Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Luciano Rodrigues Coelho

Sobre Funções Felizes e seus Pontos Fixos

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Doutor Marcelo Oliveira Veloso - UFSJ (Orientador)

Profa. Doutor Anderson Luiz Pedrosa Porto - UFVJM

Prof. Doutor José Alves Oliveira - UFLA

Prof. Doutor Jackson Itikawa - UFSJ

Ouro Branco - MG
Agosto de 2024

Sobre Funções Felizes e seus Pontos Fixos

Luciano Rodrigues Coelho [1]
Marcelo Oliveira Veloso [2]
Gilcélia Regiane de Souza [3]

Resumo: Este trabalho tem como objetivo principal explorar os pontos fixos da função felicidade em qualquer sistema de numeração posicional. Apresentamos diversos resultados e propriedades associados aos números felizes e aos pontos fixos da função (e, b)-feliz. Em especial, introduzimos métodos para identificá-los por meio da resolução de equações diofantinas, utilizando recursos computacionais. No caso do expoente dois, utilizamos uma fórmula para o cálculo do número de pontos fixos, resultado de Alan Beardon, para exibir exemplos e um resultado que relaciona o número de pontos fixos com os números de Mersenne. Além disso, propomos uma atividade prática para sala de aula, integrando programação computacional, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos alunos de maneira interdisciplinar.

Palavras-chave: Sequências de inteiros; Números Felizes; Pontos fixos; Números de Mersenne.

Abstract: This work primarily aims to explore the fixed points of the happiness function in any positional numbering system. We present various results and properties associated with happy numbers and the fixed points of the (e, b)-happy function. In particular, we introduce methods to identify them by solving Diophantine equations, using computational resources. In the case of exponent two, we use a formula for calculating the number of fixed points, a result by Alan Beardon, to exhibit examples and a result that relates the number of fixed points with Mersenne numbers. Additionally, we propose a practical classroom activity, integrating computer programming, to enrich students' learning in an interdisciplinary manner.

Keywords: Integer sequences; Happy numbers; Fixed points; Mersenne numbers.

1 Introdução

Os números felizes são um ponto de encontro na matemática. Seu estudo combina elementos de teoria dos números, sistemas dinâmicos discretos, computação, entre outras áreas. É um tema atual

[1] Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2022, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP), lucrcoelho@gmail.com
[2] Professor Orientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, veloso@ufsj.edu.br
[3] Professora Coorientadora, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, gilcelia@ufsj.edu.br

e relevante, que tem sido abordado por diversos autores ((BEARDON, 1998; MATA; VELOSO, 2023)).

Considere o seguinte algoritmo: dado um número inteiro, calcule a soma dos quadrados de seus dígitos. Repita essa etapa com o número obtido, e continue o processo de forma iterativa. Se, ao final da execução do algoritmo, obtivermos o número 1, dizemos que o número inteiro inicial é um número feliz. Observe que o 49 é feliz

$$49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1.$$

Se, nesse procedimento, nunca obtemos o número 1, dizemos que o número inicial não é feliz e será chamado de triste. Observe que 38 é triste:

$$38 \to 73 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58.$$

O presente trabalho explora os pontos fixos da função felicidade em qualquer base posicional. Em especial, abordamos algumas técnicas para encontrar esses pontos fixos, resolvendo equações diofantinas com o auxílio de um programa computacional. Também exploramos um resultado de Alan Beardon (Teorema 3.1, (BEARDON, 1998)), para determinar o número de pontos fixos da função feliz $F_{2,b}$, obtendo exemplos e um resultado bem interessante que relaciona o número de pontos fixos da função feliz $F_{2,b}$ com os números de Mersenne.

Por fim, propomos uma aplicação em sala de aula, destinada aos alunos do Ensino Médio, onde será possível trabalhar não somente o conceito dos números felizes, mas também vários outros conceitos que permeiam tal assunto, tais como conjuntos numéricos, funções, potenciação, programação básica, entre outros.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: a Seção 2 apresenta os conceitos básicos para conversão entre bases numéricas. Na Seção 3, introduzimos a função (e, b)-Feliz, os números (e, b)-felizes e os (e, b)-tristes, além de descrever um método para determiná-los. Na Seção 4, estudamos os pontos fixos da (e, b)-função feliz e apresentamos métodos para encontrá-los. A Seção 5 apresenta um método para encontrar o número de pontos fixos em uma determinada base maior ou igual a 2. Na Seção 6, propomos uma aplicação dos números felizes em sala de aula. As considerações finais são apresentadas na Seção 7.

2 Representação posicional

O sistema de numeração posicional é um método de representação de números no qual o valor de um dígito depende tanto do próprio dígito quanto de sua posição dentro do número. Este sistema é fundamental para a aritmética e a computação moderna.

Esse sistema é definido por sua base, que é o número total de dígitos distintos que ele usa, incluindo o zero. Por exemplo, o sistema decimal tem base 10 e usa os dígitos de 0 a 9, enquanto o sistema binário tem base 2 e usa os dígitos 0 e 1.

Cada posição em um número possui um peso que é uma potência da base. O valor de um número é a soma dos valores de seus dígitos multiplicados pelos pesos correspondentes de suas posições.

Usamos constantemente o sistema decimal para representar números. Nesse sistema, como mencionado anteriormente, são utilizados os dígitos de 0 a 9, e cada posição tem um peso que é uma potência de 10. O Teorema 2.3 demonstra que existem infinitas maneiras de representar um determinado número. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1. *No sistema decimal, o número 4258 pode ser representado como:*

$$4258 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

No sistema binário, o número 13, representado no sistema decimal, é representado por $[1101]_2$*. Observe que*

$$[1101]_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 13.$$

$\diamondsuit$

Os sistemas de numeração posicional facilitam a manipulação e o entendimento dos números, sendo essenciais para diversas áreas da matemática e da ciência da computação.

Na demonstração do Teorema 2.3, é essencial o uso do Lema de Euclides, também conhecido como divisão euclidiana.

Lema 2.2 (Divisão Euclidiana)**.** *Para quaisquer inteiros positivos a e b existem números inteiros q e r, únicos, tais que:*

$$b = q \cdot a + r, \ \text{com } 0 \leq r \leq a - 1.$$

Demonstração. Veja, em detalhes, em (MARTINS, 2015). $\square$

Teorema 2.3. *Para qualquer número inteiro não negativo N e qualquer base inteira b, tal que $b > 1$, existe uma representação única na forma polinomial*

$$N = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0,$$

onde $n \geq 0$, $0 \leq a_i \leq b - 1$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, com $a_n \neq 0$.

Demonstração. Veja em (RODRIGUES, 2021). $\square$

É usual denotar a forma polinomial

$$a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0$$

por $[a_n \ldots a_1 a_0]$.

Em virtude do Teorema 2.3, temos um algoritmo para a representação de qualquer número em qualquer base b. Caso queira entender esse algoritmo mais detalhadamente, leia a seção 2 em (ROCHA, 2019). A seguir descrevemos, com exemplos, como representar um número em determinada base.

