q + r, \text{ onde: } 0 \leq r < |d|$$

Tais inteiros q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por d. Logo, como podemos particularizar o algoritmo da divisão quando d = 4?

$a = 4 \cdot q + r$, onde $0 \leq r < |4|$

2) Do item k anterior, podemos afirmar que os valores de "a" na divisão por 4 podem ser representados de quatro formas diferentes, quanto aos valores de seus restos, segundo o algoritmo da divisão, $a = 4 \cdot q + r$, onde: $0 \leq r < 4$.

Com isto, responda qual a forma de "a" na divisão por 4, quando:

a) r = 0 $a = 4 . q \cancel{+0} = 4q$

b) r = 1 $a = 4 . q + 1$

c) r = 2 $a = 4 \cdot q + 2$

d) r = 3 $a = 4 \cdot q + 3$

3) Observando as quatro formas encontradas na questão 2 na divisão euclidiana por 4, responda qual a forma das posições das cartas que ficaram no quarto:

a) 0? $4.q + 0$

b) 1? $4 . q + 1$

$5 \,\underline{|4}$, -4, 1, (1)

c) 2? $4.q + 2$

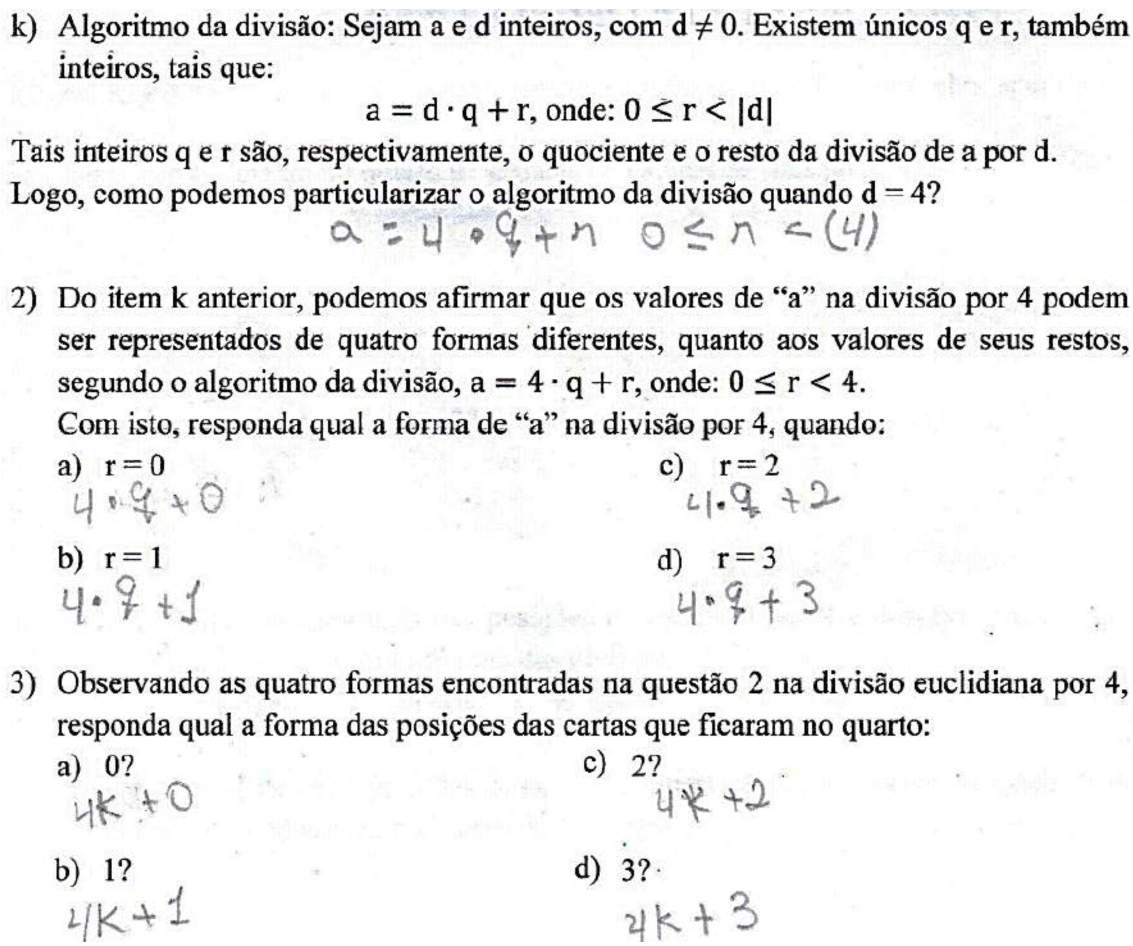
$10 \,\underline{|4}$, -8, 2, (2)

d) 3? $4 . q + 3$

$15 \,\underline{|4}$, -12, 3, (3)

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Figura 5.6 – Soluções da Exploração 1 - Questões 1(k), 2 e 3. - II



k) Algoritmo da divisão: Sejam a e d inteiros, com $d \neq 0$. Existem únicos q e r, também inteiros, tais que:

$$a = d \cdot q + r, \text{ onde: } 0 \leq r < |d|$$

Tais inteiros q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por d. Logo, como podemos particularizar o algoritmo da divisão quando d = 4?

$a = 4 \cdot q + n \quad 0 \leq n < (4)$

2) Do item k anterior, podemos afirmar que os valores de "a" na divisão por 4 podem ser representados de quatro formas diferentes, quanto aos valores de seus restos, segundo o algoritmo da divisão, $a = 4 \cdot q + r$, onde: $0 \leq r < 4$.
Com isto, responda qual a forma de "a" na divisão por 4, quando:

a) r = 0
$4 \cdot q + 0$

b) r = 1
$4 \cdot q + 1$

c) r = 2
$4 \cdot q + 2$

d) r = 3
$4 \cdot q + 3$

3) Observando as quatro formas encontradas na questão 2 na divisão euclidiana por 4, responda qual a forma das posições das cartas que ficaram no quarto:

a) 0?
$4k + 0$

b) 1?
$4k + 1$

c) 2?
$4k + 2$

d) 3?
$4k + 3$

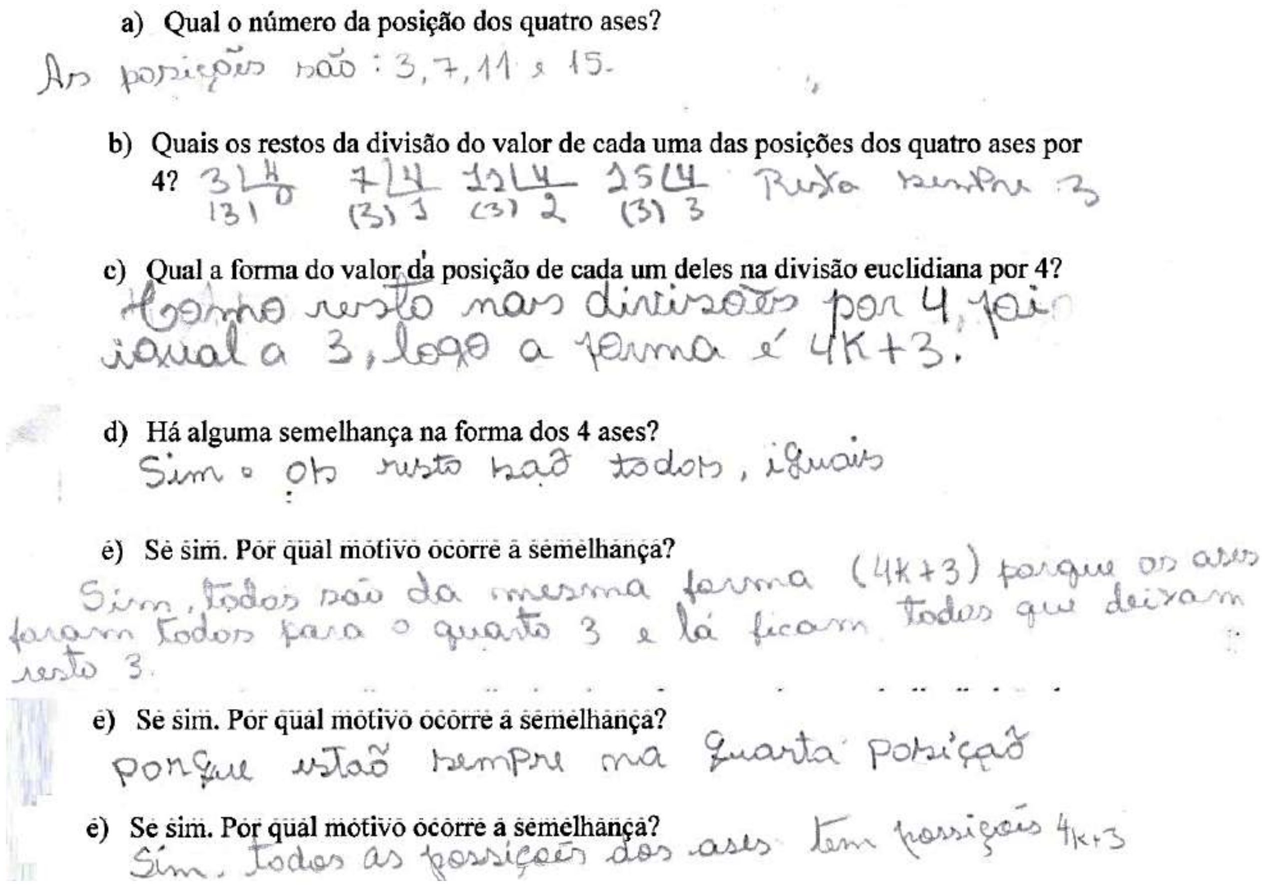
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A exploração matemática 1 foi bem-sucedida e pudemos perceber o envolvimento da turma em relação as atividades propostas, o que nos deu uma maior facilidade para aplicar as demais explorações de nossa pesquisa.

A exploração matemática 2 foi composta por duas questões, as quais davam continuidade ao estudo realizado na exploração 1.

Os itens (a), (b) e (c) da questão 1 também propuseram aos alunos analisarem um quadro dado no enunciado para descreverem os valores das posições dos quatro ases conforme Matemágica 2 e logo após determinarem os restos e a forma euclidiana de cada um destes valores na divisão por 4. Por fim nos itens (d) e (e) os alunos descreveram a semelhança existente entre a forma euclidiana das posições dos 4 ases. Observe as respostas de alguns alunos nestes itens conforme podemos destacar na figura 5.7 abaixo.

Figura 5.7 – Soluções da Exploração 2 - Questão 1.



a) Qual o número da posição dos quatro ases?

As posições são: 3, 7, 11 e 15.

b) Quais os restos da divisão do valor de cada uma das posições dos quatro ases por 4?

3 |4 (3) 0   7 |4 (3) 1   11 |4 (3) 2   15 |4 (3) 3   Resto sempre 3

c) Qual a forma do valor da posição de cada um deles na divisão euclidiana por 4?

Como o resto nas divisões por 4, foi igual a 3, logo a forma é 4K+3.

d) Há alguma semelhança na forma dos 4 ases?

Sim: os resto são todos, iguais

e) Se sim. Por qual motivo ocorre a semelhança?

Sim, todos são da mesma forma (4K+3) porque os ases foram todos para o quarto 3 e lá ficam todos que deixam resto 3.

e) Se sim. Por qual motivo ocorre a semelhança?

porque estão sempre na quarta posição

e) Se sim. Por qual motivo ocorre a semelhança?

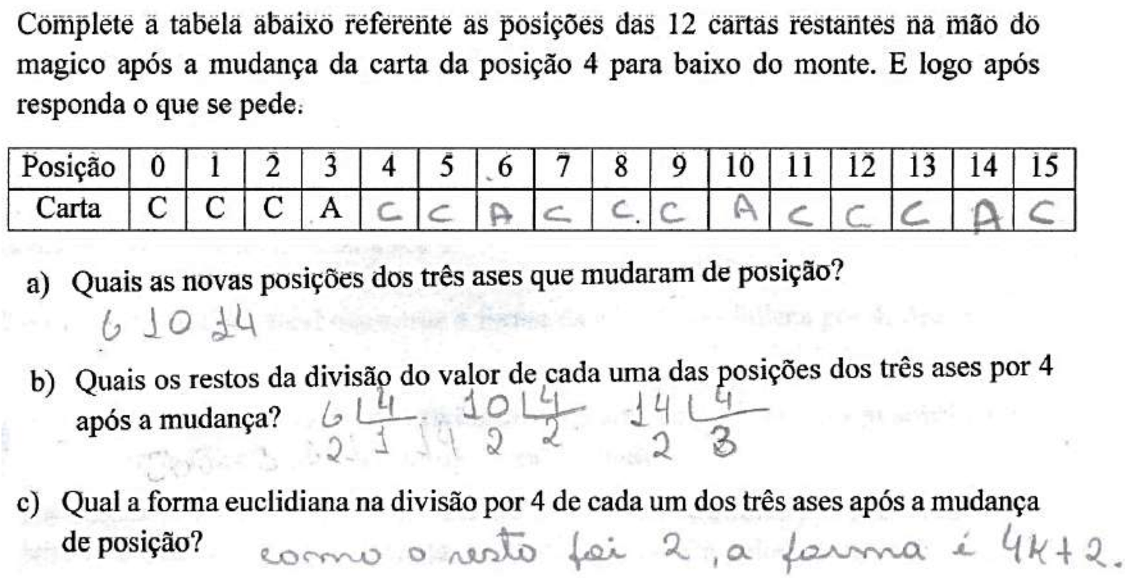
Sim. todos as possições dos ases tem possições 4k+3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Note que os itens (a), (b), (c) e (d) foram resolvidos e compreendidos pelos alunos, uma vez que a divisão euclidiana por 4 foi abordada na exploração 1 facilitando o desenrolar das resoluções. No item (e) houve algumas divergências nas soluções encontradas onde alguns alunos argumentaram de forma correta que a forma euclidiana dos valores das posições na divisão por 4 era sempre da forma $4k + 3$ e outros alunos argumentaram que os ases estavam localizados sempre na quarta posição, o que também pode ser interpretado correto se considerarmos o monte onde todos os ases ficaram localizados na Matemágica 2, o qual é formado por posições da forma $4k + 3$.

A questão 2 pedia para os alunos completarem um quadro referente as posições das 12 cartas restantes na mão do mágico após ele colocar a carta da posição 4 para baixo do monte, quadro este que foi completado com êxito por toda a turma. Em seguida, solicitava para os alunos responderem na questão 2, a partir do quadro, a três itens análogos aos da questão 1, os quais também foram resolvidos de forma coerente por quase todos os alunos, conforme podemos observar em algumas soluções na figura 5.8 as seguir.

Figura 5.8 – Soluções da Exploração 2 - Questão 2, itens (a), (b) e (c) .



Complete a tabela abaixo referente as posições das 12 cartas restantes na mão do magico após a mudança da carta da posição 4 para baixo do monte. E logo após responda o que se pede.

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	C	C	C	A	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A	C

a) Quais as novas posições dos três ases que mudaram de posição?

6 10 14

b) Quais os restos da divisão do valor de cada uma das posições dos três ases por 4 após a mudança?

6 |4 2 1   10 |4 2 2   14 |4 2 3

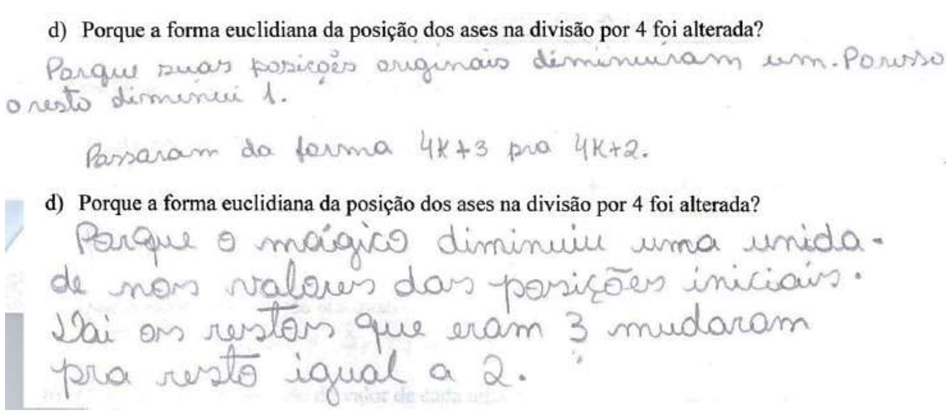
c) Qual a forma euclidiana na divisão por 4 de cada um dos três ases após a mudança de posição?

como o resto foi 2, a forma é 4k+2.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Por fim no item (d) os alunos descreveram o motivo da forma euclidiana da posição dos ases na divisão por 4 serem alteradas. Observando algumas soluções, conforme figura 5.9 adiante, percebemos que os mesmos conseguiram entender o truque na Matemágica 2 e interligarem ao conteúdo proposto, pois quase todos os alunos argumentaram com precisão o que foi pedido.

Figura 5.9 – Soluções da Exploração 2 - Questão 2, item (d).



d) Porque a forma euclidiana da posição dos ases na divisão por 4 foi alterada?

Porque suas posições originais diminuiram um. Porisso o resto diminui 1.

Passaram da forma 4k+3 pra 4k+2.

d) Porque a forma euclidiana da posição dos ases na divisão por 4 foi alterada?

Porque o mágico diminuiu uma unidade nos valores das posições iniciais. Daí os restos que eram 3 mudaram pra resto igual a 2.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após o termino das explorações matemáticas 1 e 2, ficou claro o entusiasmo da turma para realizar as próximas explorações, visto que em cada uma delas eles poderiam compreender o truque matemático envolvido por traz da Matemágica. Antes da exploração matemática

1 foi realizado o pré-teste 1 englobando questões sobre a divisão euclidiana por 4 e após o termino da exploração 2 foi realizado o pós-teste 1, contendo as mesmas questões do pré-teste 1, com o intuito de observar o desenvolvimento dos alunos após as atividades propostas nas explorações 1 e 2. Adiante na seção 5.3 é realizado as análises de ambos.

5.1.2 Explorações matemáticas 3 e 4

As explorações matemáticas 3 e 4 deram ênfase a diferença entre um numeral natural e a soma de seus algarismos, a qual sempre resulta em um múltiplo de 9. O intuito final da exploração 3 foi levar os alunos a compreenderem que tal diferença sempre resulta em 9 quando o número natural n possui dois algarismos sendo o valor da dezena do mesmo igual a 1.

As questões da exploração 3 propuseram aos alunos analisarem dois quadros propostos, os quais disponibilizavam as cartas em suas respectivas posições iniciais.

Na questão 1 foi pedido para os alunos descreverem apenas os valores das posições onde o mágico encontrou as 3 primeiras damas na Matemágica 3. Tratou-se de uma questão de nível bastante simples. Vejamos na figura 5.10 abaixo as resoluções realizadas por dois alunos, mostrando que ambos tiveram uma boa percepção das novas posições das damas a cada retirada.

Figura 5.10 – Soluções da Exploração 3 - Questão 1.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Carta	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_1	Q_2	Q_3	A	Q_4

1) Qual o valor da posição da primeira dama Q_1? Ao retirar Q_1, qual será o valor da nova posição de Q_2? Ao retirar Q_1 e Q_2, qual será o valor da nova posição de Q_3?

Q1 posição = 9 portanto ao retirar Q1, Q2 e Q3
Q2 posição = 9 elas ficam na mesma po-
Q3 posição = 9 sição.

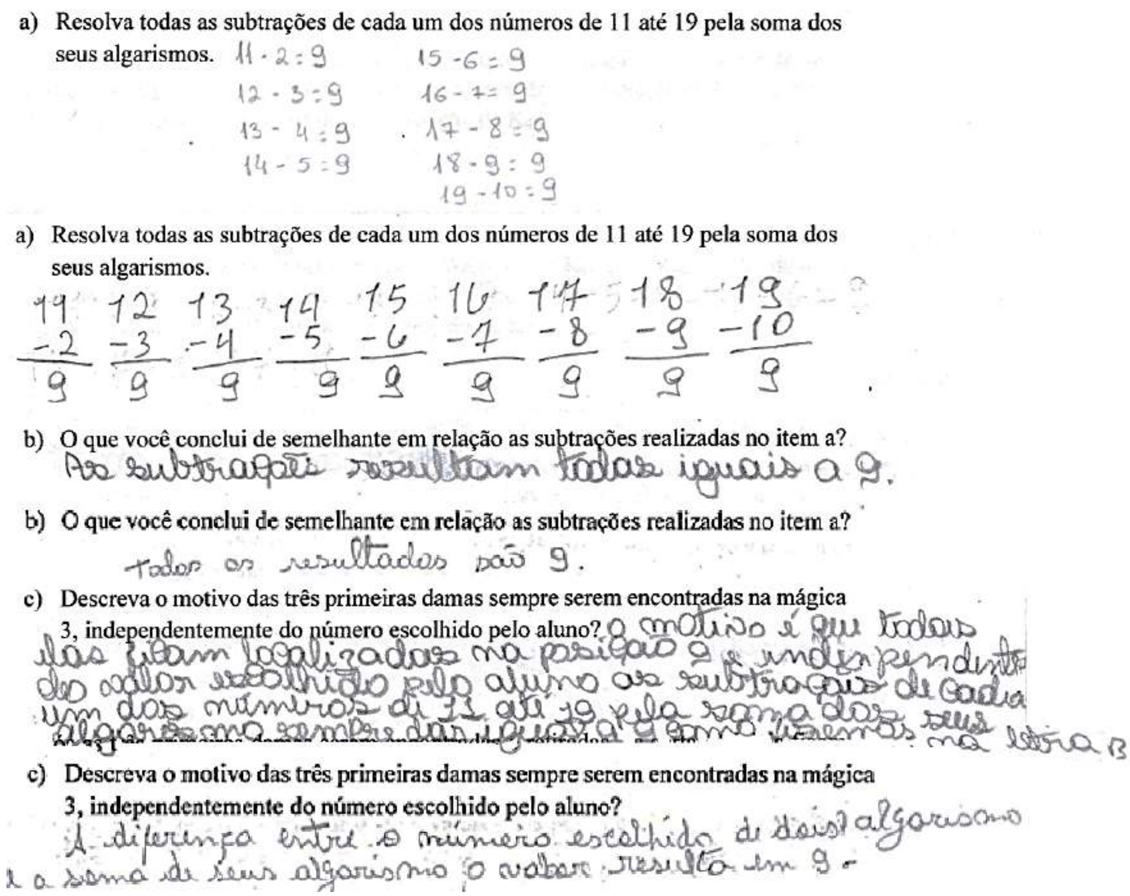
1) Qual o valor da posição da primeira dama Q_1? Ao retirar Q_1, qual será o valor da nova posição de Q_2? Ao retirar Q_1 e Q_2, qual será o valor da nova posição de Q_3?

Q1 posiçãs 9, ao retirar Q1 a Q2 vai para a posiçãs 9
a os retirar Q2 a carta Q3 vai para a posiçãs 9.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Os itens (a), (b) e (c) da questão 2 solicitavam aos alunos a realizarem as subtrações de cada um dos números de 11 até 19 pela soma dos seus algarismos, logo após pedia para descreverem a semelhança encontrada nestas subtrações e por fim relatarem o motivo das três primeiras damas sempre serem encontradas. Observe na figura 5.11 abaixo as respostas de alguns alunos da turma.

Figura 5.11 – Soluções da Exploração 3 - Questão 2.



a) Resolva todas as subtrações de cada um dos números de 11 até 19 pela soma dos seus algarismos. 11 - 2 = 9 12 - 3 = 9 13 - 4 = 9 14 - 5 = 9 15 - 6 = 9 16 - 7 = 9 17 - 8 = 9 18 - 9 = 9 19 - 10 = 9

a) Resolva todas as subtrações de cada um dos números de 11 até 19 pela soma dos seus algarismos.

11	12	13	14	15	16	17	18	19
-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
9	9	9	9	9	9	9	9	9

b) O que você conclui de semelhante em relação as subtrações realizadas no item a?
As subtrações resultam todas iguais a 9.

b) O que você conclui de semelhante em relação as subtrações realizadas no item a?
todos os resultados são 9.

c) Descreva o motivo das três primeiras damas sempre serem encontradas na mágica 3, independentemente do número escolhido pelo aluno? O motivo é que todas elas ficam localizadas na posição 9 e independente do valor escolhido pelo aluno as subtrações de cada um dos números de 11 até 19 pela soma dos seus algarismos sempre dão igual a 9 como vimos na letra B.

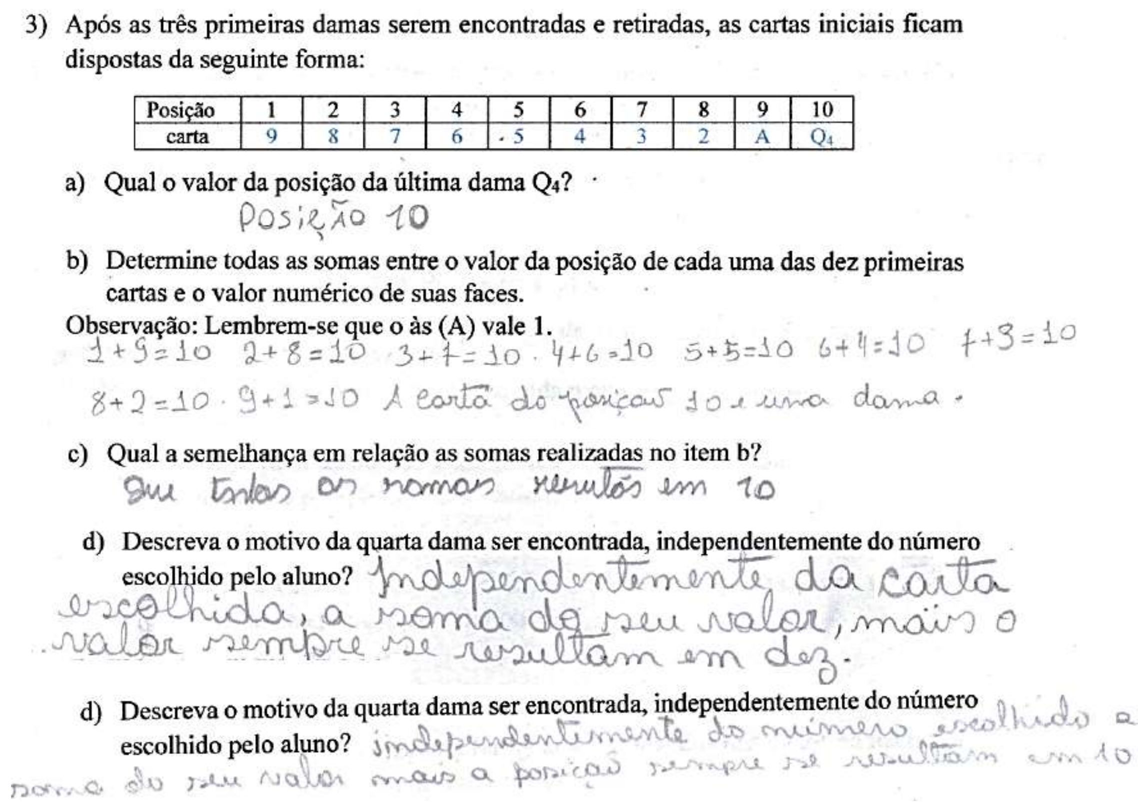
c) Descreva o motivo das três primeiras damas sempre serem encontradas na mágica 3, independentemente do número escolhido pelo aluno?
A diferença entre o número escolhido de dois algarismo e a soma de seus algarismo o valor resulta em 9.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Os itens (a) e (b) foram resolvidos de forma satisfatória por toda a turma. Em contrapartida o item (c) teve um nível de dificuldade um pouco maior e poucos alunos deram uma resposta convincente. No entanto, notemos das duas resoluções da figura acima referentes ao item (c) que ambos os alunos obtiveram o resultado esperado na exploração e foram convictos em suas respostas.

Os itens (a), (b), (c) e (d) da questão 3, fugiam um pouco do foco do conteúdo principal, uma vez que abordava um quadro, o qual servia para determinar a posição da última dama que estava localizada na posição 10. Observemos as resoluções destes itens realizadas por 5 alunos diferentes, conforme figura 5.12 abaixo.

Figura 5.12 – Soluções da Exploração 3 - Questão 3.



3) Após as três primeiras damas serem encontradas e retiradas, as cartas iniciais ficam dispostas da seguinte forma:

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
carta	9	8	7	6	5	4	3	2	A	Q_4

a) Qual o valor da posição da última dama Q_4?

Posição 10

b) Determine todas as somas entre o valor da posição de cada uma das dez primeiras cartas e o valor numérico de suas faces.

Observação: Lembrem-se que o às (A) vale 1.

1+9=10 2+8=10 3+7=10. 4+6=10 5+5=10 6+4=10 7+3=10

8+2=10. 9+1=10 A carta da posição 10 é uma dama.

c) Qual a semelhança em relação as somas realizadas no item b?

Que todas as somas resultou em 10

d) Descreva o motivo da quarta dama ser encontrada, independentemente do número escolhido pelo aluno? Independentemente da carta escolhida, a soma do seu valor, mais o valor sempre se resultam em dez.

d) Descreva o motivo da quarta dama ser encontrada, independentemente do número escolhido pelo aluno? independentemente do número escolhido a soma do seu valor mais a posição sempre se resultam em 10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Os itens (a), (b) e (c) foram resolvidos por todos os alunos por se tratarem de questões realizadas com a análise do quadro e abordando somas simples. O item (d) foi resolvido de forma correta por boa parte da turma e outros resolveram de forma parcial por se tratar de um item que exigia uma análise da questão, conforme observamos na figura acima. Contudo a exploração 3 foi bem-sucedida.

O intuito da exploração 4 foi levar os alunos a compreenderem que a diferença entre um número natural n de dois algarismos e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de nove. Para isto as questões de 1 até 4 foram baseadas num quadro que continha as posições das cartas de todo o baralho, onde os reis encontrados pelo mágico, conforme Matemágica 4, eram sempre localizados em posições com valores múltiplos de 9.

As questões 1, 2 e 3 solicitavam aos alunos para determinar os valores das posições de cada rei, descreverem o valor do resto de cada posição na divisão por 9 e por fim justificarem o motivo destes valores serem múltiplos de 9. Devido a semelhança das questões abordando divisibilidade por 9 na exploração anterior, tais questões foram solucionadas pela maior parte da turma. Observemos abaixo as soluções de alguns alunos conforme figura 5.13.

Figura 5.13 – Soluções da Exploração 4 - Questões 1, 2 e 3.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 à 18	19	20 à 28	29	30 à 38	39	40 à 52
carta	3	4	5	6	7	8	9	10	K_1	2	A	J	seis cartas	K_2	nove cartas	K_3	nove cartas	K_4	Treze cartas

1) Qual o valor da posição do primeiro rei K_1? Ao retirar K_1, qual será o valor da nova posição de K_2? Ao retirar K_1 e K_2, qual será o valor da nova posição de K_3? Ao retirar K_1, K_2 e K_3, qual será o valor da nova posição de K_4?

K1 está na posição 9 retirada uma carta
K2 fica na posição 18 retirado duas carta
K3 fica na posição 27 retirada três carta
K4 fica na posição 36.

2) O valor das respectivas posições de K_1, K_2, K_3 e K_4 deixam quais restos quando divididos por 9? $9 \div 9 = 1$ (0) $\quad 18 \div 9 = 2$ (0) $\quad 27 \div 9 = 3$ (0) $\quad 36 \div 9 = 4$ (0) todos possuem resto (0).

