

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Dissertação de Mestrado

Cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri

Guilherme Padovani Garavello

Orientador: Professor Doutor Daniel Miranda Machado

Santo André, setembro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Guilherme Padovani Garavello

Cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do ABC para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo programa: PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática).

Orientador: Professor Doutor Daniel Miranda Machado

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Santo André, setembro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri

Esta é uma versão original da
dissertação elaborada por
Guilherme Padovani
Garavello, tal como
submetida à Comissão
Julgadora

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pelas oportunidades destinadas para minha vida e que deram-me forças e paciência para conciliar os estudos com meu ritmo de aulas nas escolas em que leciono.

A minha esposa Caroline que sempre apoiou-me, mostrando a força que temos nos momentos difíceis, sempre paciente com os muitos sábados e até mesmo nas férias em que estive estudando em Santo André.

Aos meus pais, Marcos e Sueli, que sempre incentivaram-me em todos meus anseios, desde os primeiros estudos até com os trabalhos que desenvolvo atualmente.

Ao meu orientador Daniel Miranda pelo apoio e direcionamento de minha dissertação.

A minha prima Érica que sempre esteve incentivando, ajudando e vibrando com minhas conquistas. Aos meus colegas de curso, pela união que tivemos e pelo apoio mútuo e todos que sempre torceram por mim.

Resumo

O Princípio de Cavalieri é um assunto bastante utilizado para cálculo de áreas de figuras planas e de volumes de sólidos, além de ser um dos precursores do estudo do Cálculo. Neste trabalho, apresenta-se um pouco da história de Cavalieri, as demonstrações dos sólidos estudados do Ensino Básico com o artifício de seu Princípio. Ao final tem-se algumas práticas propostas para a aplicação do Princípio de Cavalieri com áreas e volumes de figuras geométricas, nas quais se deseja mostrar a importância deste Princípio no estudo de Matemática.

Palavras Chaves: área, volume, Cavalieri, sólidos

Abstract

The Principle of Cavalieri is a very useful subject to calculate the area of flat figure of solid volumes, besides being one of the precursor of the calculate study. This paper shows a little of Cavalieri's history, the demonstrations of the solids studied in the high school with the of its principle. At the end, the are some proposal practices, to apply the principle of Cavalieri with areas and volumes of the geometric figures, that's want to show the importance of the principle, in the math study.

Keywords: area, volume, Cavalieri, solids

Sumário

1. Introdução.....	1
1.1 Descrição do trabalho.....	1
2. O Princípio de Cavalieri.....	3
2.1 Introdução.....	3
2.2 História.....	4
2.2.1 Bonaventura Cavalieri.....	4
2.2.2 Princípio de Cavalieri.....	5
2.3 Demonstração.....	6
3. Aplicações.....	9
3.1 Volume do Cilindro.....	9
3.2 Volume de Prismas.....	10
3.3 Volumes de Pirâmides.....	11
3.4 Volume de Cones.....	13
3.5 Volumes de Esferas.....	15
3.6 Aplicação do Princípio de Cavalieri em Funções.....	17
4. Aplicações em Sala de Aula do Princípio de Cavalieri.....	19
4.1 Atividade 1: Determinação da área de uma figura plana.....	19
4.2 Atividade 2: Determinação do volume de um sólido.....	20
4.2.1 Roteiro para atividade 2.....	21
4.3 Atividade 3: Determinação da relação 3:2:1 em alguns sólidos.....	22
4.3.1 Roteiro para atividade 3.....	22
4.4 Atividade 4 - Relação entre pirâmide e cone.....	23
4.4.1 Roteiro para atividade 4.....	23
Índice de figuras.....	25
Bibliografia.....	27

1. Introdução

Muitas são as aplicabilidades da geometria em nosso dia-à-dia, principalmente àquelas que são estudadas no Ciclo Básico, compreendidas entre o Ensino Fundamental e Médio, porém muitos desses conceitos que são apresentados aos alunos não possuem uma base concreta, ou seja, muitas vezes são ensinados sem demonstrações e sem definições sólidas do conteúdo, ora pela falta de oportunidade e disponibilidade dos componentes da grade curricular, ora pela imaturidade de conceitos que os alunos têm.. Um exemplo disso é o aprendizado de Áreas de figuras planas e de Volumes de sólidos. Em algumas situações, muitos conceitos são deliberadamente impostos, sem demonstrações e/ou argumentos o que leva a um futuro desinteresse e uma má aprendizagem. Neste trabalho está proposto um método de descoberta de áreas e volumes de sólidos geométricos, com experiências e demonstrações que criam credibilidade e consistência do que se está aprendendo, criando no aluno uma expectativa pela descoberta e comparações entre sólidos chamado Princípio de Cavalieri, do qual se faz uso de cálculos infinitesimais e que pode ser estudado com Limites, apesar do conteúdo não ser apresentado a eles no ciclo básico.

1.1 Descrição do trabalho

O Trabalho consiste em apresentar um breve histórico sobre o Princípio de Cavalieri, bem como uma breve biografia do mesmo. Em seguida propõem-se as demonstrações dos volumes estudados no Ensino Fundamental e Médio, usufruindo do Princípio e uma aplicação com os conceitos de Função e Cálculo. Ao final do trabalho seguem algumas atividades para o uso do Princípio de Cavalieri, tanto para o cálculo de áreas, como para o cálculo de volumes em sala de aula.

2. O Princípio de Cavalieri

2.1 Introdução

O cálculo de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos estão bastante presentes no cotidiano, desde um simples cálculo da área de um terreno até a construção de sólidos de armazenagem de vários produtos. Uma forma interessante e eficaz de se descobrir como se calcular áreas e sólidos de muitas figuras planas e espaciais, respectivamente é por meio do Princípio de Cavalieri, que usa princípios do cálculo infinitesimal no cálculo de áreas e volumes.

Quanto ao cálculo de volumes de sólidos geométricos O Princípio de Cavalieri pode ser enunciado da seguinte forma:

"Sejam dois sólidos A e B, de mesma altura e seja um plano paralelo as bases que os secciona na mesma altura em relação a base, se as áreas dessas regiões seccionadas forem as mesmas em todo o sólido, então eles possuem o mesmo volume."

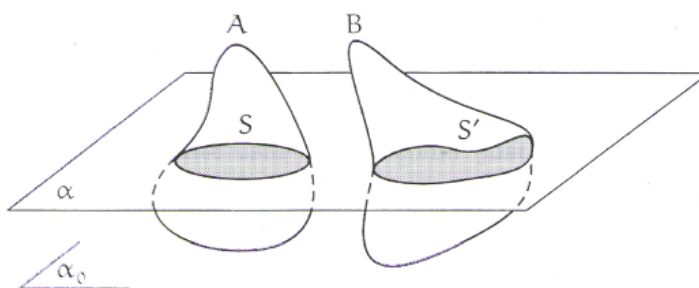


Figura 1 - Princípio de Cavalieri

Tal fato fica bem exposto se considerar que esses planos formam fatias horizontais bem finas do sólido. Como essas fatias são bem finas, pode-se então notar que ter-se h fatias todas com mesmas áreas em relação ao outro sólido, portanto os sólidos terão o mesmo volume.

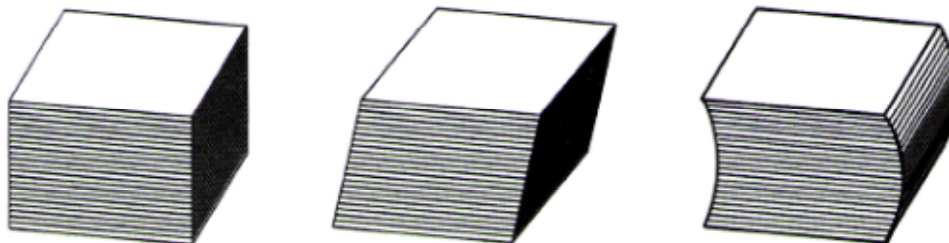


Figura 2 - sólidos de mesmo volume

Segundo Cavalieri para o cálculo de áreas de figuras planas tem-se:

"Seja duas figuras planas A e B, de mesma altura. Pelo Princípio de Cavalieri, se seccionarmos essas figuras com uma linha paralela a base na mesma altura e nessas secções as linhas tiverem o mesmo comprimento, podemos afirmar que essas regiões planas possuem a mesma superfície, ou seja, a mesma área."

