INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL
CAMPUS CANOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

NATHALIA FERREIRA DE MELLO

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS RECURSIVAS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

Introdução à álgebra através de generalizações

CANOAS – RS
2024

NATHALIA FERREIRA DE MELLO

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS RECURSIVAS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

Introdução à álgebra através de generalizações

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, campus Canoas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Carina Loureiro Andrade

Coorientadora: Prof.ª Ms.ª Cláudia Brum de Oliveira Fogliarini Filha

CANOAS – RS

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M527s Mello, Nathalia Ferreira de

Sequências numéricas recursivas nos anos finais do ensino fundamental: introdução à álgebra através de generalizações / Nathalia Ferreira de Mello. - 2024.
90f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Canoas, BR-RS, 2024.

Orientadora: Profa. Dra. Carina Loureiro Andrade. Coorientadora: Profa. Msa Cláudia Brum de Oliveira Fogliarini Filha

1. Sequências numéricas recursivas. 2. Proposta didática. 3. Pensamento algébrico. 4. Generalizações. I. Andrade, Carina Loureiro, orientadora. II. Fogliarini Filha, Cláudia Brum de Oliveira, coorientadora. III. Título.

CDU 51

Elaborado por: Sabrina Clavé Eufrásio CRB-10/1670

NATHALIA FERREIRA DE MELLO

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS RECURSIVAS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

Introdução à álgebra através de generalizações

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, campus Canoas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul.

Canoas, 26 de Julho de 2024.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Carina Loureiro Andrade
Orientadora
IFRS - Campus Canoas

____

Profª. Drª. Jaqueline Molon
IFRS - Campus Canoas

____

Prof. Dr. Adilson de Campos
Instituto Federal de Santa Catarina - Campus Florianópolis

AGRADECIMENTOS

Ao deparar-me com o final desta etapa tão importante em minha vida não poderia deixar de agradecer às pessoas que foram de suma importância durante esta trajetória.

Agradeço aos meus pais Roseli Ivanês Arend e Aurimar Ferreira de Mello e a minha irmã querida Giovanna Ferreira de Mello, que não pouparam esforços para que pudesse concluir esta pós-graduação. Mesmo com todas as dificuldades, sempre estiveram dispostos a mostrar-me o caminho mais adequado a seguir, incentivando-me a dar o meu melhor sempre. Obrigado pelo apoio em todos os momentos, sem vocês nada disso seria possível. Também, a toda minha família que compreendeu a minha ausência em diversos encontros.

Como também, agradeço aos colegas que chegaram ao final desta caminhada juntamente comigo. Espero que possamos carregar essa amizade construída no mestrado para as nossas vidas, que não esqueçamos tudo pelo que passamos juntos. Desejo, do fundo do meu coração, que vocês sejam muito felizes e que tenham muito sucesso em suas caminhadas, vocês merecem tudo de melhor que o mundo tem a oferecer.

Em especial, àquelas que me orientaram, Carina e Claudinha. Obrigada por todos os ensinamentos compartilhados, pelas críticas construtivas, reflexões e sugestões trocadas no decorrer deste estudo. Como também, pela dedicação e disposição demonstrada em todos os momentos. Sinto-me honrada em poder ter aprendido um pouco mais com essa convivência, saibam que são uma inspiração para mim. Agradeço imensamente pelas trocas durante os meses de aprendizado.

Por fim, mas não menos importantes, aos professores que me acompanharam durante estes dois anos de caminhada, obrigado por me encorajarem e incentivarem a buscar sempre o melhor, por dividirem sua paciência, tempo, amizade e principalmente conhecimento. A vocês, queridos professores, meu muitíssimo obrigada por todos ensinamentos.

RESUMO

A dificuldade apresentada pelos estudantes no estudo da álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental é vivenciada pela pesquisadora em sua prática docente. Acredita-se que isso se dá pela não compreensão de alguns conceitos/elementos essenciais do Pensamento Algébrico. Com a intenção de amenizar tais dificuldades, esta pesquisa apresenta uma proposta didática que visa contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico através da exploração de sequências numéricas recursivas com o uso de material concreto, estimulando a identificação e investigação de padrões existentes e ainda a formulação e formalização de generalizações. Essa proposta didática foi aplicada em uma escola da rede estadual de ensino no município de Caxias do Sul - RS, em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, onde a pesquisadora é professora. Assim, este trabalho tem por objetivo investigar de que forma essa proposta didática pode facilitar o ensino de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental. Para isso, utilizou-se de uma metodologia qualitativa e para análise dos dados foram consideradas as atividades realizadas pelos estudantes e o caderno de bordo da pesquisadora. Como resultados, observou-se, durante a aplicação, maior envolvimento dos estudantes nas atividades, percebendo-os mais ativos no processo de aquisição do seu próprio conhecimento, e satisfeitos de conseguir concluir as atividades, tornando o momento de aprendizagem algo mais prazeroso. Também, os dados obtidos através das respostas dos estudantes nas atividades permitiram elencar categorias relacionadas ao Pensamento Algébrico, inspiradas nos elementos de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), demonstrados por eles. Ainda como conclusão são trazidos alguns ajustes e modificações na proposta didática e algumas sugestões de trabalhos futuros.

Palavras chave: Sequências numéricas recursivas. Proposta didática. Pensamento Algébrico. Generalizações.

ABSTRACT

The difficulty presented by students in studying algebra in the final years of elementary school is experienced by the researcher in her teaching practice. It is believed that this is due to the lack of understanding of some essential concepts/elements of Algebraic Thinking. To mitigate these difficulties, this research presents a didactic proposal that aims to contribute to the development of Algebraic Thinking through the exploration of sequences using concrete materials, stimulating the identification and investigation of existing patterns and the formulation and formalization of generalizations. This didactic proposal was applied in a public school in the city of Caxias do Sul - RS, in a 7th-grade class where the researcher is a teacher. Thus, this work aims to investigate how this didactic proposal can facilitate the teaching of algebra in the final years of elementary school. For this, a qualitative methodology was used, and for data analysis, the activities performed by the students and the researcher's logbook were considered. As results, it was observed during the application a greater involvement of students in the activities, making them more active in the process of acquiring their own knowledge, and satisfied with completing the activities, making the learning moment more enjoyable. Furthermore, the data obtained through the students' responses in the activities allowed listing characteristic elements of Algebraic Thinking, developed by the researcher inspired by the elements of Fiorentini, Fernandes, and Cristovão (2005), demonstrated by them. As a conclusion, some adjustments and modifications in the didactic proposal are presented, as well as suggestions for future work.

Key words: Recursive number sequences. Didactic proposal. Algebraic Thinking. Generalizations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Frequentemente os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental demonstram dificuldades na compreensão e no estudo da álgebra. Através da prática docente da pesquisadora, percebeu-se que, na maioria das vezes, a dificuldade vem da falta de entendimento a respeito de conceitos básicos da álgebra, como por exemplo, o uso de uma letra para representar uma quantidade desconhecida ou valor arbitrário.

Diante desta realidade, surgem alguns questionamentos: De que forma pode-se introduzir a álgebra de maneira mais significativa? Como contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos estudantes? Refletindo sobre estas indagações, na intenção de suavizar tais dificuldades, este trabalho visa contribuir para a melhoria do desenvolvimento do Pensamento Algébrico através da exploração de sequências com o uso de material concreto.

Para tanto, a pesquisa tem por objetivo investigar de que forma uma proposta didática que trabalha sequências a partir de materiais manipulativos pode facilitar o ensino de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental. Tem por objetivos específicos elaborar uma proposta didática que contribua para a compreensão da álgebra, aplicá-la em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental e analisar o quanto a proposta contribuiu para a manifestação de elementos caracterizadores do Pensamento Algébrico.

A proposta didática tem por objetivo tornar os educandos capazes de relacionar as manipulações do material concreto com uma sequência matemática, identificar e investigar padrões existentes em determinadas situações e ainda formular e formalizar generalizações, a fim de favorecer o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Para isso, no referencial teórico será apresentada a fundamentação teórica da pesquisa, no que diz respeito ao Pensamento Algébrico e as generalizações, trazendo algumas definições encontradas na bibliografia estudada. Também, será exposto de que forma os documentos norteadores dos currículos escolares, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), abordam o ensino da álgebra e orientam a sua introdução em sala de aula. Por fim, discorrerá sobre a importância da utilização de materiais concretos e da experimentação no processo de ensino-aprendizagem.

No terceiro capítulo serão expostos os aspectos metodológicos da pesquisa e da proposta didática elaborada, explicando todas as etapas de confecção e de análise dos dados. No quarto capítulo serão discutidos os dados coletados através do caderno de bordo da pesquisadora e das respostas dos estudantes nas atividades.

No quinto capítulo serão apresentadas as conclusões a respeito da pesquisa, bem como sugestões de alteração da proposta didática ou de continuidade dos estudos a partir deste trabalho. Por fim, nos apêndices serão expostos os termos utilizados na pesquisa e o produto didático produzido.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A introdução à álgebra no Ensino Fundamental marca um ponto de virada no percurso matemático dos estudantes, representando a transição do pensamento aritmético para a compreensão mais abstrata das relações e propriedades numéricas, através da construção do conhecimento denominado de Pensamento Algébrico (Duda, 2020). Por isso, aguçar o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas que auxiliem o entendimento dos alunos e os habituem com a linguagem específica da disciplina, empregando estratégias de ensino que os instiguem e que sirvam aos seus conhecimentos e dificuldades, é provável ser uma metodologia eficiente para propiciar um melhor discernimento de conceitos, associações e técnicas.

Nesse sentido, Canavarro (2007) afirma que a introdução do Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental é significativa, pois possibilita o ensino da álgebra a partir de uma nova perspectiva, mais integrada e interessante, em que as crianças possam desenvolver capacidades matemáticas motivadas por situações ricas e com sentido, que lhes possibilitem a construção de conhecimentos algébricos com compreensão, ampliando o seu patrimônio quer seja no nível de processos ou de produtos matemáticos.

Promover atividades que tenham como objetivo mobilizar diferentes estratégias de resolução, a fim de que os alunos construam novas formas de pensar, significará ensinar para além das regras e da manipulação simbólica, valorizando-se o desenvolvimento do Pensamento Algébrico; que, no contexto educacional, refere-se à capacidade dos estudantes de compreender, representar e resolver situações matemáticas utilizando expressões simbólicas, equações e generalizações (Ponte; Branco; Matos, 2009). A habilidade de generalizar é uma faceta crucial desse processo, permitindo aos alunos identificar regularidades, entender padrões e formular regras abstratas que se aplicam a uma variedade de situações (Kaput, 1998).

O desenvolvimento do Pensamento Algébrico e a capacidade de generalizar estão intrinsecamente ligados às bases da álgebra e à construção de conceitos matemáticos (Canavarro, 2007). O que, através da implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), passou a ser trabalhado desde os anos iniciais do Ensino

Fundamental, a fim de tornar mais amistosa a incorporação desses conhecimentos algébricos nos anos finais do Ensino Fundamental.

Nas seções subsequentes serão apresentados alguns aspectos relevantes para a pesquisa, sobre o Pensamento Algébrico, a álgebra nos documentos norteadores da educação básica e a importância da utilização de materiais concretos.

2.1 O Pensamento Algébrico e as generalizações

Segundo Bezerra (2016), desenvolver a capacidade de expressar uma situação em uma linguagem algébrica é fundamental para a análise e interpretação de situações do cotidiano, tanto na matemática quanto nas demais áreas do conhecimento. Direta ou indiretamente, a álgebra está presente, das mais variadas formas, em nosso cotidiano. Primordialmente, por pertencer ao desenvolvimento humano, a álgebra surge para solucionar necessidades práticas do cotidiano, e vai evoluindo de forma a possibilitar aos indivíduos habilidades como a abstração e o desenvolvimento da capacidade de criar argumentos e conjecturas, a fim de se estabelecer generalizações (Bezerra, 2016).

Esta capacidade é uma forma de manifestação do Pensamento Algébrico, o qual, para Blanton e Kaput, tem como base a generalização e é definido como o

> processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações por meio de discurso argumentativo, e as expressam de forma progressivamente mais formal e apropriada à sua idade. (Blanton; Kaput, 2005, p. 413, tradução nossa)[1]

Este Pensamento, segundo Kaput, apresenta cinco aspectos relacionados entre si:

1. A generalização e formalização de padrões e restrições;
2. A manipulação de formalismos guiada sintaticamente;
3. O estudo de estruturas abstratas;
4. O estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e

[1] Tradução de: “process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations throught the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways” (Blanton; Kaput, 2005, p.413)

5. A utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos. (Kaput, 1998, tradução nossa)[2]

Ou seja, este Pensamento vai além da capacidade de somente manipular símbolos. Ele engloba a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistema de equações e de inequações e funções, mas, além disso, ele visa desenvolver a ideia de generalização, enfatizando as relações existentes entre determinados objetos, simbolizando e refletindo, de maneira geral e abstrata, sobre tais relações.

Nesta perspectiva, Ponte, Branco e Matos (2009, p.10) afirmam que "aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação", e que esse pensar algebricamente demanda três competências e habilidades fundamentais:

> **Representar:** ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
> **Raciocinar:** relacionar (em particular, analisar propriedades); generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensões das regras; deduzir.
> **Resolver problemas e modelar situações:** usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (equações e inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação). (Ponte; Branco; Matos, 2009, p.11)

A partir da álgebra, então, é possível representar através de símbolos situações do cotidiano, perceber padrões e formular generalizações. Da mesma forma, Silva, Curi e Martins (2022) acreditam que ao realizar generalizações, e colocar o pensamento em função de situações-problema, ocorre o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Este Pensamento, de acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), é caracterizado através da percepção de regularidades, de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, de tentativas de expressar a estrutura de situações

---

[2] Tradução de: 1. Algebra as Generalizing and Formalizing Patterns and Constraints, especially, but not exclusively, Algebra as Generalized Arithmetic Reasoning and Algebra as Generalized Quantitative Reasoning; 2. Algebra as Syntactically-Guided Manipulation of Formalisms; 3. Algebra as the Study of Structures and Systems Abstracted from Computations and Relations; 4. Algebra as the Study of Functions, Relations, and Joint Variation; and 5. Algebra as a Cluster of (a) Modeling and (b) Phenomena-Controlling Languages. (Kaput, 1998, p. 26)

problema e da presença do processo de generalização. Para eles, a expressão do Pensamento Algébrico não acontece de uma única forma, podendo se dar através da linguagem natural, aritmética, geométrica, ou mesmo de uma linguagem algébrica (1993).

Almeida (2016, p.79) acredita que o “pensar algebricamente é composto pelos seguintes elementos, ou características: estabelecer relações; generalizar; modelar; construir significados; e operar com o desconhecido” e ainda, que a capacidade de estabelecer relações está exatamente ao centro de todas essas características, ou seja, primeiro o sujeito desenvolve a capacidade de estabelecer relações e em seguida desenvolve as demais características.