3) Da questão 2, podemos afirmar que os valores das posições de K_1, K_2, K_3 e K_4 são múltiplos de 9? Por que? sim, pois todos os divisões deu resto 0

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A questão 4 trazia a demonstração do resultado trabalhado na exploração 4 para a turma utiliza-lo ao responder os itens (a) e (b), os quais solicitavam para os alunos determinarem a diferença entre um número natural n e a soma de seus algarismos quando n estiver em determinado intervalo e descreverem qual dos reis foi encontrado na posição de cada diferença obtida. Os enunciados destes itens apesar de tratarem do mesmo questionamento, foram escritos de duas maneiras diferentes com o intuito de observar o grau de percepção dos alunos quanto aos diferentes contextos que uma questão matemática pode trazer.

Observe as resoluções de alguns alunos segundo a figura 5.14 a seguir, o que mostra que os alunos conseguiram identificar no item (b) que o intervalo dado na questão poderia ser utilizado para determinar o valor da dezena x, conforme a questão.

O item (c) trouxe um quadro para os alunos o completarem utilizando os itens (a) e (b). O quadro foi facilmente resolvido pelos alunos, conforme podemos observar em uma das resoluções conforme figura 5.14 abaixo.

Figura 5.14 – Soluções da Exploração 4 - Questão 4.

$$10x + y - (x + y) = 9x$$

Portanto a diferença entre um número natural de dois algarismos e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de 9.

Com base na demonstração vista acima, responda o que se pede a seguir:

a) Qual a diferença entre um número natural n e a soma de seus algarismos:

i) Quando o valor da dezena x for igual a 1? Qual dos reis vistos na mágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

$9 \cdot 1 = 9$ O rei encontrado foi K1

ii) Quando o valor da dezena x for igual a 2? Qual dos reis vistos na mágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

$9 \cdot 2 = 18$ K2 esta na Posição de numero 18

b) Qual a diferença entre um número natural n e a soma de seus algarismos quando:

i) $30 \leq n \leq 39$? Qual dos reis vistos na mágica 4 é encontrado na posição do valor obtido? K3

Como o número n esta entre 30 e 39 o valor da dezena x é igual a 3. Logo $9 \cdot 3 = 27$

ii) $40 \leq n \leq 49$? Qual dos reis vistos na mágica 4 é encontrado na posição do valor obtido? $40 \leq n \leq 49$ $x = 4$

$9x = 9 \cdot 4 = 36$ K4

c) Complete a tabela, levando em consideração os valores escolhidos pelos alunos participantes da mágica 4 e observando as posições dos reis K_1, K_2, K_3 e K_4.

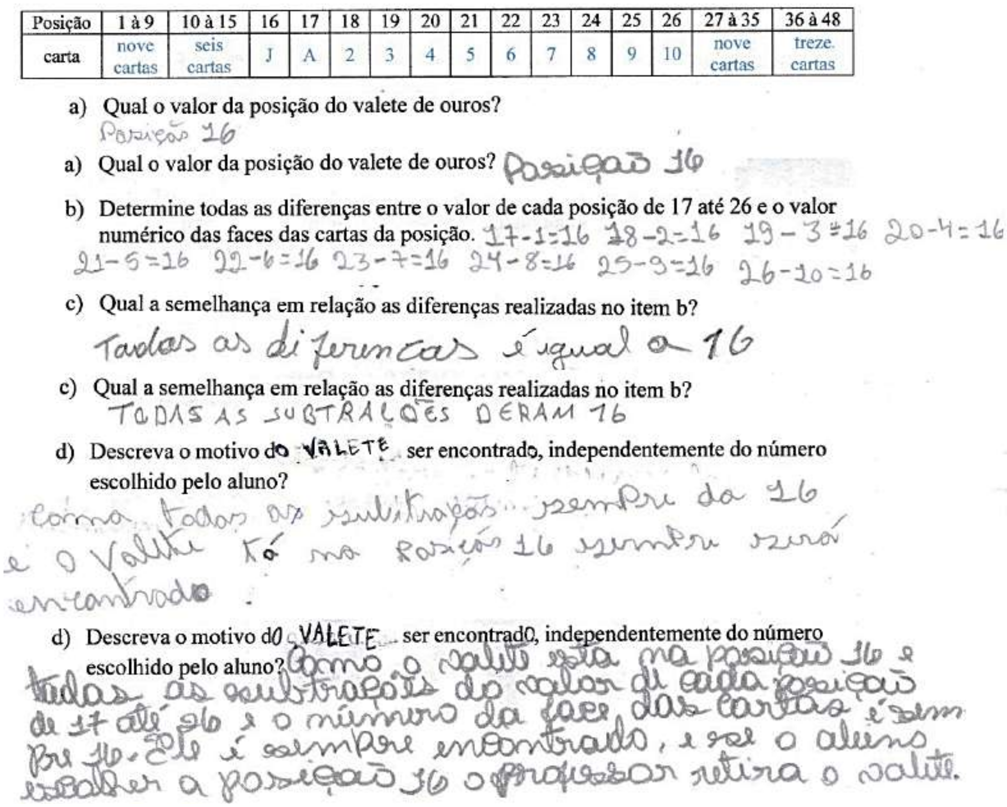
Valor ou nº escolhido entre	10 e 19	20 e 29	30 e 39	40 e 49
Carta encontrada	K1	K2	K3	K4
Valor da dezena x referente ao nº escolhido	1	2	3	4
Valor de 9x ou posição da carta	$9 \cdot 1 = 9$	$9 \cdot 2 = 18$	$9 \cdot 3 = 27$	$9 \cdot 4 = 36$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A questão 5, fugindo um pouco do conteúdo abordado na exploração 4, serviu apenas para mostrar aos alunos como o mágico conseguiu encontrar o valete de ouros, o qual ficou localizado na posição 16. O baralho a princípio foi colocado e preparado em sua caixa pelo mágico de modo que neste passo da Matemágica as diferenças entre o valor de cada uma das posições de 17 a 26 e o valor das faces das cartas correspondentes, sempre resultam em 16. Para isto foi dado um último quadro para os alunos se basearem nas resoluções dos itens (a), (b), (c) e (d).

Conforme podemos observar em algumas soluções realizadas pelos alunos na figura 5.15 abaixo, após a análise do quadro, os itens (a) e (c) foram realizados de forma satisfatória por toda a sala, o item (b) por se tratar de subtrações simples também foi resolvido, apesar de alguns equívocos. No item (d) podemos perceber pelas duas resoluções na figura 5.15 que os alunos conseguiram compreender a ideia final da Matemágica ao encontrar o valete de ouro na posição 16.

Figura 5.15 – Soluções da Exploração 4 - Questão 5.



Posição	1 à 9	10 à 15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27 à 35	36 à 48
carta	nove cartas	seis cartas	J	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nove cartas	treze. cartas

a) Qual o valor da posição do valete de ouros?
Posição 16

a) Qual o valor da posição do valete de ouros? Posição 16

b) Determine todas as diferenças entre o valor de cada posição de 17 até 26 e o valor numérico das faces das cartas da posição. 17-1=16 18-2=16 19-3=16 20-4=16 21-5=16 22-6=16 23-7=16 24-8=16 25-9=16 26-10=16

c) Qual a semelhança em relação as diferenças realizadas no item b?
Todas as diferenças é igual a 16

c) Qual a semelhança em relação as diferenças realizadas no item b?
TODAS AS SUBTRAÇÕES DERAM 16

d) Descreva o motivo do VALETE ser encontrado, independentemente do número escolhido pelo aluno?
Como todas as subtrações sempre da 16 e o Valete só na posição 16 sempre será encontrado.

d) Descreva o motivo dO VALETE ser encontradO, independentemente do número escolhido pelo aluno? Como o valete está na posição 16 e todas as subtrações do valor de cada posição de 17 até 26 e o número da face das cartas é sempre 16. Ele é sempre encontrado, e só o aluno escolher a posição 16 o professor retira o valete.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Contudo, as explorações 3 e 4 foram eficazes, visto que houve um grande envolvimento por parte dos alunos nas dinâmicas das atividades propostas, o que facilitou o desempenho individual e coletivo de cada um. Ao final da exploração 4 o professor aplicou uma atividade voltada para situações-problemas envolvendo o critério de divisibilidade por 9, a qual será analisada adiante na seção 5.2.

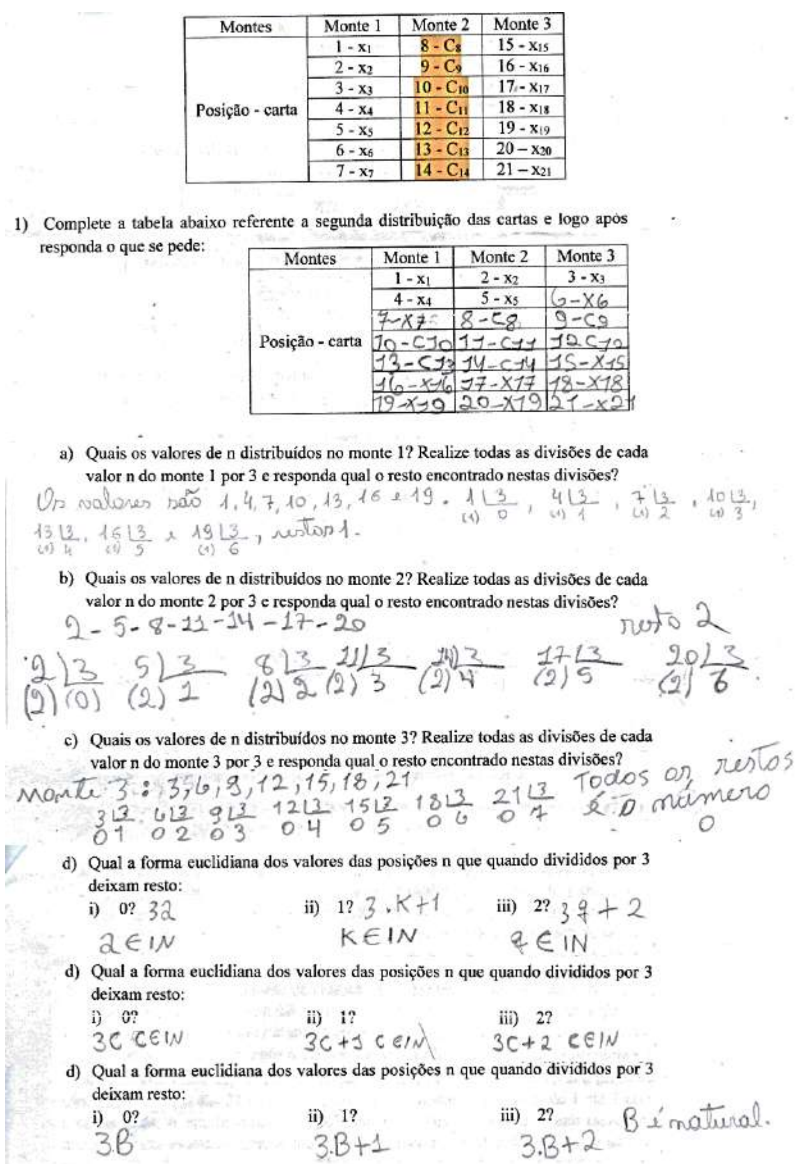
5.1.3 Exploração matemática 5

A exploração matemática 5, consistiu em verificar os possíveis restos na divisão euclidiana por 3. A questão 1 trouxe um quadro que disponibilizava as posições das 21 cartas após a primeira distribuição em três montes, conforme a Matemágica 5. Ainda pedia para os alunos completarem outro quadro referente a segunda distribuição e a partir dele responderem os itens (a), (b), (c) e (d).

Nos itens (a), (b) e (c) foi solicitado aos alunos para descreverem os valores de n distribuídos nos montes 1, 2 e 3 respectivamente, onde n representa a posição da carta após a primeira distribuição e em seguida realizarem todas as divisões de cada valor n por 3 determinando o resto encontrado nestas divisões. O item (d) pedia para descrever a forma euclidiana na divisão por 3 quando os restos desta divisão é igual a 0, 1 ou 2.

Conforme podemos ver a partir de algumas resoluções conforme figura 5.16 abaixo, a questão 1 foi compreendida e resolvida pelos alunos, visto que se tratava de uma questão análoga a outras questões já resolvidas por eles nas explorações anteriores, com destaque para o item (d) onde muitos alunos, após uma discussão saudável sobre o conjunto dos números naturais, descreveram a variável como pertencente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Figura 5.16 – Soluções da Exploração 5 - Questão 1.



Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posição - carta	1 - x_1	8 - C_8	15 - x_{15}
	2 - x_2	9 - C_9	16 - x_{16}
	3 - x_3	10 - C_{10}	17 - x_{17}
	4 - x_4	11 - C_{11}	18 - x_{18}
	5 - x_5	12 - C_{12}	19 - x_{19}
	6 - x_6	13 - C_{13}	20 – x_{20}
	7 - x_7	14 - C_{14}	21 – x_{21}

1) Complete a tabela abaixo referente a segunda distribuição das cartas e logo após responda o que se pede:

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posição - carta	1 - x_1	2 - x_2	3 - x_3
	4 - x_4	5 - x_5	6-X6
	7-X7	8-C8	9-C9
	10-C10	11-C11	12 C12
	13-C13	14-C14	15-X15
	16-X16	17-X17	18-X18
	19-X19	20-X19	21-X21

a) Quais os valores de n distribuídos no monte 1? Realize todas as divisões de cada valor n do monte 1 por 3 e responda qual o resto encontrado nestas divisões?

Os valores são 1, 4, 7, 10, 13, 16 e 19. 1 |3 (1) 0, 4 |3 (1) 1, 7 |3 (1) 2, 10 |3 (1) 3, 13 |3 (1) 4, 16 |3 (1) 5 e 19 |3 (1) 6, restos 1.

b) Quais os valores de n distribuídos no monte 2? Realize todas as divisões de cada valor n do monte 2 por 3 e responda qual o resto encontrado nestas divisões?

2 - 5 - 8 - 11 - 14 - 17 - 20 resto 2

2 |3 (2) (0) 5 |3 (2) 1 8 |3 (2) 2 11 |3 (2) 3 14 |3 (2) 4 17 |3 (2) 5 20 |3 (2) 6.

c) Quais os valores de n distribuídos no monte 3? Realize todas as divisões de cada valor n do monte 3 por 3 e responda qual o resto encontrado nestas divisões?

Monte 3 : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 Todos os restos é o número 0

3 |3 0 1 6 |3 0 2 9 |3 0 3 12 |3 0 4 15 |3 0 5 18 |3 0 6 21 |3 0 7

d) Qual a forma euclidiana dos valores das posições n que quando divididos por 3 deixam resto:

i) 0? 3a a ∈ IN ii) 1? 3 . K + 1 K ∈ IN iii) 2? 3q + 2 q ∈ IN

d) Qual a forma euclidiana dos valores das posições n que quando divididos por 3 deixam resto:

i) 0? 3C C ∈ IN ii) 1? 3C + 1 C ∈ IN iii) 2? 3C + 2 C ∈ IN

d) Qual a forma euclidiana dos valores das posições n que quando divididos por 3 deixam resto:

i) 0? 3B ii) 1? 3.B + 1 iii) 2? 3.B + 2 B é natural.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A questão 2 foi considerada fácil pelos alunos, pois solicitava para completarem quadros trazidos nos itens (a), (b) e (c) referentes as posições das cartas quando o valor de n da carta a ser desvendada pelo mágico na Matemágica 5 fosse respectivamente da forma $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, com $k \in \mathbb{N}$, conforme podemos observar em algumas resoluções na figura 5.17 a seguir.

Figura 5.17 – Soluções da Exploração 5 - Questão 2.

2) **Complete a tabela abaixo referente a terceira distribuição das cartas quando:**

a) **O valor de n da carta C_n escolhida for da forma 3k, com k ∈ ℕ.**

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições - cartas	X1	X4	X7
	X10	X13	X16
	X19	X3	X6
	C9	C12	X15
	X18	X21	X2
	X5	X8	X11
	X19	X17	X20

b) **O valor de n da carta C_n escolhida for da forma 3k + 1, com k ∈ ℕ.**

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições - cartas	X2	X5	X8
	X11	X14	X17
	X20	X1	X4
	X7	C10	C13
	X16	X19	X3
	X6	X9	X12
	X15	X18	X21

c) **O valor de n da carta C_n escolhida for da forma 3k + 2, com k ∈ ℕ.**

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições - cartas	X1	X4	X7
	X10	X13	X16
	X19	X2	X5
	C8	C11	C14
	X17	X20	X3
	X6	X9	X12
	X15	X18	X21

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Em contrapartida, na questão 3 houve um pouco mais de dificuldade para ser resolvida, pois pedia para os alunos explicarem o motivo da carta a ser desvendada ficar exatamente na posição de número 11, após a terceira distribuição. Como trata-se de uma questão que precisa ser realizado uma análise em torno do resultado final da Matemágica, os alunos discutiram entre si e com o apoio do professor conseguiram compreender o que foi solicitado. Observemos as soluções de dois alunos, comprovando a eficácia da exploração 5, conforme figura 5.18 abaixo.

Figura 5.18 – Soluções da Exploração 5 - Questão 3.

3) Por que ao juntar os montes, após a terceira distribuição, a carta escolhida pelo aluno fica exatamente na posição de número 11?

Porque independentimente da carta escolhida pelo aluno sempre cai na posição 4 em um dos montes. Como esse monte vai ser colocado no meio, logo serão 7 cartas do monte acima dele mais 4 igual 11.

3) Por que ao juntar os montes, após a terceira distribuição, a carta escolhida pelo aluno fica exatamente na posição de número 11?

Porque as possíveis cartas escolhidas ficam todas localizadas na posição 4 após a última distribuição. Aí quando coloca o monte dela no meio dos outros dois, aumenta 7 cartas em cima da carta escolhida. Por isso ela passa da posição 4 para posição 11. Porque 7+4 = 11.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após o termino da exploração matemática 5, foi aplicado na turma uma atividade com situações-problemas envolvendo a divisão euclidiana por 3 e o critério de divisibilidade por 3 com o intuito de analisar o desempenho da turma em relação aos conteúdos abordados na exploração. A análise desta atividade será realizada na seção 5.2.

5.1.4 Explorações matemáticas 6 e 7

As explorações matemáticas 6 e 7 sugeriram aos alunos verificar a forma euclidiana de um número natural n na divisão por 2 levando-os a compreender o critério de divisibilidade por 2.

A exploração matemática 6 foi composta por 5 questões. Na questão 1, toda a turma obteve êxito na resolução, pois foi pedido para os alunos, através de um quadro dado no enunciado, determinarem as posições das três cartas escolhidas para serem desvendadas pelo mágico ao final da Matemágica 6, representadas por C_1, C_2 e C_3. Observe na figura 5.19 abaixo as resoluções de dois alunos da turma.

Figura 5.19 – Soluções da Exploração 6 - Questão 1.

Cartas	Monte 4	C_3	Monte 3	C_2	Monte 2	C_1	Monte 1
posição	1 até 9	10	11 até 25	26	27 até 41	42	43 até 52
Total de cartas	9	1	15	1	15	1	10

1) Quais as posições das cartas C_1, C_2 e C_3?

$C_1 = 42$ $C_2 = 26$ $C_3 = 10$

1) Quais as posições das cartas C_1, C_2 e C_3?

C1 posição 42 C2 posição 26 C3 posição 10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 2, foi pedido para os alunos completarem um quadro referente as novas posições das cartas após o deslocamento das quatro primeiras cartas que estavam no topo do baralho para baixo do baralho. Logo após, com o auxílio do quadro, foi pedido para descreverem nos itens (a) e (b) os valores das posições das cartas C_1, C_2 e C_3, relatando a paridade de tais valores e descreverem o resto da divisão dos valores das posições de C_1, C_2 e C_3 por 2, informando a forma euclidiana destes na divisão por 2. Vejamos na figura 5.20 abaixo as resoluções realizadas por três alunos da turma, evidenciando o bom rendimento dos alunos na questão 2.

Figura 5.20 – Soluções da Exploração 6 - Questão 2.

Cartas	Monte 4	C_3	Monte 3	C_2	Monte 2	C_1	Monte 1
posição	1 até 5	6	7 até 21	22	23 até 37	38	39 até 52
Total de cartas	5	1	15	1	15	1	14

a) Quais os valores das posições das cartas C_1, C_2 e C_3? Os valores das posições das cartas C_1, C_2 e C_3 são números pares ou impares?

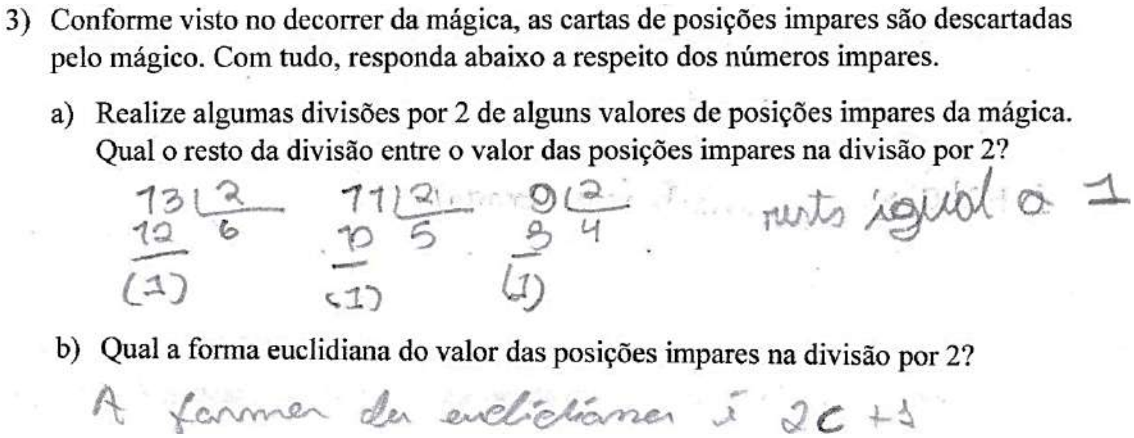
C1 posição 38 C3 posição 6
C2 posição 22 são números pares

b) Qual o resto da divisão entre os valores das posições de C_1, C_2 e C_3 por 2? Estes valores são múltiplos de 2? E qual a forma euclidiana de destes valores na divisão por 2? como os valores C1, C2 e C3 são pares os restos na divisão por 2 desses valores é 0. Sim, pois todos os restos são iguais a 0. $\boxed{2q}$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No item (a) da questão 3 foi proposto aos alunos escolherem alguns valores impares para com estes realizar divisões por 2 descrevendo o resto em cada uma delas e no item (b) pedia para determinarem a forma euclidiana destes valores na divisão por 2. Vejamos abaixo na figura 5.21 as soluções de alguns alunos afim de comprovar o bom êxito obtido pela turma ao relatarem que os restos obtidos nas divisões foram iguais a 1.

Figura 5.21 – Soluções da Exploração 6 - Questão 3.



3) Conforme visto no decorrer da mágica, as cartas de posições impares são descartadas pelo mágico. Com tudo, responda abaixo a respeito dos números impares.

a) Realize algumas divisões por 2 de alguns valores de posições impares da mágica. Qual o resto da divisão entre o valor das posições impares na divisão por 2?

13 | 2, 12, 6, (1) — 11 | 2, 10, 5, (1) — 9 | 2, 8, 4, (1) — resto igual a 1

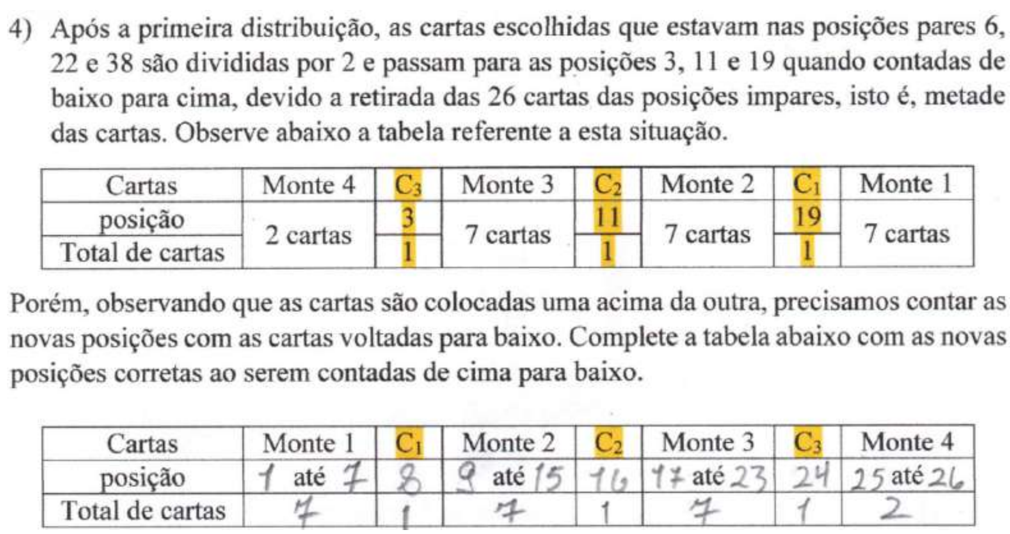
b) Qual a forma euclidiana do valor das posições impares na divisão por 2?

A forma da euclidiana é 2c + 1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 4 foi proposto aos alunos completarem um quadro o qual disponibilizava as cartas com as faces voltadas para baixo após a primeira distribuição de acordo com a Matemágica 6. A questão foi considerada simples, conforme podemos ver na figura 5.22 abaixo numa das resoluções desenvolvidas por um aluno da turma.

Figura 5.22 – Soluções da Exploração 6 - Questão 4.



4) Após a primeira distribuição, as cartas escolhidas que estavam nas posições pares 6, 22 e 38 são divididas por 2 e passam para as posições 3, 11 e 19 quando contadas de baixo para cima, devido a retirada das 26 cartas das posições impares, isto é, metade das cartas. Observe abaixo a tabela referente a esta situação.

Cartas	Monte 4	C_3	Monte 3	C_2	Monte 2	C_1	Monte 1
posição	2 cartas	3	7 cartas	11	7 cartas	19	7 cartas
Total de cartas		1		1		1	

Porém, observando que as cartas são colocadas uma acima da outra, precisamos contar as novas posições com as cartas voltadas para baixo. Complete a tabela abaixo com as novas posições corretas ao serem contadas de cima para baixo.

Cartas	Monte 1	C_1	Monte 2	C_2	Monte 3	C_3	Monte 4
posição	1 até 7	8	9 até 15	16	17 até 23	24	25 até 26
Total de cartas	7	1	7	1	7	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 5, foi pedido para os alunos determinarem nos itens (a), (b) e (c) a forma euclidiana na divisão por 2 do valor das posições cartas descartadas no decorrer da Matemágica 6 em cada distribuição, assim como a forma euclidiana do valor das cartas não descartadas com o intuito dos alunos compreenderem o motivo pelo qual ao final da mágica as cartas C_1, C_2 e C_3 ficaram nas mãos do mágico.

Segue na figura 5.23 abaixo as soluções desenvolvidas por três alunos diferentes da sala, uma para cada item. Nota-se destas resoluções que os alunos, a cada exploração realizada, aumentavam gradativamente o nível de raciocínio lógico e de suas capacidades em desenvolverem as questões envolvendo divisibilidade e divisão euclidiana.

Figura 5.23 – Soluções da Exploração 6 - Questão 5.

a) Qual a forma euclidiana do valor das cartas descartadas em cada distribuição na divisão por 2?

sempre são destartadas cartas com posições impares da forma 2q+1

b) E qual a forma euclidiana do valor das cartas que vão continuando nas mãos do mágico na divisão por 2? como as cartas qui ficam com o magico são pares loga são da forma 2k

c) Tente explicar o motivo pelo qual ao final da mágica após todas as distribuições realizadas pelo mágico restam exatamente em suas mãos as cartas C_1, C_2 e C_3?

porque as cartas C1, C2 e C3 sempre caem em posições pares. como são descartadas somente cartas de posições ímpares, elas ficam até o final.

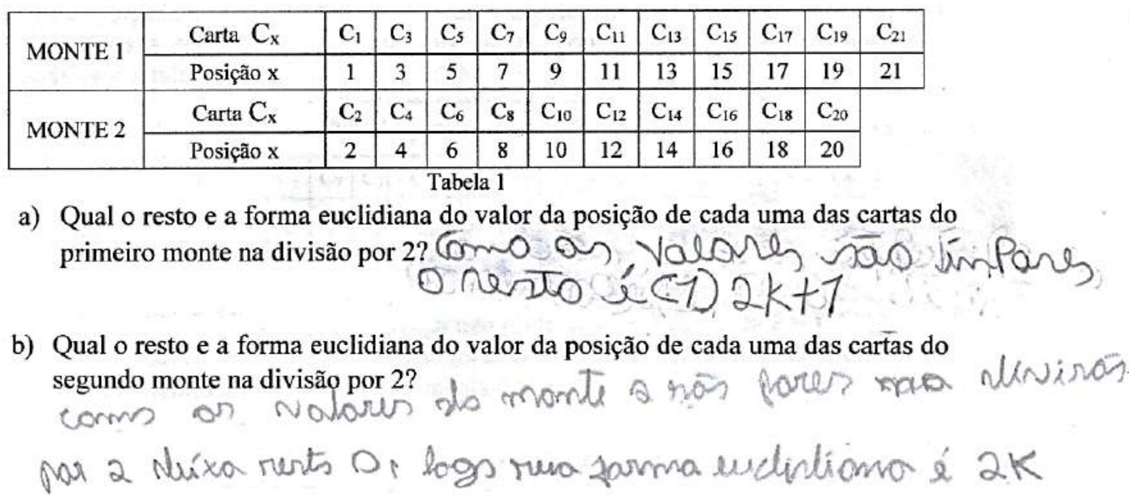
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A exploração matemática 7 continha três questões e foi baseada na segunda versão do truque, pelo fato do professor (mágico) ter realizado esta versão da Matemágica 7 em sala de aula.

Na questão 1 foi disponibilizado um quadro que retratava a distribuição das 21 cartas utilizadas na Matemágica 7 em dois montes após a inversão das cartas de cada monte. Daí foi pedido, na questão 1, para os alunos determinarem nos itens (a) e (b) o resto e a forma euclidiana do valor da posição de cada uma das cartas de cada monte na divisão por 2 e nos itens (c) e (d) foi solicitado para descreverem a paridade das cartas C_{x-1} e C_{x+1} quando o coringa, denominado por C_x, onde $x \in \mathbb{N}$ representa a posição inicial das cartas, for localizado em uma posição par e quando o coringa for localizado em uma posição ímpar. Por fim pedia para os alunos argumentarem explicando o porquê, após a primeira distribuição, as cartas que ficavam acima e abaixo do coringa, isto é C_{x-1} e C_{x+1} ficaram juntas no mesmo monte, uma acima da outra.

Os itens (a) e (b) foram resolvidos de maneira simples pelos alunos, conforme podemos ver nas resoluções da figura 5.24 adiante.

Figura 5.24 – Soluções da Exploração 7 - Questão 1, itens (a) e (b).