Exemplo 2.4. *Vamos representar o número 58 na base 5. Para isso, faremos uma divisão euclidiana de 58 por 5. Após essa primeira divisão, faremos sucessivas divisões euclidianas entre o quociente anterior e a base 5, até encontrarmos um quociente menor que a base. Observe:*

$$58 = 5 \cdot 11 + 3 \quad (i)$$

$$11 = 5 \cdot 2 + 1 \quad (ii)$$

Agora, ao substituirmos (i) em (ii), obtemos

$$58 = 5 \cdot (5 \cdot 2 + 1) + 3.$$

Escrevendo na forma polinomial, temos:

$$58 = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3.$$

Portanto, temos que $58 = [213]_5$. ♢

Uma vez que compreendemos o modelo formal para converter números para outras bases, podemos aplicá-lo de uma maneira mais prática. Para isso, fazemos sucessivas divisões pelo valor da base e pegamos o último quociente juntamente com os restos, começando do último até o primeiro. Observe a Figura 1. Nela, temos que $N = [q_n r_n r_{n-1} \dots r_3 r_2 r_1]_b$

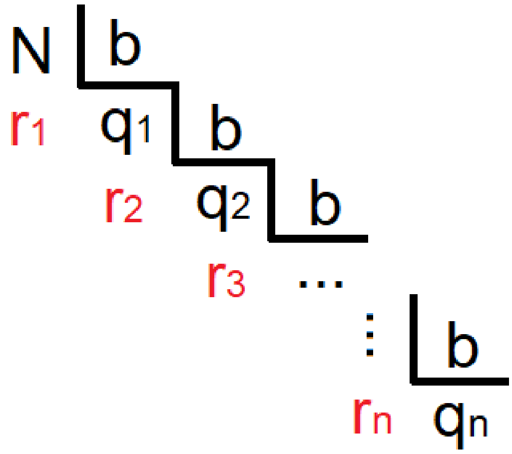
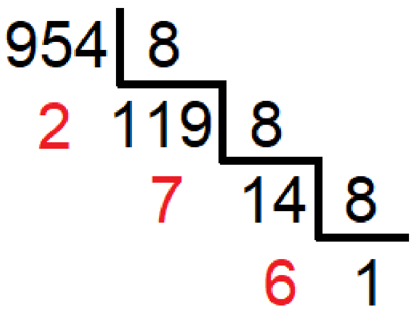


Figura 1 – Método prático para mudança de base.

Exemplo 2.5. *Usando o método prático, vamos representar o número* 954 *na base* 8.



Assim, temos que $954 = [1672]_8$. ♢

3 Números Felizes

Agora estamos em condições de definir a função feliz e o número feliz em qualquer base posicional e expoente. Dados os inteiros $e \geq 1$ e $b \geq 2$, seja x um número inteiro positivo cuja representação na base b é dada por

$$x = [a_r a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_0]_b = \sum_{i=0}^{r} a_i b^i.$$

A função (e, b)-feliz é definida por

$$\begin{aligned} F_{e,b} : \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ x &\longmapsto \sum_{i=0}^{r} a_i^e \end{aligned}$$

Ou seja,

$$F_{e,b}(x) = F_{e,b}(\sum_{i=0}^{r} a_i b^i) = \sum_{i=0}^{r} a_i^e$$

É usual denotar a função $F_{2,10}$ por F. Assim, quando a base e o expoente não são declarados, subentende-se que seu valor $e = 2$ e $b = 10$.

Dizemos que um número inteiro positivo m é $(e,\, b)$-feliz quando, para algum inteiro l, temos que $F_{e,b}^k(m) = 1$. Caso contrário, ele é dito $(e,\, b)$-triste. É imediato que o número 1 é $(e,\, b)$-feliz para qualquer expoente e qualquer base.

Exemplo 3.1. *O número 193 é* $(2,\, 10)$*-feliz na base 10, pois*

$$\begin{aligned} F(193) &= 1^2 + 9^2 + 3^2 = 1 + 81 + 9 = 91 \\ F^2(193) = F(F(193)) = F(91) &= 9^2 + 1^2 = 81 + 1 = 82 \\ F^3(193) = F(F^2(193)) = F(82) &= 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68 \\ F^4(193) = F(F^3(193)) = F(68) &= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \\ F^5(193) = F(F^4(193)) = F(100) &= 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Exemplo 3.2. *Iterando a função* $F_{2,\,10}$ *no número 154, obtemos*

$$F(154) = 42,\; F^2(154) = 20, \dots, F^8(154) = 145,\; F^9(154) = 42.$$

Agora observe que

$$F^k(154) \in \{4,\, 16,\, 37,\, 58,\, 89,\, 145,\, 42,\, 20\}$$

para todo $k \geq 1$. *Logo* $F^k(154) \neq 1$, *para todo* $k \geq 1$. *Ou seja, 154 é um número* $(2,\, 10)$*-triste.* $\diamondsuit$

Exemplo 3.3. *O número 127 é feliz na base 9, pois*

$$\begin{aligned} F_{2,9}(127) &= F_{2,9}([151]_9) = 1^2 + 5^2 + 1^2 = 27 \\ F_{2,9}^2(127) = F_{2,9}(27) &= F_{2,9}([30]_9) = 3^2 + 0^2 = 9 \\ F_{2,9}^3(127) = F_{2,9}(9) &= F_{2,9}([10]_9) = 1^2 + 0^2 = 1 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Teorema 3.4. *Na base 2 todo número é* $(e,\,2)$*-feliz.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Note que

$$F(1)=1,\quad F_{e,2}(2)=F_{e,2}([10]_2)=1^e+0^e=1,$$

$$F_{e,2}(3)=F_{e,2}([11]_2)=1^e+1^e=2 \text{ e } F^2_{e,2}(3)=F_{e,2}(F_{e,2}(3))=F_{e,2}(2)=1.$$

Logo os inteiros 1, 2 e 3 são números $(e,\,2)$-felizes. Seja $n>3$. Vamos supor, por hipótese de indução, que todo inteiro menor que n é um número $(e,\,2)$-feliz. Seja $n=a_ra_{r-1}\dots a_1a_0$ a representação posicional de n, na base 2. Por suposição $r\geq 2$, $a_r=1$ e $a_i\in\{0,1\}$, para todo $0\leq i\leq r-1$. Visto que $a_i^e=a_i$, obtemos que

$$\begin{aligned} F_{e,2}(n) =& a_r^e+a_{r-1}^e+\cdots+a_1^e+a_0^e\\ =&1+a_{r-1}+\cdots+a_1+a_0\\ \leq&1+r\\ <&2^r\\ \leq&2^r+a_{r-1}2^{r-1}+\cdots+a_12+a_0\\ =&n. \end{aligned}$$

Verificando que $F_{e,2}(n)<n$. Segue, por hipótese de indução, que $F_{e,2}(n)$ é um número $(e,\,2)$-feliz. Logo existe k tal que

$$F^k_{e,2}(F_{e,2}(n))=1.$$

Ou seja,

$$F^{k+1}_{e,2}(n)=F^k_{e,2}(F(n))=1.$$

Mostrando que n é um número $(e,\,2)$-feliz. Portanto, todo número é $(e,\,2)$-feliz. □

Se em determinada base posicional, b, todo número é $(e,\,b)$-feliz é usual chamar essa base posicional por **base** $(e,\,2)$**-feliz**. O resultado anterior mostra que a base 2 é uma base $(e,\,2)$-feliz.

O seguinte resultado mostra que, ao aplicarmos as iteradas da função $(e,\,b)$-feliz a um inteiro m e encontrarmos um número $(e,\,b)$-feliz (ou triste), $F^r_{e,\,b}(m)$, nesse processo, todos os números da sequência

$$m\,F_{e,\,b}(m),\;F^2_{e,\,b}(m),\dots,F^k_{e,\,b}(m)$$

também são $(e,\,b)$-felizes (ou tristes).