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) elencam elementos caracterizadores do Pensamento Algébrico, a partir dos quais é possível estimar a evolução deste Pensamento:

a) estabelecimento de relações ou comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos;
b) percepção e tentativa de expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema;
c) produção de mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema ou, reciprocamente, produção de mais de um significado para a mesma expressão numérica;
d) interpretação de uma igualdade como uma equivalência entre duas grandezas ou duas expressões numéricas;
e) transformações de expressões aritméticas complexas em outras mais simples;
f) desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização; e
g) percepção e tentativa de expressar regularidades ou invariâncias e desenvolvimento ou criação de uma linguagem mais concisa e sincopada para expressar-se matematicamente.

Ainda, os autores salientam que no momento em que os estudantes se apropriam do uso da linguagem simbólica, seu pensamento flui melhor, de modo que se torna possível expressar relações complexas e abstratas.

Percebe-se, portanto, que o desenvolvimento do Pensamento Algébrico está relacionado à construção de habilidades e competências que propiciem a percepção de regularidades, o aprimoramento de processos de generalizações e a expressão dessas.

Importante aos estudantes, este Pensamento deve ser desenvolvido desde a Educação Básica. É o que se encontra em documentos orientadores, conforme será exposto na seção a seguir.

2.2 A álgebra nos documentos orientadores

Com o passar dos anos, e com os avanços que as tecnologias e a humanidade vêm tendo, a educação cada vez mais tem a necessidade de preparar os educandos para uma realidade que exigirá habilidades e eficiência na resolução das mais diversas situações-problema. Por se relacionar com outras áreas do conhecimento, nesse âmbito, a matemática é fundamental, pois contribui com a estruturação do pensamento e com o desenvolvimento das capacidades de analisar, conjecturar, sintetizar, abstrair, deduzir, interpretar, confrontar, fazer analogias, projetar e tomar decisões.

Na intenção de garantir a elaboração de currículos escolares voltados à formação dos educandos para esta vida em sociedade, o Ministério da Educação (MEC), órgão governamental responsável pela política nacional de educação, desenvolveu documentos orientadores para as instituições educacionais de todo o país, dentre os quais podemos citar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Vale ressaltar que o currículo escolar pode ser entendido como toda maneira de atuar de uma escola (linha pedagógica, disciplinas, carga horária, avaliação, etc.), estabelecido através de um conjunto de diretrizes discutidas coletivamente em consonância com as especificidades de cada comunidade escolar e formalizadas em um documento institucional denominado Projeto Político-Pedagógico (PPP) (Eyng, 2007).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, homologados em 1998 (Ensino Fundamental), constituem uma coleção de documentos que apresentam um conjunto de diretrizes educacionais, essenciais para o Brasil, que orientam a elaboração de currículos e práticas pedagógicas das instituições educativas do país.

Com um caráter normativo, em 2017, foi homologada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que define as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas nas escolas brasileiras de toda a Educação Básica, da Educação Infantil até o Ensino Médio (Brasil, 2018), apresentando os objetivos de aprendizagem e as habilidades que devem ser desenvolvidas em cada etapa de ensino.

A BNCC tem por principal objetivo garantir o direito à aprendizagem e o desenvolvimento pleno de todos os estudantes, por isso é um documento importante para nortear a elaboração dos currículos dos estados e municípios. A Base está fundamentada em dez competências gerais, conforme mostra a Figura 1, que orientam as áreas do conhecimento e seus componentes curriculares.

Figura 1 – Competências gerais da BNCC

Fonte: Nahirne; Boscarioli (2023)

No que diz respeito à competência, ela é “definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores”, de modo a “resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (Brasil, 2018, p. 8).

A BNCC divide a Educação Básica em três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 – Etapas da Educação Básica

Fonte: Brasil (2018)

Ao longo de toda a Educação Básica, os estudantes devem desenvolver as dez competências gerais, de maneira a “[...] assegurar, como resultado do seu processo de aprendizagem e desenvolvimento, uma formação humana integral que vise à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.” (Brasil, 2018, p. 25)

O Ensino Fundamental, especificamente, se subdivide em cinco áreas do conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciência da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso, e cada uma destas áreas define competências específicas que explicitem como as dez competências gerais se expressam nessas áreas. Nas áreas que abrangem mais de um componente curricular, são definidas competências específicas do componente, em consonância com as da área (Brasil, 2018).

Para garantir o desenvolvimento dessas competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades, as quais “expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares” (Brasil, 2018, p. 29). Elas se relacionam com diferentes objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos), que são organizados em unidades temáticas. Quando se volta o olhar para a área da Matemática, são definidas cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística (Brasil, 2018).

No que diz respeito ao ensino da álgebra no Ensino Fundamental, esses documentos defendem a proposta de se evidenciarem habilidades e competências juntamente ao desenvolvimento da forma de pensar algebricamente, como afirma os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> [...] é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da álgebra apenas enfatizando as “manipulações” com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (Brasil, 1998, p.116)

Ainda segundo os PCN, se forem propostas aos estudantes, desde o início do Ensino Fundamental, experiências diversas envolvendo noções algébricas, os adolescentes adquirem uma base mais sólida e rica de significados para a aprendizagem da álgebra (Brasil, 1998).

Ponte, Branco e Matos (2009) defendem que mais do que operar técnicas e algoritmos com símbolos, os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra devem proporcionar ao educando o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Para isso acontecer, segundo os PCN, deve-se utilizar situações de aprendizagem que instiguem o aluno a

> Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas; traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (Brasil, 1998, p. 64).

Quando olhamos para a BNCC, especificamente quando se fala na unidade temática Álgebra, o documento traz que

> A unidade temática Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (Brasil, 2018, p. 270).

Segundo a BNCC, integram o Pensamento Algébrico competências como: identificar regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, compreender e utilizar a simbologia algébrica, além da capacidade de abstração e generalização como ferramenta para resolver problemas.

Quando se olha para as habilidades a serem desenvolvidas no 7º ano do Ensino Fundamental, pode-se esquematizar os objetos de conhecimento e habilidades conforme Quadro 1.

Quadro 1 – Habilidades e competências do 7º ano do Ensino Fundamental da unidade temática Álgebra

(continua)

Unidade Temática	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(conclusão)

		(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
Unidade Temática	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Álgebra		(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Fonte: Elaborado pela autora, com base na BNCC (2024)

Como observa-se nas habilidades (EF07MA14) e (EF07MA15), é esperado que no 7º ano os alunos consigam reconhecer e classificar sequências em recursivas e não recursivas, como também consigam expressar regularidades encontradas em sequências numéricas, através da simbologia algébrica. Ou seja, espera-se que os estudantes consigam desenvolver elementos caracterizadores do Pensamento Algébrico (Fiorentini; Fernandes; Cristóvão, 2005).

O ensino de álgebra, segundo Canavarro (2007), deve evidenciar uma perspectiva mais interessante, para que os educandos possam desenvolver habilidades matemáticas com significado e que lhes possibilitem a construção de conhecimentos algébricos com compreensão.

Entretanto, “na prática o ensino-aprendizagem da Álgebra tem gerado algumas deficiências que são diagnosticadas em várias pesquisas e nas avaliações governamentais” (Coelho; Aguiar, 2018, p.171). Estes autores acreditam que isso ocorre em vista da ênfase que se dá aos aspectos técnicos da álgebra, deixando de lado o desenvolvimento dos conceitos e uma busca por um pensamento mais abstrato. E ainda, complementam que quando se enfatiza o pensamento algébrico ao invés de se restringir a questões técnicas e operacionais, o ensino de álgebra contribui tanto no aprendizado da Matemática quanto no desenvolvimento do pensamento lógico-abstrato, o qual é fundamental para se viver em sociedade atualmente. (Coelho; Aguiar, 2018).

Nesse sentido, a utilização de materiais manipulativos em sala de aula, visando a construção de novos saberes, se mostra uma estratégia interessante para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, e será explicitada na seção seguinte.

2.3 A importância da utilização de material concreto e da experimentação

Apesar dos avanços possibilitados pela matemática para o desenvolvimento da sociedade, inúmeras pessoas não sentem prazer na convivência com os desafios provocados por ela nem se sentem capazes de compreendê-la. Isso leva a um questionamento dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

Nesse sentido, se faz necessário repensar estratégias de ensino que permitam aos estudantes reforçar a compreensão de conceitos através da experimentação e de maneira mais ativa. A utilização de materiais concretos em sala de aula é uma destas estratégias, pois, segundo Silva *et al.* (2016), o uso destes auxilia no desenvolvimento de habilidades e na compreensão de saberes de forma lúdica, fazendo com que o estudante se torne mais ativo no processo de aprendizagem.

Existe um antigo provérbio chinês que diz “se escuto, logo esqueço; se vejo, lembro; mas se faço, aprendo” (*apud* Lorenzato, 2010, p. 71). Nesse sentido, Fiorentini e Miorim (1990) expõem que uma educação seria considerada realmente educativa se a sua ação pedagógica evidenciasse as atividades realizadas pelos alunos, como, por exemplo, a manipulação de objetos concretos.

Silva *et al.* (2016) e Luciano (2017) também apresentam argumentos favoráveis para a utilização de materiais concretos em sala de aula, pois é perceptível que o estudante desenvolve satisfatoriamente seu aprendizado quando este parte do concreto para depois seguir para o abstrato, iniciando na ação prática e após seguindo para a teoria.

O desenvolvimento de habilidades essenciais através do uso destes materiais concretos se dá pelo processo de experimentação, o qual, segundo Lorenzato (2010), é próprio da natureza humana e quando trabalhado na escola permite ao estudante se envolver no assunto, participando ativamente das descobertas e socializando com os colegas.

Este processo de experimentação é importante para que se consiga uma aprendizagem efetiva, pois evidencia os “porquês” e as explicações, melhorando a compreensão; além disso, possibilita a redescoberta, a aprendizagem de estratégias de resolução de problemas e a verificação de conjecturas ou de resultados (Lorenzato, 2010).

Após a experimentação, vem como desfecho a descoberta de um novo conhecimento, a qual “se expressa por um sorriso que simboliza a alegria de um desafio vencido, de um sucesso alcançado [...] e causa, também, um forte reforço à autoimagem” (Lorenzato, 2010, p.81-82), atuando tanto na área cognitiva, quanto na afetiva de quem faz. Esse processo como um todo se mostra eficiente para a aprendizagem, pois quando vivenciam a descoberta, os alunos estão aprendendo a aprender, estão se tornando seres ativos no processo de construção do seu próprio conhecimento (Lorenzato, 2010; Silva *et al.,* 2016).

Assim, acredita-se que a utilização de materiais concretos em sala de aula seja relevante para a constituição de processos de ensino e de aprendizagem exitosos e agradáveis.

.

3 METODOLOGIA

Para investigar de que forma o estudo de sequências pode contribuir para a introdução da álgebra no Ensino Fundamental, elaborou-se uma proposta didática sobre sequências numéricas recursivas, utilizando material concreto. Esta proposta foi aplicada em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual da cidade de Caxias do Sul - RS, durante as aulas de matemática, em dois encontros, um de 50 minutos e outro de 90 minutos, no período de 06 a 10 de novembro de 2023.

A escola na qual a pesquisa foi aplicada situa-se em um bairro com boas condições de moradia. Além disso, destaca-se por contar com projetores nas salas de aula, biblioteca, laboratório de informática, ginásio, quadra esportiva e campo de futebol.

A turma em questão era composta por 27 alunos, sendo 12 meninas e 14 meninos. Quanto aos aspectos pedagógicos, era uma turma heterogênea: enquanto mais da metade dos estudantes apresentavam alguma dificuldade em matemática, outros cinco estudantes se destacavam por um ótimo raciocínio lógico e facilidade na interpretação e resolução das atividades propostas. Ainda, um dos alunos é diagnosticado com Transtorno do Espectro Autista - TEA (CID F84.0), que, apesar de interagir bem com a turma, apresentava bastante resistência em pedir ajuda quando tinha dificuldade, prejudicando sua compreensão dos conceitos matemáticos.

No geral, a turma era bastante participativa nas aulas, os alunos realizavam todas as atividades propostas, questionando sempre que se deparavam com alguma dificuldade.

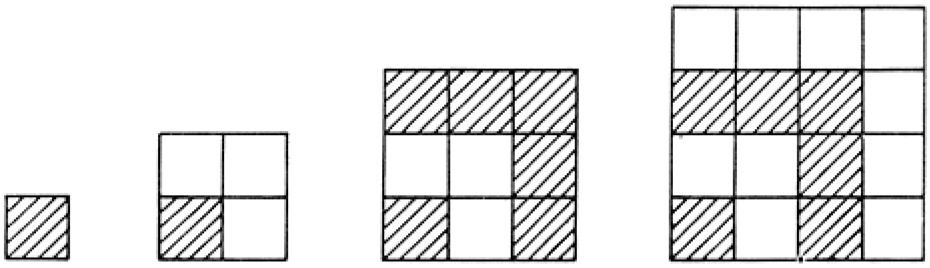
Corroborando com os autores Silva *et al.* (2016), Fiorentini e Miorim (1990), Luciano (2017) e Lorenzato (2010), a proposta didática elaborada buscou trazer a utilização do material concreto para contribuir com a significação de conceitos através da participação ativa dos estudantes no seu processo de construção de conhecimento.

Ao início, foram pensadas quais atividades iriam contribuir para uma análise a respeito do quanto os alunos conseguiriam observar padrões existentes e formular generalizações a partir de suas observações. Após muitas pesquisas, a construção da ideia da soma dos n primeiros números naturais ímpares (Rampazzo, 1988), em um artigo da Revista do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de

Matemática, através da utilização de quadradinhos construídos em cartões coloridos, se mostrou interessante para a análise almejada.

Neste artigo, os alunos construíam, a partir de um quadrado unitário, quadrados maiores, acrescentando progressivamente quadrados unitários de cores alternadas, como pode ser visto na Figura 3.

Figura 3 – Construções feitas pelos alunos



Fonte: Rampazzo (1988)

A partir destas representações, era esperado que os estudantes percebessem que para formar cada quadrado maior era necessário acrescentar uma quantidade ímpar de novos quadrados unitários, chegando às seguintes conclusões (Figura 4):

Figura 4 – Conclusões escritas pelos alunos

$$1 \qquad 1+3=4=2^2 \qquad 1+3+5=9=3^2 \qquad 1+3+5+7=16=4^2$$

Fonte: Rampazzo (1988)

Dessa forma, puderam perceber que a soma dos n primeiros números naturais é expressa por um quadrado perfeito, ou seja, é igual a n^2.

Baseado no proposto por Rampazzo, foram pensadas as atividades que compõem a proposta didática deste trabalho. Através da mesma ideia, se pensou de que forma era possível conduzir os estudantes para que conseguissem uma expressão que fornecesse a soma dos n primeiros números naturais ímpares através do material concreto. Para tal, a proposta iniciou com atividades denominadas “etapas”, que tinham por objetivo fazer com que os alunos percebessem que a partir de um quadrado unitário inicial, a cada nova etapa que executavam, um novo quadrado era formado.

Junto desta investigação com o material concreto, se propunha a organização das informações levantadas através da resposta de três perguntas específicas: “Quantas peças foram adicionadas?”, “Quantas peças ao todo foram utilizadas?” e “Quanto mede o lado do quadrado formado?”. Esperava-se, com essas três perguntas, que os alunos se atentassem à relação existente entre as respostas dadas em uma etapa e as respostas dadas na etapa anterior a esta, observando a recursividade existente.