MONTE 1	Carta C_x	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{17}	C_{19}	C_{21}
	Posição x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
MONTE 2	Carta C_x	C_2	C_4	C_6	C_8	C_{10}	C_{12}	C_{14}	C_{16}	C_{18}	C_{20}	
	Posição x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	

Tabela 1

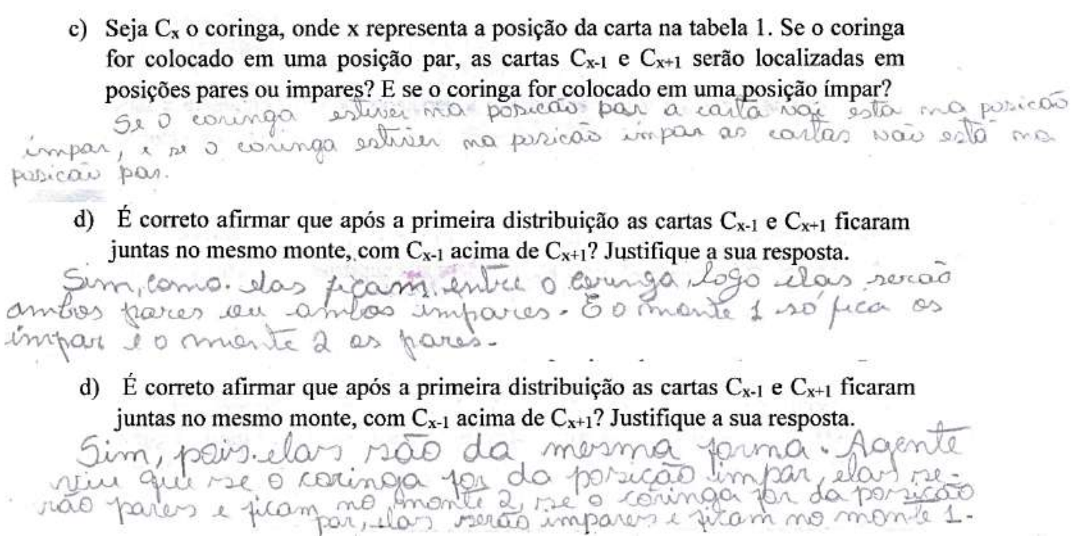
a) Qual o resto e a forma euclidiana do valor da posição de cada uma das cartas do primeiro monte na divisão por 2? Como os valores são ímpares o resto é (1) 2k+1

b) Qual o resto e a forma euclidiana do valor da posição de cada uma das cartas do segundo monte na divisão por 2?
como os valores do monte 2 são pares na divisão por 2 deixa resto 0, logo sua forma euclidiana é 2K

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Porém os itens (c) e (d) trataram de uma análise mais aprofundada da Matemágica 7 o que proporcionou um debate entre os alunos mediado pelo professor com o intuito de formar um raciocínio adequado para solucionar tais itens. Podemos observar um aspecto positivo quanto ao entendimento destes itens com base nas soluções realizadas por alguns alunos, conforme figura 5.25 abaixo.

Figura 5.25 – Soluções da Exploração 7 - Questão 1, itens (c) e (d).



c) Seja C_x o coringa, onde x representa a posição da carta na tabela 1. Se o coringa for colocado em uma posição par, as cartas C_{x-1} e C_{x+1} serão localizadas em posições pares ou impares? E se o coringa for colocado em uma posição ímpar?
Se o coringa estiver na posição par a carta vai está na posição ímpar, e se o coringa estiver na posição ímpar as cartas vão está na posição par.

d) É correto afirmar que após a primeira distribuição as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficaram juntas no mesmo monte, com C_{x-1} acima de C_{x+1}? Justifique a sua resposta.
Sim, como elas ficam entre o coringa logo elas serão ambos pares ou ambos impares. E o monte 1 só fica os impar e o monte 2 os pares.

d) É correto afirmar que após a primeira distribuição as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficaram juntas no mesmo monte, com C_{x-1} acima de C_{x+1}? Justifique a sua resposta.
Sim, pois elas são da mesma forma. A gente viu que se o coringa for da posição impar, elas serão pares e ficam no monte 2, se o coringa for da posição par, elas serão impares e ficam no monte 1.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 2, semelhante a questão 1, foi dado um quadro que descrevia a posição das cartas após a primeira distribuição e pedia no item (a) para os alunos completarem um novo quadro referente a segunda distribuição das cartas em dois novos montes, sendo um destinado as cartas da forma $2q + 1$ e o outro destinado as cartas da forma $2q$, com $q \in \mathbb{N}$.

Logo após pedia para os alunos determinarem no item (b) se as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficaram localizadas no mesmo monte ou não, justificando a resposta. Por fim no item (c) foi pedido para os alunos, com base nos estudos realizados até então, determinarem os possíveis restos numa divisão euclidiana por 2.

O item (a) foi resolvido facilmente pois os alunos já estavam familiarizados em questões para completar quadros. Vejamos a resolução de um destes quadros por meio da figura 5.26 abaixo.

Figura 5.26 – Soluções da Exploração 7 - Questão 2, item (a).

Carta C_x	C_2	C_4	C_6	C_8	C_{10}	C_{12}	C_{14}	C_{16}	C_{18}	C_{20}	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{17}	C_{19}	C_{21}
Nova posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Tabela 2

a) Complete a tabela 3 abaixo distribuindo as cartas da tabela 2, na ordem estabelecida das posições y = 2q + 1 no monte 1 e y = 2q no monte 2, onde q ∈ ℕ.

MONTE 1	Forma de y	2q + 1										
	Carta C_x	C2	C6	C10	C14	C18	C1	C5	C9	C13	C17	C21
MONTE 2	Forma de y	2q										
	Carta C_x	C4	C8	C12	C16	C20	C3	C7	C11	C15	C19	

Tabela 3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No item (b) houve novamente uma discussão entre os alunos com a mediação do professor afim de solucionar a analise sugerida neste item e apesar da dificuldade inicial, os alunos conseguiram enxergar e compreender de maneira satisfatória o que foi pedido, conforme podemos perceber pela figura 5.27 abaixo através de algumas soluções bastante convincentes.

Figura 5.27 – Soluções da Exploração 7 - Questão 2, item (b).

b) As cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficam localizadas no mesmo monte na tabela 3? Justifique sua resposta. Não, porque CX-1 e CX-1 estão em posições de paridades diferentes, uma em posição par e outra em posição impar, logo elas irão uma para o monte 1 e outra para o monte 2.

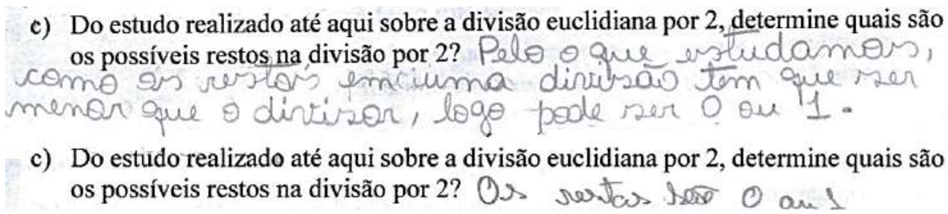
b) As cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficam localizadas no mesmo monte na tabela 3? Justifique sua resposta. NÃO, PORQUE ANTERIORMENTE TINHA UMA CARTA NA POSICÃO PAR E OUTRA NA POSIÇÃO IMPAR, ASSIM ELAS IRÃO PÀRA MONTES DIFERENTES.

b) As cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficam localizadas no mesmo monte na tabela 3? Justifique sua resposta, Não Porque quando CX-1 estiver numa posição par, CX+1 vai estar numa posição impar, ou vice versa, dai uma delas vai para o monte 1 onde fica as cartas de posições impares e a outra vai para o monte 2 com as cartas de posição par.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O item (c) da questão 2 questionou os alunos sobre os possíveis restos da divisão de um número natural por 2, o qual foi prontamente resolvido por quase todos da turma visto que nas explorações anteriores assim como nesta trabalhou-se com a definição da divisão euclidiana, conforme podemos observar nas duas resoluções na figura 5.28 a seguir.

Figura 5.28 – Soluções da Exploração 7 - Questão 2, item (b).


c) Do estudo realizado até aqui sobre a divisão euclidiana por 2, determine quais são os possíveis restos na divisão por 2? Pelo o que estudamos, como os restos em uma divisão tem que ser menor que o divisor, logo pode ser 0 ou 1.

c) Do estudo realizado até aqui sobre a divisão euclidiana por 2, determine quais são os possíveis restos na divisão por 2? Os restos são 0 ou 1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A questão 3 foi desenvolvida com o intuito de levar os alunos a compreenderem em qual posição final ficaram localizadas as duas cartas C_{x-1} e C_{x+1} por meio de um quadro dado no enunciado, o qual trazia a posição final das 21 cartas ao colocar o monte 2 acima do monte 1. Tal questão foi dividida em cinco itens e não abordava o conteúdo principal sobre a divisão euclidiana por 2.

Nos itens (a) e (b) foi pedido a turma para determinarem a distância entre as posições das cartas C_{x-1} e C_x e a distância entre as posições das cartas C_{x+1} e C_x, para o caso quando o coringa for a carta C_6 e C_{17} respectivamente. O item (c) teve o intuito de levar os alunos a compreenderem que tais distâncias sempre eram iguais a 5 solicitando uma justificativa para tal fato. No item (d) os alunos deveriam descrever as posições das cartas C_{x-1} e C_x quando retirado o coringa e colocado as cartas que estavam embaixo dele para cima do monte e por fim o item (e) solicitou para os alunos justificarem porque as cartas C_{x-1} e C_x ficaram localizadas na posição 5 em cada monte dentro do bolso do mágico.

Como os itens na questão 3 necessitavam de uma análise mais aprofundada referente aos passos finais da Matemágica 7 trabalhada, o professor realizou novamente o truque e explicou mais uma vez o passo a passo de como funciona a Matemágica, afim de motivar os alunos a realizarem com êxito o que foi pedido. Logo após dividiu a turma em quatro grupos para discutirem e resolverem a questão.

Vejamos na figura 5.29 abaixo as resoluções dos itens (a), (b) e (c) do ponto de vista de alguns alunos da turma, constatando que os alunos conseguiram verificar que a distância entre as cartas C_{x-1} e C_x e a distância entre as posições de C_{x+1} e C_x sempre resultam em 5 de acordo com o quadro da questão.

Figura 5.29 – Soluções da Exploração 7 - Questão 3, itens (a), (b) e (c).

Formas de x e y	x = 2k e y = 2q					x = 2k + 1 e y = 2q					x = 2k e y = 2q + 1					x = 2k + 1 e y = 2q + 1					
Carta C_x	C_4	C_8	C_{12}	C_{16}	C_{20}	C_3	C_7	C_{11}	C_{15}	C_{19}	C_2	C_6	C_{10}	C_{14}	C_{18}	C_1	C_5	C_9	C_{13}	C_{17}	C_{21}
Nova posição z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Tabela 4

Observe que independentemente da posição z onde esteja o coringa, sabendo que ele não pode ser as cartas C_1 e C_{21}, isto é, o coringa não pode estar nas posições z = 16 e z = 21. Ao retira-lo, restarão 20 cartas e deve-se colocar as cartas que estavam abaixo dele para cima do monte. Sendo C_x o coringa, pela tabela 4 responda:

a) Qual a distância entre as posições z das cartas C_{x-1} e C_x, considerando que o coringa é a carta C_6? Como o coringa é $C_x = C_6$. A carta Carta C_{x-1} é C_5. A posição de C_6 é $Z = 12$ e a posição de $C_5 = 17$. A distância entre 12 e 17 é 5.

b) Qual a distância entre as posições z das cartas C_{x+1} e C_x, considerando que o coringa é a carta C_{17}? $C_x = C_{17} \rightarrow$ POSI: 20 $20 - 15 = 5$ CARTAS
$C_{x+1} = C_{18} \rightarrow$ POSI: 15
A DISTANCIA É 5 CARTAS

c) Qualquer que seja o valor de x de 1 até 21, as distâncias entre as posições z entre as cartas C_{x-1} e C_x ou entre C_{x+1} e C_x serão sempre iguais a 5? Justifique sua resposta. (Considere no decorrer da contagem que ao chegar na carta da posição z = 21, deve-se continuar a contagem retornando para carta da posição z = 1).

Sim, pois as distâncias entre x e x-1 é igual a 5 e as distâncias entre os valores de x e x+1 também é 5.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Agora vejamos a figura 5.30 a seguir com as resoluções dos itens (d) e (e), os quais exigiram dos alunos que descrevessem como as cartas C_{x-1} e C_x são desvendadas pelo mágico. Podemos perceber da figura 5.30 abaixo que os alunos responderam de forma coerente o que foi pedido, assim como em toda a exploração 7.

Figura 5.30 – Soluções da Exploração 7 - Questão 3, itens (d) e (e).

d) Ao colocar as cartas que estavam embaixo do coringa para cima do monte as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficarão localizadas em quais posições z? Como elas tão numa distância de 5 cartas do coringa I tem que colocar o monte pra cima quando tirar coringa, uma vai fica 5 carta no inicio e a outra fica 5 carta na parte de baixo CX-1 vai pra posição 5 e CX+1 vai pra posição 16 (20, 19, 18, 17, 16).

e) No passo 5 ao dividir o baralho em dois montes, não alterará as posições das cartas C_{x-1} e C_{x+1}, conforme visto na explicação da mágica. Além disso, o mágico coloca a parte de cima do monte no bolso direito, com as faces das cartas viradas para o seu corpo e coloca a parte de baixo do monte no seu bolso esquerdo, com as costas viradas para o seu corpo. Portanto no passo 6 ao puxar do bolso a quinta carta de cada monte, ele estará puxando exatamente as cartas que estavam acima do coringa na posição (x + 1) e abaixo do coringa na posição (x – 1), finalizando o truque. Justifique porque isto acontece?

Porque, a carta que tava abaixo do coringa ficou na posição 16. Ai quando vira o baralho ao contrario ela passou pra posição 5.
Já a outra que tava 5 posições antes do coringa, quando colocou o monte pra cima ela fica na posição 5. Ai o mágico é só contar as cinco cartas de cada bolso que encontra elas.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Portanto podemos concluir que durante a realização das atividades desenvolvidas nas explorações matemáticas 6 e 7 os alunos ficaram cada vez mais engajados conseguindo relacionar e assimilar o conteúdo matemático sobre a divisão euclidiana por 2 nas Matemágicas 6 e 7 envolvidas e também apresentando justificativas adequadas em questões onde foi sugerido analises da Matemágica.

Ao final da exploração matemática 7, foi aplicado na turma uma atividade com situações-problemas envolvendo a divisão euclidiana por 2 e o critério de divisibilidade por 2 a qual será abordada no seção 5.2 deste trabalho.

5.1.5 Explorações matemáticas 8 e 9

As explorações matemáticas 8 e 9 tiveram o intuito de levar os alunos a compreenderem respectivamente as Matemágicas 8 e 9 através de demonstrações utilizando álgebra e quadros. Antes de iniciar a exploração 8 foi aplicado o pré-teste 2, o qual será analisado no seção 5.3 deste trabalho.

A exploração 8 foi composta por quatro questões. Na questão 1 os alunos deveriam completar um quadro no item (a) que relacionava os valores das novas posições $y \in \mathbb{N}$ da carta C a ser desvendada pelo mágico e o total de cartas x colocadas para baixo do baralho. No item (b) pedia aos alunos para, por meio do quadro, realizar todas as nove somas entre os valores das posições y com os valores de x correspondentes e ao final no item (c) pedia para descreverem a semelhança encontrada nestas somas.

Vejamos na figura 5.31 abaixo as resoluções destes três itens realizadas por 4 alunos diferentes, evidenciando de forma satisfatória a compreensão dos alunos em relação ao que foi sugerido.

Figura 5.31 – Soluções da Exploração 8 - Questão 1.

a) Complete a tabela abaixo com os valores das posições y da carta C, sendo C a carta escolhida pelo aluno e x ∈ ℕ, com 1 ≤ x ≤ 9, o total de cartas colocadas para baixo do monte de 10 cartas.

Posição da carta C	Posição 1								
Total de cartas x colocadas para baixo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Posição y da carta C	10	9	8	7	6	5	4	3	2

b) Da tabela acima realize a soma de cada valor das posições y com o valor de x correspondente ao total de cartas colocadas para baixo do baralho.

1+10=11 2+9=11 3+8=11 4+7=11 5+6=11 6+5=11
7+4=11 8+3=11 9+2=11

c) Qual a semelhança entre todas as somas x + y do item b?

Todos os resultados deram igual a 11.

c) Qual a semelhança entre todas as somas x + y do item b?

Que todas as somas é igual a 11.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 2 foi dada um quadro que relaciona as novas posições z das cartas após distribui-las uma acima da outra na mesa, com $z \in \mathbb{N}$ e $z \neq 10$, solicitando no item (a) para os alunos determinarem o motivo da carta C não poder ficar localizada na posição z igual a 10. No item (b), sabendo que $x = z$, conforme o professor mostrou e provou o resultado durante a explicação da Matemágica 8, pediu-se aos alunos para determinarem o número x escrito em um papel no início da Matemágica quando a carta C ficar localizada na posição$z = 3$. Observemos na figura 5.32 a seguir as soluções destes itens feitas por alguns alunos da sala.

Figura 5.32 – Soluções da Exploração 8 - Questão 2.

2) Ao distribuir as cartas uma acima da outra na mesa, a posição anterior y das cartas somadas com a nova posição z, com z ∈ ℕ e z ≠ 10, será novamente sempre igual a 11, isto é, y + z = 11, conforme podemos ver na tabela abaixo.

Posição y da carta C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição z da carta C	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Com base nisto responda:

a) Porque a nova posição z da carta C não pode ser igual a 10?

por que a posição anterior não poderia ser y igual 1, logo a posição na carta correspondente é z=10

b) Na demonstração realizada pelo professor, provou-se que a posição z da carta C é exatamente igual ao número x escolhido pelo aluno, isto é, x = z. Assim se a carta C escolhida pelo aluno ficar na posição z = 3, qual o valor x escolhido e escrito pelo aluno em um papal no início da mágica?

COMO Z=3 E Z=X, LOGO X=3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Pela figura 5.32 acima podemos concluir que os alunos absorveram o conhecimento algébrico visto na questão 2.

A questão 3 abordou duas equações possíveis para a nova posição $w \in \mathbb{N}$ da carta C em relação aos valores de x, após cortar o baralho ao meio, a qual pediu aos alunos para utilizarem a equação correta e assim determinar os valores de w para alguns valores de x dados nos itens (a) e (b) da questão. Por fim, no item (c), os alunos completaram um quadro que relacionava as posições z com as novas posições w, utilizando as equações algébricas vistas nos itens (a) e (b). Contudo podemos observar por meio de algumas resoluções dos alunos, conforme figura 5.33 abaixo, que a questão 3 foi compreendida pela turma.

Figura 5.33 – Soluções da Exploração 8 - Questão 3.

3) No passo 5 ao cortar o baralho exatamente no meio, a posição da carta C escolhida será modificada para a posição:

- w = x + 5, com w ∈ ℕ, se o valor x escolhido for menor do que ou igual a 5, isto é, se x =1, 2, 3, 4 ou 5.
- w = x – 5, se o valor x escolhido for maior que 5, isto é, se x = 6, 7, 8 ou 9.

a) Utilizando as equações acima, determine o valor da posição w quando x = 2.

W = 2+5=7

b) Utilizando as equações acima, determine o valor da posição w quando x = 7.

X = 7 W=X-5
W=7-5
W=2 posição 2.

c) Agora complete a tabela abaixo, com as novas posições w ∈ ℕ, após o corte realizado.

Posição z da carta C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição w da carta C	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Logo após mostrar aos alunos, por meio de slides, que a carta C sempre fica localizada na posição de número 4, conforme passo 6 da Matemágica 8. A questão 4 teve o intuito de fazer com que os alunos, através de um quadro que os mesmos deveriam completar considerando as demais cartas representadas por X, compreendessem como a carta C é sempre desvendada pelo mágico ao ir descartando as cartas até que reste apenas C no último descarte. A questão foi bem simples e resolvida pela maioria dos alunos da turma conforme podemos destacar pela figura 5.34 abaixo numa das resoluções realizada por um dos alunos.

Figura 5.34 – Soluções da Exploração 8 - Questão 4.

Posições das cartas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Passo 6	X	X	X	C	X	X	X	X	X	X
DESTARTE 1	X	C	X	X	X					
DESTARTE 2	X	C								
DESTARTE 3	C									

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A exploração 9 foi composta por três questões. Na questão 1 os alunos deveriam completar no item (a) um quadro com os valores das novas posições $y \in \mathbb{N}$ das cartas C_x com as faces voltadas para baixo, dados as posições $x \in \mathbb{N}$ das cartas com as faces voltadas para cima, com $1 \leq x \leq 10$. No item (b), os alunos realizaram todas as dez somas possíveis entre os valores das posições y e o valor das posições x correspondentes a cada carta e descreveram a semelhança encontrada nestas somas. Vejamos a figura 5.35 abaixo contendo as respostas de alguns alunos da sala, referentes a questão 1 e comprovando o bom rendimento da turma, apesar da facilidade dos mesmos em resolverem as questões por serem análogas a questão 1 da exploração anterior.

Figura 5.35 – Soluções da Exploração 9 - Questão 1.

a) Complete a tabela 1, sendo C_x as cartas que estão na posição $x \in \mathbb{N}$ com as faces voltadas para cima, com $1 \leq x \leq 10$ e seja $y \in \mathbb{N}$ o valor que representa a posição das cartas C_x com as faces voltadas para baixo, com $1 \leq y \leq 10$.

Carta C_x	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Posição x com as faces para cima	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
posição y com as faces para baixo	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tabela 1

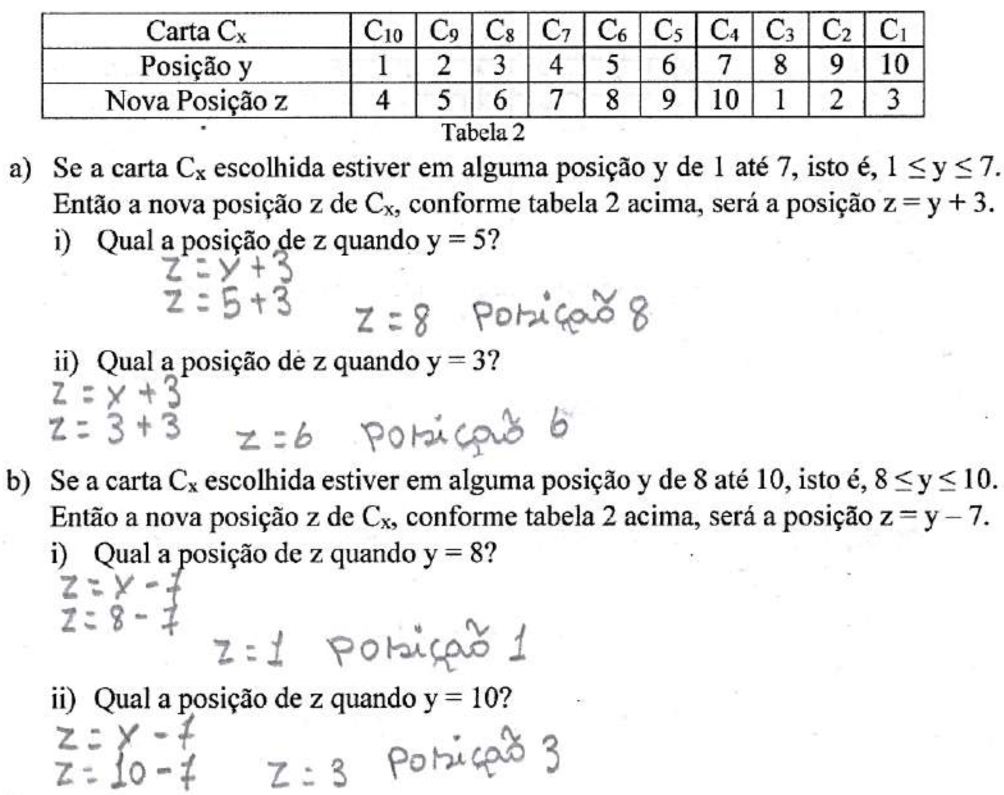
b) Da tabela 1 acima realize a soma de cada valor das posições y com o valor das posições x correspondentes a cada carta. Qual a semelhança entre as somas x + y?

10+1=11 9+2=11 8+3=11 7+4=11 6+5=11
5+6=11 4+7=11 3+8=11 2+9=11 1+10=11
A Semelhanca é que todas as somas resultam em 11

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 2, a partir de um novo quadro, dado no enunciado, que relacionava as novas posições $z \in \mathbb{N}$ das cartas com a posição anterior y, os alunos deveriam resolver os itens (a) e (b) determinando as novas posições z das cartas para determinados valores de y de acordo com as duas equações dadas no enunciado, as quais também relacionavam as posições y e z das cartas. Os itens (a) e (b) exigiram dos alunos um conhecimento algébrico na medida que pedia o valor numérico da variável z dados os valores de y. Contudo, a maioria dos alunos conseguiu enxergar e comentaram em sala que o quadro do enunciado poderia ser utilizado no lugar das equações dadas, mesmo tendo resolvido o que foi pedido por meio das equações, conforme podemos observar nas resoluções pela figura 5.36 abaixo.

Figura 5.36 – Soluções da Exploração 9 - Questão 2, itens (a) e (b).



Carta C_x	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
Posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nova Posição z	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3

Tabela 2

a) Se a carta C_x escolhida estiver em alguma posição y de 1 até 7, isto é, $1 \leq y \leq 7$. Então a nova posição z de C_x, conforme tabela 2 acima, será a posição $z = y + 3$.

i) Qual a posição de z quando y = 5?

z = y + 3
z = 5 + 3   z = 8 posição 8

ii) Qual a posição de z quando y = 3?

z = y + 3
z = 3 + 3   z = 6 posição 6

b) Se a carta C_x escolhida estiver em alguma posição y de 8 até 10, isto é, $8 \leq y \leq 10$. Então a nova posição z de C_x, conforme tabela 2 acima, será a posição $z = y - 7$.

i) Qual a posição de z quando y = 8?

z = y - 7
z = 8 - 7   z = 1 posição 1

ii) Qual a posição de z quando y = 10?

z = y - 7
z = 10 - 7   z = 3 posição 3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O item (c) pedia para a turma completar o quadro que relacionava as posições x e z. No item (d), a partir deste quadro, pedia para os alunos realizarem todas as somas entre as posições x e a respectiva posição z de cada carta para no item (e) descrever os valores destas somas quando $1 \leq x \leq 3$ e os valores quando$4 \leq x \leq 10$.

Os itens (c) e (d) foram compreendidos de forma satisfatória. Por outro lado, no item (e) houve dificuldade em observar o intervalo referente as posições x das cartas para que os alunos pudessem relacionar os resultados das somas $x + z$ correspondentes. Abaixo segue algumas soluções destes itens, conforme figura 5.37.

Figura 5.37 – Soluções da Exploração 9 - Questão 2, itens (c), (d) e (e).

c) Complete a tabela 3 abaixo, que relaciona as novas posições z das cartas C_x e as posições x iniciais correspondentes.

Carta C_x	C_3	C_2	C_1	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4
Posição z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição x com as faces para cima	3	2	1	10	9	8	7	6	5	4

Tabela 3

d) Da tabela 3 acima realize todas as somas da posição x com a nova posição z de cada carta.

$1+3=4$ $\quad$ $5+9=14$

$2+2=4$ $\quad$ $6+8=14$

$3+1=4$ $\quad$ $7+7=14$

$4+10=14$ $\quad$ $8+6=14$

$9+5=14$

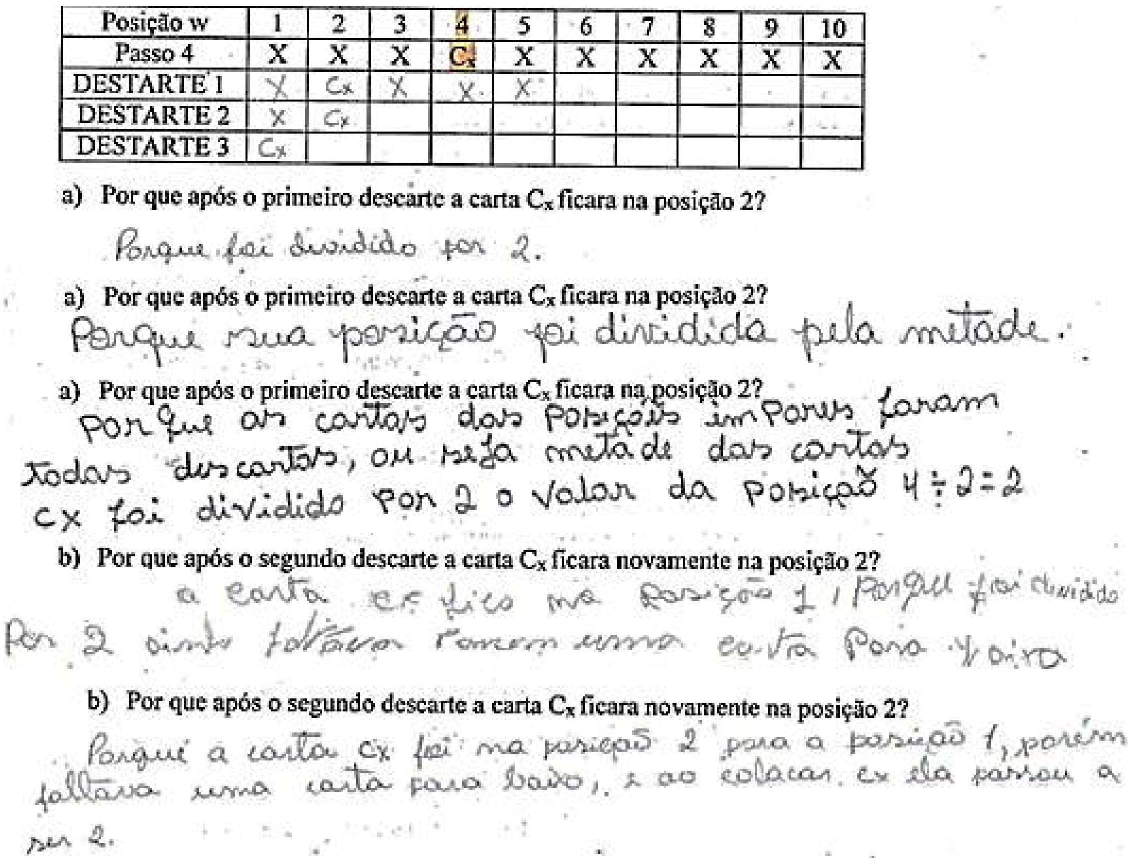
e) Quais os valores das somas x + z, quando $1 \leq x \leq 3$? E quais os valores das somas x + z, quando $4 \leq x \leq 10$? Quando $1 \leq X \leq 3$ $X+Z=4$ e quando $4 \leq X \leq 10$ $X+Z=14$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Logo após os alunos compreenderem, por meio de explicação e demonstração em slides, que a carta C_x ficou localizada na posição $w = 4$, com $w \in \mathbb{N}$ ao final do passo 4 da Matemágica 9. A questão 3 teve o intuito de mostrar aos alunos, através de um quadro que os mesmos deveriam completar, como a carta C_x é sempre desvendada pelo mágico ao ir descartando as cartas até que restasse apenas C_x no último descarte. Por fim, utilizando o quadro já preenchido, foi sugerido que explicassem nos itens (a) e (b), o motivo da carta C_x ficar sempre na posição 2 após os descartes.

Como este quadro foi idêntico ao quadro preenchido na questão 4 da exploração Matemática 8, não houve dificuldades para se resolver os itens da questão, conforme podemos evidenciar nas resoluções dos alunos, conforme figura 5.38 a seguir, apesar de alguns erros ortográficos cometidos.

Figura 5.38 – Soluções da Exploração 9 - Questão 3.



Posição w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Passo 4	X	X	X	Cx	X	X	X	X	X	X
DESTARTE 1	X	Cx	X	X	X					
DESTARTE 2	X	Cx								
DESTARTE 3	Cx									

a) Por que após o primeiro descarte a carta C_x ficara na posição 2?

Porque foi dividido por 2.

a) Por que após o primeiro descarte a carta C_x ficara na posição 2?

Porque sua posição foi dividida pela metade.

a) Por que após o primeiro descarte a carta C_x ficara na posição 2?

Porque as cartas das posições impares foram todas descartas, ou seja metade das cartas cx foi dividido por 2 o valor da posição 4 ÷ 2 = 2

b) Por que após o segundo descarte a carta C_x ficara novamente na posição 2?

a carta cx fico na posição 1, Porque foi dividido por 2 ainda faltava fazer uma carta para baixo

b) Por que após o segundo descarte a carta C_x ficara novamente na posição 2?

