Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Marcelo Costa Valeriano

Um Olhar Didático Sobre a Geometria Finita

Campo Grande - MS

2024

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Marcelo Costa Valeriano

Um Olhar Didático Sobre a Geometria Finita

Orientador Prof. Dr. Leandro Bezerra de Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2024

Um Olhar Didático Sobre a Geometria Finita

Marcelo Costa Valeriano

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela banca examinadora:

Prof. Dr. Leandro Bezerra de Lima (Orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Joelma Ananias de Oliveira
Universidade Federal de Rondonópolis - UFR

Campo Grande - MS, 09 de Agosto de 2024

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que de alguma forma participaram e me apoiaram para a conclusão desse curso.

À minha mãe que me apoiou de diversas formas, com seu tempo, sua paciência, sua compreensão e sua alegria, todos os dias.

Ao meu professor orientador Leandro Bezerra de Lima, que sempre teve muita paciência comigo, e sempre esteve disponível para conversar, dar ideias e sugestões, além de incentivar a participação em eventos.

Aos membros da banca Prof. Dr. Claudemir Aniz, Profa. Dra. Joelma Ananias de Oliveira, Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas e Prof. Dr. Aroldo José de Oliveira que aceitaram participar desse momento importante, assim como, suas contribuições.

Aos meu colegas de curso, que sempre me deram apoio, e sempre foram muito parceiros durante essa caminhada de 2 anos que foi esse mestrado.

A equipe da Escola Estadual Teotônio Vilela, que sempre foi muito parceira e compreensiva quanto a questões relacionadas ao mestrado.

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, por me acolher inicialmente no curso de licenciatura em matemática, e posteriormente no mestrado profissional.

À FUNDECT, pelo apoio financeiro concendido, o que me proporcionou uma melhor qualidade de ensino.

Resumo

Neste Trabalho é apresentado uma sequência de atividades com o intuito de proporcionar aos alunos um contato com geometrias não-euclidianas, em específico geometrias finitas, como forma de uma proposta diferente ao ensino de geometria no ensino básico. Para tal, em um primeiro momento são apresentados os conceitos básicos da geometria moderna, assim como, algumas geometrias finitas com seus principais conceitos e demonstrações. Em seguida será mostrado quais os motivos que envolvem a necessidade de uma abordagem diferente no ensino de geometria, assim como, os benefícios dessa abordagem. Finalizando o último capítulo com as propostas de atividades, envolvendo tanto o uso do geoplano para a criação de modelos das geometrias finitas que serão apresentadas aos alunos, como utilizando o jogo Dobble para uma leve introdução a espaços projetivos, em especial os planos projetivos finitos.

Palavras-chave: Geometrias Finitas, Geoplano, Geometrias Não Euclidianas.

Abstract

This work presents a sequence of activities to provide students with contact with non-Euclidean geometries, specifically finite geometries, as a form of a different proposal for the teaching of geometry in elementary school. For this, at, first the basic concepts of modern geometry are presented, as well as some finite geometries with their main concepts and demonstrations. Then it will be shown what reasons involve the need for a different approach in teaching geometry, as well as the benefits of this approach. ending the last chapter with the proposals of activities, involving both the use of Geoboard to create models of finite geometries that will be presented to students and using the game Dobble for a light introduction to projective spaces, especially finite projective planes.

Key words: Finite Geometry, Geoboard, Non Euclidean Geometries.

Sumário

Introdução

O ensino de matemática nas escolas é um assunto que gera muita discussão, tanto pela forma tradicionalista que os professores lecionam, quanto pela dificuldade em despertar o interesse no educando para área da matemática. Além disso, quando analisamos em particular o ensino de geometria, isso se torna um caso ainda mais complexo, pois, o mesmo é uma área da matemática que é por muitas vezes negligênciada no ensino básico, tanto por ser lecionada de maneira superficial em diversos casos, como também, por ser deixada em segundo plano para dar prioridade ao ensino de matérias como álgebra e aritmética, nas quais são vistas como matérias de maior importância para a educação obrigatória.

Por outro lado, a geometria também é uma matéria essencial na formação do cidadão, pois, a mesma envolve a criação de diversos conceitos, como análise espacial, noção de dimensão e métrica, além de ser um dos primeiros contatos do educando com as noções de demonstração lógica, dado que muitos teoremas e proposições mais simples podem ser demonstrados de uma forma mais fácil através do apelo visual que a geometria proporciona.

Pensando nisso esse trabalho visa apresentar uma proposta diferente para o ensino de geometria, trazendo geometrias não euclidianas, com o intuito de tirar os alunos da zona de conforto, para que os mesmos possam descobrir que existem diversas geometrias diferentes da tradicional, assim como, poder trabalhar conceitos em comum entre elas, como retas paralelas, distância, e as mudanças que podem ocorrer de uma geometria para outra, o que pode proporcionar aos alunos uma maior compreensão do que é geometria, assim como, despertar o interesse dos alunos para área.

No primeiro capítulo serão apresentados os conceitos do método axiomático e sistema axiomático, sendo estes a base da geometria moderna, para melhor ilustrar será feito um sistema axiomático genérico, na qual será denominado de sistema Fi-Fo, sistema esse que será explorado através de suas definições, axiomas e na demonstrações de alguns teoremas. Posteriormente, serão introduzidos os conceitos de geometria, dessa vez com um ponto de vista de um sistema axiomático, com foco na geometria finita, na qual como o nome sugere irá limitar o número de pontos e retas existentes na situação, formando espaços discretos. Assim como citado, o foco será a geometria finita, dessa forma serão contemplados alguns casos, como a geometria de três pontos e a geometria de Fano, procurando apresentar suas definições, Axiomas, modelos e demonstrar alguns Teoremas mais pertinentes.

No capítulo seguinte, será apresentado um breve panorama da situação do ensino de geometria no Brasil, mostrando o motivo por trás da elaboração desse trabalho, utilizando tanto um ponto de vista apresentado por Pavanello[2], quanto alguns conceitos apresentados na BNCC (Base Nacional Comum Curricular), dessa forma expondo as consequências causadas pelo ensino atual, tal qual, os possíveis benefícios de um ensino de geometria diferenciado.

No último capítulo serão exibidas as atividas propostas com o uso das geometrias finitas, fazendo inicialmente nas atividades 1 e 2 o uso do geoplano, procurando explorar a criação de modelos geométricos que satisfaçam as definições e Axiomas de cada geometria que será apresentada, assim como, ampliar os conceitos primários relacionados a geometria, como retas paralelas e distância entre pontos. Posteriormente, na atividade 3 será trabalhado o jogo Dobble, jogo simples que possui como objetivo principal a comparação de figuras entre as cartas do jogo de forma rápida, sendo que este será utilizado para introduzir o conceito de espaço projetivo com os alunos do ensino médio, assim como, utilizando essa noção de espaço projetivo para o desenvolvimento de outros jogos dobble, com uma proporção menor de figuras e cartas.

Capítulo 1

Sistemas Axiomáticos e suas propriedades

A geometria é uma das áreas da matemática mais antigas, sendo suas aplicações estudadas durante vários anos ao decorrer da história por povos como os gregos, egípcios e babilônicos. O estudo da geometria moderna vem do método axiomático, que por sua vez é o fator lógico que separa a geometria moderna da geometria clássica. Pensando nisso, nesse capítulo serão abordados os conceitos por trás do método axiomático, sistemas axiomáticos, assim como exemplos do mesmo.

1.1 O método axiomático

O método axiomático pode ser descrito da seguinte forma:

1. Todo sistema axiomático deve conter um conjunto de termos técnicos que iremos chamar de "termos indefinidos", e que estes estão sujeitos a interpretação do leitor.
2. Quaisquer outros termos técnicos do sistema são definidos pelos termos indefinidos. Estes por sua vez serão chamados de "definições" do sistema.
3. O sistema axiomático contém um conjunto de afirmações, constituído por termos indefinidos, na qual não necessita de uma prova. Essas afirmações são chamadas de "axiomas" do sistema.
4. Quaisquer outras afirmações do sistema precisam ser consequência lógica dos Axiomas. Tais nomeadas como "Teoremas".

Sistemas axiomáticos são essenciais para questões teóricas. Para tal, os Axiomas são tidos como verdades fundamentais, o que do ponto de vista teórico é necessário para evitar um paradoxo lógico, onde para provar o Teorema A, é necessário o Teorema B, e para provar o Teorema B é necessário o Teorema C, e assim, sucessivamente. Dessa forma utilizando o Axioma como uma verdade primordial, tudo será consequência das afirmações iniciais.

1.2 Sistema Axiomático Fi-Fo

Vamos criar um sistema axiomático definido da seguinte forma: Termos indefinidos "Fi", "Fo", e a relação entre eles é de "pertence à", ou seja, "um Fi pertence à um Fo".

Definição 1.1 *: Se um Fi pertence a um Fo, nós dizemos que o Fo "contém" o Fi.*

- Axioma 1: Existem exatamente 3 Fis distintos nesse sistema.
- Axioma 2: Quaisquer 2 Fis pertencem exatamente a um Fo.
- Axioma 3: Nem todo Fi, pertence ao mesmo Fo.
- Axioma 4: Quaisquer 2 Fos distintos contém pelo menos um Fi que pertence a ambos.

Construído nosso sistema axiomático agora iremos provar alguns Teoremas.

1.2.1 Teoremas Importantes

Teorema 1.2 *Cada Fo tem exatamente dois Fis que pertencem à ele.*

Prova. *Seja F um Fo, pelo Axioma 3, nem todo Fi pertence à F e pelo Axioma 1, existem exatamente três Fis distintos. Dessa forma, concluímos que existem até 2 Fis que pertencem à F. Suponha que existe somente um Fi pertencente à F, isso implica que existem dois Fis que não pertencem a F. Dado G, como o único Fo que contém os outros dois Fis, o que é garantido pelo Axioma 2, temos que, F e G são dois Fos distintos, o que pelo Axioma 4 é garantido que existe pelo menos um Fi em comum. O que é uma contradição[8].*

Teorema 1.3 *Um Fo é completamente caracterizado pelos Fis que ele contém, ou seja, dados dois Fos distintos, então eles não contêm os mesmos Fis.*

Prova. *Sejam F e G dois Fos distintos. Segundo o Teorema 1.2, F e G possuem exatamente dois Fis cada um. Suponha que, F e G contenham exatamente os mesmo Fis, então isso acarretaria em uma contradição do Axioma 2, pois, existiriam dois Fos distintos com os mesmos Fis. Logo, F e G contêm Fis diferentes[8].*

Teorema 1.4 *Dois Fos distintos contêm exatamente um Fi em comum.*

Prova. *Sejam F e G dois Fos distintos. Assim, pelo Axioma 4, existe pelo menos um Fi, que pertence à ambos. Entretanto, pelo Teorema 1.3, temos que como F e G são distintos, então eles não podem ter exatamente os mesmos Fis. Logo, F e G só possuem um Fi em comum[8].*

Teorema 1.5 *Existem exatamente 3 Fos distintos.*

Prova. *Pelo Teorema 1.3 existem exatamente 2 Fis para cada Fo e, pelo Axioma 1, temos exatamente 3 Fis. Logo, verificando todas as combinações possíveis, observamos que existem exatamente* $\binom{3}{2} = 3$ *Fos[8].*

1.3 Sistema Dependente e Independente

Definição 1.6 *Um Axioma individual é dito como "independente" se ele não é um Teorema dos outros Axiomas.*

Definição 1.7 *É dito que um conjunto de Axiomas é "independente" se cada Axioma é individualmente independente.*

Definição 1.8 *Um Axioma que não é independente em um sistema é dito "dependente".*

A independência dos Axiomas no sistema é uma parte importante na criação de um sistema axiomático, pois o mesmo garante que não haverá redundância, ou informação a mais desnecessária no sistema, em que um axioma pode ser obtido dos demais. Entretanto, o sistema não precisa necessariamente ser independente, pois, principalmente para fins didáticos pode-se colocar um Teorema como Axioma para facilitar a compreensão do sistema, ou até mesmo para evitar a demonstração do mesmo, em casos em que a demonstração possua um grau de abstração elevado em relação ao nível dos educandos.