Teorema 3.5. *Seja m um inteiro positivo.*

1. *Se m é $(e,\,b)$-feliz e $F^k_{e,\,b}(n)=m$, para algum $k\in\mathbb{N}$, então n é $(e,\,b)$-feliz.*

2. *Se m é $(e,\,b)$-triste e $F^k_{e,\,b}(n)=m$, para algum $k\in\mathbb{N}$, então n é $(e,\,b)$-triste.*

Demonstração.

1. Seja m um número $(e,\,b)$-feliz. Então existe $r\in\mathbb{N}$ tal que $F^r_{e,\,b}(m)=1$. Assim

$$F^{r+k}_{e,\,b}(n)=F^r_{e,\,b}(F^k_{e,\,b}(n))=F^r_{e,\,b}(m)=1.$$

Portanto, m é um número $(e,\,b)$-feliz.

2. Se m é $(e,\, b)$-triste, então $m \neq 1$ e $F^r_{e,\,b}(m) \neq 1$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Visto que $F^k_{e,\,b}(n) = m$ e m é $(e,\, b)$-triste temos que $F^l_{e,\,b}(n) \neq 1$ para $0 \leq l \leq k$. Isto implica que

$$F^{r+k}_{e,\,b}(n) = F^r_{e,\,b}(F^k_{e,\,b}(n)) = F^r_{e,\,b}(m) \neq 1,$$

para todo $r \in \mathbb{N}$. Logo $F^r_{e,\,b}(n) \neq 1$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Portanto, n é um número $(e,\, b)$-triste.

□

Teorema 3.6. *Seja m e $b \geq 2$ números inteiros. Então $F_{e,b}(m) < m$, para todo $m \geq b^{e+1}$.*

Demonstração. Seja $m = [a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0]_b$ a representação posicional de m na base $b \geq 2$. Visto que $m \geq b^{e+1}$ temos que $r \geq e+1$ e $a_r \neq 0$. Logo m possui, pelo menos $e+2$ dígitos. Por definição,

$$F_{e,b}(m) = a^e_r + a^e_{r-1} + \cdots + a^e_1 + a^e_0.$$

Agora considere a diferença entre m e $F_{e,b}(m)$:

$$\begin{aligned} m - F_{e,b}(m) &= a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \cdots + a_1 b + a_0 - (a^e_r + a^e_{r-1} + \cdots + a^e_1 + a^e_0) \\ &= (a_r b^r - a^e_r) + (a_{r-1} b^{r-1} - a^e_{r-1}) + \cdots + (a_1 b - a^e_1) + (a_0 - a^e_0) \\ &= a_r(b^r - a^{e-1}_r) + a_{r-1}(b^{r-1} - a^{e-1}_{r-1}) + \cdots + a_e(b^e - a^{e-1}_e) + a_{e-1}(b^{e-1} - a^{e-1}_{e-1}) \\ &+ a_{e-2}(b^{e-2} - a^{e-1}_{e-2}) + a_{e-3}(b^{e-3} - a^{e-1}_{e-3}) + \cdots + a_1(b - a^{e-1}_1) + a_0(1 - a^{e-1}_0). \end{aligned}$$

Faça

$$\alpha = a_r(b^r - a^{e-1}_r) + a_{r-1}(b^{r-1} - a^{e-1}_{r-1}) + \cdots + a_e(b^e - a^{e-1}_e) + a_{e-1}(b^{e-1} - a^{e-1}_{e-1})$$

e

$$\beta = a_{e-2}(b^{e-2} - a^{e-1}_{e-2}) + a_{e-3}(b^{e-3} - a^{e-1}_{e-3}) + \cdots + a_1(b - a^{e-1}_1) + a_0(1 - a^{e-1}_0).$$

Agora observe que $\alpha > 0$, pois $0 \leq a_i < b$ para todo $1 \leq i \leq r-1$ e $a_r \neq 0$. Além disso, o menor para α ocorre quando $r = e+1$, $a_{e+1} = 1$, $a_e = 0$ e $a_{e-1} = 0$. Logo

$$\alpha = b^{e+1} - 1.$$

E o menor valor possível para β ocorre quando $a_i = b-1$ para $i = 0,\, 1,\, 2, \ldots, e-2$. Assim

$$\begin{aligned} \beta &= (b-1)(b^{e-2} - (b-1)^{e-1}) + (b-1)(b^{e-3} - (b-1)^{e-1}) + \cdots + (b-1)(1 - (b-1)^{e-1}) \\ &= (b-1)[(b^{e-2} - (b-1)^{e-1}) + (b^{e-3} - (b-1)^{e-1}) + \cdots + (b - (b-1)^{e-1}) + (1 - (b-1)^{e-1})] \\ &= (b-1)[-(e-1)(b-1)^{e-1} + b^{e-2} + b^{e-3} + \cdots + b + 1] \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} m - F_{e,b}(m) &= \alpha + \beta \\ &= b^{e+1} - 1 + (b-1)[-(e-1)(b-1)^{e-1} + b^{e-2} + b^{e-3} + \cdots + b + 1] \\ &= b^{e+1} - 1 - (e-1)(b-1)^e + (b-1)(b^{e-2} + b^{e-3} + \cdots + b + 1) \\ &= b^{e+1} - 1 - (e-1)(b-1)^e + b^{e-1} - 1 \\ &= b^{e+1} + b^{e-1} - (e-1)(b-1)^e - 2 \\ &> b^{e+1} - (e-1)(b-1)^e \\ &= ((b-1)+1)^{e+1} - (e-1)(b-1)^e \\ &> (b-1)^{e+1} + (e+1)(b-1)^e - (e-1)(b-1)^e \text{ (expansão binomial)} \\ &= (b-1)^{e+1} + 2(b-1)^e \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, $F_{e,b}(m) < m$ quando $m \geq b^{e+1}$. □

Corolário 3.7. *Dado um inteiro positivo m, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$F^k_{e,b}(m) < b^{e+1}.$$

Demonstração. Supondo que $F^k_{e,b}(m) \geq b^{e+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então do Teorema 3.6, temos que

$$m > F_{e,b}(m) > F^2_{e,b}(m) > F^3_{e,b}(m) > \cdots > F^i_{e,b}(m) > \cdots > b^{e+1}$$

é uma sequência infinita de números inteiros, estritamente decrescente e limitada inferiormente. Um absurdo! Donde segue o resultado. □

Agora temos um procedimento para determinar se um número é (e, b)-feliz. Primeiramente, identificamos quais números do conjunto

$$D_{e,b} = \{1, 2, \ldots, b^{e+1} - 1\}.$$

são (e, b)-felizes, utilizando recursos computacionais. Se $m > b^{e+1}$ calculamos as iteradas da função $F_{e,b}$, até obtermos uma k-ésima iterada tal que $F^k_{e,b}(m) \in D_{e,b}$ (Corolário 3.7). Em seguida, verificamos por inspeção se o número $F^k_{e,b}(m)$ é (e, b)-feliz. Se $F^k_{e,b}(m)$ for (e, b)-feliz, então todos os números da sequência

$$m,\ F_{e,b}(m),\ F^2_{e,b}(m), \ldots, F^k_{e,b}(m)$$

também são (e, b)-felizes, de acordo com o Teorema 3.5. Em particular, o inteiro m é (e, b)-feliz.