Nas atividades solicitou-se, também, que os estudantes realizassem o proposto sem o auxílio do material concreto, na intenção de que eles conseguissem colocar em prática o padrão observado por eles nas respostas anteriores. Com isso, pretendeu-se que os estudantes desenvolvessem algum tipo de processo de generalização para expressar algumas conclusões.

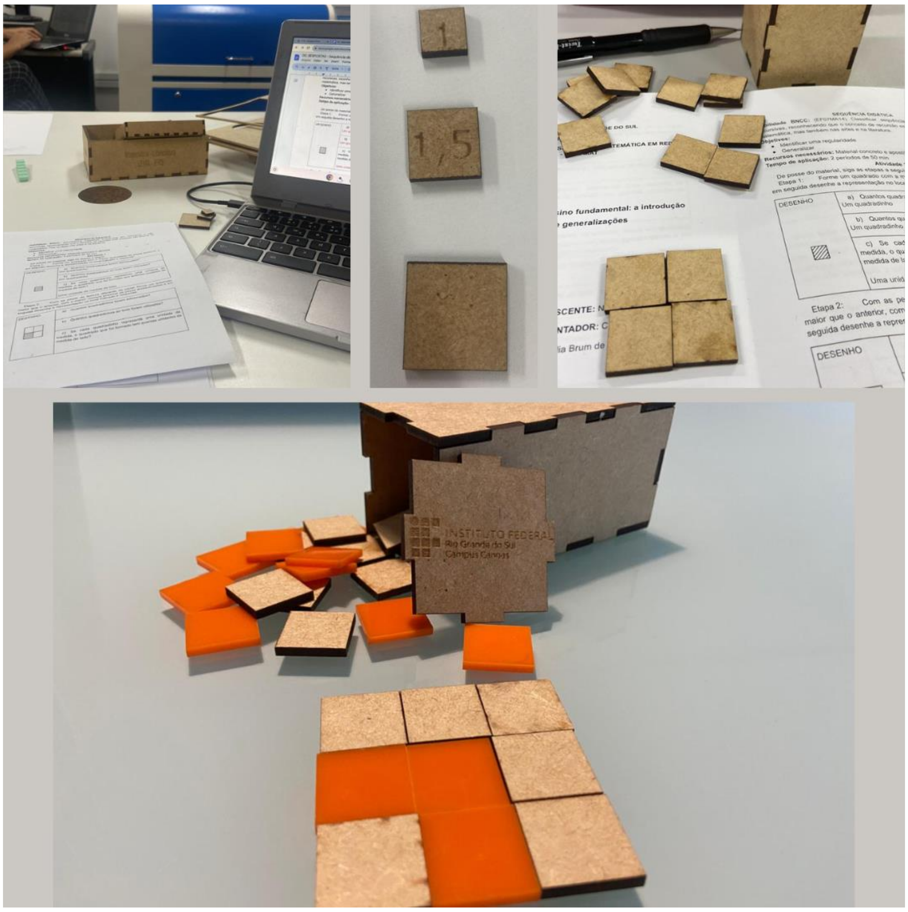
Com a intenção de registrar as informações obtidas, se propôs algumas atividades que objetivavam a organização dos dados através de tabelas, para contribuir com a construção e verificação de conjecturas a respeito dos padrões vistos. O material contava ainda com atividades que instigavam a percepção e tentativa de expressar, matematicamente, regularidades através do desenvolvimento de uma linguagem mais concisa e sincopada.

A proposta didática, como um todo, buscava observar nas respostas das perguntas e na construção das tabelas, se os alunos conseguiram estabelecer relações de recorrência entre elementos da sequência e desenvolver algum tipo de processo de generalização e até mesmo expressar regularidades através de uma linguagem matemática mais concisa, elementos caracterizadores do Pensamento Algébrico (Fiorentini, Fernandes e Cristovão, 2005).

De posse da proposta didática organizada, iniciou-se a etapa de confecção do material a ser utilizado. Como já se estudava a importância do trabalho com o material concreto e com a disponibilidade do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) - Campus Canoas para a utilização do laboratório *maker*, optou-se então pela confecção do material através da cortadora a laser.

Definiu-se que os quadradinhos utilizados seriam feitos através de placas de fibras de média densidade (MDF) e de acrílico, para que assim os alunos pudessem observar as diferentes etapas da atividade, inclusive no material concreto. Da mesma forma, a caixinha utilizada para armazenar o material construído seria de MDF, conforme mostra a Figura 5. Para ser feito pela cortadora a laser, os dois produtos (quadradinhos e caixinha) foram desenhados no computador pela pesquisadora, através do software RDWorks, e encaminhados para o corte na própria máquina.

Figura 5 – Etapas de confecção do material concreto



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Com o material manipulável pronto, iniciou a etapa de aplicação da proposta, a qual aconteceu em outubro de 2023, após a aprovação do projeto pelo Comitê de Ética e Pesquisa do IFRS, sob Certificado de Apresentação de Apreciação Ética 74247823.1.0000.8024. Trata-se de uma pesquisa caracterizada como investigação qualitativa de Bogdan e Biklen (1999), pois o pesquisador é o instrumento principal e sua fonte de dados é o ambiente natural; é descritiva, com os dados sendo coletados através de palavras e imagens; o interesse da investigação são os processos e não os resultados; os dados são examinados de maneira indutiva e o significado dela é vital, visando entender as situações através de diversos pontos de vista.

Os dois encontros de aplicação da proposta didática aconteceram com a professora sendo mediadora no decorrer das atividades. Cada dupla teve a liberdade de executar no seu ritmo, sendo definido somente que no primeiro encontro seriam realizadas as questões 1 até a 8 e no segundo encontro as questões 9 até 16. Quando a dupla não conseguia desenvolver um “argumento” ou solução para a questão, entravam em contato com a professora, que prontamente auxiliava-os através de questionamentos, sem interferir diretamente no raciocínio que já seguiam, deixando-os livres para seguirem aquilo que acreditavam estar correto.

Os dados foram coletados através da apostila com atividades descritivas resolvidas pelos estudantes e do caderno de bordo da pesquisadora. As apostilas foram digitalizadas e posteriormente devolvidas aos estudantes. Tais dados serão armazenados por pelo menos 5 anos da data da pesquisa e após serão deletados pelas pesquisadoras. Aplicou-se a análise de conteúdo de Bardin (2011) para investigar e interpretar os dados coletados, a fim de propiciar uma percepção mais aprofundada dos resultados apurados. Primeiramente, aconteceu uma análise prévia dos dados, que incluiu a organização do material coletado em uma tabela. Ademais, foi feito um levantamento do material obtido através da categorização, seguido da realização de inferências dos dados com os referenciais teóricos escolhidos.

.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, serão analisados os dados coletados durante a aplicação da proposta didática. Tais dados foram gerados através das respostas elaboradas pelos alunos na resolução das atividades propostas e das anotações registradas pela pesquisadora em seu caderno de bordo no decorrer da aplicação. Na intenção de preservar a identidade dos participantes da pesquisa, os alunos foram identificados, de forma aleatória, como A1, A2, A3, …, A19.

Antes, é importante ressaltar que Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) questionam a crença de que, para o ensino de álgebra, só por meio da manipulação de sua linguagem específica é que o Pensamento Algébrico pode se manifestar. Para eles, essa é uma conduta equivocada, pois “essa relação de subordinação do Pensamento Algébrico à linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, pelo menos em princípio, a expressão de um pensamento” (Fiorentini; Miguel; Miorim, 1993, p.85).

Portanto, para analisar de que forma uma proposta didática que trabalha sequências a partir de materiais manipulativos pode facilitar o ensino de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, baseado nos elementos caracterizadores do Pensamento Algébrico de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), após levantamento dos dados, para este trabalho estabeleceram-se quatro categorias para análise dos dados:

1. Percebe a relação de recorrência com a etapa anterior.
2. Desenvolve algum tipo de processo de generalização, mas não consegue justificar através da linguagem, seja usual ou algébrica.
3. Desenvolve algum tipo de processo de generalização e consegue justificar através da linguagem usual.
4. Desenvolve algum tipo de processo de generalização e expressa-a através de linguagem algébrica.

A aplicação da proposta didática aconteceu na turma onde a pesquisadora é regente de classe e contou com a participação de 27 alunos. Contudo, foram desconsideradas da análise aquelas resoluções realizadas por estudantes que tiveram a participação negada através do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE (Apêndice C) ou do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Apêndice D), ou que não participaram dos dois encontros de aplicação ou que responderam de maneira ilegível às atividades. Após esse levantamento inicial, somente foram analisados os dados de 19 estudantes.

Ao início, a pesquisadora fez uma conversa com os estudantes explicando o que seria o trabalho, quais eram os objetivos e o que estaria envolvido no decorrer da pesquisa, além disso explicou que a pesquisa não prejudicaria os estudantes, pois envolvia conteúdos que estavam na matriz curricular do 7º ano, e que os estudantes que não participassem da pesquisa fariam a atividade da mesma forma e os seus dados só não constariam nas análises posteriores. Após a conversa, foram entregues os termos, os quais foram encaminhados para casa para que fossem lidos e assinados pelos responsáveis (TCLE) e pelos participantes da pesquisa (TALE) e entregues na aula subsequente.

Após o retorno dos termos devidamente preenchidos e assinados, iniciou-se a aplicação da proposta didática. No primeiro encontro, a turma foi dividida em duplas, sendo que as duplas foram definidas pelos próprios alunos, mas de forma que ambos estivessem autorizados ou não estivessem autorizados a participar da pesquisa. Organizada a sala, cada dupla recebeu um exemplar do material concreto confeccionado e cada participante recebeu uma apostila impressa com a atividade a ser desenvolvida. Pode-se observar uma dupla realizando a atividade na Figura 6 a seguir.

Figura 6 – Dupla manipulando o material concreto para resolver a atividade

Fonte: Fotografia tirada pela autora (2023)

Após serem organizados em uma tabela, os dados obtidos através das respostas dos estudantes nas atividades foram classificados seguindo os critérios explicitados no Quadro 2.

Quadro 2 – Critérios de avaliação dos dados

Critérios de avaliação	Descrição
Correto	Respondeu o esperado para a questão.
Parcialmente correto	Respondeu metade ou mais da metade da questão conforme o esperado.
Incorreto	Respondeu menos da metade da questão conforme o esperado.
Não respondeu	Entregou a questão em branco.

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Para a análise dos dados, se assumiu esses critérios de avaliação para todas as atividades executadas. Além disso, as questões foram organizadas em grupos a partir da similaridade de objetivos. Ao todo, a análise é composta por nove grupos, organizados da seguinte maneira:

Quadro 3 – Grupos de questões

Grupo	Questões
Primeiro	1, 2, 3, 4 e 5
Segundo	Letras *a*, *b* e *c* da questão 6
Terceiro	7 e 8
Quarto	9
Quinto	Letras *a*, *b*, *c* e *d* da questão 10
Sexto	Letras *e*, *f*, *g*, *h* e *i* da questão 10
Sétimo	11, 12, 13 e 14
Oitavo	15
Nono	16

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

O primeiro grupo é composto pelas 5 primeiras questões da atividade, conforme Figuras 7, 8, 9, 10 e 11 abaixo, as quais foram pensadas para instigar os alunos a perceberem o padrão existente na quantidade de peças adicionadas e na quantidade de peças totais, através do material manipulável, visando a percepção da formação de quadrados perfeitos na quantidade total de peças utilizadas em todas as etapas, e a quantidade ímpar de peças adicionadas à medida em que a etapa aumentava.

Figura 7 – Questão 1

Etapa 1: Represente um quadrado com a menor quantidade de peças possível, e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram utilizadas? ______________________
	b) Se uma peça tem 1 unidade de medida de lado (1 u.m.), quanto mede o lado do quadrado formado? ______________________ ______________________

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Figura 8 – Questão 2

Etapa 2: Acrescentando peças de cor diferente da inicial, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram adicionadas? ______________________________
	b) Quantas peças ao todo foram utilizadas? ______________________________
	c) Quanto mede o lado do quadrado formado? ______________________________ ______________________________

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Figura 9 – Questão 3

Etapa 3: Acrescentando peças de cor diferente da etapa 2, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram adicionadas? ______________________________
	b) Quantas peças ao todo foram utilizadas? ______________________________
	c) Quanto mede o lado do quadrado formado? ______________________________ ______________________________

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Figura 10 – Questão 4

Etapa 4: Acrescentando peças de cor diferente da etapa 3, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram adicionadas? ______________________________
	b) Quantas peças ao todo foram utilizadas? ______________________________
	c) Quanto mede o lado do quadrado formado? ______________________________ ______________________________

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Figura 11 – Questão 5

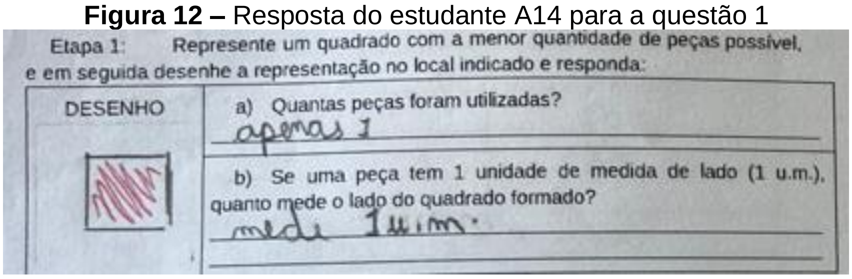
Etapa 5: **ATENÇÃO!** Sem o auxílio do material, pense em como seria formado um quadrado maior que o anterior, com o menor número possível de peças acrescentadas e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças seriam adicionadas?
	b) Quantas peças ao todo seriam utilizadas?
	c) Quanto iria medir o lado do quadrado que seria formado?

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Neste primeiro grupo, boa parte dos estudantes respondeu às questões de maneira correta, como exemplificado nas Figuras 12, 13 e 14 a seguir.

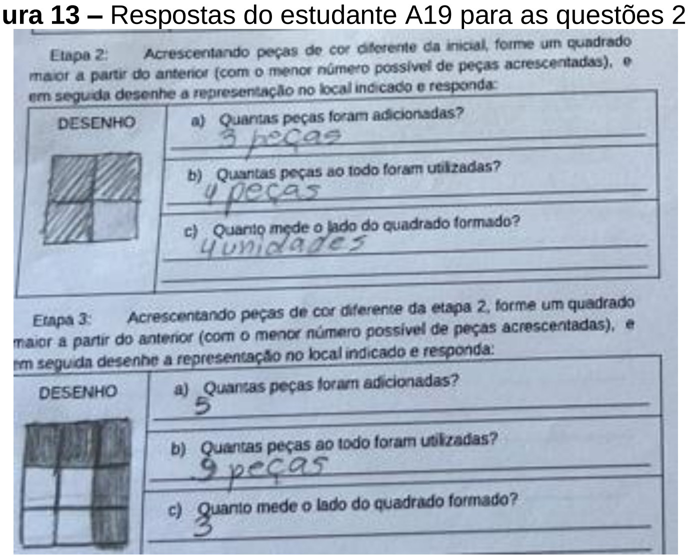
Figura 12 – Resposta do estudante A14 para a questão 1


Etapa 1: Represente um quadrado com a menor quantidade de peças possível, e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram utilizadas? apenas 1
	b) Se uma peça tem 1 unidade de medida de lado (1 u.m.), quanto mede o lado do quadrado formado? medi 1u.m.