Porque a carta cx foi na posição 2 para a posição 1, porém faltava uma carta para baixo, e ao colocar cx ela passou a ser 2.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No decorrer das explorações matemáticas 8 e 9, ficou claro que a maioria dos alunos da sala sentiram dificuldades ao trabalharem com equações ou expressões algébricas. Porém foi perceptível o grande envolvimento da turma no decorrer das atividades trabalhadas afim de entender e desvendar os truques por traz das Matemágicas correspondentes, o que proporcionou uma melhor compreensão dos conteúdos algébricos abordados até aquele momento.

5.1.6 Exploração matemática 10

A exploração matemática 10, composta por 4 questões, teve como objetivo utilizar a divisão euclidiana por 2 para compreender por meios de quadros as demonstrações no decorrer da Matemágica 10. Visto que já trabalhamos bastante com o conteúdo sobre divisão euclidiana, inclusive a divisão euclidiana por 2 nas explorações 6 e 7, foi nítido o bom desempenho da turma nas atividades propostas da exploração matemática 10, o que mostrou o quanto foi importante a aplicação das atividades lúdicas por meio das Matemágicas unidas a explorações matemáticas bem elaboradas e aplicadas com o intermédio e auxilio do professor.

Conforme podemos ver nas resoluções das figuras adiante, os alunos conseguiram solucionar as atividades propostas na exploração 10 explicitando de forma clara e coerente suas respostas.

A questão 1, contendo três itens, trouxe um quadro contendo as cartas C_x, onde x representa a posição das 16 cartas na Matemágica, com $x \in \mathbb{N}$, $1 \leq x \leq 16$. O item (a) pedia para os alunos completarem dois quadros, o primeiro referente as posições das cartas que ficaram na mão do mágico e o segundo referente as posições das cartas que ficaram acima da mesa. No item (b) pedia para os alunos descreverem a posição e o quadro que ficou a carta C_{16} a ser encontrada pelo mágico após a distribuição. O item (c) pedia para os alunos determinarem a forma euclidiana dos valores das posições x das cartas na divisão por 2 que ficaram nos quadros 1 e 2. Observe algumas resoluções na figura 5.39 abaixo

Figura 5.39 – Soluções da Exploração 10 - Questão 1.

cartas	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
Posição x das cartas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

a) Complete as tabelas abaixo conforme o passo 2 da mágica ao realizar a primeira distribuição com as 16 cartas, ficando 8 cartas acima da mesa nas posições y $\in \mathbb{N}$ e as outras 8 cartas na mão do mágico nas posições x' $\in \mathbb{N}$.

Continuam na mão								
Posição x'	1	2	3	4	5	6	7	8
Cartas	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}

Tabela 1

Cartas na mesa								
Posição y	9	10	11	12	13	14	15	16
Cartas	C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2

Tabela 2

b) A carta escolhida pelo aluno (C_{16}) ficou na tabela 1 ou na tabela 2? Qual a posição y de C_{16}? Ficou na Tabela 2. Posição Y=9.

c) Qual a forma dos valores das posições de x das cartas na divisão euclidiana por 2 que ficaram na tabela 1? E na tabela 2? Como os valores de X foram impar, logo a forma euclidiana será 2k+1. Na tabelá 2 os valores de x foram pares, logo a forma euclidiana 2k.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 2 os alunos deveriam completar dois outras quadros referentes a segunda distribuição das cartas e determinarem nos itens (a) e (b) de forma análoga a questão 1, os valores das posições $x' \in \mathbb{N}$ das cartas e a forma euclidiana destes valores na divisão por 2 que ficaram respectivamente nos quadros 3 e 4 do enunciado. Vejamos algumas soluções na figura 5.40 abaixo.

Figura 5.40 – Soluções da Exploração 10 - Questão 2.

Continuam na mão								
Posição x'	1	2	3	4	5	6	7	8
Cartas	C1	C3	C5	C7	C9	C11	C13	C15

Tabela 1

2) Levando em consideração as novas posições x'∈ ℕ das 8 cartas que ficaram nas mãos do mágico, conforme a questão anterior. Continuando a distribuição, complete as tabelas abaixo de maneira análoga a primeira distribuição.

Na mesa												
Posição y	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
cartas	C15	C11	C7	C3	C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2

Tabela 3

Continuam na mão				
Posição x''∈ ℕ	1	2	3	4
Cartas	C1	C5	C9	C13

Tabela 4

a) Quais os valores x'∈ ℕ das cartas que ficaram na tabela 3? E na tabela 4?
Na tabela 3 ficaram os valores 1, 3, 5 e 7
Na tabela 4 ficaram os valores 2, 4, 6 e 8

b) Qual a forma dos valores das posições x'∈ ℕ das cartas na divisão euclidiana por 2 que ficaram na tabela 3? E na tabela 4? Tabela 3 - numeros impares deixa resto 1, forma 2q+1 Tabela 4 - numeros pares deixa resto 0, forma 2q.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 3 foi dado um quadro com a posição das 16 cartas nas novas posições $y \in \mathbb{N}$, após a distribuição encontrando a carta ajudante C_1, sendo $y = 1$ o valor da posição de C_1 e o valor $y = 9$ a posição da carta C_{16}. A partir deste quadro os alunos deveriam completar, no item (a) da questão, um novo quadro referente a distribuição das cartas em dois montes, conforme passo 3 da Matemágica 10. Logo após, com o auxílio do quadro, determinarem no item (b) a forma euclidiana dos valores das posições y das cartas na divisão euclidiana por 2 que ficaram nos montes 1 e 2 e no item (c) determinarem as novas posições $z \in \mathbb{N}$ das cartas C_1 e C_{16} e suas formas euclidianas. Vejamos a seguir a figura 5.41 abaixo contendo as resoluções dos itens (a), (b) e (c) realizadas por alguns alunos.

Figura 5.41 – Soluções da Exploração 10 - Questão 3, itens (a), (b) e (c).

cartas	C_1	X	X	X	X	X	X	X	C_{16}	X	X	X	X	X	X	X
Posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

a) Complete a tabela abaixo conforme o passo 3 da mágica sendo as 16 cartas divididas em dois montes (monte 1 e monte 2) com 8 cartas cada, e gerando as novas posições z ∈ ℕ das cartas.

Primeira distribuição (Dois montes com 8 cartas cada)								
Monte 1	X	X	X	C16	X	X	X	C1
Monte 2	X	X	X	X	X	X	X	X
Posição z das cartas	1	2	3	4	5	6	7	8

b) Qual a forma euclidiana dos valores das posições de y ∈ ℕ na divisão euclidiana por 2 que ficaram no monte 1? E no monte 2?

2m+1 no monte 1 e 2m no monte 2

c) Quais as posições z das cartas C_1 e C_{16}? E qual a forma euclidiana de ambas?

C16=4 e C1=8, forma euclidiana 2m

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

De maneira análoga foi o enunciado dos itens (d), (e) e (f) referentes a nova distribuição das 8 cartas que restaram na mão do mágico. A resolução dos mesmos pode ser vista logo abaixo, conforme figura 5.42.

Figura 5.42 – Soluções da Exploração 10 - Questão 3, itens (d), (e) e (f).

d) Utilize o mesmo raciocínio para completar a tabela abaixo referente a segunda distribuição, lembrando que as 8 cartas que restaram na mão do mágico foram as cartas do monte 1, conforme tabela da questão anterior.

segunda distribuição (Dois montes com 4 cartas cada)				
Monte 3	X	X	X	X
Monte 4	X	C16	X	C1
Nova posição w ∈ ℕ	1	2	3	4

e) Qual a forma euclidiana dos valores das posições de z ∈ ℕ na divisão euclidiana por 2 que ficaram no monte 3? E no monte 4?

no monte 3 forma 2m+1 e o monte 4 forma 2m

f) Quais as posições w das cartas C_1 e C_{16}? E qual a forma euclidiana de ambas?

2 e 4. forma 2q.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O item (g) referente a terceira e última distribuição em dois novos montes pediu para a turma explicar o motivo das cartas C_1 e C_{16} ficarem juntas ao final da distribuição. Conforme podemos ver na figura 5.43 abaixo, os alunos de fato compreenderam de forma satisfatória o item (g) assim como toda atividade da exploração 10.

Figura 5.43 – Soluções da Exploração 10 - Questão 3, item (g).

g) Por fim, ao realizar a terceira e última distribuição em dois novos montes a carta ajudante ficara no mesmo monte que a carta escolhida pelo aluno. Assim descartando o outro monte finalizamos a mágica. Explique porque as cartas C_1 e C_{16} ficam juntas ao final da terceira distribuição.

Porque C1 e C16 são pares, por isso irão pra o monte de posições pares.

g) Por fim, ao realizar a terceira e última distribuição em dois novos montes a carta ajudante ficara no mesmo monte que a carta escolhida pelo aluno. Assim descartando o outro monte finalizamos a mágica. Explique porque as cartas C_1 e C_{16} ficam juntas ao final da terceira distribuição.

Porque C1 = 4 e C16 = 2 são de posições w pares, e quando distribui elas vao pra o segundo monte e ficam juntas.

g) Por fim, ao realizar a terceira e última distribuição em dois novos montes a carta ajudante ficara no mesmo monte que a carta escolhida pelo aluno. Assim descartando o outro monte finalizamos a mágica. Explique porque as cartas C_1 e C_{16} ficam juntas ao final da terceira distribuição. Porque as duas são da forma 2K, nas posições 2 e 4. Ai quando distribuir as outras duas cartas são pra posição 1 e 3, e C1 e C16 ficam juntas no monte par.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

5.1.7 Explorações matemáticas 11, 12, 13, 14 e 15

As Explorações Matemáticas de 11 até 15 tiveram como objetivo aplicar os resultados das demonstrações matemáticas, realizadas com o intermédio de tabelas(quadros) e álgebra, afim de obter êxito no resultado final das Matemágicas correspondentes.

Na exploração 11 foi proposto apenas uma questão que utilizou o resultado final da demonstração no decorrer da Matemágica 11 para os alunos aplicarem nos quatro itens da questão, os quais foram debatidos em conjunto por toda turma, o que facilitou nas resoluções conforme podemos destacar nas figuras adiante.

Nos itens (a) e (b) foram dados respectivamente, numa simulação, os valores obtidos pelo mágico e pelo aluno participante do truque ao final da Matemágica 11 com o intuito da turma determinar os valores das cartas escolhidas por este aluno, conforme podemos ver nas resoluções dos alunos na figura 5.44 abaixo.

Figura 5.44 – Soluções da Exploração 11 - Questão 1, itens (a) e (b).

$$xy = 10x + y$$

Onde x e y são respectivamente a dezena e a unidade do resultado final obtido.
Com isto, responda:

a) Sabendo que o resultado final obtido pelo mágico ao final da mágica foi 48. Quais os valores das cartas escolhidas pelo aluno? Valores 4 e 8

a) Sabendo que o resultado final obtido pelo mágico ao final da mágica foi 48. Quais os valores das cartas escolhidas pelo aluno?
AS CARTAS ESCOLHIDA PELO ALUNO FOI 4 e 8 NO CASO DEU 48.

b) Se o resultado obtido pelo aluno e dito ao mágico for 72. Qual o valor obtido pelo professor? E quais as cartas escolhidas pelo aluno?

$$\begin{array}{r} 72 \\ -25 \\ \hline 47 \end{array}$$

As cartas são 4 e 7

b) Se o resultado obtido pelo aluno e dito ao mágico for 72. Qual o valor obtido pelo professor? E quais as cartas escolhidas pelo aluno?

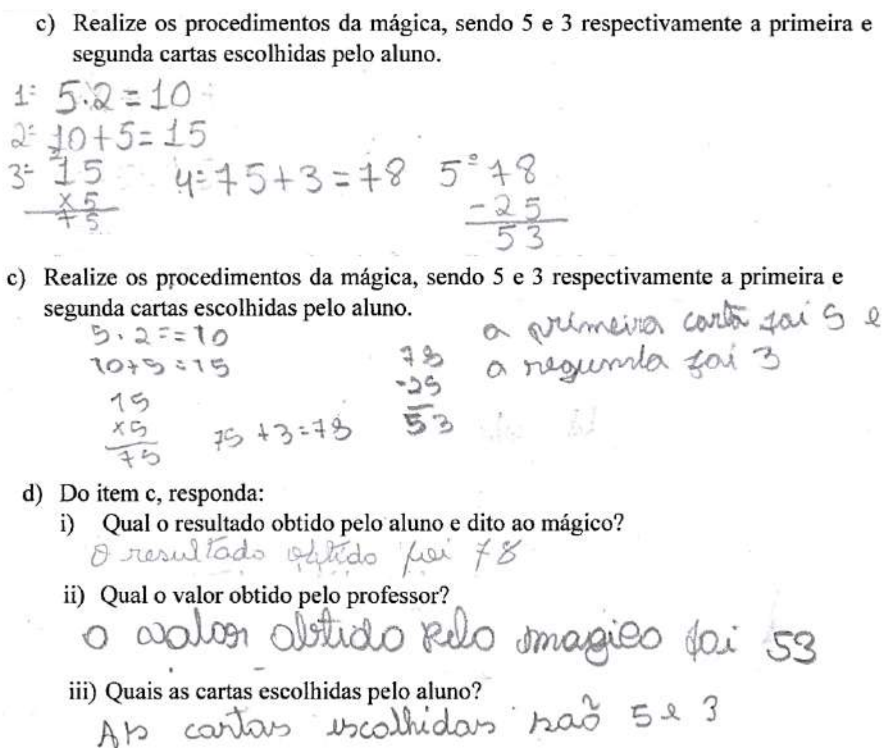
$$\begin{array}{r} 72 \\ -25 \\ \hline 47 \end{array}$$

as carta escolhidas pelo aluno foi 4 e 7

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O item (c) pediu para a turma realizar todos os procedimentos vistos no passo a passo da Matemágica 11, utilizando os números 5 e 3 respectivamente os valores das faces da primeira e segunda cartas escolhidas pelo aluno participante na Matemágica. Logo após no item (d), partindo dos dados encontrados nas resoluções do item (c), pedia para a turma descrever o resultado obtido pelo aluno participante e dito ao mágico, o valor obtido pelo mágico, e as cartas escolhidas por este aluno. Observe as soluções realizadas pelos alunos na figura 5.45 abaixo.

Figura 5.45 – Soluções da Exploração 11 - Questão 1, itens (c) e (d).



c) Realize os procedimentos da mágica, sendo 5 e 3 respectivamente a primeira e segunda cartas escolhidas pelo aluno.

1: 5.2 = 10
2: 10+5 = 15
3: 15 ×5 = 75
4: 75+3 = 78
5: 78 −25 = 53

c) Realize os procedimentos da mágica, sendo 5 e 3 respectivamente a primeira e segunda cartas escolhidas pelo aluno.

5.2 = 10
10+5 = 15
15 ×5 = 75
75+3 = 78
78 −25 = 53

a primeira carta foi 5 e a segunda foi 3

d) Do item c, responda:

i) Qual o resultado obtido pelo aluno e dito ao mágico?

O resultado obtido foi 78

ii) Qual o valor obtido pelo professor?

O valor obtido pelo magico foi 53

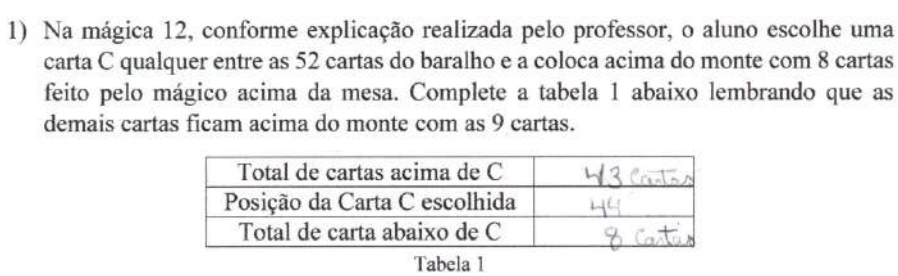
iii) Quais as cartas escolhidas pelo aluno?

As cartas escolhidas são 5 e 3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A exploração 12 foi composta por três questões. A questão 1 propôs aos alunos completarem um quadro referente a posição da carta C e ao total de cartas que ficaram acima e abaixo de C no monte formado no início da Matemágica 12, considerando C a carta a ser desvendada pelo mágico, escolhida por um aluno participante da Matemágica. A questão foi simples e foi resolvida com facilidade, conforme observado na resolução da figura 5.46 abaixo.

Figura 5.46 – Soluções da Exploração 12 - Questão 1.



1) Na mágica 12, conforme explicação realizada pelo professor, o aluno escolhe uma carta C qualquer entre as 52 cartas do baralho e a coloca acima do monte com 8 cartas feito pelo mágico acima da mesa. Complete a tabela 1 abaixo lembrando que as demais cartas ficam acima do monte com as 9 cartas.

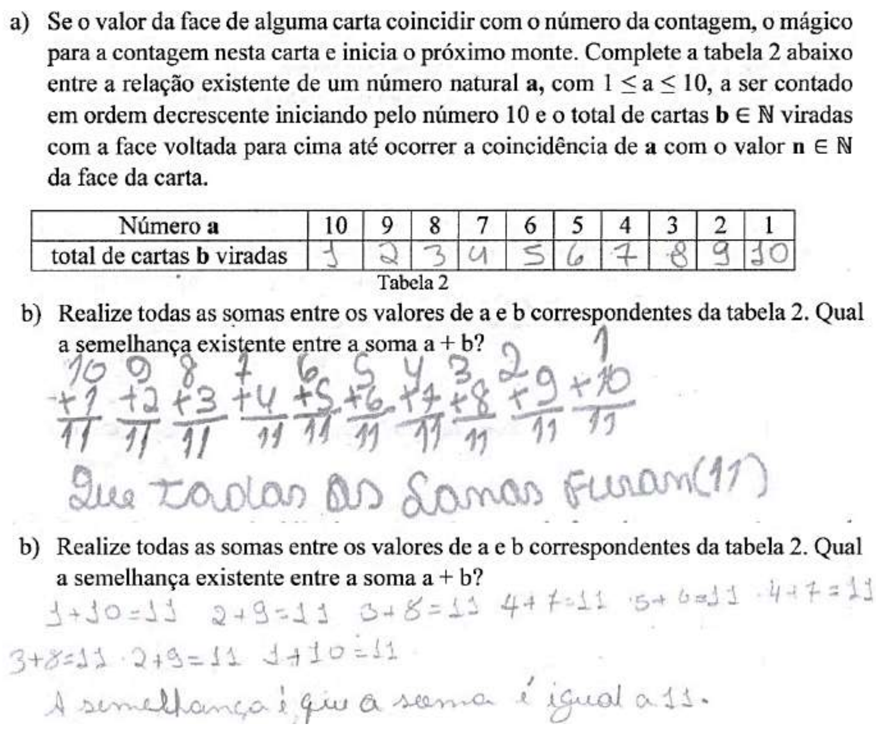
Total de cartas acima de C	43 Cartas
Posição da Carta C escolhida	44
Total de carta abaixo de C	8 Cartas

Tabela 1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No item (a) da questão 2 foi pedido a turma para completar um quadro que relacionava o total de cartas $b \in \mathbb{N}$ viradas com a face voltada para cima com o valor $n \in \mathbb{N}$ da face da carta, representado pelo número $a \in \mathbb{N}$. No item (b) foi pedido para a turma realizar todas as somas entre os valores de a e b correspondentes do quadro e descrever a semelhança existente nestas somas. Podemos perceber pelas resoluções na figura 5.47 abaixo que os alunos responderam com êxito aos itens (a) e (b).

Figura 5.47 – Soluções da Exploração 12 - Questão 2 - itens (a) e (b).



a) Se o valor da face de alguma carta coincidir com o número da contagem, o mágico para a contagem nesta carta e inicia o próximo monte. Complete a tabela 2 abaixo entre a relação existente de um número natural a, com $1 \leq a \leq 10$, a ser contado em ordem decrescente iniciando pelo número 10 e o total de cartas $b \in \mathbb{N}$ viradas com a face voltada para cima até ocorrer a coincidência de a com o valor $n \in \mathbb{N}$ da face da carta.

Número **a**	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
total de cartas **b** viradas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tabela 2

b) Realize todas as somas entre os valores de a e b correspondentes da tabela 2. Qual a semelhança existente entre a soma a + b?

10+1=11 9+2=11 8+3=11 7+4=11 6+5=11 5+6=11 4+7=11 3+8=11 2+9=11 1+10=11

Que todas as Somas Furam(11)

b) Realize todas as somas entre os valores de a e b correspondentes da tabela 2. Qual a semelhança existente entre a soma a + b?

1+10=11 2+9=11 3+8=11 4+7=11 5+6=11 4+7=11

3+8=11 2+9=11 1+10=11

A semelhança é que a soma é igual a 11.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O item (c) da questão 2, pedia para o aluno descreverem quantas cartas eram utilizadas em um monte formado, onde não havia a coincidência entre a e n, justificando tal resposta e no item (d), foi pedido para os alunos descreverem o total de cartas descartadas nos 4 montes, independentemente se houver ou não a coincidência entre a e n e justificar o motivo da carta C ser encontrada. Houve interação entre toda a turma e o professor com o objetivo de solucionar os itens (c) e (d). Apesar das dificuldades dos alunos em analisar tais itens, notamos pelas respostas de alguns alunos, conforme destacamos na figura 5.48 abaixo, que houve uma boa absorção e entendimento das questões por parte da turma, mostrando a eficácia da nossa proposta metodológica ao longo da pesquisa.

Figura 5.48 – Soluções da Exploração 12 - Questão 2 - itens (c) e (d).

c) **Se não houver a coincidência entre o número n da face da carta e o número a da contagem, o mágico coloca mais uma carta da mão, virada para baixo, acima do monte e inicia o monte seguinte. Quantas cartas são descartadas nos montes onde não ocorre a coincidência entre a e n? Justifique.**

Como a contagem foram 10 cartas que não coicidiram e o professor usou mais 1 pra adicionar e descartar o monte. Então descartou 11.

d) **Do item b concluímos que serão descartadas sempre 11 cartas de cada monte onde houver a coincidência entre a e n, pois no passo 3 já foram descartadas b cartas viradas para cima e no passo 4 serão descartadas o total de cartas correspondentes ao valor de a referente ao número da face da carta que ficou voltada para cima. Do item c também concluímos que são descartadas também 11 cartas de cada monte onde não ocorre a coincidência entre a e n. Com isso responda:**

i) **Quantas cartas serão descartadas nos 4 montes, independentemente se houver a coincidência entre a e n ou não?**

Tem 4 montes, cada um descarta 11, assim 11 · 4 cartas.

i) **Quantas cartas serão descartadas nos 4 montes, independentemente se houver a coincidência entre a e n ou não?**

São ser descartadas 44 cartas porque em cada monte é descartado 11 cartas e são 4 montes

ii) **Justifique o motivo da carta C escolhida pelo aluno ser encontrada observando a posição que esta ficou localizada pela tabela 1 da questão 1.**

Como a carta c foi colocada na posição 44. E foram descartados 44 logo a carta c sempre será encontrada.

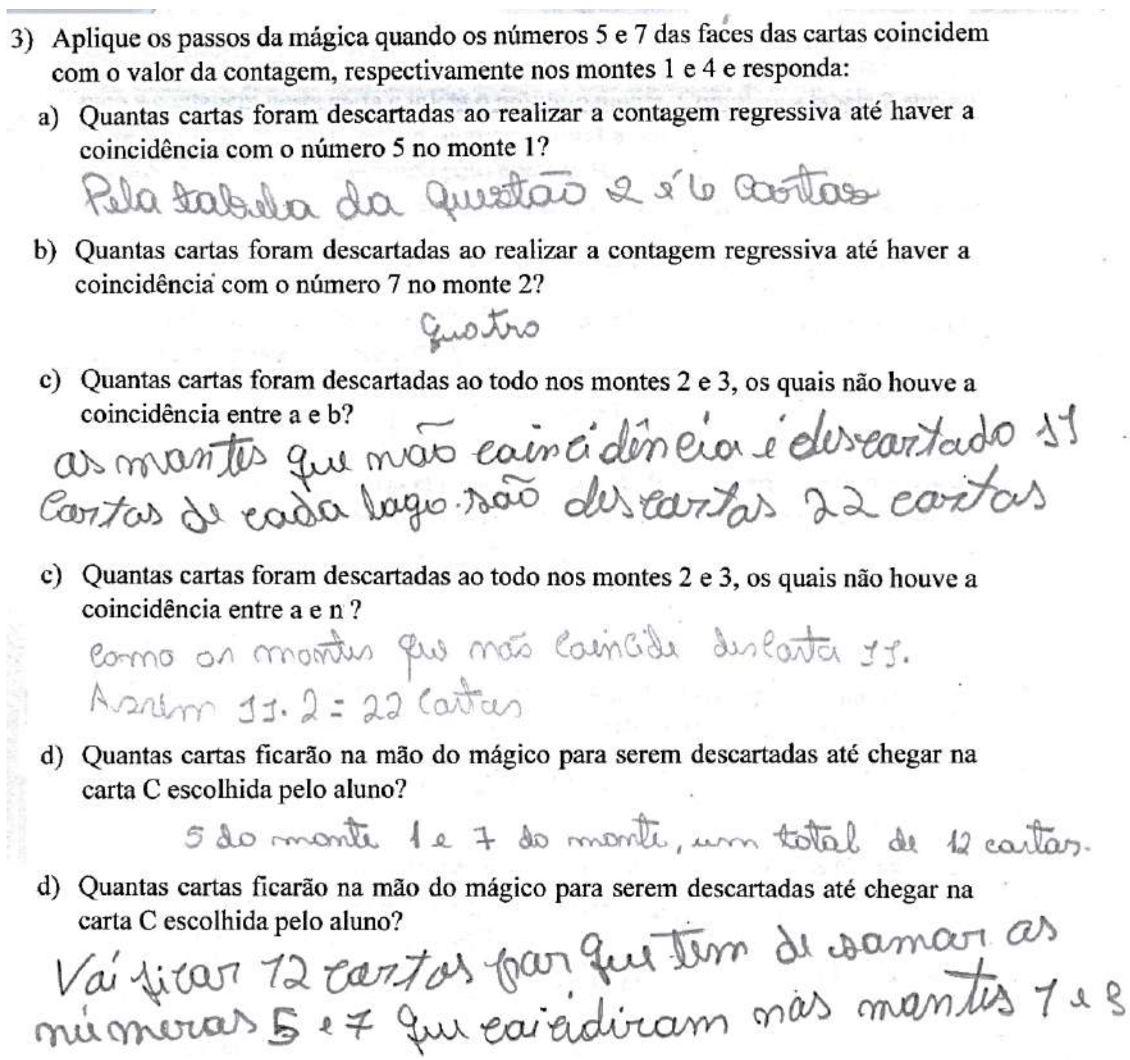
ii) **Justifique o motivo da carta C escolhida pelo aluno ser encontrada observando a posição que esta ficou localizada pela tabela 1 da questão 1.**

Como a carta escolhida fica na posição 44 e são descartado 44 cartas ela é sempre encontrada nessa posição de qualquer jeito.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 3, composta por 4 itens, foi sugerido uma simulação para que os alunos aplicassem os passos da Matemágica 12 quando os números 5 e 7 das faces das cartas coincidem com o valor da contagem, respectivamente nos montes 1 e 4. Nesta questão houve um bom desempenho da turma após o debate realizado nos itens (c) e (d) da questão anterior como pode ser observado nas resoluções da figura 5.49 abaixo.

Figura 5.49 – Soluções da Exploração 12 - Questão 3.



3) Aplique os passos da mágica quando os números 5 e 7 das faces das cartas coincidem com o valor da contagem, respectivamente nos montes 1 e 4 e responda:

a) Quantas cartas foram descartadas ao realizar a contagem regressiva até haver a coincidência com o número 5 no monte 1?

Pela tabela da questão 2 é 6 cartas

b) Quantas cartas foram descartadas ao realizar a contagem regressiva até haver a coincidência com o número 7 no monte 2?

quatro

c) Quantas cartas foram descartadas ao todo nos montes 2 e 3, os quais não houve a coincidência entre a e b?

as montes que não coincidência é descartado 11 cartas de cada lago. são descartas 22 cartas

c) Quantas cartas foram descartadas ao todo nos montes 2 e 3, os quais não houve a coincidência entre a e n ?

como os montes que não coincide descarta 11.
Assim 11 . 2 = 22 cartas

d) Quantas cartas ficarão na mão do mágico para serem descartadas até chegar na carta C escolhida pelo aluno?

5 do monte 1 e 7 do monte, um total de 12 cartas.

d) Quantas cartas ficarão na mão do mágico para serem descartadas até chegar na carta C escolhida pelo aluno?

Vai ficar 12 cartas par que tem de somar as números 5 e 7 que coincidiram nas montes 1 e 8

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A exploração matemática 13 foi composta por 3 questões. Na questão 1, após a explicação da Matemágica, foi pedido aos alunos para determinarem nos itens (a) e (b) o total de cartas que ficaram no monte restante, dado que foi retirado uma certa quantidade n de cartas, $n \in \mathbb{N}$. Na resolução destes itens, os alunos demonstraram um crescimento notório em relação ao manuseio das equações, como destacamos na figura 5.50 a seguir.

Figura 5.50 – Soluções da Exploração 13 - Questão 1.

1) Na mágica 13, conforme explicação realizada pelo professor através de slides, considerando n o número de cartas retiradas do monte principal do baralho pelo aluno no passo 1, onde n ∈ ℕ e n ≤ 12. Segue que o monte restante fica com 52 – n cartas.
   a) Quantas cartas ficam no monte restante se o aluno retirar 9 cartas? 52 - 9 = 43
   Ficam 43 Cartas
   b) Quantas cartas ficam no monte restante quando n = 5?
   52 - 5 = 47 Fica 47 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 2, após o mágico realizar o passo 2 da Matemágica e supondo que a carta C ficou localizada na posição 8, pedia-se para a turma utilizar o resultado algébrico referente a posição da carta neste passo para determinar, no item (a) o total de cartas retiradas do monte no passo 1 e o total de cartas restante do monte principal e nos itens (b) e (c) descrever a nova posição da carta C ao retirar uma certa quantidade m de cartas das que restaram no monte principal, com $m \in \mathbb{N}$.

Da mesma forma da questão anterior, os alunos demonstraram uma maior facilidade em trabalhar com as fórmulas algébricas, conforme evidenciamos nas resoluções pela figura 5.51 abaixo.

Figura 5.51 – Soluções da Exploração 13 - Questão 2.

2) No passo 2 da mágica, o aluno ver e decora a carta localizada na posição n de cima para baixo das cartas que restaram no monte principal, chamada de carta mágica C. Daí no passo 3 ele retira uma quantidade m de cartas, uma a uma, formando um outro pequeno monte acima da mesa com as faces das cartas voltadas para baixo, com m ∈ ℕ e 12 < m < 30. Desse modo, a "carta mágica" C será necessariamente retirada, pois m > n. Portanto ao completar a retirada das m cartas e as repor sobre o monte principal, a carta mágica C passará para a posição (m – n + 1) do monte de cima pra baixo, conforme visto na demonstração. Sendo a carta C localizada na posição 8, responda:
   a) Quantas cartas n o aluno retirou do monte no passo 1? Qual o total de cartas restante do monte principal?
   8 cartas retiradas, 52-8 = 44 cartas restante no monte principal.
   b) Qual será a nova posição da carta C ao retirar 15 cartas das que restaram no monte principal? m - n + 1 Posição da carta é 8
   = 15 - 8 + 1
   = 8
   c) Quando m = 21. Qual será a nova posição da carta C?
   m = 21 m - n + 1
   n = 8 = 21 - 8 + 1
   = 14

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na questão 3 foi proposto a turma realizar uma simulação dos passos da Matemágica 13 para n = 6 e m = 14, completando o quadro dado. Durante a questão, o professor foi explicando novamente o passo a passo da Matemágica, facilitando o desenvolvimento da questão. Observemos abaixo pela figura 5.52 uma das resoluções feita por algum aluno.