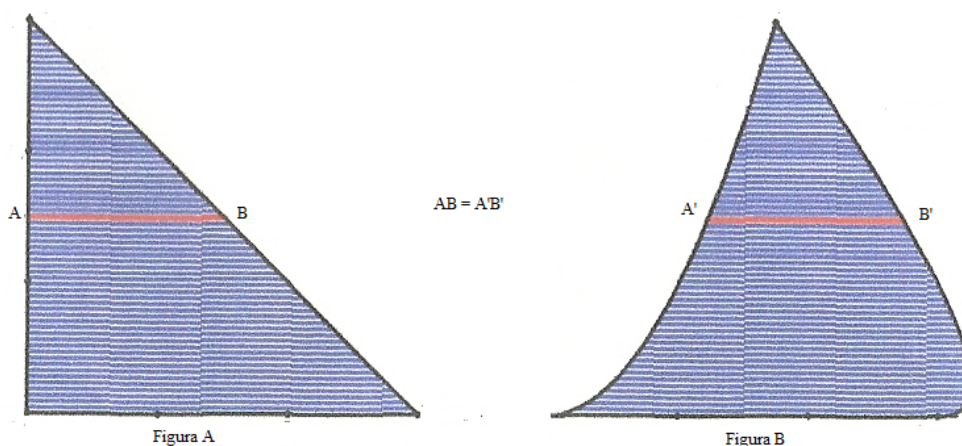


Figura 3 - regiões com mesmas áreas

Sendo assim, o Princípio de Cavalieri pode ser bem empregado para demonstrar os resultados dos volumes de alguns sólidos, estudados no Ensino Médio e Fundamental do Ciclo Básico da Educação.

2.2 História

2.2.1 Bonaventura Cavalieri

Em meados dos séculos XV e XVI foram muitos os matemáticos que contribuíram para o estudo do cálculo infinitesimal e assim Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) discípulo de Galileu Gallilei (1564 - 1642) fora estimulado pela Stereometria de Johann Kepler (1571 - 1630), por ideias antigas e medievais e pelo encorajamento de Galileu a organizar seus pensamentos sobre infinitésimos em forma de livro.



Figura 4 - Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri era membro de uma ordem religiosa (Jesuados) e viveu em Milão e Roma antes de se tornar professor em Bologna em 1629. Caracteristicamente para seu tempo escreveu sobre muitos assuntos da matemática: geometria, trigonometria, astronomia e óptica, e foi o primeiro autor italiano a apreciar o valor dos logaritmos. Em um de seus livros *Directorium universale uranometricum* de 1632 publicou tabelas de senos, tangentes, secantes e senos versos, junto com seus logaritmos até oito casas decimais, porém Cavalieri é lembrado muito mais pelo seu livro intitulado *Geometria indivisibilibus continuorum* (*Geometria dos Indivisíveis Contínuos*), publicado em 1635.

O livro *Geometria indivisibilibus continuorum*, tem como ideia a sugestão de Oresme (1323 - 1382), Kepler e Galileu, que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos.

Este livro de Cavalieri fora muito criticado por alguns matemáticos da época e ao mesmo tempo defendido e admirado por outros, seu nome é prontamente lembrado como fonte para métodos de integração e em relação aos "indivisíveis" na matemática. Embora sem perceber, Cavalieri, seguia os mesmos passos e a mesma linha de raciocínio que Arquimedes utilizou em seu livro *O método*, o qual na época estava perdido, porém Cavalieri não se importava perante as deficiências lógicas nas bases de tais processos.

2.2.2 Princípio de Cavalieri

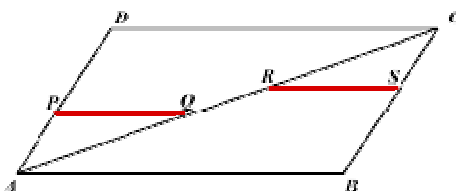
Em seu método "infinitesimal", Cavalieri não estabelecia algum processo de aproximação contínua, nem a omissão de termos, pois utilizava uma estreita correspondência com um a um dos elementos em duas configurações. O estilo geral do método dos indivisíveis são bem ilustrados pela proposição, conhecida em muitos livros como Teorema de Cavalieri ou Princípio de Cavalieri:

Se dois sólidos tem alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos as bases e as distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão"

Cavalieri evidentemente tinha desenvolvido esse método por volta de 1626, pois naquele ano escreveu a Galileu que ia publicar um livro sobre esse assunto. O próprio Galileu havia projetado escrever um livro sobre esse assunto, infinito, o que levou Cavalieri a retardar a publicação de seu trabalho, de modo que assim tornaria o assunto mais filosófico e especulativo. Cavalieri em vez disso, se concentrou em um teorema geométrico e extremamente útil, equivalente à afirmação atual:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Para mostrar tal fato, Cavalieri comparava potências dos segmentos num paralelogramo paralelos a base com as potências correspondentes de segmentos em qualquer dos dois triângulos em que uma diagonal divide o paralelogramo.



Segundo Cavalieri, tomando $AP = CR$ e traçando PQ paralelo a AB , é fácil mostrar que o indivisível PQ terá o mesmo tamanho que RS . Assim pode-se estabelecer uma correspondência entre todos os indivisíveis do triângulo ADC e indivisíveis iguais do triângulo ABC , concluindo que suas áreas são iguais. Como o paralelogramo é a soma dos indivisíveis dos dois triângulos, tem-se que soma das primeiras potências dos segmentos em um dos triângulos será a metade da soma das potências dos segmentos do paralelogramo, ou seja:

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

E assim com argumentos mais elaborados Cavalieri, mostrou que a soma dos quadrados dos segmentos de um triângulo é um terço da soma dos quadrados dos segmentos no paralelogramo, para o cubo a encontrou a razão um quarto e finalmente para potências superiores, generalizando que potências de grau n possuem razão $1/(n+1)$.

2.3 Demonstração

Uma demonstração do Princípio de Cavalieri pode ser vista através do uso do Cálculo que segue:

Calculando o volume de um sólido mais geral como a figura R abaixo, que pode ser aproximada a cilindros.

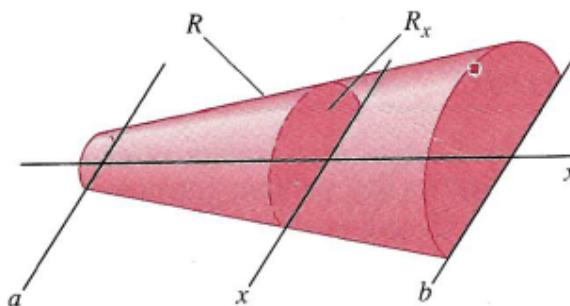


Figura 5 - R_x é a seção transversal de R no plano perpendicular ao eixo x em x

Para cada x pertencente ao intervalo $[a, b]$, $A(x)$ denota a área da seção transversal de R, ou seja, $A(x) = \text{área}(R_x)$. Supondo que a forma de R é suficientemente simples e que é função área de seção transversal A é constante (e, por consequência, integrável).