Exemplo 3.8. *Vejamos como utilizar o método descrito acima para aferir se um número é $(4,\ 3)$-Feliz. Primeiramente, verificamos, usando um programa computacional, quais são os números felizes no conjunto $D_{4,3}$. Ou seja, quais inteiros menores que $3^{4+1} - 1 = 242$ são $(4,\ 3)$-felizes. São eles:*

$$1,\ 3,\ 9,\ 13,\ 27,\ 31,\ 37,\ 39,\ 81,\ 85,\ 91,\ 93,\ 109,\ 111,\ 117.$$

Agora, para saber se um número $m > 242$ é $(4,\ 3)$-feliz, calculamos as iterações da função $F^k_{4,3}(m)$ até obtermos uma k-ésima iteração que satisfaça $F^k_{4,3}(m) \in D_{4,3}$ e verificamos se esse valor é um número $(4, 3)$-feliz, por inspeção. Seja $m = 349$. Calculando as iterações de $F_{4,3}$ sobre 349, obtemos:

$$F^1_{4,3}(349) = F_4([110221]_3) = 35.$$

na primeira iteração. Como 35 é um número triste pertencente ao conjunto $D_{4,3}$, concluímos que 349 também é um número $(4, 3)$-triste, pelo Teorema 3.5.

Agora, calculando as iterações para 485, teríamos os seguintes resultados:

$$F^1_{4,3}(485) = F_4([122222]_3) = 81.$$

Observe que, já na primeira iteração, temos como resultado um número feliz pertencente ao conjunto $D_{4,3}$. Logo, concluímos que 485 também é um número $(4, 3)$-feliz, novamente pelo Teorema 3.5. ♢

Teorema 3.9. *Na base 4, todo número é $(2, 4)$-feliz.*

Demonstração.É uma consequência direta do método descrito, após o Corolário 3.7, para verificar se um número é $(e,\, b)$-feliz. Seja

$$D_{2,4} = \{1,\, 2, \ldots, 63 = 4^{2+1} - 1\}.$$

Agora precisamos determinar quais elementos do conjunto $D_{2,4}$ são felizes. Utilizando um simples programa computacional, verificamos que todos os elementos de $D_{2,4}$ são felizes. O resultado segue pelo Teorema 3.5.

□

Observamos que para certos expoentes existem números $(e, 4)$-tristes. Por exemplo, para $e = 2$, temos que

$$F_{3,4}^k(15) = 9 \text{ para todo } k \geq 3.$$

Portanto, podemos concluir que o número 15 é $(3, 4)$-triste.

4 Pontos Fixos

Nesta seção, abordaremos os pontos fixos da função felicidade $F_{e,b}$. O principal resultado, detalhado no Teorema 4.4, demonstra que podemos encontrar esses pontos fixos resolvendo uma equação diofantina sobre um subconjunto específico dos números inteiros positivos.

Um inteiro positivo n é chamado de **ponto fixo** da função (e, b)-feliz quando

$$F_{e,b}(n) = n.$$

É imediato que 1 é ponto fixo para toda função (e, b)-feliz.

Exemplo 4.1. *O número 273 é ponto fixo da função $(4, 8)$-feliz. De fato,*

$$F_{4,8}(273) = F_{4,8}([421]_8) = 4^4 + 2^4 + 1^4 = 256 + 16 + 1 = 273.$$

♢

Nos seguintes exemplos escrevemos um pequeno programa no *Octave* para exibir os pontos fixos da função $F_{e,b}$.

Exemplo 4.2. *O número 13 é ponto fixo da função $F_{2,5}$. De fato,*

$$F_{2,5}(13) = F_{2,5}([23]_5) = 2^2 + 3^2 = 13.$$

A função $F_{2,5}$ tem mais dois pontos fixos. São eles: 1 e 18. De fato,

$$F_{2,5}(1) = F_{2,5}([1]_5) = 1^2 = 1$$

e

$$F_{2,5}(18) = F_{2,5}([33]_5) = 3^2 + 3^2 = 18.$$

♢

Exemplo 4.3. *Um exemplo de ponto* $(2, 27)$*-fixo é o número 90. Observe que*

$$F_{2,27}(90) = F_{2,27}([39]_{27}) = 3^2 + 9^2 = 90.$$

$\diamondsuit$

Teorema 4.4. *Os pontos fixos da função* $F_{e,\,b}$ *são os números*

$$[a_e a_{e-1} \dots a_1 a_0]_b = a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

que satisfazem

$$a_e^e + a_{e-1}^e + \cdots + a_2^e + a_1^e + a_0^e = a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Demonstração. Segue do Corolário 3.7 que os pontos fixos da função $F_{e,\,b}$ pertencem ao conjunto $\{1, 2, \dots, b^{e+1} - 1\}$. Visto que

$$b^{e+1} - 1 = (b-1)b^e + (b-1)b^{e-1} + \cdots + (b-1)b + (b-1),$$

temos que os possíveis pontos fixos possuem no máximo $e+1$-dígitos na base b. Logo, se m é um ponto fixo, então m é da forma

$$[a_e a_{e-1} \dots a_1 a_0]_b = a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0, \tag{1}$$

onde $0 \leq a_i \leq b-1$, $i = 0, \dots, e$. Como $F_{e,\,b}(m) = F_{e,\,b}([a_e a_{e-1} \dots a_1 a_0]_b) = a_e^e + a_{e-1}^e + \cdots + a_2^e + a_1^e + a_0^e$ e m é ponto fixo, obtemos

$$a_e^e + a_{e-1}^e + \cdots + a_2^e + a_1^e + a_0^e = a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0. \tag{2}$$

Portanto, os pontos fixos da função $F_{e,\,b}$ são da forma 1 e satisfazem 2. $\square$

Exemplo 4.5. *Determinar os pontos fixos da função* $F_{3,5}$ *é equivalente a determinar as soluções da equação:*

$$x^3 + y^3 + z^3 = 25x + 5y + z,$$

onde $0 \leq x, y, z \leq 4$*. Resolvendo a equação, com nosso programa, obtemos as seguintes soluções:* $(0, 0, 1)$*,* $(1, 0, 3)$ *e* $(4, 3, 3)$*. Logo, os três pontos fixos da função* $F_{3,5}$ *são* $1 = [1]_5$*,* $28 = [103]_5$ *e* $118 = [433]_5$*.* $\diamondsuit$

Exemplo 4.6. *Determinando os pontos fixos da função* $F_{6,\,5}$*. Note que, pelo Teorema 4.4, os pontos fixos dessa função são as soluções da seguinte equação:*

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 = 5^5 a + 5^4 b + 5^3 c + 5^2 d + 5e + f.$$

Com auxílio computacional, verificamos que os pontos fixos da função $F_{6,\,5}$ *são* $1 = [1]_5$*,* $4890 = [124030]_5$*,* $4891 = [124031]_5$ *e* $9113 = [242423]_5$*.* $\diamondsuit$

Exemplo 4.7. *Determinando os pontos fixos da função* $F_{8,\,3}$*. Observe que, pelo Teorema 4.4, todos pontos fixos dessa função satisfazem a equação*

$$a^8 + b^8 + c^8 + d^8 + e^8 + f^8 + g^8 + h^8 = 3^7 a + 3^6 b + 3^5 c + 3^4 d + 3^3 e + 3^2 f + 3g + h.$$

Com auxílio computacional, verificamos que os pontos fixos da função $F_{8,\,3}$ *são* $1 = [1]_3$*,* $258 = [100120]_3$ *e* $259 = [100121]_3$*.* $\diamondsuit$

5 Número de Pontos Fixos

O objetivo desta seção é abordar a quantidade de pontos fixos da função $F_{2,b}$. A principal referência é a terceira seção do artigo (BEARDON, 1998). O principal resultado do artigo de Alan Beardon assegura que o número de pontos fixos é igual ao numero de divisores do inteiro $1+b^2$ menos um (veja Teorema 5.3). Nosso trabalho acrescenta exemplos e um resultado interessante que, em certos casos, relaciona o número de pontos fixos com os números de Mersenne.