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A14 (2023)

Figura 13 – Respostas do estudante A19 para as questões 2 e 3


Etapa 2: Acrescentando peças de cor diferente da inicial, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

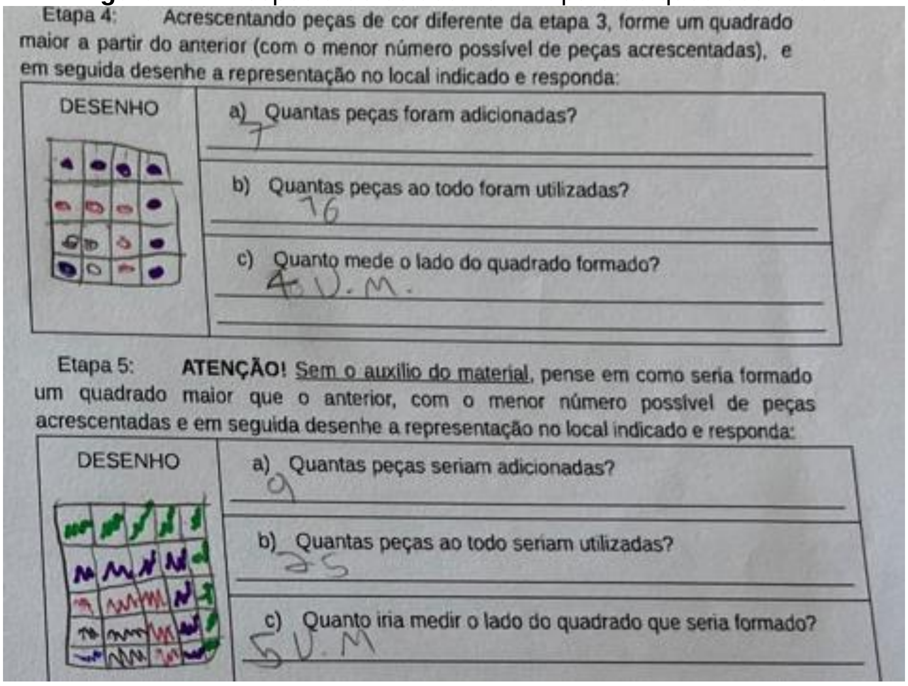
DESENHO	a) Quantas peças foram adicionadas? 3 peças
	b) Quantas peças ao todo foram utilizadas? 4 peças
	c) Quanto mede o lado do quadrado formado? 4unidades

Etapa 3: Acrescentando peças de cor diferente da etapa 2, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram adicionadas? 5
	b) Quantas peças ao todo foram utilizadas? 9 peças
	c) Quanto mede o lado do quadrado formado? 3

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A19 (2023)

Figura 14 – Resposta do estudante A17 para as questões 4 e 5



Etapa 4: Acrescentando peças de cor diferente da etapa 3, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO

a) Quantas peças foram adicionadas?
7

b) Quantas peças ao todo foram utilizadas?
16

c) Quanto mede o lado do quadrado formado?
4 U.M.

Etapa 5: **ATENÇÃO!** Sem o auxílio do material, pense em como seria formado um quadrado maior que o anterior, com o menor número possível de peças acrescentadas e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO

a) Quantas peças seriam adicionadas?
9

b) Quantas peças ao todo seriam utilizadas?
25

c) Quanto iria medir o lado do quadrado que seria formado?
5 U.M

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A17 (2023)

Com o levantamento dos dados, a quantidade de alunos por critério de avaliação de resposta nas questões do primeiro grupo foi apresentada conforme mostra a Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 - Avaliação das respostas das atividades do primeiro grupo

Critérios de avaliação	Quantidade de alunos					
	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Média
Correto	16	10	11	10	11	11,6
Parcialmente correto	1	5	5	4	4	3,8
Incorreto	2	4	3	5	4	3,6
Não respondeu	0	0	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Neste primeiro grupo, em média, 61,05% da turma respondeu as atividades de maneira correta, 20% respondeu pelo menos metade das questões da maneira correta e 18,95% respondeu de maneira incorreta, de acordo com as orientações do enunciado. Para os cálculos dos percentuais, foi feita a média aritmética de estudantes por categoria de resposta, levando em consideração que os 19 alunos da pesquisa equivalem a 100%. Nas tabelas 2, 3, 4 e 5 posteriores, o cálculo dos percentuais foi feito seguindo a mesma organização.

Pode-se destacar, após este grupo de atividades, o quão importante foi o auxílio do material concreto e do processo de experimentação, conforme destaca Lorenzato (2010), para que os estudantes estabelecessem alguma relação de recorrência existente entre a etapa em que se encontram com a etapa anterior e conseguissem mobilizar esses saberes aprendidos para dar continuidade à resolução das demais atividades.

O segundo grupo é composto pela questão 6:

Questão 6:

E se não tivéssemos mais peças para serem acrescentadas para construção do quadrado da 10ª etapa,

a) Quantas peças seriam adicionadas ao quadrado da etapa anterior à 10ª etapa? Explique como você chegou nessa resposta.

b) Quantas peças ao todo formariam esse quadrado?

c) O quadrado que seria formado teria quantas unidades de medida de lado?

Esta questão tem por objetivo estimular o aluno a reproduzir o padrão observado sem o auxílio do material manipulável, bem como perceber se o aluno desenvolveu algum tipo de processo de generalização (Fiorentini, Fernandes e Cristovão, 2005). Quando a questão foi elaborada, esperava-se que os estudantes compreendessem que a etapa anterior à 10 seria a etapa 9, porém, após a resposta dos estudantes, percebeu-se que essa escrita causou diferentes interpretações. Cabe destacar que, após a aplicação da proposta, ajustes foram feitos nesta questão na intenção de minimizar as dificuldades ocasionadas pelas várias interpretações do enunciado.

Foram consideradas corretas as seguintes respostas:

Resposta da questão 6:

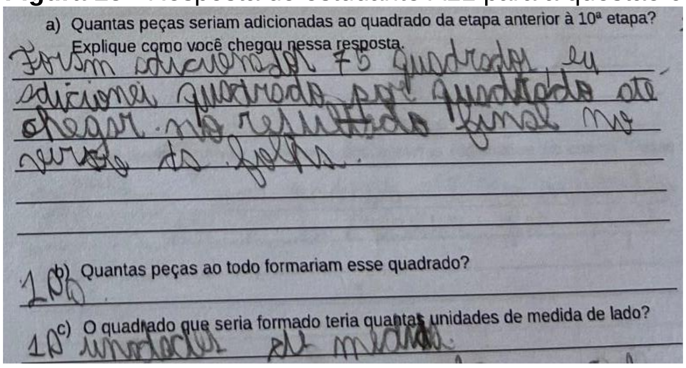
a) Seriam adicionadas 19 peças ao quadrado da etapa anterior à 10ª etapa (9ª etapa). Observando que a quantidade de peças acrescentadas é uma quantidade ímpar, na 10ª etapa basta identificarmos o 10º número ímpar, ou seja, que foi seguindo a sequência dos números ímpares.

b) Formariam o quadrado 100 peças ao todo. Observando que a quantidade de peças totais é sempre o quadrado da etapa, basta fazer 10×10 *para obter o total. Ou, observando que na 10ª etapa teremos formado um quadrado de lado 10, para descobrirmos a área total basta fazer o produto entre as medidas dos seus lados* 10×10.

c) O quadrado formado teria 10 unidades de medida de lado, pois a quantidade de unidades de medida de lado é indicada pela etapa.

Neste grupo, alguns estudantes responderam à questão corretamente, porém para outra etapa que não a solicitada em decorrência de um erro de interpretação do enunciado. Podemos observar que o aluno A11 (Figura 15), quando responde na letra a *"Foram adicionados 75 quadrados, eu adicionei quadrado por quadrado até chegar no resultado final no verso da folha"* interpreta corretamente o enunciado, mas relaciona a quantidade de peças acrescentadas à etapa 5 para construir a etapa 10, ou seja, somou a quantidade de peças acrescentadas da etapa 6 até a etapa 10, quando na verdade era para indicar a quantidade de peças acrescentadas à etapa 9 para formar a etapa 10.

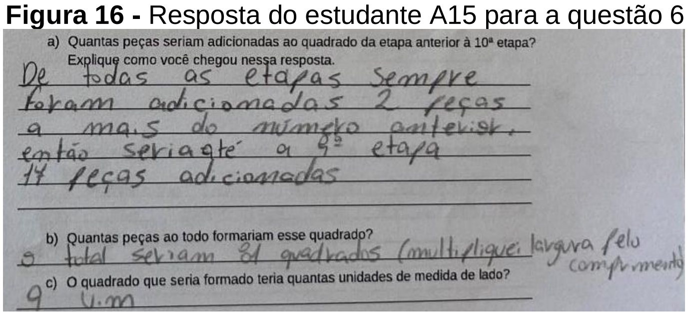
Figura 15 - Resposta do estudante A11 para a questão 6


a) Quantas peças seriam adicionadas ao quadrado da etapa anterior à 10ª etapa? Explique como você chegou nessa resposta.
Foram adicionados 75 quadrados, eu adicionei quadrado por quadrado até chegar no resultado final no verso da folha.
b) Quantas peças ao todo formariam esse quadrado?
100
c) O quadrado que seria formado teria quantas unidades de medida de lado?
10 unidades de medida.

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A11 (2023)

Ainda, o aluno A15 (Figura 16), quando responde na alínea a *"De todas as etapas sempre foram adicionadas 2 peças a mais do número anterior, então seria até a 9ª etapa 17 peças adicionadas"*, interpreta corretamente o enunciado, porém responde todos os itens levando em consideração a 9ª etapa, e não a 10ª.

Figura 16 - Resposta do estudante A15 para a questão 6


a) Quantas peças seriam adicionadas ao quadrado da etapa anterior à 10ª etapa? Explique como você chegou nessa resposta.
De todas as etapas sempre foram adicionadas 2 peças a mais do número anterior, então seria até a 9ª etapa 17 peças adicionadas
b) Quantas peças ao todo formariam esse quadrado?
O total seriam 81 quadrados (multipliquei largura pelo comprimento)
c) O quadrado que seria formado teria quantas unidades de medida de lado?
9 u.m

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A15 (2023)

Essas dificuldades de interpretação levaram a repensar a escrita da questão, de forma a tornar o enunciado da questão mais claro. Tais alterações de escritas já constam no material disponibilizado no apêndice B.

Pode-se observar na Tabela 2 a quantidade de alunos por critério de avaliação de resposta (Quadro 2) relativamente às questões do segundo grupo.

Tabela 2 – Avaliação das respostas das atividades do segundo grupo

Critérios de avaliação	**Quantidade de alunos**			
	Questão 6 – letra a	Questão 6 – letra b	Questão 6 – letra c	Média
Correto	4	8	7	6,3
Parcialmente correto	9	4	4	5,6
Incorreto	4	6	8	6
Não respondeu	2	1	0	1

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Pode-se calcular, a partir da Tabela 2, que, em média, 33,15% dos estudantes responderam corretamente às questões do grupo 2; 29,47% de forma parcialmente correta, pois responderam para outra etapa que não a solicitada em decorrência de uma má interpretação do enunciado; 31,58% dos estudantes responderam de maneira incorreta e 5,26% não responderam. Aqui observa-se que além de perceber a relação de recorrência existente, alguns estudantes estabelecem algum processo de generalização e conseguem expressar essa regularidade através da linguagem usual, como pode ser observado na Figura 16.

O terceiro grupo é composto pelas questões 7 e 8.

Questão 7:

Complete o quadro a seguir:

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1		
2		
3		
4		
5		
...	...	...
10		

Questão 8:

Qual estratégia você utilizou para o registro da 10ª etapa? Explique detalhadamente o que pensou.

O quadro de registros da questão 7 visa auxiliar os alunos a organizarem as informações obtidas nas questões anteriores e, junto da questão 8, favorecer uma reflexão sobre as conclusões a respeito da generalização efetuada na questão 6. Foram consideradas corretas as seguintes respostas:

Questão 7:

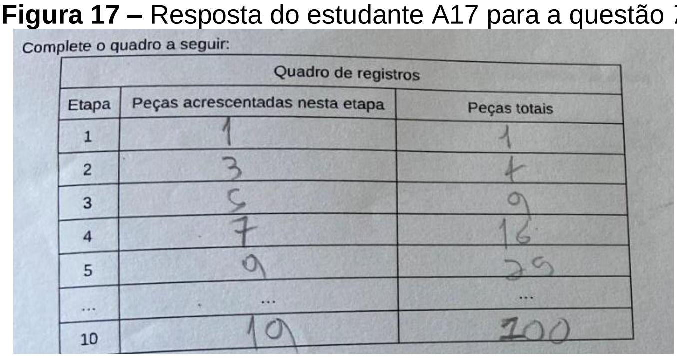
Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
...	...	...
10	19	100

Questão 8:

A estratégia utilizada foi desenhar os quadradinhos de cada etapa, ou foi imaginando a sequência, ou até mesmo se observou algum padrão existente.

Neste grupo, quando analisado como um todo a tabela preenchida e a justificativa da resolução, somente 5 estudantes conseguiram responder corretamente, sendo um deles o A17 (Figura 17).

Figura 17 – Resposta do estudante A17 para a questão *7*


Complete o quadro a seguir:

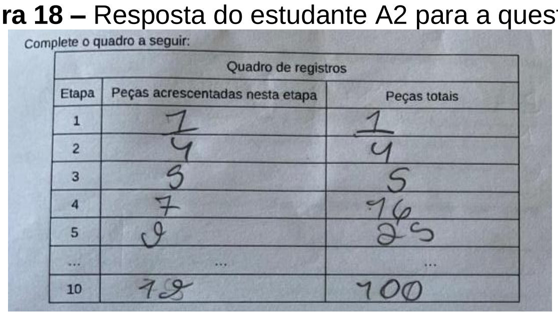
Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
...	...	...
10	19	100

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A17 (2023)

Na questão 8 o aluno A17 escreveu: *“As peças acrescentadas sempre serão ímpares e as peças totais sempre serão as etapas ao quadrado, então eu fiz na ordem dos números ímpares nas peças acrescentadas e elevado a 2 as etapas nas peças totais”*

Ainda observando o grupo, há “indícios” de que alguns estudantes acabaram “pegando as respostas” com um colega, pois sua justificativa não condiz com o que foi colocado na tabela; como é possível observar através da Figura 18, o estudante A2 preenche corretamente a tabela.

Figura 18 – Resposta do estudante A2 para a questão 7


Complete o quadro a seguir:

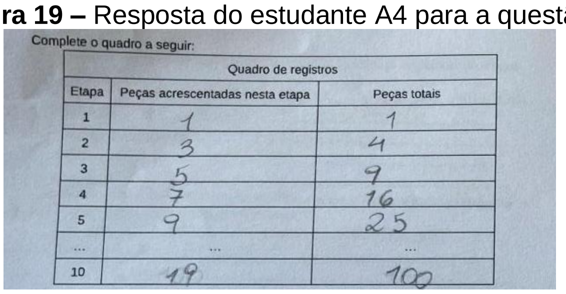
Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	1	1
2	4	4
3	3	5
4	7	16
5	9	25
...	...	...
10	19	100

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A2 (2023)

Porém, na questão 8, quando é necessário justificar a estratégia utilizada, o mesmo aluno (A2) escreveu: *“Eu pensei que se eu adicionei quadrados pequenos no quadrado grande”*, sem concluir a frase.