Começa-se então, uma repartição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, todos com o mesmo comprimento: $\Delta x = (b - a)/n$. Pode-se agora denotar uma fatia sólida de R como o espaço entre os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Denota-se o volume deste sólido de R por $\Delta V_i = v(R_i)$, assim:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

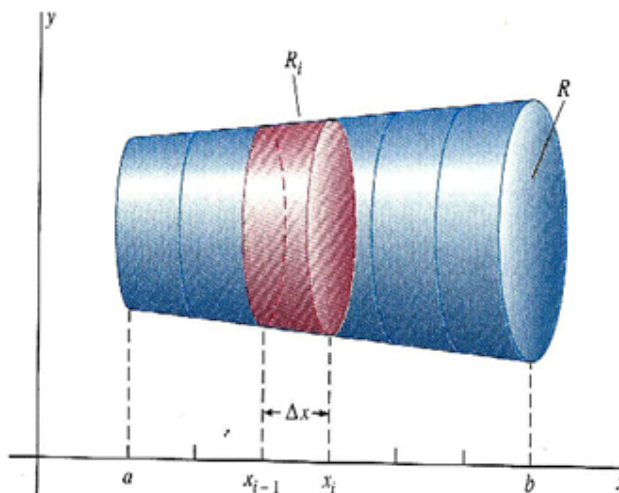


Figura 6 - planos através dos pontos de partição $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ que representam partições do sólido $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$

Para aproximar ΔV , seleciona-se um ponto do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. e considerar o cilindro C, cuja altura é Δx e a base é a seção transversal de R. Quando Δx for cada vez menor temos uma boa aproximação para o volume de R, e assim $\Delta v = V(R)$.

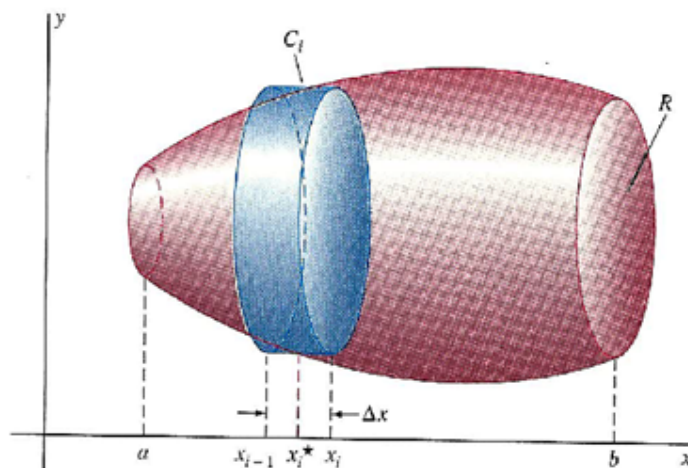


Figura 7- A laje R_1 , aproximada pelo volume do cilindro C_1

Assim adicionando os volumes destes cilindros, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, temos

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Que denota a soma de Riemann e por consequência, o princípio de Cavalieri pelo fato de que um volume de um sólido é determinado pela somatória das áreas das seções transversais em relação a uma linha dada.

3. Aplicações

Com a aplicação do Princípio de Cavalieri é possível caracterizar boas demonstrações de volumes de sólidos geométricos e o cálculo de áreas de figuras planas estudadas nos Ensino Fundamental e Médio do Ensino Básico, mesmo sem que os alunos saibam de sua demonstração.

3.1 Volume do Cilindro

Considera-se que o cilindro é um sólido gerado a partir da revolução de um paralelogramo em torno de um de seus lados. No caso do paralelogramo ser um retângulo tem-se um cilindro reto.

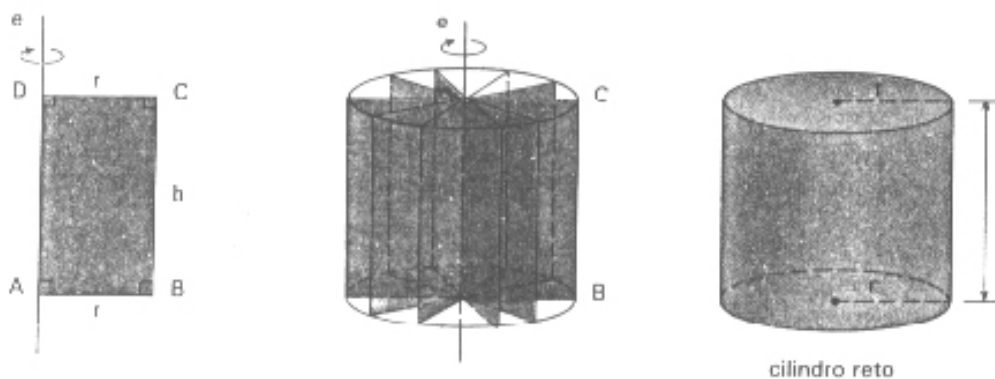


Figura 8 - Rotação de retângulo para formação de cilindro reto

Considerando o paralelogramo $ABOO'$ abaixo, o qual se deve girá-lo em torno de seu lado OO' . Tem-se assim um cilindro, cuja base é um círculo de raio BO e altura h . Pelo Princípio de Cavalieri pode-se observar que existem infinitos círculos paralelos a base, todos de mesma área e que somados resultam no volume deste sólido.

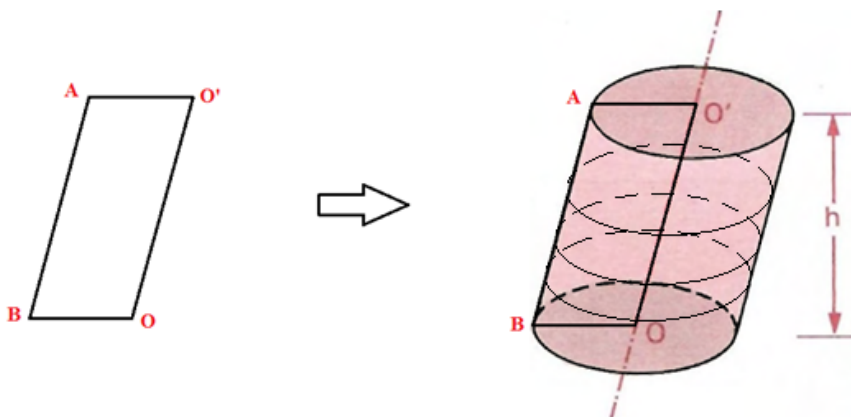


Figura 9 - Rotação de retângulo para formação de cilindro oblíquo

Todos esses infinitos círculos somados resultam um sólido de altura h , portanto tem-se um sólido de h círculos com $\pi \cdot r^2$ de área cada um, no qual r é o raio do círculo, ou seja de tamanho BO . Logo pode-se concluir que o volume de um cilindro é obtido pelo produto de sua área da base pela sua altura, ou seja, $V = A_b \cdot h$.

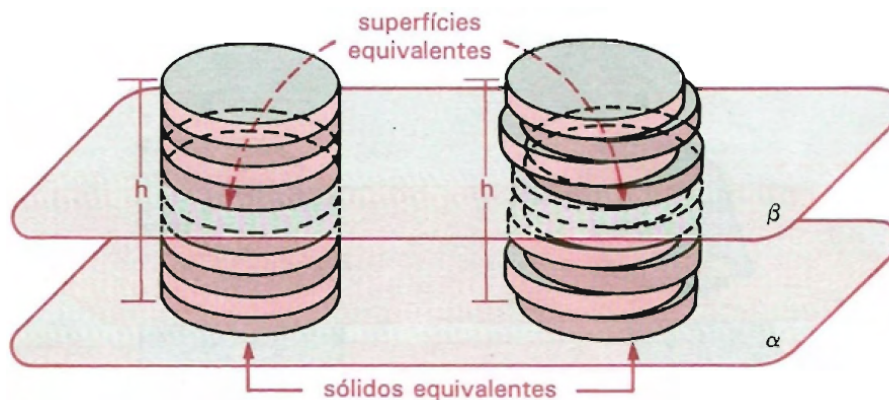


Figura 10 - Representação de dois cilindros equivalentes pelo Princípio de Cavalieri

3.2 Volume de Prismas

Considerando a definição de prismas como sendo o sólido geométrico formado a partir de dois polígonos congruentes distintos e paralelos ligados por segmentos de retas paralelas, pode-se calcular seu volume utilizando o mesmo procedimento usado em cilindros.