Para demonstrar que um é independente, basta criar um modelo para o sistema que satisfaça todos os outros Axiomas, enquanto nega o Axioma analisado. Caso seja possível a criação do modelo, então o Axioma em questão é independente, caso isso seja válido para todos os Axiomas do sistema, então o sistema axiomático será independente.

1.4 Independência do sistema Fi-Fo

1.4.1 Independência do Axioma 1

Prova.

- Considere o modelo formado por quatro Fis, sendo estes, a, b, c e d, e o conjunto dos elementos de Fo formados por {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c,d}.
- O Axioma 2 é satisfeito, pois, cada um dos seis pares de elementos está contido em um único conjunto.
- O Axioma 3 é satisfeito, pois, não existe um conjunto que contenha os quatro elementos.
- O Axioma 4 é satisfeito, pois, qualquer interseção entre dois conjuntos é composta por um único elemento[8].

1.4.2 Independência do Axioma 2

Prova.

- Considere o modelo formado por três Fis, a, b, c e os conjuntos de Fos {a,b} e {b,c}.
- O Axioma 1 é satisfeito, pois, existem exatamente três Fis.
- O Axioma 3 é satisfeito, pois, não existe conjunto que possua os três Fis.
- O Axioma 4 é satisfeito, pois, quaisquer conjuntos distintos, contêm, pelo menos um Fi em comum[8].

1.4.3 Independência do Axioma 3

Prova.

- Considere os 3 Fis a, b, c, e o conjunto Fo {a,b,c}

- O Axioma 1 é satisfeito, pois, existem três Fis.
- O Axioma 2 é satisfeito, pois, qualquer par de Fis, pertence exatamente, a um Fo, nesse caso {a,b} contido em {a,b,c}; {a,c} contido em {a,b,c}; {b,c} contido em {a,b,c}.
- O Axioma 4 é satisfeito, pois, como só existe um Fo, então todos os termos são comuns à ele[8].

1.4.4 Independência do Axioma 4

Prova.

- Considere o modelo formado pelos três Fis a, b, c e os conjuntos Fos {a,b}, {b,c}, {a,c} e {b}.
- O Axioma 1 é satisfeito, pois, existem exatamente três Fis.
- O Axioma 2 é satisfeito, pois, cada par está contido em um único conjunto.
- O Axioma 3 é satisfeito, pois, não existe Fo, que contenha todos os Fis.

Assim, temos que o sistema Fi-Fo é independente[8].

1.5 Geometria

Tendo em vista o método axiomático e como é a construção de um sistema axiomático, é possível agora analisar a geometria a partir dessa premissa, onde os termos indefinidos são pontos e retas, e a relação de incidência é, “um ponto é incidente em uma reta” ou “um ponto está em uma reta”.

Também composto pelas seguintes definições:

- Um ponto está sobre uma reta, será dito que a reta “contém” esse ponto.
- Duas retas distintas se “intersectam” se existe um ponto em ambas as retas.
- Duas retas distintas são “paralelas” se elas não se intersectam.
- Um conjunto de pontos é dito “colinear”, se existe uma única reta na qual incidem todos os pontos do conjunto.

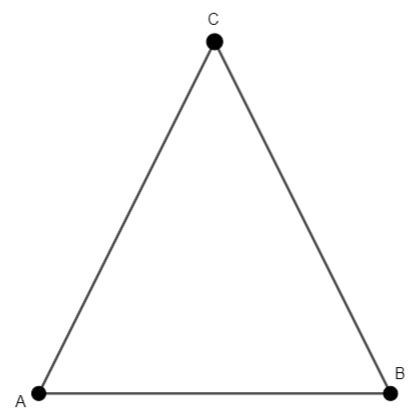
- Um conjunto de retas é dito "concorrente", se existe um único ponto que incide em todas as retas do conjunto.

Além disso, caso o número de pontos e retas sejam finitos, esta será chamada de Geometria Finita, a qual será o foco a seguir deste trabalho.

1.6 Geometria de três pontos

- Axioma 1: Existem exatamente 3 pontos distintos.
- Axioma 2: Para cada 2 pontos distintos, existem uma única reta que contém os dois.
- Axioma 3: Nem todos os pontos estão sobre a mesma reta.
- Axioma 4: Todas as retas se intersectam.

Figura 1.1: Modelo Geometria de três pontos



Fonte: Feito pelo Autor

Iremos começar o estudo da Geometria Finita através da Geometria de três pontos, principalmente porque é possível fazer um paralelo com o sistema Fi-Fo, bastando trocar termos indefinidos de "Fi" para "ponto" e "Fo" para "reta". Dessa forma é possível observar que o sistema Fi-Fo e a Geometria de três pontos possuem o mesmo comportamento com termos indefinidos distintos. Como consequência, tudo que é válido para o sistema Fi-Fo deve ser válido para o correspondente na Geometria de três pontos, que será demonstrado a seguir.

Teorema 1.9 *Cada reta tem exatamente dois pontos que pertencem à ela.*

Prova. *Seja r uma reta, pelo Axioma 3, nem todo ponto pertence à r, e pelo Axioma 1, existem exatamente 3 pontos distintos. Dessa forma, concluímos que existem até 2 pontos que pertencem à r. Suponha que existe somente um ponto que pertence à r, isso implicaria que existe dois pontos que não pertencem à r. Dado s, como a única reta que contém os outros dois pontos, o que é garantido pelo Axioma 2, temos que r e s são duas retas distintas, o que pelo Axioma 4 é garantido que existe pelo menos um ponto em comum. O que é uma contradição[8].*

Teorema 1.10 *Uma reta é completamente caracterizada pelos pontos que ela contém, ou seja, dados duas retas distintas, então estas não contêm os mesmos dois pontos.*

Prova. *Sejam r e s duas retas distintas. Segundo o Teorema 1.9, r e s possuem exatamente dois pontos cada uma, Suponha que, r e s contenham exatamente os mesmos dois pontos, então isso implica em uma contração do Axioma 2, pois, existiriam duas retas distintas com os mesmos pontos. Logo, r e s contêm pontos diferentes[8].*

Teorema 1.11 *Duas retas distintas contêm exatamente um ponto em comum.*

Prova. *Sejam r e s retas distintas. Assim, pelo Axioma 4, existe pelo menos um ponto, que pertence à ambas. Entretanto, pelo Teorema 1.10, temos que como r e s são distintas, então elas não podem ser compostas pelos mesmos pontos. Logo, r e s só possuem um ponto em comum[8].*

Teorema 1.12 *Existem exatamente 3 retas distintas.*

Prova. *Pelo Teorema 1.10 cada reta é formada unicamente por um par de pontos, e pelo Axioma 1, temos exatamente 3 pontos. Logo verificando todas as combinações possíveis, observamos que existem exatamente* $\binom{3}{2} = 3$ *retas[8].*

Como demonstrado, dado pequenas alterações dos termos indefinidos, a geometria de três pontos possui as mesmas características e consequências do sistema Fi-Fo visto anteriormente.

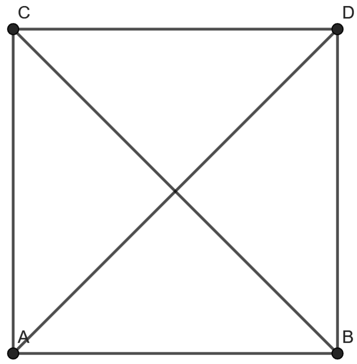
1.7 Geometria dos quatro pontos

- Axioma 1: Existem exatamente 4 pontos distintos.

- Axioma 2: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta que incide em ambos.

- Axioma 3: Cada reta tem exatamente dois pontos distintos.

Figura 1.2: Modelo Geometria de quatro pontos



Fonte: Feito pelo autor.

Teorema 1.13 *Se duas retas distintas se intersectam, então a interseção é de apenas um ponto.*

Prova. *Suponha que existam duas retas que tenham pelo menos, um ponto de interseção. Se existe mais de um ponto de interseção, então deve haver pelo menos dois pontos de interseção. Assim, devem existir duas retas distintas, que contenham esses dois pontos distintos. O que contradiz o Axioma 2. Portanto, existe apenas um ponto de interseção[8].*

Teorema 1.14 *Existem exatamente 6 retas.*

Prova. *Pelo Axioma 1 existem exatamente 4 pontos distintos, e pelo Axioma 2 para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que incide sobre ambos, e pelo Axioma 3 sabemos que cada reta possui exatamente dois pontos. Dessa forma, o número de retas distintas é o mesmo que número de pares de pontos distintos (não ordenados) que é igual a* $\binom{4}{2} = 6$ *[8].*

Teorema 1.15 *Cada ponto tem exatamente três retas que o contêm.*

Prova. *Pelo Axioma 2, cada ponto X possui uma reta que contêm ele com outros pontos dessa geometria. Pelo Axioma 1 existem 3 retas, o que resultam em três retas distintas. Se existe outra reta que contenha o ponto X, então pelo Axioma 3, essa reta precisa conter outro ponto que não seja X. Porém, isso contradiz a unicidade da reta garantida* *pelo Axioma 2, pois, já foram contabilizadas três retas. Portanto, existem exatamente três retas que contêm o ponto X[8].*

Teorema 1.16 *Cada reta possui exatamente uma reta paralela à ela.*

Prova. *Sejam A, B, C e D pontos distintos, que sabemos que existem devido ao Axioma 1 e, AB, AC, AD, BC, BD e CD as 6 possíveis retas distintas formadas a partir dos 4 pontos, que é garantido pelo Teorema 1.14. Assim, sem perda de generalidade observe que a reta AB possui intersecção no ponto A com as retas AD e AC, por outro lado, a reta AB possui interseção no ponto B com as retas BC e BD, entretanto, a reta AB não possui nenhum ponto comum com a reta CD. Logo, AB é paralelo à CD[8].*

1.7.1 Independência da Geometria de quatro pontos

Axioma 1: Existem exatamente quatro pontos.

Prova. Considere o modelo que contem precisamente dois pontos A e B e uma reta que contém ambos os pontos, Figura 1.3.

Figura 1.3:

Fonte: Feito pelo Autor.

Esse modelo não satisfaz o Axioma 1 pois, possui um número menor de pontos[3].

Axioma 2: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta que intersecta ambos.