Percebe-se também que os alunos apresentam uma grande dificuldade em expressar aquilo que pensaram, pois poucos deles conseguiram responder corretamente. Por exemplo, o estudante A4 preenche corretamente a tabela da questão 7 (Figura 19).

Figura 19 – Resposta do estudante A4 para a questão 7


Complete o quadro a seguir:

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
...	...	...
10	19	100

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A4 (2023)

Já na questão 8, o mesmo aluno (A4) respondeu: *“Eu sinceramente não pensei, apenas fui seguindo a sequência, que utilizei nas anteriores usando os materiais entregues pela professora Nathalia”*. Este aluno consegue desenvolver algum tipo de processo de generalização, porém ainda não consegue expressar tal regularidade através da linguagem.

Por outro lado, percebe-se, também, que alguns estudantes conseguem expressar seus pensamentos através da linguagem usual. É o que se observa quando o aluno A5 responde para esta mesma questão que *"Eu fui adicionando as peças que nem as etapas anteriores até chegar a etapa 10. Na 5 que foi a que a gente fez por último era 9 peças, na 6 onze, 7 era 13, 8 era 15, 9 era 17 e por fim a 10 que eu acrescentei 19".*

Ainda conforme os critérios de avaliação definidos no Quadro 2, a Tabela 3 traz os resultados referentes a essas questões (terceiro grupo).

Tabela 3 – Avaliação das respostas das atividades do terceiro grupo

Critérios de avaliação	**Quantidade de alunos**		
	Questão 7	Questão 8	Média
Correto	12	5	8,5
Parcialmente correto	5	8	6,5
Incorreto	0	6	3
Não respondeu	2	0	1

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Neste grupo, observou-se que 44,73% responderam de maneira correta e que 34,21% responderam de maneira parcialmente correta as atividades. Percebe-se, portanto, que os estudantes identificam a relação existente entre as etapas e demonstram algum tipo de processo de generalização, mesmo que às vezes não consigam expressar seus pensamentos através da linguagem.

O quarto grupo é composto pela questão 9.

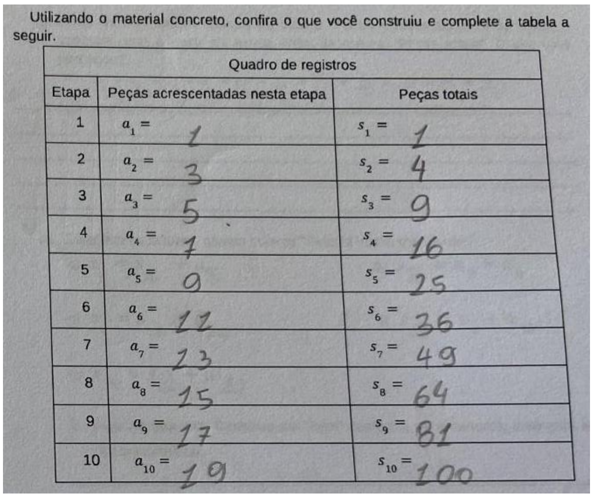
Questão 9:

Utilizando o material concreto, confira o que você construiu e complete a tabela a seguir.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	$a_1 =$	$s_1 =$
2	$a_2 =$	$s_2 =$
3	$a_3 =$	$s_3 =$
4	$a_4 =$	$s_4 =$
5	$a_5 =$	$s_5 =$
6	$a_6 =$	$s_6 =$
7	$a_7 =$	$s_7 =$
8	$a_8 =$	$s_8 =$
9	$a_9 =$	$s_9 =$
10	$a_{10} =$	$s_{10} =$

Esta questão buscava auxiliar os alunos a verificarem, etapa a etapa, se calcularam corretamente as quantidades para a etapa 10; bem como, permitir àqueles alunos que não conseguiram responder à questão 7 que então, com o uso do material concreto e da recursividade, conseguissem. Ao mesmo tempo, possibilitava observar se os alunos puderam perceber o padrão existente na organização das peças do material concreto para realizar cada etapa. O estudante A9, conforme Figura 20, apresenta a tabela preenchida corretamente.

Figura 20 – Resposta do estudante A9 para a questão 9



Utilizando o material concreto, confira o que você construiu e complete a tabela a seguir.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	$a_1 =$ 1	$s_1 =$ 1
2	$a_2 =$ 3	$s_2 =$ 4
3	$a_3 =$ 5	$s_3 =$ 9
4	$a_4 =$ 7	$s_4 =$ 16
5	$a_5 =$ 9	$s_5 =$ 25
6	$a_6 =$ 11	$s_6 =$ 36
7	$a_7 =$ 13	$s_7 =$ 49
8	$a_8 =$ 15	$s_8 =$ 64
9	$a_9 =$ 17	$s_9 =$ 81
10	$a_{10} =$ 19	$s_{10} =$ 100

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A9 (2023)

Tal atividade foi realizada pelos estudantes no início do segundo encontro da aplicação e contou novamente com o auxílio do material concreto. Com isso, pode-se perceber que 15 estudantes conseguiram completar a tabela da maneira correta e os 4 estudantes restantes conseguiram completar a tabela de forma parcialmente correta (mais da metade das informações corretas). Pode-se destacar, após esta atividade, o quão importante foi o auxílio do material concreto e do processo anterior de experimentação, conforme destaca Lorenzato (2010), para que os estudantes enxergassem a regularidade existente e conseguissem mobilizar esses saberes aprendidos para dar continuidade a resolução da atividade.

O quinto grupo é composto pelas letras a, b, c e d da questão 10:

Questão 10:

Análise das informações levantadas:

a) *O que você observou a respeito dos números registrados na coluna "Peças acrescentados nesta etapa"?*

b) *O que você observou a respeito dos números registrados na coluna "Peças totais"?*

c) *Qual a relação existente entre a etapa e a quantidade registrada na coluna "Peças totais"?*

d) ***DESAFIO:*** *Qual a relação existente entre a etapa e a quantidade registrada na coluna "Peças acrescentados nesta etapa"?*

Este grupo buscava identificar se os alunos conseguiram realmente identificar o padrão existente entre os elementos das etapas (etapa, peças acrescentadas, peças totais) e desenvolver algum tipo de processo de generalização, expressando-o através da linguagem. As respostas consideradas corretas foram:

Questão 10:

a) *Que os números são todos ímpares.*

b) *Que os números são quadrados perfeitos.*

c) *Que a quantidade registrada na coluna "peças totais" é o quadrado da "etapa", ou a "etapa" vezes ela mesma resulta na quantidade de "peças totais"*

d) *Que a quantidade de "peças acrescentadas nesta etapa" é o dobro da "etapa" menos um, ou é a soma da "etapa" anterior com a "etapa" atual, ou que na primeira "etapa" temos a quantidade de "peças acrescentadas nesta etapa" correspondendo ao primeiro número ímpar e assim sucessivamente*

Em resposta à primeira pergunta deste grupo (*O que você observou a respeito dos números registrados na coluna "Peças acrescentados nesta etapa"?*), 10 alunos afirmaram que os números "aumentavam de 2 em 2" (considerado parcialmente correto), tendo eles reparado no padrão de recorrência existente entre a etapa atual e a anterior. Era esperado que os estudantes identificassem que os números eram todos ímpares e não apenas que explicitassem a relação entre um termo e seu antecessor. Conjectura-se que se a pergunta fosse "o que os números da coluna têm em comum?", possivelmente haveria mais respostas corretas.

Na Tabela 4, observa-se a quantidade de alunos de acordo com os critérios de avaliação definidos no Quadro 2.

Tabela 4 – Avaliação das respostas das atividades do quinto grupo

Critérios de avaliação	**Quantidade de alunos**				
	Questão 10 – letra a	Questão 10 – letra b	Questão 10 – letra c	Questão 10 – letra d	Média
Correto	8	14	16	11	12,2
Parcialmente correto	10	5	0	4	4,7
Incorreto	1	0	2	3	1,5
Não respondeu	0	0	1	1	0,5

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Neste grupo, em média, 64,21% dos estudantes atingiram o objetivo respondendo de maneira correta, enquanto 24,74% atingiu parcialmente, 7,89% não atingiu e 2,63% não respondeu à questão.

O sexto grupo é composto pelas letras e, f, g, h e i da questão 10, as quais tinham por objetivo fornecer uma espécie de “caminho” para a formalização da generalização a respeito da relação existente entre as peças acrescentadas nesta etapa e as peças totais.

Questão 10:

e) Some os 2 primeiros valores da coluna “Peças acrescentados nesta etapa” e compare com o valor da segunda linha da coluna “Peças totais”. O que você percebeu?

f) Some os 3 primeiros valores da coluna “Peças acrescentados nesta etapa” e compare com o valor da terceira linha da coluna “Peças totais”. O que você percebeu?

g) Some os 5 primeiros valores da coluna “Peças acrescentados nesta etapa” e compare com o valor da quinta linha da coluna “Peças totais”. O que você percebeu?

h) Complete as lacunas abaixo com os “índices” correspondentes:

a) $s_5 = s_{\_} + a_{\_}$
b) $s_8 = s_{\_} + a_{\_}$
c) $s_6 = s_{\_} + a_{\_}$
d) $s_{\_} = s_9 + a_{10}$
e) $s_{10} = s_{\_} + a_{\_}$

i) Agora é sua vez: Construa um “item” conforme os anteriores, e dê para sua dupla completar.

Para estes itens as respostas esperadas foram:

Questão 10:

e) A soma da quantidade de peças acrescentadas na etapa anterior com a quantidade de peças acrescentadas na etapa atual vai resultar na quantidade de peças totais da etapa atual.

$$a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$$

f) *A soma dos três primeiros valores da coluna “peças acrescentadas nesta etapa” resulta na quantidade de peças totais da terceira etapa.*

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

g) *A soma dos cinco primeiros valores da coluna “peças acrescentadas nesta etapa” resulta na quantidade de peças totais da quinta etapa.*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

h) Complete as lacunas abaixo com os “índices” correspondentes:

a) $s_5 = s_4 + a_5$

b) $s_8 = s_7 + a_8$
c) $s_6 = s_5 + a_6$
d) $s_{10} = s_9 + a_{10}$
e) $s_{10} = s_9 + a_{10}$

i) Um possível resultado seria: $S_{200} = S_{199} + a_{200}$

A Tabela 5 mostra a quantidade de alunos por critério de avaliação de respostas para as questões do sexto grupo.

Tabela 5 – Avaliação das respostas das atividades do sexto grupo

Critérios de avaliação	**Quantidade de alunos**					
	Questão 10 – letra e	Questão 10 – letra f	Questão 10 – letra g	Questão 10 – letra h	Questão 10 – letra i	Média
Correto	15	15	16	9	11	13,2
Parcialmente correto	2	2	1	6	6	3,4
Incorreto	1	1	1	3	1	1,4
Não respondeu	1	1	1	1	1	1

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Neste grupo, em média, 69,47% dos estudantes responderam corretamente, enquanto 17,89% respondeu de maneira parcialmente correta, 7,37% respondeu incorretamente e 5,26% não respondeu à questão. Observa-se um alto percentual de respostas corretas, o que se dá pela facilidade dos estudantes em observarem as informações organizadas na tabela.

O sétimo grupo é composto pelas questões 11, 12, 13 e 14.

Questão 11

O que aconteceria na etapa 15? Mostre como você faria para a etapa 15.

Questão 12

O que aconteceria na etapa 20? Mostre como você faria para a etapa 20.

Questão 13

O que aconteceria na etapa 50? Mostre como você faria para a etapa 50.

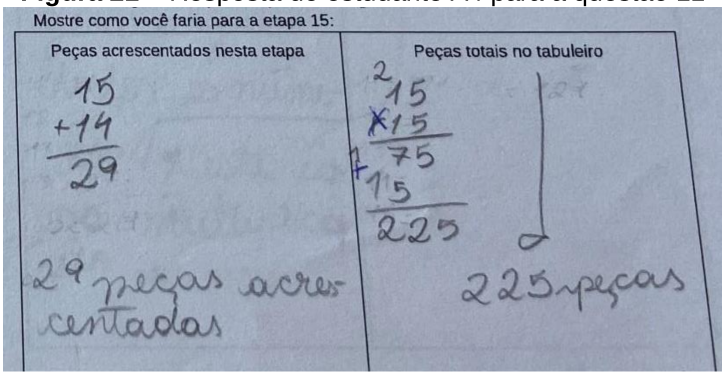
Questão 14

Complete o quadro de registros com as informações obtidas.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
15	$a_{15} =$	
20		
50		

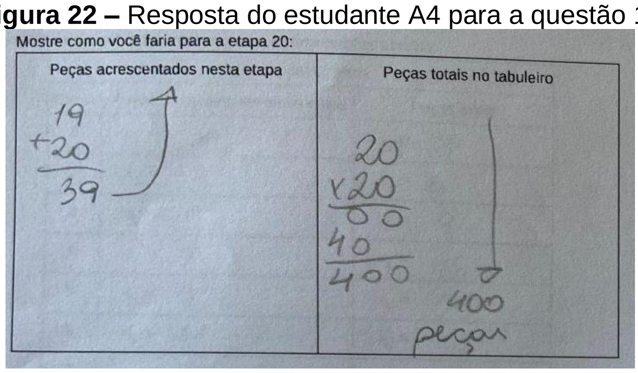
Nas questões de 11 a 13, os estudantes deveriam registrar, através de cálculos ou representações, as estratégias que definiram para responder o que era solicitado. Juntamente com a questão 14, o objetivo destas era instigar os alunos a desenvolverem algum tipo de processo de generalização e até mesmo expressarem essa regularidade através da linguagem algébrica, aplicando o padrão que eles perceberam após finalizarem a questão 10. O estudante A4, conforme é possível observar nas Figuras 21 e 22, desenvolveu corretamente as questões 11 e 12.

Figura 21 – Resposta do estudante A4 para a questão 11



Fonte: Apostila respondida pelo estudante A4 (2023).

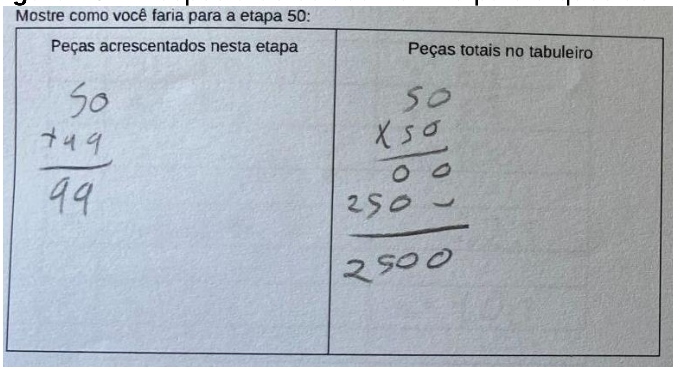
Figura 22 – Resposta do estudante A4 para a questão 12



Fonte: Apostila respondida pelo estudante A4 (2023).