Figura 5.52 – Soluções da Exploração 13 - Questão 3.

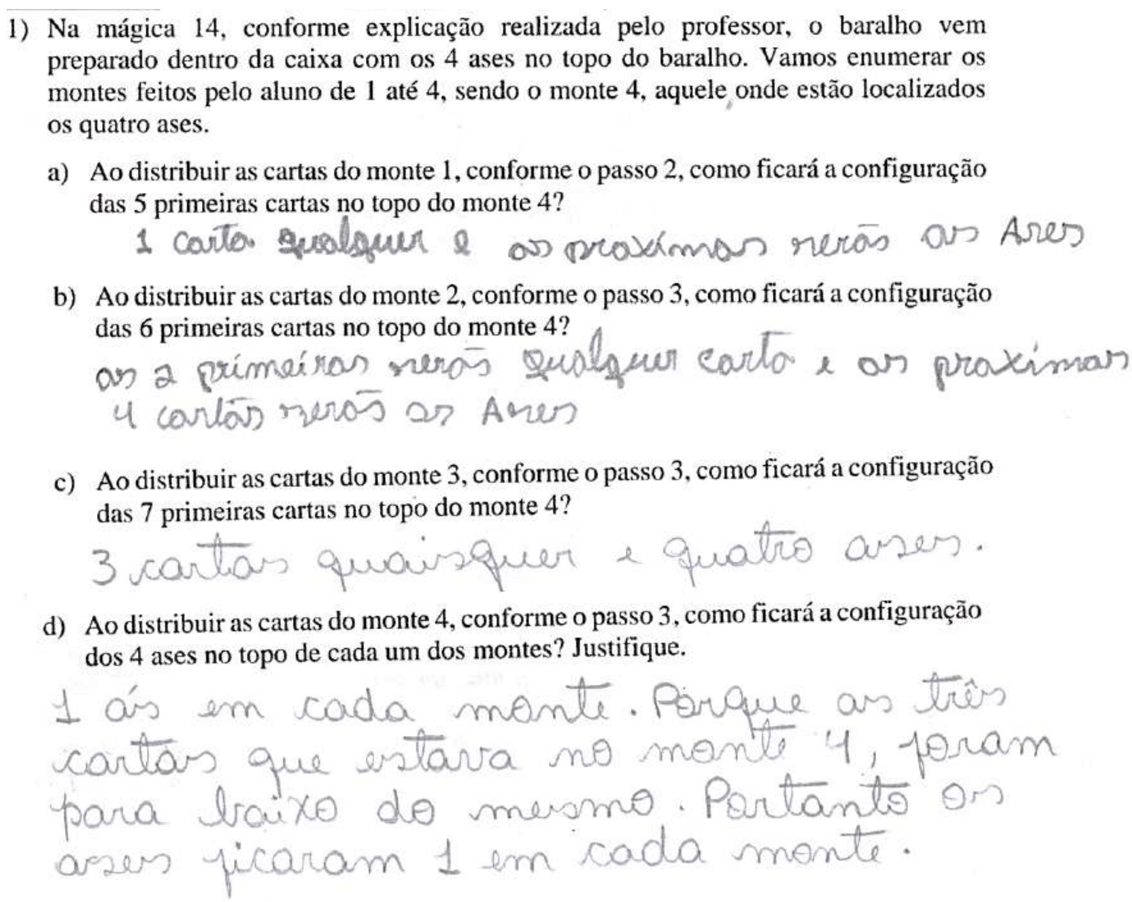
Total de cartas n retiradas.	6 cartas
Total de cartas restantes do monte principal.	52 - n = 52 - 6 = 46
Posição da carta C.	n = 6
Total de cartas m retiradas	m = 14
Nova posição de C após retirada de m cartas e devolvidas invertidas suas posições.	m - n + 1 = 14 - 6 + 1 = 9
Nova Posição de C ao repor n cartas	m + 1 = 15 ou 9 + 6 = 15
Nova posição de C ao retirar m cartas	15 - 14 = 1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A exploração 14 foi bem simples e tratou apenas em descrever, em uma única questão, os passos da Matemágica 14 até obter-se o resultado esperado. Nos itens (a), (b), (c) e (d) os alunos descreveram como os ases ficavam localizados nos 4 montes, até que ao final da Matemágica cada um deles estivesse no topo de cada monte.

A exploração exigia dos alunos, analisar os procedimentos da Matemágica 14 e argumentarem o que foi pedido em cada item, os quais foram resolvidos rapidamente. Vejamos abaixo na figura 5.53 algumas resoluções.

Figura 5.53 – Soluções da Exploração 14 - Questão 1.



1) Na mágica 14, conforme explicação realizada pelo professor, o baralho vem preparado dentro da caixa com os 4 ases no topo do baralho. Vamos enumerar os montes feitos pelo aluno de 1 até 4, sendo o monte 4, aquele onde estão localizados os quatro ases.

a) Ao distribuir as cartas do monte 1, conforme o passo 2, como ficará a configuração das 5 primeiras cartas no topo do monte 4?

1 carta qualquer e os proximos serão os Ases

b) Ao distribuir as cartas do monte 2, conforme o passo 3, como ficará a configuração das 6 primeiras cartas no topo do monte 4?

as 2 primeiras serão qualquer carta e as proximas 4 cartas serão os Ases

c) Ao distribuir as cartas do monte 3, conforme o passo 3, como ficará a configuração das 7 primeiras cartas no topo do monte 4?

3 cartas quaisquer e quatro ases.

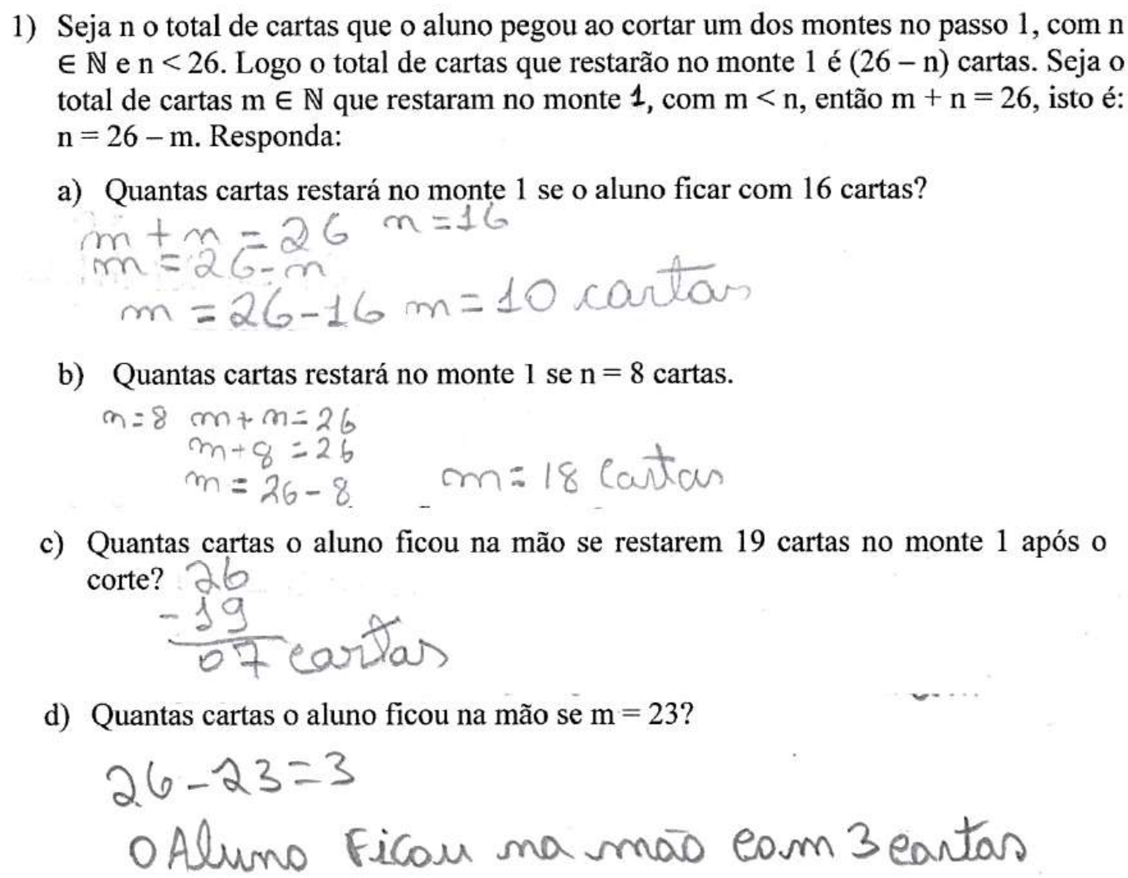
d) Ao distribuir as cartas do monte 4, conforme o passo 3, como ficará a configuração dos 4 ases no topo de cada um dos montes? Justifique.

1 ás em cada monte. Porque as três cartas que estava no monte 4, foram para baixo do mesmo. Portanto os ases ficaram 1 em cada monte.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A exploração matemática 15, composta por duas questões, solicitava na primeira questão que os alunos descrevessem nos itens (a), (b), (c) e (d), conforme Matemágica 15, o total de cartas restantes no monte 1 e descrevessem quantas cartas o aluno ficou na mão após o corte realizado nas cartas. Para isto a questão trazia as fórmulas algébricas necessárias para serem utilizadas afim de obter o resultado. Podemos destacar algumas soluções realizadas, conforme figura 5.54 abaixo, mostrando que os alunos utilizaram as equações adequadas em suas resoluções e compreenderam os enunciados respondendo com clareza o que foi pedido em cada um dos itens.

Figura 5.54 – Soluções da Exploração 15 - Questão 1.



1) Seja n o total de cartas que o aluno pegou ao cortar um dos montes no passo 1, com $n \in \mathbb{N}$ e $n < 26$. Logo o total de cartas que restarão no monte 1 é $(26 - n)$ cartas. Seja o total de cartas $m \in \mathbb{N}$ que restaram no monte 1, com $m < n$, então $m + n = 26$, isto é: $n = 26 - m$. Responda:

a) Quantas cartas restará no monte 1 se o aluno ficar com 16 cartas?

$m + n = 26$ $n = 16$
$m = 26 - n$
$m = 26 - 16$ $m = 10$ cartas

b) Quantas cartas restará no monte 1 se n = 8 cartas.

$n = 8$ $m + n = 26$
$m + 8 = 26$
$m = 26 - 8$ $m = 18$ cartas

c) Quantas cartas o aluno ficou na mão se restarem 19 cartas no monte 1 após o corte?

$26 - 19 = 07$ cartas

d) Quantas cartas o aluno ficou na mão se m = 23?

$26 - 23 = 3$
O Aluno Ficou na mão com 3 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na segunda questão os alunos completaram um quadro simulando os passos da Matemágica 15 quando o total de cartas restantes no monte 1 for igual a 14. A turma em sua maioria resolveu a questão sem dificuldades. Pela figura 5.55 abaixo, referente a uma das resoluções, percebe-se que a equação foi utilizada de forma adequada completando a quadro de forma satisfatória, evidenciando o quanto as explorações matemáticas foram importantes no crescimento cognitivo dos alunos quanto aos conteúdos algébricos abordados.

Figura 5.55 – Soluções da Exploração 15 - Questão 2.

2) Ao colocar a carta C escolhida acima do monte 1 e logo após colocar o monte 2 acima do monte 1, a carta C ficará na posição 26 do monte formado. Logo após, ao realizar o baralhamento conforme descrito nos passos 3 e 4, pela demonstração realizada pelo professor, obtemos que a carta C ficará na posição 26 – m, e como n = 26 – m, então basta o mágico realizar a contagem referente as n cartas na mão do aluno e finalizar a mágica encontrando a carta C. Complete a tabela abaixo utilizando os procedimentos da mágica quando n = 14.

Total de cartas que ficam na mão do aluno.	m=14
Total de cartas restantes no monte 1.	m=26-14=12
Total de cartas no monte 2.	26
Posição da carta C ao colocar o monte 2 sobre o monte 1	26
Posição da carta C após realizar o baralhamento	14

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após a exploração 15 foi aplicado o pós-teste 2, contendo as mesmas questões do pré-teste 2, o qual será analisado no seção 5.3 deste trabalho.

Ao final das Matemágicas apresentadas em sala de aula unidas as atividades de explorações matemáticas correspondentes, ficou evidente e perceptível o desenvolvimento e aprendizagem dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos abordados no decorrer de nossa pesquisa. Além da utilização dos truques como ferramenta lúdica, o comprometimento e dedicação do professor em aprender as Matemágicas desde manusear o baralho com técnicas de baralhamento até aperfeiçoar o corte das cartas foram fatores imprescindíveis para as atividades atingirem os objetivos propostos. Assim pudemos concluir que a maioria dos alunos ficaram motivados e conseguiram relacionar os conteúdos matemáticos com a Matemágica em questão. Também houve um bom empenho e participação de cada aluno ao realizar as atividades propostas, o que resultou numa significativa melhora dos conteúdos ministrados na disciplina de Matemática.

5.2 Análise das atividades contendo situações - problemas

Foram aplicadas na turma 3 atividades contendo situações-problemas no intuito de verificar o rendimento dos alunos e o nível de aprendizagem dos conteúdos trabalhados após algumas atividades de explorações matemáticas.

5.2.1 Situações-problemas I

As atividades de explorações matemáticas 3 e 4 abordaram o seguinte resultado: A diferença entre um número natural de dois algarismos e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de 9. Daí podemos generalizar tal resultado para um número natural qualquer, conforme demonstração a seguir.

5.2.1.1 Critério de divisibilidade por 9

Resultado 1: Seja a um número natural, escrito na base dez. A diferença entre a e a soma de seus algarismos é sempre igual a um múltiplo de 9.

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que:

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

Onde a_n, a_{n-1}, ..., a_1 e a_0 são os algarismos de a. Logo:

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

E seja S a soma dos algarismos de a, isto é:

$$S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned} a - S &= a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) \\ \Rightarrow \quad a - S &= a_n (10^n - 1) + a_{n-1} (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_2 (10^2 - 1) + a_1 (10 - 1) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por outro lado, pode-se provar pelo principio de indução matemática que:

$$10^m - 1 = 9\alpha, \forall m \in \mathbb{N}; \text{com } \alpha \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Vejamos a demonstração deste resultado a seguir.

• **i)** Tomando $m = 1$, obtemos:

$$10^m - 1 = 10^1 - 1 = 10 - 1 = 9$$

Assim a propriedade é válida para $m = 1$.

• **ii)** Agora suponhamos que a propriedade seja válida para um número natural $m = k$, isto é, da hipótese de indução tem-se:

$$10^k - 1 = 9b, \text{com } b \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Vamos provar que a propriedade é válida para $n = k + 1$. Assim:

$$\begin{aligned} 10^{k+1} - 1 &= 10^k \cdot 10 - 1 \\ &= 10^k \cdot (9 + 1) - 1 \\ &= 9 \cdot 10^k + 10^k - 1 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Utilizando a hipótese de indução, isto é, substituindo a equação 5.3 na equação 5.4 obtemos:

$$\begin{aligned} & 10^{k+1} - 1 = 9 \cdot 10^k + 9b \\ \Rightarrow \quad & 10^{k+1} - 1 = 9c \quad \text{com } c \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto a propriedade também é válida para $m = k + 1$ e assim concluímos pelo princípio de indução matemática que $10^m - 1$ é múltiplo de 9, $\forall m \in \mathbb{N}$;.

Continuando a demonstração do resultado 1, utilizando a propriedade 5.2 acima na equação 5.1, obtemos:

$$\begin{aligned} & a - S = a_n 9k_n + a_{n-1} 9k_{n-1} + \cdots + a_2 9k_2 + 9a_1 \\ \Rightarrow \quad & a - S = 9(a_n k_n + a_{n-1} k_{n-1} + \cdots + a_2 k_2 + a_1) \\ \Rightarrow \quad & a - S = 9q \end{aligned}$$

Onde k_n, k_{n-1}, ..., k_2, $q \in \mathbb{N}$.

Portanto, concluímos que a diferença entre um número natural e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de 9.

Do resultado 1 acima decorre o critério de divisibilidade por 9. Vejamos adiante.

Critério de divisibilidade por 9: Um número natural N é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos for um número divisível por 9.

Demonstração: Seja $N \in \mathbb{N}$, segue da demonstração anterior que:

$$N - S_1 = 9k$$

Onde S_1 é a soma dos algarismos de N. Daí, obtemos:

$$N = 9k + S_1, \quad \text{com } k \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

($\Rightarrow$) Assim da equação 5.5, seja N um número divisível por 9. Então:

$$\begin{array}{rcl} N & = & 9k + S_1 \\ \Rightarrow \quad 9k_1 & = & 9k + S_1 \\ \Rightarrow \quad S_1 & = & 9k_1 - 9k \\ \Rightarrow \quad S_1 & = & 9(k_1 - k), \quad \text{com } k_1 \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Portanto a soma S_1 dos algarismos de N é um múltiplo de 9, isto é, S_1 é divisível por 9. ($\Leftarrow$) Por outro lado seja S_1 um número divisível por 9, então da equação 5.5, segue que:

$$\begin{array}{rcl} N & = & 9k + S_1 \\ \Rightarrow \quad N & = & 9k + 9k_2 \\ \Rightarrow \quad N & = & 9(k + k_2), \quad \text{com } k_2 \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Portanto N é um múltiplo de 9, isto é, N é divisível por 9, concluindo a demonstração.

Resultado 2: De um modo mais geral, podemos afirmar que um número natural deixa o mesmo resto que a soma de seus algarismos quando divididos por 9.

Demonstração: De fato, pelo que vimos na demonstração anterior, pela equação 5.5, um número natural N pode ser escrito da seguinte forma:

$$N = 9k + S_1, \quad \text{com } k, S_1 \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo algoritmo da divisão, temos que o número N deixa resto S_1 ao ser dividido por 9, onde S_1 é a soma dos algarismos de N, quando $S_1 < 9$.

Por outro lado, se $S_1 \geq 9$, segue da divisão euclidiana por 9, que:

$$S_1 = 9k_3 + r, \quad \text{com } 0 \leq r < 9 \text{ e } r, k_3 \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Assim, substituindo a equação 5.6 na equação 5.5, obtemos:

$$\begin{aligned} & N &=& \ 9k + S_1 \\ \Rightarrow & N &=& \ 9k + 9k_3 + r \\ \Rightarrow & N &=& \ 9k_4 + r, \quad \text{com } 0 \leq r < 9 \text{ e } r, k_4 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

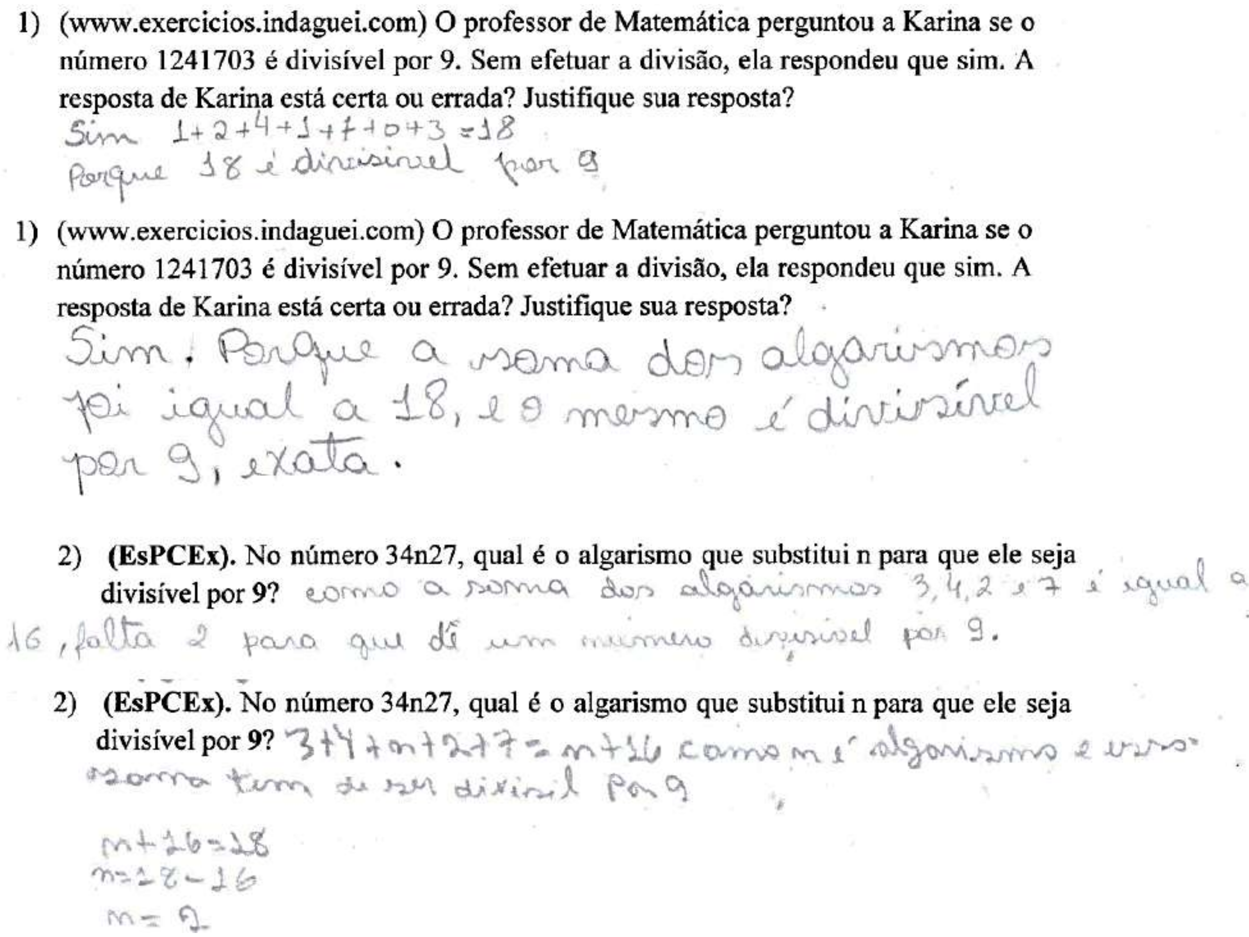
Portanto, concluímos que N deixa o mesmo resto que a soma de seus algarismos quando divididos por 9.

5.2.1.2 Análise das questões - situações-problemas I

Com base nas demonstrações vistas acima, a primeira atividade, aplicada após as explorações matemáticas 3 e 4, foi composta por 4 situações-problemas (questões) envolvendo o conteúdo sobre o critério de divisibilidade por 9 e os resultados obtidos a partir dele.

Nas questões 1 e 2 os alunos deveriam utilizar o critério de divisibilidade por 9 para soluciona-las. Como podemos observar na figura 5.56 abaixo, as questões foram desenvolvidas realizando o cálculo e justificando as soluções de forma clara e objetiva. As resoluções apresentadas pela turma mostraram que os alunos absorveram o conteúdo sobre divisibilidade por 9, uma vez que boa parte dos alunos conseguiram obter sucesso nas questões 1 e 2.

Figura 5.56 – Soluções das Situações-problemas I - Questões 1 e 2.



1) (www.exercicios.indaguei.com) O professor de Matemática perguntou a Karina se o número 1241703 é divisível por 9. Sem efetuar a divisão, ela respondeu que sim. A resposta de Karina está certa ou errada? Justifique sua resposta?

Sim $1+2+4+1+7+0+3=18$
Porque 18 é divisível por 9

1) (www.exercicios.indaguei.com) O professor de Matemática perguntou a Karina se o número 1241703 é divisível por 9. Sem efetuar a divisão, ela respondeu que sim. A resposta de Karina está certa ou errada? Justifique sua resposta?

Sim. Porque a soma dos algarismos foi igual a 18, e o mesmo é divisível por 9, exata.

2) **(EsPCEx).** No número 34n27, qual é o algarismo que substitui n para que ele seja divisível por 9? como a soma dos algarismos 3, 4, 2 e 7 é igual a 16, falta 2 para que dê um número divisível por 9.

2) **(EsPCEx).** No número 34n27, qual é o algarismo que substitui n para que ele seja divisível por 9? $3+4+n+2+7=n+16$ como n é algarismo e essa soma tem de ser divisível por 9

$n+16=18$
$n=18-16$
$n=2$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Por outro lado, as questões 3 e 4 foram resolvidas com base no resultado 2, visto na demonstração anterior acima. Observemos nas resoluções, conforme figura 5.57 abaixo, que na questão 3, os alunos justificaram de forma correta o valor do resto solicitado.

Figura 5.57 – Soluções das Situações-problemas I - Questão 3.

3) Dado um número n ∈ ℕ tal que:

$$n = 9 \cdot 654 + 5$$

Qual o valor do resto de S quando dividido por 9, sendo S a soma dos algarismos de n?

como na divisão de n por 9 o resto é 5
que é menor que 9.
o resto da divisão de S por 9 também é 5.

3) Dado um número n ∈ ℕ tal que:

$$n = 9 \cdot 654 + 5$$

Qual o valor do resto de S quando dividido por 9, sendo S a soma dos algarismos de n?

como N = 9 · 654 + 5 deixa resto 5 na divisão
por 9. E mais [illegible] vê que o resto da soma
dos algarismo de n é igual ao resto de n
dividido por 9.
Logo resto de S por 9 também é 5.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Em geral, a turma obteve um aproveitamento ótimo nas resoluções da primeira atividade contendo situações-problemas, uma vez que identificamos soluções bem organizadas com argumentos satisfatórios de acordo com o conteúdo trabalhado, conforme podemos ver pela figura 5.58 abaixo na resolução da questão 4, a qual foi resolvida corretamente por vários alunos da turma e mais uma vez as justificativas apresentadas demonstraram o quanto os alunos compreenderam o conteúdo.

Figura 5.58 – Soluções das Situações-problemas I - Questão 4.

4) Qual dos números abaixo deixa resto igual a 6, ao ser dividido por 9? Justifique a sua resposta.

a) 731 b) 321 c) 453 d) 274 e) 634

Pois a soma dos algarismo de 321 é igual a 6.

4) Qual dos números abaixo deixa resto igual a 6, ao ser dividido por 9? Justifique a sua resposta.

a) 731 b) 321 c) 453 d) 274 e) 634

a soma dos algarismo de 321 é igual a 6.
$3+2+1=6$
E o resto da soma dos algarismo de um número por 9 é igual ao resto do número quando dividido - 9

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Ao final das situações-problemas I, houve um avanço significativo no desempenho individual dos alunos, evidenciando mais uma vez o caráter qualitativo da proposta metodológica de nossa pesquisa.

5.2.2 Situações-problemas II

A segunda atividade, contendo 4 situações-problemas (Questões), foi aplicada após a exploração matemática 5 e foram utilizados nesta atividade o conteúdo sobre a divisão euclidiana por 3 abordado no decorrer da exploração matemática 5, assim como o critério de divisibilidade por 3, o qual foi apresentado e explicado previamente pelo professor. Vejamos a demonstração abaixo.

5.2.2.1 Critério de divisibilidade por 3

Critério de Divisibilidade por 3: Um número natural N é divisível por 3 se, e somente se, a soma S dos seus algarismos for um número divisível por 3.

Demonstração: Tem-se do critério de divisibilidade por 9, visto na seção 5.2.1.1 que um número natural N é divisível por 9 se, e somente se, a soma S dos seus algarismos for um número divisível por 9, isto é:

$$N = 9k \Leftrightarrow S = 9q, \quad \text{onde } k, q \in \mathbb{N}.$$

Daí segue que:

$$N = 3 \cdot 3k \Leftrightarrow S = 3 \cdot 3q$$

Portanto:

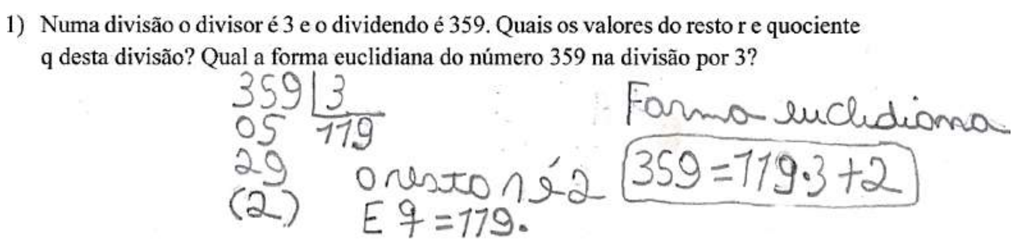
$$N = 3k_1 \Leftrightarrow S = 3q_1, \quad \text{onde } k_1, q_1 \in \mathbb{N}.$$

Assim concluímos que N é divisível por 3 se, e somente se, a soma S dos seus algarismos for um número divisível por 3, provando o resultado.

5.2.2.2 Análise das questões - situações-problemas II

A questão 1 solicitou aos alunos para descreverem os valores do resto e quociente dados o divisor e o dividendo e logo após determinarem a forma euclidiana do dividendo. Visto que era preciso apenas realizar divisão entre dividendo e divisor, a turma não encontrou dificuldade ao resolver a situação-problema 1, conforme podemos observar na figura 5.59 abaixo referente a resolução de um aluno da turma.

Figura 5.59 – Soluções das Situações-Problemas II - Questão 1.



1) Numa divisão o divisor é 3 e o dividendo é 359. Quais os valores do resto r e quociente q desta divisão? Qual a forma euclidiana do número 359 na divisão por 3?

359 | 3
05 119
29
(2)
o resto r é 2
E q = 119.

Forma euclidiana
$\boxed{359 = 119 \cdot 3 + 2}$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A situação-problema 2 foi uma questão de múltipla escolha e pedia para os alunos determinarem a soma dos possíveis valores da dezena de um número de três algarismos divisível por 3. O professor sugeriu denominar por d a dezena do número em questão e conforme soluções vistas na figura 5.60 abaixo, ficou claro a partir das justificativas, que os alunos descreveram com clareza as possibilidades para os valores de d utilizando os critérios de divisibilidade por 3.

Figura 5.60 – Soluções das Situações-problemas II - Questão 2.

2) **(PM SE – IBFC). Um número é composto por 3 algarismos sendo que o algarismo da centena é o 7 e o da unidade é o 4. A soma dos possíveis algarismos da dezena desse número de modo que ele seja divisível por 3 é:**

a) 15 b) 18 c) 12 d) 9

$11 + d = 12 \Rightarrow d = 1$

$11 + d = 15 \Rightarrow d = 4$

$11 + d = 18 \Rightarrow d = 7$

Portanto a soma dos possíveis valores de d: $1+4+7=12$

2) **(PM SE – IBFC). Um número é composto por 3 algarismos sendo que o algarismo da centena é o 7 e o da unidade é o 4. A soma dos possíveis algarismos da dezena desse número de modo que ele seja divisível por 3 é:**

a) 15 b) 18 c) 12 d) 9

como d é um algarismo então $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

$7d4 = 11 + d$

$11 + d = 12 \Rightarrow d = 1$

$11 + d = 15 \Rightarrow d = 4$

$11 + d = 18 \Rightarrow d = 7$

$d = 1 + 4 + 7 = 12$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na situação-problema 3 foi dado um resultado afirmando que a diferença entre o cubo de um número natural n e o número n é divisível por 3, isto é, $n^3 - n = 3k$, com $n, k \in \mathbb{N}$.

No item (a) pedia para os alunos determinarem o valor de k, dado o valor de n e no item (b) pedia para determinarem a forma euclidiana do valor encontrado no item (a). A questão foi resolvida de maneira satisfatória, de forma que quase toda a turma resolveu o item (a) por meio de uma equação na variável k. Vejamos as soluções de dois alunos pela figura 5.61 abaixo.