Prova. O modelo é constituído pelos pontos A, B, C e D e pelas retas AB e CD, Figura 1.4. Este modelo não satisfaz o Axioma 2, pois, não existe reta que contenha os pontos

Figura 1.4:

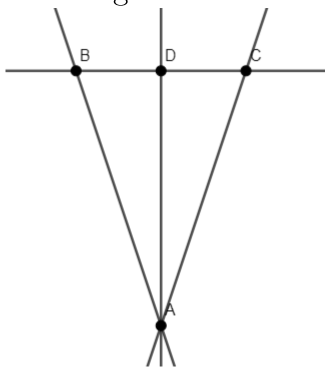
Fonte: Feito pelo Autor.

A e C por exemplo[3].

Axioma 3: Cada reta tem exatamente dois pontos distintos.

Prova. Seja o modelo construído a partir dos pontos A, B, C e D, uma reta que contem os pontos B, C e D e as demais retas se interceptam no ponto A, Figura 1.5. O modelo

Figura 1.5:



Fonte: Feito pelo Autor.

não atende ao Axioma 3, pois, existe uma reta que contem 3 pontos[3].

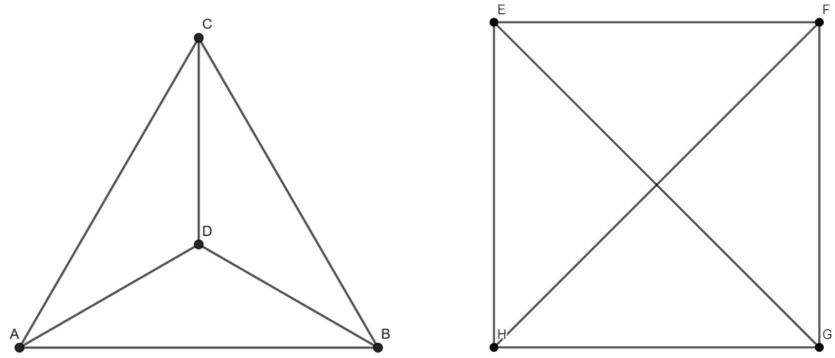
Como os Axiomas 1, 2 e 3 são independentes, logo o sistema é independente.

Até agora vimos duas geometrias finitas, cada uma representada pelos seus repectivos modelos, entretanto, em relação aos modelos um questionamento pode surgir naturalmente, "existem outros modelos que possam representar esta mesma geometria finita?", e a resposta é sim, são o que chamamos de modelos isomórficos, na qual será apresentada a denifição a seguir:

Definição 1.17 *Dois modelos Γ e Γ' de um sistema axiomático serão isomórficos caso exista uma bijeção entre o conjunto de pontos de Γ e o conjunto de pontos de Γ' e uma bijeção entre o conjunto de retas de Γ com o conjunto de retas de Γ' de modo que sejam preservadas todas as relações de incidência.*

Pensando no modelo da geometria de três pontos é um tanto difícil imaginar inicialmente um modelo distinto do apresentado, pelo menos mantendo o conceito de reta que conhecemos da geometria Euclidiana, por outro lado na geometria de quatro pontos isso já não é uma tarefa tão difícil, o que a seguir apresentaremos outro possível modelo assim como a prova de que ele é isomórfico:

Figura 1.6: Modelos isomórficos da Geometria de quatro pontos



Fonte: Feito pelo Autor.

Vamos provar agora que o modelo apresentado é isomórfico.

Prova. Começaremos estabelecendo a bijeção entre os pontos de ambos os modelos.

$$A \longleftrightarrow H$$
$$B \longleftrightarrow G$$
$$C \longleftrightarrow F$$
$$D \longleftrightarrow E$$

Prosseguindo será estabelecida uma bijeção entre as suas retas. A imagem da reta AB é a reta formada pelos pontos que são imagem de A e de B, ou seja a reta HG, e o mesmo se passa com as outras retas, resultando em:

$$AB \longleftrightarrow HG$$
$$AC \longleftrightarrow HF$$
$$AD \longleftrightarrow HE$$
$$BC \longleftrightarrow GF$$
$$BD \longleftrightarrow GE$$
$$CD \longleftrightarrow FE$$

Nestas bijeões são preservadas as relações de incidência, logo os modelos são isomórficos.[3] Prosseguindo com o nosso estudo iremos apresentar o conceito de dualidade.

Definição 1.18 *Chama-se dual de uma afirmação num sistema axiomático a afirmação que se obtém ao trocar os termos de ponto e reta.*

Definição 1.19 *Dizemos que um sistema axiomático é Dual de outro, quando todos seus Axiomas sãos Duais em relação a um mesmo sistema axiomático.*

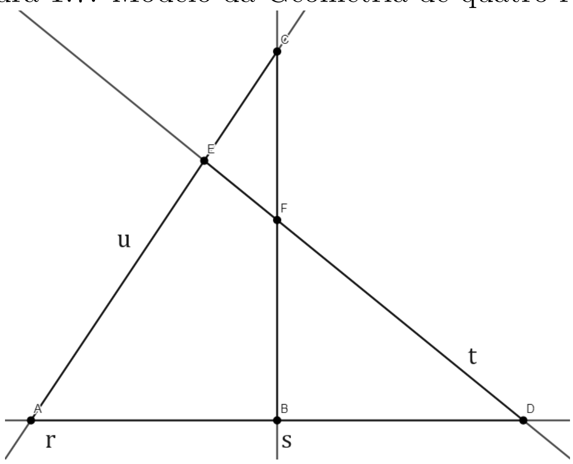
Definição 1.20 *Dizemos que um sistema axiomático satisfaz o princípio da dualidade se o dual de cada afirmação é também uma afirmação verdadeira.*

Agora será apresentado um sistema dual a Geometria de quatro pontos, que chamaremos de geometria das quatro retas.

1.8 Geometria das quatro retas

- Axioma 1: Existem exatamente quatro retas distintas.
- Axioma 2: Dadas duas retas distintas, existe exatamente um ponto em comum.
- Axioma 3: Cada ponto pertence exatamente a duas retas distintas.

Figura 1.7: Modelo da Geometria de quatro retas



Fonte: Feito pelo Autor.

Agora iremos enunciar e demonstrar o dual do Teorema 1.14

Teorema 1.21 *(Dual do Teorema 1.14) Existem exatamente seis pontos.*

Prova. *Pelo Axioma 1 temos que existem exatamente quatro retas distintas* r, s, t *e* u. *Segundo o Axioma 2 cada duas retas distintas possuem um ponto em comum, podemos considerar esses pontos A, B, C, D, E e F comuns às retas* r *e* u, s *e* t, u *e* s, r *e* t, u *e* t *e* s *e* t, *respectivamente. Dessa forma, obtemos 6 pontos definidos (Figura 1.7).*

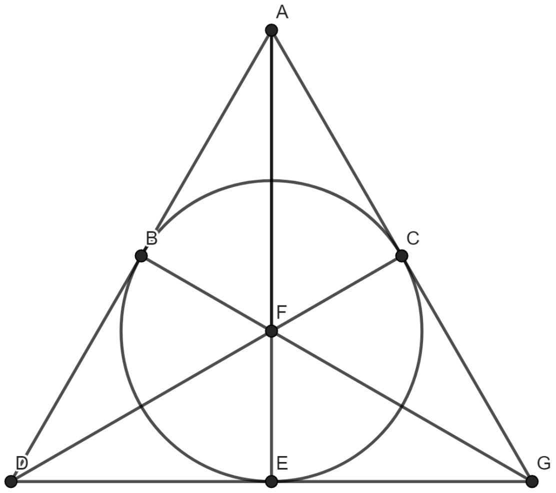
Iremos provar agora que não existem mais que os seis pontos dados. Suponha que existe um sétimo ponto G, distintos dos anteriores. Pelo Axioma 3, existem duas retas que contém esse pontos. Logo, o ponto G é comum à duas retas definidas anteriormente, *pois, não há mais retas. Entretanto, foram definidos os pontos comuns a cada duas retas e conforme o Axioma 2, o ponto G precisa ser um dos pontos A ou B ou C ou D ou E ou F. O que é uma contradição, pois, G é um ponto distinto dos anteriores. Assim, existem exatamente seis pontos.[3]*

1.9 Geometria dos sete pontos

- Axioma 1: Existe pelo menos uma reta.
- Axioma 2: Existem exatamente 3 pontos para cada reta.
- Axioma 3: Nem todos os pontos estão sobre a mesma reta.
- Axioma 4: Para cada dois pontos distintos, existem uma única reta que contém ambos.
- Axioma 5: Todas as retas se interceptam.

A seguir na Figura 1.8 podemos observar o Plano de Fano, que foi criado por Gino Fano, um matemático italiano nascido 1871, que ficou conhecido como o fundador da Geometria Finita e um dos primeiros a tentar definir a geometria através de uma base abstrata. Sendo algumas de suas contribuições relacionadas a estudo de geometria linear e equações lineares com coeficientes algébricos, assim como, estudo de superfícies algébricas.

Figura 1.8: Modelo Geometria de 7 pontos (Plano de Fano)



Fonte: Feito pelo Autor.

Para começar a geometria de sete pontos iremos demonstrar que o sistema é independente.

1.9.1 Independência da Geometria de sete pontos

Axioma 1: Existe pelo menos uma reta.

Prova.

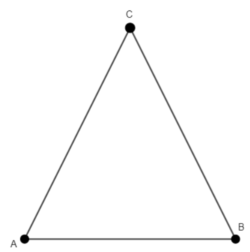
Um modelo sem retas satisfaz todos os outros axiomas, porém, contradiz o Axioma 1[8].

Axioma 2: Existem exatamente 3 pontos para cada reta.

Prova.

Dado um modelo em formato triângular de vértices os pontos A, B e C, Figura 1.9.

Figura 1.9:



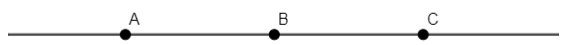
Fonte: Feito pelo Autor.

Dessa forma, cada reta terá exatamente dois pontos, o que contradiz o Axioma 2[3].

Axioma 3: Nem todos os pontos estão sobre a mesma reta.

Prova.

Figura 1.10:



Fonte: Feito pelo Autor.

Dado um modelo formado por apenas uma reta contendo três pontos A, B e C, não verifica o Axioma 3, pois, todos os pontos pertencem a mesma reta, Figura 1.10[3].

Axioma 4: Para cada dois pontos distintos, existem uma única reta que contém ambos.

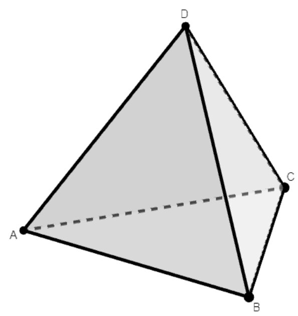
Prova.

Utilizando como modelo um tetraedro de vértices A, B, C e D, cujas as faces representam as retas. Nesse caso para melhor visualização utilizaremos uma tabela cuja as colunas representam as retas.

D	D	D	A
A	A	B	C
B	C	C	B

Representando o tetraedro na Figura 1.11.

Figura 1.11:



Fonte: Feito pelo Autor.

Dessa forma existem duas retas (faces do tetraedro) distintas nas quais contêm os pontos A e B, ou seja, não verifica o Axioma 4. Lembrando que pontos e retas são termos não definidos, portanto, podem ser representados por formas diferentes das conhecidas na geometria Euclidiana. O que fica de exemplo para este tipo de situação[3].

Axioma 5: Todas as retas se intersectam.

Prova.