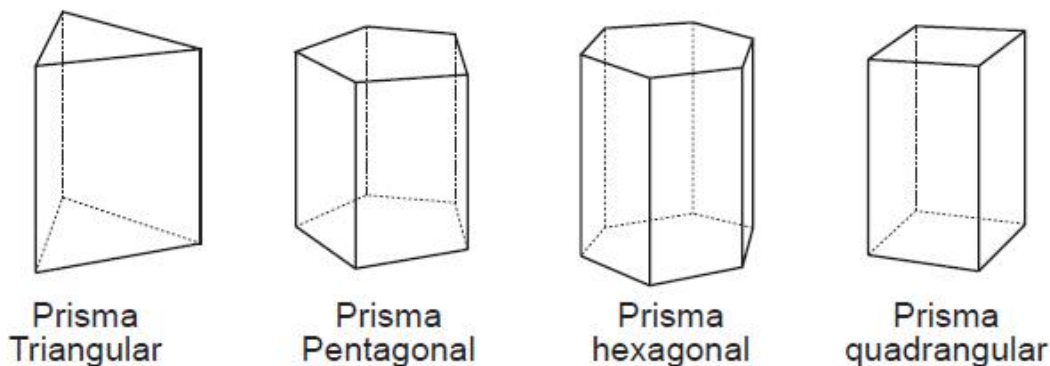


Figura 11 - Alguns tipos de prismas

Portanto, nota-se que em dado prisma qualquer tem-se h áreas de mesmo tamanho, resultando que o volume formado por esse sólido será igual ao produto de sua base pela sua altura, ou seja, $V = A_b \cdot h$, como cilindro.

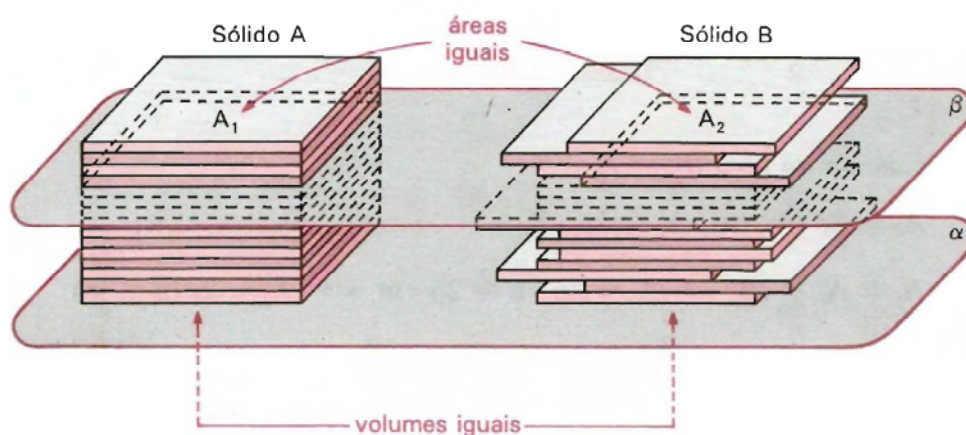


Figura 12 - Representação de dois prismas equivalentes pelo Princípio de Cavalieri

3.3 Volumes de Pirâmides

Pela definição, pirâmide é um poliedro formado que tem por base um polígono qualquer, e por faces laterais triângulos que têm um vértice comum. Este ponto é o vértice da pirâmide.

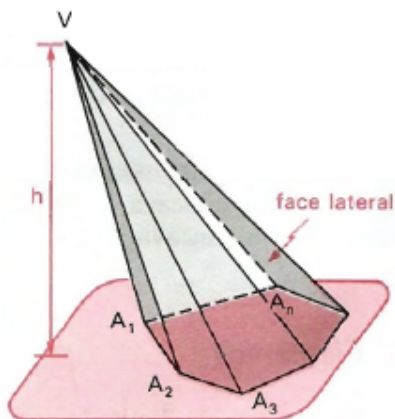


Figura 13 - Pirâmide

Para calcular o volume de uma pirâmide triangular, deve-se primeiramente tomar um prisma $ABCDEF$ de bases ABC e DEF , a partir desse prisma traçar três pirâmides de bases triangulares. Nota-se, que as três pirâmides da figura abaixo possuem o mesmo volume, pois tem mesma área da base e mesma altura, segundo Cavalieri.

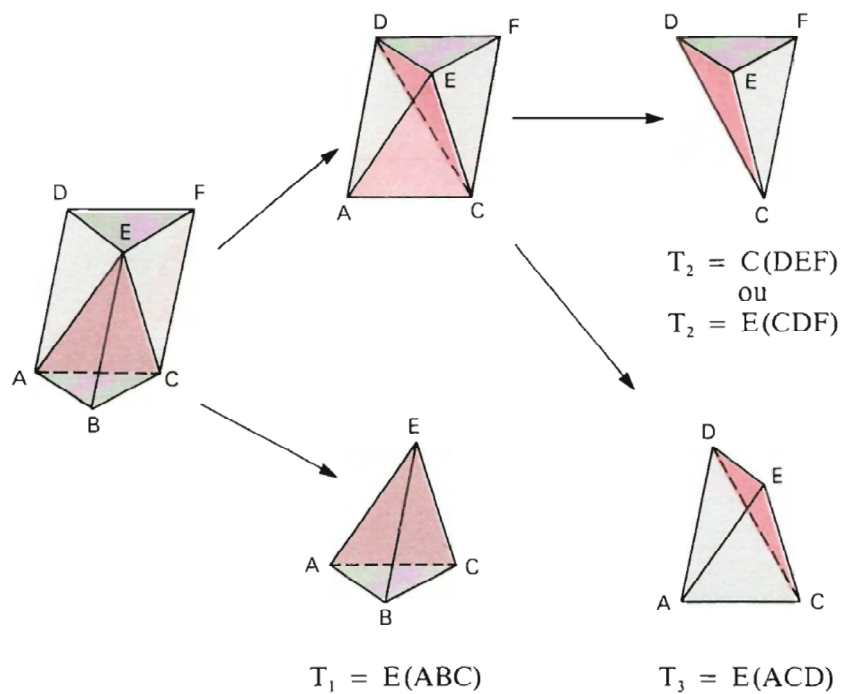


Figura 14 - Repartição de um prisma em três pirâmides

Para calcular o volume de outras pirâmides de outras bases, deve-se fazer algumas considerações:

1º) Quando secciona-se uma pirâmide paralelamente a sua base, as arestas laterais e suas bases ficam divididas na mesma razão.

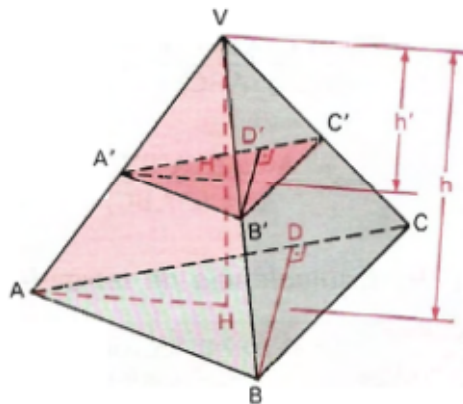


Figura 15 - Pirâmide seccionada por um plano

De fato, os segmentos $A'H'$ e AH são paralelos, pois são intersecções de planos paralelos por um terceiro, logo, os triângulos $VH'A$ e VHA são semelhantes, portanto:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$

2º) A secção paralela a base e a base são polígonos semelhantes

Neste caso, nota-se que os ângulos do polígono da base (na figura acima um triângulo) e os ângulos do polígono da secção paralela a base (também um triângulo na figura acima) são congruentes por terem lados paralelos e assim pode-se concluir:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}$$

3º) A razão entre as áreas da secção e a da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias

Nota-se que $B'D'$ e BD são alturas respectivas da secção paralela a base e da base e assim vale dizer:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h}$$

Assim, tem-se:

$$\frac{\text{Área da secção}}{\text{Área da base}} = \frac{\frac{A'C' \cdot B'D'}{2}}{\frac{AC \cdot BD}{2}} \Rightarrow \frac{A'C'}{AC} \cdot \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Sendo assim, pelo Princípio de Cavalieri ao comparar duas pirâmides de mesma área da base e mesmas áreas de secções paralelas as bases, tem-se que seus volumes são iguais. Contando com esse fato, pode-se sempre comparar quaisquer duas pirâmides, desde que as áreas de suas bases sejam as mesmas e as alturas relativas também, portanto ao comparar uma pirâmide de qualquer base com uma pirâmide de base triangular, que tenha mesma área da base e mesma altura, tem-se: $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$.