Figura 5.61 – Soluções das Situações-problemas II - Questão 3.

3) A diferença entre o cubo de um número natural n e o número n é divisível por 3, isto é:

$$n^3 - n = 3k, \text{ com } n, k \in \mathbb{N}$$

a) Qual o valor de k quando n = 5?

$5^3 - 5 = 3K$

$125 - 5 = 3K$

$\frac{120}{3} = \frac{3K}{3}$

$K = 40$

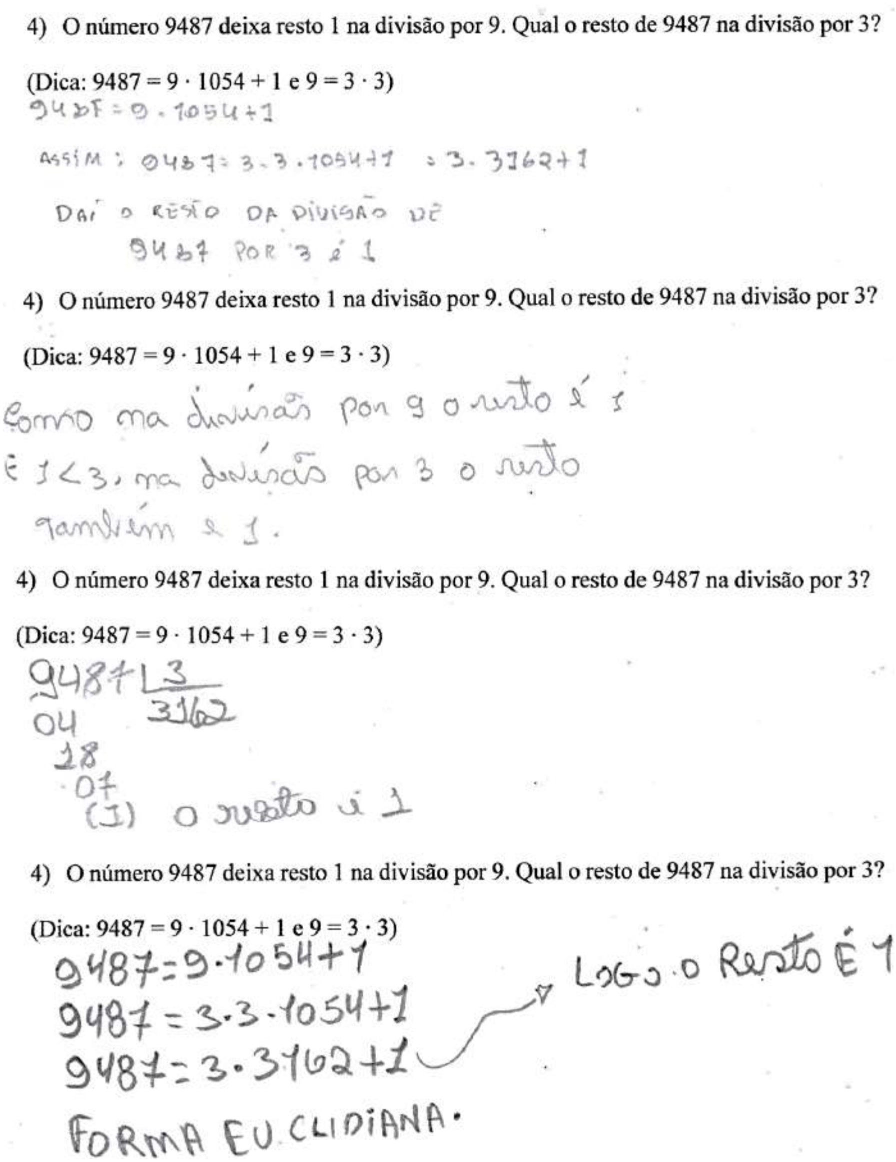
b) Determine a forma euclidiana do valor encontrado para n = 5.

$120 = 3 \cdot 40$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A situação-problema 4 trouxe um número que deixa resto 1 na divisão por 9 e pedia para os alunos descreverem o resto deste mesmo número na divisão por 3. Vejamos algumas soluções, conforme figura 5.62 abaixo, mostrando caminhos diferentes no processo de resolução.

Figura 5.62 – Soluções das Situações-problemas II - Questão 4.



4) O número 9487 deixa resto 1 na divisão por 9. Qual o resto de 9487 na divisão por 3?

(Dica: $9487 = 9 \cdot 1054 + 1$ e $9 = 3 \cdot 3$)

$9487 = 9 \cdot 1054 + 1$

ASSIM: $9487 = 3 \cdot 3 \cdot 1054 + 1 = 3 \cdot 3162 + 1$

DAÍ O RESTO DA DIVISÃO DE 9487 POR 3 É 1

4) O número 9487 deixa resto 1 na divisão por 9. Qual o resto de 9487 na divisão por 3?

(Dica: $9487 = 9 \cdot 1054 + 1$ e $9 = 3 \cdot 3$)

Como na divisão por 9 o resto é 1 e $1 < 3$, na divisão por 3 o resto também é 1.

4) O número 9487 deixa resto 1 na divisão por 9. Qual o resto de 9487 na divisão por 3?

(Dica: $9487 = 9 \cdot 1054 + 1$ e $9 = 3 \cdot 3$)

9487 | 3
04 3162
18
07
(1) o resto é 1

4) O número 9487 deixa resto 1 na divisão por 9. Qual o resto de 9487 na divisão por 3?

(Dica: $9487 = 9 \cdot 1054 + 1$ e $9 = 3 \cdot 3$)

$9487 = 9 \cdot 1054 + 1$

$9487 = 3 \cdot 3 \cdot 1054 + 1$

$9487 = 3 \cdot 3162 + 1$

LOGO O RESTO É 1

FORMA EUCLIDIANA.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Da situação-problema 4 pudemos perceber o grande aumento no nível de compreensão da turma em relação ao conteúdo abordado, tendo em vista a quantidade de respostas satisfatórias e os argumentos diversificados para concluir a questão.

Contudo, podemos concluir que a segunda atividade contendo situações-problemas proporcionou aos alunos um bom domínio sobre o critério de divisibilidade e a divisão euclidiana por 3.

5.2.3 Situações-problemas III

A terceira atividade, contendo também 4 situações-problemas (Questões), foi aplicada após as explorações matemáticas 6 e 7. Foram abordados nesta atividade o critério de divisibilidade por 2 e os resultados obtidos no decorrer das explorações sobre a divisão euclidiana por 2. Antes de iniciar a atividade o professor apresentou e explicou o critério de divisibilidade por 2 para toda a turma. Vejamos a demonstração deste critério a seguir.

5.2.3.1 Critério de divisibilidade por 2

Critério de divisibilidade por 2: Um número natural N é divisível por 2 quando N for par, isto é, quando o algarismo das unidades do número N for 0, 2, 4, 6 ou 8.

Demonstração: Seja a um número natural na base 10, tal que:

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

onde a_n, a_{n-1}, ..., a_1 e a_0 são os algarismos de a.

Logo:

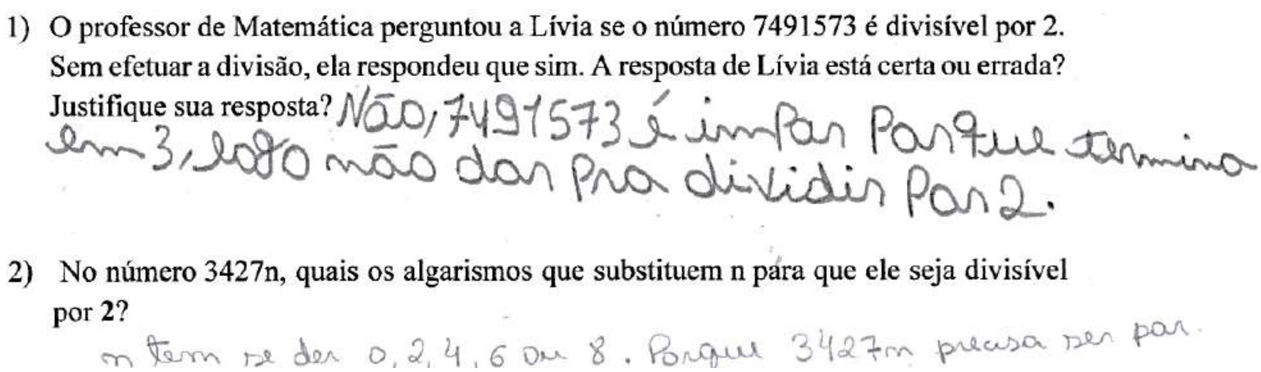
$$\begin{aligned} & a &=& \; a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ \Rightarrow & a &=& \; 10 \cdot \left(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \cdots + a_2 10 + a_1\right) + a_0 \\ \Rightarrow & a &=& \; 10 \cdot k + a_0, \quad \text{com } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ora, 10 é divisível por 2, então a será divisível por 2 se, e somente se, a_0 for divisível por 2 e como a_0 é o algarismo das unidades do número a, e a_0 é divisível por 2 se, e somente se, $a_0 = 0$, 2, 4, 6 ou 8, então a é divisível por 2 se, e somente se, o algarismo das unidades do número a for 0, 2, 4, 6 ou 8, isto é, quando a for par, provando assim o resultado.

5.2.3.2 Análise das questões - situações-problemas III

As questões 1 e 2 solicitaram respectivamente aos alunos para determinarem se um dado número é divisível por 2 e descreverem os possíveis valores das unidades de um número divisível por 2. Os alunos não encontraram dificuldades nas resoluções de ambas, conforme observamos nas respostas pela figura 5.63 abaixo.

Figura 5.63 – Soluções das Situações-problemas III - Questões 1 e 2.



1) **O professor de Matemática perguntou a Lívia se o número 7491573 é divisível por 2. Sem efetuar a divisão, ela respondeu que sim. A resposta de Lívia está certa ou errada? Justifique sua resposta?** NÃO, 7491573 é impar Porque termina em 3, logo não dar Pra dividir Par 2.

2) **No número 3427n, quais os algarismos que substituem n para que ele seja divisível por 2?**
n tem se der 0, 2, 4, 6 ou 8. Porque 3427n precisa ser par.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

As questões 3 e 4 abordaram quando a soma de dois números é divisível por 2, a depender das paridades destes números. Observemos algumas resoluções da questão 3, conforme figura 5.64 a seguir, onde conseguimos evidenciar que os alunos resolveram a questão 3 somando os dois restos ou somando os dois números dados e logo após dividindo a soma obtida por 2 ou observando que a soma era um valor par, sempre justificando de forma positiva e determinando o resto esperado.

Figura 5.64 – Soluções das Situações-problemas III - Questão 3.

3) Dados os números m, n ∈ ℕ, tal que:

$$m = 2 \cdot 361 + 1$$

e

$$n = 2 \cdot 345 + 1$$

Seja S = m + n, qual o resto da divisão de S por 2?

$m = 2 \cdot 361 + 1$ $n = 2 \cdot 345 + 1$
$m = 733$ $n = 691$
com $S = m + n = 1424$ é par, então o resto é 0.

3) Dados os números m, n ∈ ℕ, tal que:

$$m = 2 \cdot 361 + 1$$

e

$$n = 2 \cdot 345 + 1$$

Seja S = m + n, qual o resto da divisão de S por 2?

as restos foram 1 em cada algaritmo da divisão por 2 soma 1+1 dar 2 que dar pra dividir de novo. Par 2. como dar pra dividir o resto é zero

3) Dados os números m, n ∈ ℕ, tal que:

$$m = 2 \cdot 361 + 1$$

e

$$n = 2 \cdot 345 + 1$$

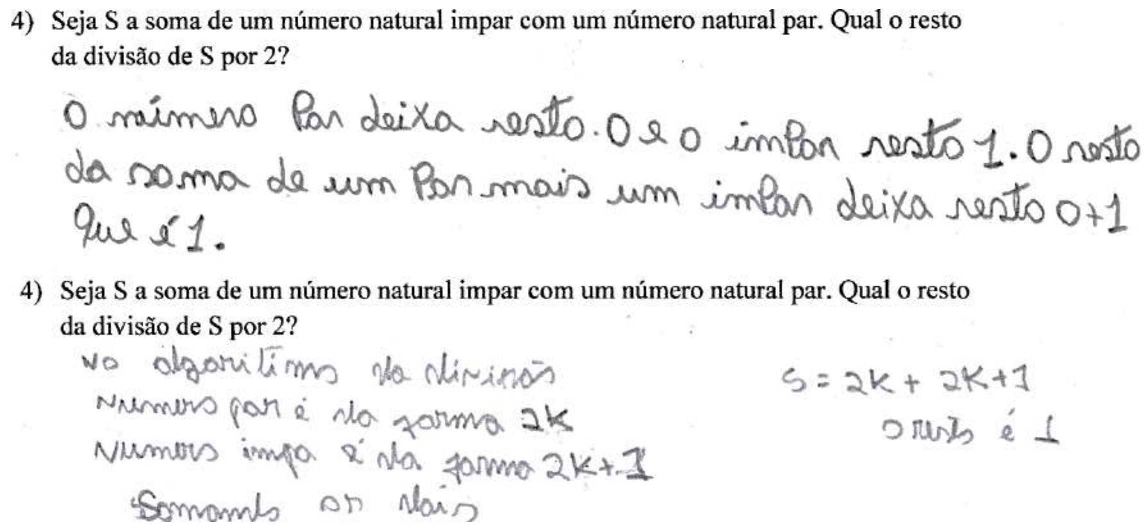
Seja S = m + n, qual o resto da divisão de S por 2?

COMO OS RESTO DE M E N SÃO 1
$1 + 1 = 2$
E 2 DAR PARA DIVIDIR POR 2, ASSIM O RESTO É O ZERO

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A questão 4 também foi resolvida satisfatoriamente de forma semelhante, porém houve o envolvimento de toda a turma debatendo juntamente com o professor sobre a forma euclidiana dos números pares e impares, o que facilitou o entendimento da questão, conforme podemos ver nas resoluções na figura 5.65 abaixo.

Figura 5.65 – Soluções das Situações-problemas III - Questão 4.


4) Seja S a soma de um número natural impar com um número natural par. Qual o resto da divisão de S por 2?

O número Par deixa resto. 0 e o impar resto 1. O resto da soma de um Par mais um impar deixa resto 0+1 que é 1.

4) Seja S a soma de um número natural impar com um número natural par. Qual o resto da divisão de S por 2?

no algoritmo da divisão
Numero par é da forma 2K
Numero impa é da forma 2K+1
Somando os dois

S = 2K + 2K+1
o resto é 1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Ao final da terceira atividade contendo situações-problemas concluímos que os alunos obtiveram um rendimento alto de aprendizado em relação ao critério de divisibilidade por 2. Devido ao sucesso obtido, decidimos abordar o conteúdo e aplica-lo novamente na exploração matemática 10, conforme visto anteriormente na seção 5.1 desta pesquisa.

5.3 Análise dos pré-testes e pós-testes

Foram realizados no decorrer desta pesquisa dois pré-testes (pré-testes 1 e 2) e dois pós-testes (pós-testes 1 e 2) compostos por enunciados contendo questões abertas ou fechadas e problemas matemáticos diversos.

O pré-teste 1, contendo uma questão com 6 itens referentes ao conteúdo divisão euclidiana por 4, foi aplicado antes das explorações matemáticas 1 e 2 e logo em seguida foi realizado o pós-teste 1 idêntico ao pré-teste 1. O pré-teste 2, aplicado antes da exploração matemática 8, conteve duas questões com três itens cada, referentes a utilização de resultados de demonstrações matemáticas simples e o pós-teste 2, idêntico ao pré-teste 2, foi aplicado após a exploração matemática 15.

Apenas 15 alunos realizaram o pré-teste 1, devido à ausência de um aluno da turma na data da aplicação. Assim para obtemos uma melhor apuração dos resultados obtidos realizamos o pós-teste 1 com os mesmos 15 alunos. A mesma quantidade de alunos participou do pré-teste 2 e pós-teste 2.

Visto que os alunos realizaram o pré-teste 1 apenas com os conhecimentos prévios que supostamente foram expostos em aulas expositivas sobre a divisão euclidiana por 4, percebemos que houve um grande número de questões com soluções erradas, assim como o pré-teste

2, devido à pouca habilidade que os mesmos possuem para aplicar resultados de demonstrações matemáticas. Só obtemos uma questão deixada em branco, em todas as atividades referentes aos pré-testes e pós-testes, uma vez que o professor incentivou e motivou os alunos a responderem todas as questões da maneira que eles achavam que estava correto, inclusive as que não sabiam.

5.3.1 Pré-teste 1 e Pós-teste 1

Descreveremos adiante como foram às questões do pré-teste 1.

A questão trouxe no enunciado a definição do algoritmo da divisão (divisão euclidiana) e pedia no item (a) para os alunos descreverem os valores do resto r e do quociente q numa divisão, dados o divisor 4 e o dividendo 359. Para tal, bastava realizar a divisão entre dividendo e divisor. No item (b) foram dados os valores do divisor, quociente e resto afim de que os alunos, utilizando o algoritmo da divisão, determinassem o valor do dividendo. Por se tratarem de itens simples de serem resolvidos, o item (a) apresentou uma boa quantidade de acertos parciais, no entanto foi o único item deixado em branco dentre todas as atividades, uma vez que um dos alunos acabou esquecendo de resolve-lo e o item (b) apresentou a maior quantidade de acertos totais.

No item (c) foram dados dois valores que ao serem divididos por 4 deixam restos 1 e 2 respectivamente e solicitava aos alunos para determinarem o valor do resto da divisão da soma destes dois valores dados por 4. Para resolver tal item, bastava os alunos somarem os dois restos dados na questão, porem muitos alunos somaram os valores dados e logo após dividiram o resultado por 4, assim encontrando o valor do resto.

Nos itens (d) e (e) foram dados dividendos na divisão por 4, para os alunos determinarem qual o menor número natural que precisamos respectivamente subtrair e adicionar para obter uma divisão exata por 4. Nestes itens era necessário que os alunos realizassem as divisões por 4 dos dividendos respectivos a cada item obtendo respectivamente os dois restos nas duas divisões. Daí a partir dos restos obtidos, no item (d) bastava observar o valor do resto o qual seria exatamente o valor que deveria ser subtraído para a divisão se tornar exata e no item (e) bastava observar quanto faltava somar ao resto para obter o valor 4, que é divisível por 4. O item (d) foi responsável pelo maior número de acertos parciais uma vez que consideramos as soluções dos alunos que realizaram o item por tentativa e erro de valores próximos ao dividendo e foram dividindo estes valores por 4 até encontrar uma divisão exata, porém poucos conseguiram justificar este procedimento com coerência.

No item (f), responsável pela maior quantidade de erros, foram dados os valores n inteiro referente ao dividendo, 12 referente ao divisor e 7 referente ao resto da divisão de n por 12 e pedia para os alunos determinarem o valor do resto na divisão de n por 4. Para resolver o item (f) bastava os alunos observarem a dica dada no enunciado afirmando que 12 é múltiplo de 4 ($12 = 4 \cdot 3$) e a utilizarem juntamente com o algoritmo da divisão, sendo necessário apenas determinar o resto da divisão de 7 (resto da divisão de n por 12) por 4.

O quadro 5.1 abaixo apresenta o desempenho dos alunos em relação ao total de erros, acertos parciais, acertos totais e questões deixadas em branco nas questões do pré-teste 1.

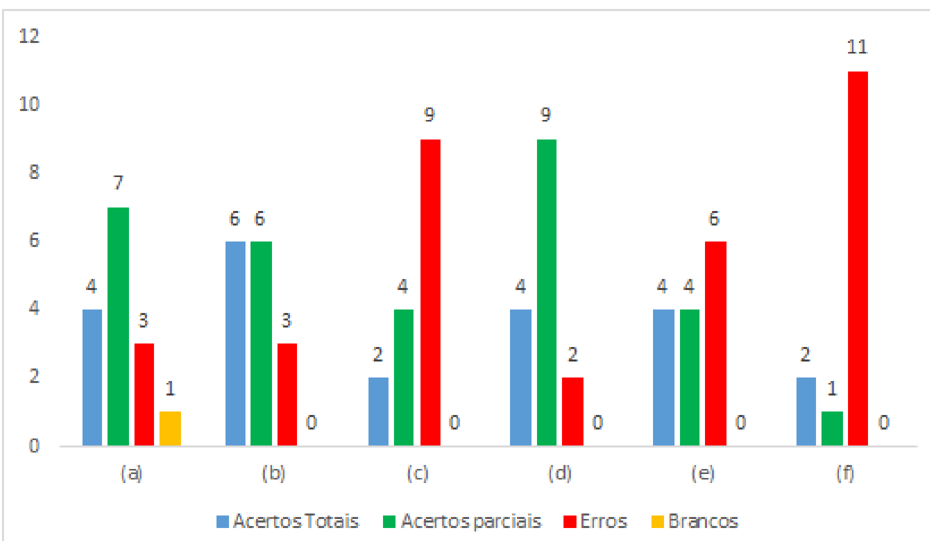
Quadro 5.1 – Desempenho das questões do pré-teste 1.

Questão 1 - item	**Acertos Totais**	**Acertos parciais**	**Erros**	**Brancos**
(a)	4	7	3	1
(b)	5	7	3	0
(c)	2	4	9	0
(d)	4	9	2	0
(e)	4	4	6	0
(f)	2	1	11	0

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O gráfico abaixo irá facilitar a análise dos dados do quadro 5.1 acima.

Figura 5.66 – Avaliação das questões do pré-teste 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O baixo índice de acertos totais do pré-teste se deu pelo fato dos alunos terem como base apenas conhecimentos prévios do conteúdo e por não terem uma base necessária para resolver problemas com a divisão euclidiana (algoritmo da divisão).

O pós-teste 1 foi realizado com as mesmas questões do pré-teste 1 com o intuito de verificar e evidenciar se os alunos obtiveram uma melhor compreensão e desenvolvimento dos conteúdos trabalhados após a realização das Matemágicas seguidas de explorações matemáticas.

Vejamos o quadro 5.2 abaixo contendo o desempenho dos alunos em relação ao total de erros, acertos parciais e acertos totais nas questões do pré-teste 1. Conforme destacamos anteriormente, devido ao incentivo do professor para os alunos realizarem todos os itens da questão, não houve itens deixados em branco.

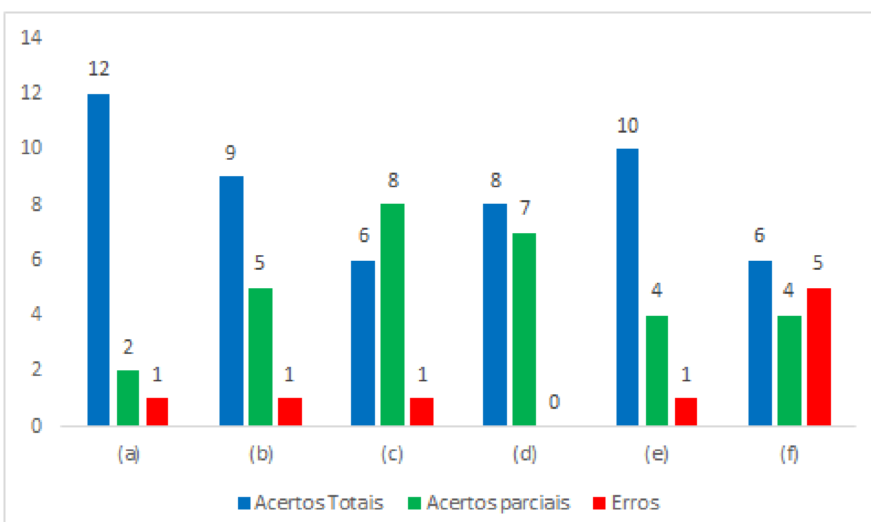
Quadro 5.2 – Desempenho das questões do pós-teste 1.

Questão 1 - item	**Acertos Totais**	**Acertos parciais**	**Erros**
(a)	12	2	1
(b)	9	5	1
(c)	6	8	1
(d)	8	7	0
(e)	10	4	1
(f)	6	4	5

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O gráfico abaixo irá facilitar a análise dos dados do quadro 5.2 acima.

Figura 5.67 – Avaliação das questões do pós-teste 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Comparando o pré-teste 1 com o pós-teste 1, percebeu-se que houve um aumento considerável no total de acertos totais. Quanto aos acertos parciais, apenas nos itens (c) e (f) a quantidade de acertos parciais do pós-teste 1 foi maior em relação ao pré-teste 1. Este fato ocorreu devido ao grande número de alunos que passaram a obter acertos totais em todos os itens, acarretando na redução dos acertos parciais. Em consequência, a quantidade de erros também reduziu em todos os itens, com destaque para o item (f) que mesmo contendo ainda um número elevado de erros, houve uma redução considerada alta em nossas estatísticas.

5.3.2 Pré-teste 2 e Pós-teste 2

Vamos agora fazer a análise do pré-teste 2 e pós teste 2.

A questão 1 trouxe uma demonstração com o resultado onde a soma de dois números naturais ímpares é sempre um número par para os alunos utilizarem tal resultado nos três itens da questão.

No item (a) pedia para os alunos verificarem o resultado da demonstração acima para dois números naturais impares dados. Neste item bastava os alunos somarem os dois números e assim obterem um valor par.

No item (b) foi dado a soma entre um número ímpar e uma variável cujo resultado foi um número par, para que os alunos determinassem o valor da variável. De maneira análoga, o item (c) foi dado a soma entre um valor impar e outra variável cujo resultado foi um número ímpar, para que os alunos determinassem o valor da variável. Nos itens (b) e (c) era necessário apenas resolver equações para determinar o valor destas variáveis.

A questão 2 foi dado um número natural n e uma demonstração afirmando que 3n + 2 é ímpar se, e somente se, n é ímpar, com o intuito dos alunos utilizarem este resultado nos três itens da questão.

No item (a) os alunos deveriam verificar quais valores de n, dados no enunciado, tornavam $3n + 2$ ímpar. O mesmo foi pedido no item (b), porém a questão exigia que os alunos justificassem suas respostas sem realizarem os cálculos. No item (a) bastava substituir os valores de n fornecidos na expressão $3n + 2$ e resolver os cálculos numéricos e no item (b) os alunos deveriam recorrer ao resultado obtido na demonstração para justificarem com coerência o que foi pedido.

O item (c) pedia para os alunos determinarem o valor da variável n em cada uma das duas equações, dadas no enunciado, e logo após justificarem o motivo de um dos resultados ser par e o outro resultado ser ímpar. Para tal, bastava resolver as equações e observar os resultados.

Os quadros 5.3 e 5.4 adiante mostram o desempenho da turma em relação ao total de erros, acertos parciais e acertos totais nas questões do pré-teste 2 e pós-teste 2 respectivamente.

Quadro 5.3 – Desempenho das questões do pré-teste 2.

Questão 1 - item	Acertos Totais	Acertos parciais	Erros
1) (a)	1	11	3
1) (b)	1	14	0
1) (c)	1	13	1
2) a)	1	0	14
2) b)	1	12	2
2) c)	0	1	14

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Nitidamente, percebe-se a melhoria dos resultados do pós-teste em relação as questões do pré-teste, conforme podemos destacar no quadro 5.4 abaixo.

Quadro 5.4 – Desempenho das questões do pós-teste 2.

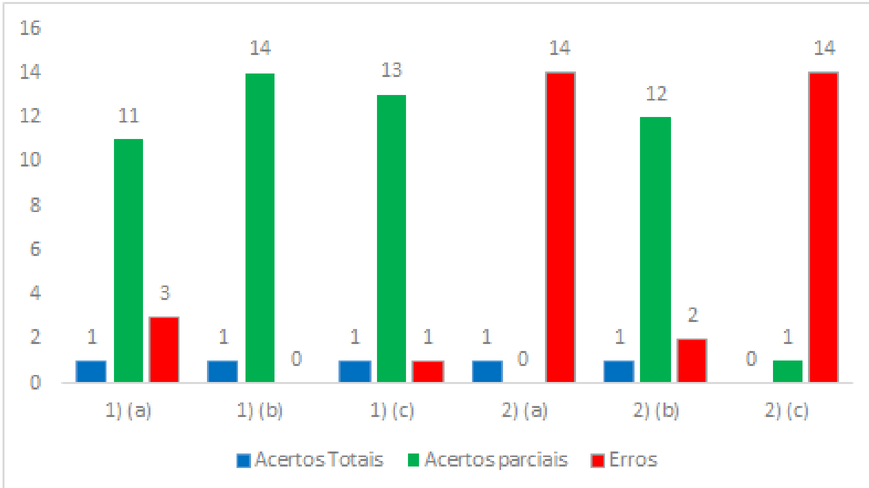
Questão 1 - item	Acertos Totais	Acertos parciais	Erros
1) (a)	10	5	0
1) (b)	6	9	0
1) (c)	5	9	1
2) a)	11	4	0
2) b)	8	7	0
2) c)	9	5	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Apesar das questões propostas nos pré-teste 2 e pós-teste 2 serem de um nível razoavelmente simples, podemos destacar com base nos quadros 5.3 e 5.4 acima que houve um grande aumento quanto ao total de questões corretas de forma total ou parcial, obtendo um resultado excelente tendo em vista que apenas dois itens foram realizados de forma errada na aplicação do pós-teste 2.

Para facilitar a análise dos dados dos quadros 5.3 e 5.4, observemos os gráficos abaixo, conforme as figuras 5.68 e 5.69 respectivamente.

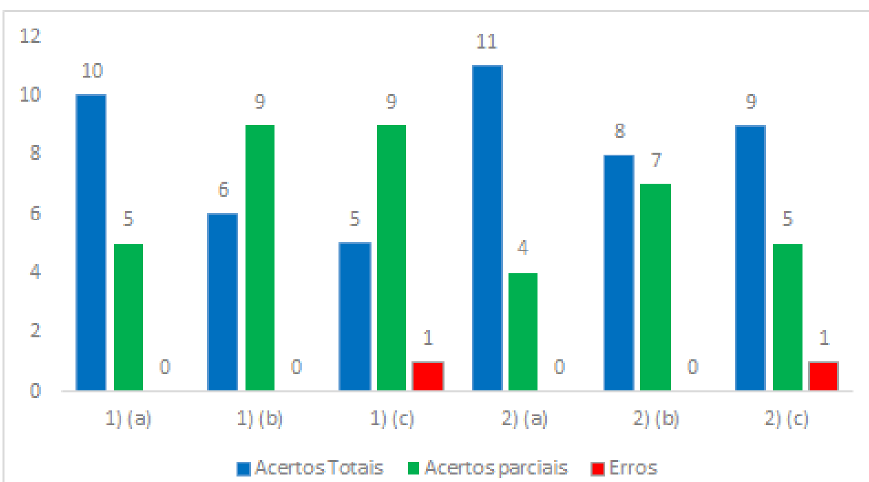
Figura 5.68 – Avaliação das questões do pré-teste 2.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Dos dados extraídos no pós-teste 2, pudemos confirmar mais uma vez o bom aspecto quantitativo de nossa pesquisa uma vez que houve um aumento considerável nas soluções corretas em relação as questões do pré-teste 2, conforme podemos evidenciar no gráfico da figura 5.69 abaixo.