Em virtude do Teorema 4.4, para determinar os pontos fixos da função $F_{2,b}$, precisamos resolver a equação polinomial

$$x^2+y^2=xb+y. \tag{3}$$

Utilizando recursos computacionais, é necessário verificar os pontos (x,y) onde $0\leq x,\ y\leq b-1$. É possível reduzir o intervalo de variação de y para $1<y<1+\frac{b}{2}$, como mostra o próximo resultado.

Teorema 5.1. *Seja $[xy]_b$ é um ponto fixo na base $b\geq 2$. Se $x\neq 0$, então $1<y<1+\frac{b}{2}$.*

Demonstração. Veja o Teorema 3.5 do artigo (MATA; VELOSO, 2023). □

Contudo, queremos contar o número de pontos fixos Com esse objetivo, completando quadrados, podemos reescrever a equação 3 da seguinte forma

$$(2y-1)^2+(2x-b)^2=1+b^2. \tag{4}$$

Assim, para determinar quantos são os pontos fixos da função $F_{2,b}$, precisamos encontrar todas as maneiras de expressar $1+b^2$ como uma soma de dois quadrados. De forma mais precisa, o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é igual à cardinalidade do conjunto

$$P=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid 0\leq x,\ y\leq b-1 \text{ e } x^2+y^2=b^2+1\}.$$

Desse modo, o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é igual ao número de modos distinto que podemos expressar b^2-1 como soma de dois quadrados. E isso é um resultado bem conhecido na literatura, por exemplo o livro *A*n Introduction To The Theory Of Numbers, (HARDY; WRIGHT, 1960).

Antes do resultado principal, da seção, precisamos da seguinte notação: Dado um inteiro positivo vamos denotar por $d(n)$ o número de seus divisores naturais. É fácil ver que a quantidade de divisores de um número natural n é o produto dos sucessivos de todos os expoentes de seus fatores primos da sua decomposição fatorial. Sugerimos ao leitor, interessado no assunto, que consulte o capítulo 4 do livro de (LACERDA, 2014).

Exemplo 5.2. *Se quisermos encontrar o número de divisores naturais de 360, por exemplo, primeiramente temos que decompor o 360 em fatores primos, $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1$ e depois somar uma unidade ao expoente de cada fator e fazemos o produto desses valores. Assim, $d(360)=(3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=24$. Portanto, o número de divisores naturais de 360 é 24.* ♢

Agora estamos em condições de enunciar o resultado principal da seção.

Teorema 5.3 (Teorema 3.1, (BEARDON, 1998))**.** *O número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é igual a $d(1+b^2)-1$.*

Vamos denotar o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ por $fix(b)$. Logo,

$$fix(b) = d(1+b^2) - 1$$

Exemplo 5.4. *Determinando o número de pontos fixos na base 5, temos:*

$$fix(5) = d(1+5^2) - 1 = d(26) - 1 = 4 - 1 = 3$$

Logo, na base 5 existem exatamente 3 pontos fixos. É possível determinar esses pontos fixos resolvendo a equação diofantina

$$x^2 + y^2 = 5x + y,$$

onde $0 \leq x,\ y \leq 4$. *Utilizando nosso programa, obtemos as seguintes soluções:* $(0,1)$, $(2,3)$ *e* $(3,3)$. *Logo, os três pontos fixos da função* $F_{3,5}$ *são* $1 = [1]_5$, $13 = [23]_5$ *e* $18 = [33]_5$. ♢

Exemplo 5.5. *Neste exemplo vamos encontrar todos os pontos fixos da função* $F_{2,7}$. *Para isso, iremos resolver a equação abaixo.*

$$x^2 + y^2 = 7x + y,$$

Resolvendo, também de maneira computacional, encontramos as seguintes soluções: $(0,1)$, $(3,4)$, $(4,4)$ *e* $(6,3)$.

Temos, portanto, que os cinco pontos fixos da função $F_{2,7}$ *são:* $1 = [1]_7$, $10 = [13]_7$, $25 = [34]_7$, $32 = [44]_7$ *e* $45 = [63]_7$. ♢

O próximo resultado permite obtermos diversas consequências interessantes do Teorema 5.3.

Lema 5.6 (Lebesgue, 1850)**.** *Seja* m *um inteiro maior que 1. Então não existe inteiros positivos tais que*

$$1 + y^2 = x^m.$$

Corolário 5.7 (Corolário 3.2, (BEARDON, 1998))**.** *A função* $F_{2,b}$ *tem um único ponto fixo se, e somente se,* $1 + b^2$ *é um número primo.*

Demonstração. Observe que um inteiro maior que 1 tem dois divisores se, e somente se, for um número primo. Logo $1 + b^2$ é um número primo, se e somente se, tem dois divisores. Segue do Teorema 5.3, que o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é dado por:

$$fix(b) = d(1+b^2) - 1.$$

Visto que$d(1+b^2) = 2$, obtemos

$$fix(b) = 2 - 1 = 1.$$

Verificando o resultado. □

Exemplo 5.8. *Não existe nenhuma base tal que* $F_{2,b}$ *tenha 8 pontos fixos. Para que* $fix(b) = 8$, *ou seja, para que tenhamos 8 pontos fixos distintos,* $1 + b^2 = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ *deve ter 9 divisores naturais, ou seja,* $(1+\beta_1)\cdot(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n) - 1 = 8$. *Logo,* $(1+\beta_1)\cdot(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n) = 9$ *e isso ocorre se, e somente se,* $n = 1$ *e* $\beta_1 = 8$ *ou* $n = 2$, $\beta_1 = 2$ *e* $\beta_2 = 2$.

Para o primeiro caso, teremos $1+b^2 = p^8$ e essa possibilidade não é válida, pois se $1+b^2 = p^8$, então $p^8 - b^2 = 1$. Logo, $(p^4+b)\cdot(p^4-b) = 1$ e, como p e b são naturais, a única possibilidade que temos é que $p^4+b = 1$ e $p^4-b = 1$. Isso implica que $p = 1$ e $b = 0$, o que é impossível, pois p é primo e $b \geq 2$ ou $p = 0$ e $b = 1$, que também é impossível pelo mesmo fato.

Para o segundo caso, teremos $1+b^2 = p^2 \cdot q^2 = (pq)^2$ e, de maneira análoga ao primeiro caso, essa possibilidade também não é válida, pois se $1+b^2 = (pq)^2$, então $(pq)^2 - b^2 = 1$. Logo, $(pq+b)\cdot(pq-b) = 1$ e, como p e b são naturais, a única possibilidade que temos é que $pq+b = 1$ e $pq-b = 1$. Isso implica que $pq = 1$ e $b = 0$, o que é impossível, pois p e q são primos e $b \geq 2$ ou $pq = 0$ ou e $b = 1$, que também é impossível pelo mesmo fato.