3.4 Volume de Cones

Considere-se que o cone é um sólido pela reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em um mesmo ponto em comum e a outra em um círculo.

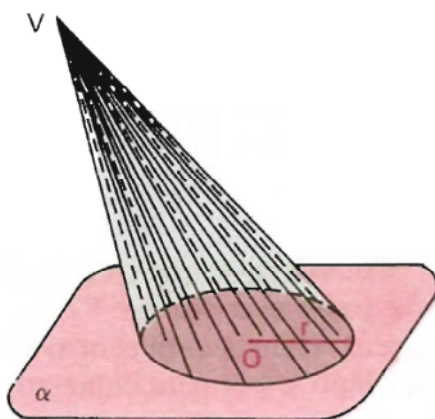


Figura 16 - Cone

Para calcular seu volume considere-se um cone, cuja área da base seja igual a de uma pirâmide de base quadrada e mesma altura H .

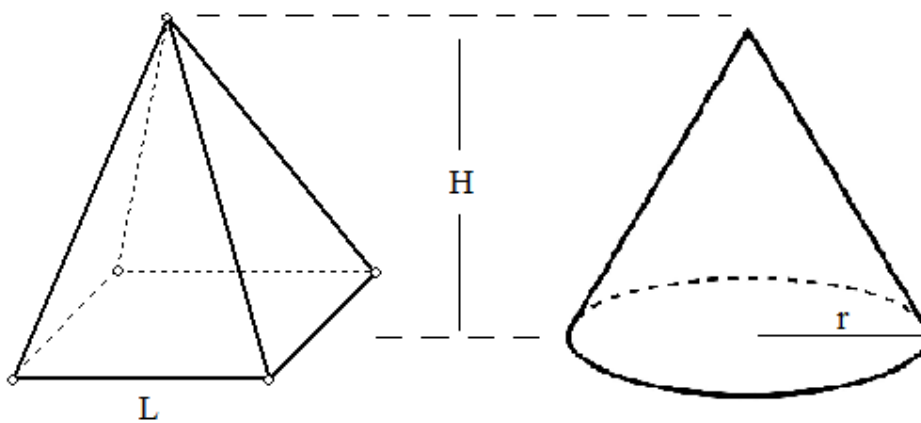


Figura 17 - Semelhança entre pirâmide e cone

Ou seja, a aresta da base da pirâmide será igual a $L = r\sqrt{\pi}$, pois temos:

$$A_{\text{circulo}} = A_{\text{quadrado}}$$

$$\pi R^2 = L^2$$

$$L = r\sqrt{\pi}$$

Sendo assim, ao traçar um plano paralelo às bases desses sólidos a uma altura h de seus vértices, formam-se dois novos sólidos, cujas bases são semelhantes as bases dos sólidos maiores.

Assim denomina-se de r o raio do círculo formado pela secção paralela a base do cone a uma distância h do vértice e de l o lado do quadrado formado pela mesma secção paralela a base da pirâmide, ou seja, também a uma distância h de seu vértice.

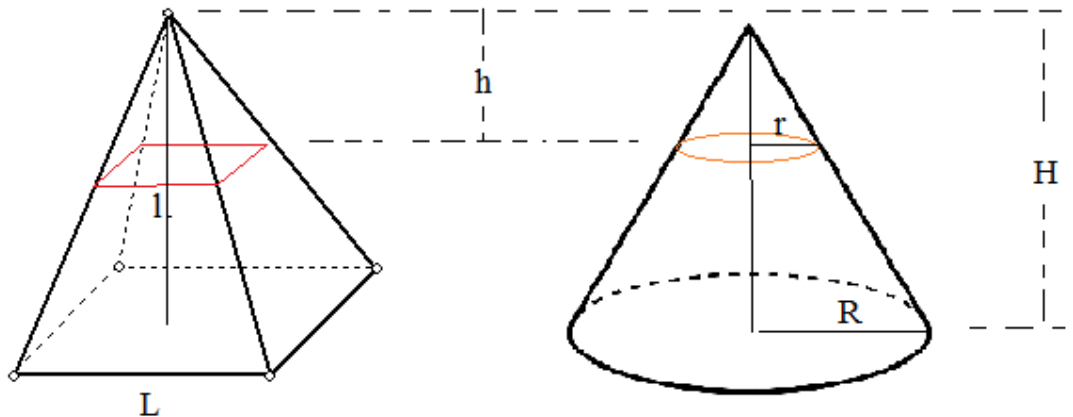


Figura 18 - Semelhança entre os elementos do cone e pirâmide

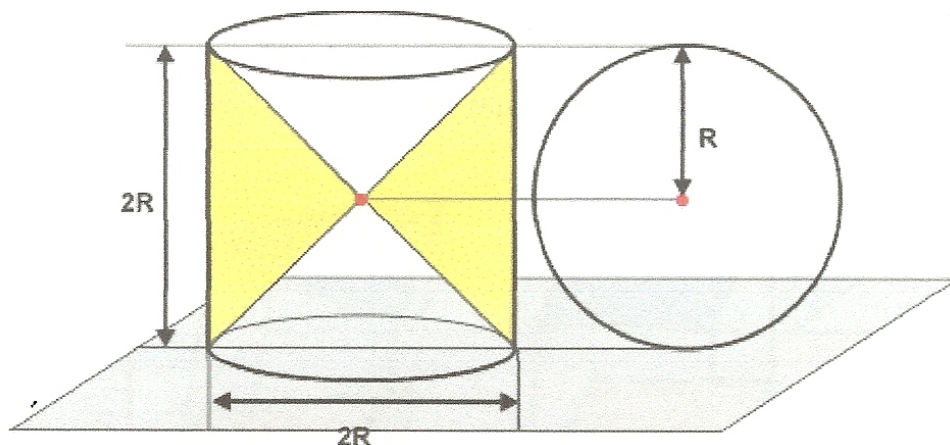
Portanto, no caso do cone por uma semelhança de triângulos, tem-se: $\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \rightarrow r = \frac{R \cdot h}{H}$ e assim a área da secção $A'_{\text{círculo}} = \pi \frac{R^2 h^2}{H^2}$.

Já na Pirâmide, tem-se também, pela semelhança de triângulos: $\frac{l}{L} = \frac{h}{H} \rightarrow l = \frac{L \cdot h}{H} \rightarrow l = \frac{r \sqrt{\pi} \cdot h}{H}$ e assim uma secção de área $A'_{\text{quadrado}} = l^2 \rightarrow A'_{\text{quadrado}} = \left(\frac{r \sqrt{\pi} \cdot h}{H}\right)^2 \rightarrow A'_{\text{quadrado}} = \pi \frac{R^2 h^2}{H^2}$

Contudo, como as áreas dessas secções são as mesmas, pode-se, pelo Princípio de Cavalieri, concluir que seus volumes são os mesmos e assim tem-se que o volume de um cone pode ser escrito como o mesmo da pirâmide, $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H$

3.5 Volumes de Esferas

Considere-se que esfera é o conjunto de pontos do espaço, obtidos pela revolução de um semicírculo sobre seu diâmetro. Para se calcular o volume de uma esfera pode-se compará-la com um cilindro equilátero de altura igual ao seu diâmetro.