Figura 5.69 – Avaliação das questões do pós-teste 2.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Com base nos quadros e gráficos acima, evidenciamos novamente o acerto na escolha de trabalharmos com uma metodologia inovadora que favoreceu o ensino aprendizagem dos alunos, obtendo através do ensino por meio de Matemágicas unidas as explorações matemáticas e aos métodos avaliativos como os pré-testes seguidos dos pós-testes e as situações problemas, uma melhora significativa dos alunos quanto a absorção dos conteúdos trabalhados.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos estudos realizados no decorrer deste trabalho, foi utilizado o lúdico através de apresentações de Matemágicas em sala de aula, proporcionando aos alunos um ambiente interessante, divertido e desafiador, capaz de incentivá-los a aprender os conteúdos abordados e melhorar o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

A organização da metodologia utilizada em nossas aulas por meio de uma estratégia de ensino que utilizou problemas matemáticos abertos ou fechados em tarefas de explorações matemáticas que serviram para abordar e investigar os conceitos e conteúdos matemáticos por traz de cada Matemágica, tornou possível ensinar a Matemática de uma forma mais atraente, instigando a curiosidade dos alunos em descobrir o truque utilizado para obter sucesso nas Matemágicas e desenvolvendo habilidades nos mesmos como criatividade, concentração e organização das ideias.

Esta metodologia de ensino aliada com a aplicação de situações-problemas bem elaboradas e também a aplicação de dois pré-testes seguidos de dois pós-testes foram essenciais para o aumento do desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, proporcionando um progresso excelente em relação ao estudo da divisão euclidiana e do uso e aplicação de resultados de demonstrações matemáticas simples em diversas questões e problemas matemáticos, conforme pudemos constatar ao comparar os resultados obtidos nos pré-testes com os resultados do pós-teste. De fato, de acordo com os resultados obtidos nas questões dos pós-testes em relação as questões dos pré-testes, pudemos observar que o uso das Matemágicas no ensino dos conteúdos abordados envolvendo álgebra e aritmética nas atividades de explorações matemáticas, despertou nos alunos uma maior motivação e interesse ao aprender a Matemática. Tratou-se de uma forma prazerosa em aprender, o que facilitou o processo de aprendizagem dos alunos, substituindo as aulas tradicionais e tornando-os mais ativos e participativos, deixando de lado a posição de meros espectadores.

Também foram fatores essenciais para a boa desenvoltura de nossa pesquisa o excelente desempenho, satisfação, frequência e interesse da turma ao realizar as atividades propostas, assim como o desempenho do professor ao propor e realizar as Matemágicas trabalhadas na turma, estando sempre atento e preparado ao relacionar os conteúdos abordados em cada respectiva exploração matemática, sendo o mediador do conhecimento matemático e tornando a atividade lúdica com Matemágicas uma forma de estímulo para a construção de uma aprendizagem positiva e significativa para os alunos.

No decorrer das aulas utilizando o lúdico percebemos que houve um maior interesse dos alunos quando comparamos com aulas expositivas e tradicionais, o que tornou mais fácil para o professor ser o mediador e orientador do processo de ensino-aprendizagem. Além disso o total de aulas, cerca de 1 bimestre completo, destinadas para a realização das atividades propostas foram favoráveis ao bom desenvolvimento de nossa pesquisa possibilitando aos alunos desenvolverem as capacidades necessárias e favorecendo a eficácia da metodologia trabalhada.

O método como as atividades de explorações matemáticas levaram os alunos a construírem o conhecimento matemático, sendo uma ferramentas indiscutivelmente promissora no ensino dos conteúdos de álgebra e aritmética foi de grande valia e permitiu que eles pudessem discutir e desenvolver muitas destas atividades em conjunto, debatendo ideias a respeito das possíveis soluções uns com os outros, construindo o conhecimento matemático presente nas fórmulas ou equações utilizadas nas Matemágicas e relacionando-as com os conteúdos matemáticos propostos. Assim pudemos observar por meio das indagações realizadas pelos alunos e pelo empenho de cada um nas atividades, que os mesmos aprovaram a utilização das Matemágicas e truques com o baralho, sendo um elemento motivador no ensino de álgebra e aritmética.

Contudo, pudemos notar o quanto as atividades de explorações matemáticas trouxeram benefícios que influenciam o modo de pensar dos alunos ao solucionar as questões contidas nas atividades matemáticas. Daí podemos concluir que o objetivo principal de nossa pesquisa ao apresentar Matemágicas interessantes, afim de despertar nos alunos um interesse maior pela disciplina, através da resolução de tarefas de explorações matemáticas foi alcançado, visto que houve uma compreensão de forma satisfatória dos conteúdos abordados proporcionando uma notável melhora no ensino-aprendizagem.

Vale destacar também que as Matemágicas realizadas com o baralho possuem um excelente potencial para serem utilizadas como uma espécie de material complementar nas aulas de matemática. Sendo assim, nossa pesquisa pode servir como um estudo motivador para outros matemáticos e educadores de outras áreas, os quais podem ser instigados e desafiados a utilizar atividades lúdicas por meio de Matemágicas em sua prática docente.

REFERÊNCIAS

AFONSO, P. **A Matemática nos truques de cartas**. Blog de Matemática recreativa, 2010. Disponível em: https://recreamat.blogs.sapo.pt/26750.html. Acesso em: 15 de junho de 2024.

ALMEIDA, G. **Faça Essa Mágica com seus amigos agora! (Mágica Matemática) - Tutorial Ep.97**. Youtube, 16 de maio de 2019. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=B04VvUDz2hc. Acesso em: 25 de abril de 2024.

ALMOULOUD, S. A. **O Ensino da Matemática na Perspectiva da Didática da Matemática**. Encontro Paranaense de Educação Matemática, p. 994–998, 2009.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F.; FUSCO, C. A. S. **Provar e demonstrar: um espinho nos processos de ensino e aprendizagem da matemática**. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 1, n. 1, p. 22–41, 2012.

AMADO, N.; AMARAL, N.; CARREIRA, S. **A liberdade que as tecnologias permitem: Trabalhando os números e as capacidades matemáticas transversais.**. Números e Estatística: refletindo no presente perspetivando o futuro. Seção de Educação Matemática, SPCE, 2009.

ARAUJO, A. T. *et al.* **Análise da eficácia da aplicação de pré-testes e pós-testes como ferramenta de aprendizagem na monitoria de neonatologia de uma universidade pública no interior do Ceará.**. Encontro de Iniciação à Docência – PROGRAD, 2019.

BARBIERI, F. **Mágica fácil e rápida usando só 10 cartas!**. Youtube, 30 de janeiro de 2023. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=9HeoJAQIbmQ. Acesso em: 18 de abril de 2024.

BENTO, E. S. **A mágica como recurso motivador no ensino de álgebra**. Fundação Universidade Federal de Rondônia, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRITO, M. **Mágica automática, sem preparação - Como Fazer Mágica com Baralho Fácil**. Youtube, 3 de maio de 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2g8nkYN-7aI. Acesso em: 25 de abril de 2024.

BRITO, M. **(Tutorial) Mágica sem preparação, totalmente automática - Como Fazer Mágica com Baralho Fácil.**. Youtube, 21 de março de 2022. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=1_dAK5SUIi8. Acesso em: 25 de abril de 2024.

CUNHA, J. S.; SILVA, J. A. V. **A importância das atividades lúdicas no ensino da matemática.**. Anais da 3ª Escola de Inverno de Educação Matemática, p. 1–12, 2012.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 1ª. a 5ª. series: para estudantes do curso de Magistério e professores do 1º. grau. Atica, 2003.

FIALHO, P. M. S. **Matemática e Embaralhamentos de Cartas: de Mágicas a Cadeias de Markov**. Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.

FRIEDMANN, A. **Brincar: crescer e aprender - o resgate do jogo infantil**. Moderna, 2001.

GARDNER, M. **Mathematical magic show**. American Mathematical Soc., 2020.

KEGLER, N. A.; FAJARDO, R.; FELTRIN, S. B. **Um relato sobre o uso do lúdico no ensino de matemática: Matemágica na sala de aula.**. XVII seminário interinstitucional de ensino pesquisa e extensão, UNICRUZ, 2022.

KISHIMOTO, T. M. **Jogos tradicionais infantis: jogo, criança e a educação**. Vozes, editor. Rio de Janeiro, 1993.

LOPES, A. I. S.; DANTAS, F. F. V.; MELO, V. F. **Matemágica: um importante instrumento para o ensino da matemática**. Educon, Aracaju, v. 10, n. 01, p. 2–11, set/2016.

MARIOTTI, B. F. **Mágica como ferramenta didática para as aulas de Geografia**. Universidade Federal do Rio grande do Sul, 2019.

MEDEIROS, H.; SILVA, D. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação**. A arte dos enigmas matemáticos. Recife: LEMAT–UFPE, 2010.

MEDEIROS, K. M. **O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula**. Educação Matemática em revista, v. 8, n. 9/10, p. 32–39, 2001.

NICOLA, J. A.; PANIZ, C. M. **A importância da utilização de diferentes recursos didáticos no Ensino de Ciências e Biologia**. InFor, v. 2, n. 1, p. 355–381, 2017.

PARRAS, G. **Como fazer a Mágica dos Quatro Ases**. Youtube, 5 de junho de 2013. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=xUgyYuxDgtc. Acesso em: 30 de maio de 2024.

PARRAS, G. **Como fazer a Mágica da Festa das Damas**. Youtube, 15 de abril de 2014. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=9xH_vH8Ixnc. Acesso em: 30 de maio de 2024.

PONTE, J. P. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação.** Instituto de Inovação Educacional, 1992.

PONTE, J. P. **Explorar e investigar em Matemática: Uma atividade fundamental no ensino e na aprendizagem**. Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, FISEM, p. 13–30, 2010.

PONTE, J. P. **Gestão curricular em Matemática.**. O professor e o desenvolvimento curricular, Associação dos Professores de Matemática, p. 11–34, 2005.

PONTE, J. P. **O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do Ensino básico**. Interações, n. 12, p. 96-114, 2009.

Ramos M. **Truques de Mágica com Cartas para Iniciantes: Seu Primeiro Passo**. Blog Mágico, 2023. Disponível em: https://blogmagico.com.br/truques-de-magica-com-cartas-para-iniciantes/. Acesso em: 06 de junho de 2024.

RIGONATTO, M. **Mágicas utilizando cartas e o conhecimento matemático**. Canal do Educador. Disponível em: https:https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/magicas-utilizando-cartas-conhecimento-matematico.htm. Acesso em: 22 de maio de 2024.

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas**. Investigar para aprender matemática, p. 61–72, 1996.

TEMPORAO, J. **Kit 50 mágicas com cartas!**. Slideshare, 2011. Disponível em: https://pt.slideshare.net/slideshow/kit-de-50-mgicas-com-cartas/6439937. Acesso em: 08 de junho de 2024.

APÊNDICE A: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 1

Exploração 1: Possíveis restos da divisão euclidiana (Algoritmo da divisão) por 4.

Objetivo: Caracterizar algebricamente a forma da divisão euclidiana por 4, dados a, q e r inteiros, respectivamente o dividendo, o quociente e o resto da divisão.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 1 para responder o que se pede.

Na Matemágica 1, as cartas foram distribuídas em 4 montes, os quais representam os quartos, formando a seguinte sequência em cada quarto: a cada 4 cartas tem-se a primeira carta um rei (K), a segunda carta uma dama (Q), logo após um valete (J) e por fim um ás (A). Sendo assim, numerando os quatro quartos com os valores 0, 1, 2 e 3 nesta ordem. Após juntar todas as cartas, colocando um monte acima do outro, formando um único monte e logo após cortar tal monte algumas vezes, obtemos uma das quatro sequencias descritas pelo professor na explicação da Matemágica.

Vamos numerar as posições de cada uma das cartas, supondo que elas ficaram distribuídas, com o baralho voltado para baixo, conforme a seguinte sequência da tabela(quadro) a seguir:

Quadro 1 – Questão 1 - Exploração 1

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

1. Ao distribuir as cartas nos quatro quartos conforme a ordem que elas aparecem, responda:

   (a) Quais cartas ficaram no quarto 0? E quais os valores de suas posições?

   (b) Quais cartas ficaram no quarto 1? E quais os valores de suas posições?

   (c) Quais cartas ficaram no quarto 2? E quais os valores de suas posições?

   (d) Quais cartas ficaram no quarto 3? E quais os valores de suas posições?

   (e) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 0 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

(f) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 1 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

(g) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 2 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

(h) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 3 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

(i) Qual semelhança você percebe quanto aos restos ao realizar as divisões das posições por 4 em cada quarto?

(j) Do item i podemos determinar todos os restos na divisão por 4? Se sim, quais são os possíveis restos na divisão euclidiana (Algoritmo da divisão) por 4?

(k) **Algoritmo da divisão**: Sejam a e d inteiros, com $d \neq 0$. Existem únicos q e r, também inteiros, tais que:

$$a = d \cdot q + r, \text{onde: } 0 \leq r < |d|$$

Tais inteiros q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por d. Logo, como podemos particularizar o algoritmo da divisão quando $d = 4$?

2. Do item k anterior, podemos afirmar que os valores de "a" na divisão por 4 podem ser representados de quatro formas diferentes, quanto aos valores de seus restos, segundo o algoritmo da divisão, $a = d \cdot q + r$, onde $0 \leq r < |d|$.

   Com isto, responda qual a forma de "a" na divisão por 4, quando:

   (a) $r = 0$
   (b) $r = 1$
   (c) $r = 2$
   (d) $r = 3$

3. Observando as quatro formas encontradas na questão 2 na divisão euclidiana por 4, responda qual a forma das posições das cartas que ficaram no quarto:

   (a) 0?
   (b) 1?
   (c) 2?
   (d) 3?

APÊNDICE B: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 2

Exploração 2: Divisão euclidiana por 4.

Objetivo: Caracterizar algebricamente a forma da divisão euclidiana por 4, dados a, q e r inteiros, respectivamente o dividendo, o quociente e o resto da divisão.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 2 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 2 (ás misterioso), representando as cartas aleatórias por C e os ases pela letra A e numerando os montes da esquerda para direita pelos números 0, 1, 2 e 3 respectivamente. Obtemos a seguinte tabela(quadro) conforme a posição das cartas:

Quadro 2 – Questão 1 - Exploração 2

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	C	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Com base na tabela(quadro) construída acima, responda:

(a) Quais os valores das posições dos quatro ases?

(b) Quais os restos da divisão do valor de cada uma das posições dos quatro ases por 4?

(c) Qual a forma do valor da posição de cada ás na divisão euclidiana por 4?

(d) Há alguma semelhança na forma dos 4 ases? Se sim. Por qual motivo ocorre a semelhança?

2. Conforme visto na explicação realizada pelo professor, no decorrer da distribuição do monte formado inicialmente com as cartas voltadas para baixo na mão do mágico, formando outros 4 montes numerados de 0 a 3, sabemos que o truque para obter sucesso na Matemágica se dar colocando a carta que está na posição 4 para baixo do monte que está nas mãos do mágico. Complete a tabela(quadro) abaixo referente as posições das 12 cartas restantes na mão do mágico após a mudança da carta da posição 4 para baixo do monte. E logo após responda o que se pede.

Quadro 3 – Questão 2 - Exploração 2

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	C	C	C	A												

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Quais as novas posições dos três ases que mudaram de posição?

(b) Quais os restos da divisão do valor de cada uma das posições dos três ases por 4 após a mudança?

(c) Qual a forma euclidiana na divisão por 4 de cada um dos três ases após a mudança de posição?

(d) Porque a forma euclidiana da posição dos ases na divisão por 4 foi alterada?

APÊNDICE C: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 3

Exploração 3: Diferença entre um número e a soma de seus algarismos.

Objetivo: Determinar a diferença entre um número natural n de dois algarismos e a soma de seus algarismos quando o valor da dezena do mesmo é igual a 1.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 3 para responder o que se pede.

Na Matemágica 3, conforme explicação do truque realizado pelo professor, o baralho é preparado dentro de sua caixa, antes de iniciar a Matemágica, colocando no topo do baralho as cartas de cima para baixo, sendo Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 as damas e (A) um ás qualquer do baralho, na seguinte ordem conforme a tabela(quadro) a seguir:

Quadro 4 – Questão 1 - Exploração 3

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Carta	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_1	Q_2	Q_3	A	Q_4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

1. Qual o valor da posição da primeira dama Q_1? Ao retirar Q_1, qual será o valor da nova posição de Q_2? Ao retirar Q_1 e Q_2, qual será o valor da nova posição de Q_3?

2. Conforme visto durante a explicação da Matemágica 3, os três primeiros alunos escolhem um número de 11 até 19, correspondente a quantidade de cartas que o mágico irá retirar do baralho, formando um novo monte e colocando as cartas uma acima da outra até finalizar a contagem. Logo após o professor retorna ao baralho a quantidade de cartas correspondente a soma dos algarismos do número escolhido.

   Com base nisto:

   (a) Resolva todas as subtrações de cada um dos números de 11 até 19 pela soma dos seus algarismos.

(b) O que você conclui de semelhante em relação as subtrações realizadas no item a?

(c) Descreva o motivo das três primeiras damas sempre serem encontradas na Matemágica 3, independentemente do número escolhido pelo aluno?

3. Após as três primeiras damas serem encontradas e retiradas, as cartas iniciais ficam dispostas da seguinte forma:

Quadro 5 – Questão 3 - Exploração 3

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carta	9	8	7	6	5	4	3	2	A	Q_4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Qual o valor da posição da última dama Q4?

(b) Determine todas as somas entre o valor da posição de cada uma das nove primeiras cartas e o valor numérico de suas faces.

Observação: Lembrem-se que o às (A) vale 1.

(c) Qual a semelhança em relação as somas realizadas no item b?

(d) Descreva o motivo da quarta dama ser encontrada, independentemente do número escolhido pelo aluno?

APÊNDICE D: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 4

Exploração 4: Um múltiplo de 9.

Objetivo: Compreender que a diferença entre um número natural n de dois algarismos e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de nove.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 4 para responder o que se pede.

Na Matemágica 4, conforme explicação do truque realizado pelo professor, o baralho é preparado dentro de sua caixa, antes de iniciar a Matemágica, colocando as cartas de cima para baixo, sendo K_1, K_2, K_3 e K_4 os reis e (J) um valete qualquer do baralho, na seguinte ordem conforme a tabela(quadro) a seguir.

Quadro 6 – Questão 1 - Exploração 4

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 à 18	19	20 à 28	29	30 à 38	39	40 à 52
Carta	3	4	5	6	7	8	9	10	K_1	2	A	J	6 cartas	K_2	9 cartas	K_3	9 cartas	K_4	13 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

1. Qual o valor da posição do primeiro rei K_1? Ao retirar K_1, qual será o valor da nova posição de K_2? Ao retirar K_1 e K_2, qual será o valor da nova posição de K_3? Ao retirar K_1, K_2 e K_3, qual será o valor da nova posição de K_4?

2. O valor das respectivas posições de K_1, K_2, K_3 e K_4 deixam quais restos quando divididos por 9?

3. Da questão 2, podemos afirmar que os valores das posições de K_1, K_2, K_3 e K_4 são múltiplos de 9? Por que?

4. Seja xy um número natural escrito na base dez, onde x é a dezena e y é a unidade, com $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onde $0 \leq x \leq 9$ e $0 \leq y \leq 9$, tal que:

$$xy = 10x + y \tag{1}$$

Subtraindo de 1, a soma dos algarismos do número xy, obtemos:

$$10x + y - (x + y) = 9x$$

Portanto a diferença entre um número natural de dois algarismos e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de 9.

Com base na demonstração vista acima, responda o que se pede a seguir.

(a) Qual a diferença entre um número natural n e a soma de seus algarismos:

i. Quando o valor da dezena x for igual a 1? Qual dos reis vistos na Matemágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

ii. Quando o valor da dezena x for igual a 2? Qual dos reis vistos na Matemágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

(b) Qual a diferença entre um número natural n e a soma de seus algarismos quando:

i. $30 \leq n \leq 39$? Qual dos reis vistos na Matemágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

ii. $40 \leq n \leq 49$? Qual dos reis vistos na Matemágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

(c) Complete a tabela(quadro), levando em consideração os valores escolhidos pelos alunos participantes da Matemágica 4 e observando as posições dos reis K_1, K_2, K_3 e K_4.

Quadro 7 – Questão 4(c) - Exploração 4

Valor ou nº escolhido entre	10 e 19	20 e 29	30 e 39	40 e 49
Carta encontrada				
Valor da dezena x referente ao nº escolhido				
Valor de 9x ou posição da carta				

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

5. Após a retirada dos 4 reis, restaram apenas 48 cartas com a seguinte distribuição:

Quadro 8 – Questão 5 - Exploração 4

Posição	1 à 9	10 à 15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27 à 35	36 à 48
Carta	9 cartas	6 cartas	J	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9 cartas	13 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Qual o valor da posição do valete de ouros?

(b) Determine todas as diferenças entre o valor de cada posição de 17 até 26 e o valor numérico das faces das cartas da posição.

(c) Qual a semelhança em relação as diferenças realizadas no item b?

(d) Descreva o motivo do valete ser encontrado, independentemente do número escolhido pelo aluno?

APÊNDICE E: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 5

Exploração 5: Divisão euclidiana (Algoritmo da divisão) por 3.

Objetivo: Verificar os possíveis restos na divisão euclidiana por 3.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 5 para responder o que se pede.

Na Matemágica 5, conforme explicação do truque realizado pelo professor, após a primeira distribuição e divisão das 21 cartas da Matemágica em 3 montes numerados de 1 até 3 com sete cartas cada, o monte localizado no meio dos outros dois é o monte onde fica localizada a carta escolhida pelo aluno. Vamos numerar as cartas da Matemágica de acordo com as posições de cada uma após a primeira distribuição. Assim as cartas do monte 2 colocado no meio dos outros dois montes serão numeradas de 8 até 14, as cartas do monte 1 numeradas de 1 até 7 e as cartas do monte 3 numeradas de 15 até 21. Vamos representar a carta escolhida pelo aluno por C_n e as cartas não escolhidas por x_n, onde n representa a posição da carta após a primeira distribuição conforme a tabela(quadro) abaixo:

Quadro 9 – Questão 1 - Exploração 5 - 1ª distribuição

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta	1 - x_1	8 - C_8	15 - x_{15}
	2 - x_2	9 - C_9	16 - x_{16}
	3 - x_3	10 - C_{10}	17 - x_{17}
	4 - x_4	11 - C_{11}	18 - x_{18}
	5 - x_5	12 - C_{12}	19 - x_{19}
	6 - x_6	13 - C_{13}	20 - x_{20}
	7 - x_7	14 - C_{14}	21 - x_{21}

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

1. Complete a tabela(quadro) abaixo referente a segunda distribuição das cartas e logo após responda o que se pede:

Quadro 10 – Questão 1 - Exploração 5 - 2ª distribuição

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta	1 - x_1	2 - C_2	3 - x_3
	4 - x_4		

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Quais os valores de n distribuídos no monte 1? Realize todas as divisões de cada valor n do monte 1 por 3 e responda qual o resto encontrado nestas divisões?

(b) Quais os valores de n distribuídos no monte 2? Realize todas as divisões de cada valor n do monte 2 por 3 e responda qual o resto encontrado nestas divisões?

(c) Quais os valores de n distribuídos no monte 3? Realize todas as divisões de cada valor n do monte 3 por 3 e responda qual o resto encontrado nestas divisões?

(d) Qual a forma euclidiana dos valores das posições n que quando divididos por 3 deixam resto:

i. 0? ii. 1? iii. 2?

2. Complete a tabela(quadro) abaixo referente a terceira distribuição das cartas quando:

(a) O valor de n da carta C_n escolhida for da forma $3k$, com $k \in \mathbb{N}$.

(b) O valor de n da carta C_n escolhida for da forma $3k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

(c) O valor de n da carta C_n escolhida for da forma $3k + 2$, com $k \in \mathbb{N}$.

Observação: As tabelas(quadros)[1] encontram-se na próxima pagina.

3. Por que ao juntar os montes, após a terceira distribuição, a carta escolhida pelo aluno fica exatamente na posição de número 11?

[1]Quadros 11, 12 e 13 - Fonte: Elaborados pelo autor, 2024.

Quadro 11 – Questão 2(a) - Exploração 5

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta			

Quadro 12 – Questão 2(b) - Exploração 5

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta			

Quadro 13 – Questão 2(c) - Exploração 5

Montes	Monte 1	Monte 2	Monte 3
Posições n - carta			

APÊNDICE F: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 6

Exploração 6: Divisão Euclidiana (Algoritmo da divisão) por 2.

Objetivo: Verificar a forma euclidiana de um número natural n na divisão por 2.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 6 para responder o que se pede.

Na Matemágica 6, conforme explicação do truque realizado pelo professor, após os três alunos devolverem todas as três cartas aos montes e o mágico juntar todas as cartas do baralho conforme descrito nos passos 2, 3, 4 e 5, a posição das três cartas (C_1, C_2 e C_3) escolhidas ficam dispostas da seguinte maneira de cima para baixo, independentemente dos cortes no baralho realizados pelos alunos, conforme tabela(quadro) a seguir:

Quadro 14 – Questão 1 - Exploração 6

Cartas	Monte 4	C_3	Monte 3	C_2	Monte 2	C_1	Monte 1
Posição	1 até 9	10	11 até 25	26	27 até 41	42	43 até 52
Total de cartas	9	1	15	1	15	1	10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

1. Quais as posições das cartas C_1, C_2 e C_3?

2. No passo 6, o mágico coloca as 4 primeiras cartas que estão no topo do baralho para baixo. Feito isto, as posições das três cartas C_1, C_2 e C_3 são alteradas, assim como toda a distribuição do baralho. Complete a tabela(quadro) abaixo após a mudança realizada e responda o que se pede.

Quadro 15 – Questão 2 - Exploração 6

Cartas	Monte 4	C_3	Monte 3	C_2	Monte 2	C_1	Monte 1
Posição	até		até		até		até
Total de cartas		1		1		1	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Quais os valores das posições das cartas C_1, C_2 e C_3? Os valores das posições das cartas C_1, C_2 e C_3 são números pares ou impares?

(b) Qual o resto da divisão entre os valores das posições de C_1, C_2 e C_3 por 2? Estes valores são múltiplos de 2? E qual a forma euclidiana destes valores na divisão por 2?

3. Conforme visto no decorrer da Matemágica, as cartas de posições impares são descartadas pelo mágico. Com tudo, responda abaixo a respeito dos números impares.

   (a) Realize algumas divisões por 2 de alguns valores de posições impares da Matemágica. Qual o resto da divisão de cada valor das posições impares na divisão por 2?

   (b) Qual a forma euclidiana dos valores das posições impares na divisão por 2?

4. Após a primeira distribuição, as cartas escolhidas que estavam nas posições pares 6, 22 e 38 são divididas por 2 e passam para as posições 3, 11 e 19 quando contadas de baixo para cima, devido a retirada das 26 cartas das posições impares, isto é, metade das cartas. Observe abaixo a tabela(quadro) referente a esta situação.

Quadro 16 – Questão 4 - Exploração 6 - Faces das cartas para cima

<table>
<tr><td>Cartas</td><td>Monte 4</td><td>C_3</td><td>Monte 3</td><td>C_2</td><td>Monte 2</td><td>C_1</td><td>Monte 1</td></tr>
<tr><td>Posição</td><td rowspan="2">2 cartas</td><td>3</td><td rowspan="2">7 cartas</td><td>11</td><td rowspan="2">7 cartas</td><td>19</td><td rowspan="2">7 cartas</td></tr>
<tr><td>Total de cartas</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Porém, observando que as cartas são colocadas uma acima da outra, precisamos contar as novas posições com as cartas voltadas para baixo. Complete a tabela(quadro) abaixo com as novas posições corretas ao serem contadas de cima para baixo.

Quadro 17 – Questão 4 - Exploração 6 - Faces das cartas para baixo

Cartas	Monte 1	C_1	Monte 2	C_2	Monte 3	C_3	Monte 4
Posição	até		até		até		até
Total de cartas							

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

5. Durante a Matemágica, conforme visto na explicação dos slides, a cada distribuição realizada são descartadas metade das cartas até que restem na mão do mágico apenas as cartas (C_1, C_2 e C_3) escolhidas pelos alunos.

   (a) Qual a forma euclidiana do valor das cartas descartadas em cada distribuição na divisão por 2?

   (b) E qual a forma euclidiana do valor das cartas que vão continuando nas mãos do mágico na divisão por 2?

   (c) Tente explicar o motivo pelo qual ao final da Matemágica, após todas as distribuições realizadas pelo mágico, restam exatamente em suas mãos as cartas C_1, C_2 e C_3?

APÊNDICE G: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 7

Exploração 7: Divisibilidade por 2.

Objetivo: Compreender o critério de divisibilidade por 2.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 7 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 7, conforme explicação do truque realizado pelo professor, o mágico pega as cartas viradas para baixo e as distribui em dois montes conforme tabela(quadro) 18 abaixo:

Quadro 18 – Questão 1 - Exploração 7

MONTE 1	Carta	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{17}	C_{19}	C_{21}
	Nova posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
MONTE 2	Carta	C_2	C_4	C_6	C_8	C_{10}	C_{12}	C_{14}	C_{16}	C_{18}	C_{20}	
	Nova posição y	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Qual o resto e a forma euclidiana do valor da posição de cada uma das cartas do primeiro monte na divisão por 2?

(b) Qual o resto e a forma euclidiana do valor da posição de cada uma das cartas do segundo monte na divisão por 2?

(c) Seja C_x o coringa, onde x representa a posição da carta na tabela(quadro) 18. Se o coringa for colocado em uma posição par, as cartas C_{x-1} e C_{x+1} serão localizadas em posições pares ou impares? E se o coringa for colocado em uma posição ímpar?

(d) É correto afirmar que após a primeira distribuição as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficaram juntas no mesmo monte, com C_{x-1} acima de C_{x+1}? Justifique a sua resposta.

2. Ao juntar os montes 1 e 2, colocando o monte 2 acima do monte 1, as cartas ficam distribuídas conforme a tabela(quadro) 19 abaixo:

Quadro 19 – Questão 2 - Exploração 7

Carta	C_2	C_4	C_6	C_8	C_{10}	C_{12}	C_{14}	C_{16}	C_{18}	C_{20}	C_1	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{17}	C_{19}	C_{21}
Nova posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Complete a tabela(quadro) 20 abaixo distribuindo as cartas da tabela(quadro) 19, na ordem estabelecida das posições $y = 2q + 1$ no monte 1 e $y = 2q$ no monte 2, onde $q \in \mathbb{N}$.

Quadro 20 – Questão 2 - Exploração 7(a)

MONTE 1	Forma de y	$2q + 1$										
	Carta	C_2	C_6	C_{10}	C_{14}	C_{18}	C_1	C_5	C_9	C_{13}	C_{17}	C_{21}
MONTE 2	Forma de y	$2q$										
	Carta	C_4	C_8	C_{12}	C_{16}	C_{20}	C_3	C_7	C_{11}	C_{15}	C_{19}	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(b) As cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficam localizadas no mesmo monte na tabela(quadro) 20? Justifique sua resposta.

(c) Do estudo realizado até aqui sobre a divisão euclidiana por 2, determine quais são os possíveis restos na divisão por 2?

3. Após a segunda distribuição, ao colocar o monte 2 acima do monte 1 novamente, obteremos a seguinte distribuição das cartas, considerando as novas posições z, conforme a tabela(quadro) 21 abaixo:

Quadro 21 – Questão 3 - Exploração 7

x e y	$x = 2k$ e $y = 2q$					$x = 2k + 1$ e $y = 2q$					$x = 2k$ e $y = 2q + 1$					$x = 2k + 1$ e $y = 2q + 1$					
Carta	C_4	C_8	C_{12}	C_{16}	C_{20}	C_3	C_7	C_{11}	C_{15}	C_{19}	C_2	C_6	C_{10}	C_{14}	C_{18}	C_1	C_5	C_9	C_{13}	C_{17}	C_{21}
posição z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Observe que independentemente da posição z onde esteja o coringa, sabendo que ele não pode ser as cartas C_1 e C_{21}, isto é, o coringa não pode estar nas posições $z = 16$ e $z = 21$. Ao retirá-lo, restarão 20 cartas e deve-se colocar as cartas que estavam abaixo dele para cima do monte. Sendo C_x o coringa, pela tabela(quadro) 21 responda:

(a) Qual a distância entre as posições z das cartas C_{x-1} e C_x, considerando que o coringa é a carta C_6?