Dado um modelo constituido a partir de nove pontos

$$(A_1, A_2, ..., A_9)$$

consideremos as retas, como as colunas da tabela abaixo.

$$\begin{array}{cccccccccccc} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & A_2 & A_3 & A_3 & A_3 & A_4 & A_7 \\ A_2 & A_4 & A_5 & A_6 & A_5 & A_4 & A_6 & A_4 & A_5 & A_6 & A_5 & A_8 \\ A_3 & A_7 & A_9 & A_8 & A_8 & A_9 & A_7 & A_8 & A_7 & A_9 & A_6 & A_9 \end{array}$$

Podemos verificar que a reta formada pelos pontos A_1, A_2 e A_3 e a reta formada a partir de A_4, A_5 e A_6 não tem nenhum ponto em comum, o que contradiz o Axioma 5[3]. Logo, como todos os Axiomas são independentes, temos que o sistema é indepedente.

Teorema 1.22 *Duas retas distintas intersectam exatamente em um ponto.*
Prova. *Pelo Axioma 5, duas retas possuem pelo menos um ponto de interseção. Suponha que exista mais de um ponto de interseção, então deve existir pelo menos dois pontos de interseção, ou seja, existem duas retas distintas que possuem esses dois pontos distintos. O que é uma contradição ao Axioma 4. Logo, a interseção possui apenas um ponto.[8]*

Teorema 1.23 *Existem exatamente 7 pontos e 7 retas.*
Prova. *Pelos Axiomas 1 e 2 sabemos que existe uma reta l_1, na qual possui três pontos, A, B e C. Pelo Axioma 3, existe um quarto ponto D, na qual este não pertence a reta l_1. Por outro lado, pelo Axioma 4, existe uma única reta que incide pelos pontos D e A, D e B, e D e C, na qual a chamaremos de l_2, l_3 e l_4, respectivamente. Como, cada uma dessas retas é distinta de l_1 e todas essas três retas possuem D, então, pelo Axioma 2, cada uma delas contêm um terceiro ponto.*

Supondo que l_2 contenha B ou C, isso seria contra o Axioma 4, dado que l_1 já é uma reta que contém os pares de pontos A e B, e A e C. Dessa forma, o terceiro ponto em l_2 gerado pelo Axioma 1 é um novo ponto, na qual chamaremos de E. Assim, l_2 é distinto das retas l_3 e l_4, dado que elas incidem sobre pontos diferentes. De maneira similar, temos que l_3 e l_4 contêm um terceiro ponto cada uma, sendo estes distintos dos demais cinco pontos citados, assim, o serão denominados de F e G respectivamente, caso contrário, poderia haver uma contradição com o Axioma 4, por existir duas retas distintas incidindo sobre um mesmo par de pontos. Assim, obtemos até o momento um total de sete pontos e quatro retas. Além disso, todas as retas construídas possuem interseção entre si.

Prosseguindo, pelo Axioma 4 sabemos que existe outra reta l_5 que contém os pontos A e F. Esta reta contém um terceiro ponto, garantido pelo Axioma 2. Além disso, l_5 não pode ser paralelo a l_4, pois, l_5 não pode conter os pontos D ou C, já que o mesmo seria contrário ao Axioma 4, dado que já existe uma reta contendo A e D e uma reta contendo

A e C. Portanto, l_5 deve conter o ponto G. Da mesma forma, existe uma reta l_6 que contém B e E, e uma reta l_7 contendo C e F, respectivamente. Sendo que, a única forma de não contradizer o Axioma 5 é G pertencendo a l_6 e E pertencente a l_7, respectivamente. Dessa forma, existem sete pontos, e sete retas. O mesmo pode ser verificado pelo modelo da Figura 1.8.

Iremos provar agora, que existem apenas sete pontos e sete retas. Suponha que existe outro ponto H, então deve existir uma reta l_8 tal que H e A estejam contidos na reta. Essa reta precisa possuir um terceiro ponto, mas, não poderá ser nenhum dos outros oito pontos apresentados, pois, seria contra o Axioma 4. Iremos chamar o terceiro ponto de I. Entretanto, dessa forma l_8 é paralelo a l_3, o que contradiz o Axioma 5. Logo, existe exatamente sete pontos. Assim como, se existir outra reta nessa geometria, haverá contradição com o Axioma 4 ou será necessário outro ponto. Logo, existem somente sete retas.[8]

Capítulo 2

O estudo de Geometria no Ensino Básico

As quatros principais áreas das matemática são: Álgebra, Aritmética, Geometria e Estatística, sendo que todas essas são contempladas no ensino básico, entretanto, é perceptível a negligência no ensino de geometria nas escolas, inclusive disversos autores como Pavanello[2] reforçam que o ensino de matemática é majoritariamente sobre aritmética nos anos iniciais e sobre álgebra nos anos finais do fundamental.

Outro aspecto também citado por Pavanello[2] é sobre a questão da falta de segurança por parte dos professores para o ensino de geometria, onde muitos procuravam evitar esse tipo de assunto, já que os mesmos se sentiam inseguros, justamente devido a falta de capacitação profissional dos professores para essa matéria de maneira satisfatória, o que por consequência na época resultava em diversas escolas públicas não possuindo o ensino de geometria, já que não possuiam profissionais qualificados e interessados para tal, e diferente dos dias atuais onde existe a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) os professores possuiam liberdade para escolher quais conteúdos ministrar, baseado na "necessidade do ambiente". Como consequência para tal vemos situações que ocorrem até nos dias atuais, nas quais os alunos muitas vezes não conseguem associar situações problemas simples ao uso de certos Teoremas, como o uso do Teorema de Pitágoras por exemplo, realizando apenas exercícios simples de maneira mecânica, sem associar o raciocínio intrínseco a situação.

Pensando nessa situação é notório a necessidade de uma olhar diferente para o ensino de geometria nas escolas, e uma forma de implementar uma abordagem diferente é através do ensino de geometrias não-euclidianas, pois, para o ensino do mesmo é necessário trabalhar principalmente os conceitos básicos da geometria, como: o que são retas paralelas, se o quinto postulado de Euclides é sempre valido, ou não, o que para a geometria tradicional é uma verdade, entretanto, não ocorre na geometria eliptica por exemplo. Sendo que estes questionamentos podem não apenas ampliar as noções básicas do que é geometria para o educando, como também podem servir para noção de aplicações de geometria na prática, como a questão de trajetórias de aviões utilizando geometria esférica, ou tráfego de dados utilizando geometria finita.

Além disso, a própria BNCC (Base Nacional Comum Curricular) em nenhum momento impede o uso de geometrias não-euclidianas, pois, a mesma apenas indica quais habilidades devem ser desenvoldidas para a formação integral do estudante, a mesma cita as habilidades como: “As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares”[10]. Logo, não é necessário o uso restrito da geometria tradicional, desde que a geometria selecionada em questão possa desenvolver a habilidade desejada.

Capítulo 3

Proposta de aula

Nesse capítulo serão apresentados algumas propostas de atividade para alunos do ensino médio, com o intuito de desenvolver uma melhor compreensão sobre os conceitos básicos de geometria através do uso de geometrias finitas. Inicialmente as Atividades 1 e 2 envolvem o uso do Geoplano, procurando explorar a criação de modelos que representem as geometrias trabalhadas, sendo estas a geometria de quatro pontos e a geometria de Fano, além de expandir certos conceitos para além da geometria tradicional, como conceito de retas paralelas, e lugares geométricos como: Circunferência e Mediatriz. Posteriormente na Atividade 3 será trabalhado o conceito de espaço projetivo através do uso do jogo Dobble, fazendo com que os alunos possam associar o comportamento do espaço projetivo, com o comportamento do jogo, e assim possam desenvolver o seu próprio jogo Dobble em um espaço projetivo de ordem menor. Tais propostas foram inspiradas na troca de experiências durante o CNMAC (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional) de 2023, assim como, nas perguntas e questionamentos feitos pelos participantes durante o minicurso relacionado a geometria finita que apliquei durante a V Semana da Matemática.

Além disso, serão trabalhados no decorrer das atividades as seguintes habilidades segundo a BNCC[10]:

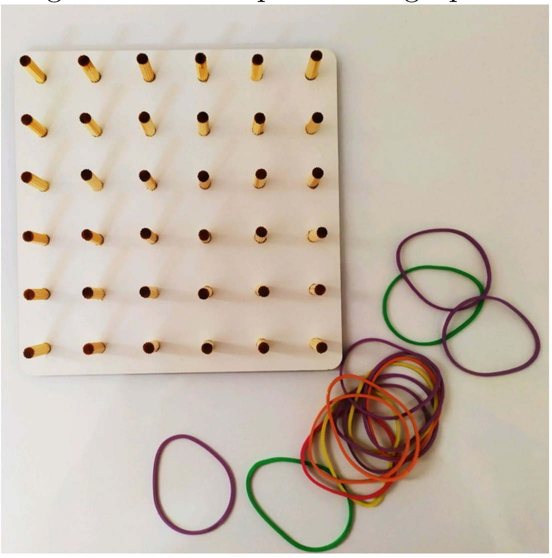
- EF01MA14 Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.

- EM13MAT103 Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

3.1 Atividade 1

Nessa atividade será utilizado o Geoplano, sendo este um recurso didático-pedagógico que foi construído por volta de 1960, pelo professor Caleb Gattegno na Inglaterra. Esse recurso é constituído por uma placa de madeira e pregos que são dispostos formando uma malha, fazendo parte também da placa, elásticos ou linhas de preferência coloridas, na qual podem ser prendidos aos pregos para realização da formação de figuras geométricas. Vale ressaltar que é preciso cuidado na construção de um geoplano, para que os pregos fiquem a mesma distância, tanto na horizontal quanto na vertical.

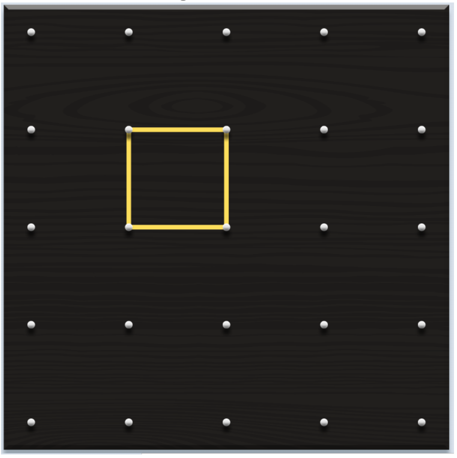
Figura 3.1: Exemplo de um geoplano.



Fonte: https://www.elo7.com.br/geoplano-jogo-de-elasticos/dp/1728D5F

Utilizando o geoplano serão marcados 4 pontos de forma que se os mesmos forem interligados formem um quadrado, em seguida será solicitado que os alunos com um elástico formem uma figura que contenha esses quatro pontos. Esperamos que os alunos formem um quadrado, pois, é uma figura intuitiva de ser formada para os mesmos, como é possível ver na Figura 3.2.

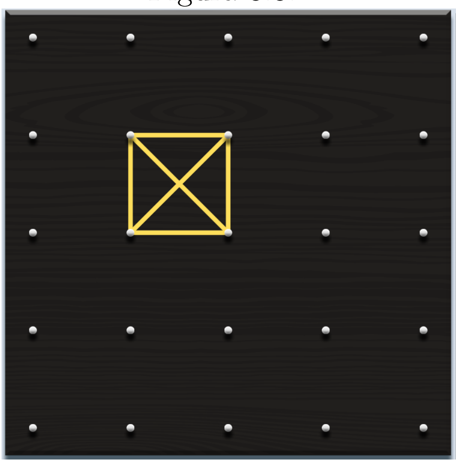
Figura 3.2:



Fonte: Feito pelo Autor.