Primeiramente, deve-se retirar dois cones de áreas das bases iguais as do cilindro e altura R , como mostra a figura abaixo. Traça-se agora, um plano a uma distância h do centro do cilindro e assim respectivamente a uma distância h do centro da esfera. Nesse plano forma-se uma coroa circular no cilindro e um círculo da esfera.

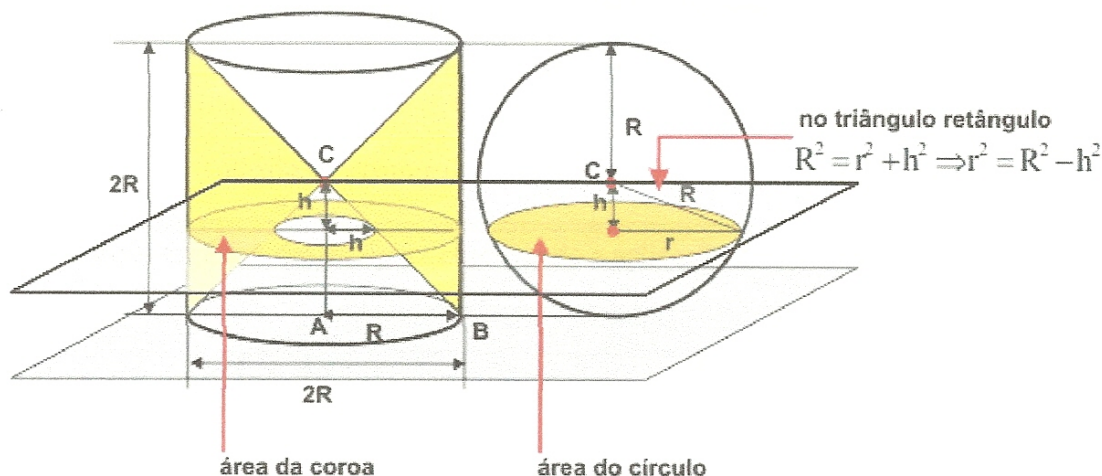


Figura 20 - comparação ente áreas de um cilindro e uma esfera em determinadaa seção paralela a base

A coroa circular da seção paralela a base do cilindro a distância h do centro do mesmo, tem como área: $A_{coroa} = \pi R^2 - \pi h^2$, já que por semelhança de triângulos tem-se o raio do círculo menor da coroa vale h , ou seja, $A_{coroa} = \pi(R^2 - h^2)$.

O cálculo da área do círculo formado pela interseção do mesmo plano com a esfera, será: $A_{circulo} = \pi r^2$, e assim pelo Teorema de Pitágoras, tem-se: $R^2 = r^2 + h^2$, ou seja, $Rr^2 = R^2 - h^2$, que dá $A_{circulo} = \pi \cdot (R^2 - h^2)$.

Como a área das seções paralelas a base do cilindro e da esfera são sempre iguais, pode-se concluir que o volume do sólido formado pelo cilindro equilátero, menos os dois cones e a área da esferas são congruentes, logo o volume do primeiro sólido vale:

$$V = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone}$$

$$V = \pi \cdot R \cdot 2R - 2 \cdot \frac{\pi R^2 R}{3}$$

$$V = 2\pi R^3 - 2 \cdot \frac{\pi R^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Portanto o volume da esfera pode ser calculado pela mesma expressão:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

3.6 Aplicação do Princípio de Cavalieri em Funções

Apesar de não ser uma aplicação explícita para o Ensino Básico, o Princípio de Cavalieri pode ser aplicado também nos estudos de função, ao se estudar Cálculo.

Considere-se duas regiões planas P e P' do plano cartesiano delimitadas por suas funções.

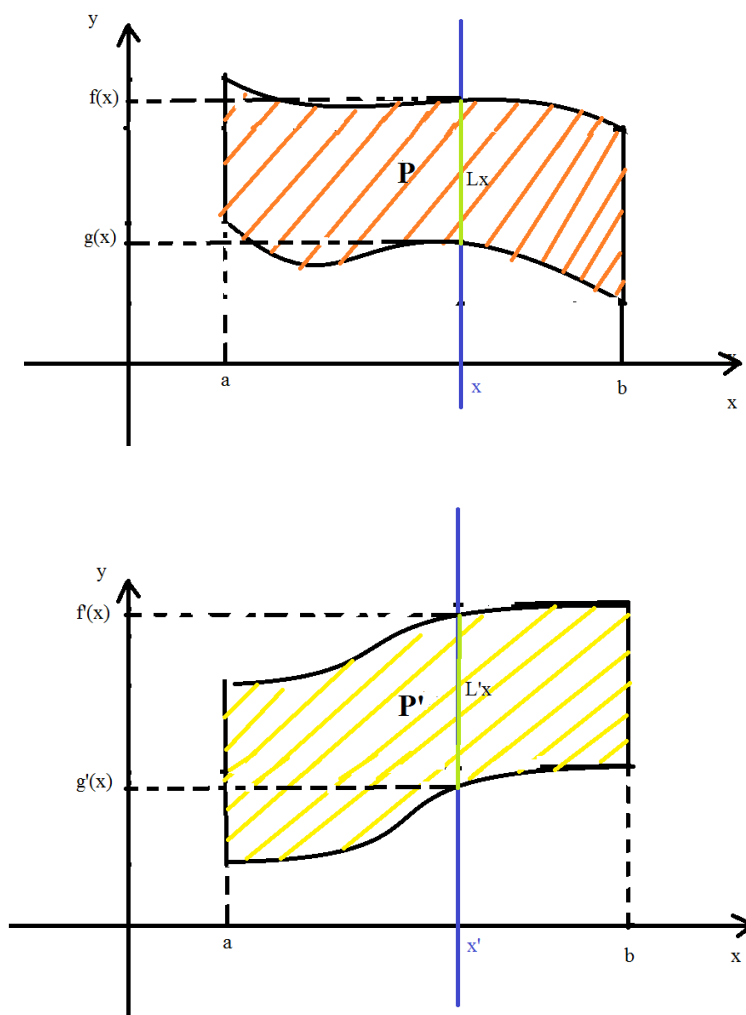


Figura 21 - Aplicação do Princípio de Cavalieri em funções

Considerando que essas regiões possuam a seguinte propriedade: tome uma reta vertical passando por um ponto x qualquer pertencente ao intervalo $[a, b]$ de P . Pode-se então descobrir o tamanho do segmento vertical em x , denominado de Lx . Pode-se associar infinitas retas verticais a esse intervalos, definindo que Lx é uma função de x . E assim, de forma análoga pode-se definir $L'x$ uma função com as mesmas características em P' .

Segundo o Princípio de Cavalieri, se para todo x pertencente a intervalo $[a, b]$ segue que os comprimentos Lx e $L'x$ forem iguais, então as áreas das regiões P e P' são iguais.

Para verificar tal fato, pode-se utilizar a ferramenta de Integral, que segue. Supondo que a região P seja delimitada pelas funções $f(x)$ e $g(x)$, e assim tem-se que Lx será igual a diferença da imagem de $f(x)$ pela imagem $g(x)$, ou seja, $Lx = f(x) - g(x)$

De mesma forma supõe-se que a região P' seja delimitada por $f'(x)$ e $g'(x)$, e assim $L'x$ será igual a diferença da imagem de $f'(x)$ pela imagem de $g'(x)$, ou seja, $L'x = f'(x) - g'(x)$.

Com o auxílio de Integral pode-se calcular a área da região P .