Portanto, em nenhuma base haverá 8 pontos fixos distintos. ♢

Corolário 5.9 (Teorema 3.5, (BEARDON, 1998))**.** *Seja $b \geq 2$. Então a função $F_{2,b}$*

1. *tem 3 pontos fixos se, e somente se, $1+b^2 = pq$, onde p e q são primos distintos.*
2. *tem 5 pontos fixos se, e somente se, $1+b^2 = pq^2$ onde p e q são primos distintos.*
3. *tem 7 pontos fixos se, e somente se, $1+b^2 = pq^3$ ou $1+b^2 = pqr$ onde p e q são primos distintos.*
4. *tem 9 pontos fixos se, e somente se, $1+b^2 = pq^4$ onde p e r são primos distintos.*

Demonstração. Decompondo $1+b^2$ em fatores primos, temos

$$1+b^2 = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n},$$

onde os primos p_i satisfazem $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ e $\beta_j \geq 1$ para cada j. Assim, baseado no Teorema 5.3, podemos afirmar que

$$fix(b) = (1+\beta_1)\cdot(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n) - 1.$$

Portanto, temos que $fix(b) = 9$ se, e somente se,

$$(1+\beta_1)\cdot(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n) = 10.$$

Isso só é possível se $n = 1$ e $\beta_1 = 9$ ou $n = 2$, $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 4$. No que a primeira possibilidade implica $1+b^2 = p^9$, contrariando o Lema 5.6. Portanto, a única possibilidade para $fix(b) = 9$ é $1+b^2 = pq^4$.

Os itens 1, 2 e 3 podem ser verificados de maneira análoga ao item 4. □

Exemplo 5.10. *Seja $b = 38$, então $1+b^2 = 1+38^2 = 1445 = 5\cdot 17^2$ e temos 5 pontos. Coerente com o caso 2 do Corolário 5.9. Usando um programa computacional podemos encontrar esses cinco pontos fixos. São eles*

$$1 = [1]_{38}, \quad 85 = [29]_{38}, \quad 320 = [8G]_{38} \quad , 1156 = [UG]_{38}, \text{ e } 1377 = [a9]_{38},$$

onde $G = 16$, $K = 20$, $U = 30$ e $a = 36$. ♢

Corolário 5.11. *Não existe base, $b \geq 2$, tal que a função $F_{2,b}$ tenha 2 pontos fixos.*

Demonstração. Para que $fix(b) = 2$, ou seja, para que tenhamos somente dois pontos fixos, $1 + b^2 = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ deve ter 3 divisores naturais, ou seja, $(1 + \beta_1) \cdot (1 + \beta_2) \cdots (1 + \beta_n) - 1 = 2$. Logo, $(1 + \beta_1) \cdot (1 + \beta_2) \cdots (1 + \beta_n) = 3$ e isso ocorre se, e somente se, $n = 1$ e $\beta_1 = 2$. Para essa única possibilidade, teremos $1 + b^2 = p^2$ e essa possibilidade não é válida, Lema 5.6.

□

O próximo resultado relaciona o número de pontos fixos, em certas bases, com os números de Mersenne. Um número inteiro positivo é dito um número de Mersenne se é da forma $2^n - 1$. Existe uma grande variedade de questões relacionadas aos números de Mersenne na literatura, o que torna o resultado interessante. Os n-primeiros termos da sequência dos números de Mersenne são:

$$M_n = \{0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1.023, 2.047, 4.095, 8.191, 16.383, 32.767, \ldots, 2^n - 1\}.$$

Teorema 5.12. *Seja $b \geq 2$ e $1 + b^2 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$. Então o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é um número de Mersenne se, e somente se, cada β_i é um número de Mersenne.*

Demonstração. Suponha que o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é um número de Mersenne, $fix(b) = 2^n - 1$. Seja $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ a decomposição de $1 + b^2$ em fatores primos. Segue do Teorema 5.3 que

$$2^n - 1 = fix(b) = d(1 + b^2) - 1 = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1) - 1$$

Ou seja,

$$2^n = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1).$$

Isso implica que $\beta_i + 1 = 2^{r_i}$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Portanto, cada $\beta_i = 2^{r_i} - 1$ é um número de Mersenne.

Agora suponha que

$$1 + b^2 = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_k},$$

onde $\beta_i = 2^{r_i} - 1$ é um número de Mersenne, para $i = 1, \ldots k$. Segue do Teorema 5.3 que

$$(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1) - 1$$

é o número de pontos fixos de $F_{2,b}$. Então

$$\begin{aligned}(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1) - 1 =& (2^{r_1} - 1 + 1)(2^{r_2} - 1 + 1) \ldots (2^{r_k} - 1 + 1) - 1 \\ =& 2^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdots 2^{r_k} - 1 \\ =& 2^R - 1,\end{aligned}$$

onde $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$. Portanto, o número de pontos fixos de $F_{2,b}$ é um número de Mersenne.

□

Exemplo 5.13. *Considere que $1 + b^2 = 5^3 \cdot 37^1$. Note que os expoentes dos fatores primos, 3 e 1, são números de Mersenne, pois $3 = 2^2 - 1$ e $1 = 2^1 - 1$. O número de pontos fixos para a base b é dado por:*

$$fix(b) = d(1 + b^2) - 1 = (3 + 1) \cdot (1 + 1) - 1 = 4 \cdot 2 - 1 = 8 - 1 = 2^3 - 1,$$

o que também é um número de Mersenne.
Resolvendo a equação $1 + b^2 = 5^3 \cdot 37^1$*, encontramos* $b = 68$*. Portanto, o número de pontos fixos de* $F_{2,68} = 2^3 - 1$. ♢

Exemplo 5.14. *Seja* $1 + b^2 = 2^1 \cdot 5^3 \cdot 13^1$*. Observe que os expoentes dos fatores primos, 1 e 3, são números de Mersenne, pois* $1 = 2^1 - 1$ *e* $3 = 2^2 - 1$*. O número de pontos fixos para a base b é dado por:*

$$fix(b) = d(1 + b^2) - 1 = (1 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (1 + 1) - 1 = 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 = 16 - 1 = 2^4 - 1,$$

que também é um número de Mersenne.
Ao resolver a equação $1 + b^2 = 2^1 \cdot 5^3 \cdot 13^1$*, encontramos que* $b = 57$*. Logo, o número de pontos fixos de* $F_{2,57} = 2^4 - 1$. ♢

6 Sequência didática: os números felizes com auxílio da programação computacional

Esta seção versa sobre uma proposta de sequência didática, que pode ser aplicada em sala de aula, a respeito dos números felizes usando o auxílio computacional.

O intuito dessa sequência didática é apresentar o conceito de números felizes, relembrando aos alunos sobre conjuntos numéricos, principalmente o conjunto dos números naturais, operações básicas elementares, tais como potenciação, revisar alguns conceitos de funções e apresentar também conceitos básicos de programação usando o (SCRATCH, 2024). Ela é destinada a alunos do ensino médio, articulando atividades práticas em sala de aula, objetivando contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

O objetivo principal da atividade é fazer uma investigação matemática, usando programação básica, afim de verificar se um determinado número inteiro e positivo, inserido pelo usuário, é um número $(2, 10)$-feliz ou não.

Uma motivação em relação a essa atividade está ligada à importância e ao papel das tecnologias digitais no ensino de Matemática. Segundo (SILVA, 2022), apesar de ser um tema objeto de diversos estudos em pesquisa na Educação Matemática, as tecnologias direcionadas ao ensino de Matemática ainda não foram integradas à realidade de muitas escolas. Diversos fatores podem influenciar essa triste realidade, tais como a falta de laboratórios de informática e recursos necessários para funcionamento dos mesmos, educadores sem a devida capacitação necessária para usufruir de tais recursos em suas aulas, entre outros.