(b) Qual a distância entre as posições z das cartas C_{x+1} e C_x, considerando que o coringa é a carta C_{17}?

(c) Qualquer que seja o valor de x de 1 até 21, as distâncias entre as posições z entre as cartas C_{x-1} e C_x ou entre C_{x+1} e C_x serão sempre iguais a 5? Justifique sua resposta. (Considere no decorrer da contagem que ao chegar na carta da posição $z = 21$, deve-se continuar a contagem retornando para carta da posição $z = 1$).

(d) Ao colocar as cartas que estavam embaixo do coringa para cima do monte as cartas C_{x-1} e C_{x+1} ficarão localizadas em quais posições z?

(e) No passo 5 ao dividir o baralho em dois montes, não alterará as posições das cartas C_{x-1} e C_{x+1}, conforme visto na explicação da Matemágica. Além disso, o mágico coloca a parte de cima do monte no bolso direito, com as faces das cartas viradas para o seu corpo e coloca a parte de baixo do monte no seu bolso esquerdo, com as costas viradas para o seu corpo. Portanto no passo 6 ao puxar do bolso a quinta carta de cada monte, ele estará puxando exatamente as cartas que estavam acima do coringa na posição $(x + 1)$ e abaixo do coringa na posição $(x - 1)$, finalizando o truque. Justifique porque isto acontece?

APÊNDICE H: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 8

Exploração 8: Demonstrações utilizando álgebra e tabelas(quadros).

Objetivo: Compreender as demonstrações algébricas no decorrer da Matemágica 8.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 8 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 8, conforme explicação realizada pelo professor, a carta escolhida pelo aluno fica na posição 1, acima das outras nove cartas, com todas as cartas viradas para baixo. Logo após o aluno escreve em um papel um número de 1 até 9 e passa a quantidade de cartas referente a este número para baixo do baralho. Com isto responda o que se pede abaixo.

   (a) Complete a tabela(quadro) abaixo com os valores das posições y da carta C, sendo C a carta escolhida pelo aluno e $x \in \mathbb{N}$, com $1 \leq x \leq 9$, o total de cartas colocadas para baixo do monte de 10 cartas.

Quadro 22 – Questão 1 - Exploração 8

Posição da carta C	Posição 1								
Total de cartas x colocadas para baixo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Posição y da carta C									

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

   (b) Da tabela(quadro) acima realize a soma de cada valor das posições y com o valor de x correspondente ao total de cartas colocadas para baixo do baralho.

   (c) Qual a semelhança entre todas as somas $x + y$ do item b?

2. Ao distribuir as cartas uma acima da outra na mesa, a posição anterior y das cartas somadas com a nova posição z, com $z \in \mathbb{N}$ e $z \neq 10$, será novamente sempre igual a 11, isto é, $y + z = 11$, conforme podemos ver na tabela(quadro) abaixo.

Quadro 23 – Questão 2 - Exploração 8

Posição y da carta C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição z da carta C	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Com base nisto responda:

(a) Porque a nova posição z da carta C não pode ser igual a 10?

(b) Na demonstração realizada pelo professor, provou-se que a posição z da carta C é exatamente igual ao número x escolhido pelo aluno, isto é, $x = z$. Assim se a carta C escolhida pelo aluno ficar na posição $z = 3$, qual o valor x escolhido e escrito pelo aluno em um papel no início da Matemágica?

3. No passo 5 ao cortar o baralho exatamente no meio, a posição da carta C escolhida será modificada para a posição:

- $w = x + 5$, com $w \in \mathbb{N}$, se o valor x escolhido for menor do que ou igual a 5, isto é, se $x = 1, 2, 3, 4$ ou 5.
- $w = x - 5$, se o valor x escolhido for maior que 5, isto é, se $x = 6, 7, 8$ ou 9.

(a) Utilizando as equações acima, determine o valor da posição w quando $x = 2$.

(b) Utilizando as equações acima, determine o valor da posição w quando $x = 7$.

(c) Agora complete a tabela(quadro) abaixo, com as novas posições $w \in \mathbb{N}$, após o corte realizado.

Quadro 24 – Questão 3 - Exploração 8

Posição z da carta C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição w da carta C										5

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4. Conforme visto na demonstração 2 realizada pelo professor, no passo 6 da Matemágica a carta C sempre ficará na posição 4 ao colocar a quantidade de cartas correspondentes a soma do número escrito no papel pelo aluno mais uma carta para baixo do baralho. Por fim, o mágico realiza o passo 7 da Matemágica, descartando 9 cartas e ficando apenas com a carta C em sua mão. Sendo C a carta escolhida pelo aluno, a qual ficou na posição 4 após o passo 6, realize os procedimentos de descarte corretos, conforme o passo 7 da Matemágica na tabela(quadro) abaixo até ficar apenas com a carta C após os descartes 1, 2 e 3. Considere X uma carta qualquer do baralho.

Quadro 25 – Questão 4 - Exploração 8

Posições das cartas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Passo 6	X	X	X	C	X	X	X	X	X	X
Descarte 1										
Destarte 2										
Destarte 3										

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

APÊNDICE I: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 9

Exploração 9: Demonstrações utilizando álgebra e tabelas(quadros).

Objetivo: Compreender as demonstrações algébricas no decorrer da Matemágica 9.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 9 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 9, conforme explicação realizada pelo professor, o aluno escolhe uma carta do monte composto por dez cartas e a devolve ao monte em uma das posições de 1 até 10, considerando as faces das cartas voltadas para cima. Por fim, o aluno entrega as cartas, agora com as faces voltadas para baixo. Com isto responda:

   (a) Complete a tabela(quadro) 26, sendo C_x as cartas que estão na posição $x \in \mathbb{N}$ com as faces voltadas para cima, com $1 \leq x \leq 10$ e seja $y \in \mathbb{N}$ o valor que representa a posição das cartas C_x com as faces voltadas para baixo, com $1 \leq y \leq 10$.

Quadro 26 – Questão 1 - Exploração 9

Carta C_x	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Posição x com as faces para cima	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
posição y com as faces para baixo	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

   (b) Da tabela(quadro) 26 acima realize a soma de cada valor das posições x com o valor das posições y correspondentes a cada carta. Qual a semelhança entre as somas $x + y$?

2. No passo 3, o mágico corta o monte com as dez cartas voltadas para baixo, colocando três cartas de baixo do monte para o topo. Daí a configuração das novas posições $z \in \mathbb{N}$, com $1 \leq z \leq 10$, das cartas ficam distribuídas conforme a tabela(quadro) 27 abaixo:

Quadro 27 – Questão 2 - Exploração 9

Carta C_x	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
Posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nova posição z	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Se a carta C_x escolhida estiver em alguma posição y de 1 até 7, isto é, $1 \leq y \leq 7$. Então a nova posição z de C_x, conforme tabela(quadro) 27 acima, será a posição $z = y + 3$.

i. Qual a posição de z quando $y = 5$?

ii. Qual a posição de z quando $y = 3$?

(b) Se a carta C_x escolhida estiver em alguma posição y de 8 até 10, isto é, $8 \leq y \leq 10$. Então a nova posição z de C_x, conforme tabela(quadro) 27 acima, será a posição $z = y - 7$.

i. Qual a posição de z quando $y = 8$?

ii. Qual a posição de z quando $y = 10$?

(c) Complete a tabela(quadro) 28 abaixo, que relaciona as novas posições z das cartas C_x e as posições x iniciais correspondentes.

Quadro 28 – Questão 3 - Exploração 9

Carta C_x	C_3	C_2	C_1	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4
Posição z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição x com as faces para cima										

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(d) Da tabela(quadro) 28 acima realize todas as somas da posição x com a nova posição z de cada carta.

(e) Quais os valores das somas $x + z$, quando $1 \leq x \leq 3$? E quais os valores das somas $x + z$, quando $4 \leq x \leq 10$?

3. No passo 4 o aluno retira a quantidade x de cartas de baixo do baralho e as coloca para o topo. Daí, na demonstração realizada pelo professor através de slides, concluímos que independentemente da carta C_x e a posição x escolhidas pelo aluno, a nova posição de C_x ao final do passo 4 sempre será $w = 4$. Complete a tabela(quadro) abaixo, analogamente ao passo 7 da Matemágica 8, que ao distribuir as cartas conforme o passo 5 desta Matemágica, após os 3 descartes a carta que ficará na mão do mágico será a carta C_x escolhida pelo aluno. Considere X uma carta qualquer do baralho.

Quadro 29 – Questão 4 - Exploração 9

Posição w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Passo 4	X	X	X	C_x	X	X	X	X	X	X
Descarte 1										
Destarte 2										
Destarte 3										

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Por que após o primeiro descarte a carta C_x ficará na posição 2?

(b) Por que após o segundo descarte a carta C_x ficará novamente na posição 2?

APÊNDICE J: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 10

Exploração 10: Demonstrações utilizando tabelas(quadros) e divisão euclidiana por 2.

Objetivo: Compreender as demonstrações no decorrer da Matemágica 10, utilizando a divisão euclidiana por 2.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 10 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 10, conforme explicação realizada pelo professor, após o aluno traçar as 16 cartas, o mágico pede para ele escolher uma carta e coloca-la na base do baralho (posição 16). Sejam C_x as 16 cartas, onde x é o valor da posição das cartas após finalizar o passo 1, com $x \in \mathbb{N}$, $1 \leq x \leq 16$. Daí as cartas ficam dispostas conforme a tabela(quadro) abaixo, sendo C_{16} a carta escolhida pelo aluno.

Quadro 30 – Questão 1 - Exploração 10

Cartas C_x	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
Posição x das cartas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Complete as tabelas(quadros) abaixo conforme o passo 2 da Matemágica ao realizar a primeira distribuição com as 16 cartas, ficando 8 cartas acima da mesa nas posições $y \in \mathbb{N}$ e as outras 8 cartas na mão do mágico nas posições $x' \in \mathbb{N}$.

Quadro 31 – Questão 1(a) - Exploração 10 - Cartas na mão

Continuam na mão								
Posição x'	1	2	3	4	5	6	7	8
Cartas								

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Quadro 32 – Questão 1(a) - Exploração 10 - Cartas na mesa

Cartas na mesa								
Posição y	9	10	11	12	13	14	15	16
Cartas								

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(b) A carta escolhida pelo aluno (C_{16}) ficou na tabela(quadro) 31 ou na tabela(quadro) 32? Qual a posição y de C_{16}?

(c) Qual a forma dos valores das posições de x das cartas na divisão euclidiana por 2 que ficaram na tabela(quadro) 31? E na tabela(quadro) 32?

2. Levando em consideração as novas posições $x' \in \mathbb{N}$ das 8 cartas que ficaram nas mãos do mágico, conforme a questão anterior. Continuando a distribuição, complete as tabelas(quadros) abaixo de maneira análoga a primeira distribuição.

Quadro 33 – Questão 2 - Exploração 10 - Cartas na mesa

Na mesa												
Posição y	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cartas					C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Quadro 34 – Questão 2 - Exploração 10 - Cartas na mão

Continuam na mão				
Posição x''	1	2	3	4
Cartas				

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Quais os valores $x' \in \mathbb{N}$ das cartas que ficaram na tabela(quadro) 33? E na tabela(quadro) 34?

(b) Qual a forma dos valores das posições $x' \in \mathbb{N}$ das cartas na divisão euclidiana por 2 que ficaram na tabela(quadro) 33? E na tabela(quadro) 34?

3. Ao finalizar a distribuição das cartas realizada no passo 2, obteremos que a carta ajudante é a carta C_1. Portanto as cartas ficarão distribuídas conforme a tabela(quadro) abaixo. Considere C_{16} a carta escolhida pelo aluno e X as demais cartas.

Quadro 35 – Questão 3 - Exploração 10

Cartas na mesa																
Cartas	C_1	C_9	C_{13}	C_5	C_{15}	C_{11}	C_7	C_3	C_{16}	C_{14}	C_{12}	C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2
Posição y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Complete a tabela(quadro) abaixo conforme o passo 3 da Matemágica sendo as 16 cartas divididas em dois montes (monte 1 e monte 2) com 8 cartas cada, e gerando as novas posições $z \in \mathbb{N}$ das cartas.

Quadro 36 – Questão 3(a) - Exploração 10

Primeira distribuição								
Monte 1								
Monte 2								
Posições z das cartas	1	2	3	4	5	6	7	8

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(b) Qual a forma euclidiana dos valores das posições de $y \in \mathbb{N}$ na divisão euclidiana por 2 que ficaram no monte 1? E no monte 2?

(c) Quais as posições z das cartas C_1 e C_{16}? E qual a forma euclidiana de ambas?

(d) Utilize o mesmo raciocínio para completar a tabela(quadro) abaixo referente a segunda distribuição, lembrando que as 8 cartas que restaram na mão do mágico foram as cartas do monte 1, conforme tabela(quadro) da questão anterior.

Quadro 37 – Questão 3(d) - Exploração 10

Segunda distribuição				
Monte 3				
Monte 4				
Nova posição w	1	2	3	4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(e) Qual a forma euclidiana dos valores das posições de $z \in \mathbb{N}$ na divisão euclidiana por 2 que ficaram no monte 3? E no monte 4?

(f) Quais as posições w das cartas C_1 e C_{16}? E qual a forma euclidiana de ambas?

(g) Por fim, ao realizar a terceira e última distribuição em dois novos montes a carta ajudante ficara no mesmo monte que a carta escolhida pelo aluno. Assim descartando o outro monte finalizamos a Matemágica. Explique porque as cartas C_1 e C_{16} ficam juntas ao final da terceira distribuição.

APÊNDICE K: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 11

Exploração 11: Demonstração utilizando álgebra.

Objetivo: Aplicar o resultado da demonstração afim de obter êxito no resultado final.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 11 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 11, conforme explicação realizada pelo professor, o mágico convida e pede para um aluno escolher uma carta qualquer, entre as 36 cartas utilizadas na Matemágica, multiplique o valor da face da carta por 2. Logo após, some 5 ao resultado e depois multiplique por 5, obtendo um novo resultado. Por fim o mágico solicita que o aluno escolha outra carta e some o valor de sua face com o resultado anterior e fale ao mágico o resultado final. Na demonstração realizada pelo professor, por meio de slides, vimos que subtraindo 25 ao resultado final, o mágico obtém um novo resultado de dois dígitos x e y, os quais são exatamente os valores das duas cartas escolhidas pelo aluno. Isto é, x e y são respectivamente os valores da primeira e segunda cartas escolhidas pelo aluno, com $x, y \in \mathbb{N}$, com $1 \leq x \leq 9$, $1 \leq y \leq 9$, temos que:

   $$xy = 10x + y$$

   Onde x e y são respectivamente a dezena e a unidade do resultado final obtido.

   Com isto, responda:

   (a) Sabendo que o resultado final obtido pelo mágico ao final da Matemágica foi 48. Quais os valores das cartas escolhidas pelo aluno?

   (b) Se o resultado obtido pelo aluno e dito ao mágico for 72. Qual o valor obtido pelo mágico? E quais as cartas escolhidas pelo aluno?

   (c) Realize os procedimentos da Matemágica, sendo 5 e 3 respectivamente a primeira e segunda cartas escolhidas pelo aluno.

   (d) Do item c, responda:

      i. Qual o resultado obtido pelo aluno e dito ao mágico?

      ii. Qual o valor obtido pelo mágico?

      iii. Quais as cartas escolhidas pelo aluno?

APÊNDICE L: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 12

Exploração 12: Demonstração utilizando álgebra e tabelas(quadros).

Objetivo: Aplicar o resultado da demonstração e utilizar tabelas(quadros) afim de obter êxito no resultado final.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 12 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 12, conforme explicação realizada pelo professor, o aluno escolhe uma carta C qualquer entre as 52 cartas do baralho e a coloca acima do monte com 8 cartas feito pelo mágico acima da mesa. Complete a tabela(quadro) 38 abaixo lembrando que as demais cartas ficam acima do monte com as 9 cartas.

Quadro 38 – Questão 1 - Exploração 12

Total de carta acima de C	
Posição da Carta C escolhida	
Total de carta abaixo de C	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

2. tem No passo 3 o mágico começa a distribuir carta por carta, uma a uma, com as faces voltadas para cima, formando 4 montes. Cada monte é formado da seguinte maneira: O mágico realiza uma contagem regressiva iniciando pelo número 10 e para cada número da contagem ele vai colocando uma carta com a face voltada para cima formando o monte até chegar no número 1.

   (a) Se o valor da face de alguma carta coincidir com o número da contagem, o mágico para a contagem nesta carta e inicia o próximo monte. Complete a tabela(quadro) 39 abaixo entre a relação existente de um número natural a, com $1 \leq a \leq 10$, a ser contado em ordem decrescente iniciando pelo número 10 e o total de cartas $b \in \mathbb{N}$ viradas com a face voltada para cima até ocorrer a coincidência de a com o valor $n \in \mathbb{N}$ da face da carta.

Quadro 39 – Questão 2 - Exploração 12

Número a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Total de cartas b viradas										

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(b) Realize todas as somas entre os valores de a e b correspondentes da tabela((quadro) 39. Qual a semelhança existente entre a soma $a + b$?

(c) Se não houver a coincidência entre o número n da face da carta e o número a da contagem, o mágico coloca mais uma carta da mão, virada para baixo, acima do monte e inicia o monte seguinte. Quantas cartas são descartadas nos montes onde não ocorre a coincidência entre a e n? Justifique.

(d) Do item b concluímos que serão descartadas sempre 11 cartas de cada monte onde houver a coincidência entre a e n, pois no passo 3 já foram descartadas b cartas viradas para cima e no passo 4 serão descartadas o total de cartas correspondentes ao valor de a referente ao número da face da carta que ficou voltada para cima. Do item c também concluímos que são descartadas 11 cartas de cada monte onde não ocorre a coincidência entre a e n. Com isso responda:

   i. Quantas cartas serão descartadas nos 4 montes, independentemente se houver a coincidência entre a e n ou não?

   ii. Justifique o motivo da carta C escolhida pelo aluno ser encontrada observando a posição que ela ficou localizada pela tabela(quadro) 38 da questão 1.

3. Aplique os passos da Matemágica quando os números 5 e 7 das faces das cartas coincidem com o valor da contagem, respectivamente nos montes 1 e 4 e responda:

   (a) Quantas cartas foram descartadas ao realizar a contagem regressiva até haver a coincidência com o número 5 no monte 1?

   (b) Quantas cartas foram descartadas ao realizar a contagem regressiva até haver a coincidência com o número 7 no monte 4?

   (c) Quantas cartas foram descartadas ao todo nos montes 2 e 3, os quais não houve a coincidência entre a e n?

   (d) Quantas cartas ficarão na mão do mágico para serem descartadas até chegar na carta C escolhida pelo aluno?

APÊNDICE M: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 13

Exploração 13: Demonstração utilizando álgebra.

Objetivo: Aplicar o resultado da demonstração afim de obter êxito na exploração.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 13 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 13, conforme explicação realizada pelo professor através de slides, considerando n o número de cartas retiradas do monte principal do baralho pelo aluno no passo 1, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 12$. Segue que o monte restante fica com $52 - n$ cartas.

   (a) Quantas cartas ficam no monte restante se o aluno retirar 9 cartas?

   (b) Quantas cartas ficam no monte restante quando $n = 5$?

2. No passo 2 da Matemágica, o aluno ver e decora a carta localizada na posição n de cima para baixo das cartas que restaram no monte principal, chamada de carta mágica C. Daí no passo 3 ele retira uma quantidade m de cartas, uma a uma, formando um outro pequeno monte acima da mesa com as faces das cartas voltadas para baixo, com $m \in \mathbb{N}$ e $12 < m < 30$. Desse modo, a "carta mágica" C será necessariamente retirada, pois $m > n$. Portanto ao completar a retirada das m cartas e as repor sobre o monte principal, a carta mágica C passará para a posição $(m - n + 1)$ do monte de cima pra baixo, conforme visto na demonstração. Sendo a carta C localizada na posição 8, responda:

   (a) Quantas cartas n o aluno retirou do monte no passo 1? Qual o total de cartas restante do monte principal?

   (b) Qual será a nova posição da carta C ao retirar 15 cartas das que restaram no monte principal?

   (c) Quando $m = 21$. Qual será a nova posição da carta C?

3. No passo 4 quando o aluno repuser as n cartas que estavam na mão dele ao monte principal, a "carta mágica" C passará para posição $(m+1)$ do monte de cima para baixo. Portanto, ao retirar m cartas, referente a quantidade de cartas dita pelo aluno no passo 3, segue que a primeira carta do monte será a "carta mágica"C. Realize os procedimentos da Matemágica quando $n = 6$ e $m = 14$ até encontrar a carta mágica C, completando a tabela(quadro) abaixo.

Quadro 40 – Questão 3 - Exploração 13

Total de cartas n retiradas.	
Total de cartas restantes do Monte Principal.	
Posição da carta C.	
Total de cartas m retiradas	
Nova posição de C após retirada de m cartas e devolvidas invertidas suas posições.	
Nova Posição de C ao repor n cartas	
Nova posição de C ao retirar m cartas	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

APÊNDICE N: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 14

Exploração 14: Demonstração utilizando álgebra.

Objetivo: Aplicar o resultado da demonstração afim de obter êxito na exploração.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 14 para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 14, conforme explicação realizada pelo professor, o baralho vem preparado dentro da caixa com os 4 ases no topo do baralho. Vamos enumerar os montes feitos pelo aluno de 1 até 4, sendo o monte 4, aquele onde estão localizados os quatro ases.

   (a) Ao distribuir as cartas do monte 1, conforme o passo 2, como ficará a configuração das 5 primeiras cartas no topo do monte 4?

   (b) Ao distribuir as cartas do monte 2, conforme o passo 3, como ficará a configuração das 6 primeiras cartas no topo do monte 4?

   (c) Ao distribuir as cartas do monte 3, conforme o passo 3, como ficará a configuração das 7 primeiras cartas no topo do monte 4?

   (d) Ao distribuir as cartas do monte 4, conforme o passo 4, como ficará a configuração dos 4 ases no topo de cada um dos montes? Justifique.

APÊNDICE O: EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA 15

Exploração 15: Demonstração utilizando álgebra.

Objetivo: Aplicar o resultado da demonstração afim de obter êxito na exploração.

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 15 para responder o que se pede.

Na Matemágica 15, conforme explicação realizada pelo professor, o baralho é dividido em dois montes com 26 cartas cada, o monte 1 e o monte 2. No monte 1 o aluno realiza um corte com uma quantidade de cartas que ficara na mão e no monte 2 ele escolhe e memoriza uma carta C.

1. Seja n o total de cartas que o aluno pegou ao cortar um dos montes no passo 1, com $n \in \mathbb{N}$ e $n < 26$. Logo o total de cartas que restarão no monte 1 é $(26 - n)$ cartas. Seja o total de cartas $m \in \mathbb{N}$ que restaram no monte 2, com $m < n$, então $m + n = 26$, isto é: $n = 26 - m$. Responda:

   (a) Quantas cartas restará no monte 1 se o aluno ficar com 16 cartas?

   (b) Quantas cartas restará no monte 1 se $n = 8$ cartas.

   (c) Quantas cartas o aluno ficou na mão se restarem 19 cartas no monte 1 após o corte?

   (d) Quantas cartas o aluno ficou na mão se $m = 23$?

2. Ao colocar a carta C escolhida acima do monte 1 e logo após colocar o monte 2 acima do monte 1, a carta C ficará na posição 26 do monte formado. Logo após, ao realizar o baralhamento conforme descrito nos passos 3 e 4, pela demonstração realizada pelo professor, obtemos que a carta C ficará na posição $26 - m$, e como $n = 26 - m$, então basta o mágico realizar a contagem referente as n cartas na mão do aluno e finalizar a Matemágica encontrando a carta C. Complete a tabela(quadro) abaixo utilizando os procedimentos da Matemágica quando $n = 14$.

Quadro 41 – Questão 2 - Exploração 15

Total de cartas que ficam na mão do aluno.	
Total de cartas restantes no monte 1.	
Total de cartas no monte 2.	
Posição da carta C ao colocar o monte 2 sobre o monte 1.	
Posição da carta C após realizar o baralhamento.	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

APÊNDICE P: PRÉ-TESTE 1/PÓS-TESTE 1

Pré-Teste 1/Pós-teste 1

ECI. E. E. F. M. Dom Adauto

Professor: Francinaldo Domingos Pereira — Disciplina: Matemática

Aluno: ____

Questões:

1. Segundo o algoritmo divisão, sejam a e d inteiros, com $d \neq 0$, onde a é o dividendo e d o divisor na divisão de a por d. Existem únicos q e r, também inteiros, tais que:

$$a = d \cdot q + r, \text{ onde: } 0 \leq r < |d|$$

Tais inteiros q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por d. Vamos considerar nas questões abaixo que a, d, q, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ com $d \neq 0$, portanto:

$$a = d \cdot q + r, \text{ onde: } 0 \leq r < d$$

Com isto, responda:

(a) Numa divisão o divisor é 4 e o dividendo é 359. Quais os valores do resto r e quociente q desta divisão?

(b) Determine o dividendo da divisão onde 4, 12 e 2 são respectivamente o divisor, o quociente e o resto da divisão.

(c) Nas divisões de 169 e 362 por 4 obtemos, respectivamente, restos 1 e 2. Qual é o resto da divisão de 169 + 362 por 4?

(d) Qual o menor número natural que devemos subtrair de 607 para obter um número divisível por 4?

(e) Qual o menor número natural que devemos adicionar a 597 para obter um número divisível por 4?

(f) O resto da divisão de um inteiro n por 12 é igual a 7. Determine o resto da divisão de n por 4.(Dica: Observe que $12 = 4 \cdot 3$)

APÊNDICE Q: PRÉ-TESTE 2/PÓS-TESTE 2

Pré-Teste 2/Pós-teste 2

ECI. E. E. F. M. Dom Adauto

Professor: Francinaldo Domingos Pereira Disciplina: Matemática

Aluno: ____

Questões:

1. A soma de dois números naturais ímpares é um número par.

   Demonstração: Sejam m e n naturais ímpares. Assim, existem k e q naturais tais que $m = 2k + 1$ e $n = 2q + 1$.

   Daí, temos:

   $$m + n = (2k + 1) + (2q + 1) = 2k + 2q + 2 = 2(k + q + 1)$$

   Logo, $m + n$ é par.

   (a) Verifique a demonstração acima para o caso particular da soma entre os números naturais 129 e 783.

   (b) Qual o valor de n, quando $m = 29$, sabendo que a soma entre m e n resulta em 42?

   (c) Qual o valor de m, quando $n = 33$, sabendo que a soma entre m e n resulta em 98?

2. Seja n um número natural. $3n + 2$ é ímpar se, e somente se, n é ímpar.

   Demonstração:

   $(\Rightarrow)$ Primeiro assumimos que n é par (a negação que n é ímpar), ou seja, $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Agora basta verificar que $3n + 2$ também é par. De fato:

   $$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$$

Portanto $3n + 2$ é ímpar quando n for ímpar.

($\Leftarrow$) Por outro lado se n é ímpar, então $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Daí obtemos que:

$$3n + 2 = 3(2k + 1) + 2 = 6k + 3 + 2 = 6k + 5 = 2(3k + 2) + 1 = 2q + 1, q \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow 3n + 2 \text{ é ímpar}$$

Portanto n é ímpar sempre que $3n + 2$ for ímpar.

Assim concluímos que $3n + 2$ é ímpar se, e somente se, n é ímpar.

(a) Verifique para quais valores de n, 3n + 2 é ímpar.

i. n = 7

ii. n = 6

(b) Verifique e justifique sem resolver para quais valores de n, $3n + 2$ é ímpar.

i. $n = 358$

ii. n = 763

(c) Determine o valor de n nas equações abaixo e depois justifique o motivo de um dos resultados ser Par e o outro resultado ser ímpar.

i. 3n + 2 = 785

ii. 3n + 2 = 482

APÊNDICE R: SITUAÇÕES-PROBLEMAS I

ECI. E. E. F. M. Dom Adauto

Professor: Francinaldo Domingos Pereira Disciplina: Matemática

Aluno: ____

Situações-Problemas sobre o critério de divisibilidade por 9.

Utilizando o critério de divisibilidade por 9 e os resultados obtidos nos slides apresentados pelo professor, responda:

1. (www.exercicios.indaguei.com) O professor de Matemática perguntou a Karina se o número 1241703 é divisível por 9. Sem efetuar a divisão, ela respondeu que sim. A resposta de Karina está certa ou errada? Justifique sua resposta?

2. **(EsPCEx)**. No número 34n27, qual é o algarismo que substitui n para que ele seja divisível por 9?

3. Dado um número $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n = 9 \cdot 654 + 5$$

   Qual o valor do resto de S quando dividido por 9, sendo S a soma dos algarismos de n?

4. Qual dos números abaixo deixa resto igual a 6, ao ser dividido por 9? Justifique a sua resposta.

   (a) 731 (b) 321 (c) 453 (d) 274 (e) 634

APÊNDICE S: SITUAÇÕES-PROBLEMAS II

ECI. E. E. F. M. Dom Adauto

Professor: Francinaldo Domingos Pereira Disciplina: Matemática

Aluno: ____

Situações-problemas sobre o critério de divisibilidade por 3.

Utilizando o critério de divisibilidade por 3 e os resultados obtidos nos slides apresentados pelo professor, responda:

1. Numa divisão o divisor é 3 e o dividendo é 359. Quais os valores do resto r e quociente q desta divisão? Qual a forma euclidiana do número 359 na divisão por 3?

2. (PM SE – IBFC). Um número é composto por 3 algarismos sendo que o algarismo da centena é o 7 e o da unidade é o 4. A soma dos possíveis algarismos da dezena desse número de modo que ele seja divisível por 3 é:

   (a) 15 (b) 18 (c) 12 (d) 9

3. A diferença entre o cubo de um número natural n e o número n é divisível por 3, isto é:

$$n^3 - n = 3k, \text{ com } n, k \in \mathbb{N}$$

   (a) Qual o valor de k quando $n = 5$?

   (b) Determine a forma euclidiana do valor encontrado para $n = 5$.

4. O número 9487 deixa resto 1 na divisão por 9. Qual o resto de 9487 na divisão por 3? (Dica: $9487 = 9 \cdot 1054 + 1$ e $9 = 3 \cdot 3$)

APÊNDICE T: SITUAÇÕES-PROBLEMAS III

ECI. E. E. F. M. Dom Adauto

Professor: Francinaldo Domingos Pereira   Disciplina: Matemática
Aluno: ____

Situações-problemas sobre o critério de divisibilidade por 2.

- **Critério de divisibilidade por 2**: Um número Natural N é divisível por 2 quando N for par, isto é, quando o algarismo das unidades do número N for 0, 2, 4, 6 ou 8.

Utilizando o critério de divisibilidade por 2 e os resultados obtidos no decorrer das explorações matemáticas 6 e 7 sobre o algoritmo da divisão por 2, responda:

1. O professor de Matemática perguntou a Lívia se o número 7491573 é divisível por 2. Sem efetuar a divisão, ela respondeu que sim. A resposta de Lívia está certa ou errada? Justifique sua resposta?

2. No número $3427n$, quais os algarismos que substituem n para que ele seja divisível por 2?

3. Dados os números $m, n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$m = 2 \cdot 361 + 1$$

e

$$n = 2 \cdot 345 + 1$$

Seja $S = m + n$, qual o resto da divisão de S por 2?

4. Seja S a soma de um número natural impar com um número natural par. Qual o resto da divisão de S por 2?