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx$$

ou seja ,

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b Lx dx$$

Analogamente tem-se que a área da região P' pode ser calculada por:

$$\int_a^b f'(x) - g'(x) dx = \int_a^b L'x dx$$

Assim com Lx e $L'x$ são iguais para todo o intervalo $[a, b]$, segue que :

$$\int_a^b Lx dx = \int_a^b L'x dx$$

e portanto as regiões P e P' tem a mesma área.

Vale ressaltar que esse cálculo pode ser mais abrangente, ou seja, pode-se aplicá-lo também em volumes, ou seja, no R^3 .

4. Aplicações em Sala de Aula do Princípio de Cavalieri

De forma a colocar em prática o Princípio de Cavalieri, propõe-se a seguinte atividade:

4.1 Atividade 1: Determinação da área de uma figura plana

A atividade proposta tem como objetivo mostrar aos alunos que podem descobrir novas áreas, por meio de uma área já conhecida, apenas utilizando o Princípio de Cavalieri. Nesta atividade vai-se relacionar um retângulo formado por "canudinhos" e um paralelogramo formado pelos "canudinhos" de mesmo número e tamanho.

Com a comparação entre as figuras fica fácil perceber que as superfícies possuem a mesma área, já que com a mesma quantidade de canudinhos tem-se figuras de mesma altura podendo então enfatizar o Princípio de Cavalieri, pois todos os segmentos transversais das duas regiões tem mesmos comprimentos e assim mesmas áreas.

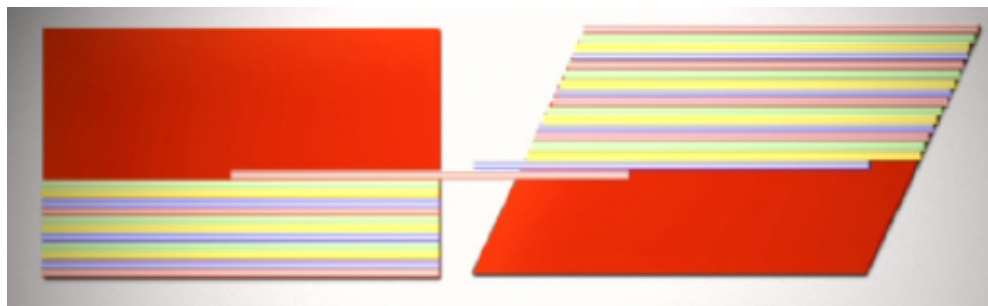


Figura 22 - Esboço da atividade 1

Porém não é preciso utilizar apenas canudinhos de mesmo tamanho (como mostra a figura abaixo), O Princípio de Cavalieri é também bem apresentado em outras figuras planas, já que novamente tem-se secções transversais de mesmo comprimento.

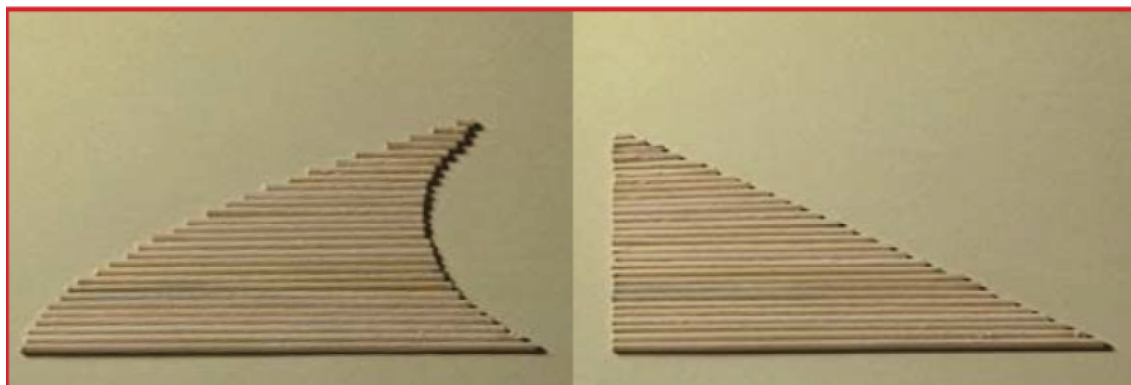


Figura 23 - Esboço da atividade 1 com palitos

4.1.1 Roteiro para atividade 1

1) Dá-se aos alunos uma porção de "canudinhos" e pede para que formem primeiramente um retângulo preenchendo com os "canudinhos" paralelamente.



Figura 24 - canudinhos propostos na atividade 1

2) Em seguida pede-se para que eles com uma nova porção de canudinhos, do mesmo tamanho e quantidade, formem um paralelogramo.

3) Pede-se aos alunos que estabeleçam uma relação entre a área das duas figuras, reforçando o conceito de que área é o tamanho da superfície compreendida em um polígono.

4.2 Atividade 2: Determinação do volume de um sólido

Para o cálculo de volumes, pode-se utilizar praticamente os mesmos procedimentos, porém agora, é preciso fornecer aos alunos várias regiões planas, a fim de que formem sólidos de diferentes formas.



Figura 25 - blocos de madeira proposto para atividade 2

Então com o Princípio de Cavalieri, pode-se compará-los e concluir que seus volumes são iguais.

4.2.1 Roteiro para atividade 2

- 1) Fornece-se aos alunos várias regiões "planas" (pequenos paralelepípedos), que podem ser feitos com madeira ou isopor.
- 2) Pede-se para que eles montem sólidos de diferentes maneiras, apenas com a preocupação de montá-los da maior região "plana" para a menor.
- 3) Pede-se aos alunos que façam a comparação entre seu sólido e os sólidos de seus colegas.

Tais atividades, apesar de simples, dão uma grande ideia do que é o Princípio elaborado por Cavalieri, principalmente aos alunos do Ensino Fundamental II do Ciclo Básico, já que não possuem um estudo mais aprofundado sobre sólidos.

4.3 Atividade 3: Determinação da relação 3:2:1 em alguns sólidos

Uma atividade utilizada com o Princípio de Cavalieri é proporcionar aos alunos a descoberta da relação 3 : 2 : 1 entre os volumes do cilindro, da semi esfera e do cone, todos de mesma base e mesma altura. Descobrir que o volume da semi esfera somada com o volume do cone será igual ao volume do cilindro. Após o término dessa atividade pode-se indagar os alunos que, se essa condição é válida, haveria alguma outra relação entre os sólidos? Decorrido mais um certo tempo, porém com mais dificuldade chega-se a conclusão que sim! A mesma relação 3 : 2 : 1 acontece também quando compara-se as áreas de uma determinada secção paralela às bases a mesma altura entre o cilindro, a meia esfera e o cone. Pode-se concluir então que tal relação sempre será válida pelo Princípio de Cavalieri, já que se tem-se que as áreas de uma determinada secção, a mesma distância da base, do cone somada com a área da meia esfera é igual área da secção correspondente do cilindro, então seu volume também tem a mesma relação, segundo Cavalieri.