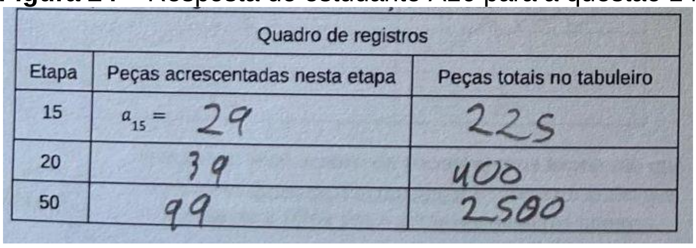
Já o estudante A16 desenvolveu corretamente as questões 13 e 14, conforme ilustrado nas Figuras 23 e 24 abaixo.

Figura 23 – Resposta do estudante A16 para a questão 13



Fonte: Apostila respondida pelo estudante A16 (2023).

Figura 24 – Resposta do estudante A16 para a questão 14



Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
15	a_{15} = 29	225
20	39	400
50	99	2500

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A16 (2023).

Em ambas as resoluções, os estudantes A4 e A16 demonstraram ter conseguido identificar que a quantidade de peças totais utilizadas se dá pelo quadrado da etapa. Por exemplo, para a etapa 15 teriam $15^2 = 15 \times 15 = 225$ peças ao todo. Bem como, quando se olha para as peças acrescentadas na etapa, os alunos demonstram ter percebido que essa quantidade de peças acrescentadas é igual a soma da etapa atual com a anterior, ou seja, para a etapa 15, seriam acrescentadas $15 + (15 - 1) = 15 + 14 = 29$ peças.

A quantidade de alunos por critério de avaliação de resposta nas questões do sétimo grupo foi apresentada conforme mostra a Tabela 6 a seguir.

Tabela 6 – Avaliação das respostas das atividades do sétimo grupo

Critérios de avaliação	**Quantidade de alunos**				
	Questão 11	Questão 12	Questão 13	Questão 14	Média
Correto	13	10	11	12	11,5
Parcialmente correto	2	6	3	3	3,5
Incorreto	4	2	2	2	2,5
Não respondeu	0	1	3	2	1,5

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Neste grupo, 60,53% dos alunos responderam de maneira correta, ou seja, conseguiram compreender e generalizar o padrão existente. Ainda, 18,42%

respondeu de maneira parcialmente as atividades, 13,16% respondeu incorretamente e 7,89% não respondeu.

O oitavo grupo é composto pela questão 15.

Questão 15

E se fossemos generalizar para qualquer número natural n, o que aconteceria? Qual seria a expressão que utilizaríamos em cada uma das colunas abaixo? Mostre como você faria para a etapa n.

A questão tem por objetivo incentivar os alunos a expressarem as regularidades observadas através da notação algébrica. Mais especificamente, espera-se que eles utilizem a letra n como uma variável para representar uma quantidade arbitrária de etapas e, assim, escrevam expressões para os termos gerais das sequências "quantidade de peças acrescentadas nesta etapa" e das "peças totais".

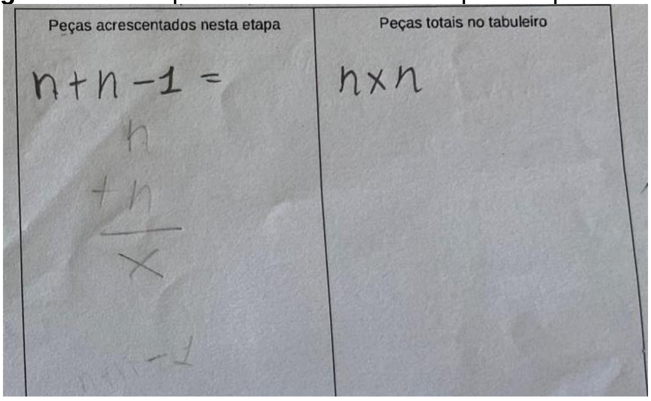
Esperava-se que os estudantes respondessem:

RESPOSTA DA QUESTÃO 15

Esperava-se que os estudantes respondessem que a expressão que representa as peças acrescentadas nesta etapa é $2n - 1$ e a expressão que representa as peças totais é n^2 ou $n \times n$.

Analisando as respostas dos estudantes, percebe-se que chegar na expressão do quadrado da etapa foi, de certa forma, tranquilo para boa parte da turma. A dificuldade, que já se esperava, era na construção da expressão que representa a quantidade de peças acrescentadas. Analisando as respostas, 1 estudante atingiu o esperado, 8 estudantes atingiram parcialmente, corroborando com o que já se esperava, 5 estudantes não atingiram o esperado e 5 estudantes não responderam à questão.

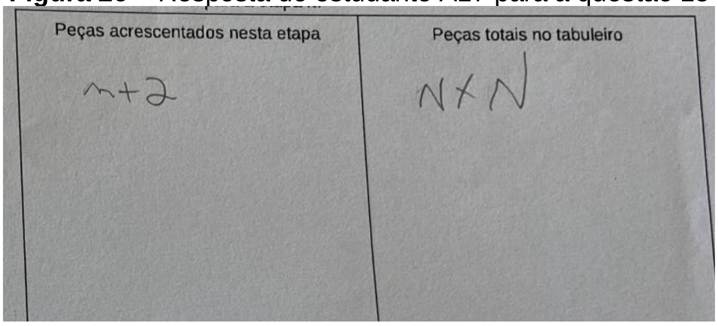
Figura 25 – Resposta do estudante A18 para a questão 15



Fonte: Apostila respondida pelo estudante A18 (2023).

O estudante da Figura 25 acima foi o único que respondeu corretamente os dois questionamentos do grupo 8. É possível identificar que tal estudante desenvolveu algum tipo de processo de generalização e expressou corretamente a regularidade observada através de uma linguagem algébrica. Já o estudante 17 (conforme Figura 26) parece tentar fornecer uma expressão para a relação de recorrência, que seria $a_{(n-1)} + 2$, para indicar quantas seriam as peças acrescentadas na *n-ésima* etapa.

Figura 26 – Resposta do estudante A17 para a questão 15

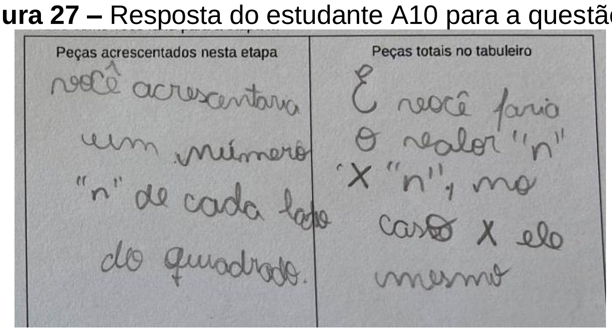


Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
n+2	N X N

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A17 (2023).

Ainda, o estudante A10, conforme mostra a Figura 27, ainda recorre a representação geométrica do material para justificar a etapa "n". Percebe-se que este estudante desenvolveu algum tipo de processo de generalização e conseguiu justificar isto através da linguagem usual.

Figura 27 – Resposta do estudante A10 para a questão 15



Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
você acrescentaria um número "n" de cada lado do quadrado.	É você faria o valor "n" X "n", no caso X ele mesmo

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A17 (2023).

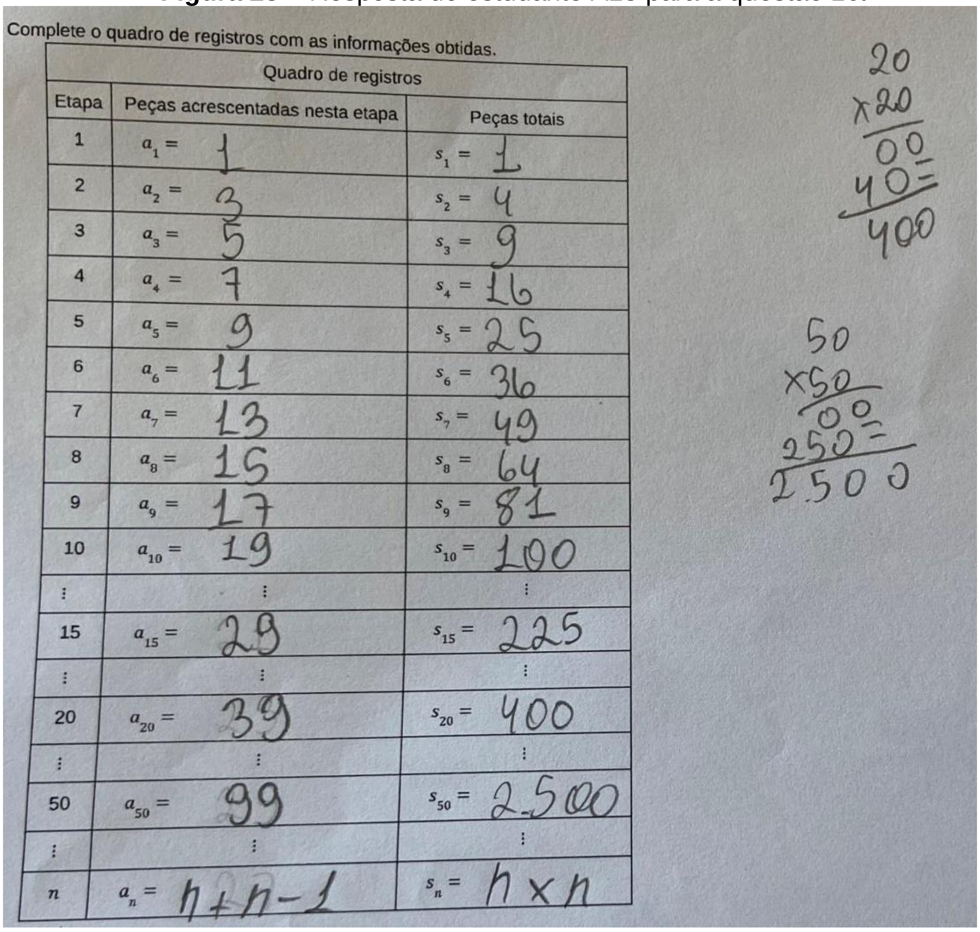
O nono grupo é composto pela questão 16.

Questão 16   *Complete o quadro de registros com as informações obtidas*

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	$a_1 =$	$s_1 =$
2	$a_2 =$	$s_2 =$
3	$a_3 =$	$s_3 =$
4	$a_4 =$	$s_4 =$
5	$a_5 =$	$s_5 =$
6	$a_6 =$	$s_6 =$
7	$a_7 =$	$s_7 =$
8	$a_8 =$	$s_8 =$
9	$a_9 =$	$s_9 =$
10	$a_{10} =$	$s_{10} =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$a_{15} =$	$s_{15} =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	$a_{20} =$	$s_{20} =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
50	$a_{50} =$	$s_{50} =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_n =$	$s_n =$

Ele tem por objetivo organizar as informações obtidas nas atividades anteriores em uma tabela, a fim de fazer os alunos observarem a atividade como um todo. Neste grupo, apenas o estudante A18 conseguiu responder corretamente à questão, como vê-se na Figura 28 a seguir.

Figura 28 – Resposta do estudante A18 para a questão 16.



Complete o quadro de registros com as informações obtidas.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	$a_1 =$ 1	$s_1 =$ 1
2	$a_2 =$ 3	$s_2 =$ 4
3	$a_3 =$ 5	$s_3 =$ 9
4	$a_4 =$ 7	$s_4 =$ 16
5	$a_5 =$ 9	$s_5 =$ 25
6	$a_6 =$ 11	$s_6 =$ 36
7	$a_7 =$ 13	$s_7 =$ 49
8	$a_8 =$ 15	$s_8 =$ 64
9	$a_9 =$ 17	$s_9 =$ 81
10	$a_{10} =$ 19	$s_{10} =$ 100
⋮	⋮	⋮
15	$a_{15} =$ 29	$s_{15} =$ 225
⋮	⋮	⋮
20	$a_{20} =$ 39	$s_{20} =$ 400
⋮	⋮	⋮
50	$a_{50} =$ 99	$s_{50} =$ 2.500
⋮	⋮	⋮
n	$a_n = n + n - 1$	$s_n = n \times n$

20
x20
00
40=
400

50
x50
00
250=
2500

Fonte: Apostila respondida pelo estudante A18 (2023).

Ou seja, 1 estudante respondeu de maneira correta, enquanto 13 estudantes responderam de maneira parcialmente correta e 5 estudantes não responderam.

Conforme mencionado no início deste capítulo, foram elencados os seguintes elementos caracterizadores do Pensamento Algébrico para a análise dos dados desta pesquisa: (1) Percebe a relação de recorrência com a etapa anterior; (2) Desenvolve algum tipo de processo de generalização, mas não consegue justificar através da linguagem, seja usual ou algébrica; (3) Desenvolve algum tipo de processo de generalização e consegue justificar através da linguagem usual; e (4) Desenvolve algum tipo de processo de generalização e expressa-a através de linguagem algébrica. É válido ressaltar que o aluno que apresentou o elemento (4) necessariamente apresentou os outros três elementos anteriores.

Assim, quando se observa a sequência didática como um todo, as categorias apresentadas por cada estudante são organizadas no Quadro 3, o qual deixa claro a relação de dependência de uma categoria em relação às anteriores.

Quadro 4 – Categorias relacionadas ao Pensamento Algébrico

Estudante	**Categorias do Pensamento Algébrico**			
	E1	**E2**	**E3**	**E4**
A1	✓	✓	✓	
A2	✓	✓		
A3				
A4	✓	✓		
A5	✓	✓	✓	
A6	✓			
A7	✓			
A8	✓	✓		
A9	✓	✓		
A10	✓	✓		
A11	✓	✓	✓	✓
A12	✓	✓		
A13	✓	✓	✓	
A14	✓	✓	✓	✓
A15	✓	✓	✓	✓
A16	✓	✓	✓	✓
A17	✓	✓	✓	✓
A18	✓	✓	✓	✓
A19	✓	✓	✓	

Legenda:
*E1: Percebe a relação de recorrência com a etapa anterior;
*E2: Desenvolve algum tipo de processo de generalização, mas não consegue justificar através da linguagem, seja usual ou algébrica;
*E3: Desenvolve algum tipo de processo de generalização e consegue justificar através da linguagem usual;
*E4: Desenvolve algum tipo de processo de generalização e expressa-a através de linguagem algébrica.

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

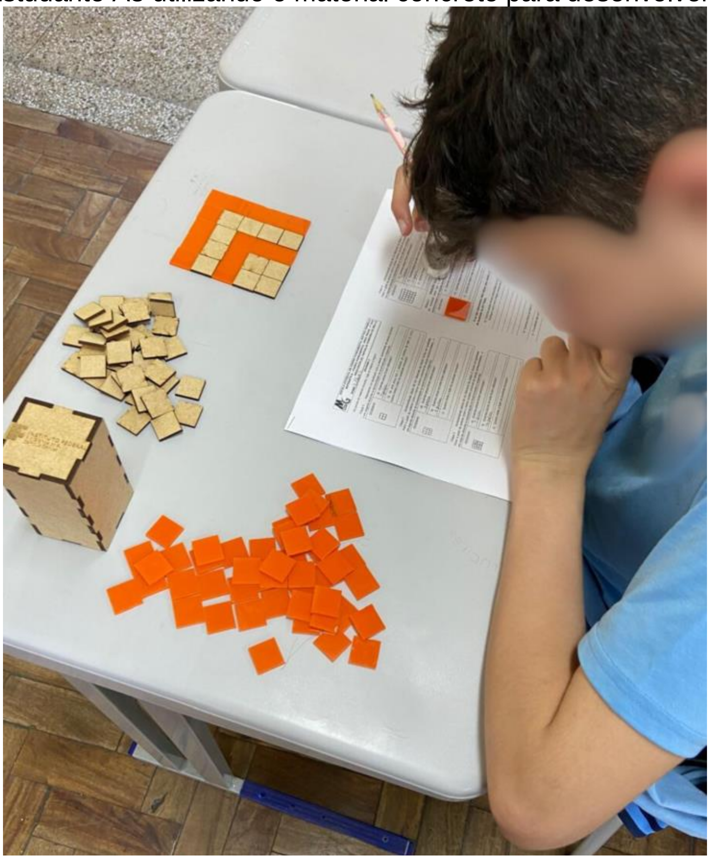
Pode-se perceber que os estudantes A6 e A7 apenas conseguiram perceber a relação de recorrência com a etapa anterior. Já os estudantes A2, A4, A8, A9, A10 e A12, além de perceber a relação de recorrência com a etapa anterior, conseguem desenvolver algum tipo de processo de generalização, mas não conseguem justificar através da linguagem, seja usual ou algébrica.