Em seguida, utilizando o próprio conceito intuitivo dos alunos sobre o que é uma reta, os mesmos serão questionados sobre quantas retas existem naquela figura, esperamos que os educandos sinalizem que existem quatro retas. Prosseguindo, os alunos serão questionados se não é possível formar mais nenhuma reta diferente das atuais com os mesmos quatro pontos destacados no início. Esperamos que alguns alunos pensem que só existam aquelas quatro retas elencadas anteriormente, por imaginar que os pontos precisam formar uma figura fechada, porém, ao mesmo tempo é esperado que muitos alunos percebam que é possível fazer mais duas retas com as diagonais desse quadrado, o que totalizará 6 retas. O que é possível observar na Figura 3.3.

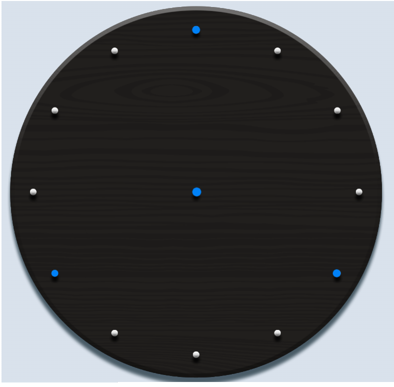
Figura 3.3:



Fonte: Feito pelo Autor.

Em seguida os alunos serão novamente questionados se não é possível formar mais retas, o que é esperado que os mesmos digam que não, o que de fato é verdade, o que por exaustão acaba servindo como prova do Teorema 1.14. Prosseguindo a atividade serão dispostos novamente quatro pontos no geoplano, dessa vez conforme a Figura 3.4.

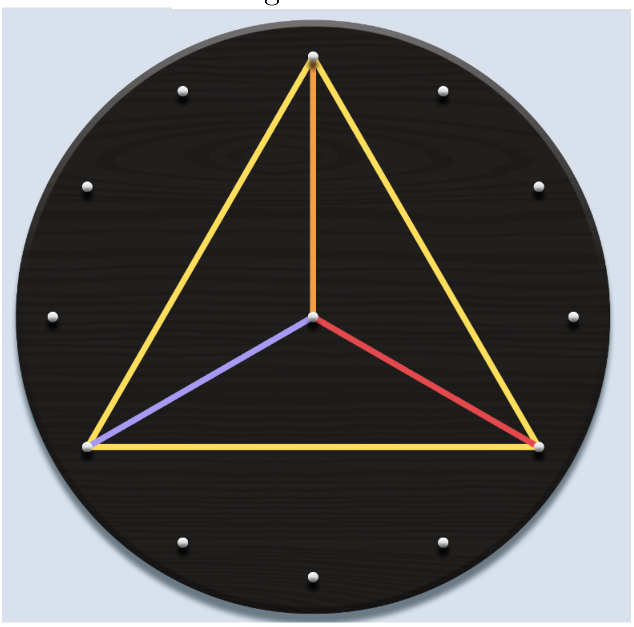
Figura 3.4:



Fonte: Feito pelo Autor.

Dando continuidade, será solicitado que os alunos formem uma figura composta por esses 4 pontos, na qual esperamos os seguintes resultados, Figura 3.5:

Figura 3.5:



Fonte: Feito pelo Autor.

É esperado a construção de apenas um triângulo por parte de alguns alunos, pois, é uma figura na qual os mesmos estão mais habituados, entretanto, espera-se que em grande parte os alunos façam a Figura 3.5, pois, esta será o resultado obtido interligando todos os pontos. Dessa forma, os educandos serão questionados a respeito da quantidade de pontos que aquela figura possui, e quantas retas são possíveis de se obter com aqueles pontos, espera-se que falem 4 pontos e um total de 6 retas. Na sequência questionaremos os alunos sobre a existência de similaridades entre os dois modelos que os mesmos fizeram, e esperamos que os mesmos digam que ambos os modelos possuem 4 pontos e 6 retas. Dessa forma, será argumentado que eles estão corretos, e isso é o que chamamos de modelos isomórficos, o que na prática nada mais é do que dois modelos distintos, nas quais atendem as mesmas condições.

Em um momento posterior será introduzido aos alunos o conceito de paralelismo, em primeira instância serão relembrados da questão intuitiva por trás do paralelismo da geometria euclidiana, na qual duas retas paralelas jamais se "cruzam", o que nesse caso o conceito será expandido para que duas retas paralelas não possuem interseção, ou seja, não possuem nenhum ponto em comum. Em seguida ao novo conceito de retas paralelas estabelecido, o mesmo será formalizado no quadro com os alunos o que será considerado como retas paralelas, tal qual, o que serão retas concorrentes. Assim como, podemos observar abaixo:

- Duas retas são paralelas quando não existem pontos de interseção.
- Duas retas são concorrentes quando existe exatamente um ponto em comum entre elas (Consequência do item anterior).

A partir disso, e dos modelos vistos anteriormente será solicitado que os alunos indiquem quantas retas paralelas existem tanto para o modelo observado na Figura 3.3, quanto em seguida para o modelo observado na Figura 3.5.

Esperamos que os alunos consigam detectar pelo menos que utilizando o modelo quadrado (Figura 3.3), que existem pelo menos 2 pares de retas paralelas, mas que devido ao conhecimento intuitivo sobre paralelismo advindo da geometria Euclidiana, eles não percebam que as retas diagonais do quadrado também são paralelas. Em um momento seguinte, será retomada a questão, após a análise das respostas será feita uma releitura da questão, de forma a dar ênfase que para as retas serem paralelas, elas não podem possuir pontos em comum, o que nessa situação, devido a existir apenas 4 pontos, as diagonais por consequência também não possuem pontos em comum, de maneira a ficar mais simples a visualização nomeiaremos os 4 pontos por A, B, C e D, e suas retas formadas por seus pares de pontos, sendo estas AB, AC, AD, BC, BD e CD, jeito na qual é possível analisar facilmente a interseção das retas:

$$AB \cap AC = A$$
$$AB \cap AD = A$$
$$AB \cap BC = B$$
$$AB \cap BD = B$$
$$AC \cap AD = A$$
$$AC \cap BC = C$$
e
$$AC \cap CD = C$$
$$AD \cap BD = D$$
$$AD \cap CD = D\ .$$

Por consequência temos que as AB e DC, AC e DB, AD e BC não possuem pontos em comum, ou seja, todas são pares de retas parelelas, incluindo as retas diagonais, o que na geometria euclidiana não ocorreria, pois, existiria um ponto de interseção entre essas retas, fato na qual não acontece nessa situação. Dando prosseguimento os alunos serão relembrados do modelo isomórfico visto anteriomente dessa geometria, de forma que os mesmos serão questionados de forma que se os modelos são isomórficos então o número de retas paralelas também seriam as mesmas, assim dessa forma, será solicitado que os mesmos identifiquem quais seriam essas retas, nomeando dessa vez os pontos de E, F, G e H, obtendo assim as retas EF, EG, EH, FG, FH, GH, de forma na qual é perceptível notar que os pares de retas EF e GH, EG e FH, EH e FG não possuem pontos em comum, o que assim como visto no modelo anterior, resulta em um total de três pares de retas paralelas. Feito isso será apresentado formalmente a situação como uma geometria não euclidiana, nesse caso a geometria dos quatro pontos, assim como apresentado de forma simples os Axiomas que a compõem, sendo estes:

- Axioma 1: Existem exatamente 4 pontos distintos.
- Axioma 2: Dados dois pontos diferentes, existe exatamente uma reta que passa pelos dois.
- Axioma 3: Cada reta tem apenas dois pontos distintos.

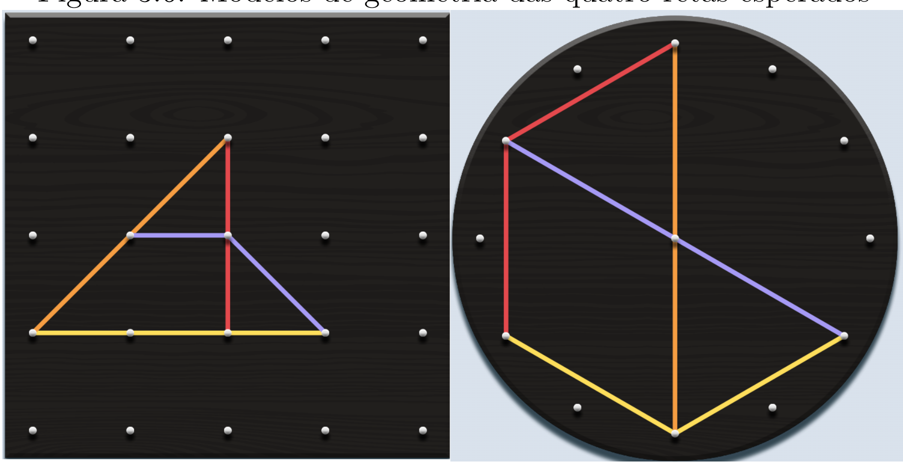
Dando sequência pensando na questão da dualidade os alunos seriam questionados em relação a dualidade do caso, mesmo sem entrar no assunto de maneira formal, mas sim apresentando a ideia de que é interessante analisar o que acontece quando trocamos os termos pontos por retas nos Axiomas de uma geometria, o que gera um dual, o que nesse caso o dual da geometria de quatro pontos, será a geometria das quatro retas. Em seguida será solicitado que os alunos façam o Axiomas da geometria das quatro retas, obtendo o seguinte resultado:

- Axioma 1: Existem exatamente quatro retas distintas.
- Axioma 2: Dadas duas retas diferentes, existe exatamente um ponto que passa por elas.
- Axioma 3: Cada ponto possui duas retas que passam por ele.

É esperado que os alunos consigam escrever o dual dos Axiomas 1 e 2 sem dificuldades, o único problema esperado é sobre o Axioma 3 já que ele envolve a questão da incidencia das retas sobre o ponto, o que é previsto gerar certa confusão, caso necessário o professor poderá fazer em conjunto com os alunos o Axioma 3 no quadro. Continuando será solicitado que os educandos montem um modelo que satisfaça todos os Axiomas da geometria das quatro retas, procurando associar que eles já haviam feito algo do tipo de forma direcionada para a geometria dos quatro pontos. Em vista da limitação do geoplano, será necessário a generalização com os alunos do conceito do que é uma reta, porém, sem violar o conceito usual do mesmo, que é uma figura composta por pontos, nesse caso não necessariamente formando um ângulo de 180°, o que ocorre na geometria Euclidiana.

Assim, esperamos que os alunos possam obter os seguintes resultados:

Figura 3.6: Modelos de geometria das quatro retas esperados



Fonte: Feito pelo Autor.