Vale ressaltar que o ensino de programação de computadores, segundo (ORO et al., 2015), é uma valiosa ferramenta que contribui potencialmente para a aprendizagem, proporcionando o desenvolvimento do raciocínio lógico e beneficiando amplamente a formação em diferentes áreas do conhecimento.

Todavia, o uso de tecnologias digitais não garante, isoladamente, a melhoria da aprendizagem, mas serve para proporcionar um ensino mais dinâmico e voltado para resolução de problemas práticos.

A sequência de atividades proposta será realizada em cinco aulas de 45 minutos cada, onde a primeira aula terá como objetivo principal revisar conteúdos básicos e definir o conceito de números felizes.

A segunda e a terceira aula serão destinadas a esclarecer aos alunos sobre o que é um algoritmo, falar e explorar um pouco sobre a ferramenta que será utilizada para programar e entender conceitos básicos de programação, tais como operadores lógicos, estruturas de seleção e estruturas de repetição.

Nas duas últimas aulas será implementado um código que faça a verificação se um determinado número é feliz ou não. Para essa implementação, será usado o Scratch, que é uma linguagem de programação criada pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), cujo objetivo é ensinar a lógica da programação para crianças e adolescentes. O Scratch utiliza uma linguagem de programação baseada em blocos que representam comandos e ações, o que facilita a compreensão da lógica de programação. Vale ressaltar que é uma ferramenta gratuita.

6.1 Aula 1 - Conceitos iniciais e definição de números felizes

A primeira aula consiste em fazer uma breve revisão com os alunos sobre o conjunto dos números naturais, definição de potenciação e também função. Deixe explícito que a função que será estudada é uma função dos naturais para os naturais, ou seja, uma função discreta.

Após revisar os conteúdos básicos, explique o conceito de números felizes e faça alguns exemplos bem detalhados de números que são felizes e números que não são felizes.

Proponha a seguinte atividade:

Atividade 01:

Verifique se os números abaixo são felizes ou tristes.

a) 32

b) 62

c) 4599

d) 5026

A intenção dessa breve atividade é verificar se os alunos compreenderam o processo para averiguar se determinado número é feliz ou triste. Faça a correção com os alunos e retire eventuais dúvidas que possam surgir.

6.2 Aulas 2 e 3 – O Scratch e conceitos básicos de programação

O objetivo dessas aulas é fazer com que o aluno se familiarize com a ferramenta que será utilizada para programar.

Primeiramente, explique para os alunos o que é um algoritmo e, após o entendimento, apresente o ambiente do Scratch, deixando que eles explorem a ferramenta por alguns instantes.

O próximo passo é explicar alguns conceitos básicos de programação, tais como variáveis, laços de repetição e estruturas condicionais. Use o próprio Scratch para explicar esses conceitos.

Proponha a seguinte atividade:

Atividade 01:

Construir um algoritmo que calcule a média aritmética de 3 valores inteiros positivos, lidos externamente, e, caso a média aritmética for maior ou igual a 6, envie uma mensagem para o usuário dizendo que ele foi aprovado. Caso a média seja menor que 6, envie uma mensagem para o usuário dizendo que ele foi reprovado.

Atividade 02:
João tem 1,50 metro e cresce 2 centímetros por ano, enquanto José tem 1,10 metro e cresce 3 centímetros por ano. Construa um algoritmo que calcule e imprima quantos anos serão necessários para que José seja maior que João.

Atividade 03:
Construa um algoritmo que leia um valor inteiro positivo, inserido externamente, e faça a separação de seus dígitos, armazenando-os em uma lista. Por exemplo, se o valor lido for 135, o algoritmo deverá armazenar os dígitos 1, 3 e 5.

A intenção dessas 3 atividades é fazer com que os alunos se familiarizem com a linguagem de programação em blocos e entendam a função de cada uma das ferramentas que serão necessárias para a construção das próximas aulas.

Como a maioria dos alunos provavelmente nunca tiveram contato com algoritmos, uma sugestão é que faça as atividades juntamente com a turma, explicando novamente a função de cada bloco que será utilizado e retire eventuais dúvidas que possam surgir.

6.3 Aulas 4 e 5 – Implementação da atividade proposta

Essas duas últimas aulas serão destinadas à implementação do código proposto, onde será verificado se determinado número é feliz ou não. Se necessário, faça a implementação junto com os alunos, explicando passo a passo o programa.

Atividade 01:
Construa um algoritmo que leia um valor inteiro positivo, inserido externamente pelo usuário, e verifique se o número inserido é feliz ou não. Caso o número seja feliz, envie uma mensagem ao usuário dizendo "O número digitado é feliz". Caso o número não seja feliz, envie uma mensagem ao usuário dizendo "O número digitado não é feliz".

A seguir, temos um programa proposto e a explicação de cada bloco que o compõem.

Código proposto

A primeira parte do código apaga todos os itens das listas "dígitos" e "soma dos quadrados" e recebe como resposta um valor inteiro e positivo digitado pelo usuário do programa. A variável "número digitado" recebe o valor "resposta", que foi inserido pelo usuário. Ao final, vai para o bloco 1. Veja na imagem 2.

Figura 2 – Primeira parte.

Na segunda parte encontra-se o bloco 1. Nele, cada dígito do número digitado é separado e colocado na lista “dígitos”. Esse processo de separação dos dígitos é feito dividindo-se o número inserido por 10 e pegando o resto, que será o dígito das unidades. O resultado da divisão anterior é dividido por 10 e o resto é dígito das dezenas. Esse processo é feito até que o resultado da divisão seja zero e todos os dígitos sejam separados. Após esta separação, vai para o bloco “soma dos quadrados”. Veja na imagem 3.

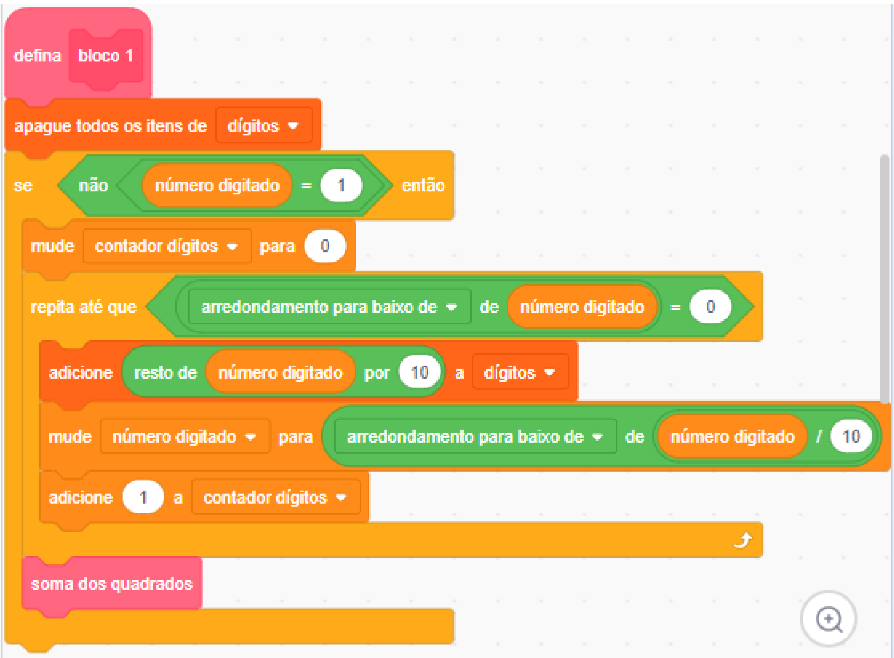


Figura 3 – Segunda parte.