E os estudantes A1, A5, A13, A16, A17 e A19, além de perceber a relação de recorrência com a etapa anterior, desenvolvem algum tipo de processo de generalização e conseguem justificar através da linguagem usual.

Por fim, os estudantes A11, A14, A15, A16, A17 e A18, além de perceber a relação de recorrência com a etapa anterior, desenvolvem algum tipo de processo de generalização e expressam corretamente a regularidade observada através da linguagem algébrica. Destes, somente o estudante A18 conseguiu desenvolver corretamente as questões do grupo 15.

O Quadro 3 tem por objetivo apresentar como estas categorias puderam ser observados na realização da atividade por cada estudante. Porém, ele não dá conta de trazer as dificuldades e conquistas individuais. Por exemplo, o estudante A3 demonstrou interesse na atividade no primeiro dia de aplicação, se esforçando ao máximo para conseguir realizar o proposto e interagindo bem com o material concreto, como se observa na Figura 29.

Figura 29 – Estudante A3 utilizando o material concreto para desenvolver as atividades



Fonte: Fotografia tirada pela autora (2023).

Porém, no segundo encontro acabou se desinteressando, o que culminou na realização de atividades de “qualquer forma” ou até mesmo da não realização de algumas delas, o que talvez possa ser justificado pelo TEA.

Portanto, de maneira geral, a atividade se mostrou positiva, proporcionando o engajamento dos estudantes em seus processos de aprendizagem e o desenvolvimento de alguns elementos caracterizadores do Pensamento Algébrico.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo investigar de que forma uma proposta didática que trabalha sequências a partir de materiais manipulativos pode facilitar o ensino de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental. A proposta didática desenvolvida visou contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico através da exploração de sequências com o uso de material concreto, estimulando a identificação e investigação de padrões existentes, além da formulação e formalização de generalizações.

Para perceber se o trabalho com sequências e a construção da ideia de generalização através do uso de material concreto facilita o primeiro contato com a álgebra, foi necessário compreender o que é o Pensamento Algébrico e de que forma ele é desenvolvido e manifestado pelos estudantes. Além disso, buscou-se compreender como este desenvolvimento é explorado nos documentos orientadores dos currículos escolares (PCN e BNCC) e o quanto a utilização do material concreto contribui nesse processo.

Através das bibliografias estudadas, pode-se perceber que a compreensão da álgebra passa pelo desenvolvimento do Pensamento Algébrico, o qual se dá através da construção de habilidades e competências que propiciem a percepção de regularidades, o desenvolvimento de processos de generalizações e a expressão dessas (Duda, 2020; Ponte; Branco; Matos, 2009; Kaput, 1999; Canavarro, 2007).

Da mesma forma, os documentos analisados orientam que a álgebra seja estudada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, utilizando-se de situações de aprendizagem, focadas no desenvolvimento de competências integrantes do Pensamento Algébrico, que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades e padrões de sequências numéricas, a compreender e utilizar a simbologia algébrica, além de utilizar a abstração e generalização como ferramenta para resolução de problemas.

Ainda, a revisão bibliográfica sugeriu que a utilização de material concreto possibilita a experimentação e a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem, tornando-o mais atrativo e satisfatório, conforme corrobora Lorenzato (2010).

Durante a aplicação da proposta didática, observou-se um maior envolvimento dos alunos em comparação com as outras aulas dadas pela pesquisadora, o que se acredita ter acontecido em decorrência da utilização do material concreto. Este foi um facilitador da percepção dos estudantes a respeito das regularidades, e tornou-os mais ativos no processo de aquisição do seu próprio conhecimento; bem como possibilitou momentos de auto afirmação e satisfação pessoal, que foram expressos por gigantes sorrisos ao final das atividades. Estes resultados apontam para a importância de se utilizar materiais manipulativos no ensino da álgebra.

Contudo, foram encontradas algumas dificuldades durante a aplicação da proposta. Surgiram, por parte dos estudantes, problemas de interpretação dos enunciados, dificuldades em expressar o que estavam pensando, desânimo por parte de alguns específicos, que ao invés de tentar finalizar as atividades, preferiram deixá-las em branco. Em relação à dificuldade de compreensão dos enunciados, foram realizados alguns ajustes nas questões da apostila, de forma a tornar mais claro o que era solicitado. A proposta didática que se encontra no anexo deste trabalho já conta com essas alterações nos enunciados.

A análise dos dados, coletados através das atividades realizadas pelos estudantes e do caderno de bordo da pesquisadora, permitiu verificar que a exploração de sequências possibilitou aos estudantes o desenvolvimento de elementos fundamentais do Pensamento Algébrico, desenvolvidos pela pesquisadora, baseados nos elementos de Fiorentini, Miguel e Miorin (2005). Tais elementos envolvem a percepção da relação de recorrência existente entre as etapas da atividade e o desenvolvimento de algum tipo de processo de generalização, justificado ou não, através da linguagem usual ou algébrica.

Logo, a proposta didática se mostrou eficaz para facilitar o ensino de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, contribuindo para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Sugere-se que futuras pesquisas explorem outras formas de aplicação e adaptação da proposta, investigando, por exemplo, através do mesmo material, a soma dos n primeiros números naturais pares. Além disso, fica a possibilidade de aprofundar ainda mais o que foi explorado nesta proposta com os mesmos estudantes, só que quando eles estiverem no 8º ano do Ensino Fundamental. Por exemplo, a indução matemática pode ser utilizada para provar que a expressão que os estudantes encontraram para a soma dos n primeiros números naturais ímpares funciona de fato para todo n natural.

Conclui-se que este trabalho agregou significativamente à vida da professora pesquisadora, proporcionando-lhe uma experiência rica em aprendizado e desenvolvimento profissional. Através da elaboração e aplicação da proposta didática a professora pôde aprofundar seu entendimento sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos e desenvolver estratégias eficazes para facilitar o aprendizado. Esse processo não só fortaleceu suas habilidades pedagógicas, mas também a fez refletir sobre suas práticas, promovendo uma evolução em sua trajetória como educadora e pesquisadora. Além disso, o contato direto com a pesquisa permitiu-lhe contribuir ativamente para o avanço da educação matemática, impactando positivamente a formação dos seus alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, J. R. **Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade**. 2016. 200 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Recife, 2016.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BEZERRA, A. R. L. **Ensino da álgebra: uso da linguagem e do pensamento algébrico como ferramenta de aprendizagem na educação básica**. 2016. 61 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de pós-graduação mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Universidade Federal de Rondônia - UNIR, Porto Velho, 2016.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

______. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 174p.

CANAVARRO, A. P. O Pensamento Algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. 8, n. 2, p. 81-118, 2007

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/eav/article/view/152688>. Acesso em: 16 jan. 2024.

DUDA, R. **Uso da plataforma App Inventor sob a ótica construcionista como estratégia para estimular o pensamento algébrico**. 2020. 175 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2020.

EYNG, A. M. **Currículo Escolar**. Curitiba: IBPEX, 2007.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores**. Lisboa, 2005.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v.4, n.1, p. 78-90, mar. 1993.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, ano 4, n.7, p.5-10, jul./ago. 1990.

KAPUT, J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. **The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a national symposium**. Washington, DC: National Research Council, National Academy, p. 25-26, may. 1998.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3ª ed. – Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

LUCIANO, K. M. L. O uso de material concreto no ensino e aprendizagem da matemática. **Cadernos Do IME - Série Matemática**, n.11, p. 1–17, 11 set. 2017

NAHIRNE, A. P.; BOSCARIOLI, C. A Educação do/no Campo na Base Nacional Comum Curricular e na reforma do novo Ensino Médio: desafios para o ensino de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, p. 1–23, 13 mar. 2023.

PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Ministério da Educação, Portugal. Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Portugal, 2009.

RAMPAZZO, L. Progressões Aritméticas na 6ª série? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, v.13, s.p., 2º semestre de 1988.

SILVA, P. E. S.; CURI, E.; MARTINS, P. B. Um balanço sobre pesquisas que versam sobre o Pensamento Algébrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental. **TANGRAM-Revista de Educação Matemática**, v. 5, ed.(n.) 3, p. 55-79, set. 2022

SILVA, F. M. et al. O uso do material concreto no ensino da matemática. **Anais do VIII Fórum Internacional de Pedagogia - FIPED**, Maranhão, 2016. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/3649>. Acesso em: 15 mar. 2024

APÊNDICES

APÊNDICE A – Produto Didático versão com respostas

Atividade

De posse do material concreto, siga as etapas a seguir:

1) Etapa 1**:** Represente um quadrado com a menor quantidade de peças possível, e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram utilizadas? Uma
	b) Se uma peça tem 1 unidade de medida de lado, quanto mede o lado do quadrado formado? 1 unidade de medida de lado

2) Etapa 2: Acrescentando peças de cor diferente da inicial, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram adicionadas? Três
	b) Quantas peças ao todo foram utilizadas? Quatro
	c) Quanto mede o lado do quadrado formado? 2 unidades de medida de lado

3) Etapa 3: Acrescentando peças de cor diferente da etapa 2, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	Quantas peças foram adicionadas? Cinco
	Quantas peças ao todo foram utilizadas? Nove
	Quanto mede o lado do quadrado formado? 3 unidades de medida de lado

4) Etapa 4: Acrescentando peças de cor diferente da etapa 3, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças foram adicionadas? Sete
	b) Quantas peças ao todo foram utilizadas? Dezesseis
	c) Quanto mede o lado do quadrado formado? 4 unidades de medida de lado

5) Etapa 5: **ATENÇÃO!** Sem o auxílio do material, pense em como seria formado um quadrado maior que o anterior, com o menor número possível de peças acrescentadas e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	a) Quantas peças seriam adicionadas? Nove
	b) Quantas peças ao todo seriam utilizadas? Vinte e cinco
	c) Quanto iria medir o lado do quadrado que seria formado?

	5 unidades de medida de lado

6) **E se não tivéssemos mais peças para serem acrescentadas para construção do quadrado da 10ª etapa,**

a) Quantas peças seriam adicionadas ao quadrado da 9ª etapa? Explique como você chegou nessa resposta.

Dezenove

b) Quantas peças ao todo formariam esse quadrado?

Cem

c) O quadrado que seria formado teria quantas unidades de medida de lado?

10 unidades de medida de lado

7) Complete o quadro a seguir:

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
...	...	...
10	19	100

8) Qual estratégia você utilizou para o registro da 10ª etapa? Explique detalhadamente o que pensou.

Solicitar que o aluno descreva se ele foi desenhando os quadradinhos, se foi imaginando a sequência, ou até mesmo se observou algum padrão.

9) Utilizando o material concreto, confira o que você construiu e complete a tabela a seguir.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	$a_1 = 1$	$s_1 = 1$
2	$a_2 = 3$	$s_2 = 4$
3	$a_3 = 5$	$s_3 = 9$
4	$a_4 = 7$	$s_4 = 16$
5	$a_5 = 9$	$s_5 = 25$
6	$a_6 = 11$	$s_6 = 36$
7	$a_7 = 13$	$s_7 = 49$
8	$a_8 = 15$	$s_8 = 64$
9	$a_9 = 17$	$s_9 = 81$
10	$a_{10} = 19$	$s_{10} = 100$

10) Análise das informações levantadas:

a) O que você observou a respeito dos números registrados na coluna “Peças acrescentados nesta etapa”?

Espera-se que os alunos registrem que os números registrados nesta coluna são todos ímpares

b) O que você observou a respeito dos números registrados na coluna “Peças totais”?

Espera-se que os alunos registrem que os números registrados nesta coluna são todos quadrados perfeitos.

c) Qual a relação existente entre a etapa e a quantidade registrada na coluna “Peças totais”?

Espera-se que os alunos registrem que a quantidade registrada na coluna “peças totais” é o quadrado da etapa.

d) **DESAFIO:** Qual a relação existente entre a etapa e a quantidade registrada na coluna “Peças acrescentados nesta etapa”?

Espera-se que os alunos registrem que a quantidade de “peças acrescentadas nesta etapa” é o dobro da etapa menos 1. Ou, é a soma da etapa anterior com a atual. OU que a primeira etapa é o primeiro número ímpar

e) Some os 2 primeiros valores da coluna “Peças acrescentados nesta etapa” e compare com o valor da segunda linha da coluna “Peças totais”. O que você percebeu?

$$a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$$

Espera-se que o aluno perceba que a soma da quantidade de peças acrescentadas na etapa anterior com a quantidade de peças acrescentadas na etapa atual vai resultar na quantidade de peças totais da etapa atual.

f) Some os 3 primeiros valores da coluna “Peças acrescentados nesta etapa” e compare com o valor da terceira linha da coluna “Peças totais”. O que você percebeu?

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

Espera-se que o aluno perceba o mesmo que na alternativa anterior.

g) Some os 5 primeiros valores da coluna “Peças acrescentados nesta etapa” e compare com o valor da quinta linha da coluna “Peças totais”. O que você percebeu?

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Espera-se que o aluno perceba o mesmo que na alternativa anterior

h) Complete as lacunas abaixo com os “índices” correspondentes:

a) $s_5 = s_4 + a_5$

b) $s_8 = s_7 + a_8$

c) $s_6 = s_5 + a_6$

d) $s_{10} = s_9 + a_{10}$

e) $s_{10} = s_9 + a_{10}$

f) Agora é sua vez: Construa um “item” conforme os anteriores, e dê para sua dupla completar.

Uma possível solução pode ser $s_{12} = s_{11} + a_{12}$

O que aconteceria na etapa 15? E na etapa 20? E na etapa 50? Registre suas ideias abaixo, e em seguida complete o quadro de registos

11) Mostre como você faria para a etapa 15:

Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
$15 \times 2 - 1 = 30 - 1 = 29$	$15 \times 15 = 225$

12) Mostre como você faria para a etapa 20:

Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
$20 \times 2 - 1 = 40 - 1 = 39$	$20 \times 20 = 400$

13) Mostre como você faria para a etapa 50:

Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
$50 \times 2 - 1 = 100 - 1 = 99$	$50 \times 50 = 2500$

14) Complete o quadro de registros com as informações obtidas.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
15	$a_{15} = 29$	$s_{15} = 225$
20	$a_{20} = 39$	$s_{20} = 400$
50	$a_{50} = 99$	$s_{50} = 2500$

E se fossemos generalizar para qualquer número natural n, o que aconteceria? Qual seria a expressão que utilizaríamos em cada uma das colunas abaixo?