Conforme pode ser analisado na Figura 3.6, notamos que ambos os modelos possuem peculiaridades em relação a geometria euclidiana, como no caso do geoplano da esquerda, a reta amarela em um primeiro momento aparenta possuir quatro pontos, em divergência das outras retas, entretanto, um destes não estará sendo considerado como parte dos pontos que compõem a reta, ou seja, todas as retas possuem a mesma quantidade de pontos nessa geometria que no caso é três. Assim como, também pode ser observado novamente no geoplano da esquerda, que a linha roxa não forma um conjunto de pontos formando um ângulo de 180°, entretanto, isso não é um fator necessário na geometria finita, logo, a linha roxa é uma reta do ponto de vista dessa geometria, conceito que também foi aplicado no geoplano da direita para as retas vermelha e amarela, como pode ser observado. É esperado que alunos apresentem relutância em aceitar a ideia de que uma reta não precisa ter seus pontos necessariamente alinhados, formando um ângulo de 180°, pois, esta é uma noção que eles carregam como uma verdade, tal qual também é esperada relutância em aceitar que não é necessária a utilização de todos os pontos na qual a reta passa, o que é observado no geoplano da esquerda, o que inclusive, caso seja considerado das quatro pontos na reta amarela desse modelo, gera uma inconsistência no Axioma 2 da geometria das quatro retas, onde todos os pontos pertencem a duas retas distintas.

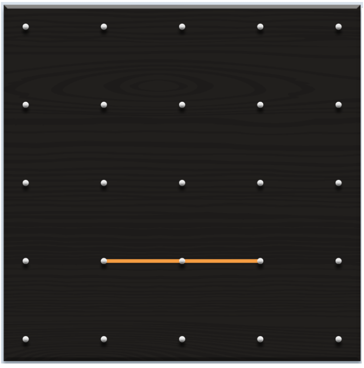
Para a próxima atividade os alunos serão apresentados a última geometria finita que eles irão trabalhar, que neste caso será a geometria de sete pontos. Em primeira instância será escrito no quadro todos os Axiomas que compõem esta geometria, sendo estes:

- Axioma 1: Existe pelo menos uma reta.
- Axioma 2: Cada reta possui exatamente 3 pontos distintos.
- Axioma 3: Nem todos os pontos estão sobre a mesma reta.
- Axioma 4: Para cada dois pontos distintos, existem uma única reta que contém ambos.
- Axioma 5: Todas as retas se intersectam.

A atividade terá a proposta simples de montar algum modelo que represente a geometria de sete pontos que foi apresentada. Por ser uma geometria mais condições, o modelo será feito com o auxílio do professor, em conjunto com as ideias da turma como um todo, procurando sempre instigar para os pontos mais importantes, caso os alunos travem durante a tarefa.

Em um primeiro momento os alunos serão chamados a atenção para o Axioma 1, já que o mesmo afirma que existe pelo menos uma reta, ou seja, pelo menos uma reta deve existir, em seguida, a atenção será passada para o Axioma 2, já que este afirma que cada reta possui três pontos distintos, ou seja, a primeira reta precisa ter três pontos distintos, dessa forma esperamos o resultado observado na Figura 3.7.

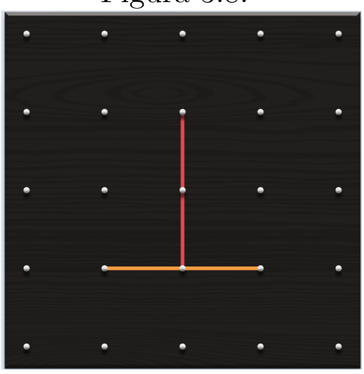
Figura 3.7:



Fonte: Feito pelo Autor.

Em seguida, analisando o Axioma 3, que afirma que nem todos os pontos estão sobre a mesma reta, indicando que existe algum ponto fora dessa reta, entretanto, o Axioma 4 afirma que dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa por esses dois pontos, ou seja, obtemos outra reta passando por esses dois pontos, reta na qual possuirá três pontos devido ao Axioma 2, representada pela cor vermelha. Obtendo assim, o seguinte resultado:

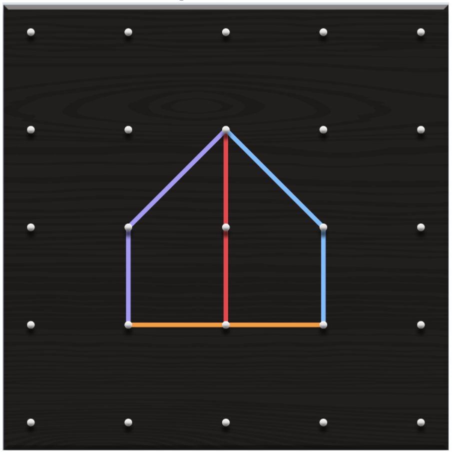
Figura 3.8:



Fonte: Feito pelo Autor.

Dando sequência, como pelo Axioma 2 dados dois pontos distintos, existe uma reta que passa por eles, e pelo Axioma 3 todas as retas possuem três pontos, obtemos mais duas retas, que podemos observar nas cores azul e roxo na Figura 3.9, obtendo o seguinte resultado:

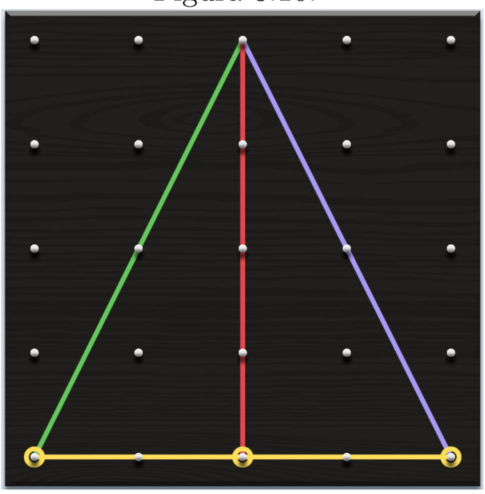
Figura 3.9:



Fonte: Feito pelo Autor.

Prosseguindo é observado que para dar continuidade no modelo utilizando essa forma, muita retas irão ficar sobrepostas, de forma que o modelo não fique bem representado, portando serão feitas algumas modificações, tais quais, a mudança da reta laranja para baixo, assim como aumentar o seu tamanho, já que o mesmo não desrespeita nenhum dos Axiomas, assim como aumentar o tamanho da reta vermelha, o que resulta no modelo abaixo, Figura 3.10:

Figura 3.10:

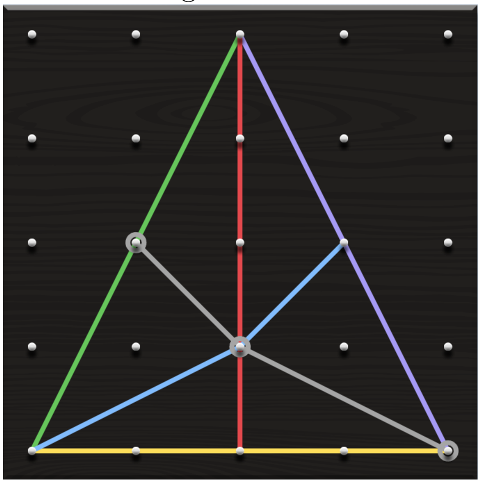


Fonte: Feito pelo Autor.

Note também, como é possível observar pela reta amarela, que selecionando o elastico utilizado, é possível analisar quais são os pontos que estarão sendo considerados na reta.

Dando continuidade, ajustado o modelo, será observado que devido aos Axiomas 3 e 4 é possível obter mais 2 retas, desta vez serão repesentadas pelas cores azul e cinza, como podemos analisar pela Figura 3.11.

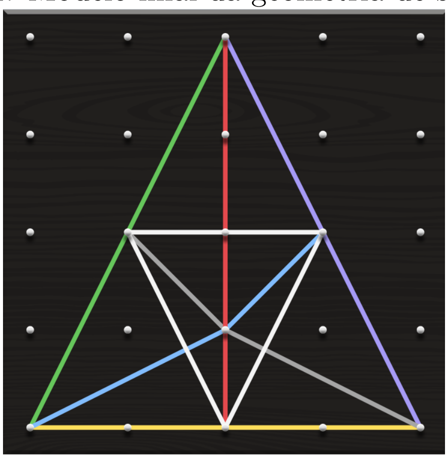
Figura 3.11:



Fonte: Feito pelo Autor.

Prosseguindo, pode ser observado que existem 3 pontos nas quais, dois a dois, não possuem retas que pertençam a ambos simultâneamente, o que contradiz o Axioma 4, o que em conjunto com o Axioma 3 que exige que todas as retas precisam possuir exatamente três pontos distintos, será obtido o seguinte resultado da Figura 3.12.

Figura 3.12: Modelo final da geometria de sete pontos.



Fonte: Feito pelo Autor.

Reforçando com os alunos nesse momento, que apesar da intuição dos mesmos relacionar que naquele caso do elastico branco existam três retas distintas que o formam, nesse caso existe apenas uma reta, já que nesta geometria uma reta deve ser constituida de três pontos distintos, o que nesse caso é previsto dos alunos fiquem com muita estranheza, mas, reforçando os Axiomas, esperasse que os mesmos possam compreender, mesmo que com certa relutância.

3.2 Atividade 2

Essa atividade será voltada a explorar alguns fatos curiosos que podem aparecer em geometrias não-euclidianas:

Primeiramente serão estabelecidos alguns parâmetros, tais quais:

- Nessa geometria um caminho S de um ponto A até um ponto B será mínimo se não existe outro caminho de A até B que possua menos segmentos de reta que S, sendo este chamado de "salto".
- Toda reta é constituída por apenas dois pontos.

As adaptações serão necessárias, pois, iremos trabalhar com a geometria de quatro pontos nessa atividade, e para tal é necessária uma unidade métrica de distância, tornando-se necessário o item 1, e o item 2 será apenas para relembrar os alunos que nessa geometria as retas são constituídas por apenas dois pontos, diferente da geometria sete pontos por exemplo, onde as retas são constituídas a partir de três pontos.

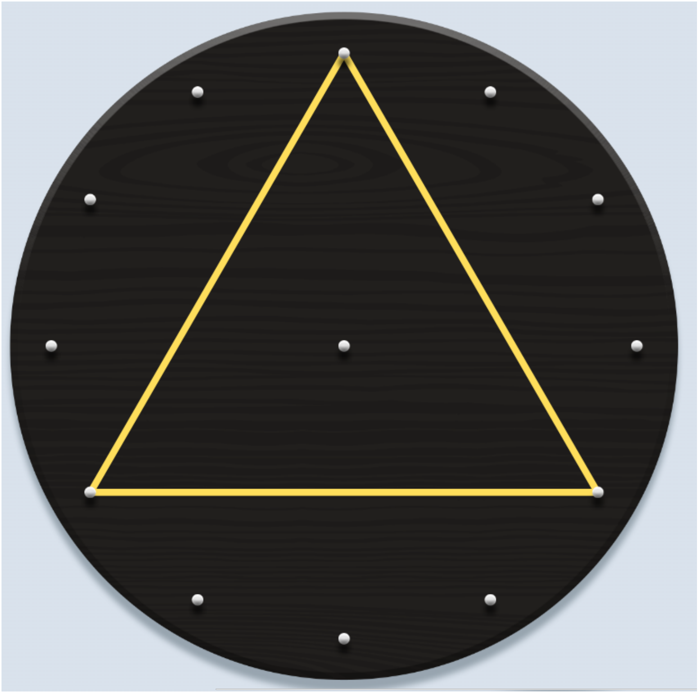
Após estabelecidos os parâmetros, os alunos serão relembrados sobre o conceito de lugar geométrico, que nesse caso pode ser definido como um conjunto de pontos que gozam de determinada propriedade. Dessa forma, serão trabalhados dois lugares geométricos, a circunferência e a mediatriz.