Na terceira parte, cada dígito do número digitado é elevado ao quadrado e é feita a soma desses quadrados. A variável “número digitado” é substituída pelo valor da soma dos quadrados dos dígitos e esse valor é colocado na lista “soma dos quadrados”. Se tal valor for igual a 1, o número inserido pelo usuário é feliz e, se não for, é feito a verificação se esse tal valor já está na lista “soma dos quadrados” e, caso não esteja, volta para o bloco 1, onde é feita a separação dos dígitos desse novo valor obtido pela soma dos quadrados.

Se, em alguma iteração, for verificado que já existe, na lista “soma dos quadrados”, o valor encontrado quando é feita a soma dos quadrados dos dígitos, o número inserido não é feliz. Veja a imagem 4.

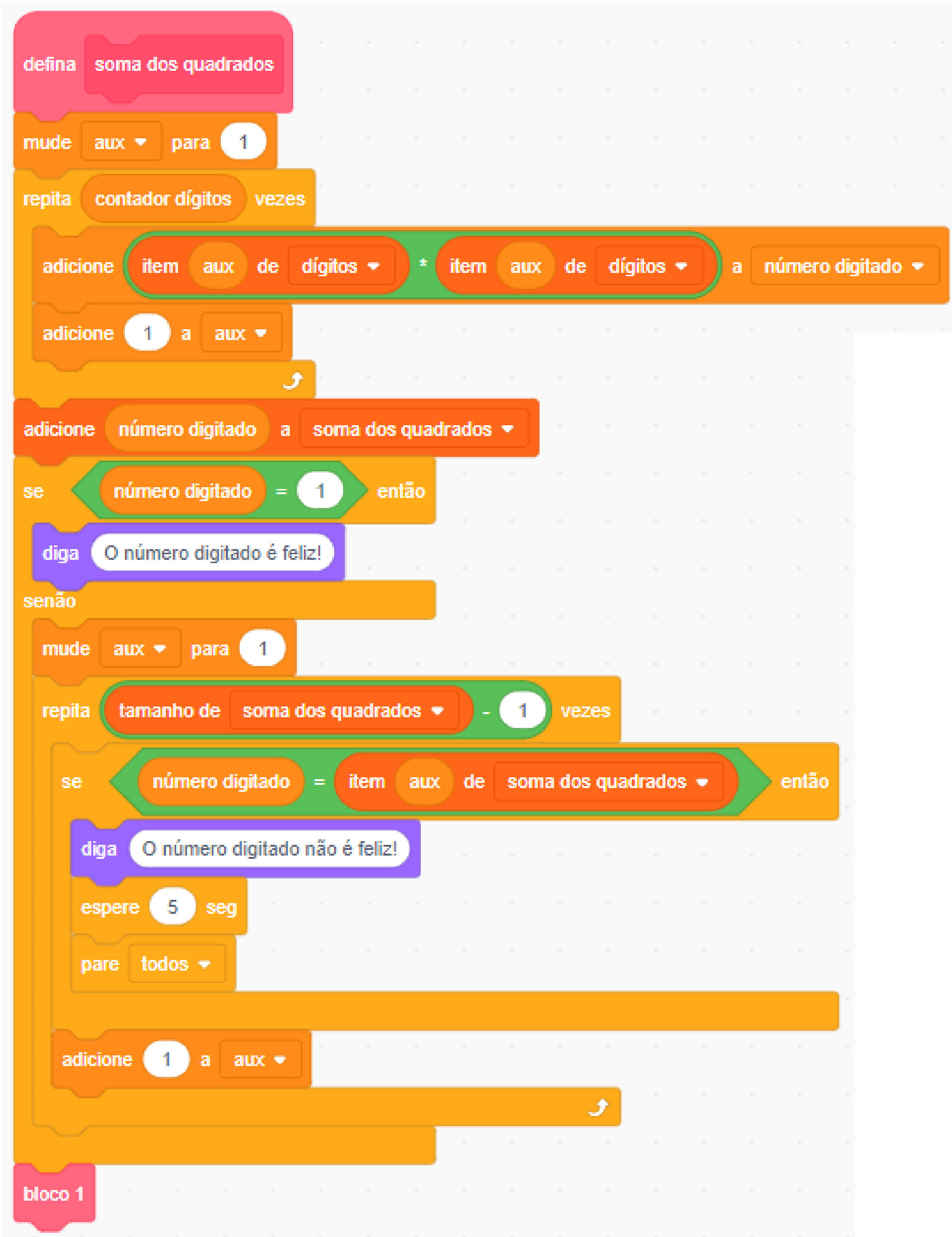


Figura 4 – Terceira parte.

7 Considerações Finais

É sempre possível verificar a quantidade de pontos fixos de uma função $F_{2,b}$ (Teorema 5.3). Através desse Teorema, juntamente com o Teorema 5.6 pudemos concluir diversos resultados relacionados ao número de pontos fixos em uma determinada base $b \geq 2$ e a decomposição em fatores primos da expressão $1 + b^2$.

Verificamos também que sempre que os expoentes da decomposição em fatores primos da expressão $1+b^2$ forem números de Mersenne, o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ também será um número de Mersenne (Teorema 5.12).

Uma aplicação em sala de aula, direcionada a alunos do ensino médio, foi proposta com o intuito de ensinar um assunto que não faz parte do currículo escolar, mas que traz oportunidade de aprendizado em diversas áreas, não só da Matemática, mas também em computação.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por tudo!

Expresso minha profunda gratidão à minha esposa Rosiane, pelo seu companheirismo, incentivo e apoio nos momentos mais desafiadores. Aos meus pais, por me ensinarem o valor dos estudos e pela constante inspiração. Agradeço também aos meus colegas do Profmat, cuja companhia foi inestimável.

Sou grato ao professor Marcelo Veloso, meu orientador, por sua paciência e dedicação ao meu trabalho. Agradeço a todos os professores do Profmat, que me proporcionaram uma rica experiência de aprendizado.

Por fim, dedico um agradecimento especial ao meu filho Heitor, que me encorajou a continuar sonhando e lutando.

Referências

BEARDON, A. Sums of squares of digits. *The Mathematical Gazette*, JSTOR, p. 379–388, 1998.

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. *An Introduction To The Theory Of Numbers*. [S.l.]: Oxford University Press, 1960.

LACERDA, J. C. A. *Praticando a Aritmética*. [S.l.]: Gráfica e editora Maia, 2014.

MARTINS, C. J. L. *Algoritmo da Divisão de Euclides: uma nova proposta de ensino de matemática na educação básica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2015.

MATA, R. C. da; VELOSO, M. O. Números felizes e pontos fixos. *Revista Eletrônica da Matemática*, v. 9, n. 1, p. 1–12, 2023.

ORO, N. T. et al. A olimpíada de programação de computadores para estudantes do ensino fundamental: A interdisciplinaridade por meio do software scratch. *Anais do XXI Workshop de Informática na Escola*, CBIE e LACLO, p. 102–111, 2015.

ROCHA, K. F. *Bases Numéricas Não Usuas: Um breve estudo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Grande Dourados, 2019.

RODRIGUES, T. P. *Números Felizes Generalizados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João del-Rei, 2021.

SCRATCH. 2024. Acessado em 02-08-2024. Disponível em: <https://scratch.mit.edu/>.

SILVA, J. A. J. da. Sequência de atividades para estudo de funções de primeiro grau: Análise gráfica e aplicações com geogebra. 2022.