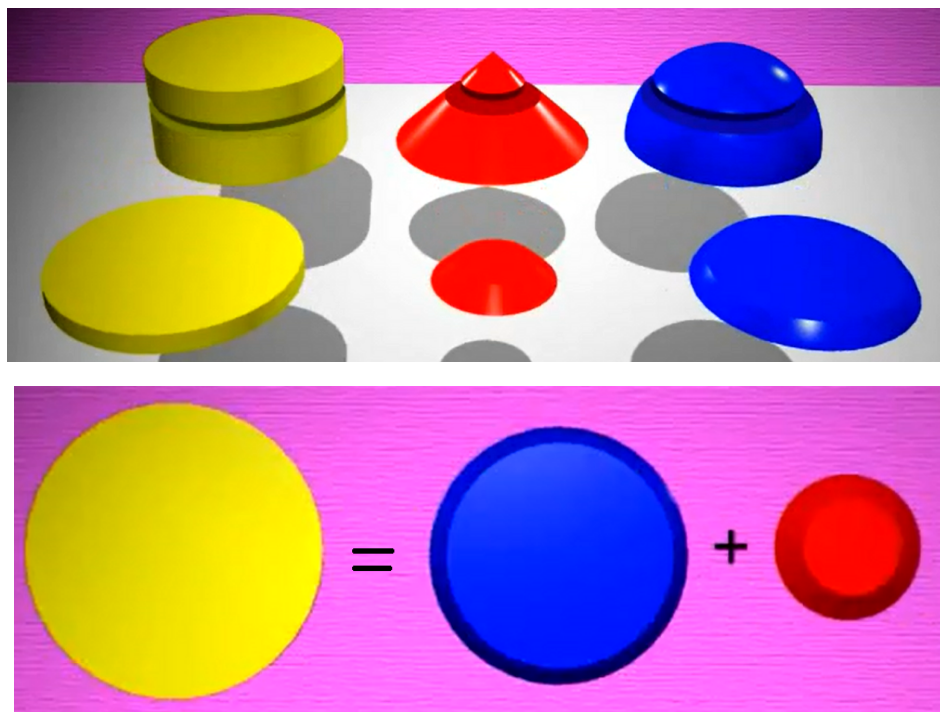


Figura 26 - esboço da atividade 3

4.3.1 Roteiro para atividade 3

1) Fornece-se aos alunos uma semiesfera, um cone e um cilindro de mesma base e mesma altura, feitos de acrílicos de preferência para enxergar seus interiores.

2) Em seguida oferece algum material para preencher seus volumes, como por exemplo isopor moído, areia, entre outros. Líquidos também podem ser utilizados, porém existe uma maior possibilidade de sujeira.

3) Propõe-se aos alunos que tentem descobrir uma relação entre os três sólidos.

4) Propor aos alunos que encontrem uma outra relação entre os sólidos com o auxílio do Princípio de Cavalieri.

4.4 Atividade 4 - Relação entre pirâmide e cone

Um atividade que pode ser proposta com a utilização do Princípio de Cavalieri, é fazer com que os alunos notem que quando tem-se uma pirâmide e um cone de mesma área da base e mesma altura, e secções paralelas à mesma altura em relação a base, teremos áreas das secções de mesmas alturas congruentes. E para se compreender o Princípio de Cavalieri pode-se colocar uma certa quantidade de algum líquido ou isopor até certa altura em cada sólido, para comprovar que seus volumes serão iguais.

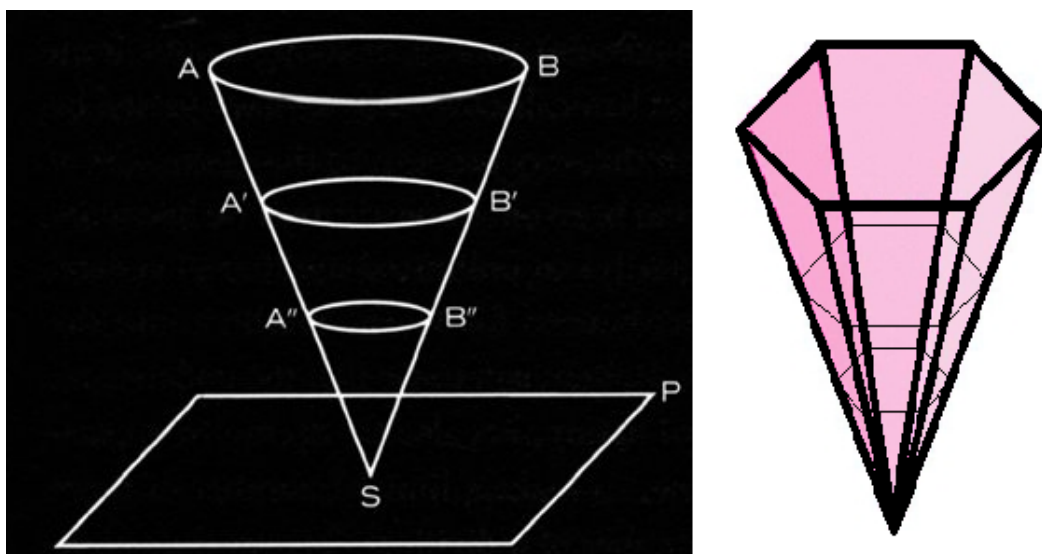


Figura 27 - sólidos propostos para atividade 4

4.4.1 Roteiro para atividade 4

1) Fornecer aos alunos uma pirâmide e um cone de mesma base e mesma altura, transparentes.

2) Fornecer aos alunos algumas regiões planas semelhantes as bases do cone de tamanhos diferentes.

3) Fornecer aos alunos algumas regiões planas semelhantes as bases da pirâmides de tamanhos diferentes.

4) Propor que coloquem essas regiões planas dentro de cada um dos sólidos correspondentes e que encontrem uma relação entre as áreas das regiões planas.

5) Para complementar a atividade pode-se pedir aos alunos que joguem algum líquido ou mesmo isopor moído dentro de cada um dos sólidos até uma mesma altura e em seguida pede-se que encontrem a relação entre esses volumes.

Muitas outras atividades podem ser contempladas com a utilização do Princípio de Cavalieri, principalmente para mostrar aos alunos que a geometria pode ser aplicada constantemente no dia-a-dia. Um exemplo disso é a relação que pode-se obter utilizando o Princípio de Cavalieri, formas geométricas e alguns conceitos de Física. Com essa experiência pode-se estabelecer com os alunos, por que sólidos com mesmo volume, mesma área de uma secção transversal possuem massas diferentes, trazendo um pouco mais dos conceitos literários para a realidade.

Índice de figuras

Figura 1 - Princípio de Cavalieri

Figura 2 - sólidos de mesmo volume

Figura 3 - regiões com mesmas áreas

Figura 4 - Bonaventura Cavalieri

Figura 5 - R_x é a secção transversal de R no plano perpendicular ao eixo x em x

Figura 6 - planos através dos pontos de partição $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ que representam partições do sólido $R_1, R_2, R_3 \dots R_n$

Figura 7- A laje R_1 , aproximada pelo volume do cilindro C_1

Figura 8 - Rotação de retângulo para formação de cilindro reto

Figura 9 - Rotação de retângulo para formação de cilindro oblíquo

Figura 10 - Representação de dois cilindros equivalentes pelo Princípio de Cavalieri

Figura 11 - Alguns tipos de prismas

Figura 12 - Representação de dois prismas equivalentes pelo Princípio de Cavalieri

Figura 13 - Pirâmide

Figura 14 - Repartição de um prisma em três pirâmides

Figura 15 - Pirâmide seccionada por um plano

Figura 16 - Cone

Figura 17 - Semelhança entre pirâmide e cone

Figura 18 - Semelhança entre os elementos do cone e pirâmide

Figura 19 - comparação entre um cilindro equilátero e esfera

Figura 20 - comparação ente áreas de um cilindro e uma esfera em determinadaa secção paralela a base

Figura 21 - Aplicação do Princípio de Cavalieri em funções

Figura 22 - Esboço da atividade 1

Figura 23 - Esboço da atividade 1 com palitos

Figura 24 - canudinhos propostos na atividade 1

Figura 25 - blocos de madeira proposto para atividade 2

Figura 26 - esboço da atividade 3

Figura 27 - sólidos propostos para atividade 4

Bibliografia

BOYER, C. B. (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher.

DOLCE, O. P. (2005). *Fundamentos de Matemática elementa* (Vol. 10). São Paulo: Atual Editora.

EVES, H. (2004). *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Unicamp.

LIMA, E. L. (1991). *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: Grafitex.

PENNEY, D. E. (1998). *Calculus with Analytic Geometry*. New Jersey: Prentice Hall.