Em um primeiro momento será trabalhada a circunferência, colocando como definição que:

A circunferência é o lugar geométrico na qual é formado pelo conjunto de todos os pontos igualmente distantes de um ponto fixo desse plano, sendo este ponto fixo chamado de centro, e a distância do centro até qualquer ponto da circunferência é chamada de raio.

Para tal usaremos os modelos da geometria de quatro pontos, colocando o centro como o ponto central do modelo ao estilo tetraedro é esperado obter o seguinte resultado como observado na Figura 3.13.

Figura 3.13: Circunferência na geometria de quatro pontos.



Fonte: Feito pelo Autor.

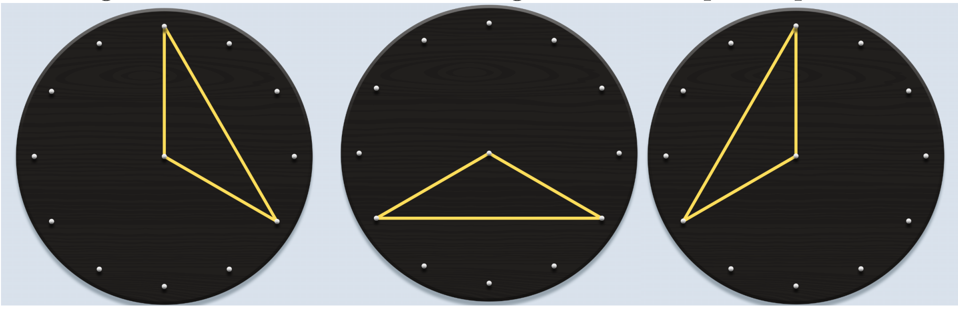
O que de fato seria uma circunferência segundo a definição, pois, do centro ao ponto, para todos os pontos, existe uma distância de um salto. Como consequência, nessa geometria a nossa circunferência acaba ficando com um formato triangular, caso os pontos que a compõem sejam interligados formando retas, o que nesse caso não existe problema, pois as retas nessa geometria são compostas por apenas dois pontos, ao invés de infitos como é observado na geometria euclidiana.

Prosseguindo com a atividade os alunos serão questionados quantas circunferências é possível criar nessa geometria. Esperamos que os alunos respondam que é possível a criação de até 4 circunferências distintas, relacionando que existem quatro pontos, dessa forma, cada circunferência teria um ponto distinto como centro.

Pensando nisso, em seguida será solicitado aos educandos que formem as outras três circunferências restantes possíveis. Em um primeiro momento é esperado certa relutância dos alunos na criação dos mesmos, pois, diferente do caso observado na Figura 3.13 onde o centro está inscrito na figura, nesses casos o centro ficará externo a circunferência formada.

Após o entendimento que o centro da circunferência não necessariamente precisa estar interno a figura formada, esperamos que os alunos consigam obter o resultado observado na Figura 3.14.

Figura 3.14: Circunferências na geometria de quatro pontos.



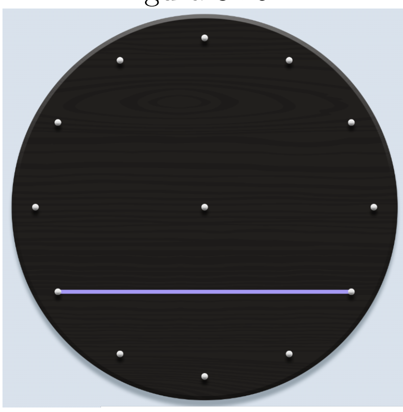
Fonte: Feito pelo Autor.

Dando continuidade a atividade, neste momento será trabalhado o conceito de mediatriz, colocando como definição que:

Dados os pontos A e B distintos, a mediatriz é o conjunto de pontos que equidista de A e B.

Dessa forma, serão selecionados dois pontos A e B no geoplano, formando uma reta r, que esta representada como o elásticos roxo, como pode ser observado na Figura 3.15.

Figura 3.15:



Fonte: Feito pelo Autor.

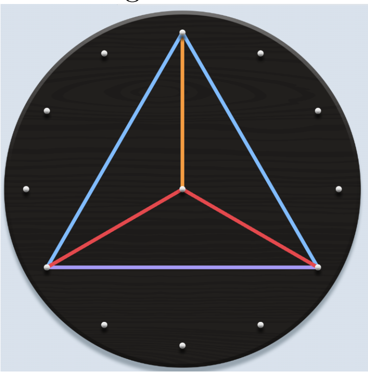
Continuando, será solicitado aos alunos que façam a figura formada pela mediatriz em relação aos dois pontos pertencentes aquela reta. Dessa forma, esperamos que os alunos consigam obter o resultado obtido na Figura 3.16.

Figura 3.16: Mediatriz na geometria de quatro pontos.

Fonte: Feito pelo Autor.

O que de fato é verdade, pois, quaisquer pontos pertencentes a reta laranja, equidistam dos pontos da reta roxa, pela distância de um salto, o que pode ser observado na Figura 3.17, representando as distâncias, as retas de cores vermelha e azul.

Figura 3.17:



Fonte: Feito pelo Autor.

3.3 Atividade 3

Esta atividade irá envolver o jogo chamado Dobble, em um primeiro momento, iremos apresentar o jogo, assim como, seu funcionamento e contexto, em seguida iremos introduzir o conceito de espaço projetivo aos alunos, visando associar o jogo Dobble ao conceito de espaço projetivo. Sendo essa atividade baseada no trabalhado da autora MACIEL[9].

3.3.1 O jogo Dobble

Figura 3.18: figura ilustrativa do jogo Dobble

Fonte: https://www.casadaeducacao.com.br/-sc-jogo-dobble-animaizinhos-em-cx-cartonado-pr-5812-gl00016-p5587

Dobble, originalmente, é um jogo que possui 57 símbolos diferentes que são distribuídos em um total de 55 cartas, sendo que cada carta possuirá 8 símbolos, de forma que a cada par de cartas, elas possuam precisamente um símbolo em comum entre elas. O jogo possui 5 formas de partida, mas, o objetivo de todas consiste em determinar o símbolo em comum em pares de cartas (Figura 3.19) o mais rápido possível.

Figura 3.19: Um par de cartas do jogo Dobble

Fonte: https://jogoseblocos.com.br/jogo-dobble/

Um método de jogo é:

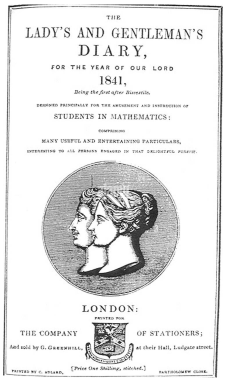
- Preparação: Serão distribuidas as cartas de forma igual para os jogadores, exceto uma carta. Colocar a carta restante no centro da mesa virada para cima. Cada jogador irá embaralhar suas próprias cartas, formando uma pilha e coloca à sua frente com as cartas viradas para baixo.

- Objetivo: Ser o primeiro jogador a não possuir nenhuma carta.
- Como jogar? O jogo começará com os jogadores virando a carta no topo da sua pilha com a face para cima. Cada jogador deve descartar sua carta o mais rápido possível, devendo a colocar sobre a carta que está no centro da mesa. Para tal, é necessário dizer o nome do símbolo em comum entra a carta que ele pegou e a carta no centro da mesa, após descartada o jogador deve virar sua próxima carta no topo da pilha e novamente tentar descarta-lá. Os jogadores precisarão de destreza, pois, a carta que está o centro mudará toda vez que um jogador descartar uma de suas cartas.
- O perdedor: O último jogador com cartas na pilha.

A história do Dobble começa na Inglaterra em meados de 1850. Na época a Inglaterra estava passando por uma espécie de renascimento matemático. Após um período de estagnação durante a era Georgiana, no reinado da rainha Vitória, houve o surgimento de diversos matemáticos brilhantes, como: George Boole, John Venn e Arthur Cayley.

Durante esse período o reverendo Kirkman enviou um quebra-cabeça para "The ladies and Gentleman's Diary"(Figura 3.20), uma revista anual de matemática recreativa que recebia conteúdo de matemáticos amadores e profissionais. A pergunta dizia: "quinze jovens numa escola andam três lado a lado durante sete dias consecutivos: é necessário organizá-las diariamente, de modo que duas não andem duas vezes lado a lado".

Figura 3.20: Revista The Ladies and Gentleman's Diary.


THE
LADY'S AND GENTLEMAN'S
DIARY,
FOR THE YEAR OF OUR LORD
1841,
Being the first after Bissextile.
DESIGNED PRINCIPALLY FOR THE AMUSEMENT AND INSTRUCTION OF
STUDENTS IN MATHEMATICS:
COMPRISING
MANY USEFUL AND ENTERTAINING PARTICULARS,
INTERESTING TO ALL PERSONS ENGAGED IN THAT DELIGHTFUL PURSUIT.

LONDON:
PRINTED FOR
THE COMPANY OF STATIONERS;
And sold by G. GREENHILL, at their Hall, Ludgate street.
PRINTED BY C. ADLARD, [*Price One Shilling, stitched.*] BARTHOLOMEW CLOSE.

Fonte: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086008000967

Em 1796, um jovem matemático Jacques Cottereau, inspirado pelo problema, resolveu fazer um modelo para criação de um "quebra-cabeça" que funcionasse para qualquer combinação e ser divertido. Assim, deu origem ao "jogo dos insetos": constituído a partir de 31 cartas com 6 imagens de insetos em cada carta e exatamente uma imagem comum a cada par de cartas aleatórias. Porém, esse jogo não foi divulgado e ficou durante 30 anos desconhecido, até que no ano de 2008, Denis Blanchot achou algumas cartas do "jogo dos insetos- Cottereau é pai da cunhada de Blanchout - e viu naquelas cartas uma oportunidade de um jogo divertido.

Assim, Blanchout trabalhou em diversos símbolos e combinações, além de vários testes e abordagens para o jogo, dessa forma foi lançado o Dobble na França, em 2009. Segundo dados de 2018, o mesmo ficou entre os top 10 jogos de cartas mais vendidos da Amazon, com mais de 12 milhões de cópias vendidas desde seu lançamento e mais de 500 mil vendidos por ano apenas nos EUA. Existem diversas versões com diferentes figuras, como desenhos animados, personagens históricos, futebol, filmes famosos, entre outros. Sendo que, nem todos possuem exatamente 55 cartas e 57 figuras, sendo 8 figuras por carta. Existem versões que apresentam uma quantidade menor de cartas e símbolos por cartas, com o intuito de serem jogados pelas crianças mais novas.

Figura 3.21: Versões do Dobble com temas diversos

Fonte:https://down-br.img.susercontent.com/file/sg-11134201-7rbl6-lqivumvza7a85e

Após introduzir o jogo aos alunos com base no texto visto anteriormente, os mesmos serão separados em grupos de até 8 pessoas e cada grupo irá receber um jogo Dobble, fazendo com que dessa forma os mesmos possam entender e se familiarizar com as regras e estilo do jogo.

Terminada a partida dos alunos, os mesmos serão questionados a respeito da possibilidade de criar outro jogo Dobble, dessa vez, com uma quantidade menor de peças, e caso sim, como isso seria possível. Esperamos que os alunos falem que é possível, entretanto, que não conseguem imaginar como realizar a criação do mesmo, a menos que fosse na tentativa e erro, o que poderia demandar muito tempo, e possivelmente não atingir o seu objetivo a depender do número de figuras por carta.