15) Mostre como você faria para a etapa n:

Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
$2n - 1$	n^2

16) Complete o quadro de registros com as informações obtidas.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	$a_1 = 1$	$s_1 = 1$
2	$a_2 = 3$	$s_2 = 4$
3	$a_3 = 5$	$s_3 = 9$
4	$a_4 = 7$	$s_4 = 16$
5	$a_5 = 9$	$s_5 = 25$
6	$a_6 = 11$	$s_6 = 36$
7	$a_7 = 13$	$s_7 = 49$
8	$a_8 = 15$	$s_8 = 64$
9	$a_9 = 17$	$s_9 = 81$
10	$a_{10} = 19$	$s_{10} = 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$a_{15} = 29$	$s_{15} = 225$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	$a_{20} = 39$	$s_{20} = 400$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
50	$a_{50} = 99$	$s_{50} = 2500$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_n = n + n - 1 = 2n - 1$	$s_n = n \cdot n = n^2$

Parabéns! Você acabou de encontrar uma expressão que representa qualquer número ímpar e uma expressão que representa a soma dos n primeiros números ímpares.

APÊNDICE B – Produto Didático

Atividade

De posse do material concreto, siga as etapas a seguir:

1) <u>Etapa 1:</u> Represente um quadrado com a menor quantidade de peças possível, e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	c) Quantas peças foram utilizadas? ____________________________________
	d) Se uma peça tem 1 unidade de medida de lado, quanto mede o lado do quadrado formado? ____________________________________ ____________________________________

2) <u>Etapa 2:</u> Acrescentando peças de cor diferente da inicial, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	d) Quantas peças foram adicionadas? ____________________________________
	e) Quantas peças ao todo foram utilizadas? ____________________________________
	f) Quanto mede o lado do quadrado formado? ____________________________________ ____________________________________

3) <u>Etapa 3:</u> Acrescentando peças de cor diferente da etapa 2, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

	Quantas peças foram adicionadas?

DESENHO	
	____
	Quantas peças ao todo foram utilizadas? ____
	Quanto mede o lado do quadrado formado? ____ ____

4) <u>Etapa 4:</u> Acrescentando peças de cor diferente da etapa 3, forme um quadrado maior a partir do anterior (com o menor número possível de peças acrescentadas), e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	
	d) Quantas peças foram adicionadas? ____
	e) Quantas peças ao todo foram utilizadas? ____
	f) Quanto mede o lado do quadrado formado? ____ ____

5) <u>Etapa 5:</u> **ATENÇÃO!** <u>Sem o auxílio do material</u>, pense em como seria formado um quadrado maior que o anterior, com o menor número possível de peças acrescentadas e em seguida desenhe a representação no local indicado e responda:

DESENHO	
	d) Quantas peças seriam adicionadas? ____
	e) Quantas peças ao todo seriam utilizadas? ____

	f) Quanto iria medir o lado do quadrado que seria formado? ______________________________ ______________________________

6) **E se não tivéssemos mais peças para serem acrescentadas para construção do quadrado da 10ª etapa,**

a) Quantas peças seriam adicionadas ao quadrado da 9ª etapa? Explique como você chegou nessa resposta.

____

____

____

____

b) Quantas peças ao todo formariam esse quadrado?

____

c) O quadrado que seria formado teria quantas unidades de medida de lado?

____

7) Complete o quadro a seguir:

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1		
2		
3		
4		
5		
...	...	...
10		

8) Qual estratégia você utilizou para o registro da 10ª etapa? Explique detalhadamente o que pensou.

9) Utilizando o material concreto, confira o que você construiu e complete a tabela a seguir.

Quadro de registros		
Etap a	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	$a_1 =$	$s_1 =$
2	$a_2 =$	$s_2 =$
3	$a_3 =$	$s_3 =$
4	$a_4 =$	$s_4 =$
5	$a_5 =$	$s_5 =$
6	$a_6 =$	$s_6 =$
7	$a_7 =$	$s_7 =$
8	$a_8 =$	$s_8 =$
9	$a_9 =$	$s_9 =$
10	$a_{10} =$	$s_{10} =$

10) Análise das informações levantadas:

a) O que você observou a respeito dos números registrados na coluna "Peças acrescentados nesta etapa"?

____

____

____

____

____

b) O que você observou a respeito dos números registrados na coluna "Peças totais"?

____

____

____

c) Qual a relação existente entre a etapa e a quantidade registrada na coluna "Peças totais"?

d) **DESAFIO:** Qual a relação existente entre a etapa e a quantidade registrada na coluna "Peças acrescentados nesta etapa"?

e) Some os 2 primeiros valores da coluna "Peças acrescentados nesta etapa" e compare com o valor da segunda linha da coluna "Peças totais". O que você percebeu?

$$a_1 + a_2 = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$$

f) Some os 3 primeiros valores da coluna "Peças acrescentados nesta etapa" e compare com o valor da terceira linha da coluna "Peças totais". O que você percebeu?

$$a_1 + a_2 + a_3 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$$

g) Some os 5 primeiros valores da coluna “Peças acrescentados nesta etapa” e compare com o valor da quinta linha da coluna “Peças totais”. O que você percebeu?

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$$

h) Complete as lacunas abaixo com os “índices” correspondentes:

g) $s_5 = s_{\_\_} + a_{\_\_}$

h) $s_6 = s_{\_\_} + a_{\_\_}$

i) $s_{10} = s_{\_\_} + a_{\_\_}$

j) $s_{\_\_} = s_7 + a_8$

k) $s_{\_\_} = s_9 + a_{10}$

i) Agora é sua vez: Construa um “item” conforme os anteriores, e dê para sua dupla completar.

O que aconteceria na etapa 15? E na etapa 20? E na etapa 50? Registre suas ideias abaixo, e em seguida complete o quadro de registos

11) 1Mostre como você faria para a etapa 15:

Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro

12) Mostre como você faria para a etapa 20:

Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro

13) Mostre como você faria para a etapa 50:

Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro

14) Complete o quadro de registros com as informações obtidas.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais no tabuleiro
15	$a_{15} =$	
20		
50		

E se fossemos generalizar para qualquer número natural n, o que aconteceria? Qual seria a expressão que utilizaríamos em cada uma das colunas abaixo?

15) Mostre como você faria para a etapa n:

Peças acrescentados nesta etapa	Peças totais no tabuleiro

16) Complete o quadro de registros com as informações obtidas.

Quadro de registros		
Etapa	Peças acrescentadas nesta etapa	Peças totais
1	$a_1 =$	$s_1 =$
2	$a_2 =$	$s_2 =$
3	$a_3 =$	$s_3 =$
4	$a_4 =$	$s_4 =$
5	$a_5 =$	$s_5 =$
6	$a_6 =$	$s_6 =$
7	$a_7 =$	$s_7 =$

8	$a_8 =$	$s_8 =$
9	$a_9 =$	$s_9 =$
10	$a_{10} =$	$s_{10} =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$a_{15} =$	$s_{15} =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	$a_{20} =$	$s_{20} =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
50	$a_{50} =$	$s_{50} =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_n =$	$s_n =$

Parabéns! Você acabou de encontrar uma expressão que representa qualquer número ímpar e uma expressão que representa a soma dos n primeiros números ímpares.

APÊNDICE C – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa intitulado: "**Sequências numéricas recursivas nos anos finais do ensino fundamental: Introdução à álgebra através de generalizações**". Seus pais/responsáveis concordaram com a sua participação. Se você quiser participar, vamos te explicar como será essa pesquisa. Se você não quiser participar, não tem problema, não vai ter nenhum prejuízo para você ou para os seus pais.

Este projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da instituição IFRS Campus Canoas. Nessa pesquisa, pretendemos investigar de que forma a construção de generalizações através do estudo de sequências auxilia a introdução da álgebra.

A pesquisa será feita na [redacted], durante as aulas de Matemática, e deverá durar em torno de duas semanas, através de atividades investigativas e atividades semelhantes às que já são realizadas em aula. Para a coleta de dados serão utilizadas as atividades realizadas por você e seus colegas que serão entregues para a professora/pesquisadora. Tais atividades poderão ser divulgadas junto à dissertação produzida como relatório da pesquisa, porém, sua identidade será preservada.

A sua participação na pesquisa oferece risco mínimo, sendo eles a frustração por não conseguir concluir alguma das atividades propostas, o cansaço ao realizar as atividades, o desconforto durante as socializações ou o constrangimento com a utilização das respostas das atividades para a análise dos dados. Note que, o seu desempenho não está sendo utilizado para avaliação escolar; ainda, caso sua resposta seja utilizada na escrita do trabalho final, sua identidade será preservada. Além disso, você poderá desistir de participar da pesquisa a qualquer momento. Se ainda assim se sentir desconfortável, você poderá ser encaminhado(a) para a Orientação Escolar, a fim de receber o acompanhamento necessário. Também, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato imediato com a professora pesquisadora.

A sua participação na pesquisa poderá ter benefícios diretos, como maior apreço pela Matemática e maior compreensão dos usos das "letras" representando valores desconhecidos, por isso a importância da sua participação.

As informações e os dados que você informar para esta pesquisa serão mantidos confidenciais, não haverá nenhuma identificação sua ou de sua família. A pesquisadora se responsabiliza pelos cuidados em preservar a sua identidade e os seus dados.

Ao participar desta pesquisa, saiba que você tem direito:

- de retirar o seu consentimento, a qualquer momento, sem que isso traga qualquer prejuízo a você;

- a não ser identificado e que as informações relacionadas à privacidade são confidenciais;

- de ter acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar seu interesse em continuar participando da pesquisa;
- de não ter despesas ou ônus financeiro relacionado à participação nesse estudo;
- de que, caso tenha despesas relacionadas à participação na pesquisa, terá direito a compensação material das mesmas;
- de se recusar a responder qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada;
- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012, 510/2016 e outras do Conselho Nacional de Saúde relacionadas à ética em pesquisa.

Os resultados da pesquisa serão publicados em uma dissertação. A previsão da divulgação dos resultados é abril de 2024.

===

Concordo em participar da pesquisa intitulada: “Sequências numéricas recursivas nos anos finais do ensino fundamental: Introdução à álgebra através de generalizações”. Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento.

Caxias do Sul, ____de _________de 2023.

_________________________ ________________________________Nome e

Nome e

Assinatura do(a) pesquisador(a)

Assinatura do(a) participante

Contato das pesquisadoras:
Pesquisador(a) principal:
Nome: Nathalia Ferreira de Mello
Instituição: IFRS
Telefone: [redacted]
e-mail: nathaliaferreirademello@gmail.com

Demais pesquisadoras
Nome: Carina Loureiro Andrade
Telefone para contato: [redacted]
E-mail para contato: carina.andrade@canoas.ifrs.edu.br

Nome: Cláudia Brum de Oliveira Fogliarini Filha
Telefone para contato: [redacted]
E-mail para contato: claudia.fogliarini@canoas.ifrs.edu.br

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, por favor consulte o **Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)** responsável pela avaliação. Um CEP é um colegiado interdisciplinar e independente, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativo, que tem como objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340

APÊNDICE D – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PAIS OU RESPONSÁVEIS

Prezado (a) Senhor (a):

Seu filho(a) está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa intitulado: "**Sequências numéricas recursivas nos anos finais do ensino fundamental: Introdução à álgebra através de generalizações**". Este projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da instituição IFRS Campus Canoas. Nessa pesquisa pretendemos investigar de que forma o estudo de sequências e suas generalizações pode facilitar o ensino de álgebra no 7º ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa será feita na [redacted], durante as aulas de Matemática, e deverá durar em torno de duas semanas, através de atividades investigativas e atividades semelhantes às que já são realizadas em aula. Para a coleta de dados serão utilizadas as atividades feitas pelos alunos. As atividades realizadas poderão ser digitalizadas e divulgadas junto à dissertação produzida como relatório da pesquisa, preservando a identidade do participante. Como a pesquisa se dará na sala de aula na qual a pesquisadora é professora titular de Matemática, em caso de haver alunos que não queiram, ou não estejam autorizados a participar da pesquisa, estes participarão da atividade, porém os dados não serão utilizados.

A participação na pesquisa oferece risco mínimo, sendo eles a frustração por não conseguir concluir alguma das atividades propostas, o cansaço ao realizar as atividades, o desconforto durante as socializações ou o constrangimento com a utilização das respostas das atividades para a análise dos dados. Com o intuito de minimizar os riscos psicológicos, a pesquisadora principal esclarecerá que: o desempenho do estudante não está sendo utilizado para avaliação escolar deste; caso alguma resposta do participante seja utilizada na escrita do trabalho final, a identidade dele será preservada; além disso, ele poderá desistir de participar da pesquisa a qualquer momento. Se ainda assim o estudante se sentir desconfortável, o participante poderá ser encaminhado para a Orientação Escolar, a fim de receber o acompanhamento necessário. Além disso, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida sobre a pesquisa, você e seu representado poderão entrar em contato imediato com as pesquisadoras.

A participação na pesquisa poderá ter benefício direto, como maior apreço pela Matemática e maior compreensão dos usos das "letras" representando valores desconhecidos, por isso a importância da participação do seu representado.

Ao participar desta pesquisa, saiba que seu representado tem direito:

- de retirar o seu consentimento, a qualquer momento, sem que isso traga qualquer prejuízo ao seu representado;

- a não ser identificado e que as informações relacionadas à privacidade são confidenciais;

- de ter acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar seu interesse em continuar participando da pesquisa;

- de não ter despesas ou ônus financeiro relacionado à participação nesse estudo;

- de que, caso tenha despesas (e de seu acompanhante, se aplicável) relacionadas à participação na pesquisa, terá direito a compensação material das mesmas;

- de se recusar a responder qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada;

- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012, 510/2016 e outras do Conselho Nacional de Saúde relacionadas à ética em pesquisa.

===

Eu ____________________________________, portador do documento de identidade ou CPF _______________, autorizo ____ a participar da pesquisa: "Sequências nos anos finais do ensino fundamental: a introdução da álgebra através de generalizações". Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, bem como sobre a metodologia que será adotada, sobre os riscos e benefícios envolvidos. Recebi uma cópia deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Caxias do Sul, ____de _________de 2023.

____________________________	____________________________________
Nome e Assinatura do responsável pelo participante	Nome e Assinatura do(a) pesquisador(a)

Contato das pesquisadoras:
Pesquisador(a) principal:
Nome: Nathalia Ferreira de Mello
Instituição: IFRS
Telefone: [redacted]
e-mail: nathaliaferreirademello@gmail.com

Demais pesquisadoras
Nome: Carina Loureiro Andrade
Telefone para contato: [redacted]
E-mail para contato: carina.andrade@canoas.ifrs.edu.br

Nome: Cláudia Brum de Oliveira Fogliarini Filha
Telefone para contato: [redacted]
E-mail para contato: claudia.fogliarini@canoas.ifrs.edu.br

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, por favor consulte o
Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) responsável pela avaliação. Um CEP é um colegiado interdisciplinar e independente, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativo, que tem como objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340