Pensando nisso, os alunos serão introduzidos ao conceito de espaço projetivo, sendo este:

Definição 3.1 *Dado um conjunto finito chamados de pontos e alguns de seus subconjuntos são chamados retas tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *Duas retas distintas se encontram em um único ponto*
2. *Dois pontos distintos definem uma única reta.*
3. *Existem pelo menos 4 pontos dos quais não há 3 em uma mesma reta.*

Teorema 3.2 *Todo espaço projetivo com n+1 pontos contidos em cada reta, onde n é um número primo, este plano terá* $n^2 + n + 1$ *pontos e* $n^2 + n + 1$ *retas. Sendo que, n será a ordem do espaço projetivo.*

Dessa forma, é possível associar um espaço projetivo de ordem 7, ao jogo Dobble. O que de fato acontecendo, subtituindo os termos “ponto” por “carta” e “reta” por “símbolo” na definição 3.1, obtemos:

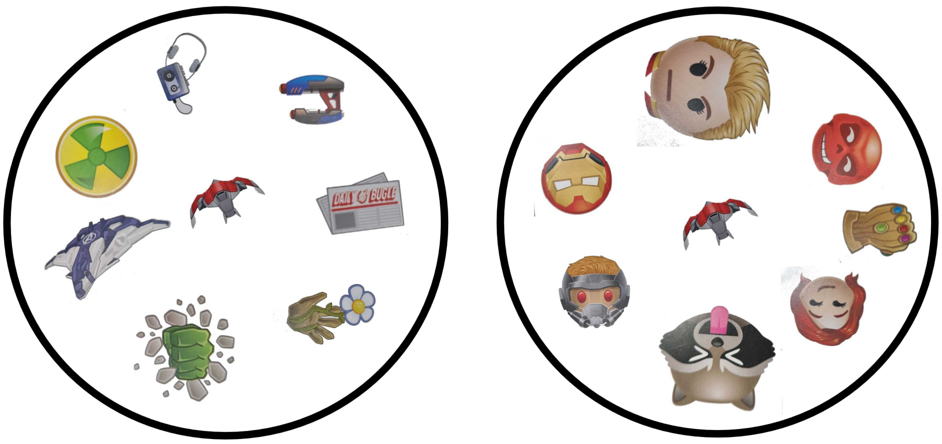
1. Dois símbolos diferentes “se encontram” precisamente em uma única carta;
2. Duas cartas distintas possuem apenas um símbolo em comum;
3. Existem pelo menos 4 cartas nas quais não existem 3 com o mesmo símbolo em comum.

Dessa forma, podemos observar que o Dobble nada mais é do que um modelo de plano projetivo finito, na qual as cartas ficam no lugar do pontos e os símbolos representam as retas. Entretanto, existe um fator curioso, que é: pensando no espaço projetivo de ordem 7 deveriam existir $7^2 + 7 + 1 = 57$ cartas ao todo, para satisfazer a ideia completa de um espaço projetivo. Porém, apesar do modelo não ser um espaço projetivo por completo, por seguir a mesma lógica, faz com que o jogo funcione de forma perfeita, resultando em apenas que algumas figuras estando presentes em menos de 8 cartas. O motivo de serem

55 cartas ao total ao invés de 57 é incerto, entretanto, é conjecturado que possa ser devido a alguma questão de fabricação, já que usualmente o padrão de um baralho é de 55 cartas ao todo.

Assim, após a explicação, solicitaremos que os educandos determinem quais duas cartas poderiam ser adicionadas para completar o jogo como espaço projetivo. Esperamos que os alunos não apresentem grandes dificuldades, apenas demandem certo tempo para contagem das figuras existentes em cada carta. Dessa forma obtendo um resultado semelhante a Figura 3.22.

Figura 3.22: Exemplo de cartas necessárias para completar o espaço projetivo.

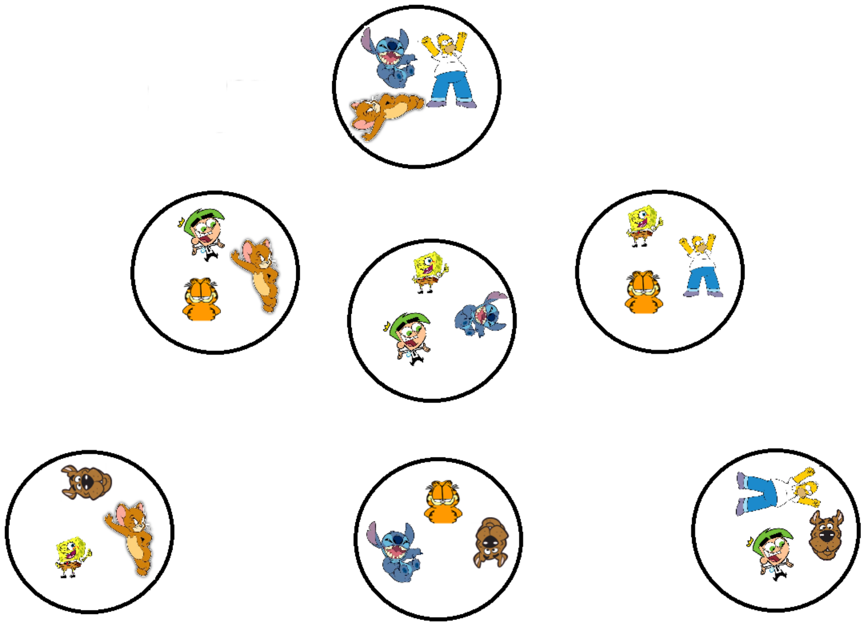


Fonte: Feito pelo Autor.

Para o caso da Figura 3.22 foi utilizado como base a versão Marvel do Dobble. Sendo que o resultado foi obtido através da análise das cartas, na qual 14 figuras apareciam em 7 cartas distintas e o avião vermelho em apenas 6 cartas distintas, e o restante das figuras apareciam em 8 cartas distintas.

Em um momento seguinte, solicitaremos que os alunos façam seus próprios jogos Dobble, dessa vez restrigindo ao espaço projetivo de ordem 2, para que não ocorra um número muito exorbitante de cartas e figuras, o que dificultaria o manuseio e visualização do mesmo. Como o tema das figuras ficará de livre escolha dos alunos, mostraremos a seguir um modelo do jogo com espaço projetivo de ordem 2 usando o tema desenhos animados Figura 3.23, como um dos exemplos que é esperado.

Figura 3.23: Jogo Dobble com espaço projetivo de ordem 2



Fonte: Elaborado pelo Autor

Note que o mesmo foi organizado utilizando o plano de Fano, pois, a geometria de 7 pontos é também um espaço projetivo, nesse caso em específico, um espaço projetivo de ordem 2, o que nesse caso organizado dessa forma facilita a distribuição de figuras para as cartas.

É esperado que os alunos consigam realizar a atividade sem grande dificuldades para ordem 2, já que o mesmo não possui um número exorbitante de figuras e cartas, apenas é provável uma dificuldade breve na distribuição das figuras para cada carta, já que os educandos possivelmente o farão por tentantiva e erro.

Capítulo 4

Conclusão e Trabalhos Futuros

O estudo de geometrias finitas pode alavancar discussão sobre quais são os princípios da matemática, de maneira que o estudante no ensino médio possa ampliar seu campo de visão e repensar a matemática como um campo científico de fato, pois, a ciência não é algo imutável, ela é uma coisa que está em constante processo de mudança e adaptações, o que no contexto da geometria finita nos mostra situações em que os princípios da geometria tradicional não são válidos, como nos casos onde duas retas que se cruzam não possuem pontos em comum, o que na geometria de quatro pontos por exemplo geram retas paralelas, algo impensável para a geometria euclidiana. Entretanto, vivemos em um mundo em que diversas situações são discretas, mesmo que muitas vezes para casos com quantidades muito elevadas, porém, entender e analisar casos menores, pode ajudar na compreensão e aplicação em casos com maiores quantidades, situação que pode ser vista para códigos de correção, e exemplos como esses podem servir para que o aluno possua uma noção de aplicabilidade e importância daquele estudo, o que pode ser um gatilho para o despertar do interesse do aluno para com os estudos de geometria e matemática em geral.

Quanto a futuras pesquisas é possível dar continuidade ao trabalho trazendo a aplicação do mesmo em sala de aula, dessa forma podendo analisar de maneira criteriosa quais foram as reais dificuldades dos alunos, os pontos que tiveram facilidade em compreender, assim como, se houve partes das atividades que não foi possível atingir o objetivo, ou que não tenha ficado claro para os alunos o que deveria ser feito, desse modo sendo realizado as adequações necessárias. Além disso, a geometria finita é uma área de pesquisa relativamente nova, portanto ainda não existem tantos trabalhos adaptados, principalmente com cunho pedagógico, com a chegada de novas ideias é possível a expansão do trabalho, aumentando a diversidade de atividades propostas.

Espero que esse trabalho possa incentivar outros professores a buscar maneiras diferentes de ensino, assim como, conteúdos e tópicos que vão além do que é exigido em sala de aula, pois, o mesmo serve de motivação tanto para o corpo docente, quanto para o corpo discente no âmbito escolar, o que resulta em maior bagagem acadêmica para o professor e em uma maior significância do mesmo para o aluno.

Referências Bibliográficas

[1] RODRIGUEZ, Linda. The Mind-Bending Math Behind Spot It!, the Beloved Family Card Game. Smithsonian MAGAZINE, 2018. Disponível em: <https://www.smithsonianmag.com/science-nature/math-card-game-spot-it-180970873/> Acesso em: 11 jul. 2024.

[2] PAVANELLO, Regina Maria. *O abandono de ensino de geometria: uma visão histórica*. 1989. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

[3] RAPOSO, Ana Paula Zangalho. *Geometrias finitas.* 2014. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Évora, Évora, 2014.

[4] SILVA, Maria Emília Resende. *Geometrias Finitas.* 2002. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Aveiro, Portugal. 2002.

[5] RÖßING, Conerlia. *Contributions to Pure and Applicable Galois Geometry*, Tese (Doutorado. Ph. D.) - Universiteit Gent, Bélgica, 2012.

[6] LIMA, Leandro Bezerra de. Contribuições em codificação no espaço projetivo e proposta de códigos quânticos de subespaços na grassmanniana. *Tese doutorado em Engenharia Elétrica*, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação Unicamp. Campinas, 2017.

[7] FREITAS, Tenivâm Lins. *Proposta de Inserção de um Modelo de Geometria Não Euclidiana na Educação Básica.* 2014. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Feira de Santana, 2014.

[8] WALLACE, Edward C.; WEST, Stephen F. *Roads to geometry.* Waveland Press, 2015.

[9] MACIEL, Milena Arantes Rocha. *Planos projetivos finitos e aplicações em jogos, grafos, designs e códigos.* 2023. Monografia (Graduação) - Universidade Federal De Juiz De Fora, Juiz de Fora. 2023.

[10] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2023.

[11] SILVA, Dalmo Rodrigues da. *Geoplano: prática pedagógica matemática.* 2022. - Centro Universitário Do Planalto Central Apparecido Dos Santos. Gama, 2022.

[12] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON E.F. Gino Fano - Biography. 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fano/>. Acesso em: 3 set. 2024.